Analysis III

Wolf P. Barth

Erlangen WS 07/08

Version vom 4. Februar 2008

Department Mathematik der Universität
Bismarckstr. 1 1/2, D-91054 Erlangen

Inhaltsverzeichnis

4 Das Lebesgue-Integral

Hier soll das Riemann-Integral aus dem ersten Semester gleichzeitig in zwei Richtungen verallgemeinert werden:

- von einer auf mehrere Dimensionen
- vom Riemann- auf das Lebesgue-Integral.

Das widerspricht natürlich allen didaktischen Grund-Prinzipien. Aber für Lehramts-Studenten gibt es jetzt eine eigene Vorlesung.

Der formale Aufwand ist beträchtlich. Ich verwende als Vorlagen:

- A. Knauf, Analysis III, Skriptum
- K. Königsberger, Analysis 2, Springer, 1997

Beide Vorlegen überschneiden sich stark (Herr Kollege Knauf hat sich an dem Buch von Königsberger orientiert), ergänzen sich aber auch manchmal recht glücklich. Weil ich keine Zeit mehr habe, dieses Skriptum mit Graphiken zu versehen (solche sind didaktisch unverzichtbar), verweise ich hierfür auf das Skriptum von Knauf und das Buch von Königsberger.

Oft halte ich mich so eng an das Buch von Königsberger, dass ich mich frage, wozu ich meinen Text eigentlich aufschreibe. Aber einerseits habe ich das Bedürfnis, das Materiel etwas anders zu gliedern. Und andererseits glaube ich, dass ich den Stoff dadurch besser verstehe.

4.1 Treppenfunktionen

Treppenfunktionen sind Funktionen, welche auf Quadern konstant sind. Der Teufel steckt im Detail:

Definition 4.1 *Ein Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ ist ein kartesisches Produkt*

$$Q = I_1 \times I_2 \times ... \times I_n$$

von endlichen Intervallen $I_\nu \subset \mathbb{R}$. Dabei sind alle Arten von Intervallen

$$I_\nu = [a_\nu, b_\nu],\ [a_\nu, b_\nu[,]a_\nu, b_\nu],\ ]a_\nu, b_\nu[, \quad a_\nu \leq b_\nu,$$

zugelassen. Insbesondere kann auch $a_\nu = b_\nu$ und $I_\nu = [a_\nu, a_\nu] = \{a_\nu\}$ sein. Wenn soetwas vorliegt, ist der Quader ziemlich dünn, und heißt ausgeartet.

Wir standardisieren den Quader Q etwas, indem wir übergehen zu

$$\bar{I}_\nu := [a, b] = I^1_\nu \cup I^2_\nu \cup I^3_\nu \quad \text{mit} \quad I^1_\nu = \{a_\nu\}, I^2_\nu =]a_\nu, b_\nu[, I^3_\nu = \{b_\nu\}.$$

Dann ist der abgeschlossene Quader

$$\bar{Q} = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n] = \bigcup_{s_1,...,s_n=1,2,3} I_1^{s_1} \times ... \times I_n^{s_n}$$

Vereinigung disjunkter Teilquader. Einer dieser Teilquader ist der offene Quader $Q^o := I_1^2 \times ... \times I_n^2$. Alle anderen Quader sind entartet und liegen im Rand von Q. Das ist der einfachste Fall der folgenden Situation:

Definition 4.2 *Eine* Produkt-Zerlegung *des abgeschlossenen nicht-entarteten Quaders*

$$Q = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$$

wird definiert durch Zerlegungen

$$a_\nu = t_\nu^0 < t_\nu^1 < ... < t_\nu^{s_\nu} = b_\nu$$

der Intervalle $I_\nu = [a_\nu, b_\nu]$ *wie folgt:*

$$I_\nu^1 = \{t_\nu^0\},\ I_\nu^2 =]t_\nu^0, t_\nu^1[,\ I_\nu^3 = \{t_\nu^1\},\ ...,\ I_\nu^{2s_\nu-1} = \{t_\nu^{s_\nu-1}\},\ I_\nu^{2s_\nu} =]t_\nu^{s_\nu-1}, t_\nu^{s_\nu}[,\ I_\nu^{2s_\nu+1} = \{t_\nu^{s_\nu}\}.$$

Die Produktzerlegung ist dann

$$Q = \bigcup I_1^{k_1} \times I_2^{k_2} \times ... \times I_n^{k_n} \quad \textit{mit} \quad 1 \leq k_1 \leq 2s_1 + 1, ..., 1 \leq k_n \leq 2s_n + 1.$$

Die Teilquader der Zerlegung sind oft entartet, aber immer paarweise disjunkt.

Satz 4.1 (Lemma) *Es seien* $Q_1, ..., Q_r \subset \mathbb{R}^n$ *endlich viele Quader. Dann gibt es einen Quader* $Q \subset \mathbb{R}^n$*, der alle Quader* $Q_1, ..., Q_r$ *enthält, und eine Produkt-Zerlegung von* Q*, derart, dass jeder Quader* $Q_1, ..., Q_r$ *Vereinigung von Teilquadern der Produkt-Zerlegung ist.*

Beweis. Jeder der Quader Q_i, $i = 1, ..., r$, ist definiert durch n Intervalle $I_\nu^i \subset \mathbb{R}$. Wir setzen

$$\bar{I}_\nu^i = [a_\nu^i, b_\nu^i], \quad a_\nu := \min_{i=1,..,n} a_\nu^i, \quad b_\nu := \max_{i=1,..,n} b_\nu^i, \quad Q := [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n],$$

und definieren die Zerlegung $a_\nu = t_\nu^0 < ... < t_\nu^{s_\nu} = b_\nu$ des ν-ten Intervalls durch die Vereinigungsmenge

$$\bigcup_\nu \{a_\nu, b_\nu\} = \{t_\nu^0, ..., t_\nu^{s_\nu}\}.$$

Die zugehörige Produkt-Zerlegung von Q hat dann die gewünschte Eigenschaft. $\square$

Definition 4.3 *Eine Funktion* $t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *heißt* Treppenfunktion*, wenn es endlich viele disjunkte Quader gibt, so, dass*

- *die Funktion* t *auf jedem dieser Quader konstant ist, und*
- *außerhalb der Vereinigungsmenge dieser Quader die Funktion* $t = 0$ *ist.*

Beispiel 4.1 *Es sei Q ein Quader und $\chi_Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch*

$$\chi_Q(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1 & \textit{falls} \quad \mathbf{x} \in Q \\ 0 & \textit{falls} \quad \mathbf{x} \notin Q \end{cases}$$

Diese Funktion ist eine Treppenfunktion. Sie heißt die charakteristische Funktion *des Quaders Q.*

Unter Verwendung von charakteristischen Funktionen kann man jede Treppenfunktion schreiben als

$$t = \sum_i c_i \cdot \chi_{Q_i}, \quad c_i \in \mathbb{R}, \quad Q_i \text{ disjunkte Quader.}$$

Satz 4.2 *a) Die Menge T aller Treppenfunktionen $t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.*
b) Mit $t \in T$ gehört auch $|t|$ zu T.

Beweis. Eigenschaft b) ist trivial, ebenso wie $c \cdot t \in T$ für $c \in \mathbb{R}$ und $t \in T$. Nicht-trivial ist dagegen: Wenn t_1 und t_2 Treppenfunktionen sind, dann ist auch $t_1 + t_2$ eine Treppenfunktion.

Seien also t_1, konstant auf den Quadern Q_i^1, und t_2, konstant auf den Quadern Q_j^2, Treppenfunktionen. Nach Satz 4.1 gibt es einen Quader und eine Produkt-Zerlegung dieses Quaders, so, dass alle Quader Q_i^1 und Q_j^2 disjunkte Vereinigungen von Quadern der Produkt-Zerlegung sind. Damit sind t_1 und t_2, sowie ihre Summe $t_1 + t_2$ konstant auf allen Quadern der Produkt-Zerlegung und $= 0$ außerhalb der Vereinigung dieser Quader. □

Definition 4.4 *Es sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader, wie in Definition 4.1. Dann heißt*

$$|Q| := (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$$

das Volumen dieses Quaders.

Es ist $|Q| = 0$, wenn Q entartet ist, und $|Q| > 0$ sonst.

Satz 4.3 *Es sei Q ein Quader mit einer Produkt-Zerlegung*

$$Q = \bigcup I_1^{k_1} \times \ldots \times I_n^{kn}$$

wie in Definition 4.2. Dann gilt

$$|Q| = \sum_{k_1,\ldots,k_n=1}^{2s_1+1,\ldots,2s_n+1} |I_1^{k_1}| \times \ldots \times |I_n^{k_n}|.$$

Der Beweis folgt aus

$$|I_\nu| = b_\nu - a_\nu = \sum_{k=1}^{2s_\nu} (t_\nu^{k+1} - t_\nu^k).$$

Definition 4.5 *Es sei $t \in T$ eine Treppenfunktion, konstant $= c_i$ auf den endlich vielen disjunkten Quadern Q_i, und $= 0$ außerhalb dieser Quader. Dann heißt*

$$\int t := \sum c_i |Q_i|$$

das Integral (über $\mathbb{R}^n$) dieser Treppenfunktion.

Satz 4.4 *Diese Definition 4.5 ist sinnvoll. D.h., ist t auch definiert bezüglich endlich vieler Quader Q'_j, also $t|Q'_j = c'_j$, dann ist*

$$\sum c_i |Q_i| = \sum c'_j |Q'_j|.$$

Beweis. Wir wählen nach Satz 4.1 einen Quader Q und eine Produkt-Zerlegung dieses Quaders so, dass alle Quader Q_i und Q'_j disjunkte Vereinigungen von Quadern $Q^{k_1,...,k_n} = I_1^{k_1} \times ... \times I_n^{k_n}$ dieser Zerlegung sind. Dann ist also

$$t|Q^{k_1,...,k_n} = c^{k_1,...,k_n}$$

konstant auf jedem Zerlegungsquader. Mit Satz 4.3 folgt

$$\sum c_i |Q_i| = \sum_{k_1,...,k_n} c^{k_1,...,k_n} |Q^{k_1,...,k_n}| = \sum c'_j |Q'_j|.$$

□

Satz 4.5 *a) Die Abbildung*

$$T \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \int t,$$

ist $\mathbb{R}$-linear und monoton. D.h. für je zwei Treppenfunktionen $t_1, t_2 \in T$ gilt

$$\int (c_1 t_1 + c_2 t_2) = c_1 \int t_1 + c_2 \int t_2, \quad \textit{falls } c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

und

$$\int t_1 \leq \int t_2 \quad \textit{falls } t_1 \leq t_2.$$

b) Es ist stets

$$\left| \int t \right| \leq \int |t|.$$

Beweis. a) Beide Aussagen sind trivial, wenn t_1 und t_2 auf den gleichen Quadern konstant sind. Nach Satz 4.1 können wir aber zu eine feineren Zerlegung übergehen, wo dies der Fall ist.

b) Wir schreiben $t = \sum c_i \chi_{Q_i}$ und haben

$$\left| \int t \right| = \left| \sum c_i \cdot |Q_i| \right| \leq \sum |c_i| \cdot |Q_i| = \int |t|.$$

□

Für die nächste Aussage müssen wir unsere Notation etwas verfeinern. Für den Vektorraum der Treppenfunktionen auf $\mathbb{R}^n$ schreiben wir $T(\mathbb{R}^n)$, und für das Integral einer Treppenfunktion $t \in T(\mathbb{R}^n)$ schreiben wir

$$\int_{\mathbb{R}^n} t(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Satz 4.6 (Mehrfache Integration) *Es sei $n = p + q$, also $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ und*

$$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^p, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^q.$$

Dann ist für $t \in T(\mathbb{R}^n)$ und festes $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^q$ die Funktion

$$t_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) := t(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

eine Treppenfunktion auf $\mathbb{R}^p$*. Weiter ist die Funktion*

$$\mathbb{R}^q \ni \mathbf{v} \mapsto \int_{\mathbb{R}^p} t_{\mathbf{v}}(\mathbf{u})d\mathbf{u}$$

eine Treppenfunktion auf $\mathbb{R}^q$ *und es gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} t(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} t_{\mathbf{v}}(\mathbf{u})d\mathbf{u} \right) d\mathbf{v}.$$

Beweis. Wegen der Linearität des Integrals und der Darstellung beliebiger Funktionen als Linearkombinationen charakteristischer Funktionen von Quadern genügt es, die Aussage für eine charakteristische Funktion

$$t = \chi_Q$$

zu beweisen. Wir schreiben

$$Q = Q_{\mathbf{u}} \times Q_{\mathbf{v}} \quad \text{mit} \quad Q_{\mathbf{u}} \subset \mathbb{R}^p \text{ und } Q_{\mathbf{v}} \subset \mathbb{R}^q.$$

Dann ist also

$$t_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = \begin{cases} \chi_{Q_u} & \text{falls} \quad \mathbf{v} \in Q_{\mathbf{v}} \\ 0 & \text{falls} \quad \mathbf{v} \notin Q_{\mathbf{v}} \end{cases}$$

eine Treppenfunktion auf $\mathbb{R}^p$. Ihr Integral über $\mathbb{R}^p$ ist

$$\int_{\mathbb{R}^p} t_{\mathbf{v}}(\mathbf{u})d\mathbf{u} = \begin{cases} |Q_{\mathbf{u}}| & \text{falls} \quad \mathbf{v} \in Q_{\mathbf{v}}, \\ 0 & \text{falls} \quad \mathbf{v} \notin Q_{\mathbf{v}}. \end{cases}$$

Und das doppelte Integral wird

$$\int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} t_{\mathbf{v}}(\mathbf{u})d\mathbf{u} \right) d\mathbf{v} = \int_{\mathbb{R}^q} |Q_{\mathbf{u}}|\chi_{Q_{\mathbf{v}}} d\mathbf{v} = |Q_{\mathbf{u}}| \cdot |Q_{\mathbf{v}}| = |Q| = \int_{\mathbb{R}^n} t(\mathbf{x})d\mathbf{x}. \qquad \square$$

Die Aussage des letzten Satzes ist so offensichtlich, dass die Vereinbarung der Notation schwieriger ist als der ganze Beweis. Aber diese Aussage ist eben der elementarste Fall des Satzes von Fubini, mit dem die Volumenintegration zurückgeführt wird auf mehrfache Integration.

Dieser Paragraph über Treppenfunktionen ist noch nicht übermäßig lang. Es ist noch Platz, Reihen von Treppenfunktionen zu behandeln. Eine Reihe von Treppenfunktionen

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_k, \quad t_k \in T(\mathbb{R}^n),$$

ist nichts anderes, als eine ganz gewöhnliche Reihe von Funktionen (in n Veränderlichen). Sie kann punktweise konvergieren, oder auch nicht. Sie kann punktweise absolut konvergieren oder auch nicht. Sie kann auch gleichmäßig konvergieren. Das gibt Anlass zu den wundervollsten Komplikationen. Weil wir davon noch genug haben werden, gehen wir ihnen hier aus dem Weg und betrachten nur Reihen von Treppenfunktionen $t_k \geq 0$. Wegen $t_k(\mathbf{x}) \geq 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ist die Reihe in jedem Punkt

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_k(\mathbf{x})$$

eine Reihe mit positiven Summanden. Die konvergiert genau dann, wenn sie beschränkt ist. Es wird häufig vorkommen, dass sie nicht beschränkt ist. Dann sagen wir, sie konvergiert gegen ∞.

Damit haben wir das Symbol ∞ noch nicht in den Rang einer echten Zahl erhoben. Aber wir müssen die folgenden Vereinbarungen treffen:

Definition 4.6 *Wir setzen*

$$\infty + c = \infty \text{ für } c \in \mathbb{R},$$
$$\infty \cdot c = \infty \text{ für } 0 \neq c \in \mathbb{R},$$
$$\infty \cdot 0 = 0,$$
$$\infty \pm \infty = \infty \cdot \infty = \infty,$$
$$c < \infty \text{ für alle } c \in \mathbb{R}.$$

Eine Funktion f, die außer reellen Zahlen auch das Symbol ∞ als Wert annehmen kann, werde ich 'Funktion' nennen. $f(\mathbf{x}) = \infty$ bedeutet ungefähr so viel wie, dass die 'Funktion' f im Punkt $\mathbf{x}$ nicht richtig definiert ist.

Beispiel 4.2 *Es seien Treppenfunktionen $t_k \in T(\mathbb{R}^n)$ definiert durch*

$$t_k(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad \mathbf{x} = (x_1, .., x_n) \text{ mit } |x_\nu| < k \text{ für alle } \nu \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Offensichtlich ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_k(\mathbf{x}) = \infty \quad \text{für alle} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Mit diesem Symbol ∞ ist auch der punktweise Grenzwert

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\mathbf{x})$$

definiert für *jede* Reihe von nicht-negativen 'Funktionen'

$$f_k : \mathbb{R}^n \to [0, \infty].$$

Wenn die Reihe in $\mathbf{x}$ beschränkt ist, konvergiert sie, und ihr Grenzwert ist $f(\mathbf{x})$. Wenn die Reihe in $\mathbf{x}$ nicht beschränkt ist, dann ist $f(\mathbf{x}) = \infty$.

Definition 4.7 *Wir betrachten 'Funktionen'*

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Eine Hüllreihe *für f ist eine Reihe von Treppenfunktionen*

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \chi_{Q_k} \quad \text{mit} \quad 0 \leq c_k \in \mathbb{R} \text{ und offenen Quadern } Q_k \subset \mathbb{R}^n,$$

so, dass

$$\varphi(\mathbf{x}) \geq |f(\mathbf{x})| \text{ für alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

(Nach Beispiel 4.2 hat jedes f eine solche Hüllreihe.)

Die Zahl (oder der Wert ∞)

$$I(\varphi) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k |Q_k|$$

heißt der Inhalt *der Hüllreihe.*

Die Zahl

$$\| f \|_1 := \inf\{I(\varphi) : \varphi \text{ ist Hüllreihe von } f\}$$

heißt die L^1-Halbnorm von f.

Nach unserer Definition hängt der Inhalt $I(\varphi)$ der Hüllreihe φ von der ganzen Reihe, und nicht nur von der 'Funktion' φ ab. Die Halbnorm $\| f \|_1$ hängt aber nur von der 'Funktion' f ab.

Beispiel 4.3 *Die etwas extreme 'Funktion' $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \infty$ sei definiert durch*

$$f(x) := \begin{cases} \infty & \textit{falls} \quad x = 0, \\ 0 & \textit{falls} \quad x \neq 0. \end{cases}$$

Für $k = 1, 2, ...$ betrachten wir die Treppenfunktionen

$$t_k(x) := \begin{cases} 1 & \textit{falls} \quad |x| < \epsilon \cdot 2^{-k} \\ 0 & \textit{falls} \quad |x| \geq \epsilon \cdot 2^{-k} \end{cases}$$

Dabei ist $\epsilon > 0$ zunächst fest. Die Reihe $\varphi := \sum t_k$ ist wegen $\varphi(0) = \infty$ eine Hüllreihe von f. Ihr Inhalt ist

$$I(\varphi) = \epsilon \cdot \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = \epsilon.$$

Also ist $\| f \|_1 \leq \epsilon$ für jedes $\epsilon > 0$. Es folgt $\| f \|_1 = 0$.

Beispiel 4.4 *Wir betrachten die Funktion*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} f(x) := 1 & \textit{für} \quad x \in \mathbb{Q} \\ f(x) := 0 & \textit{für} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Weil die rationalen Zahlen abzählbar sind, können wir sie in einer Folge

$$\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, ...\}$$

anordnen. Wir definieren Intervalle

$$I_k :=]q_k - \frac{\epsilon}{2^k}, q_k + \frac{\epsilon}{2^k}[.$$

Dann ist

$$\varphi = \sum_k \chi_{I_k}$$

eine Hüllreihe für f mit dem Inhalt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\epsilon}{2^k} = 2\epsilon.$$

Damit ist $\| f \|_1 = 0$. Eigenartig!

Beispiel 4.5 *Die 'Funktion' f auf $\mathbb{R}^1$ sei definiert durch*

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \textit{falls} \quad 0 < x \leq 1 \\ \infty & \textit{falls} \quad x = 0 \\ 0 & \textit{falls} \quad x < 0 \textit{ oder } x > 1 \end{cases}$$

Das Intervall $]0,1]$ *ist Vereinigung der unendlich vielen Intervalle*

$$J_k := \left]\frac{1}{(k+1)^2}, \frac{1}{k^2}\right], \quad k \in \mathbb{N},$$

mit

$$\sup_{x \in J_k} f(x) = f\left(\frac{1}{(k+1)^2}\right) = k+1.$$

Wir definieren Treppenfunktionen s_k *durch*

$$s_0 := \chi_{[0,1]}, \quad s_k := \chi_{[0,1/k^2]} = \begin{cases} 1 & \textit{falls} \quad 0 \leq x \leq \dfrac{1}{k^2} \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Für die mit diesen Treppenfunktionen gebildete Reihe ψ *ist*

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k(x) = \begin{cases} \infty & \textit{falls} \quad x = 0 \\ k+1 & \textit{falls} \quad x \in J_k \setminus J_{k+1} \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Also wäre ψ *eine Hüllreihe für* f *mit*

$$I(\psi) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty,$$

falls die Intervalle $[0, 1/k^2]$ *offen wären. Das sind sie das leider nicht. Das reparieren wir mit dem berühmten* ϵ. *Wir setzen also*

$$t_0 := \chi_{]-\epsilon, 1+\epsilon[}$$

und für $k \geq 1$

$$t_k(x) := \begin{cases} 1 & \textit{falls} \quad -\epsilon \cdot 2^{-k} \leq x \leq \dfrac{1}{k^2} + \epsilon \cdot 2^{-k} \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Wegen $t_k \geq s_k$ *ist* $\varphi := \sum_0^\infty t_k$ *eine Hüllreihe für* f *mit*

$$I(\varphi) = I(\psi) + 2\epsilon \cdot \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} < \infty.$$

Die Halbnorm $\| f \|_1$ heißt Halb*norm*, weil sie einerseits einige Eigenschaften einer Norm hat:

Satz 4.7 *Für 'Funktionen'* $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *und* $c \in \mathbb{R}$ *gelten*
a) Homogenität: $\| c \cdot f \|_1 = |c| \cdot \| f \|_1$,
b) Dreiecksungleichung: $\| f + g \|_1 \leq \| f \|_1 + \| g \|_1$,
c) Monotonie: $|f| \leq |g| \Rightarrow \| f \|_1 \leq \| g \|_1$.

Beweis. a) Ist $\varphi = \sum c_k \chi_{Q_k}$ eine Hüllreihe für f, so ist $|c| \cdot \varphi$ eine Hüllreihe für cf. Das gilt auch umgekehrt, falls nicht $c = 0$ ist. Aber dann ist die Formel trivial.

c) Jede Hüllreihe für g ist auch eine Hüllreihe für f.

Die Aussage b) beweisen wir hier nicht gesondert, sondern gleich ihre Verallgemeinerung auf unendliche Reihen:

Satz 4.8 *Für 'Funktionen' $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $k = 1, 2, ...,$ gilt*

$$\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k \|_1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \| f_k \|_1 .$$

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Zu jeder 'Funktion' f_k wählen wir eine Hüllreihe $\varphi_k = \sum_i c_{i,k}\chi_{Q_{i,k}}$ mit dem Inhalt

$$I(\varphi_k) = \sum_i c_{i,k}|Q_{i,k}| \leq \| f_k \|_1 + \frac{\epsilon}{2^k}.$$

Die Doppelreihe

$$\varphi := \sum_k \varphi_k = \sum_{k,i} c_{i,k}\chi_{Q_{i,k}}$$

konvergiert absolut in einem Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, oder hat den Grenzwert ∞. In jedem Fall ist dieser Grenzwert unabhängig von der Summationsreihenfolge. Und φ ist eine Hüllreihe der Funktion $\sum_k f_k$. Ihr Inhalt ist

$$I(\varphi) = \sum_k \left(\sum_i c_{i,k}|Q_{i,k}| \right) \leq \sum_k \left(\| f_k \|_1 + \frac{\epsilon}{2^k} \right) = \epsilon + \sum_k \| f_k \|_1 .$$

Wegen $\| \sum_k f_k \|_1 \leq I(\varphi)$ folgt hieraus für $\epsilon \to 0$ die Behauptung. □

Andererseits heißt die Halbnorm $\| f \|_1$ *Halb*norm, weil ihr einige Eigenschaften einer Norm abgehen: So ist der Wert $\| f \|_1$ nicht immer eine Zahl, sondern auch manchmal das Symbol ∞. Daran kann man sich gewöhnen. Schwerwiegender ist: Die Aussage

$$\| f \|_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad f \equiv 0$$

gilt nicht. Beispiel 4.3 ist hierzu ein Gegenbeispiel. Tröstlich ist allerdings

Satz 4.9 *Aus $\| f - g \|_1 = 0$ folgt $\| f \|_1 = \| g \|_1$.*

Beweis. Wenn $f(\mathbf{x})$ und $g(\mathbf{x})$ endlich sind, dann gilt

$$g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \quad \text{und} \quad |g(\mathbf{x})| \leq |f(\mathbf{x})| + |g(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})|.$$

Aber mit unseren Vereinbarungen für die Verwendung des Symbols ∞ gilt diese Ungleichung auch, wenn $f(\mathbf{x}) = \infty$ oder $g(\mathbf{x}) = \infty$. Mit der Monotonie (Satz 4.7 c) und der Dreiecksungleichung (Satz 4.7 b) sieht man dann

$$\| g \|_1 \leq \| |f| + |g - f| \|_1 \leq \| f \|_1 + \| g - f \|_1 = \| f \|_1$$

und analog $\| f \|_1 \leq \| g \|_1$. □

Der bisher aufgebaute Begriffsapparat strotzt nur so vor Subtilitäten. Beispielsweise ist die folgende Aussage absolut nicht-trivial. Ohne sie wäre unsere ganze (mehr oder weniger) schöne Theorie sinnlos. Königsberger nennt diese Aussage in seinem Buch 'Fundamentallemma'.

