Addendum zu Analysis I

Version vom 17. Oktober 2006

Hier möchte ich die Inhalte zusammenstellen, welche in die Vorlesung Analysis I gehören, aber nicht in meinen Skripten 'Elemente der Analysis I, bzw. II' abgedeckt werden. Außerdem finden Sie hier zusätzliche Aufgaben.

0.2 Aufgaben

Aufgabe A 0.1: Zeigen Sie für natürliche Zahlen $n \geq k$

$$\sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Aufgabe A 0.2: Beweisen Sie für alle natürlichen Zahlen $m, n \geq 1$

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}(k+l) = \frac{1}{2}mn(m+n+2);$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}(k \cdot l) = \frac{1}{4}mn(m+1)(n+1).$

Aufgabe A 0.3: Beweisen Sie für jede natürliche Zahl $n \geq 1$

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1} = \frac{n}{2n+1};$

b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \frac{(n+1)^n}{n!}.$

0.4 Aufgaben

Aufgabe A 0.4: Zeigen Sie, dass es zu jeder reellen Zahl $x \geq 0$ eine reelle Zahl $y \geq 0$ gibt mit $y^2 = x$. (Diese Zahl y bezeichnet man mit $\sqrt{x}$.)

0.5 Mengen, Abzählbarkeit

Bisher habe ich mich bemüht, den Formalismus der Mengen möglichst sparsam einzusetzen. Ich wollte eben ganz am Anfang möglichst wenig abstrakte Notation verwenden. Auch hoffe ich, dass alles, was wir von diesem Formalismus bisher benötigten, aus der Schule bakannt ist. Jetzt müssen wir uns einige Eigenschaften von Teilmengen des Körpers $\mathbb{R}$ genauer anschauen. Dazu brauchen wir einige Notationen, die ich bisher vermieden habe, aber jetzt einführen möchte.

Intervalle: Seien $a \leq b \in \mathbb{R}$. Wir benutzen die folgenden Symbole:

$$\begin{array}{lcll}
[a,b] & := & \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} & \text{abgeschlossenes Intervall} \\
]a,b[& := & \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} & \text{offenes Intervall} \\
[a,b[& := & \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} & \text{halboffenes Intervall} \\
]a,b] & := & \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} & \quad -..- \\
[a,\infty[& := & \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\} & \text{uneigentliches Intervall} \\
]a,\infty[& := & \{x \in \mathbb{R} : a < x\} & \quad -..- \\
]-\infty,b] & := & \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} & \quad -..- \\
]-\infty,b[& := & \{x \in \mathbb{R} : x < b\} & \quad -..-
\end{array}$$

Enthaltenseins-Beziehungen: Die folgenden Symbole dürften zum größten Teil bekannt sein:

$$\begin{array}{lcl}
x \in M & & x \text{ gehört zur Menge } M \\
x \notin M & & x \text{ gehört nicht zur Menge } M \\
M \subset M' & & x \in M \quad \Longrightarrow \quad x \in M' \\
& & (M \text{ ist in } M' \text{ enthalten}) \\
M \cup M' & = & \{x : x \in M \text{ oder } x \in M'\} \\
& & (\text{Vereinigung der Mengen } M \text{ und } M') \\
M \cap M' & = & \{x : x \in M \text{ und } x \in M'\} \\
& & (\text{Durchschnitt der Mengen } M \text{ und } M') \\
M \setminus M' & = & \{x : x \in M \text{ und } x \notin M'\} \\
& & (\text{Differenz der Mengen } M \text{ und } M') \\
\emptyset & & \text{leere Menge}
\end{array}$$

Als Test dafür, ob Sie diese Notationen beherrschen, können Sie sich die folgenden Identitäten klar machen:

$$\begin{aligned}
[a,b] &=]-\infty,b] \cap [a,\infty[\\
&= \mathbb{R} \setminus (]-\infty,a[\cup]b,\infty)[) \\
[0,1[\cap]1,2] &= \emptyset \\
[0,1] \cap [1,2] &= \{1\} \\
[0,1] \cup [1,2] &= [0,2] \\
[0,1[\cup]1,2] &= [1,2] \setminus \{1\}
\end{aligned}$$

Für Durchschnitte und Vereinigungen gelten die Rechenregeln:

$$\begin{aligned}
M \cup (N \cup R) &= (M \cup N) \cup R \\
M \cap (N \cap R) &= (M \cap N) \cap R \\
M \cap (N \cup R) &= (M \cap N) \cup (M \cap R)
\end{aligned}$$

Genauso, wie man das Summenzeichen $\sum$ benützt, um Summen mit mehreren Summanden hinzuschreiben, gibt es auch eine Notation für Vereinigungen und Durchschnitte von mehreren Mengen:

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^{n} M_i &= M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n \\ \bigcap_{i=1}^{n} M_i &= M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n \end{aligned}$$

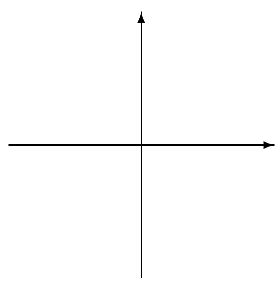
Kartesisches Produkt: Sind M und M' zwei Mengen, so ist ihr *kartesisches Produkt*

$$M \times M' = \{(x, x') :\ x \in M,\ x' \in M'\}.$$

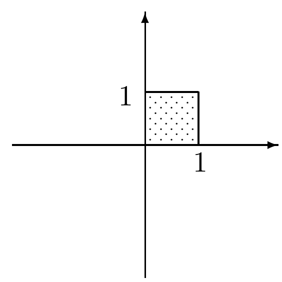
Das kartesische Produkt

$$\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) :\ x, y \in \mathbb{R}\}$$

kann man sich veranschaulichen als die Menge der Punkte in der Ebene mit den Koordinaten (x, y):



$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$



$[0, 1] \times [0, 1]$

Abbildungen: Es seien M und N Mengen. Eine Abbildung $f : M \to N$ ordnet jedem $x \in M$ ein Element $f(x) \in N$ zu.

Beispiel 0.6 *Sei $M := \mathbb{N}$ und $N := \mathbb{R}$. Eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ist eine* Folge (a_n), *nämlich $a_n = f(n), n \in \mathbb{N}$.*

Beispiel 0.7 *Sei $M := \mathbb{R}$ und $N := \{x \in \mathbb{R} :\ x \geq 0\}$. Dann ist $x \mapsto x^2$ eine Abbildung $M \to N$.*

Definition 0.7 *Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt*

injektiv,	*wenn gilt:*	$x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y)$,
surjektiv,	*wenn gilt:*	*zu jedem $y \in N$ gibt es ein $x \in M$ mit $y = f(x)$,*
bijektiv,	*wenn*	*sie injektiv und surjektiv ist.*

Bei einer surjektiven Abbildung $f : M \to N$ sagt man auch, f bildet M auf N ab.