Satz 4.10 *Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener Quader. Seine charakteristische Funktion χ_A hat die L^1-Halbnorm*

$$\| \chi_A \|_1 = |A| = \int \chi_A.$$

Beweis. a) $\| \chi_A \|_1 \leq |A|$: Für jeden offenen Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$, der A enthält, ist χ_Q eine (ziemlich kurze) Hüllreihe von χ_A. Also ist $\| \chi_A \|_1 \leq I(\chi_Q) = |Q|$. Und zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein Q mit $|Q| \leq |A| + \epsilon$.

b) $|A| \leq \| \chi_A \|_1$: Es sei $\varphi = \sum c_k \chi_{Q_k}$ eine Hüllreihe der Funktion χ_A. Weiter sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Für jedes $\mathbf{x} \in A$ ist $\varphi(\mathbf{x}) \geq 1$ und es gibt einen Index $N(\mathbf{x})$ mit

$$\sum_{k=1}^{N(\mathbf{x})} c_k \chi_{Q_k}(\mathbf{x}) \geq 1 - \epsilon.$$

Weil die endlich vielen Quader in dieser Ungleichung offen sind, ist ihr Durchschnitt $U(\mathbf{x})$ auch ein offener Quader, der $\mathbf{x}$ enthält. Und für alle Punkte in $U(\mathbf{x})$ gilt die Ungleichung auch. A ist kompakt, und nach der Heine-Borel-Eigenschaft (Satz 1.9) gibt es endlich viele Punkte $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_p \in A$ mit

$$A \subset U(\mathbf{x}_1) \cup ... \cup U(\mathbf{x}_p).$$

Für $N := max\{N(\mathbf{x}_1), ..., N(\mathbf{x}_p)\}$ ist

$$\sum_{k=1}^{N} c_k \chi_{Q_k} \geq (1 - \epsilon)\chi_A.$$

Mit Satz 4.5 a) folgt für alle $\epsilon > 0$

$$I(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k |Q_k| \geq \sum_{k=1}^{N} c_k |Q_k| = \int \sum_{k=1}^{N} c_k \chi_{Q_k} \geq \int (1 - \epsilon)\chi_A = (1 - \epsilon)|A|.$$

□

Die Identität aus Satz 4.10 gilt nicht nur für charakteristische Funktionen abgeschlossener Quader, sondern allgemeiner für Treppenfunktionen.

Satz 4.11 *Für jede Treppenfunktion t ist*

$$\| t \|_1 = \int |t|.$$

Beweis. Weil t und $|t|$ dieselbe L^1-Halbnorm haben, nehmen wir gleich $t \geq 0$ an. Die Treppenfunktion t hat eine Darstellung

$$t = \sum_{k=1}^{r} c_k \chi_{Q_k} + \sum_{l=1}^{s} d_l \chi_{R_l},$$

wobei

- die Q_k und die R_l disjunkte Quader sind,
- die Q_k offen (nicht-leer) sind,
- die R_L entartet sind.

Jeder beliebige, nicht-entartete Quader Q ist ja die disjunkte Vereinigung eines offenen Quaders Q^o mit endlich vielen entarteten Quadern im Rand. Weil alle Q_k und R_l disjunkt sind, folgt aus $t \geq 0$, dass $c_k \geq 0, d_l \geq 0$ für alle k und l.

a) $\| t \|_1 \leq \int t$: Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Zu jedem R_l sei R_l^* ein offener Quader mit $R_l \subset R_l^*$ und $|R_l^*| \leq \epsilon$. Dann ist

$$\varphi := \sum_{k=1}^{r} c_k \chi_{Q_k} + \sum_{l=1}^{s} d_l \chi_{R_l^*}$$

eine Hüllreihe für t. Mit ihr folgt

$$\| t \|_1 \leq \sum_{k=1}^{r} c_k |Q_k| + \epsilon \cdot \sum_{l=1}^{s} d_l.$$

Weil dies für alle $\epsilon > 0$ so ist, muss gelten

$$\| t \|_1 \leq \sum_{k=1}^{r} c_k |Q_k| = \int t.$$

b) $\int t \leq \| t \|_1$: Wir wählen einen abgeschlossenen Quader A so, dass $t(\mathbf{x}) = 0$ ist für $\mathbf{x} \notin A$. Weiter sei $m \geq 0$ das Maximum der Funktion t. Wir betrachten die Treppenfunktion

$$u := m \cdot \chi_A - t \geq 0$$

mit

$$\int t = \int (m \cdot \chi_A - u) = \int m \cdot \chi_A - \int u.$$

Hier ist wegen Satz 4.10 und der Dreiecksungleichung

$$\int m \cdot \chi_A = \| m \cdot \chi_A \|_1 = \| t + u \|_1 \leq \| t \|_1 + \| u \|_1 .$$

Mit der schon bewiesenen Teilaussage $\| u \|_1 \leq \int u$ erhalten wir

$$\int t \leq (\| t \|_1 + \| u \|_1) - \| u \|_1 = \| t \|_1 .$$

□

Beispiel 4.6 *Ein eindimensionaler abgeschlossener Quader ist ein abgeschlossenes Intervall* $[a, b] \subset \mathbb{R}^1$. *Seine charakteristische Funktion ist*

$$\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & \textit{falls} \quad a \leq x \leq b \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Satz 4.10 sagt dann

$$\| \chi_{[a,b]} \|_1 = b - a.$$

Die Einsfunktion 1 *auf* $\mathbb{R}$ *(mit* $1(x) = 1$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$*) hat die Eigenschaft*

$$1 \geq \chi_{[-n,n]} \quad \textit{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Daraus folgt mit Satz 4.7 c), dass $\| 1 \|_1 \geq 2n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$, *also* $\| 1 \|_1 = \infty$ *ist.*

Nun sei f die Funktion aus Beispiel 4.4 und

$$g := 1 - f = \begin{cases} 0 & \textit{falls} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \textit{falls} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Aus

$$\infty = \| 1 \|_1 = \| f + g \|_1 \leq \| f \|_1 + \| g \|_1 = \| g \|_1$$

folgt $\| g \|_1 = \infty$.

Aufgabe 4.1 *Berechnen Sie für $0 < n \in \mathbb{N}$ ordentlich und exakt*

$$\sum_{k=1}^{\infty} n^{-k}.$$

Aufgabe 4.2 *Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei Riemann-integrierbar. Zeigen Sie:*

$$\| f \|_1 = \int_a^b |f(x)| dx.$$

Aufgabe 4.3 *Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $f_\alpha :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ definiert durch*

$$f_\alpha(x) := x^\alpha.$$

Zeigen Sie $\| f_\alpha \|_1 = \infty$.

Aufgabe 4.4 *Die 'Funktion' $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ habe die Eigenschaft $f(x) = \infty$ für $0 \leq x \leq 1$. Berechnen Sie $\| f \|_1$.*

4.2 Lebesgue-Integral

Definition 4.8 *Die 'Funktion' $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ heißt* über $\mathbb{R}^n$ Lebesgue-integrierbar, *wenn eine Folge t_k von Treppenfunktionen existiert mit*

$$\lim_{k \to \infty} \| f - t_k \|_1 = 0.$$

Wenn aus dem Zusammenhang klar ist, dass wir dies so meinen, sagen wir auch kurz: f ist integrierbar.

Aus $f = f - t_k + t_k$ folgt

$$\| f \|_1 \leq \| f - t_k \|_1 + \| t_k \|_1 .$$

Ist k groß genug, dann ist $\| f - t_k \|_1$ endlich, und wir sehen: Für jede Lebesgue-integrierbare Funktion f ist $\| f \|_1$ endlich.

Wie bei der Definition der Riemann-Integrierbarkeit wird also die Funktion f durch Treppenfunktionen approximiert. Beim Riemann-Integral wird die Güte der Approximation durch ein Integral $\int \varphi - \psi$ mit Treppenfunktionen φ, ψ gemessen. Hier aber wird die Approximationsgüte durch die L^1-Norm $\| f - t_k \|_1$ gemessen. Und darin steckt eine zweite Approximation. Das ist der wesentliche neue Gesichtspunkt.

Satz 4.12 *a) Es sei t_k eine Folge von Treppenfunktionen mit*

$$\lim_k \| f - t_k \|_1 = 0.$$

Dann ist $\lim \int t_k \in \mathbb{R}$ *endlich.*
b) Es seien t_k und u_k zwei Folgen von Treppenfunktionen mit

$$\lim \| f - t_k \|_1 = \lim \| f - u_k \|_1 = 0.$$

Dann ist

$$\lim \int t_k = \lim \int u_k.$$

Beweis. Für je zwei Treppenfunktionen s und t ist

$$|s(\mathbf{x}) - t(\mathbf{x})| = |s(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}) - t(\mathbf{x})| \leq |s(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| + |f(\mathbf{x}) - t(\mathbf{x})|$$

wenn $f(\mathbf{x})$ endlich ist. Aber auch wenn $f(\mathbf{x}) = \infty$ ist, folgt diese Ungleichung aus unseren Vereinbarungen

$$s(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - t(\mathbf{x}) = \infty.$$

Mit der Dreiecksungleichung (Satz 4.7 b) haben wir also

$$\| s - t \|_1 \leq \| s - f \|_1 + \| f - t \|_1 .$$

a) Wegen

$$\left| \int t_k - \int t_l \right| \leq \int |t_k - t_l| = \| t_k - t_l \|_1 \leq \| t_k - f \|_1 + \| f - t_l \|_1$$

ist die Folge der Integrale $\int t_k$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ und konvergiert in $\mathbb{R}$.

b) Mit

$$\left| \int t_k - \int u_k \right| = \left| \int (t_k - u_k) \right| \leq \int |t_k - u_k| = \| t_k - u_k \|_1 \leq \| t_k - f \|_1 + \| f - u_k \|_1,$$

folgt für $k \to \infty$ die Behauptung. $\square$

Wegen Satz 4.12 ist die folgende Definition sinnvoll:

Definition 4.9 *Die 'Funktion' $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ sei Lebesgue-integrierbar und t_k eine Folge von Treppenfunktionen wie in Definition 4.8. Dann heißt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} := \lim \int_{\mathbb{R}^n} t_k \in \mathbb{R}$$

das Lebesgue-Integral *von f über $\mathbb{R}^n$. Wenn die Bedeutung aus dem Zusammenhang klar ist, werden wir für dieses Integral auch $\int f$ schreiben.*

Beispiel 4.7 *Es sei f die Funktion aus Beispiel 4.3. Für jedes k setzen wir $t_k \equiv 0$. Dann ist*

$$\lim_k \| f - t_k \|_1 = \| f \|_1 = 0.$$

Also ist f über $\mathbb{R}^1$ Lebesgue-integrierbar mit

$$\int_{\mathbb{R}} f = \lim \int_{\mathbb{R}} 0 = 0.$$

Satz 4.13 *Es sei f Lebesgue-integrierbar.*
a) Dann ist auch auch $|f|$ Lebesgue-integrierbar, und es gilt

$$\left| \int f \right| \leq \int |f|.$$

b) Es ist $\int |f| = \| f \|_1$.

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es eine Folge t_k von Treppenfunktionen mit $\| f - t_k \|_1 \to 0$.
a) Aus

$$|\,|f| - |t_k|\,| \leq |f - t_k|$$

und der Monotonie der L^1-Norm folgt

$$\lim \| \, |f| - |t_k| \, \|_1 \leq \lim \| f - t_k \|_1 = 0.$$

b) Es ist

$$\| f \|_1 - \| f - t_k \|_1 \leq \| t_k \|_1 \leq \| f \|_1 + \| f - t_k \|_1 \ .$$

Wegen

$$\lim \| t_k \|_1 = \lim \int |t_k| = \int |f|$$

folgt daraus die Behauptung. □

Satz 4.14 (Rechenregeln) *Es seien f und g integrierbar.*
a) (Linearität) Für $a, b \in \mathbb{R}$ ist $\int (af + bg) = a \int f + b \int g$.
b) (Monotonie) $f \leq g \quad \Rightarrow \quad \int f \leq \int g$.
c) Ist zusätzlich g beschränkt, dann ist auch $f \cdot g$ integrierbar.

Beweis. a) Sind t_k und u_k approximierende Folgen von Treppenfunktionen für f, bzw. g im Sinn von Definition 4.8, dann ist $at_k + bu_k$ eine approximierende Folge von Treppenfunktionen für $af + bg$.

b) Wegen $g - f \geq 0$ ist nach Satz 4.13 b)

$$\int (g-f) = \| g-f \|_1 \geq 0.$$

c) Es sei $|g| \leq M \in \mathbb{R}$. Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es eine Treppenfunktion t mit

$$\| f-t \|_1 \leq \frac{\epsilon}{M}.$$

Weiter sei $|t| \leq m \in \mathbb{R}$ und u eine Treppenfunktion mit

$$\| g-u \|_1 \leq \frac{\epsilon}{m}.$$

Dann ist

$$|fg - tu| = |(fg - tg) + (tg - tu)| \leq |f-t| \cdot |g| + |t| \cdot |g-u|.$$

Daraus folgt

$$\| fg - tu \|_1 \leq M \cdot \| f-t \|_1 + m \| g-u \|_1 \leq 2\epsilon.$$

□

Bei näherem Hinsehen ist die Formel

$$\int -f = -\int f$$

aus Satz 4.14 a) überraschend, wenn f tatsächlich den Wert $f(\mathbf{x}) = \infty$ annehmen kann. Man erwartet, dass die approximierenden Treppenfunktionen t_k für f bei $\mathbf{x}$ irgendwie gegen unendlich gehen. Die approximierenden Funktionen $-t_k$ für $-f$ gehen dann bei $\mathbf{x}$ gegen $-\infty$ und nicht gegen $-f(\mathbf{x}) = \infty$. Aber es ist

$$-f - (-t_k) = \left\{ \begin{array}{ccc} -(f-t_k) & \text{wo} & f(\mathbf{x}) \text{ endlich} \\ \infty & \text{wo} & f(\mathbf{x}) = \infty \end{array} \right\} = -(f-t_k)$$

und

$$|-f-(-t_k)| = |f-t_k|.$$

Irgendwie unheimlich ist ∞ schon.

Beispiel 4.8 *Für echte Funktionen beweist man elementar*

$$max(f,g) = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|), \quad min(f,g) = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|).$$

Für integrierbare Funktionen f und g sind also auch die Funktionen $max(f,g)$ und $min(f,g)$ integrierbar. Insbesondere sind damit die Funktionen

$$f^+ := max(f,0) \quad \textit{und} \quad f^- := max(-f,0)$$

integrierbar. f^+ bzw. f^- heißen positiver*, bzw.* negativer *Anteil von f. Es ist*

$$f^+ \geq 0, \quad f^- \geq 0, \quad f = f^+ - f^-.$$

Diese Zerlegung in positiven und negativen Anteil funktioniert auch für 'Funktionen': Mit f ist auch der positive Anteil definiert durch

$$f^+(\mathbf{x}) = max(f(\mathbf{x}), 0) = \frac{1}{2}\left(f(\mathbf{x}) + |f(\mathbf{x})|\right)$$

integrierbar. Und mit der Funktion f^- definiert durch

$$f^-(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{wenn} \quad f(\mathbf{x}) \geq 0 \\ -f(\mathbf{x}) & \text{wenn} \quad f(\mathbf{x}) < 0 \end{cases}$$

gilt nach wie vor

$$f = f^+ - f^-.$$

Damit beweist man:

Satz 4.15 *Die 'Funktion' f ist genau dann integrierbar, wenn f^+ und f^- dies sind. Und dann gilt*

$$\int f = \int f^+ - \int f^-.$$

Damit genügt es, manche Aussagen nur für den Fall $f \geq 0$ zu beweisen.

Satz 4.16 *Es sei f auf $\mathbb{R}^n$ integrierbar.*
a) (Translation) Es sei $a \in \mathbb{R}^n$. Mit $f(\mathbf{x})$ ist auch $f(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ integrierbar und es gilt

$$\int f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int f(\mathbf{x} - \mathbf{a})d\mathbf{x}.$$

b) (Streckung) Es sei $0 < R \in \mathbb{R}$. Mit $f(\mathbf{x})$ ist auch $f(R \cdot \mathbf{x})$ integrierbar und es gilt

$$\int f(R \cdot \mathbf{x})d\mathbf{x} = \frac{1}{R^n} \int f(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

Beweis. Dass f integrierbar ist mit $\int f = c$, bedeutet: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es eine Treppenfunktion t und eine Hüllreihe φ mit

$$|f - t| \leq \varphi, \quad I(\varphi) < \epsilon, \quad \left|\int t - c\right| < \epsilon.$$

a) Ist $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader, so bezeichne

$$\mathbf{a} + Q := \{\mathbf{a} + \mathbf{x} : \mathbf{x} \in Q\}$$

den um $\mathbf{a}$ verschobenen Quader. Der hat die gleichen Kantenlängen wie Q und deswegen ist $|\mathbf{a} + Q| = |Q|$. Daraus folgt

$$\int t(\mathbf{x} - \mathbf{a})d\mathbf{x} = \int t(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

für jede Treppenfunktion t und

$$I(\varphi(\mathbf{x} - \mathbf{a})) = I(\varphi(\mathbf{x}))$$

für jede Hüllreihe φ. Mit t und φ wie oben folgt daraus

$$|f(\mathbf{x} - \mathbf{a}) - t(\mathbf{x} - \mathbf{a})| \leq \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{a}), \quad I(\varphi(\mathbf{x} - \mathbf{a})) < \epsilon, \quad \left|\int t(\mathbf{x} - \mathbf{a})d\mathbf{x} - c\right| < \epsilon.$$

b) Ist $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader, so bezeichne

$$\frac{1}{R}Q := \{\frac{1}{R}\mathbf{x} : \mathbf{x} \in Q\}$$

den mit dem Faktor $1/R$ gestreckten Quader. Dessen Kantenlängen sind alle auch mit dem Faktor $1/R$ multipliziert worden und deswegen ist $|1/R \cdot Q| = 1/R^n \cdot |Q|$. Daraus folgt

$$\int t(R \cdot \mathbf{x})d\mathbf{x} = \frac{1}{R^n} \int t(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

für jede Treppenfunktion t und

$$I(\varphi(R \cdot x)) = \frac{1}{R^n} \cdot I(\varphi(\mathbf{x}))$$

für jede Hüllreihe φ. Weiter verläuft der Beweis wie in a). $\square$

Definition 4.10 *Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ und $f : A \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Dann heißt die 'Funktion'*

$$f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \quad f_A(\mathbf{x}) := \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{falls} \quad x \in A \\ 0 & \text{falls} \quad \mathbf{x} \notin A \end{cases}$$

die triviale Fortsetzung *von f nach $\mathbb{R}^n$.*

Beispiel 4.9 *Die charakteristische Funktion χ_A ist die triviale Fortsetzung 1_A der Funktion $\equiv 1$ von A nach $\mathbb{R}^n$.*

Definition 4.11 *Es seien $A \subset \mathbb{R}^n$ und f wie in Definition 4.10. Dann heißen*

- *die 'Funktion' f über A integrierbar, wenn f_A (über $\mathbb{R}^n$) integrierbar ist,*
- $$\int_A f(\mathbf{x})d\mathbf{x} := \int_{\mathbb{R}^n} f_A(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

  das Lebesgue-Integral *von f über A,*
- $\| f \|_{1,A} := \| f_A \|_1$ *die L^1-Halbnorm von f über A.*

Ob f über A integrierbar ist, hängt natürlich von f, aber auch von der Menge A ab. Die bewiesenen Rechenregeln für die Integration von f_A übertragen sich auf die Integration von f über A. Insbesondere ist

$$\| f \|_{1,A} = \int_A |f|.$$

Beispiel 4.10 *Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann ist f auch Lebesgue-integrierbar und beide Integrale stimmen überein:*

$$\underset{\text{(Lebesgue)}}{\int_{[a,b]} f} = \underset{\text{(Riemann)}}{\int_a^b f(x)dx}$$

Beweis. Dass f Riemann-integrierbar ist, bedeutet dass es Folgen t_k und u_k von Treppenfunktionen auf dem Intervall $[a,b]$ gibt mit

$$t_k \leq f \leq u_k \quad \text{und} \quad \lim \int_a^b (u_k(x) - t_k(x))dx = 0.$$

Wir bezeichnen mit t_k, f, u_k auch die trivialen Fortsetzungen dieser Funktionen vom Intervall $[a,b]$ nach $\mathbb{R}$. Für die Folge t_k gilt dann wegen Satz 4.7 c) und Satz 4.13 b)

$$\| f - t_k \|_1 \leq \| u_k - t_k \|_1 = \int_{\mathbb{R}} (u_k - t_k) \to 0.$$

Also ist f über $[a,b]$ Lebesgue-integrierbar. Und das Lebesgue-Integral von f ist

$$\lim \int_{\mathbb{R}} t_k = \lim \int_a^b t_k(x)dx = \lim \int_a^b u_k(x)dx = \int_a^b f(x)dx,$$

das Riemann-Integral. □

Beispiel 4.10 lehrt, dass die Werte von Riemann-Integral und von Lebesgue-Integral übereinstimmen, wenn beide definiert sind. Zur Berechnung des Integrals hätte man also das Lebesgue-Integral nicht einzuführen brauchen. Der entscheidende Unterschied beider Integrale liegt in der besseren Verträglichkeit des Lebesgue-Integrals mit der Konvergenz von Funktionenfolgen. Hierzu der erste Konvergenzsatz.

Satz 4.17 (Kleiner Satz von B. Levi) *Die Folge von Treppenfunktionen $t_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvergiere punktweise gegen die 'Funktion' $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Weiter gelte:*

i) Die Folge t_k wachse monoton.

ii) Die Integralfolge $\int t_k$ sei beschränkt.

Dann ist f integrierbar mit

$$\int f = \lim_k \int t_k.$$

Beweis. Wegen der punktweisen Konvergenz können wir für alle k

$$f - t_k = \sum_{i=k}^{\infty} (t_{i+1} - t_i)$$

als Teleskopreihe schreiben. Wegen i) ist hier immer $t_{i+1} - t_i \geq 0$. Mit den Sätzen 4.13 b) und 4.14 a) folgt

$$\| f - t_k \|_1 \leq \sum_{i=k}^{\infty} \int |t_{i+1} - t_i| = \sum_{i=k}^{\infty} \left(\int t_{i+1} - \int t_i \right).$$

Die Folge der Integrale $\int t_k$ ist monoton wachsend und beschränkt. Sie konvergiert also. Ist I ihr Grenzwert, so haben wir

$$\sum_{i=k}^{\infty} \left(\int t_{i+1} - \int t_i \right) = \lim_{l \to \infty} \int t_l - \int t_k = I - \int t_k.$$

Und für f folgt

$$\| f - t_k \|_1 \leq I - \int t_k \to 0,$$

wenn $k \to \infty$. Das ist die Behauptung. $\square$

Als erstes wirklich neues Integrierbarkeitskriterium können wir mit Satz 4.17 beweisen:

Satz 4.18 *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt sowie $f : U \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Dann ist f über U integrierbar.*

Zum Beweis von Satz 4.18 erst ein Lemma.

Satz 4.19 (Lemma) *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to [0, \infty[$, $f \geq 0$, stetig. Dann gibt es eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen, die punktweise gegen die trivial fortgesetzte Funktion f_U konvergiert.*

Beweis. Wir betrachten Würfel

$$W_r(\mathbf{a}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |x_1 - a_1| \leq r, ..., |x_n - a_n| \leq r\}.$$

Wir nennen $W_r(\mathbf{a})$ rational, wenn r und alle Koordinaten a_ν rational sind. Zu jeden $\mathbf{x} \in U$ gibt es wegen der Offenheit von U einen solchen rationalen Würfel $W_r(\mathbf{a})$, der $\mathbf{x}$ enthält. Die Menge U ist somit die Vereinigung der in ihr enthaltenen rationalen Würfel. Weil die Menge dieser Würfel abzählbar ist, können wir sie zu einer Folge

$$W_1, W_2, ... \quad \text{mit} \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k = U$$

anordnen.

Es sei m_k das Minimum der stetigen Funktion f auf dem kompakten Würfel W_k. Wir definieren die Treppenfunktion

$$t_k := m_k \cdot \chi_{W_k}$$

und haben $t_k \leq f$ für alle k wegen $f \geq 0$. Wir gehen über zu der monoton wachsenden Folge

$$u_i := \max_{k=1}^{i} t_k \leq f$$

von Treppenfunktionen und zeigen: Diese Folge konvergiert punktweise gegen f. Sei dazu $\mathbf{x} \in U$ fest. Wegen der Stetigkeit von f gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ einen rationalen Würfel W_k mit $\mathbf{x} \in W_k$ und $f(\mathbf{x}) - m_k < \epsilon$. Daraus folgt

$$|f(\mathbf{x}) - u_k(\mathbf{x})| = f(\mathbf{x}) - u_k(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}) - t_k(\mathbf{x}) < \epsilon.$$

$\square$

Beweis von Satz 4.18. Wegen der Zerlegung von f in seinen positiven und negativen Anteil genügt es, den Fall $f \geq 0$ zu betrachten. Damit ist Satz 4.19 anwendbar und liefert eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen u_k, die punktweise gegen f konvergiert. Um Satz 4.17 anzuwenden, müssen wir noch zeigen, dass die Folge der Integrale $\int u_k$ beschränkt ist.

Weil U beschränkt vorausgesetzt ist, gibt es einen Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ mit $U \subset Q$. Weil f beschränkt vorausgesetzt war, ist $M := sup\{f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in U\}$ endlich. Dann ist für alle k

$$u_k \leq M \cdot \chi_Q \quad \text{und} \quad \int u_k \leq M \cdot |Q|.$$

$\square$

Beispiel 4.11 *Die Funktion $f(x) = sin(1/x)$ ist auf dem offenen Intervall $]0,1[$ stetig und beschränkt. Damit ist sie nach Satz 4.18 integrierbar. Das ist mehr, als wir aus dem ersten Semester wissen, denn da haben wir nur über abgeschlossene Intervalle integriert. Aber mit der Substitutionsformel wird für jedes $0 < r < 1$*

$$\int_r^1 sin(1/x)dx = \int_{1/r}^1 sin(u)\left(-\frac{1}{u^2}\right)du = \int_1^{1/r} \frac{sin(u)}{u^2}du.$$

Für $r \to 0$ stellt sich das Lebesgue-Integral als konvergentes uneigentliches Riemann-Integral heraus. Streng genommen müsste ich hier noch zeigen, dass das Lebesgue-Integral von f über $]0,1[$ der Grenzwert der Integrale für $r \to 0$ ist. Das folgt aber aus

$$\int_{]0,r[} f \leq \int_{]0,r[} |f| \leq \int_{]0,r[} 1 \to 0.$$

Satz 4.18 hat ein kompaktes Analogon (Satz 4.23 unten). Für dessen Beweis müssen wir allerdings etwas in die mengentheoretische Topologie einsteigen. Ich gebe bei den folgenden Aussagen die Namen der Mathematiker an, die diese - allerdings sehr viel allgemeiner - bewiesen haben.

Satz 4.20 (Lemma) *Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann ist die Abstandsfunktion*

$$d(\mathbf{x}, K) := \min_{\mathbf{y} \in K} d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

stetig.

Beweis. Es seien $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$. Weil K kompakt ist, existieren $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in K$ mit $d(\mathbf{x}_1, K) = d(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1), d(\mathbf{x}_2, K) = d(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2)$. Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$d(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) \leq d(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2) \leq d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + d(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2),$$

$$d(\mathbf{x}_1, K) \leq d(\mathbf{x}_2, K) + d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2),$$

$$d(\mathbf{x}_1, K) - d(\mathbf{x}_2, K) \leq d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2).$$

Vertauscht man hier $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$, so erhält man genauso

$$d(\mathbf{x}_2, K) - d(\mathbf{x}_1, K) \leq d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2),$$

also zusammen

$$|d(\mathbf{x}_1, K) - d(\mathbf{x}_2, K)| \leq d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2).$$

□

Satz 4.21 (Trennungssatz von Urysohn) *Es seien K_0 und $K_1 \subset \mathbb{R}^n$ kompakte Mengen mit leerem Durchschnitt $K_0 \cap K_1 = \emptyset$. Dann gibt es eine stetige Funktion $h : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ mit*

$$h|K_0 \equiv 0, \quad h|K_1 \equiv 1.$$

Beweis. Die Funktion $g_0(\mathbf{x}) := d(\mathbf{x}, K_0)$ ist nach Satz 4.20 stetig auf $\mathbb{R}^n$ mit $g_0(\mathbf{x}) \geq 0$ und $g_0(\mathbf{x}) = 0$ für $\mathbf{x} \in K_0$. Weiter ist $m := min\{g_0(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in K_1\} > 0$. Wir betrachten die stetige Funktion

$$g_1 : \mathbb{R}^n \to [0, m], \quad g_1(\mathbf{x}) := min(g_0(\mathbf{x}), m).$$

Für sie ist

$$g_1(\mathbf{x}) = 0 \text{ falls } x \in K_0 \quad \text{und} \quad g_1(\mathbf{x}) = m \text{ falls } \mathbf{x} \in K_1.$$

Die Funktion $h := g_1/m$ leistet das gewünschte.

□

Satz 4.22 (Fortsetzungssatz von Tietze) *Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es eine stetige Fortsetzung g von f auf ganz $\mathbb{R}^n$.*

Beweis. Es sei

$$s := \| f \|_K = \max_{\mathbf{x} \in K} |f(\mathbf{x})|.$$

Die Intervalle

$$A_0 := [-s, -\frac{s}{3}], \quad A_1 := [\frac{s}{3}, s]$$

sind abgeschlossen in $\mathbb{R}$. Nach Satz 1.11 a) sind ihre Urbilder

$$K_0 := f^{-1}(A_0) = \{\mathbf{x} \in K : -s \leq f(\mathbf{x}) \leq -\frac{s}{3}\} \quad \text{und} \quad K_1 := f^{-1}(A_1) = \{\mathbf{x} \in K : \frac{s}{3} \leq f(\mathbf{x}) \leq s\}$$

abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$ und damit kompakt. Sie sind offensichtlich disjunkt. Nach dem Trennungssatz 4.21 gibt es eine stetige Funktion

$$f_0 : \mathbb{R}^n \to [-\frac{s}{3}, \frac{s}{3}] \quad \text{mit} \quad f|K_0 = -\frac{s}{3},\ f|K_1 = \frac{s}{3}.$$

Deswegen gilt

$$\| f(\mathbf{x}) - f_0(\mathbf{x}) \|_K \leq \frac{2}{3} s = \frac{2}{3} \| f \|_K .$$

Nun definieren wir stetige Funktionen g_k auf $\mathbb{R}^n$ durch

$$\begin{aligned} g_1 &:= f_0 \\ g_2 &:= (f - g_1|K)_0 \\ &\vdots \\ g_{k+1} &:= (f - (g_1 + \ldots + g_k)|K)_0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Durch Induktion zeigt man

$$|g_k| \leq \frac{s}{3^k}, \quad \| f - (g_1 + \ldots + g_{k+1}) \|_K = \| f - (g_1 + \ldots + g_k) - (f - (g_1 + \ldots + g_k))_0 \|_K = \left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot s.$$

Deswegen ist

$$g := \sum_{k=1}^{\infty} g_k$$

eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}^n$ mit

$$\| f - g \|_K = \lim_{N \to \infty} \| f - \sum_{k=1}^{N} g_k \|_K \leq \lim_{N \to \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^N \cdot s = 0.$$

Das heißt, es ist $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in K$. $\square$

Jetzt der angekündigte Satz für kompakte Mengen:

Satz 4.23 *Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f über K integrierbar.*

Beweis. Es sei g eine stetige Fortsetzung von f auf ganz $\mathbb{R}^n$. Wir wählen einen offenen Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ mit $K \subset Q$. Dann ist die Menge $Q \setminus K$ offen und g ist auf Q beschränkt. Nach Satz 4.18 sind g_Q und $g_Q \cdot \chi_{Q\setminus K}$ integrierbar. Dann ist auch

$$f_K = g_Q - g_Q \cdot \chi_{Q\setminus K}$$

integrierbar. □

Satz 4.24 *Für eine 'Funktion' $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ sind äquivalent:*
a) Zu jedem $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ gibt es eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{x} \in U$, so, dass $f|U$ integrierbar ist.
b) Für jede kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ ist $f|K$ integrierbar.
c) Für jede beschränkte offene Menge $B \subset \mathbb{R}^n$ ist $f|B$ integrierbar.

Beweis. a) $\Rightarrow$ b): Wegen Satz 4.15 können wir $f \geq 0$ annehmen. Zu jedem $\mathbf{x} \in K$ gibt es eine offene Menge $U_\mathbf{x} \subset \mathbb{R}^n$ so, dass $f|U_\mathbf{x}$ integrierbar ist. Weil K kompakt ist, gibt es endlich viele derartige Mengen U_k, $k = 1, ..., l$, so, dass K in $\bigcup_{k=1}^{l} U_k$ enthalten ist. Es sei

$$f_k := f_{U_k \cap K} = f_{U_k} \cdot \chi_K.$$

Mit Satz 4.14 c) und Satz 4.23 sind alle f_k integrierbar. Wegen $f \geq 0$ ist

$$f_K = \max_{k=1}^{l} f_k$$

und damit integrierbar.

b) $\Rightarrow$ c): Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge, die B enthält. Dann ist $f|B = f_K \cdot \chi_B$ nach Satz 4.14 c) und Satz 4.18 integrierbar.

c) $\Rightarrow$ a): Jeder Punkt $\mathbf{x}$ ist in einer beschränkten offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ enthalten. □

Definition 4.12 *Eine 'Funktion' mit den Eigenschaften aus Satz 4.24 heißt* lokal integrierbar.

Mit den Sätzen 4.18 und 4.23 haben wir eine große Klasse von Funktionen, die wir integrieren könnten, wenn wir wüssten, wie das geht. Mehrdimensionale Integrale rechnet man immer durch iterierte Integration aus. Das ist der Satz von Fubini. Wir beweisen jetzt eine erste Version dieses Satzes für stetige Funktionen. Dazu einige Vorbereitungen:

Es sei $n = p + q$ mit $p, q > 0$. Wie in Satz 4.6 spalten wir den $\mathbb{R}^n$ auf in $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ indem wir Vektoren des $\mathbb{R}^n$ schreiben als $\mathbf{x} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ mit $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^q$.

Definition 4.13 *Es sei $A \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$. Für $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^q$ heißt*

$$A_\mathbf{v} := \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p : (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in A\}$$

die Schnittmenge von A zu $\mathbf{v}$. Für $f : A \to \mathbb{R}$ und $A_\mathbf{v} \neq \emptyset$ definieren wir die Funktion

$$f_\mathbf{v} : A_\mathbf{v} \to \mathbb{R} \quad \textit{durch} \quad f_\mathbf{v}(\mathbf{u}) := f(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Satz 4.25 (Fubini für stetige Funktionen) *Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ und $f : A \to \mathbb{R}$ stetig, und zwar*

a) entweder A offen und beschränkt und auch f beschränkt, *b) oder A kompakt.*

Dann gelten:
1) Falls $A_{\mathbf{v}} \neq \emptyset$ ist, dann ist $f_{\mathbf{v}}$ über $A_{\mathbf{v}}$ integrierbar.
2) Die Funktion $F : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(\mathbf{v}) := \begin{cases} \int_{A_{\mathbf{v}}} f_{\mathbf{v}} & \textit{falls} \quad A_{\mathbf{v}} \neq \emptyset \\ 0 & \textit{falls} \quad A_{\mathbf{v}} = \emptyset \end{cases}$$

ist integrierbar.
3) Es ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_{\mathbb{R}^q} F.$$

Die Aussage schreibt man etwas suggestiver

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{u},\mathbf{v})\, d(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(\mathbf{u},\mathbf{v}) d\mathbf{u} \right) d\mathbf{v}.$$

Man kann sie auch iterieren und erhält

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1,...,x_n) d(x_1,...,x_n) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} ... \left(\int_{\mathbb{R}} f(x_1,...,x_n) dx_1 \right) ... dx_{n-1} \right) dx_n.$$

Beweis von Satz 4.25: Nach der Trennung von f in seinen positiven und negativen Anteil können wir o.B.d.A. $f \geq 0$ annehmen.

a) Wie in Satz 4.19 wählen wir eine monoton steigende Folge von Treppenfunktionen $t_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die punktweise gegen f_A konvergiert.

1) Für jedes $\mathbf{v}$ ist $(t_k)_{\mathbf{v}}$ mit $(t_k)_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) := t_k(\mathbf{u},\mathbf{v})$ eine monoton steigende Folge von Treppenfunktionen auf $\mathbb{R}^p$, die punktweise gegen $(f_{\mathbf{v}})_{A_{\mathbf{v}}}$ konvergiert. Wie im Beweis von Satz 4.18 zeigt man, dass die Folge der Integrale

$$\int_{\mathbb{R}^p} (t_k)_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) d\mathbf{u}$$

beschränkt ist. Also ist $f_{\mathbf{v}}$ integrierbar mit

$$F(\mathbf{v}) = \int_{\mathbb{R}^p} f_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^p} t_k(\mathbf{u},\mathbf{v}) d\mathbf{u}.$$

2) Die Funktionen

$$T_k : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}, \quad T_k(\mathbf{v}) := \int_{\mathbb{R}^p} t_k(\mathbf{u},\mathbf{v}) d\mathbf{u}$$

sind Treppenfunktionen. Sie bilden eine monoton steigende Folge, die wegen 1) punktweise gegen F konvergiert. Wegen $t_k \leq f_A$ folgt aus Satz 4.6

$$\int_{\mathbb{R}^q} T_k(\mathbf{v}) = \int_{\mathbb{R}^n} t_k(\mathbf{u},\mathbf{v}) d(\mathbf{u},\mathbf{v}) \leq \int_{\mathbb{R}^n} f_A(\mathbf{u},\mathbf{v}) d(\mathbf{u},\mathbf{v}).$$

Und nach Satz 4.17 ist F integrierbar mit

$$\int_{\mathbb{R}^q} F(\mathbf{v})\, d\mathbf{v} = \lim_{k\to\infty} T_k(\mathbf{v})\, d\mathbf{v}.$$

3) Weiter ist

$$\lim \int_{\mathbb{R}^q} T_k(\mathbf{v})\, d\mathbf{v} = \lim \int_{\mathbb{R}^n} t_k(\mathbf{u},\mathbf{v})\, d(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{u},\mathbf{v})\, d(\mathbf{u},\mathbf{v}).$$

b) Nun sei A kompakt. Wie im Beweis von Satz 4.23 wählen wir einen offenen Quader $B \subset \mathbb{R}^n$, der A enthält, und eine stetige Funktion $g : B \to \mathbb{R}$, die f fortsetzt. Und wir schreiben wieder

$$f_A = g_B - g_B \cdot \chi_{B\setminus A}.$$

Den Quader B zerlegen wir als

$$B = P \times Q, \quad P \subset \mathbb{R}^p,\, Q \subset \mathbb{R}^q.$$

Mit a) ist dann

$$\begin{aligned}
\int_A f &= \int_B (g - g\cdot\chi_{B\setminus A}) \\
&= \int_B g - \int_{B\setminus A} g \\
&= \int_Q \left(\int_P g(\mathbf{u},\mathbf{v})d\mathbf{u}\right) d\mathbf{v} - \int_Q \left(\int_P g(\mathbf{u},\mathbf{v})\cdot\chi_{B\setminus A}(\mathbf{u},\mathbf{v})d\mathbf{u}\right) d\mathbf{v} \\
&= \int_Q \left(\int_P (g(\mathbf{u},\mathbf{v}) - g(\mathbf{u},\mathbf{v})\cdot\chi_{B\setminus A}(\mathbf{u},\mathbf{v}))d\mathbf{u}\right) d\mathbf{v} \\
&= \int_Q \left(\int_P f(\mathbf{u},\mathbf{v})d\mathbf{u}\right) d\mathbf{v}.
\end{aligned}$$

□

Beispiel 4.12 *Es sei*

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\, x \geq 0,\, x^2 \leq y \leq 4\}$$

und

$$f(x,y) = y^{3/2} \cdot e^{xy}.$$

Die Menge A ist kompakt und f ist stetig. Also existiert das Integral

$$\int_A y^{3/2} e^{xy} d(x,y).$$

Das ist schön, aber wir wollen es eigentlich nicht wissen. Wir wollen das Integral ausrechnen. Das geht mit Fubini. Aber auf die Grenzen muss man sehr genau achten:

$$\begin{aligned}
\int_A y^{3/2} e^{xy} d(x,y) &= \int_0^4 \left(\int_0^{\sqrt{y}} y^{3/2} e^{xy} dx\right) dy \\
&= \int_0^4 \left(y^{3/2} \cdot \frac{1}{y} e^{xy}\Big|_{x=0}^{x=\sqrt{y}} \right) dy \\
&= \int_0^4 \sqrt{y}(e^{\sqrt{y}^3} - 1) dy
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^2 t(e^{t^3}-1)2t dt \\
&= 2\int_0^2 t^2(e^{t^3}-1)dt \\
&= 2\left(\frac{1}{3}e^{t^3}-\frac{1}{3}t^3\right)\Big|_0^2 \\
&= 2\left(\frac{1}{3}e^8-\frac{8}{3}-(\frac{1}{3}-0)\right) \\
&= \frac{2}{3}e^8-6
\end{aligned}
$$

Im Beweis von Satz 4.25 haben wir zuerst über $\mathbf{x}$ und dann über $\mathbf{y}$ integriert. Das hätten wir auch umgekehrt machen können. Am Beweis und am Integral hätte das nichts geändert. Mit den Voraussetzungen dieses Satzes gilt also die Formel

Satz 4.26 (Vertauschungssatz)

$$\int f(\mathbf{x},\mathbf{y})\, d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \int\left(\int f(\mathbf{x},\mathbf{y})\, d\mathbf{x}\right) d\mathbf{y} = \int\left(\int f(\mathbf{x},\mathbf{y})\, d\mathbf{y}\right) d\mathbf{x}.$$

Das ist sehr schön. Leider ist es Theorie. Praktisch kann es auf die Reihenfolge schon ankommen, wenn man das Integral in geschlossener Form auswerten will.

Beispiel 4.13 *Wir betrachten wieder die Situation in Beispiel 4.12. Aber jetzt integrieren wir zuerst über y:*

$$\int_B y^{3/2}e^{xy}d(x,y) = \int_0^2\left(\int_{x^2}^4 y^{3/2}e^{xy}dy\right)dx =???$$

Das innere Integral über y möchte ich lieber nicht auswerten. Ich fürchte, das kann ich nicht.

Aufgabe 4.5 *Berechnen Sie*

a) $\displaystyle\int_Q \frac{\sqrt{x}}{(1-y^2)(2+z)^2}d(x,y,z)$ *über den Quader*

$$Q := \{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 :\ 0\le x,y,z\le 1\},$$

b) $\int_M y^{3/2}e^{xy}d(x,y)$ *über die Menge*

$$M := \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : \le x^2 \le y \le 4\},$$

c) für jedes $n\in\mathbb{N}$ das Integral $\int_B (1+x^n y)dxdy$ über die Menge

$$B := \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 :\ y\ge 1-x, x^2+y^2\le 1\},$$

d) $\int_R (x^2-xy)d(x,y)$ *über die Menge*

$$R := \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 :\ 0\le x\le 1, 0\le y\le 4, x^2\le 2y\}.$$

Aufgabe 4.6 *Berechnen Sie* $\int_K x(y-1)d(x,y)$ *über die Menge*

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 1\}.$$

4.3 Volumen, Nullmengen

Die Länge $b-a$ eines Intervalls $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ist das Integral der Funktion $\equiv 1$ über dieses Intervall. Das verallgemeinern wir auf höhere Dimension.

Definition 4.14 *Die Menge* $A \subset \mathbb{R}^n$ *heißt* messbar, *wenn ihre charakteristische Funktion* χ_A *integrierbar ist. Deren Integral*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_A = \int_A 1$$

heißt dann das n*-dimensionale* Volumen $|A| = |A|_n$ *der Menge* A.

In der abstrakten Maß-Theorie nennt man dieses Volumen auch das *Lebesgue-Maß.*

Weil die 1-Funktion stetig und beschränkt ist, sind nach den Sätzen 4.18 und 4.23 alle beschränkten offenen und alle kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ messbar.

Satz 4.27 *Es seien* A *und* $B \subset \mathbb{R}^n$ *messbar.*
a) Dann sind auch $A \cup B$ *und* $A \cap B$ *messbar mit* $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
b) Wenn $A \subset B$, *dann ist* $|A| \leq |B|$.

Beweis. a) Nach Satz 4.14 c) ist $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$ integrierbar. Damit ist auch

$$\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$$

integrierbar und die Behauptung folgt.

b) Die Aussage folgt aus $\chi_A \leq \chi_B$. □

Beispiel 4.14 *Wir betrachten den Quader*

$$Q = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1 \leq x_1 \leq b_1, ..., a_n \leq x_n \leq b_n\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Sein Volumen berechnen wir mit Fubini

$$\begin{aligned} |Q| &= \int_Q 1 d(x_1, ..., x_n) \\ &= \int_{a_n}^{b_n} ... \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} dx_1 dx_2 ... dx_n \\ &= \int_{a_n}^{b_n} ... \int_{a_2}^{b_2} (b_1 - a_1) dx_2 ... dx_n \\ &= (b_1 - a_1) \int_{a_n}^{b_n} ... \int_{a_2}^{b_2} dx_2 ... dx_n \end{aligned}$$

Diese Integration wiederholen wir noch $n-1$ mal und finden als Volumen des Quaders

$$|Q| = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n).$$

Das ist beruhigend, denn es deckt sich mit Definition 4.4.

Beispiel 4.15 *Es sei*

$$K(R) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le R^2\} \subset \mathbb{R}^2$$

die Kreisscheibe vom Radius R in der Ebene. Ihr 2-dimensionales Volumen (= ihre Fläche) ist

$$|K(R)| = \int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} dx dy = \int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2-y^2} dy = R^2 \cdot \pi = R^2 \cdot |K(1)|.$$

Teil b) des folgenden Satzes verallgemeinert die Beziehung zwischen der Fläche des Kreises vom Radius R und der Fläche des Einheitskreises.

Satz 4.28 *Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ messbar.*
a) (Translation) Ist $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, dann ist auch die verschobene Menge

$$\mathbf{a} + A = \{\mathbf{a} + \mathbf{x} : \mathbf{x} \in A\}$$

messbar mit dem Volumen $|\mathbf{a} + A| = |A|$.
b) (Streckung) Ist $0 < R \in \mathbb{R}$, dann ist auch die gestreckte Menge $R \cdot A$ messbar mit dem Volumen

$$|R \cdot A| = R^n \cdot |A|.$$

Beweis. Die charakteristischen Funktionen von $\mathbf{a} + A$ und $R \cdot A$ sind

$$\chi_{\mathbf{a}+A}(\mathbf{x}) = \chi_A(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \quad \text{und} \quad \chi_{R\cdot A}(\mathbf{x}) = \chi_A(\frac{1}{R}\mathbf{x}).$$

Damit folgen die Behauptungen aus Satz 4.16. □

Beispiel 4.16 *Das Volumen der n-dimensionalen Vollkugel $K_n(R)$ ist*

$$|K_n(R)| = R^n \cdot |K_n(1)|.$$

Für das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel führen wir die Bezeichnung

$$\kappa_n := |K_n(1)|$$

ein. Es ist $\kappa_1 = |[-1,1]| = 2$ und $\kappa_2 = \pi$ nach Beispiel 4.15.

Die iterierte Integration nach Fubini (Satz 4.25) liefert sofort das klassische Werkzeug zur Volumenberechnung.