Abbildungen kann man hintereinanderschalten: Sind $f : M \to N$ und $g : N \to R$ Abbildungen, so bezeichnet man mit

$$g \circ f : \begin{cases} M \to N \to R \\ x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x)) \end{cases}$$

die *zusammengesetzte* Abbildung.

Eine spezielle Abbildung ist die *Identität* oder *identische Abbildung* $id_M : M \to M$, die jedem Element $x \in M$ wieder das Element $id_M(x) := x$ zuordnet.

Ist $f : M \to N$ bijektiv, so gibt es die *Umkehrabbildung* $f^{-1} : N \to M$, die folgendermaßen definiert ist: Zu jedem $y \in N$ gibt es ein $x \in M$ mit $y = f(x)$, weil $f : M \to N$ nach Voraussetzung surjektiv ist. Dieses $x \in M$ mit $f(x) = y$ ist durch y eindeutig bestimmt, weil f injektiv ist. Man setzt $f^{-1}(y) := x$. Für diese Umkehrabbildung gilt

$$f^{-1} \circ f = id_M, \quad f \circ f^{-1} = id_N.$$

Ist $f : M \to N$ nicht surjektiv, dann gibt es keine Umkehrabbildung. Für jede Teilmenge $N_1 \subset N$ kann man trotzdem eine *Urbildmenge* $f^{-1}(N_1) \subset M$ definieren durch

$$f^{-1}(N_1) := \{x \in M : \ f(x) \in N_1\}.$$

Diese Urbildmenge $f^{-1}(N_1)$ kann leer sein, auch wenn $N_1 \neq \emptyset$ ist.

Mengen können verschieden groß sein. Endliche Mengen können verschiedene Anzahlen von Elementen enthalten. Aber das kann bei unendlichen Mengen auch passieren. Man sollte meinen, mehr als unendlich viele Elemente könne eine Menge nicht enthalten, aber es gibt eben verschiedene Sorten von Unendlichkeit. Einen kleinen Einblick in diese Problematik gibt der nächste Begriff, die „Abzählbarkeit“ .

Definition 0.8 *Eine Menge M heißt* abzählbar*, wenn eine* surjektive *Abbildung $f : \mathbb{N} \to M$ von $\mathbb{N}$ auf M existiert.*

Mit anderen Worten: die Elemente $x \in M$ einer abzählbaren Menge M können zu einer Folge $x_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$, angeordnet werden.

Beispiel 0.8 *Jede endliche (nicht-leere) Menge ist abzählbar.*

Beweis: Sei $M = \{x_1, ..., x_k\}$. Wir definieren eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to M$ durch

$$f(n) := \begin{cases} x_n & \text{für} \quad n = 1, ..., k\} \\ x_1 & \text{für} \quad n > k. \end{cases}$$

□

Beispiel 0.9 *Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist abzählbar.*

Beweis: $f(n) := n$.

Beispiel 0.10 *Jede nicht-leere Teilmenge der Menge $\mathbb{N}$ ist abzählbar.*

Beweis. Sei $M \subset \mathbb{N}$ eine Teilmenge. Wenn sie endlich ist, ist sie nach 1) abzählbar. Also können wir o.B.d.A. die Menge M unendlich annehmen. Folgendermaßen definieren wir rekursiv eine Abbildung von $\mathbb{N}$ auf M:

Es sei $m_1 \in M$ das kleinste Element der Menge. Wir setzen $f(1) := m_1$. Das nächstkleinere Element in M sei m_2. Wir setzen $f(2) := m_2$. So machen wir weiter. Wenn also $f(k) = m_k \in M$ schon definiert ist, so sei $m_{k+1} \in M$ das nächstkleinere Element und wir setzen $f(k+1) := m_{k+1}$. □

Beispiel 0.11 *Die Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar.*

Beweis. *Die Elemente der Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sind Paare (n_1, n_2) natürlicher Zahlen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. Wir können sie in einem nach rechts unten offenen rechteckigen Schema anordnen und entlang der punktierten Linie abzählen:*

$$\begin{array}{cccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\
(4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\
(5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\
(6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6)
\end{array}$$

$\square$

Beispiel 0.12 *Sei M abzählbar und $g : M \to N$ surjektiv. Dann ist auch N abzählbar.*

Beweis. *Nach Voraussetzung gibt es eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to M$. Dann ist auch die zusammengesetzte Abbildung $g \circ f : \mathbb{N} \to M \to N$ surjektiv.* $\square$

Beispiel 0.13 *Jede Teilmenge einer abzählbaren Menge ist wieder abzählbar.*

Beweis. *Sei M abzählbar und $M_1 \subset M$. Nach Voraussetzung gibt es eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to M$. Sei $N_1 \subset \mathbb{N}$ das Urbild $f^{-1}(M_1)$. Nach 3) ist N_1 abzählbar. Weil $f|N_1 : N_1 \to M_1$ surjektiv ist, ist nach 5) auch M_1 abzählbar.* $\square$

Beispiel 0.14 *Seien M_1, M_2, M_3, ... abzählbar viele abzählbare Mengen. Dann ist auch ihre Vereinigung $\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$ abzählbar.*

Beweis. *Nach Voraussetzung gibt es für jede natürliche Zahl i eine surjektive Abbildung $f_i : \mathbb{N} \to M_i$. Wir definieren $F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_i M_i$ durch $F(i, n) := f_i(n)$. Diese Abbildung F ist surjektiv.* $\square$

Beispiel 0.15 *Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar.*

Beweis. *Es ist $\mathbb{Q} = -\mathbb{Q}^* \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^*$ mit der Menge $\mathbb{Q}^* := \{q \in \mathbb{Q} : \ q > 0\}$. Wegen 4) genügt es zu zeigen, dass $\mathbb{Q}^*$ abzählbar ist. Die Abbildung*

$$F : \begin{cases} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^* \\ (a, b) \mapsto \dfrac{b}{a} \end{cases}$$

ist surjektiv. Die Behauptung folgt also mit den Beispielen 1.26 und 1.27. $\square$

Beispiel 0.16 *Das Intervall* $]0,1[$ *ist* <u>*nicht*</u> *abzählbar.*

Beweis. Wir nehmen an, es gäbe eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to]0,1[$*. Dann schreiben wir die Zahlen* $a \in]0,1[$ *als Dezimalbrüche auf in der Reihenfolge, wie sie als Bilder* $f(n)$, $n \in \mathbb{N}$ *auftreten:*

$$\begin{array}{rcl} f(1) & = & 0, a_1^{(1)} a_2^{(1)} a_3^{(1)} ... \\ f(2) & = & 0, a_1^{(2)} a_2^{(2)} a_3^{(2)} ... \\ f(3) & = & 0, a_1^{(3)} a_2^{(3)} a_3^{(3)} ... \\ & \vdots & \end{array}$$