Satz 4.29 (Cavalierisches Prinzip) *Die Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ sei entweder offen und beschränkt oder kompakt. Wir zerlegen wieder*

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q.$$

Für festes $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^q$ sei

$$A_{\mathbf{v}} = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p : (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in A\}.$$

Auch $A_{\mathbf{u}} \subset \mathbb{R}^p$ ist wieder offen und beschränkt oder kompakt. Und weiter gilt

$$|A|_n = \int_{\mathbb{R}^q} |A_{\mathbf{v}}|_p d\mathbf{v}.$$

Beispiel 4.17 (Archimedes) *Es sei H die Halbkugel*

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$$

im $\mathbb{R}^3$ vom Radius R. Für festes z, $0 \leq z \leq R$, sind ihre ebenen Schnitte H_z Kreisscheiben vom Radius $\sqrt{R^2 - z^2}$ mit der Fläche (Beispiel 4.15)

$$|H_z|_2 = (R^2 - z^2) \cdot \pi.$$

Wir vergleichen sie mit dem Restkörper A, der entsteht, wenn man aus einem Zylinder

$$Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq R, x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

mit Höhe und Radius $= R$ einen Kegel

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq R, x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

ausbohrt. Die ebenen Schnitte A_z des Restkörpers sind Kreisringe mit äußerem Radius R und innerem Radius z. Sie haben die Fläche

$$|A_z|_2 = (R^2 - z^2) \cdot \pi = |H_z|_2.$$

Damit hat die Halbkugel H das gleiche Volumen wie der Restkörper A. Im nächsten Beispiel rechnen wir nach, dass der Kegel das Volumen

$$|K|_3 = \frac{1}{3} \textit{Grundfläche} \cdot \textit{Höhe} = \frac{1}{3} R^3 \cdot \pi$$

hat. Damit ist das Volumen von Halbkugel und Restkörper

$$|Z|_3 - |A|_3 = R^3 \cdot \pi - \frac{1}{3} R^3 \cdot \pi = \frac{2}{3} R^3 \cdot \pi$$

hat. Somit ergibt sich das Volumen der ganzen Kugel als

$$\frac{4}{3} R^3 \cdot \pi.$$

Beispiel 4.18 (Kegel) *Es sei $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ kompakt und $0 < h \in \mathbb{R}$. Der Kegel K im $\mathbb{R}^n$ über B mit der Höhe h entsteht, indem man alle Punkte von*

$$\{(\mathbf{x}, 0) : \mathbf{x} \in B\} \subset \mathbb{R}^n$$

mit dem Punkt $(\mathbf{0}, h)$ verbindet. Für $0 \leq z \leq h$ entstehen die horizontalen Schnitte K_z indem man die Menge B um den Faktor

$$1 - \frac{z}{h}$$

staucht. Nach Satz 4.28 haben sie das $n-1$-dimensionale Volumen

$$|K_z|_{n-1} = (1 - \frac{z}{h})^{n-1} \cdot |B|_{n-1}.$$

Mit dem Cavalierischen Prinzip wird

$$\begin{aligned} |K| &= \int_0^h (1 - \frac{z}{h})^{n-1} |B| dz \\ &= \frac{|B|}{h^{n-1}} \int_0^h (h-z)^{n-1} dz \\ &= \frac{|B|}{h^{n-1}} \cdot \left(- \frac{(h-z)^n}{n} \right)_0^h \\ &= \frac{|B|}{h^{n-1}} \cdot \frac{h^n}{n} \\ &= \frac{1}{n} \cdot |B| \cdot h. \end{aligned}$$

Für $n = 3$ ergibt dies die bekannte Formel

$$\textit{Kegelvolumen} = \frac{1}{3} \cdot \textit{Grundfläche} \cdot \textit{Höhe}.$$

Beispiel 4.19 (Simplex) *Das n-dimensionale Einheits-Simplex ist*

$$S_n = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0, ..., x_n \geq 0, x_1 + ... + x_n \leq 1.$$

Dies ist der Kegel der Höhe 1 mit dem $n-1$-dimensionalen Einheits-Simplex S_{n-1} als Basis. Sein Volumen ist deswegen

$$|S_n| = \frac{1}{n} \cdot |S_{n-1}|.$$

Das eindimensionale Einheitssimplex ist die Strecke $[0, 1]$ mit der Länge 1. Das 2-dimensinale Einheitssimplex ist das gleichschenklige rechtwinklige Dreieck mit der Schenkel-Länge 1 und der Fläche 1/2. Durch Induktion zeigt man

$$|S_n| = \frac{1}{n!}.$$

Mengen $A \subset \mathbb{R}^n$ mit $|A| = 0$ sind inhaltslos und damit für die Volumenberechnung praktisch uninteressant. Theoretisch sind sie aber sehr wichtig.

Definition 4.15 *Eine messbare Menge $N \subset \mathbb{R}^n$ mit $|N| = 0$ heißt* Nullmenge.

Beispiel 4.20 *Es seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ messbar und ihr Durchschnitt $A \cap B$ eine Nullmengen. Mit Satz 4.27 folgt, dass $A \cup B$ messbar ist mit*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = |A| + |B|.$$

Satz 4.30 *a) Die Menge $N \subset \mathbb{R}^n$ ist Nullmenge genau dann, wenn $\| \chi_N \|_1 = 0$.*
b) Jede Teilmenge einer Nullmenge ist auch eine Nullmenge.
c) Die Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen ist wieder eine Nullmenge.

Beweis. a) Es sei N eine Nullmenge. Wegen $\chi_N = |\chi_N|$ ist dann $\| \chi_N \|_1 = \int \chi_N = 0$. Sei umgekehrt $\| \chi_N \|_1 = 0$. Dann bilden die Treppenfunktionen $t_k := 0$ eine Folge mit

$$\| \chi_N - t_k \|_1 = \| \chi_N \|_1 = 0.$$

Also ist χ_N integrierbar mit

$$|N| = \int \chi_N = \lim \int t_k = 0.$$

b) Ist N eine Nullmenge und $M \subset N$, dann ist $\chi_M \leq \chi_N$ und die Behauptung folgt aus a) und Satz 4.14 b).

c) Es seien N_k, $k \in \mathbb{N}$ Nullmengen und $N = \bigcup N_k$. Mit Satz 4.8 ist

$$\| \chi_N \|_1 \leq \| \sum_k \chi_{N_k} \|_1 \leq \sum_k \| \chi_{N_k} \|_1 = 0.$$

Beispiel 4.21 *Jeder ausgeartete Quader hat das Volumen 0 und ist eine Nullmenge. Jede abzählbare Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist als abzählbare Vereinigung von Punkten (= entartete Quader) eine Nullmenge.*

Beispiel 4.22 *Jede Koordinaten-Hyperebene $x_m = 0$ ist eine Nullmenge im $\mathbb{R}^n$. Denn für $m = n$ beispielsweise ist*

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} Q_k$$

mit den ausgearteten Quadern

$$Q_k = \{(\mathbf{x}, 0) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-1} \, |x_1| \leq k, ..., |x_{n-1}| \leq k.$$

Beispiel 4.23 *Es sei $K \subset \mathbb{R}^{n-1}$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist der Graph von f*

$$\Gamma_f = \{(\mathbf{x}', f(\mathbf{x}') : \mathbf{x}' \in K\} \subset \mathbb{R}^n$$

eine Nullmenge. Denn Γ_f ist kompakt, und mit Cavalieri ist

$$|\Gamma|_n = \int_K \left(\int_{f(\mathbf{x}')}^{f(\mathbf{x}')} dx_n \right) d\mathbf{x}' = 0.$$

Jede offene Menge ist die Vereinigung der abzählbar vielen, in ihr enthaltenen rationalen kompakten Würfel. Jede abgeschlossene Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist die Vereinigung der abzählbar vielen kompakten Teilmengen

$$A_k := \{\mathbf{x} \in A : \| \mathbf{x} \| \leq k\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Deswegen ist mit Satz 4.30 c) auch der Graph einer jeden Funktion, die auf einer offenen oder abgeschlossenen Menge des $\mathbb{R}^{n-1}$ stetig ist, eine Nullmenge im $\mathbb{R}^n$. Insbesondere ist jede Hyperebene im $\mathbb{R}^n$ einen Nullmenge.

Beispiel 4.24 *Der Rand der n-dimensionalen Vollkugel $K_n(R)$*

$$\partial K_n(R) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + ... + x_n^2 = R^2\}$$

ist nach dem Satz über implizite Funktionen als endliche Vereinigung von Graphen stetiger Funktionen darstellbar. Damit ist er eine Nullmenge. Sei

$$K_{a,b} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \ a \leq \| \mathbf{x} \| \leq b\}$$

die abgeschlossene Kugelschale mit innerem Radius a und äußerem Radius b im $\mathbb{R}^n$. Dann ist

$$K_n(a) \cup K_{a,b} = K_n(b) \quad \textit{mit der Nullmenge} \quad K_n(a) \cap K_{a,b} = \partial K_n(a).$$

Mit Beispiel 4.20 folgt

$$K_{a,b} = K_n(b) - K_n(a) = \kappa_n \cdot (b^n - a^n).$$

Eine Funktion, definiert auf einer Kugelschale $K_{a,b} \subset \mathbb{R}^n$ heißt rotationsinvariant, wenn sie nur von $\| \mathbf{x} \|$ abhängt. Jede Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall $[a,b]$ definiert eine rotationsinvariante Funktion F auf $K_{a,b}$ durch

$$F(\mathbf{x}) := f(\| \mathbf{x} \|) = f(r) \text{ mit } r = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}.$$

Satz 4.31 (Rotationsinvariante Funktionen) *Die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei stetig. Dann ist die zugehörige Funktion $F : K_{a,b} \to \mathbb{R}$ integrierbar mit*

$$\int_{K_{a,b}} F = n \cdot \kappa_n \cdot \int_a^b f(r) r^{n-1} dr.$$

Beweis. Mit f ist auch F stetig und damit integrierbar. Die Identität der Integrale beweisen wir in mehreren Schritten.

1) Es sei $f \equiv 1$ die Eins-Funktion. Weil $K_{a,b}$ messbar ist mit dem Volumen $\kappa_n \cdot (b^n - a^n)$ (s. Beispiel 4.16), ist

$$\int_{K_{a,b}} F = |K_{a,b}| = \kappa_n \cdot (b^n - a^n) = \kappa_n \cdot \int_a^b n \cdot r^{n-1} dr.$$

2) Es sei $f = t$ eine Treppenfunktion. Wir schreiben sie als Linearkombination chrakteristischer Funktionen abgeschlossener Intervalle. Mit der Linearität des Integrals folgt die Behauptung aus 1).

3) Allgemeinfall: Weil f Riemann-integrierbar ist, gibt es Treppenfunktionen t, u auf $[a,b]$ mit

$$t \leq f \leq u, \qquad \int_a^b (u(r) - t(r)) dr < \epsilon.$$

Für die zugehörigen Funktionen T und U auf der Kugelschale ist

$$\begin{array}{ccccc} \int_{K_{a,b}} T & \leq & \int_{K_{a,b}} F & \leq & \int_{K_{a,b}} U \\ \| & & & & \| \\ \int_a^b t(r) r^{n-1} dr & \leq & \int_a^b f(r) r^{n-1} dr & \leq & \int_a^b u(r) r^{n-1} dr \end{array}$$

Für $\epsilon \to 0$ gehen die beiden äußeren Integrale in der unteren Zeile gegen das mittlere Integral. Das muss dann mit dem mittleren Integral in der oberen Zeile übereinstimmen. □

Beispiel 4.25 *Für $\alpha \geq 0$ ist $f(r) = r^\alpha$ über das Intervall $[0, R]$ integrierbar. Mit Satz 4.31 folgt*

$$\int_{K_n(R)} \| \mathbf{x} \|^\alpha \, d\mathbf{x} = n \cdot \kappa_n \cdot \int_0^R r^{\alpha+n-1} dr = n \cdot \kappa_n \cdot \frac{R^{\alpha+n}}{\alpha+n}.$$

Satz 4.32 (Berechnung von κ_n) *Für $n \geq 1$ ist*

$$\kappa_{2n} = \frac{\pi^n}{n!}, \qquad \kappa_{2n+1} = \frac{2^{n+1}\pi^n}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}.$$

Beweis. Mit Satz 4.25 (Fubini) schreiben wir

$$\begin{aligned}
\kappa_n &= \int_{K_{n-2}(1)} |K_2 \left(\sqrt{1-(x_3^2 + \ldots + x_n^2)} \right) | dx_3 \ldots dx_n \\
&= \pi \cdot \int_{K_{n-2}(1)} (1 - x_3^2 + \ldots + x_n^2) dx_3 \ldots dx_n \\
&= \pi \cdot \int_{K_{n-2}(1)} (1 - \| \mathbf{x} \|^2) dx_3 \ldots dx_n \\
&= \pi \cdot (n-2) \cdot \kappa_{n-2} \int_0^1 (1-r^2) r^{n-3} dr \\
&= \pi \cdot (n-2) \cdot \kappa_{n-2} (\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}) \\
&= \frac{2}{n} \pi \cdot \kappa_{n-2}.
\end{aligned}$$

Dadurch ist die Berechnung von κ_n auf die von κ_{n-2} zurückgeführt. Mit $\kappa_1 = 2$ und $\kappa_2 = \pi$ folgen die angegebenen Formeln durch Induktion. □

Satz 4.33 *Für eine Teilmenge $N \subset \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:*
a) N ist eine Nullmenge.
b) Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es eine offene, messbare Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit

$$N \subset U \quad \textit{und} \quad |U| \leq \epsilon.$$

c) Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es abzählbar viele abgeschlossene Würfel $W_i \subset \mathbb{R}^n$, die sich höchstens in Randpunkten schneiden, mit

$$N \subset \bigcup W_i, \quad \textit{und} \quad \sum |W_i| < \epsilon.$$

d) Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es abzählbar offene viele Quader $Q_i \subset \mathbb{R}^n$ mit

$$N \subset \bigcup Q_i \quad \textit{und} \quad \sum |Q_i| < \epsilon.$$

Beweis a) $\Rightarrow$ b): Wenn N eine Nullmenge ist, dann ist

$$\| 2\chi_N \|_1 = 2 \| \chi_N \|_1 = 0.$$

Deswegen gibt es eine Hüllreihe $\varphi = \sum c_k \chi_{Q_k}$ für $2\chi_N$ mit $I(\varphi) < \epsilon$. Wir betrachten die Treppenfunktionen

$$t_m := \sum_{k=1}^m c_k \chi_{Q_k}.$$

Sie bilden eine monoton wachsende Funktionenfolge mit

$$\int t_m = \sum_{k=1}^{m} c_k |Q_k| \leq I(\varphi) < \epsilon.$$

Ihr punktweiser Grenzwert F mit $F(\mathbf{x}) = \lim_m t_m(\mathbf{x})$ ist nach Satz 4.17 integrierbar mit

$$\int F = \lim \int t_m \leq \epsilon.$$

Für jedes $\mathbf{x} \in N$ ist $F(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) \geq 2$. Also ist N enthalten in der Menge

$$U := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : F(\mathbf{x}) > 1\} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : t_m(\mathbf{x}) > 1\}.$$

Weil t_m auf endlich vielen offenen Quadern konstant ist, ist diese Menge U offen.

Nach Lemma 4.19 ist χ_U Grenzfunktion einer monoton wachsenden Folge von Treppenfunktionen u_k mit

$$u_k(\mathbf{x}) \leq \chi_U \leq F(\mathbf{x}) \quad \text{für alle} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Daraus folgt

$$\int u_k \leq \int F < \epsilon.$$

Nach Satz 4.17 ist χ_U integrierbar mit

$$|U| = \int \chi_U = \lim \int u_k < \epsilon.$$

b) $\Rightarrow$ c): Für jedes $k \in \mathbb{N}$ definieren wir Würfel W der k-ten Generation G_k durch

$$W := I_1 \times ... \times I_n, \quad I_\nu = [\frac{m_\nu}{2^k}, \frac{m_\nu + 1}{2^k}], \nu = 1, ..., n, \quad m_1, ..., m_n \in \mathbb{Z}.$$

Diese abzählbar vielen Würfel $W \in G_k$ überdecken ganz $\mathbb{R}^n$ und schneiden sich höchstens in Randpunkten. Beim Übergang von der k-ten zur $k+1$-ten Generation halbiert sich die Kantenlänge der Würfel. Ist $l > k$, so schneidet jeder Würfel $W' \in G_l$ jeden Würfel $W \in G_k$ höchstens in Randpunkten, oder er liegt ganz in W. Induktiv sondern wir nun in jeder Generation eine Menge $H_k \subset G_k$ aus:

H_1 sei die Menge aller Würfel $W \in G_1$, die ganz in U enthalten sind,

H_{k+1} sei die Menge aller Würfel $W \in G_{k+1}$, die ganz in U, aber in keinem Würfel einer vorhergehenden Generation enthalten sind.

Es sei H die Menge aller so ausgesonderten Würfel. Je zwei dieser Würfel schneiden sich höchstens in Randpunkten. Jeder Punkt $\mathbf{x} \in U$ liegt in einem der ausgesonderten Würfel $W \in H$. Es ist also

$$N \subset U = \bigcup_{W \in H} W.$$

Weil H abzählbar ist, können wir die Würfel $W \in H$ zu einer Folge $W_1, W_2, ...$ anordnen. Für jedes k ist nach Beispiel 4.20 die Menge $W_1 \cup ... \cup W_k$ messbar mit $W_1 \cup ... \cup W_k \subset U$ und

$$\sum_{i=1}^{k} |W_k| = |W_1 \cup ... \cup W_k| \leq |U| < \epsilon.$$

Damit ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} |W_k| \le \epsilon.$$

c) $\Rightarrow$ d) ist offensichtlich für abgeschlossene Quader W_i. Aber jeder solche Quader W_i ist enthalten in einem offenen Quader Q_i mit doppelten Kantenlängen und $|Q_i| = 2^n |W_i|$.

d) $\Rightarrow$ a) Wegen $N \subset \bigcup Q_k$ ist

$$\chi_N \le \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{Q_k}.$$

Und mit Satz 4.7 c) und Satz 4.8 folgt daraus

$$|N| = \| \chi_N \|_1 \le \sum_{k=1}^{\infty} \| \chi_{Q_k} \|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |Q_k| < \epsilon.$$

□

Definition 4.16 *Es seien* $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^n$ *Vektoren. Dann heißt*

$$P(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n) := \{\mathbf{x} = \sum_{\nu+1}^{n} t_\nu \mathbf{a}_\nu \in \mathbb{R}^n : \ t_\nu \in \mathbb{R}, \, 0 \le t_\nu \le 1\}$$

das von den Vektoren $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n$ *aufgespannte Parallelotop.*

Beispiel 4.26 *Ein Parallelotop im* $\mathbb{R}^2$ *ist ein Parallelogramm.*

Satz 4.34 *Das Volumen eines Parallelotops ist*

$$|P(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n)| = |det(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n)|.$$

Beweis. Mit elementaren Spaltenumformungen zeigt man, dass die Funktion $|det(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n)|$ eindeutig bestimmt ist durch ihre Eigenschaften

D1: für $c \in \mathbb{R}$ ist $det(\mathbf{a}_1, ..., c\mathbf{a}_i, ..., \mathbf{a}_n)| = |c| \cdot |det(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n)|$,

D2: für $j \neq i$ ist $|det(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j, ..., \mathbf{a}_j, ..., \mathbf{a}_n)| = |det(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n)|$,

D3: $|det(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n)| = 1$.

Es genügt also, diese drei Eigenschaften für die Funktion $|P(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n)|$ nachzuweisen. Am einfachsten ist der Nachweis von $D3$, weil $P(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n)$ der Einheitswürfel mit dem Volumen 1 ist.

Nachweis von D1: Wir setzen $P_c := P(\mathbf{a}_1, ..., c \cdot \mathbf{a}_i, ..., \mathbf{a}_n)$. Beginnend mit natürlichen Zahlen $c \in \mathbb{N}$ zeigen wir die Aussage nach und nach für alle $c \in \mathbb{R}$.

a) Wenn $c \in \mathbb{N}$ ist, dann haben wir

$$P_{c+1} = P_c \cup (c\mathbf{a}_i + P_1).$$

Dabei ist der Durchschnitt $P_c \cap (c\mathbf{a}_i + P_1)$ in dem linearen Unterraum

$$\mathbf{a}_i + \sum_{j \neq i} \mathbb{R} \cdot \mathbf{a}_j$$

enthalten. Dieser ist eine Nullmenge. Mit der Additivität (Beispiel 4.20) und der Translationsinvarianz (Satz 4.28 a) folgt

$$|P_{c+1}| = |P_c| + |P_1|,$$

und daraus die Behauptung mit Induktion.

b) Wenn $c = p/q \in \mathbb{Q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ ist, dann gilt nach a)

$$q \cdot |P_c| = |P_{qc}| = |P_p| = p \cdot |P_1| \quad \text{und} \quad |P_c| = \frac{p}{q}|P_1|.$$

c) Wenn $0 < c \in \mathbb{R}$ ist, gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ rationale Zahlen $0 < r_1 \leq c \leq r_2$ mit $r_2 - r_1 < \epsilon$. Dann ist

$$P_{r_1} \subset P_c \subset P_{r_2}, \quad r_1|P_1| = |P_{r_1}| \leq |P_c| \leq |P_{r_2}| = r_2|P_1|.$$

Daraus folgt mit b), dass $|\,|P_c| - c \cdot |P_1|\,| \leq \epsilon |P_1|$ ist. Für $\epsilon \to 0$ erhalten wir die Behauptung.

d) Wenn $c = 0$ ist, dann liegt P_c in dem von den Vektoren $\mathbf{a}_j, j \neq i$, aufgespannten Untervektorraum. Der ist eine Nullmenge und es folgt $|P_0| = 0 = 0 \cdot |P_1|$.

e) Wenn $c < 0$ ist, dann ist $|c| \cdot \mathbf{a}_i + P_c = P_{|c|}$. Aus der Translationsinvarianz und c) folgt

$$|P_c| = |P_{|c|}| = |c| \cdot |P_1|.$$

Nachweis von D2: Wir definieren

$$P_{i,j} := \{\mathbf{x} = \sum t_\nu \mathbf{a}_\nu \in P : \ t_i \leq t_j\}.$$

Dann ist

$$P = P_{i,j} \cup P_{j,i}, \quad P(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j, ..., \mathbf{a}_j, ..., \mathbf{a}_n) = P_{j,i} \cup (\mathbf{a}_i + P_{i,j}).$$

Die Durchschnitte $P_{i,j} \cap P_{j,i}$ und $P_{j,i} \cap (\mathbf{a}_i + P_{i,j})$ liegen in Hyperebenen und sind Nullmengen. Mit der Translationsinvarianz folgt

$$|P(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{x}_i + \mathbf{a}_j, ..., \mathbf{a}_j, ..., \mathbf{a}_n)| = |P_{i,j}| + |P_{j,i}| = P(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n).$$ □

Satz 4.35 *Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $\| f \|_1 < \infty$, also etwa f integrierbar. Dann ist die Menge, wo f nicht richtig definiert ist*

$$N := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \ f(\mathbf{x}) = \infty\} \subset \mathbb{R}^n$$

eine Nullmenge.

Beweis. Für jedes $\epsilon > 0$ und für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\chi_N(\mathbf{x}) \leq \epsilon \cdot f(\mathbf{x}).$$

Daraus folgt $\| \chi_N \|_1 \leq \epsilon \| f \|_1$ und $\| \chi_N \|_1 = 0$, weil $\| f \|_1$ endlich ist. □

Die Eigenschaft von f aus Satz 4.35 formuliert man auch kurz so: f ist 'fast überall' endlich. Allgemeiner definiert man:

Definition 4.17 *Eine Aussage über Punkte des $\mathbb{R}^n$ gilt* fast überall*, wenn die Menge der Punkte, wo diese Aussage nicht gilt, eine Nullmenge ist.*

Satz 4.36 *Die 'Funktionen' f und g auf $\mathbb{R}^n$ seien fast überall gleich. Wenn f integrierbar ist, dann ist dies auch g mit*

$$\int f = \int g.$$

Beweis. Nach Voraussetzung ist

$$N := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) \neq g(\mathbf{x})\} \subset \mathbb{R}^n$$

eine Nullmenge. Wir setzen

$$u_N := \infty \cdot \chi_N = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_N.$$

Wegen $\| \chi_N \|_1 = 0$ folgt aus Satz 4.8, dass $\| u_N \|_1 = 0$.

Weil f integrierbar ist gibt es eine Folge von Treppenfunktionen t_k mit $\lim \| f - t_k \|_1 = 0$. Wegen

$$|g - t_k| \leq |g - f| + |f - t_k| \leq u_N + |f - t_k|$$

ist

$$\| g - t_k \|_1 \leq \| f - t_k \|_1 .$$

Also ist auch g integrierbar mit

$$\int g = \lim_k \int t_k = \int f.$$

□

Beispiel 4.27 *Es sei $N \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge und $f : N \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ beliebig. Die trivial auf $\mathbb{R}^n$ fortgesetzte 'Funktion' f_N ist fast überall gleich der Nullfunktion. Deswegen ist f auf N integrierbar mit $\int_N f = 0$.*

Satz 4.37 *Für eine 'Funktion' $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ist $\| f \|_1 = 0$ genau dann, wenn $f(\mathbf{x}) = 0$ fast überall.*

Beweis. Sei $f(\mathbf{x}) = 0$ außerhalb der Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^n$. Nach Satz 4.36 ist f integrierbar mit

$$\| f \|_1 = \int |f| = \int 0 = 0.$$

Sei umgekehrt $\| f \|_1 = 0$. Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir die Menge

$$N_k := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |f(\mathbf{x})| \geq \frac{1}{k}\}.$$

Dann ist $\chi_{N_k} \leq k|f|$ und

$$\| \chi_{N_k} \|_1 \leq k \cdot \| f \|_1 = 0.$$

Also ist N_k eine Nullmenge. Mit Satz 4.30 c) ist auch

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) \neq 0\} = \bigcup_k N_k$$

eine Nullmenge.

□

Satz 4.38 *Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ beschränkt. Weiter gebe es eine Nullmenge $N \subset K$ so, dass f auf $K \setminus N$ stetig ist. Dann ist f über K integrierbar.*

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Nach Voraussetzung gibt es ein $M \in \mathbb{R}$ mit $|f| \leq M$. Nach Satz 4.33 b) gibt es eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $N \subset U$ und $|U| < \epsilon/M$. Dann ist

$$\| f \|_{1,U} \leq M \cdot |U| < \epsilon.$$

Die Menge $K \setminus U$ ist kompakt und f ist dort stetig. Nach Satz 4.23 ist f über $K \setminus U$ integrierbar. Es gibt also eine Treppenfunktion t mit

$$\| f_{K\setminus U} - t \|_1 < \epsilon.$$

Dann ist

$$\| f_K - t \|_1 \leq \| f_{K\setminus U} - t \|_1 + \| f_U \|_1 < 2\epsilon.$$

□

Aufgabe 4.7 *Berechnen Sie das Volumen der Menge*

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 3y^2 \leq z \leq 8 - x^2 - y^2\}$$

im $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 4.8 *Berechnen Sie das Volumen der Menge*

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 4y^2 \leq 4,\ 0 \leq z \leq x + 2\}$$

im $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 4.9 *Berechnen Sie die Volumina der Mengen im $\mathbb{R}^3$ die gegeben sind durch*
a) $0 \leq z \leq 1,\ x^2 + y^2 \leq 1 - z^2$,
b) $0 \leq x \leq y^2 \leq z^3 \leq 1$,
c) $y^2 + z^2 \leq e^{-2x},\ x \geq 0$,
d) $x^2 + z^2 \leq 1, y^2 + z^2 \leq 1$,
e) $(x^2 + y^2 + z^2) < z$.