Jetzt definieren wir unendlich viele Ziffern $a_1, a_2, a_3, ...$ *durch*

$$\begin{array}{rcl} a_1 & := & \begin{cases} 4 \textit{ falls } a_1^{(1)} \neq 4 \\ 5 \textit{ falls } a_1^{(1)} = 4 \end{cases} \\ a_2 & := & \begin{cases} 4 \textit{ falls } a_2^{(2)} \neq 4 \\ 5 \textit{ falls } a_2^{(2)} = 4 \end{cases} \\ a_3 & := & \begin{cases} 4 \textit{ falls } a_3^{(3)} \neq 4 \\ 5 \textit{ falls } a_3^{(3)} = 4 \end{cases} \\ & \vdots & \\ a_n & := & \begin{cases} 4 \textit{ falls } a_n^{(n)} \neq 4 \\ 5 \textit{ falls } a_n^{(n)} = 4 \end{cases} \\ & \vdots & \end{array}$$

Dann ist die Ziffer a_n *verschieden von der Ziffer* $a_n^{(n)}$*, die im Dezimalbruch für* $f(n)$ *an der* n*-ten Stelle steht. Der Dezimalbruch*

$$a := 0, a_1 a_2 a_3 ...$$

kann also in der Aufzählung der Zahlen $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, ... *nicht vorkommen, weil er sich von jedem dieser Dezimalbrüche an mindestens einer Stelle unterscheidet. Widerspruch!*

Beispiel 0.17 *Die Menge* $\mathbb{R}$ *der reellen Zahlen ist nicht abzählbar.*

Beweis. Wäre $\mathbb{R}$ *abzählbar, dann wäre dies nach Beispiel 1.28 auch das Intervall* $(0,1)$*. Nach Beispiel 1.31 ist dieses Intervall aber nicht abzählbar.* □

Aufgabe A 0.5: Zeigen Sie:
a) Die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist abzählbar.
b) Die Menge aller unendlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist nicht abzählbar.

1.1 Aufgabe

Aufgabe A 1.1:[V] Die *Sechseckszahlen* (s_n) sind rekursiv definiert durch

$$s_0 := 0, \quad s_{n+1} := s_n + 4n + 1.$$

Finden Sie mit dem Ansatz $s_n = an^2 + bn + c$ eine explizite Formel für alle s_n und beweisen Sie diese.

1.2 Aufgaben

Aufgabe A 1.2:[V] Zeigen Sie, dass $(2^n)_{n\geq 1}$ eine Teilfolge von $(2n)_{n\geq 1}$ ist.

Aufgabe A 1.3:[V] Beweisen oder widerlegen Sie, dass die Folge

$$x_n := \sqrt{n^2+1} - n$$

konvergiert.

Aufgabe A 1.4: Es sei $k \geq 2$ eine natürliche Zahl und es seien $a > 0, x_0 > 0$ reelle Zahlen. Die Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ werde rekursiv definiert durch

$$x_{n+1} := \frac{1}{k}\left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\right).$$

Zeigen Sie: diese Folge konvergiert gegen die eindeutig bestimmte positive Lösung x der Gleichung $x^k = a$.

Aufgabe A 1.5: Für $n \in \mathbb{N}$ seien

$$a_n := \sqrt{n+1000} - \sqrt{n}, \quad b_n := \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}, \quad c_n := \sqrt{n+\frac{n}{1000}} - \sqrt{n}.$$

Zeigen Sie:
a) Für $1 \leq n < 1000000$ gilt $a_n > b_n > c_n$.
b) $\lim(a_n) = 0, \quad \lim(b_n) = \frac{1}{2}, \quad \lim(c_n) = \infty$.

Aufgabe A 1.6: Berechnen Sie den Wert von

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}},$$

d.h., den Grenzwert der rekursiv definierten Folge

$$a_0 := 1, \quad a_{n+1} := \sqrt{1+a_n}.$$

1.3 Die Exponentialreihe

Die Eulersche Zahl e haben wir definiert als den Grenzwert der Reihe (Beispiel 1.16)

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!}.$$

Aus der Schule kennt man aber auch die Darstellung als Grenzwert

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Diese Gleichung beweisen wir in zwei Schritten:

Behauptung a): Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e.$$

Beweis: Für alle $k = 1, ..., n$ gilt

$$\binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1i)}{n \cdot n \cdot ... \cdot n} \leq \frac{1}{k!}.$$

Mit unseren für $k = 0$ getroffenen Vereinbarungen gilt diese Formel auch für $k = 0$, trivialerweise. Mit der binomischen Formel erhalten wir daraus

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < e.$$

Behauptung b): Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $N(\epsilon)$ so, dass für alle $n > N(\epsilon)$ gilt

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > e - \epsilon.$$

Beweis: Weil die Exponentialreihe monoton wachsend gegen e konvergiert, gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n > m$ gilt

$$e - \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} < \epsilon, \quad \text{bzw.} \quad \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} > e - \epsilon.$$

Für $n \geq m$ berechnen wir

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{n \cdot n \cdot ... \cdot n} \\
&\geq \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \cdot (1 - \frac{1}{n}) \cdot ... \cdot (1 - \frac{k-1}{n}) \\
&\geq (1 - \frac{1}{n}) \cdot ... \cdot (1 - \frac{m-1}{n}) \cdot \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}
\end{aligned}$$

Wegen

$$\lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n}) \cdot ... \cdot (1 - \frac{m-1}{n}) = 1$$

gibt es ein $N(\epsilon) \geq m$ so, dass für $n \geq N(\epsilon)$ gilt

$$(1 - \frac{1}{n}) \cdot ... \cdot (1 - \frac{m-1}{n}) \geq 1 - \epsilon.$$

Für diese n ist dann also

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq (1 - \epsilon) \cdot \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} > (1 - \epsilon)(e - \epsilon) = e - \epsilon(1 + e) + \epsilon^2 > e - \epsilon(1 + e).$$

Daraus folgt die Behauptung b).

Die Behauptungen a) und b) zusammen ergeben die Grenzwertgleichung

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

□

Aufgabe A 1.7: Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = 1$$

und folgern Sie daraus

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}.$$

Aufgabe A 1.8: Zeigen Sie für $x > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Aufgabe A 1.9: Entscheiden Sie, welche der folgenden Reihen konvergieren:

$$\textbf{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \quad \textbf{b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}, \quad \textbf{c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+4}{n^2 - 3n + 1}, \quad \textbf{d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{(-n)^n}.$$

1.3 Absolute Konvergenz

Eine absolut konvergente Reihe konvergiert, und konvergiert nach jeder Umordnung auch gegen denselben Grenzwert. Bevor wir dies beweisen, erst die verblüffende Alternative:

Riemannscher Umordnungssatz: *Die Reihe $\sum a_n$ sei konvergent, aber nicht absolut konvergent. Dann gibt es zu jedem beliebigen $\alpha \in \mathbb{R}$ eine Umordnung $\sum a_{\sigma(n)}$ dieser Reihe, die gegen α konvergiert.*

Schrecklich!

Beweis des Satzes: Einerseits konvergiert $\sum a_n$ und es ist insbesondere $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ nach Satz 1.9. Andererseits divergiert die Reihe $\sum |a_n|$ mit positiven Summanden. Ihre Partialsummen müssen deswegen unbeschränkt wachsen. Die Voraussetzung und die Behauptung ändern sich nicht, wenn wir in der Reihe alle Summanden $a_n = 0$ weglassen. Und das wollen wir tun.

Wir setzen nun

$$p_n := max(a_n, 0) = \begin{cases} a_n & \text{falls} \quad a_n > 0 \\ 0 & \text{falls} \quad a_n < 0 \end{cases}$$

$$q_n := min(a_n, 0) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad a_n < 0 \\ a_n & \text{falls} \quad a_n > 0 \end{cases}$$

Falls $\sum p_n$ beschränkt und damit konvergent wäre, so würde auch

$$\sum a_n - \sum p_n = \sum (a_n - p_n) = \sum q_n = -\sum |q_n|$$

konvergieren. Dann wäre auch

$$\sum |a_n| = \sum (p_n + |q_n|)$$

konvergent, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also wächst $\sum p_n$ unbeschränkt gegen ∞. Ebenso sieht man, dass $\sum q_n$ unbeschränkt gegen $-\infty$ fällt.

Jetzt ordnen wir die Summanden um, und zwar so, dass

$$\begin{array}{ll} P_1 := p_1 + ... + p_{m_1} & \text{wo } m_1 \text{ mimimal mit } P_1 > \alpha \\ Q_1 := P_1 + q_1 + ... + q_{n_1} & \text{wo } n_1 \text{ mimimal mit } Q_1 < \alpha \\ \vdots & \\ P_{k+1} := Q_k + p_{m_k+1} + ... + p_{m_{k+1}} & \text{wo } m_{k+1} \text{ mimimal mit } P_{k+1} > \alpha \\ Q_{k+1} := P_{k+1} + q_{n_k+1} + ... + q_{n_{k+1}} & \text{wo } n_{k+1} \text{ mimimal mit } Q_{k+1} < \alpha \\ \vdots & \end{array}$$

Dabei ist $m_{k+1} > m_k$ und $\lim_{k\to\infty} m_k = \infty$, ebenso wie $\lim_{k\to\infty} n_k = \infty$. Das bedeutet, dass wir tatsächlich alle Summanden umgeordnet haben.

Außerdem ist $P_k > \alpha > Q_k$ mit

$$P_k - \alpha < p_{m_k} \to 0, \quad \alpha - Q_k < -q_{n_k} \to 0 \quad \text{für } k \to \infty.$$

Für jede Partialsumme S der umgeordneten Reihe folgt daraus, dass entweder

$$P_k \geq S \geq Q_k \text{ mit } |S - \alpha| \leq max\{p_{m_k}, -q_{n_k}\}$$

oder

$$Q_k \leq S \leq P_{k+1} \text{ mit } |S - \alpha| \leq max\{-q_{n_k}, p_{m_{k+1}}\}.$$

Somit konvergieren die Partialsummen gegen α. $\square$

Das war die schlechte Nachricht. Die gute Nachricht ist

Großer Umordnungssatz: *Die Reihe $\sum a_n$ sei absolut konvergent mit $\sum a_n = \alpha$. Ist $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung, so konvergiert auch die damit umgeordnete Reihe $\sum a_{\sigma(n)}$ gegen α.*

Beweis. Wie immer in solchen Fällen geben wir uns ein $\epsilon > 0$ beliebig vor. Wegen der absoluten Konvergenz gibt es ein N_0 mit

$$\sum_{n=N_0}^{\infty} |a_n| < \epsilon.$$

Damit wird

$$|\alpha - \sum_{n=0}^{N_0-1} a_n| = |\sum_{n=N_0}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=N_0}^{\infty} |a_n| < \epsilon.$$

Sei nun N_1 so groß, dass

$$\{0, 1, ..., N_0 - 1\} \subset \{\sigma(0), \sigma(1), ..., \sigma(N_1)\}.$$

Für alle $m \geq N_1$ gilt dann

$$|\sum_{n=0}^{m} a_{\sigma(n)} - \alpha| \leq |\sum_{n=0}^{m} a_{\sigma(n)} - \sum_{n=0}^{N_0-1} a_n| + |\sum_{n=0}^{N_0-1} a_n - \alpha| \leq \sum_{n=N_0}^{\infty} |a_n| + \epsilon < 2\epsilon.$$

□

Folgerung 1: *Konvergiert die Doppelreihe $\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{m,n}$ absolut in irgend einer Anordnung, dann konvergiert sie in jeder Anordnung gegen denselben Grenzwert.*

Folgerung 2: *Kovergieren die Reihen $\sum a_m$ und $\sum b_n$ absolut, dann konvergiert die Produktreihe $\sum_{m,n} a_m \cdot b_n$ in jeder Anordnung gegen denselben Grenzwert.*

Beweis. Es sei

$$A := \sum_m |a_m|, \quad B := \sum_n |b_n|.$$

Dann ist

$$\sum_{m=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} |a_m b_n| = \sum_{m=1}^{N} (|a_m| \sum_{n=1}^{N} |b_n|) \leq \sum_{m=1}^{N} |a_m| \cdot B \leq A \cdot B,$$

und die Doppelreihe konvergiert absolut. □

Folgerung 3: *Sind die Reihen $\sum a_m$ und $\sum b_n$ absolut konvergent, so konvergiert jede Umordnung der Produktreihe $\sum a_m b_n$ gegen das Cauchy-Produkt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{k} a_m b_{k-m}.$$

Aufgabe A 1.10: Zeigen Sie: Wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergiert, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n$ absolut.

Aufgabe A 1.11: Für $n \in \mathbb{N}$ seien

$$a_n = b_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+n}} \quad \text{und} \quad c_n := \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k.$$

Zeigen Sie, dass die Reihen $\sum a_n$ und $\sum b_n$ konvergieren, ihr Cauchyprodukt $\sum c_n$ jedoch nicht.

1.4 Aufgaben

Aufgabe A 1.12: Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 0$. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+1)(2a+1)...(na+1)}{(b+1)(2b+1)...(nb+1)}$$

genau dann konvergiert, wenn $a < b$ ist.

Aufgabe A 1.13:[NV] Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^q e^{-n}$$

für jedes $q \in \mathbb{Z}$ konvergiert.

Aufgabe A 1.14:[NV] Es sei

$$a_n := \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ für } n \geq 1.$$

Zeigen Sie:
a) Für $n > 1$ gilt $a_n \cdot a_{n+1} < 0$,
b) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,
c) die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert.
d) Welche Bedingung des Leibniz-Kriteriums ist nicht erfüllt?