4.4 Konvergenzsätze

Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Nach Satz 4.35 sind alle über A integrierbaren 'Funktionen' endlich außerhalb einer Nullmenge. Wir können jede solche 'Funktion' f ersetzen durch die Funktion

$$\bar{f}(\mathbf{x}) := \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{falls} \quad f(\mathbf{x}) \text{ endlich} \\ 0 & \text{falls} \quad f(\mathbf{x}) = \infty. \end{cases}$$

Dabei ist $\int f = \int \bar{f}$. Damit können wir zwei Lebesgue-integrierbare Funktionen f und g addieren, indem wir $\bar{f}$ und $\bar{g}$ addieren. Das Resultat $f + g$ ist allerdings wohldefiniert nur außerhalb einer Nullmenge. Wenn es uns nicht auf diese Nullmengen ankommt, können wir also vom $\mathbb{R}$-*Vektorraum* $L^1(A)$ der auf A Lebesgue-integrierbaren Funktionen sprechen.

Genauer gesagt definieren diesen Raum wie folgt:

Definition 4.18 *Es sei V_A der Vektorraum der auf A definierten, reellwertigen (keine Werte $= \infty$) Lebesgue-integrierbaren Funktionen. Darin Sei $N_A \subset V_A$ der Untervektorraum der Funktionen f mit $\| f \|_{1,A} = 0$. Nach Satz 4.37 sind dies genau die Funktionen auf A, die fast überall $= 0$ sind. Und der Raum $L^1(A)$ wird definiert als Quotientenraum*

$$L^1(A) := V_A / N_A.$$

Die Elemente in $L^1(A)$ sind also Äquivalenzklassen, keine Funktionen. Trotzdem spricht man meist auch hier von Funktionen. Einigermaßen gerechtfertigt wird dieser Sprachgebrauch durch

Satz 4.39 *Es sei $f \in L^1(A)$ eine Restklasse und f_0 eine Funktion in dieser Äquivalenzklasse. Dann hängen*

$$\int_A f_0 \quad \textit{und} \quad \| f_0 \|_1$$

nur von der Äquivalenzklasse f und nicht vom Repräsentanten f_0 ab.

Beweis. Ist die Funktion g außerhalb einer Nullmenge $= 0$, dann gilt

$$\int_A (f_0 + g) = \int_A f_0 + \int_A g = \int_A f_0$$

und

$$\| f + g \|_{1,A} \leq \| f_0 \|_{1,A} + \| g \|_{1,A} = \| f_0 \|_{1,A} .$$

$\square$

Bisher bildeten die Lebesgue-integrierbaren Funktionen keinen Vektorraum. Denn wenn $f(\mathbf{x}) = \infty$ ist, dann ist mit unseren Vereinbarungen auch

$$(f - f)(\mathbf{x}) = \infty - \infty = \infty,$$

und $f - f$ ist nicht die Nullfunktion. Deswegen konnten wir die Integrationsabbildung auch nicht als lineare Abildung auffassen. Aber nach Übergang zu $L^1(A)$ können wir Satz 4.14 a) so formulieren:

Satz 4.40 *Die Abbildung*

$$L^1(A) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_A f,$$

ist $\mathbb{R}$-linear.

Auch auf dem Vektorraum $L^1(A)$ ist $\| f \|_1$ wohldefiniert. Diese Funktion ist sogar eine Norm. D.h., es gelten

- $0 \leq \| f \|_1 \in \mathbb{R}$, und $\| f \|_1 = 0$ genau dann, wenn $f = 0$,
- $\| c \cdot f \|_1 = |c| \cdot \| f \|_1$ für $c \in \mathbb{R}$,
- $\| f + g \|_1 \leq \| f \|_1 + \| g \|_1$.

Der folgende Satz zeigt, dass L^1 mit der Norm $\| \quad \|_1$ vollständig ist. Dabei definiert man

Definition 4.19 *Eine Folge von Funktionen f_k auf $\mathbb{R}^n$ konvergiert gegen f in der L^1-Norm, wenn*

$$\lim_k \| f - f_k \|_1 = 0.$$

Die Folge heißt L^1-Cauchy-Folge, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\| f_k - f_l \|_1 \leq \epsilon \quad \textit{für} \quad k, l \geq N.$$

Jede konvergente Folge ist offensichtlich eine Cauchy-Folge. Davon gilt auch die Umkehrung, und das ist nicht-trivial:

Satz 4.41 (Riesz-Fischer) *Jede Cauchy-Folge $f_k \in L^1(\mathbb{R}^n)$ konvergiert in der L^1-Norm gegen ein $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Weiter gilt für dieses f:*
a) $\int f = \lim_k \int f_k$,
b) eine geeignete Teilfolge der f_k konvergiert fast überall punktweise gegen f.

Beweis. Weil (f_k) eine Cauchy-Folge ist, gibt es Indizes $k_1 < k_2 < \dots$ mit

$$\| f_{k_{\nu+1}} - f_{k_\nu} \|_1 \leq \frac{1}{2^\nu}.$$

Insbesondere ist dann

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \| f_{k_{\nu+1}} - f_{k_\nu} \|_1 \leq 1.$$

Wir setzen

$$g_\nu := f_{k_{\nu+1}} - f_{k_\nu}, \quad g := \sum_{k=1}^{\infty} |g_\nu|.$$

Mit Satz 4.8 ist $\| g \|_1 \leq 1$, und nach Satz 4.35 gibt es eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^n$ mit $g(\mathbf{x}) \neq \infty$ für $\mathbf{x} \notin N$. Dann ist auch $f_{k_1}(\mathbf{x}) \neq \infty$ für $\mathbf{x} \notin N$. Die Reihe $\sum g_\nu$ konvergiert also fast überall absolut.

Wir definieren nun

$$f(\mathbf{x}) := \begin{cases} \lim\limits_{\nu \to \infty} f_{k_\nu}(\mathbf{x}) = f_{k_1}(\mathbf{x}) + \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} g_\nu(\mathbf{x}) & \text{falls} \quad \mathbf{x} \notin N \\ 0 & \text{falls} \quad \mathbf{x} \in N \end{cases}$$

Damit ist $f(\mathbf{x}) \neq \infty$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und die Teilfolge f_{k_ν} konvergiert fast überall punktweise gegen f.

Wir zeigen $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$: Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es einen Index ρ mit

$$\| f - f_{k_\rho} \|_1 \leq \sum_{\nu=\rho}^{\infty} \| g_\nu \|_1 \leq \epsilon \quad \text{und} \quad \| f_k - f_{k_\rho} \|_1 \leq \epsilon \text{ für } k \geq k_\rho.$$

Außerdem wählen wir eine Treppenfunktion t mit $\| f_{k_\rho} - t \|_1 \leq \epsilon$. Dann ist

$$\| f - t \|_1 \leq \| f - f_{k_\rho} \|_1 + \| f_{k_\rho} - t \|_1 \leq 2\epsilon.$$

Die Funktion f ist also integrierbar.

Weiter ist für $k \geq k_\rho$

$$\| f - f_k \|_1 \leq \| f - f_{k_\rho} \|_1 + \| f_{k_\rho} - f_k \|_1 \leq 2\epsilon.$$

Also konvergiert die Folge f_k gegen f in der L^1-Norm.

Schließlich zeigt

$$\left|\int f - \int f_k\right| \leq \int |f - f_k| = \| f - f_k \|_1$$

dass die Integralfolge $\int f_k$ gegen $\int f$ konvergiert. □

Beispiel 4.28 *Für jede natürliche Zahl k teilen wir das Einheitsintervall $[0,1]$ in k gleichlange Teilintervalle*

$$[\frac{l-1}{k}, \frac{l}{k}], \quad l = 1, ..., k$$

und definieren

$$f_{k,l} : [0,1] \to \mathbb{R} \quad \text{durch} \quad f_{k,l}(x) := \begin{cases} 1 \text{ falls } \frac{l-1}{k} \leq x \leq \frac{l}{k} \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

Diese Funktionen $f_{k,l}$ ordnen wir zur Folge

$$f_{1,1}, f_{2,1}, f_{2,2}, f_{3,1}, f_{3,2}, f_{3,3}, ...$$

an. Wegen

$$\| f_{k,l} \|_1 = \frac{1}{k}$$

konvergiert $\| f_{k,l} \|_1$ gegen 0. Weil jeder Punkt $x \in [0,1]$ für jedes k in einem Teil-Intervall $[\frac{l-1}{k}, \frac{l}{k}]$ liegt, konvergiert unsere Folge in keinem Punkt x Punktweise gegen die Nullfunktion. Diese Nullfunktion ist aber der L^1-Grenzwert der Folge. Die Teilfolge $f_{k,1}$ konvergiert überall gegen 0, nur nicht im Punkt $x = 0$. Dies zeigt, dass in Satz 4.41 bei der punktweisen Konvergenz der Übergang zu einer Teilfolge unverzichtbar ist.

Beispiel 4.29 *Die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei Riemann-integrierbar. $F(\mathbf{x}) = f(\| \mathbf{x} \|)$ sei die zugehörige rotationsinvariante Funktion auf der Kugelschale $K_{a,b} \subset \mathbb{R}^N$. Dann ist F über $K_{a,b}$ integrierbar mit*

$$\int_{K_{a,b}} F = n \cdot \kappa_n \cdot \int_a^b f(r) r^{n-1} dr.$$

Beweis. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gibt es Treppenfunktionen t_k, u_k auf $[a,b]$ mit

$$t_k \leq f \leq u_k, \quad \int_a^b (u_k - t_k) \leq \frac{1}{k}.$$

Für die zugehörigen Funktionen T_k und U_k auf $K_{a,b}$ gilt dann

$$\| F - T_k \|_1 \leq \| U_k - T_k \|_1 = \int_{K_{a,b}} U_k - T_k = n \cdot \kappa_n \cdot \int_a^b (u_k(r) - t_k(r)) r^{n-1} dr \leq n \cdot \kappa_n \cdot \frac{b^{n-1}}{k}.$$

Deswegen ist T_k eine Cauchy-Folge in $L^1(K_{a,b})$. Nach Riesz-Fischer konvergiert sie in der L^1-Norm gegen ein $\tilde{F} \in L^1(K_{a,b})$. Weiter ist

$$\| F - \tilde{F} \|_1 \leq \| F - T_k \|_1 + \| T_k - \tilde{F} \|_1 \to 0.$$

Nach Satz 4.37 ist $F = \tilde{F}$ fast überall, damit integrierbar, und

$$\int_{K_{a,b}} F = \int_{K_{a,b}} \tilde{F} = \lim_k \int_{K_{a,b}} T_k = \lim_k n \cdot \kappa_n \cdot \int_a^b t_k(r) r^{n-1} dr = n \cdot \kappa_n \cdot \int_a^b f(r) r^{n-1} dr.$$

Als nächstes möchte ich die Beziehung zwischen uneigentlichem Riemann-Integral und Lebesgue-Integral klären. Ich betrachte hier nur den Fall, wo eine Funktion f über $[0,\infty[$ integriert wird. Die anderen Fälle sind ganz ähnlich.

Die Funktion $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ sei auf jedem endlichen Intervall $[0,a]$ Riemann-integrierbar und das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{a\to\infty} \int_0^a f(x)dx$$

existiere. Dann sagt man auch, das uneigentliche Riemann-Integral konvergiert. Man sagt weiter: Das uneigentliche Riemann-Integral konvergiert *absolut*, wenn der Grenzwert.

$$\lim_{a\to\infty} \int |f(x)|dx$$

existiert, oder was dasselbe ist: wenn die Menge der Riemann-Integrale $\int_0^a |f(x)|dx$ nach oben beschränkt ist.

Satz 4.42 *Das uneigentliche Riemann-Integral $\int_0^\infty f(x)dx$ konvergiere.*
a) Die Funktion f ist auf $[0,\infty[$ Lebesgue-integrierbar, genau dann, wenn das Riemann-Integral $\int_0^\infty f(x)dx$ absolut konvergiert.
b) In diesem Fall sind beide Integrale gleich:

$$\underset{\textit{Riemann}}{\int_0^\infty f(x)dx} = \underset{\textit{Lebesgue}}{\int_{[0,\infty[} f}$$

Beweis a) $\Rightarrow$: Ist f Lebesgue-integrierbar, dann ist dies auch $|f|$ (Satz 4.13). Für jedes endliche $a > 0$ ist f und damit auch $|f|$ Riemann-integrierbar auf $[0,a]$. Nach Beispiel 4.10 ist $|f|$ über dieses Intervall auch Lebesgue-integrierbar und beide Integrale stimmen überein. Für alle a folgt

$$\int_0^a |f(x)|dx = \int_{[0,a]} |f| \leq \int_{[0,\infty[} |f|.$$

Damit konvergiert das uneigentliche Riemann-Integral absolut.

$\Leftarrow$: Nachdem wir $f = f^+ - f^-$ in seinen positiven und seinen negativen Anteil zerlegen, brauchen wir die Aussage nur für $f \geq 0$ zu beweisen.

Dazu definieren wir für $k \in \mathbb{N}$ die (nach Beispiel 4.10) Lebesgue-integrierbaren Funktionen

$$f_k : [0,\infty[\to \mathbb{R}, \quad f_k(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls} \quad x \leq k \\ 0 & \text{falls} \quad x > k. \end{cases}$$

Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein k mit

$$\int_k^\infty f(x)dx = \int_0^\infty f(x)dx - \int_0^k f(x)dx < \epsilon.$$

Für alle $l \geq k$ ist dann

$$\| f_l - f_k \|_1 = \int_k^l f(x)dx \leq \int_k^\infty f(x)dx < \epsilon.$$

Die Folge f_k ist also eine Cauchy-Folge im Raum $L^1([0,\infty[)$. Nach Riesz-Fischer hat sie einen L^1-Grenzwert $g \in L^1([0,\infty[)$, und eine Teilfolge der f_k konvergiert fast überall punktweise gegen g. Jede

Teilfolge der f_k konvergiert aber punktweise gegen f. Damit ist fast überall $f = g$, die Funktion f gehört zu $L^1([0, \infty[)$.

b) Beide Integrale sind gleich

$$\lim_{k \to \infty} \int_0^k f(x) dx$$

und stimmen deswegen überein. □

Beispiel 4.30 *Für die Funktion*

$$f : [0, \infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{sin(x)}{x}$$

konvergiert das uneigentliche Riemann-Integral. Dies folgt mit partieller Integration aus

$$\int_\pi^a \frac{sin(x)}{x} = \frac{-cos(x)}{x}\Big|_\pi^a - \int_\pi^a \frac{sin(x)}{x^2} dx.$$

Das uneigentliche Riemann-Integral von f konvergiert aber nicht absolut. Denn für $k \in \mathbb{N}$ ist

$$\int_\pi^{k \cdot \pi} |f(x)| dx = \sum_{l=2}^{k} \int_{(l-1)\pi}^{l\pi} \frac{|sin(x)|}{x} dx \geq \sum_{l=2}^{k} \frac{1}{l\pi} \cdot \int_0^\pi |sin(x)| dx.$$

Satz 4.43 (Korollar zum Satz von Riesz-Fischer) *Jede integrierbare Funktion f auf $\mathbb{R}^n$ ist L^1-Grenzwert einer Folge t_k von Treppenfunktionen mit:*

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \| t_{k+1} - t_k \|_1 < \infty$,

b) Die Folge t_k konvergiert fast überall punktweise gegen f.

Beweis. Es gibt eine Folge u_k von Treppenfunktionen mit $\| f - u_k \|_1 \to 0$. Wie im Beweis von Satz 4.41 findet man eine Teilfolge t_k mit a). Diese konvergiert fast überall gegen eine Funktion $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, und $\| g - t_k \|_1 \to 0$. Daraus folgt $\| f - g \|_1 = 0$ und $f = g$ fast überall. □

Der folgende Satz verallgemeinert Satz 4.17 von Treppenfunktionen auf integrierbare Funktionen.

Satz 4.44 (B. Levi, monotone Konvergenz) *Es sei f_k eine monoton wachsende Folge integrierbarer 'Funktionen' auf $\mathbb{R}^n$. Dann existiert also $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \infty$ mit*

$$f(\mathbf{x}) = \lim_k f_k(\mathbf{x}).$$

Wenn die Folge der Integrale $\int f_k$ beschränkt ist, dann ist f integrierbar mit

$$\int f = \lim_k \int f_l.$$

Beweis. Die monoton steigende und beschränkte Folge der Integrale $\int f_k$ konvergiert und ist eine Cauchy-Folge reeller Zahlen. Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es also ein N so, dass für $l > k > N$

$$\| f_l - f_k \|_1 = \int |f_l - f_k| = \int f_l - \int f_k < \epsilon.$$

Die Folge f_k ist also eine Cauchy-Folge in $L^1(\mathbb{R}^n)$. Sei $\tilde{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ihr Grenzwert. Dann gibt es nach Riesz-Fischer eine Teilfolge f_{k_ν}, die fast überall gegen $\tilde{f}$, und a priori auch gegen f konvergiert. Es folgt

$$\tilde{f} = \lim_\nu f_{k_\nu} = f$$

fast überall. Dann ist nach Satz 4.36 auch f integrierbar und es folgt, wieder mit Riesz-Fischer, dass

$$\int f = \int \tilde{f} = \lim_\nu \int f_{k_\nu} = \lim_k \int f_k.$$

□

Beispiel 4.31 (Ausschöpfung) *Es seien $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset ... \subset \mathbb{R}^n$ abzählbar viele Mengen und $A = \bigcup A_k$ deren Vereinigung. Es sei f eine 'Funktion' auf A, die über jedes A_k integrierbar ist. Dann sind äquivalent:*
a) f ist über A integrierbar,
b) Die Folge der Integrale $\int_{A_k} |f|$ ist beschränkt.
Sind diese Bedingungen erfüllt, dann gilt

$$\int_A f = \lim_k \int_{A_k} f.$$

Beweis. a) $\Rightarrow$ b) Mit f ist auch $|f|$ über A integrierbar und wegen $|f|_{A_k} \leq |f|_A$ ist für alle k

$$\int_{A_k} |f| \leq \int_A |f|.$$

b) $\Rightarrow$ a) Nachdem wir f auf einer Nullmenge abändern, ohne die Aussage zu ändern, können wir $f < \infty$ annehmen. Nach Übergang zum positiven und negativen Anteil, können wir sogar $f \geq 0$ annehmen. Dann ist die Folge der f_{A_k} monoton wachsend mit punktweiser Grenzfunktion f_A. Mit Satz 4.44 ist also f_A integrierbar und

$$\int_A f = \int f_A = \lim_k \int f_k = \lim \int_{A_k} f.$$

□

.

Beispiel 4.32 (Spezialfall) *Es seien wie eben $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset ... \subset \mathbb{R}^n$ abzählbar viele Mengen und $A = \bigcup A_k$ deren Vereinigung. Dann ist die Menge A ist genau dann messbar, wenn die Folge $|A_k|$ der Volumina beschränkt ist. In diesem Fall ist*

$$|A| = \lim |A_k|.$$

Das folgt aus dem vorhergehenden Beispiel mit $f = \chi_A$.

Satz 4.45 *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und f eine 'Funktion' auf U mit:*

- *Für jede kompakte Menge $K \subset U$ ist $f|K$ integrierbar.*
- *f besitzt eine über U integrierbare Majorante F.*

Dann ist f über U integrierbar.

Beweis. Nach dem Beweis von Satz 4.19 ist U die Vereinigung abzählbar vieler Würfel W_i. Es sei K_k die kompakte Menge

$$K_k := \bigcup_{i=1}^{k} W_k.$$

Die kompakten Mengen K_k bilden eine Ausschöpfung von U. Für jedes k ist f über K_k integrierbar. Nach Beispiel 4.31 ist f über U integrierbar genau dann, wenn die Menge der Integrale $\int_{K_k} |f|$ beschränkt ist.

Mit F sind nach Satz 4.14 c) auch alle 'Funktionen' $F|K_k = F \cdot \chi_{K_k}$ integrierbar. Es folgt

$$\int_{K_k} |f| \leq \int_{K_k} F \leq \int_U F.$$

□

Satz 4.46 (Rotationsinvariante Funktionen) *Die Funktion f sei Riemann-integrierbar auf einem Intervall $]a, b[\subset [0, \infty[$ und F sei die rotationsinvariante Funktion $f(\| \mathbf{x} \|)$ auf der Kugelschale*

$$K_{]a,b[} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \, a <\| \mathbf{x} \|< b\}.$$

(Hier ist ausdrücklich zugelassen, dass das Riemann-Integral uneigentlich ist.) Dann sind äquivalent:
a) Die Funktion F ist über die Kugelschale $K_{]a,b[}$ integrierbar.
b) Die Funktion $|f(r)| \cdot r^{n-1}$ ist über $]a, b[$ integrierbar.
Sind diese Bedingungen erfüllt, dann ist

$$\int_{K_{]a,b[}} F = n \cdot \kappa_n \cdot \int_{]a,b[} f(r) r^{n-1} dr.$$

Dabei ist κ_n das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel.

Beweis. Wir schöpfen das offene Intervall $]a, b[$ durch kompakte Teilintervalle $[a_k, b_k]$ aus mit $a_k \to a, b_k \to b$. Nach Beispiel 4.29 ist F über die Kugelschale $A_k := K_{a_k,b_k}$ integrierbar mit

$$\int_{A_k} |F| = n \cdot \kappa_n \cdot \int_{a_k}^{b_k} |f(r)| r^{n-1} dr.$$

Mit Beispiel 4.31 (Ausschöpfung) sind äquivalent:

- Das Integral $\displaystyle\int_{K_{]a,b[}} F$ existiert.
- Die Integralfolge $\displaystyle\int_{a_k}^{b_k} |f(r)| r^{n-1} dr$ konvergiert.
- Das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_a^b |f(r)| r^{n-1} dr$ existiert.

Und wenn diese Bedingungen erfüllt sind, dann ist

$$\int_{K_{]a,b[}} F = \lim \int_{A_k} F = n \cdot \kappa_n \cdot \int_a^b f(r) r^{n-1} dr.$$

□

Beispiel 4.33 *Zu $\alpha \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Funktionen*

$$f(r) = r^\alpha \quad \text{und} \quad F(\mathbf{x}) = \| \mathbf{x} \|^\alpha .$$

In Beispiel 4.25 sahen wir: Für $\alpha \geq 0$ ist F über jede Kugel $K_n(R)$ integrierbar mit

$$\int_{K_n(R)} \| \mathbf{x} \|^\alpha = n \cdot \kappa_n \cdot \frac{R^{\alpha+n}}{\alpha+n}.$$

Mit Satz 4.46 sehen wir jetzt: Die Funktion F ist schon dann über jede Kugel $K_n(R)$ integrierbar, wenn die Funktion

$$f(r) \cdot r^{n-1} = r^{\alpha+n-1}$$

über $[0, R]$ integrierbar ist. Für $\alpha + n - 1 \geq 0$ ist das ein ganz normales Integral über eine stetige Funktion. Aber auch für

$$\alpha + n - 1 > -1 \quad \text{d.h.} \quad \alpha + n > 0 \quad \text{d.h.} \quad \alpha > -n$$

konvergiert das dann uneigentliche Integral. Auch in diesen Fällen erhalten wir das von der Dimension n abhängige Ergebnis

$$\int_{K_n(R)} \| \mathbf{x} \|^\alpha = n \cdot \kappa_n \cdot \frac{R^{\alpha+n}}{\alpha+n}.$$

Insbesondere für $n = 2$ und $\alpha = -1$ haben wir

$$\int_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy = 2\pi.$$

Beispiel 4.34 *Eine berühmte rotationsinvariante Funktion ist*

$$F(\mathbf{x}) = e^{-\|\mathbf{x}\|^2} = e^{-(x_1^2+...+x_n^2)}.$$

Nach Satz 4.46 ist sie über ganz $\mathbb{R}^n$ integrierbar, genau dann, wenn das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty e^{-r^2} \cdot r^{n-1} dr$$

existiert. Nun ist für große r

$$e^{-r^2} \cdot r^{n-1} < e^{-2r} \cdot r^{n-1} = e^{-r} \cdot e^{-r} r^{n-1} < e^{-r}.$$

Das uneigentliche Integral konvergiert also und liefert

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-x_1^2-...-x_n^2} dx_1 ... dx_n = n \cdot \kappa_n \cdot \int_0^\infty e^{-r^2} r^{n-1} dr.$$

Das ist schön. Weniger schön ist, dass wir dieses eindimensionale uneigentliche Integral nicht elementar auswerten können. Nur für $n = 2$ sehen wir

$$\int_0^\infty e^{-r^2} r dr = -\frac{1}{2} e^{-r^2} \Big|_0^\infty = \frac{1}{2}$$

und

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \kappa_2 = \pi.$$

Beispiel 4.35 (Nicht messbare Menge von Vitali) *Wir betrachten im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$ die Restklassen $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Jede dieser Restklassen ist eine Menge $r + \mathbb{Q}$ mit einem Repräsentanten $r \in \mathbb{R}$. Hier können wir sogar $0 \leq r \leq 1$ annehmen. Und jetzt - festhalten!- wählen wir in jeder Restklasse einen solchen Repräsentanten r, $0 \leq r \leq 1$. Es sei $X \subset [0,1]$ die Menge dieser Repräsentanten. Jede reelle Zahl $a \in [0,1]$ ist von der Form*

$$a = r + q, \quad r \in X, q \in \mathbb{Q}.$$

Wegen

$$q = a - r, \quad -1 \leq a - r \leq 1$$

gehört q zum Intervall $[-1,1]$. Die rationalen Zahlen im Intervall $[-1,1]$ sind abzählbar. Wir ordnen sie an zu einer Folge $q_1, q_2, ...$ und setzen

$$A := \bigcup_{k=1}^{\infty} (q_k + X).$$

Wenn X messbar wäre, dann wäre $|q_k + X| = |X|$ für alle k nach Satz 4.28 a). Und mit Beispiel 4.32 hätten wir wegen $A \subset [-1,2]$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |q_k + X| = |A| \leq 2.$$

Daraus würde folgen $|X| = |q_k + X| = 0$ und auch $|A| = 0$. Weil aber $[0,1] \subset A$ und $|A| \geq 1$, wäre dies ein Widerspruch.