Aufgabe A 1.14:[NV] Ein Ball fällt aus 10 m Höhe senkrecht auf den Boden. Dort wird er reflektiert, steigt in die Höhe, kehrt um und fällt wieder auf den Boden, usw. Nach jeder Reflexion am Boden steigt der Ball auf 90% seiner vorhergehenden Höhe. Welchen Weg legt der Ball insgesamt zurück?

Aufgabe A 1.15:[NV] Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n(n+1) \cdot ... \cdot (n+n)}.$$

Aufgabe A 1.16:[NV] Für welche positiven $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b \neq 1$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1-b^n} \text{ ?}$$

1.5 Häufungspunkte, offene und abgeschlossene Mengen

In diesem Abschnitt betrachten wir Teilmengen $M \subset \mathbb{R}$ der reellen Zahlen und Folgen a_n von Zahlen $a_n \in M$.

Definition 1.13 *Eine Zahl* $x_0 \in \mathbb{R}$ *heißt* Häufungspunkt *der Menge* $M \subset \mathbb{R}$*, wenn eine Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *reeller Zahlen existiert, mit*

$$a_n \in M \text{ für alle } n \in \mathbb{N},$$

$$a_n \neq x_0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0.$$

Beispiel 1.21 *Sei* $M = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$*. Diese Menge besitzt den Häufungspunkt* $x_0 = 0$*, denn die Folge* $a_n = 1/n$ *von Zahlen aus* M *hat ihn als Grenzwert. Der Häufungspunkt selbst gehört nicht zur Menge* M*.*

Beispiel 1.22 *Sei* M *das abgeschlossenen Intervall* $[0, 1]$*. Jeder Punkt* $x_0 \in [0, 1]$ *ist Häufungspunkt. Denn, wenn* $x_0 \neq 1$ *ist, gibt es unendlich viele Zahlen* $a_n = x_0 + 1/n$ *in* M *und* $a_n \neq x_0$ *mit* $\lim(a_n) = x_0$*. Und falls* $x_0 = 1$ *ist, gilt dasselbe mit der Folge* $x_0 - 1/n$*. Und umgekehrt: nur die Punkte* $x_0 \in [0, 1]$ *sind Häufungspunkte. Denn wenn* (a_n) *eine konvergente Folge von Punkten* $a_n \in [0, 1]$ *ist, dann ist* $0 \leq a_n \leq 1$ *für alle* n *und aus Satz 1.3 ergibt sich* $0 \leq \lim(a_n) \leq 1$*.*

Beispiel 1.23 *Sei* M *das offene Intervall* $]0, 1[$*. Jeder Punkt* $x_0 \in]0, 1[$ *ist Häufungspunkt. Das sieht man wie in Beispiel 1.34. Aber genauso sieht man auch, dass beide Endpunkte* 0 *und* 1 *Häufungspunkte sind, und diese Endpunkte gehören nicht zur Menge* M*.*

Beispiel 1.24 *Sei* M *eine endliche Menge. Dann besitzt* M *keine Häufungspunkte. Denn ist* (a_n) *eine Folge von Punkten* $a_n \in M$*, dann muß* a_n *mindestens einen der endlich vielen Punkte* $a \in M$ *unendlich oft als Wert annehmen. Es gibt also eine konstante unendliche Teilfolge* $a_{n_1} = a_{n_2} = ... = a$*. Diese Teilfolge konergiert gegen* a*. Wenn die Folge* (a_n) *selbst konvergent ist, so hat auch sie* a *als Grenzwert. Unendlich viele Folgenglieder stimmen mit* a *überein. Damit ist die dritte Forderung* $x_0 = \lim(a_n) \neq a_n$ *nie erfüllbar.*

Definition 1.14 *Eine Teilmenge* $A \subset \mathbb{R}$ *heißt* abgeschlossen*, wenn alle ihre Häufungspunkte zur Menge* A *gehören.*

Beispiel 1.25 *Jede endliche Menge ist abgeschlossen, denn sie hat überhaupt keine Häufungspunkte.*

Beispiel 1.26 *Jedes abgeschlossene Intervall ist abgeschlossen, denn wie oben für das Intervall* $[0, 1]$ *beweist man, dass das Intervall alle seine Häufungspunkte enthält.*

Beispiel 1.27 *Die Menge* $M := \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ *ist abgeschlossen.*

Beweis: Sei (a_n) *eine gegen* x_0 *konvergente Folge von Punkten* $a_n \in M$. *Wegen Satz 1.3 muß* $x_0 \geq 0$ *sein.* $x_0 = 0$ *ist Häufungspunkt und gehört zu* M. *Kein Punkt* $x_0 > 0$ *kann Häufungspunkt sein, denn in jedem Intervall* $]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[$ *mit* $\epsilon \leq x_0/2$ *liegen nur endlich viele Punkte von* M. *Und deswegen liegen in diesem Intervall keine Häufungspunkte von* M. *Das beweist man genauso, wie die Tatsache, dass endliche Mengen keine Häufungspunkte haben.* □

Beispiel 1.28 *Offene Intervalle* $]a, b[\subset \mathbb{R}$ *sind nicht abgeschlossen. Denn die Endpunkte* a *und* b *sind Häufungspunkte und gehören nicht zum Intervall.*

Beispiel 1.29 *Die Menge* $M = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ *ist nicht abgeschlossen, denn ihr Häufungspunkt* $x_0 = 0$ *gehört nicht zu ihr.*

Satz 1.21 (Maximum für abgeschlossene und beschränkte Mengen) *Die Menge* $M \subset \mathbb{R}$ *sei abgeschlossen und nach oben beschränkt. Dann hat* M *ein Maximum* $o \in M$.

Beweis. Nach Satz 0.5 besitzt M ein Supremum o. Nach Beispiel 1.7 gibt es eine Folge von Punkten $x_n \in M$, die gegen o konvergiert. Wenn $x_n = o$ gilt für ein $n \in \mathbb{N}$, dann gehört o zu M und ist ein Maximum. Andernfalls ist $x_n \neq o$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und o ist ein Häufungspunkt von M. Weil M abgeschlossen ist, gehört dieser Häufungspunkt $o = sup(M)$ zu M und ist das Maximum von M. □

Natürlich gilt der analoge Satz auch für das Mimimum: Jede nach unten beschränkte nichtleere Teilmenge der reellen Zahlen besitzt ein Minimum.