Also ist die konstruierte Menge X nicht messbar. Das liegt an der Verwendung des sogenannten 'Auswahlaxioms'. Um so etwas möchte ich künftig einen möglichst großen Bogen machen.

Satz 4.47 (Lebesgue, majorisierte Konvergenz) *Es sei f_k eine Folge integrierbarer 'Funktionen' auf $\mathbb{R}^n$, die fast überall punktweise gegen eine Funktion f konvergiert. Es gebe eine integrierbare Funktion F (Majorante) mit*

$$|f_k| \leq F \quad \textit{für alle } k.$$

Dann ist f integrierbar mit

$$\int f = \lim_k \int f_k.$$

Beweis. Nach Satz 4.35 gibt es eine Nullmenge N' so, dass $F(\mathbf{x}) < \infty$ für alle $\mathbf{x} \notin N'$. Weiter sei N'' eine Nullmenge, außerhalb der die Folge f_k punktweise gegen f konvergiert. Ohne die Voraussetzung oder die Aussage zu verändern, ändern wir die Werte der 'Funktionen' f_k, f, F so ab, dass wir sie auf der Nullmenge $N' \cup N''$ als $= 0$ festlegen, und außerhalb der Nullmenge gleich lassen. Dann konvergiert $f_k \to f$ überall punktweise.

Wir bilden die monoton fallende Folge

$$g_k := \sup\{f_l : l \geq k\} = \lim_\nu g_{k,\nu} \quad \text{mit} \quad g_{k,\nu} = \max\{f_k, f_{k+1}, ..., f_{k+\nu}\}.$$

Die Funktionen $g_{k,\nu}$ sind integrierbar mit

$$|g_{k,\nu}| \leq |F|, \quad \int g_{k,\nu} \leq \int F.$$

Für festes k wächst die Folge $g_{k,\nu}$ monoton. Nach Satz 4.44 ist also auch g_k integrierbar mit

$$\left|\int g_k\right| = \left|\lim_\nu \int g_{k,\nu}\right| \leq \int F.$$

Die monoton fallende Folge g_k konvergiert punktweise gegen f mit nach unten beschränkter Integralfolge. Nach Satz 4.44 (mit umgekehrtem Vorzeichen) ist f integrierbar mit

$$\int f = \lim_k \int g_k.$$

Jetzt kehren wir alle Ungleichungen um und spielen alles nochmal durch mit der monoton wachsenden Funktionenfolge

$$h_k := \inf\{f_l : l \geq k\}.$$

Wir erhalten analog

$$\int f = \lim_k \int h_k.$$

Mit $h_k \leq f_k \leq g_k$ erhalten wir schließlich die Behauptung

$$\int f = \lim_k \int f_k.$$

□

Beispiel 4.36 (Gamma-Funktion) *Nach Euler wird die Gamma-Funktion definiert als das konvergente uneigentliche Integral*

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0.$$

Für $t \to 0$ kann man den Integranden abschätzen durch

$$\frac{1}{t^{1-x}} \quad \textit{mit} \quad 1 - x < 1.$$

Und für $t \to \infty$ ist

$$t^{x-1} e^{-t} = \underbrace{t^{x-1} e^{-t/2}}_{\to 0} \cdot e^{-t/2}.$$

In Analysis I (oder mit l'Hospital) zeigt man

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}.$$

Damit ist also

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt.$$

Mit dem Satz von Lebesgue kann man hier Integration und Grenzwert vertauschen. Und das geht so: Wir setzen für $t > 0$

$$f_x(t) := t^{x-1} e^{-t}, \quad f_{x,n}(t) := \begin{cases} t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n & \textit{für} \quad 0 \leq t \leq n \\ 0 & \textit{für} \quad t > n \end{cases}$$

Dann ist also für festes x und alle $t > 0$

$$f_x(t) = \lim_{n\to\infty} f_{x,n}(t).$$

Außerdem ist

$$0 \le f_{x,n}(t) < f_x(t).$$

Für $t \ge n$ ist das klar. Und für $t < n$ erhalten wir aus der Reihenentwicklung

$$ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{kn^k}$$

die Abschätzung

$$ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = n \cdot ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{kn^{k-1}} \le -t,$$

also

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \le e^{-t}.$$

Damit haben wir majorisierte Konvergenz und erhalten aus dem Satz von Lebesgue

$$\int_0^\infty t^{x-1} \lim_{n\to\infty} f_{x,n}(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty t^{x-1} f_{x,n}(t)dt,$$

sowie

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt.$$

Im Integral kann man die n-Potenz durch partielle Integration abbauen (das hat jetzt mit dem Lebesgue-Integral nicht mehr viel zu tun):

$$\begin{aligned}
\int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt &= \frac{t^x}{x}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\Bigg|_0^n - \frac{1}{x}\int_0^n t^x \cdot n \cdot \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1} \cdot (-\frac{1}{n})dt \\
&= \frac{n}{nx}\int_0^n t^x \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1} dt \\
&= \frac{n}{nx}\left(\frac{1}{x+1}t^{x+1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\Bigg|_0^n - \frac{1}{x+1}\int_0^n t^{x+1}(n-1)\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-2} \cdot (-\frac{1}{n})dt\right) \\
&= \frac{n(n-1}{n^2 \cdot x(x+1)}\int_0^n t^{x+1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-2} dt \\
&\vdots \\
&= \frac{n!}{n^n \cdot x(x+1)\cdot \ldots \cdot (x+n-1)}\int_0^n t^{x+n-1}dt \\
&= \frac{n! \cdot n^{x+n}}{n^n \cdot x(x+1)\cdot \ldots \cdot (x+n)} \\
&= \frac{n! \cdot n^x}{x(x+1)\cdot \ldots \cdot (x+n)}
\end{aligned}$$

Und schließlich erhalten wir für die Gamma-Funktion die Darstellung von Gauß

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! \cdot n^x}{x \cdot (x+1) \cdot \ldots \cdot (x+n)}.$$

Mit dieser Darstellung beweist man leicht die Funktionalgleichung der Gamma-Funktion:

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x).$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n! \cdot n^{x+1}}{(x+1)(x+2) \cdot \ldots \cdot (x+n+1)} \\
&= x \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)! \cdot n^x}{x(x+1)(x+2) \cdot \ldots \cdot (x+n+1)} \\
&= x \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)! \cdot (n+1)^x}{x(x+1)(x+2) \cdot \ldots \cdot (x+n+1)} \cdot \frac{n^x}{(n+1)^x} \\
&= x \cdot \Gamma(x) \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^x \\
&= x \cdot \Gamma(x).
\end{aligned}$$

Satz 4.48 (Majorantenkriterium) *Es sei f eine lokal-integrierbare 'Funktion' auf $\mathbb{R}^n$. Besitzt f eine integrierbare 'Funktion' F mit $|f| \leq F$ (Majorante), dann ist f integrierbar.*

Beweis. Es sei χ_k die charakteristische Funktion der kompakten Kugel $K_n(k)$ vom Radius k und $f_k = f \cdot \chi_k$. Dann konvergiert die Folge f_k punktweise gegen f. Es ist $|f_k| \leq F$ für alle k, und nach Satz 4.24 sind alle f_k integrierbar. Die Behauptung folgt aus dem Satz von Lebesgue. □

Satz 4.49 (Folgerung 1) *Es sei f integrierbar auf $\mathbb{R}^n$ und g lokal integrierbar und beschränkt. Dann ist auch $f \cdot g$ integrierbar.*

Beweis. Mit Satz 4.14 c) ist $f \cdot g$ lokal integrierbar. Nach Voraussetzung gibt es ein $M \in \mathbb{R}$ mit $|g| \leq M$. Dann ist $F := M \cdot |f|$ eine integrierbare Majorante von $f \cdot g$. □

Satz 4.50 (Folgerung 2) *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ fast überall auf U stetig, und es gebe eine über U integrierbare Majorante F für f. Dann ist f über U integrierbar.*

Beweis. Mit Beispiel 4.31 genügt es zu zeigen, dass f auf jeder kompakten Menge $K \subset U$ integrierbar ist. Nachdem wir f in seinen positiven und negativen Anteil zerlegen, können wir o.B.d.A. $f \geq 0$ annehmen.

Wir betrachten die Funktionen

$$f_k := min\{f_K, k\}, \quad k \in \mathbb{N}$$

auf K. Die Folge f_k konvergiert punktweise gegen f_K. Außerdem sind alle f_k beschränkt und außerhalb einer Nullmenge stetig. Nach Satz 4.38 sind sie alle integrierbar. Wegen $|f_k| \leq |f| \leq F$ ist die Folge der Integrale

$$\int_K |f_k| \leq \int_k F \leq \int_U F$$

beschränkt. Nach Satz 4.47 (Lebesgue) ist f_K integrierbar. □

Aufgabe 4.10 *Es sei* $0 < c \in \mathbb{R}$ *und*

$$f(x) := sin(x) \cdot e^{-cx}.$$

Zeigen Sie:
a) Die Funktion f *ist über* $[0, \infty[$ *Lebesgue-integrierbar,*
b) es ist

$$\int_0^\infty sin(x) e^{-cx} dx = \frac{1}{1+c^2}.$$

Aufgabe 4.11 *Zeigen Sie, dass die Funktion*

$$f(x, y) = y \cdot sin(x) \cdot e^{-xy}$$

über dem Streifen

$$S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ 0 < y < 1\}$$

Lebesgue-integrierbar ist.

Aufgabe 4.12 *Berechnen Sie*

$$a) \int_{K_n(1)} \frac{d\mathbf{x}}{\sqrt{1 - \| \mathbf{x} \|^2}}, \quad b) \int_{K_n(1)} ln(\| \mathbf{x} \|) d\mathbf{x} \text{ für } n \geq 2.$$

Aufgabe 4.13 *Es sei*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad 1 < s \in \mathbb{R},$$

die Riemannsche Zeta-Funktion. Zeigen Sie

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx = \Gamma(s) \cdot \zeta(s).$$

Aufgabe 4.14 *Die Menge* $A \subset \mathbb{R}^n$ *sei messbar. Die Funktionen* f_k *auf* A *seien integrierbar und gleichmäßig konvergent gegen die Funktion* f *auf* A*. Zeigen Sie: Die Funktion* f *ist über* A *integrierbar mit*

$$\int_A f = \lim_k \int_A fk.$$

4.5 Mehrfache Integrale

In diesem Abschnitt verallgemeinern wir den Satz von Fubini (Satz 4.25) auf Lebesgue-integrierbare Funktionen. Wegen der Definition 4.11 des Integrals über Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ durch triviale Fortsetzung genügt es den Fall $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ zu betrachten.

Satz 4.51 (Lemma) *Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge und für $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^q$ sei*

$$A_{\mathbf{v}} := \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p : (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in A\}$$

die zugehörige Schnittmenge. Dann gibt es eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^q$ so, dass für $\mathbf{v} \notin N$ die Menge $A_{\mathbf{v}}$ eine Nullmenge ist.

Beweis. Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es nach Satz 4.33 d) offene Quader $Q_1, Q_2, ...$ in $\mathbb{R}^n$ mit

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |Q_k| < \epsilon.$$

Jeder Quader Q_k ist ein Produkt

$$Q_k = Q_k' \times Q_k'' \quad \text{mit} \quad Q_k' \subset \mathbb{R}^p,\ Q_k'' \subset \mathbb{R}^q.$$

Für jedes $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^q$ sei

$$a(\mathbf{v}) := \parallel \chi_{A_{\mathbf{v}}} \parallel_{1,\mathbb{R}^p}$$

die L^1-Halbnorm. Dadurch wird eine 'Funktion'

$$a : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

definiert. Wegen

$$\chi_{A_{\mathbf{v}}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{Q_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{Q_k'} \cdot \chi_{Q_k''}$$

gilt

$$a(\mathbf{v}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |Q_k'| \cdot \chi_{Q_k''}(\mathbf{v}).$$

Daraus folgt mit Satz 4.10

$$\parallel a \parallel_{1,\mathbb{R}^q} \leq \parallel \sum_{k=1}^{\infty} |Q_k'| \cdot \chi_{Q_k''} \parallel_{1,\mathbb{R}^q} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \parallel |Q_k'| \cdot \chi_{Q_k''} \parallel_{1,\mathbb{R}^q} = \sum_{k=1}^{\infty} |Q_k'| \cdot |Q_k''| = \sum_{k=1}^{\infty} |Q_k| < \epsilon.$$

Also ist $\parallel a \parallel_{1,\mathbb{R}^q} = 0$ und es gibt nach Satz 4.37 eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^q$ mit

$$a(\mathbf{v}) = \parallel \chi_{A_{\mathbf{v}}} \parallel_{1,\mathbb{R}^n} = 0$$

für $\mathbf{v} \notin N$. Für diese $\mathbf{v}$ ist also $A_{\mathbf{v}}$ eine Nullmenge. □

Beispiel 4.37 *Die Menge $A := \mathbb{R} \times \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}^2$ ist Vereinigung abzählbar vieler Geraden und damit eine Nullmenge. Für $v \in \mathbb{Q}$ ist $A_v = \mathbb{R}$ keine Nullmenge. Also kann man in Lemma 4.51 auf die Ausnahmemenge N nicht verzichten.*

Satz 4.52 (Fubini) *Es sei f eine integrierbare 'Funktion' auf $\mathbb{R}^n$.*
a) Es gibt eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^q$ so, dass für $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^q$, $\mathbf{v} \notin N$, die 'Funktion' $f_{\mathbf{v}} : \mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ über $\mathbb{R}^p$ integrierbar ist.

b) Wir definieren die Funktion F auf $\mathbb{R}^q$ durch

$$F(\mathbf{v}) := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^p} f(\mathbf{u},\mathbf{v})d\mathbf{u} & \textit{falls} \quad \mathbf{v} \notin N \\ 0 & \textit{falls} \quad \mathbf{v} \in N \end{cases}$$

Dann ist F über $\mathbb{R}^q$ integrierbar mit

$$\int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} f(\mathbf{u},\mathbf{v})d(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \int_{\mathbb{R}^q} F(\mathbf{v})d\mathbf{y}.$$

Beweis. Nach Satz 4.43 gibt es eine Folge von Treppenfunktionen t_k auf $\mathbb{R}^n$ mit

1) $\lim \| f - t_k \|_1 = 0$,

2) die t_k konvergieren außerhalb einer Nullmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ punktweise gegen f,

3) $\sum_{k=1}^{\infty} \| t_{k+1} - t_k \|_1$ ist endlich.

Wir setzen $s_k := t_{k+1} - t_k$. Damit haben wir die folgenden, mehr oder weniger gut definierten Funktionen:

$$\begin{array}{llll} \text{auf } \mathbb{R}^n : & f(\mathbf{u},\mathbf{v}) & t_k(\mathbf{u},\mathbf{v}) & s_k(\mathbf{u},\mathbf{v}) \\ & \| & \| & \| \\ \text{auf } \mathbb{R}^p : & f_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) & t_{k,\mathbf{v}}(\mathbf{u}) & s_{k,\mathbf{v}}(\mathbf{u}) \end{array}$$

$$\text{auf } \mathbb{R}^q : \quad F(\mathbf{v}) = \int_{\mathbb{R}^p} f_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}), \qquad T_k(\mathbf{v}) = \int_{\mathbb{R}^p} t_{k,\mathbf{v}}(\mathbf{u})d\mathbf{u}, \qquad S_k(\mathbf{v}) = \int_{\mathbb{R}^p} s_{k,\mathbf{v}}(\mathbf{u})d\mathbf{u}$$

Die Treppenfunktionen machen dabei keinerlei Probleme: $t_{k,\mathbf{v}}$ und $s_{k,\mathbf{v}}$ sind Treppenfunktionen auf $\mathbb{R}^p$, ebenso wie T_k und S_k Treppenfunktionen auf $\mathbb{R}^q$ sind. Wo und wie $f_{\mathbf{v}}$ und F definiert sind, das ist Teil der Beweislast.

Beweis von a): Wegen 2) gibt es nach dem Lemma 4.51 eine Nullmenge $N' \subset \mathbb{R}^q$ so, dass für $\mathbf{v} \notin N'$ die Funktionenfolge $t_{k,\mathbf{v}}$ fast überall in $\mathbb{R}^p$ gegen $f_{\mathbf{v}}$ konvergiert.

Nach Satz 4.6 (Fubini für Treppenfunktionen) ist

$$\int_{\mathbb{R}^q} S_k(\mathbf{v})d\mathbf{v} = \int_{\mathbb{R}^n} s_k(\mathbf{u},\mathbf{v})d\mathbf{u}d\mathbf{v} = \int_{\mathbb{R}^n} |t_{k+1} - t_k| d(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \| t_{k+1} - t_k \|_1 .$$

Wegen 3) folgt daraus

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^q} S_k(\mathbf{v})d\mathbf{v} < \infty.$$

Die Partialsummen der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} S_k$ sind also beschränkt und wachsen monoton. Nach Satz 4.44 ist ihr Grenzwert $\sum_{k=1}^{\infty} S_k$ eine integrierbare 'Funktion' auf $\mathbb{R}^q$. Insbesondere gibt es eine Nullmenge $N'' \subset \mathbb{R}^q$, außerhalb der diese 'Funktion' endlich ist.

Wir setzen $N := N' \cup N''$ und fixieren $\mathbf{v} \notin N$. Die Folge $t_{k,\mathbf{v}}$ ist eine Cauchy-Folge in $L^1(\mathbb{R}^p)$. Nach Satz 4.41 (Riesz-Fischer) hat sie eine Teilfolge, die fast überall auf $\mathbb{R}^p$ punktweise gegen eine integrierbare Funktion konvergiert. Die stimmt aber fast überall mit $f_{\mathbf{v}}$ überein. Damit ist $f_{\mathbf{v}}$ integrierbar.

Beweis von b): Mit dem Satz von Riesz-Fischer ist außerdem

$$F(\mathbf{v}) = \int_{\mathbb{R}^p} f_{\mathbf{v}}(\mathbf{u})d\mathbf{u} = \lim_{k\to\infty} T_k(\mathbf{v})$$

Für die Treppenfunktionen T_k auf $\mathbb{R}^q$ gilt:

2') Auf $\mathbb{R}^n \setminus N$ konvergieren die T_k punktweise gegen F,

3') $\sum_k \parallel T_{k+1} - T_k \parallel_{1,\mathbb{R}^q} \leq \sum_k S_k(\mathbf{v}) < \infty$.

Somit bilden die T_k eine Cauchy-Folge in $L^1(\mathbb{R}^q)$. Wieder mit Riesz-Fischer konvergiert eine Teilfolge fast überall gegen eine integrierbare Funktion auf $\mathbb{R}^q$. Wegen 2') muss diese integrierbare Funktion mit F übereinstimmen. F ist also integrierbar. Und noch ein letztes mal mit Riesz-Fischer folgt

$$\int_{R^q} F(\mathbf{v})d\mathbf{v} = \lim_k \int T_k(\mathbf{v})d\mathbf{v} = \lim_k \int_{\mathbb{R}^n} t_k(\mathbf{u},\mathbf{v})d(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{u},\mathbf{v})d(\mathbf{u},\mathbf{v}). \qquad \square$$

Beispiel 4.38 *Nach Beispiel 4.34 ist die Funktion*

$$f(\mathbf{x}) = e^{-x_1^2-\ldots-x_n^2} = e^{-x_1^2}\cdot\ldots\cdot e^{-x_n^2}$$

über $\mathbb{R}^n$ integrierbar. Mit Fubini integrieren wir über eine Variable nach der anderen und erhalten

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-x_1^2-\ldots-x_n^2}dx_1\ldots dx_n = \int_{\mathbb{R}} e^{-x_1^2}dx_1\cdot\ldots\cdot\int_{\mathbb{R}} e^{-x_n^2}dx_n = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx\right)^n.$$

Nur kennen wir das Integral $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx$ leider noch nicht. Aber mit Beispiel 4.34 ist dessen Quadrat

$$\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx\right)^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy = \pi.$$

Daraus folgt

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi} \quad \mathit{und} \quad \int_{R^n} e^{-x_1^2-\ldots-x_n^2}dx_1\ldots dx_n = \sqrt{\pi}^n.$$

Ob wir zuerst über $\mathbf{u}$ und dann über $\mathbf{v}$ integrieren (wie im Beweis von Satz 4.52) oder umgekehrt, zuerst über $\mathbf{v}$ und dann über $\mathbf{u}$, das ist nur eine Frage der Reihenfolge der Koordinaten. Das Integral ist davon unabhängig. Damit haben wir:

Satz 4.53 (Vertauschungssatz) *Die 'Funktion' f sei über $\mathbb{R}^n$ integrierbar. Dann ist*

$$\int_{\mathbb{R}^q}\left(\int_{\mathbb{R}^p} f(\mathbf{u},\mathbf{v})d\mathbf{u}\right)d\mathbf{v} = \int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q} f(\mathbf{u},\mathbf{v})d\mathbf{v}\right)d\mathbf{u}.$$

In 4.2 habe ich angemerkt, dass dies eine unangenehme Komplikation ist. Denn manchmal kann das Integral in der einen Reihenfolge elementar auszuwerten sein, in der anderen Reihenfolge nicht. Aber in Wirklichkeit ist das eine phantastische neue Möglichkeit, Integrale auszuwerten, die nicht direkt elementar integrierbar sind. Hierzu s. Aufgabe 4.16.

Wenn das Integral von f über $\mathbb{R}^n$ existiert, dann existieren auch die iterierten Integrale. Die Umkehrung gilt nur unter zusätzlichen Bedingungen. Genauer versteht man unter der Existenz des iterierten Integrals

$$\int_{\mathbb{R}^q}\left(\int_{\mathbb{R}^p} f(\mathbf{u},\mathbf{v})d\mathbf{u}\right)d\mathbf{v}$$

folgendes: Es gibt eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^q$ so, dass für alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^q \setminus N$ das Integral $\int_{\mathbb{R}^p} f(\mathbf{u},\mathbf{v})d\mathbf{u}$ existiert, und die Funktion

$$F(\mathbf{v}) := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^p} f(\mathbf{u},\mathbf{v})d\mathbf{u} & \text{falls} \quad \mathbf{v} \notin N \\ 0 & \text{falls} \quad \mathbf{v} \in N \end{cases}$$

ist über $\mathbb{R}^q$ integrierbar.

Satz 4.54 (Tonelli) *Die 'Funktion' f auf $\mathbb{R}^n$ sei lokal integrierbar oder fast überall stetig. Sie ist genau dann über $\mathbb{R}^n$ integrierbar, wenn das iterierte Integral über $|f|$*

$$\int_{\mathbb{R}^q}\left(\int_{\mathbb{R}^p} |f(\mathbf{u},\mathbf{v})|d\mathbf{u}\right)d\mathbf{v}$$

existiert.

Beweis. Wenn f integrierbar ist, dann auch $|f|$, und das iterierte Integral über $|f|$ existiert.

Zur Umkehrung: Es genügt zu zeigen, dass $|f|$ über $\mathbb{R}^n$ integrierbar ist, denn mit Satz 4.48 oder 4.50 folgt daraus die Integrierbarkeit von f. Für $k \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Würfel

$$W_k := \{(\mathbf{u},\mathbf{v}) \in \mathbb{R}^n : -k \le u_i, v_j \le k\}$$

und die Funktionen

$$f_k := min\{|f|, k \cdot \chi_{W_k}\}.$$

Die Folge dieser Funktionen konvergiert punktweise, monoton wachsend gegen $|f|$. Weiter ist f_k integrierbar. Falls f lokal integrierbar ist, folgt dies aus Satz 4.24 b). Und wenn f fast überall stetig ist, dann folgt es aus Satz 4.38. Mit Fubini (Satz 4.52) folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k(\mathbf{u},\mathbf{v})d(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \int_{\mathbb{R}^q}\left(\int_{\mathbb{R}^p} f_k(\mathbf{u},\mathbf{v})d\mathbf{u}\right)d\mathbf{v} \le \int_{\mathbb{R}^q}\left(\int_{\mathbb{R}^p} |f(\mathbf{u},\mathbf{v})|d\mathbf{u}\right)d\mathbf{v}.$$

Die Folge der Integrale über die Funktionen f_k ist also beschränkt. Mit B. Levi (Satz 4.44) folgt, dass die Grenzfunktion $|f|$ integrierbar ist. $\square$

Beispiel 4.39 (Beta-Funktion) *Wir betrachten die Funktion*

$$f(x,y) = x^{p-1}y^{q-1}$$

für $p > 0, q > 0$ auf dem Dreieck

$$\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0, y \ge 0, x+y \le 1\}.$$

Auf dem Durchschnitt von Δ mit den Koordinatenachsen ist $f(x,y)$ nicht definiert, wenn $p < 1$, bzw. $q < 1$. Um f über Δ zu integrieren betrachten die triviale Fortsetzung f_{Δ^o} der Funktion f von

$$\Delta^o := \Delta \setminus \partial\Delta$$

auf $\mathbb{R}^2$ *und das iterierte Integral*

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f_{\Delta^\circ}(x,y)| dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f_{\Delta^\circ}(x,y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{1-y} x^{p-1} y^{q-1} dx \right) dy.$$

Für y in der Nullmenge $\{y \in \mathbb{R} : y = 0\}$ ist das innere Integral nicht definiert. Aber für $0 < y \leq 1$ existiert das innere Integral

$$\int_0^{1-y} x^{p-1} y^{q-1} dx = \frac{1}{p}(1-y)^p y^{q-1}.$$

Deswegen ist f über Δ integrierbar mit

$$\int_\Delta x^{p-1} y^{q-1} d(x,y) = \frac{1}{p} \int_0^1 (1-y)^p y^q dy.$$

Die für $p > 0, q > 0$ definierte Funktion

$$B(p,q) := \int_0^1 (1-t)^p t^q dt$$

heißt Beta-Funktion*. Wir haben bewiesen:*

$$\int_\Delta x^{p-1} y^{q-1} = \frac{1}{p} B(p+1, q).$$

Aufgabe 4.15 *Es sei $S \subset \mathbb{R}^2$ der Streifen*

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, 0 < x, \, 0 < y < 1\}.$$

Zeigen Sie:

$$\int_S y \cdot sin(x) \cdot e^{-xy} = \frac{1}{2} \cdot ln(2) = \int_0^\infty \frac{sin(x)}{x} \cdot \left(\frac{1 - e^{-x}}{x} - e^{-x} \right) dx.$$

Aufgabe 4.16 *a) Integrieren Sie die Funktion*

$$f(x,y) := sin(x) \cdot e^{-xy}$$

über den Streifen

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, 0 < x < a, \, y > 0\}$$

und zeigen Sie:

$$\int_0^a \frac{sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2} - cos(a) \int_0^\infty \frac{e^{-ay}}{1+y^2} dy - sin(a) \int_0^\infty \frac{y \cdot e^{-ay}}{1+y^2} dy.$$

b) Folgern Sie aus a)

$$\lim_{a \to \infty} \int_0^a \frac{sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Aufgabe 4.17 *Zeigen Sie, dass die Funktion*

$$x \cdot e^{-x^2 \cdot (1+y^2)}$$

über die Menge

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$$

integrierbar ist. Integrieren Sie diese Funktion auf zwei verschiedene Weisen, und folgern Sie daraus noch einmal

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Aufgabe 4.18 *Berechnen Sie*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \| \mathbf{x} \| \, e^{-\|\mathbf{x}\|^2}.$$

Aufgabe 4.19 *Zeigen Sie:*

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^2} dy \right) dx = \frac{1}{2}, \quad \int_0^1 \left(\int_0^2 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx \right) dy = -\frac{1}{2}.$$

Warum widerspricht dies nicht dem Vertauschungssatz ??? ?.

4.6 Die Integraltransformationsformel

Die Substitutionsformel für die Substitution $y = \varphi(x)$ in einer Veränderlichen lautet

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)dy.$$

Dabei ist

$$\varphi : [a, b] \to [\alpha, \beta] \quad \text{mit} \quad \{\varphi(a), \varphi(b)\} = \{\alpha, \beta\}$$

auf $[a, b]$, d.h., auf einem offenen Intervall, das $[a, b]$ enthält, stetig differenzierbar mit differenzierbarer Umkehrabbildung. Zu beachten ist bei $\varphi' < 0$

$$[\alpha, \beta] = [\varphi(b), \varphi(a)].$$

Wir verallgemeinern diese Formel jetzt auf mehrere Dimensionen.Weil wir da den Rand des Integrationsbereichs nicht explizit hinschreiben können, gehen wir aus von der ein-dimensionalen Substitutionsformel in der Gestalt

$$\int_{[a,b]} f(\varphi(x))|\varphi'(x)|dx = \int_{\varphi([a,b])} f(y)dy.$$

Satz 4.55 *Es seien* $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ *offen und*

$$\Phi : X \to Y$$

stetig differenzierbar mit differenzierbarer Umkehrabbildung. Dann ist eine 'Funktion' f auf Y genau dann über Y integrierbar, wenn die 'Funktion'

$$(f \circ \Phi) \cdot |det\Phi'|$$

über X integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int_X f(\Phi(\mathbf{x})) \cdot |det\Phi'(\mathbf{x})| d\mathbf{x} = \int_Y f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

Der (längliche) Beweis dieses Satzes ist Inhalt dieses ganzen Abschnitts.

Natürlich müssen wir das Verhalten von Nullmengen unter differenzierbaren Abbildungen kontrollieren. Dazu:

Satz 4.56 (Nullmengen, Lemma 1) *Es sei* $N \subset \mathbb{R}^n$ *eine Nullmenge und* $\Phi : N \to \mathbb{R}^n$ *Lipschitz-stetig. Dann ist auch* $\Phi(N) \subset \mathbb{R}^n$ *eine Nullmenge.*

Beweis. Nach Satz 4.33 c) ist N enthalten in der Vereinigung $\bigcup W_k$ abzählbar vieler achsenparalleler Würfel W_k mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} |W_k| < \epsilon.$$

Es sei W_k einer dieser Würfel mir Kantenlänge a, und $W_k \cap N \neq 0$. Falls $\mathbf{x} \in W_k \cap N$, so gilt für jeden anderen Punkt $\mathbf{x}' \in W_k \cap N$

$$\| \mathbf{x}' - \mathbf{x} \| \leq \sqrt{2}^n \cdot 2a.$$

Ist L die Lipschitz-Konstante, so folgt für die Bildpunkte

$$\| \Phi(\mathbf{x}') - \Phi(\mathbf{x}) \| \leq L \cdot \sqrt{2}^n \cdot 2a$$

Das Bild von $W_k \cap N$ ist enthalten in einer Kugel um $\Phi(\mathbf{x})$ vom Radius $r = L \cdot \sqrt{2}^n \cdot 2a$ und damit in einem Würfel mit Mittelpunkt $\Phi(\mathbf{x})$ und Kantenlänge $2r$. Dieser Würfel hat das Volumen

$$L^n \cdot \sqrt{2}^{n^2} \cdot (2a)^n = L^n \cdot \sqrt{2}^{n^2} \cdot |W_k|.$$

Damit ist $\Phi(N)$ enthalten in der Vereinigung abzählbar vieler Würfel mit dem Gesamtvolumen $< L^n \cdot \sqrt{2}^{n^2} \cdot \epsilon$. □

Satz 4.57 (Nullmengen, Lemma 2) *Es sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $N \subset U \subset \mathbb{R}^n$ *eine Nullmenge, und* $\Phi : U \to \mathbb{R}^n$ *stetig differenzierbar. Dann ist auch* $\Phi(N) \subset \mathbb{R}^n$ *eine Nullmenge.*

Beweis. Wie im Beweis von Lemma 4.19 gibt es abzählbar viele kompakte Quader $Q_k \subset U$ mit $U = \bigcup_k Q_k$. Die Funktionalmatrix $\Phi'(\mathbf{x})$ ist stetig und ihre Norm $\| \Phi'(\mathbf{x}) \|$ auf Q_k beschränkt. Mit dem (im letzten Semester ziemlich verunglückten) Mittelwertsatz folgt, dass $\Phi|Q_k$ Lipschitz-stetig ist. Nach Satz 4.56 ist $\Phi(N \cap W_k)$ eine Nullmenge. Diese abzählbar vielen Nullmengen überdecken $\Phi(N)$. □

Von nun an fixieren wir folgende Situation:

Die Mengen $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ seien offen, $\Phi : X \to Y$ sei bijektiv und stetig differenzierbar mit stetig differenzierbarer Umkehrabbildung $\Phi^{-1} : X \to Y$.

Für jede kompakte Menge $K \subset X$ ist $\Phi(K) \subset \mathbb{R}^n$ wieder kompakt, und damit messbar.

Satz 4.58 (Würfel) *Es sei $W \subset X$ ein achsenparalleler kompakter Würfel. Dann ist*

$$|\Phi(W)| \leq \parallel det(\Phi') \parallel_W \cdot |W|.$$

Beweis. Falls W entartet und $|W| = 0$ ist, folgt die Behauptung aus Satz 4.56. Andernfalls ist $|W| > 0$. Es gibt also eine Zahl $0 \leq \alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$|\Phi(W)| = \alpha \cdot |W|.$$

Wir zerlegen W in 2^n achsenparallele Würfel halber Kantenlänge. Unter diesen gibt es mindestens einen Würfel W_1 mit

$$|\Phi(W_1)| \geq \alpha \cdot |W_1|.$$

Diese Konstruktion iterieren wir und finden unendlich viele Würfel $W \supset W_1 \supset W_2 \supset ...$ mit

$$|\Phi(W_k)| \geq \alpha |W_k| \quad \text{für alle} \quad k.$$

Weil sich die Kantenlänge der Würfel mit jedem Schritt halbiert, gibt es genau einen Punkt

$$\mathbf{a} \in \bigcap_k W_k.$$

Es sei $\mathbf{b} = \Phi(\mathbf{a})$.

Nach Satz 4.16 a) ist die Aussage invariant bei Translation. Wir können also, um Schreibarbeit zu sparen, die Situation so normieren, dass

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Es sei d die halbe Kantenlänge von W und $\mathbf{m}_k$ der Mittelpunkt von W_k. Dann ist

$$W_k = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \max_{\nu=1}^{n} |x_\nu - m_{k,\nu}| \leq 2^{-k} \cdot d\}.$$

Wegen $\mathbf{0} \in W_k$ ist insbesondere $\max |m_{k,\nu}| \leq 2^{-k} \cdot d$.

Es sei $A := \Phi'(\mathbf{0})$. Die Differenzierbarkeit von Φ in $\mathbf{0}$ bedeutet

$$\Phi(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x} + R(\mathbf{x}) = A \cdot (\mathbf{x} + S(\mathbf{x})), \quad S(\mathbf{x}) = A^{-1} \cdot R(\mathbf{x}),$$

mit

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{0}} \frac{\parallel R(\mathbf{x}) \parallel}{\parallel \mathbf{x} \parallel} = 0 \quad \text{und auch} \quad \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{\parallel S(\mathbf{x}) \parallel}{\parallel \mathbf{x} \parallel} = 0.$$

Es gibt also ein k so, dass für alle $\mathbf{x} \in W_k$ gilt

$$\parallel S(\mathbf{x}) \parallel \leq \frac{\epsilon}{\sqrt{n}} \parallel \mathbf{x} \parallel \leq \frac{\epsilon}{2} \max_\nu |x_\nu|.$$

Damit folgt

$$\max_\nu |x_\nu + S(\mathbf{x})_\nu| \leq \max_\nu |x_\nu| + \parallel S(\mathbf{x}) \parallel \leq (1 + \frac{\epsilon}{2}) \cdot \max_\nu |x_\nu|.$$

Wir haben gezeigt: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein k, von dem ab $A^{-1} \cdot \Phi(W_k)$ im Würfel

$$W_k^\epsilon = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \ |x_\nu| \leq 2^{-k} \cdot d \cdot (1 + \epsilon)\}$$

der Kantenlänge $2 \cdot 2^{-k} \cdot d \cdot (1 + \epsilon)$ enthalten ist.

Damit folgt

$$\Phi(W_k) \subset A \cdot W_k^\epsilon$$

und mit Satz 4.34

$$|\Phi(W_k)| \leq (1+\epsilon)^n \cdot |det(A)| \cdot |W_k|.$$

Wenn

$$\alpha > \| \, det(\Phi') \, \|_W \geq |det(A)|$$

gewesen wäre, ergäbe dies einen Widerspruch. □

Satz 4.59 (Kompakte Mengen) *Es sei $K \subset X$ eine kompakte Menge, deren Rand eine Nullmenge ist, und $Q := \Phi(K)$. Dann gilt*

$$\min_{\mathbf{x} \in K} |det(\Phi'(\mathbf{x}))| \cdot |K| \leq |Q| \leq \max_{\mathbf{x} \in K} |det(\Phi'(\mathbf{x}))| \cdot |K|.$$

Beweis. Es sei $K^o := K \setminus \partial K$. Dann ist

$$\Phi(K) = \Phi(K^o) \cup \Phi(\partial K)$$

mit der Nullmenge (Satz Satz 4.57) $\Phi(\partial K)$.

Wie im Beweis von Satz 4.33 c) gibt es abzählbar viele kompakte Würfel W_k mit

- $K^o = \bigcup_k W_k$,
- Durchschnitte $W_i \cap W_j$, $i \neq j$, enthalten höchstens Randpunkte von W_i und W_j.

Weil ∂K eine Nullmenge ist, gilt

$$|K| = |K^o| = \sum_k |W_k|.$$

Weil $\Phi(\partial K)$ eine Nullmenge ist, und weil sich die Bilder $\Phi(W_i), \Phi(W_j), i \neq j$, höchstens in Nullmengen schneiden, ist

$$|Q| = |\Phi(K)| = |\Phi(K^o)| = \sum_k |\Phi(W_k)|.$$

Nach Satz 4.58 ist

$$|\Phi(W_k)| \leq \max_{\mathbf{x} \in K} |det \Phi'(\mathbf{x})| |W_k|.$$

Daraus folgt

$$|Q| \leq \max_{\mathbf{x} \in K} |det \Phi'(\mathbf{x})| \cdot |K|.$$

Das ist die rechte Ungleichung in unserer Behauptung.

Zum Beweis der linken Ungleichung wenden wir das erzielte Ergebnis an auf $\Phi^{-1} : Y \to X$ und $Q \to W$. Oben sahen wir

$$Q = \Phi(K^o) \cup \Phi(\partial K)$$

mit der offenen Menge $\Phi(K^o) \subset Q$ und der Nullmenge $\Phi(\partial K)$. Weil ∂Q die in Q enthaltene offene Menge $\Phi(K^o)$ nicht schneiden kann, ist $\partial Q \subset \Phi(\partial K)$ eine Nullmenge. Wir können unser bisher erzieltes Ergebnis auf $\Phi^{-1} : Q \to K$ anwenden und erhalten

$$|K| \leq \max_{\mathbf{y} \in Q} |det(\Phi^{-1})'(\mathbf{y})| \cdot |Q|.$$

Nun ist

$$(\Phi^{-1})'(\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{x})^{-1} \quad \text{mit} \quad \mathbf{x} = \Phi^{-1}(\mathbf{y}),$$

also

$$\max_{\mathbf{y}\in Q} |det(\Phi^{-1})'(\mathbf{y})| = \max_{\mathbf{x}\in K} |det\Phi(\mathbf{x})^{-1}| = \max_{\mathbf{x}\in K} \frac{1}{|det\Phi'(\mathbf{x})|} = \frac{1}{\min_{\mathbf{x}\in K} |det\Phi'(\mathbf{x})|}.$$

Damit folgt auch die linke Ungeichung. □

Satz 4.60 (Treppenfunktionen) *Es sei $t = \sum_k c_k \chi_{Q_k}$ eine Treppenfunktion mit $\bar{Q_k} \subset Y$ für alle k. Dann gilt die Transformationsformel für t.*

Beweis. Wegen der Linearität genügt es die Aussage für eine charakteristische Funktion χ_Q zu zeigen, wo $Q \subset Y$ ein kompakter Quader ist. Die Funktion $\chi_Q(\Phi(\mathbf{x})) \cdot det|\Phi'(\mathbf{x})|$ ist integrierbar, weil $K := \Phi^{-1}(Q) \subset X$ kompakt und $|det(\Phi'(\mathbf{x}))|$ stetig ist. Wir müssen also zeigen:

$$\int_K |det(\Phi'(\mathbf{x}))| d\mathbf{x} = \int_Q \chi_Q(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = |Q|.$$

Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Die Funktion $|det(\Psi^{-1}(\mathbf{y}))'|$ ist stetig auf Q und damit gleichmäßig stetig (Satz 1.13). Wir zerlegen

$$Q = Q_1 \cup ... \cup Q_l$$

in Quader Q_k, $k = 1, ..., l,$, die sich höchstens in Randpunkten schneiden und so klein sind, dass für alle k

$$\max_{\mathbf{y}\in Q_k} |det(\Psi^{-1}(\mathbf{y})'| - \min_{\mathbf{y}\in Q_k} |det(\Psi^{-1}(\mathbf{y})'| < \epsilon.$$

Auf $K_k := \Phi^{-1}(Q_k)$ ist dann

$$\max_{\mathbf{x}\in K_k} |det\Phi'(\mathbf{x})| - \min_{\mathbf{x}\in K_k} |det\Phi'(\mathbf{x})| < \epsilon.$$

Mit Satz 4.59 folgt daraus

$$\left| \int_{K_k} |det\Phi'(\mathbf{x})| d\mathbf{x} - |Q_k| \right| \leq \epsilon \cdot |K_k|.$$

Weil die Durchschnitte $K_i \cap K_j$, $i \neq j$, Nullmengen sind folgt durch Addition

$$\left| \int_{K} |det\Phi'(\mathbf{x})| d\mathbf{x} - |Q| \right| \leq \epsilon \cdot |K|.$$

Mit $\epsilon \to 0$ erhalten wir die Behauptung. □

Satz 4.61 (Approximation) *Es sei f auf Y integrierbar. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Treppenfunktion $t = \sum c_l \chi_{Q_l}$ mit*

1) *die Vereinigung $\bigcup_k |Q_k|$ ist ganz in Y enthalten,*

2) $\| f_Y - t \|_1 < \epsilon$.

Beweis. Es sei u eine Treppenfunktion auf $\mathbb{R}^n$ mit

$$\| f_Y - u \|_1 < \frac{\epsilon}{2}.$$

Wegen $|f_Y - \chi_Y \cdot u| \leq |f_Y - u|$ folgt daraus

$$\| f_Y - \chi_Y \cdot u \|_1 \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Leider ist im Allgemeinen $\chi_Y \cdot u$ keine Treppenfunktion. Wir fixieren $M \in \mathbb{R}$ mit $|u| \leq M$.

Es sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte offenen Menge mit $u(\mathbf{x}) = 0$ außerhalb B. Dann ist

$$\chi_Y \cdot u = \chi_{Y \cap B} \cdot u.$$

Weil $Y \cap B$ messbar ist, gibt es endlich viele kompakte Quader in $Y \cap B$ so, dass für deren Vereinigungsmenge A gilt

$$|B \cap Y| - |A| < \frac{\epsilon}{2M}.$$

Dann ist $t := \chi_A \cdot u$ eine Treppenfunktion mit 1). Weiter ist

$$\| \chi_Y \cdot u - t \|_1 = \| \chi_{Y \cap B} \cdot u - \chi_A \cdot u \|_1 \leq M \cdot (|Y \cap B| - |A|) \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Damit ist auch 2) nachgewiesen. □

Jetzt kommen wir endlich zum Beweis der Integraltransformationsformel:

Sei also f auf U integrierbar. Nach Satz 1.61 gibt es eine Folge t_k von Treppenfunktionen mit

1) $t_k = \sum_l c_{k,l} \chi_{Q_{k,l}}$ mit $\bigcup_l Q_{k,l} \subset Y$,
2) $\| f - t_k \|_1 \to 0$,
3) die Folge t_k konvergiert (eventuell nach Übergang zu einer Teilfolge wie in Satz 4.41) punktweise gegen f_Y außerhalb einer Nullmenge $N \subset Y$.

Wir definieren die Funktionen

$$\tilde{t}_k := (t_k \circ \Phi) \cdot |det \Phi'|, \quad \tilde{f} := (f \circ \Phi) \cdot |det \Phi'|$$

auf X. Nach Satz 4.60 sind die $\tilde{t}_k$ integrierbar über X, und es ist

$$\| \tilde{t}_k - \tilde{t}_l \|_1 = \int_X |\tilde{t}_k - \tilde{t}_l| = \int_Y |t_k - t_l| = \| t_k - t_l \|_1 .$$

Deswegen bilden die Funktionen $\tilde{t}_k$ eine Cauchy-Folge in $L_1(X)$. Außerhalb der Nullmenge $\Phi^{-1}(N)$ konvergiert die Folge $\tilde{t}_k$ punktweise gegen $\tilde{f}$. Nach Riesz-Fischer ist $\tilde{f}$ integrierbar mit

$$\int_X \tilde{f} = \lim_k \int_X \tilde{t}_k = \lim_k \int_Y t_k = \int_v f.$$

Das war's.

Jetzt kann ich endlich einen Schönheitsfehler beheben, den hoffentlich noch niemand bemerkt hat: Unsere ganzen Definitionen kranken daran, dass wir immer achsenparallele Quader benutzen. Damit sind sie abhängig von den Koordinatenrichtungen unseres gewählten Koordinatensystems auf $\mathbb{R}^n$. Natürlich ändern sich die Integrale, wenn man sie in anderen Koordinaten ausrechnet. Wie sie sich ändern, das zeigt ja die Transformationsformel. Aber bei einer linearen Abbildung Φ mit Determinante $det(\Phi) = \pm 1$ entfällt der Faktor $|det(\Phi')|$ in der Transformationsformel. Damit haben wir:

Satz 4.62 (Invarianz) *Die Funktion f sei integrierbar über der offenen Menge $Y \subset \mathbb{R}^n$. Die Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sei linear und orthogonal mit $X := \Phi^{-1}(Y)$. Dann ist*

$$\int_Y f(\mathbf{y})d\mathbf{y} = \int_X f(\Phi(\mathbf{x}))d\mathbf{x}.$$

Beispiel 4.40 (Jacobi) *Wir betrachten die Abbildung*

$$J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \cdot (1 - u_2) \\ u_1 \cdot u_2 \end{pmatrix}.$$

Sie ist differenzierbar mit Funktionalmatrix

$$J'(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 1 - u_2 & -u_1 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix}$$

und der Funktionaldeterminante

$$det J'(u_1, u_2) = u_1.$$

Die Umkehrabbildung ist

$$J^{-1} : \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v_1 + v_2 \\ \dfrac{v_2}{v_1 + v_2} \end{pmatrix},$$

zumindest dort, wo $u_1 = v_1 + v_2 \neq 0$.

Das Urbild des offenen Quadranten

$$V := \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 : \ v_1 > 0, v_2 > 0\}$$

ist der offene Streifen

$$U = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 : \ u_1 > 0, 0 < u_2 < 1\}.$$

Eine Funktion $f(v_1, v_2)$ ist genau dann über V integrierbar, wenn $(f \circ J) \cdot u_1$ über U integrierbar ist, und dann lautet die Integraltransformationsformel

$$\int_u f(v_1, v_2)dv_1 dv_2 = \int_U f(u_1(1 - u_2), u_1 u_2) \cdot u \cdot du_1 du_2.$$

Wir betrachten speziell

$$f(v_1, v_2) = v_1^{x-1} e^{-v_1} \cdot v_2^{y-1} \cdot e^{-v_2}.$$

Für $x > 0$ und $y > 0$ folgt mit Fubini

$$\int_V f(v_1, v_2)dv_1 dv_2 = \int_0^\infty v_1^{x-1} e^{-v_1} dv_1 \cdot \int_0^\infty v_2^{y-1} e^{-v_2} dv_2 = \Gamma(x) \cdot \Gamma(y).$$

Die Integraltransformationsformel liefert

$$\begin{aligned} \Gamma(x) \cdot \Gamma(y) &= \int_U (u_1 \cdot (1 - u_2))^{x-1} (u_1 u_2)^{y-1} \cdot u_1 du_1 d_2 \\ &= \int_0^\infty u_1^{x+y-1} du_1 \cdot \int_0^1 (1 - u_2)^{x-1} u_2^{y-1} du_2 \\ &= \Gamma(x + y) \cdot B(x, y). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir den Zusammenhang

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x) \cdot \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

zwischen Beta- und Gamma-Funktion.