Definition 1.15 *Die Teilmenge* $M \subset \mathbb{R}$ *heißt* offen, *wenn* $\mathbb{R} \setminus M$ *abgeschlossen ist.*

Satz 1.22 *Die folgenden Eigenschaften für* $M \subset \mathbb{R}$ *sind äquivalent:*
i) M *ist offen;*
ii) zu jedem $x \in M$ *gibt es ein* $\delta > 0$ *derart, dass das Intervall* $[x - \delta, x + \delta]$ *ganz zu* M *gehört.*

Beweis. i) $\Rightarrow$ ii): Es sei M offen und $x \in M$. Wenn ii) falsch ist, gehört kein Intervall $[x-1/n, x+1/n]$ ganz zu M. Es gibt also einen Punkt x_n in diesem Intervall mit $x_n \in \mathbb{R} \setminus M$. Wegen $|x - x_n| \leq 1/n$ konvergiert die Folge x_n gegen x. Also ist x Häufungspunkt der abgeschlossenen Menge $\mathbb{R} \setminus M$. Dann muss x zu dieser Menge, und nicht zu M gehören.

ii) $\Rightarrow$ i): Jetzt ist zu zeigen, dass $\mathbb{R} \setminus M$ abgeschlossen ist. Sei also $y \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von $\mathbb{R} \setminus M$ und $y_n \in (\mathbb{R} \setminus M)$ eine Folge, die gegen y konvergiert. Wenn y nicht zu $\mathbb{R} \setminus M$ gehören würde, dann wäre $y \in M$. Damit gibt es nach Voraussetzung ii) ein ganzes Intervall $[y - \delta, y + \delta] \subset M$ mit $\delta > 0$. Weil die Folge y_n gegen y konvergiert, liegen fast alle x_n in diesem Intervall, und nicht in $\mathbb{R} \setminus M$. Widerspruch! □

Definition 1.16 *Eine abgeschlossene und (nach oben und unten) beschränkte beschränkte Menge* $M \subset \mathbb{R}$ *heißt* kompakt.

Satz 1.23 *Für eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ sind äquivalent:*

i) M ist kompakt.

ii) (Bolzano-Weierstraß) Jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Punkten $x_n \in M$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

iii) (Heine-Borel) Ist M enthalten in einer Vereinigung

$$\bigcup_{i\in I} U_i$$

offener Mengen $U_i \subset \mathbb{R}$, dann gibt es eine endliche *Teilmenge $J \subset I$ mit*

$$M \subset \bigcup_{j\in J} U_j.$$

Beweis i) $\Rightarrow$ ii): Mit M ist auch die Folge x_n beschränkt. Nach Satz 1.6 besitzt (x_n) eine Teilfolge (x_{n_k}), die gegen eine Zahl $x_0 \in \mathbb{R}$ konvergiert. Entweder ist $x_0 = x_{n_k} \in M$ für ein k, oder x_0 ist Häufungspunkt von M. Aber weil M abgeschlossen ist, gehört auch dann x_0 zu M.

ii) $\Rightarrow$ i): Wenn M nicht beschränkt ist, gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in M$ mit $|x_n| > n$. Wegen $n_k \geq k$ ist $|x_{n_k}| \geq k$ für jede Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ der Folge (x_n). Somit ist die Teilfolge nicht beschränkt, und konvergiert weder in $\mathbb{R}$ noch in M. Widerspruch!

Wenn M nicht abgeschlossen ist, gibt es einen Häufungspunkt $x_0 \in \mathbb{R}$ von M, der nicht zu M gehört. Sei x_n eine Folge von Punkten $x_n \in M$, die gegen x_0 konvergiert. Für jede Teilfolge x_{n_k} ist dann

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

nicht in M. Auch ein Widerspruch!

i) $\Rightarrow$ iii): Wir nehmen an, es gäbe keine solche endliche Indexmenge J und konstruieren daraus einen Widerspruch zu i). Weil M beschränkt ist, liegt M in einem endlichen Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Der Mittelpunkt dieses Intervalls ist $m := (a+b)/2$. Dann ist

$$M = (M \cap [a,m]) \cup (M \cap [m,b]).$$

Weil es für M keine endliche Menge $J \subset I$ gibt mit

$$M \subset \bigcup_{j\in J} U_j,$$

können nicht beide Teilmengen $M \cap [a,m]$ und $M \cap [m,b]$ in einer derartigen endlichen Vereinigung $\bigcup U_j$ liegen. Sei M_1 eine der beiden Teilmengen, die nicht in einer endlichen Vereinigung liegt. Diese Menge M_1 ist enthalten in einem endlichen Intervall $I_1 := [a,m]$, bzw $I_1 := [m,b]$ der Länge $(b-a)/2$.

Diese Konstruktion wiederholen wir induktiv und finden für alle n eine Teilmenge $M_n \subset [a_n, b_n]$ mit

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n], \quad b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a)$$

und so, dass M_n in keiner endlichen Vereinigung $\bigcup U_j$ enthalten ist. Wegen

$$a_{n+m} - a_n \leq b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a)$$

ist die Folge (a_n) eine Cauchy-Folge und konvergiert gegen einen Punkt $a \in \mathbb{R}$. Auch die Folge (b_n) konvergiert gegen diesen Punkt. In jedem Intervall $[a_n, b_n]$ gibt es einen Punkt $x_n \in M$. Deswegen ist a ein Häufungspunkt von M.

Weil M abgeschlossen ist, gehört a zu M und liegt insbesondere in einer offenen Menge U_i. Weil U_i offen ist, gibt es nach Satz 1.22 ein $\delta > 0$ mit

$$[a - \delta, a + \delta] \subset U_i.$$

Ist n genügend groß, dann ist auch

$$[a_n, b_n] \subset [a - \delta, a + \delta] \subset U_i.$$

Die Menge $M \cap [a_n, b_n]$ liegt dann auch in einer einzigen solchen offenen Menge U_i, im Widerspruch zu unserer kunstvollen Konstruktion.

iii) $\Rightarrow$ i): Wir wählen die offenen Mengen $U_i :=]-i, i[$ und haben

$$U_i \subset U_{i+1}, \quad M \subset \mathbb{R} = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i.$$

Wegen iii) liegt M in einer endlichen Vereinigung von Mengen U_i, und damit in einer einzigen Menge U_i. Deswegen ist M beschränkt.

Wenn M nicht abgeschlossen ist, gibt es einen Häufungspunkt $x_0 \in \mathbb{R}$, der nicht zu M gehört. Wir wählen die offenen Mengen

$$U_i := \mathbb{R} \setminus [x_0 - \frac{1}{i}, x_0 + \frac{1}{i}]).$$

Dann ist

$$M \subset \mathbb{R} \setminus \{x_0\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i.$$

Nach iii) ist M dann schon in einer der Mengen U_i enthalten. Für alle $x \in M$ folgt

$$|x - x_0| \geq \frac{1}{i}$$

und x_0 kann kein Häufungspunkt von M gewesen sein. Widerspruch! $\square$

1.6 Die komplexen Zahlen

Definition. *Die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist der zwei-dimensionale reelle Vektorraum $\mathbb{R}^2$, also*

$$\mathbb{C} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}^2\}.$$

Die Addition definiert man komponentenweise (Vektor-Addition)

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y').$$

Die Multiplikation wird allerdings etwas exotischer definiert

$$(x,y)\cdot(x',y') := (xx'-yy', xy'+yx').$$

Mit diesen Definitionen kann man direkt nachrechnen, dass alle Rechenregeln für komplexe Zahlen gelten, die auch für reelle Zahlen richtig sind (Tabelle in 0.2)). Das gehört in die Algebra, und wir wollen uns hier nicht damit aufhalten. Allerdings schreibt man komplexe Zahlen üblicherweise nicht $z=(x,y)$, sondern

$$z = x + iy.$$

Dann wird die Multiplikation

$$(x+iy)\cdot(x'+iy') = xx'-yy'+i(xy'+yx').$$

Insbesondere ist $i = 0 + i\cdot 1$ und

$$i^2 = -1.$$

Wenn man diese Formel voraussetzt und außerdem das Distributiv-Gesetz für die Multiplikation, dann kann man die Multiplikation gar nicht anders definieren. Vermöge

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto x + i\cdot 0 \in \mathbb{C}$$

enthält der Körper $\mathbb{C}$ die reellen Zahlen als *Teilkörper*.

Wenn $z = x+iy$, so heißt $x = Re(z)$ der Realteil dieser Zahl und $y = Im(z)$ deren Imaginärteil. Außerdem heißt

$$\overline{z} := a - ib$$

die komplex-konjugierte Zahl zu z. Die komplex-konjugierte Zahl zu $\overline{z}$ ist wieder z. Außerdem gelten die Rechenregeln

$$\boxed{\begin{array}{rcl} x &=& Re(z) = \frac{1}{2}(z+\overline{z}), \\ y &=& Im(z) = \frac{1}{2i}(z-\overline{z}), \\ \overline{z+z'} &=& \overline{z}+\overline{z'}, \\ \overline{z\cdot z'} &=& \overline{z}\cdot\overline{z'}, \\ z\cdot\overline{z} &=& x^2+y^2. \end{array}}$$

Mit der letzten Formel kann man den Kehrwert einer komplexen Zahl $z \neq 0$ etwas komfortabler schreiben als

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\cdot\overline{z}} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}.$$

Definition 1.17 *Die reelle Zahl*

$$|z| := \sqrt{z\cdot\overline{z}} = \sqrt{x^2+y^2}$$

heißt der Betrag von z.

Falls $z = x$ reell ist, ist dies der Absolutbetrag der reellen Zahl x. Genau wie bei den reellen Zahlen gelten auch hier die folgenden Rechenregeln:

i) $|z| \geq 0$, und $|z| = 0$ genau dann, wenn $z = 0$;

ii) $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$;

iii) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (Dreiecks-Ungleichung).

Der Beweis für i) ist klar.

Beweis zu ii):

$$|z \cdot z'| = \sqrt{zz' \cdot \overline{zz'}} = \sqrt{z\overline{z} \cdot z'\overline{z'}} = \sqrt{z\overline{z}} \cdot \sqrt{z'\overline{z'}} = |z| \cdot |z'|.$$

Beweis zu iii): Für jede komplexe Zahl $z = x + iy$ ist

$$Re(z) = x \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

und insbesondere

$$Re(zz') \leq |zz'| = |z| \cdot |z'|.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} |z + z'| &= \sqrt{(z + z')(\overline{z} + \overline{z'})} \\ &= \sqrt{z\overline{z} + z\overline{z'} + \overline{z}z' + z'\overline{z'}} \\ &= \sqrt{|z|^2 + |z'|^2 + 2Re(z\overline{z'})} \\ &\leq \sqrt{|z|^2 + |z'|^2 + 2|z| \cdot |z'|} \\ &= \sqrt{(|z| + |z'|)^2} \\ &= |z| + |z'|. \end{aligned}$$

Genau wie im Reellen folgert man aus der Dreiecksungleichung

$$|z| \leq |z - z'| + |z'|,$$

und daraus die Minus-Dreiecksungleichung

$$|z - z'| \geq ||z| - |z'||.$$

Für komplexe Zahlen gibt es keine Ungleichungen, nur für deren Betrag. Das genügt aber völlig, um Konvergenz wie im Reellen zu definieren und zu behandeln:

Definition 1.18 *Eine Folge (z_n) komplexer Zahlen konvergiert gegen $c \in \mathbb{C}$, wenn*

$$\lim_{n \to \infty} |z_n - c| = 0.$$

Beispiel 1.30 *Für $|z| < 1$ ist $\lim |z^n| = \lim |z|^n = 0$ und*

$$\lim z^n = 0.$$

Wenn $z_n = x_n + iy_n$ und $c = a + ib$ dann gilt die Äquivalenz

$$c = \lim(z_n) \quad \Leftrightarrow \quad a = \lim(x_n) \text{ und } b = \lim(y_n).$$

Beweis $\Rightarrow$: $|x_n - a| \leq |z_n - c|$ und $|y_n - b| \leq |z_n - c|$.
$\Leftarrow$: Mit der Dreiecksungleichung sieht man

$$|z_n - c| = |(x_n - a) + i(y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b|. \qquad \square$$

Wie im Reellen gelten auch die Rechenregeln
1) (z_n) konvergent $\Rightarrow$ (z_n) beschränkt,
2) Wenn $z_n \to c$ und $z'_n \to c'$ konvergieren, dann konvergieren auch

$$\begin{array}{rcl} z_n + z'_n & \to & c + c' \\ z_n - z'_n & \to & c - c' \\ z_n \cdot z'_n & \to & c \cdot c' \\ z_n / z'_n & \to & c/c' \end{array}$$

(Letzteres allerdings nur, wenn $c' \neq 0$.)

Insbesondere kann man Cauchy-Folgen komplexer Zahlen definieren wie im Reellen. Durch Übergang zu Real- und Imaginär-Teil sieht man, das jede solche Cauchy-Folge komplexer Zahlen konvergiert (Vollständigkeit von $\mathbb{C}$).

Und damit geht dann auch die Theorie der konvergenten Reihen ganz wie im Reellen. Insbesondere hat man die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \text{ für } |z| < 1.$$

Satz 1.24 (Majorantenkriterium) *Es seien c_n eine Folge komplexer und r_n eine Folge reeller Zahlen mit*

$$|c_n| \leq r_n, \quad \sum r_n \text{ konvergent.}$$

Dann konvergiert auch $\sum c_n$.

Beweis. Für die Differenz der komplexen Partialsummen ist

$$|S_m - S_n| = |c_{n+1} + ... + c_m| \leq |c_{n+1}| + ... + |c_m| \leq r_{n+1} + ... + r_m.$$

Deswegen bilden diese Partialsummen eine Cauchy-Folge. $\square$

Und damit beweist man das Quotientenkriterium

$$\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \leq q < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum z_n \text{ konvergent.}$$

Beispiel 1.31 *Die komplexe Exponentialreihe*

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.

Beweis: Für $n \to \infty$ geht

$$\left| \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{z^n}{n!} \right| = \frac{|z|}{n+1} \to 0. \qquad \square$$

All dies habe ich hier eigentlich nur deswegen zusammengestellt, damit ich den folgenden Satz formulieren und beweisen kann:

Satz 1.25 (Eulersche Formel) *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt*

$$e^{ix} = cos(x) + i \cdot sin(x).$$

Beweis. Wir setzen einfach ein und wenden die üblichen Rechenregeln für konvergente Reihen an:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(ix)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}(ix)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}(ix)^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} \\ &= cos(x) + i \cdot sin(x). \end{aligned}$$

□

Aufgabe A 1.17: Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit

$$\mathbf{a)}\ z^2 = 1, \quad \mathbf{b)}\ z^3 = 1, \quad \mathbf{c)}\ z^4 = 1, \quad \mathbf{d)}\ z^8 = 1$$

in der Form $z = a + ib$.

Aufgabe A 1.18: a) Skizzieren Sie die Menge

$$D := \{z \in \mathbb{C} :\ |z-1| < 2\}.$$

b) Zeigen Sie für $z \in D$

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-z)^n}{2^{n+1}}.$$

Aufgabe A 1.19: Es sei $c \in \mathbb{C}, c \neq 1$ vorgegeben.
a) Skizzieren Sie die Menge

$$D := \{z \in \mathbb{C} :\ |z-1| < |c-1|\}.$$

b) Zeigen Sie für $z \in D$

$$\frac{1}{z-c} = \frac{1}{1-c} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-1}{c-1}\right)^n.$$

Aufgabe A 1.20:a) Zeigen Sie für $z \neq \pm i$

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{i}{2(z+i)} - \frac{i}{2(z-i)}.$$

b) Es sei $\omega := \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$. Zeigen Sie für $z \neq 1, \omega, \omega^2$

$$\frac{1}{z^3-1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{z-1} + \frac{\omega}{z-\omega} + \frac{\omega^2}{z-\omega^2}\right).$$

Aufgabe A 1.21: Ermitteln Sie mit der Eulerschen Formel einen geschlossenen Ausdruck für die Grenzfunktion

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(2nx)}{2^n}.$$

2.2 Aufgabe

Aufgabe A 2.1[V] Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n.$$

2.4 Eigenschaften stetiger Funktionen

Die im Beweis von Satz 2.18 bewiesene $\epsilon - \delta$-Eigenschaft hebt man gelegentlich als eigene Definition hervor:

Definition: *Es sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Diese Funktion heißt* gleichmäßig stetig *auf D, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\epsilon)$ existiert, so, dass*

$$|x - x_0| < \delta,\ x, x_0 \in D \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \text{ für alle } x, x_0 \in D.$$

Anders als bei der Definition der Stetigkeit, hängt $\delta(\epsilon)$ hier nur von ϵ ab und nicht vom Aufpunkt x_0. Jede gleichmäßig stetige Funktion ist auch stetig. Die Umkehrung gilt nicht, wenn das Definitionsintervall nicht kompakt ist. Im Beweis von Satz 2.18 haben wir nur gezeigt:

Satz: *Jede auf einem endlichen, abgeschlossenen Intervall stetige Funktion ist dort gleichmäßig stetig.*

Aufgabe A 2.2: Es sei $]a, b[\subset \mathbb{R}$ ein beschränktes offenes Intervall und $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Zeigen Sie, dass f auf $]a, b[$ beschränkt ist.

Aufgabe A 2.3: Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) := \sqrt{x}$ auf $[0, \infty[$ gleichmäßig stetig ist, während die Funktion $g(x) := x^2$ dies nicht ist.

Aufgabe A 2.4: Für $n \in \mathbb{N}$ seien die Funktionen $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g_n(x) := \frac{nx}{1 + |nx|}.$$

a) Zeigen Sie, dass alle Funktionen g_n stetig sind.

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$g(x) := \lim_{n\to\infty} g_n(x)$$

definiert, bzw. stetig?

Aufgabe A 2.5:[V] Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei durch

$$f_n(x) := \frac{x^2}{n^2 + x^2}$$

eine Funktion $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert. Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$
a) punktweise konvergiert,
b) nicht gleichmäßig konvergiert,
c) auf jeder beschränkten Teilmenge von $\mathbb{R}$ gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe A 2.6:[V] Beweisen Sie, dass durch

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{exp(x/n)}{n^2}$$

auf $\mathbb{R}$ eine stetige Funktion definiert wird.

2.5 Die Area-Funktionen

Nach Satz 2.20 wächst die Exponentialfunktion e^x streng monoton. Daraus folgt, dass auch $sinh(x)$ streng monoton wächst.

Beweis. Für $x < y$ ist

$$e^x < e^y \quad \text{und} \quad e^{-x} > e^{-y}.$$

Daraus folgt

$$sinh(y) - sinh(x) = \frac{1}{2}(e^y - e^x - e^{-y} + e^{-x}) > 0. \qquad \square$$

Aus

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$$

folgt

$$\lim_{x\to\infty} sinh(x) = \infty.$$

Analog sieht man

$$\lim_{x\to-\infty} sinh(x) = -\infty.$$

Deswegen ist $sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv und besitzt eine stetige Umkehrfunktion (Area-Sinus)

$$Arsin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Für $x \geq 0$ ist $sinh(x) \geq 0$, und auch $sinh(x)^2$ wächst hier streng monoton. Damit wächst für $x \geq 0$ auch

$$cosh(x)^2 = 1 + sinh(x)^2$$

streng monoton. Dann ist auch

$$cosh(x) : [0, \infty[\to [1, \infty[$$

bijektiv und besitzt eine stetige Umkehrfunktion (Area-Cosinus)

$$Arcos : [1, \infty[\to [0, \infty[.$$

Aufgabe A 2.7: Zeigen Sie
a) $Arsin(x) = ln(x + \sqrt{x^2+1})$ für $x \in \mathbb{R}$,
b) $Arcos(x) = ln(x + \sqrt{x^2-1})$ für $x \geq 1$.

Aufgabe A 2.8: Für $x \in \mathbb{R}$ wird der Hyperbel-Tangens definiert durch

$$tanh(x) := \frac{sinh(x)}{cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Zeigen Sie:
a) Die Funktion $tanh$ wächst streng monoton und definiert eine bijektive Abbildung

$$\mathbb{R} \to]-1, 1[.$$

b) Für die Umkehrfunktion $Artan$ gilt

$$Artan(y) = \frac{1}{2}(ln(1+y) - ln(1-y)).$$

Aufgabe A 2.9: Beweisen Sie

$$\lim_{x \to 0, x > 0} x^x = 1, \quad \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Aufgabe A 2.10:[V] Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \to \infty} \left(ln(e^x + 1) - ln(e^x - 1) \right).$$