Aufgabe 4.20 *Berechnen Sie für $a, b, c > 0$ das Volumen des Ellipsoids*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$

im $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 4.21 *Bekannte und wichtige Transformationen sind der Übergang in Polarkoordinaten*

$$\begin{aligned} x &= r \cdot cos(\varphi) \\ y &= r \cdot sin(\varphi) \end{aligned}$$

und in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} x &= r \cdot sin(\theta) \cdot cos(\varphi) \\ y &= r \cdot sin(\theta) \cdot sin(\varphi) \\ z &= r \cdot cos(\theta) \end{aligned}$$

Bestimmen Sie für beide Transformationen die Funktionaldeterminanten und eine möglichst große offene Menge, auf der diese Transformationen bijektiv sind.

Aufgabe 4.22 *Berechnen Sie für $r_0 > 0$ und $0 < \theta_0 < \pi$ das Volumen der Menge, die in Kugelkoordinaten gegeben ist durch*

$$r \leq r_0, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_0.$$

Aufgabe 4.23 *Berechnen Sie für $m, n \in \mathbb{N}$*

$$\int_{x^2+y^2 \leq 1} x^m \cdot y^n d(x,y).$$

Aufgabe 4.24 *a) Es sei $K \subset \mathbb{R}^3$ die Kugel vom Radius R und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie mit der Transformationsformel*

$$\int_K f(\| \mathbf{x} \|) d\mathbf{x} = 4\pi \cdot \int_0^R f(r) r^2 dr.$$

b) Berechnen Sie für $-2 \leq n \in \mathbb{Z}$

$$\int_K \| \mathbf{x} \|^n .$$

c) Berechnen Sie

$$\int_K (x^2 + y^2) d(x,y,z).$$

Aufgabe 4.25 *Bestimmen Sie die Funktionalmatrix für den Übergang*

$$\begin{aligned} x &= sin(u) \cdot cosh(v) \\ y &= cos(u) \cdot sinh(v) \end{aligned}$$

in elliptische Koordinaten. Berechnen Sie damit die Größe der von Ellipse und Hyperbel begrenzten Fläche

$$F = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{1+a^2} + \frac{y^2}{a^2} \leq 1,\ \frac{y^2}{b^2} - \frac{y^2}{1-b^2} \leq 1 \right\},$$

wobei $a = sinh(v_0) > 0$ *und* $0 < b = sin(u_0) < 1$.

Aufgabe 4.26 *a) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante der Abbildung* $f : (r, \varphi) \mapsto (x, y)$, *wobei*

$$\begin{aligned} x &= r \cdot cos^3(\varphi) \\ y &= r \cdot sin^3(\varphi) \end{aligned} \qquad (r > 0,\ 0 < \varphi < 2\pi).$$

b) Bestimmen Sie die Fläche der Menge

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 0, y \geq 0, x^{2/3} + y^{2/3} \leq 1\}.$$

Aufgabe 4.27 *a) Es sei* $U \subset \mathbb{R}^2$ *die offenen Menge gegeben durch* $x > 0$ *und* $y > 0$. *Zeigen Sie, dass die Abbildung*

$$f : U \to U, \quad f(x,y) = (x^2y, xy^2)$$

bijektiv ist und geben Sie die Umkehrabbildung an.
b) Berechnen Sie die Fläche der Menge

$$\{(u,v) \in \mathbb{R}^2;\ u > 0, v > 0, 1 \leq \frac{u^2}{v} \leq 8, 1 \leq \frac{v^2}{u} \leq 8\}.$$

Aufgabe 4.28 *Es sei*

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq xy \leq 2, 0 \leq x^2 - y^2 \leq 1\}.$$

Berechnen Sie

$$\int_A (x^4 - y^4) d(xy).$$

4.7 Parameterabhängige Integrale

Hier betrachten wir Integrale über Funktionen $f(\mathbf{x},\mathbf{t})$ die von einem Parameter $\mathbf{t}$ abhängen. Wir nehmen also an, die Funktion f sei definiert auf einer Menge

$$X \times T \subset \mathbb{R}^{n+p}, \quad X \subset \mathbb{R}^n, T \subset \mathbb{R}^p.$$

Außerden sei für jedes feste $\mathbf{t} \in T$ die Funktion $f(\mathbf{x},\mathbf{t})$ über X integrierbar. Dann ist also die Funktion

$$F(\mathbf{t}) := \int_X f(\mathbf{x},\mathbf{t})d\mathbf{x}$$

auf T wohldefiniert.

Satz 4.63 (Stetigkeit) *Wir nehmen zusätzlich an:*
a) Für jedes feste $\mathbf{x} \in X$ ist die Funktion $\mathbf{t} \mapsto f(\mathbf{x},\mathbf{t})$ stetig,
b) es gebe eine über X integrierbare Funktion g (Majorante) mit

$$|f(\mathbf{x},\mathbf{t})| \leq g(\mathbf{x}) \quad \textit{für alle } (\mathbf{x},\mathbf{t}) \in X \times T.$$

Dann ist die oben definierte Funktion F stetig auf T.

Beweis. Es sei $\mathbf{t}_k \in T$ eine Folge, die gegen $\mathbf{t} \in T$ konvergiert. Wir haben zu zeigen $\lim F(\mathbf{t}_k) = F(\mathbf{t})$. Dazu betrachten wir die Funktionenfolge

$$f_k : X \to \mathbb{R}, \quad f_k(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x},\mathbf{t}_k).$$

Wegen a) konvergiert diese Folge punktweise gegen die Funktion $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x},\mathbf{t})$ auf X. Mit Satz 4.47 (Lebesgue) folgt

$$\lim F(\mathbf{t}_k) = \lim \int_X f_k(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_X f(\mathbf{x},\mathbf{t})d\mathbf{x} = F(\mathbf{t}).$$ □

Satz 4.64 (Differenzierbarkeit) *Jetzt sei zusätzlich $T \subset \mathbb{R}^p$ offen und es gelte:*
a) Für jedes feste $\mathbf{x} \in X$ ist die Funktion $\mathbf{t} \mapsto f(\mathbf{x},\mathbf{t})$ stetig differenzierbar auf T,
b) Es gebe eine über X integrierbare Funktion g (Majorante) mit

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t_\nu}(\mathbf{x},\mathbf{t})\right| \leq g(\mathbf{x}) \quad \textit{für alle } (\mathbf{x},\mathbf{t}) \in X \times T \textit{ und } \nu = 1,...,p.$$

Dann ist die oben definierte Funktion F stetig differenzierbar auf T, für jedes feste $\mathbf{t} \in T$ ist die partielle Ableitung $\partial f/\partial t_\nu(\mathbf{x},\mathbf{t})$ über X integrierbar, und es gilt

$$\frac{\partial F}{\partial t_\nu}(\mathbf{t}) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t_\nu}(\mathbf{x},\mathbf{t})d\mathbf{x}.$$

Beweis. Es sei $\mathbf{t}_0 \in T$ fest und $r > 0$ so klein, dass die ganze Kugel $\| \mathbf{t} - \mathbf{t}_0 \| < r$ noch in T liegt. Weiter sei $h_k \in \mathbb{R}$ eine Nullfolge mit $|h_k| < r$ und $h_k \neq 0$ für alle k. Mit $\mathbf{e}_\nu \in \mathbb{R}^p$, dem ν-ten Vektor der kanonischen Basis, setzen wir $\mathbf{t}_k = \mathbf{t}_0 + h_k\mathbf{e}_\nu$. Dann sind die Funktionen

$$\varphi_k(\mathbf{x}) := \frac{f(\mathbf{x},\mathbf{t}_k) - f(\mathbf{x},\mathbf{t}_0)}{h_k}$$

integrierbar über X. Für jedes feste $\mathbf{x} \in X$ ist

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial t_\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{t}_0).$$

Mit Voraussetzung b) und dem MWS der Differentialrechnung einer Veränderlichen folgt $|\varphi_k| \leq g$. Mit Satz 4.47 (Lebesgue) ist dann auch die Grenzfunktion $\mathbf{x} \mapsto \partial f/\partial t_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{t}_0)$ integrierbar, und es ist

$$\lim_{k\to\infty} \frac{F(\mathbf{t}_k) - F(\mathbf{t}_0)}{h_k} = \lim_{k\to\infty} \int_X \varphi_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_X \frac{\partial f}{\partial t_\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{t}_0) d\mathbf{x}.$$

Damit ist F partiell nach t_ν differenzierbar und für $\partial F/\partial t_\nu$ gilt die oben angegebene Formel.

Die Stetigkeit dieser partiellen Ableitung, und damit die stetige Differenzierbarkeit von F folgt nun aus Satz 4.63. $\square$

4.7.1 Faltung

Definition 4.20 *Es seien f und g Funktionen auf $\mathbb{R}$. Wir definieren (nur für diesen Abschnitt) die Funktion $f \otimes g$ auf $\mathbb{R}^2$ durch*

$$(f \otimes g)(x, y) := f(x) \cdot g(y).$$

Satz 4.65 *a) Es ist $\| f \otimes g \|_1 \leq \| f \|_1 \cdot \| g \|_1$.*
b) Sind f und g über $\mathbb{R}$ integrierbar, dann ist $f \otimes g$ über $\mathbb{R}^2$ integrierbar mit

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \otimes g = (\int_{\mathbb{R}} f) \cdot (\int_{\mathbb{R}} g).$$

Beweis. a) Es seien $\sum c_k \chi_{I_k}$, bzw. $\sum d_l \chi_{J_l}$ Hüllreihen für f, bzw. g. Dann ist

$$\sum_{k,l} c_k d_l \chi_{I_k \times J_l}$$

eine Hüllreihe für $f \otimes g$ mit dem Inhalt

$$\sum_{k,l} c_k d_l |I_k \times J_l| = (\sum_k c_k |I_k|) \cdot (\sum_l d_l |J_l|).$$

b) Nach Voraussetzung gibt es Folgen t_k und u_l von Treppenfunktionen mit

$$\lim_k \| f - t_k \|_1 = \lim_l \| g - u_l \|_1 = 0.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} |(f \otimes g)(x, y) - (t_k \otimes u_l)(x, y)| &\leq |(f \otimes g)(x, y) - (t_k \otimes g)(x, y) + (t_k \otimes g)(x, y) - (t_k \otimes u_l)(x, y)| \\ &\leq |(f - t_k)(x)| \cdot |g(y)| + |t_k(x)| \cdot |(g - u_l)(y)|. \end{aligned}$$

Daraus folgt mit a)

$$\lim_{k,l} \| f \otimes g - t_k \otimes u_l \|_1 = 0.$$

Also ist $f \otimes g$ integrierbar (Riesz-Fischer), und das Lebesgue-Integral ist

$$\lim_{k,l} \int_{\mathbb{R}^2} t_k \otimes u_l = (\lim_k \int_{\mathbb{R}} t_k) \cdot (\lim_l \int_{\mathbb{R}} u_l).$$

□

Auf die Funktion $(f \otimes g)(x,y) = f(x) \cdot g(y)$ wenden wir die Transformation

$$(x,y) \mapsto (x-y, y)$$

an und erhalten die Funktion

$$f(x-y) \cdot g(y).$$

Nach Satz 4.55 ist auch diese Funktion über $\mathbb{R}^2$ integrierbar. Mit Satz 4.52 (Fubini) folgt daraus, dass durch

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy$$

eine Funktion $f * g$ fast überall auf $\mathbb{R}$ definiert ist. Wenn f oder g beschränkt ist, dann ist $f * g$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Wo das Integral nicht definiert ist, setzen wir $(f * g)(x) = 0$.

Definition 4.21 *Die eben definierte Funktion $f * g$ auf $\mathbb{R}$ heißt die* Faltung *der beiden Funktionen f und g.*

Beispiel 4.41 *Wir betrachten die Funktion $\chi = \chi_{[0,1]}$ und ihre Faltung*

$$(\chi * \chi)(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi(x-y) \cdot \chi(y)dy$$

mit sich selbst. Wegen $\chi(y) = 0$ für $y < 0$ oder $y > 1$ ist

$$(\chi * \chi)(x) = \int_0^1 \chi(x-y)dy.$$

Nun ist $\chi(x-y) = 1$ falls

$$0 \leq x - y \leq 1, \quad \textit{bzw.} \quad x - 1 \leq y \leq x$$

und $= 0$ sonst. Damit wird

$$\int_0^1 \chi(x-y)dy = \begin{cases} x & \textit{falls} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & \textit{falls} \quad 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Satz 4.66 (Rechenregeln) *a) Es ist $f * g = g * f$.*
b)Für $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ ist auch $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ mit

$$\| f * g \|_1 \leq \| f \|_1 \cdot \| g \|_1 .$$

c) Ist g stetig und beschränkt, dann ist auch $f * g$ stetig.
d) Ist g stetig differenzierbar und g' beschränkt, dann ist auch $f * g$ stetig differenzierbar mit $(f * g)' = f * g'$.

Beweis a) Wo das Faltungs-Integral definiert ist, haben wir mit der Substitution $u = x - y$

$$(g * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x-y) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}} g(u) f(x-u) du = (f * g)(x).$$

b) Die Transformation

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (x-y, y)$$

hat die Funktionaldeterminante $= 1$. Mit der Transformationsformel wird

$$\parallel f * g \parallel_1 = \int_{\mathbb{R}} |(f*g)(x)| dx == \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) dy \right| dx \leq \int_{\mathbb{R}^2} |f(x-y) g(y)| dy dx = \int_{\mathbb{R}^2} |f| \otimes |g|,$$

und mit Satz 4.55 erhalten wir daraus die Behauptung.
c) Ist $|g| \leq M$, dann ist für alle $x \in \mathbb{R}$ die Funktion $M|f|$ eine integrierbare Majorante der Funktion $y \mapsto f(y) g(x-y)$. Nach dem Stetigkeitssatz 4.63 ist die Faltung

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) g(x-y) dy$$

stetig in x.
d) Für festes y ist die Funktion $x \mapsto f(y) g(x-y)$ stetig differenzierbar. Ist $|g'| \leq M$, dann ist für alle $y \in \mathbb{R}$

$$\left| \frac{d}{dx} f(y) g(x-y) \right| = |f(y) g'(x-y)| \leq M \cdot |f(y)|.$$

Die Funktion $M|f|$ ist also eine integrierbare Majorante für $\frac{d}{dx} f(y) g(x-y)$. Nach dem Differenzierbarkeitssatz 4.64 ist $f * g$ differenzierbar mit

$$\frac{d}{dx}(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{d}{dx} g(x-y) dx = f * g'(x).$$

□

In der theoretischen Physik verwendet man mit großem Erfolg die *Diracsche Delta-Funktion*. Das ist eine auf $\mathbb{R}$ definierte 'Funktion' δ mit

$$\delta(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad x \neq 0, \\ \infty & \text{falls} \quad x = 0. \end{cases}$$

Dabei soll $\delta(0)$ so stark unendlich sein, dass für jede einigermaßen integrierbare Funktion f auf $\mathbb{R}$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \delta(x) dx = f(0)$$

oder allgemeiner

$$(f * \delta)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) \delta(y) dy = f(x).$$

Als L^1-Funktion kann δ natürlich nicht existieren. Denn weil δ fast überall $= 0$ ist, wäre auch jedes Intgral über $f(x)\delta(x)$ gleich 0.

Aber indem wir uns hin-approximieren, können wir daraus einen exakten Formalismus machen. Und das geht so:

Definition 4.22 *Eine Folge von Funktionen $\delta_k \in L^1(\mathbb{R})$ heißt eine* Dirac-Folge*, wenn sie die folgenden drei Eigenschaften hat:*

1) Für alle k ist $\delta_k \geq 0$.

2) Für alle k ist $\int_{\mathbb{R}} \delta_k(x)dx = 1$.

3) Für jedes $r > 0$ ist

$$\lim_{k\to\infty} \int_{|x|>r} \delta_k(x)dx = 0.$$

Beispiel 4.42 *Die Folge definiert durch*

$$\delta_k(x) := \begin{cases} k/2 & \text{falls} \quad |x| \leq 1/k \\ 0 & \text{falls} \quad |x| > 1/k \end{cases}$$

ist offensichtlich eine Dirac-Folge.

Beispiel 4.43 *Die Funktion g auf $\mathbb{R}$ definiert durch*

$$g(x) := \begin{cases} exp\left(\frac{-1}{1-x^2}\right) & \text{falls} \quad |x| \leq 1 \\ 0 & \text{falls} \quad |x| > 1 \end{cases}$$

ist ein Standard-Beispiel für eine unendlich oft differenzierbare Funktion, deren Taylor-Reihe in den Punkten $x = \pm 1$ identisch verschwindet und deswegen nicht gegen die Funktion konvergiert. Mit dieser Funktion definieren wir eine Dirac-Folge vermöge

$$\delta_k(x) := \frac{k}{\| g \|_1} g(kx).$$

Dieses Beispiel 4.43 ist ein Spezialfall folgender allgemeiner Situation:

Satz 4.67 *Es sei $g \in L^1(\mathbb{R})$ mit*
1) $g \geq 0$,
2) $\int_{\mathbb{R}} g = 1$,
3) die Funktionen $g(x)$ und $g(-x)$ sind für $x > 0$ monoton fallend mit $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$.
Dann ist die Folge δ_k mit

$$\delta_k(x) = k \cdot g(kx)$$

eine Dirac-Folge.

Beweis. Mit der Transformationsformel sehen wir für alle k

$$\int_{\mathbb{R}} \delta_k = 1.$$

Für $r > 0$ fallen die Funktionen δ_k auf der Menge $|x| > r$ punktweise monoton gegen 0. Sie haben die Majorante g. Mit Lebesgue folgt

$$\int_{|x|>r} \delta_k(x)dx \to 0.$$

□

Beispiel 4.44 *Ein weiteres Beispiel für eine Dirac-Folge erhält man aus der Gauß-Funktion*

$$g(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$

als $\delta_k(x) = k \cdot g(kx)$.

Eine Dirac-Folge hat im Limes die Eigenschaft der δ-Funktion:

Satz 4.68 *Es sei δ_k eine Dirac-Folge. Dann gilt:*
a) Für jede Funktion $f \in L^1(\mathbb{R})$ konvergiert die Folge $f * \delta_k$ gegen f in der L^1-Norm.
b) Ist f auf $\mathbb{R}$ beschränkt und gleichmäßig stetig, so konvergiert die Folge $f * \delta_k$ gleichmäßig gegen f auf ganz $\mathbb{R}$.

Beweis. a) Zu f gibt es eine Treppenfunktion t mit $\| f - t \|_1 < \epsilon$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \| f - f * \delta_k \|_1 &\leq \| f - t \|_1 + \| t - t * \delta_k \|_1 + \| (t - f) * \delta_k \|_1 \\ &\leq \epsilon + \| t - t * \delta_k \|_1 + \| t - f \|_1 \cdot \| \delta_k \|_1 \\ &= 2\epsilon + \| t - t * \delta_k \|_1 \end{aligned}$$

Deswegen genügt es, die Behauptung für Treppenfunktionen t zu beweisen, bzw. wegen der Linearität des Integrals für die charakteristische Funktion χ_I eines Intervalls $[a, b]$.

Wegen der obigen Eigenschaft 2) ist für alle x und k

$$\chi_I(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_I(x) \delta_k(y) dy.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \| \chi_I - \chi_I * \delta_k \|_1 &= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} \delta_k(y) \cdot (\chi_I(x) - \chi_I(x - y)) dy \right| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \delta_k(y) \cdot |\chi_I(x) - \chi_I(x - y)| dy \right) dx. \end{aligned}$$

Nach Satz 4.53 dürfen wir hier die Integrationsreihenfolge vertauschen und erhalten für das Doppel-Integral

$$\int_{\mathbb{R}} \delta_k(y) \left(\int_{\mathbb{R}} |\chi_I(x) - \chi_I(x - y)| dx \right) dy.$$

Die Funktion im inneren Integral ist

$$\chi_I(x) - \chi_{y+I}(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad x \notin I \cup (y + I) \\ 0 & \text{falls} \quad x \in I \cap (y + I) \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zu jedem ϵ gibt es also ein $r > 0$ derart, dass für $|y| < r$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_I(x) - \chi_{y+I}(x) dx < \epsilon.$$

Das äußere Integral zerlegen wir in

$$\int_{\mathbb{R}} = \int_{|y| < r} + \int_{|y| \geq r}.$$

Damit wird wegen 2) und 3) das Doppelintegral

$$\leq \int_{|y|<r} \epsilon \delta_k(y) dy + \int_{|y|\geq r} 2|I| \delta_k(y) dy \leq 2\epsilon$$

für alle genügend großen k.

b) Sei $\epsilon > 0$. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f gibt es ein $r > 0$ mit $|f(x-y) - f(x)| < \epsilon$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x-y| < r$. Mit den Eigenschaften 1) und 2) folgt für alle x und k

$$\begin{aligned} |f(x) - (f * \delta_k)(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} \delta_k(y) \cdot (f(x-y) - f(x)) dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \delta_k(y) \cdot |f(x-y) - f(x)| dy \\ &\leq \epsilon \cdot \int_{|y|<r} \delta_k(y) dy + 2 \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \cdot \int_{|y|\geq r} \delta_k(y). \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung wie in a). □

Als erste Anwendungen zeigen wir zwei Approximationssätze:

Satz 4.69 *Jede auf $\mathbb{R}$ integrierbare Funktion ist L^1-Grenzwert einer Folge von auf $\mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbaren Funktionen.*

Beweis. Es sei

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$

die Gaußfunktion aus Beispiel 4.44. Sie ist unendlich oft differenzierbar und jede Ableitung ist ein Produkt $p(x) \cdot g(x)$, wo p ein Polynom ist. Deswegen ist jede Ableitung von g beschränkt. Damit ist auch jede Ableitung jeder Funktion $\delta_k(x) = k \cdot g(kx)$ beschränkt. Aus Satz 4.66 d) folgt, dass jede gefaltete Funktion $f * \delta_k$ unendlich oft differenzierbar ist. Nach Satz 4.68 a) ist f der L^1-Grenzwert dieser gefalteten Funktionen. □

Satz 4.70 (Weierstraß) *Es sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es eine Folge p_k von Polynomen, die auf K gleichmäßig gegen f konvergiert.*

Beweis. Weil K beschränkt ist, ist es enthalten in einem endlichen Intervall $]-R, R[\subset \mathbb{R}$. Nachdem wir von $f(x)$ übergehen zur Funktion $f(x \cdot 2R)$ können wir o.B.d.A. annehmen $K \subset]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$. Als erstes setzen wir f fort zu einer stetigen Funktion F auf $\mathbb{R}$ mit $F(x) = 0$ für $|x| \geq 1/2$:

Nach Satz 4.22 (Tietze) gibt es eine stetige Fortsetzung $\tilde{f}$ von f auf ganz $\mathbb{R}$. Wir betrachten die kompakte Menge

$$K' := K \cup [-1, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1].$$

Auf dieser Menge K' ist die Funktion φ_1 definiert durch

$$\varphi_1(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad x \in K \\ 0 & \text{falls} \quad |x| \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

stetig. Nach Satz 4.22 gibt es eine stetige Fortsetzung φ_2 von φ_1 auf ganz $\mathbb{R}$. Dann ist auch die Funktion φ_3 definiert durch

$$\varphi_3(x) := \begin{cases} \varphi_2 & \text{falls} \quad |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{falls} \quad |x| \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

stetig. Die Funktion $F := f \cdot \varphi_3$ ist eine Fortsetzung von f, wie wir sie brauchen.

Wir falten F mit den Funktionen $L_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Landau-Kernen) definiert durch

$$L_k(x) := \frac{1}{\int_{-1}^{1}(1-t^2)^k dt} \cdot (1-x^2)^k \cdot \chi_{[-1,1]}.$$

Die stetige Funktion f ist auf jeder kompakten Menge gleichmäßig stetig (Satz 1.13) und identisch $= 0$ außerhalb $[-1/2, 1/2]$. Damit ist F insgesamt gleichmäßig stetig. Nach Satz 4.68 b) konvergieren die gefalteten Funktionen $F * L_k$ gleichmäßig gegen F. Es bleibt zu zeigen, dass diese Funktionen auf dem Intervall $[-1/2, 1/2]$ mit Polynomen übereinstimmen.

Die Funktionen L_k sind gerade mit $L_k(y-x) = 0$ für $|y-x| > 1$. Deswegen ist

$$(F * L_k)(x) = \int_{\mathbb{R}} F(y) L_k(x-y) dy = \int_{x-1}^{x+1} F(y) L_k(y-x) dy.$$

Für $|x| \leq 1/2$ ist das Intervall $[-1/2, 1/2]$, außerhalb dessen F verschwindet, ganz in $[x-1, x+1]$ enthalten. Deswegen ist für $|x| \leq 1/2$

$$(F * L_k)(x) = \int_{-1/2}^{1/2} F(y) L_k(y-x) dy.$$

Für $-1/2 \leq x - y \leq 1/2$ ist $L_k(y-x)$ nach Definition ein Polynom $\sum_{l,m} c_{l,m} x^l y^m$. Damit ist für $|x| \leq 1/2$

$$P_k(x) := (F * L_k)(x) = \sum_{l,m} c_{l,m} \left(\int_{-1/2}^{1/2} F(y) y^m dy \right) x^l$$

ein Polynom. $\square$

4.7.2 Fourier-Transformation

Wie schon früher beim Riemann-Integral definieren wir auch hier für komplex-wertige Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad f(x) = u(x) + iv(x)$$

das komplex-wertige Integral

$$\int_{\mathbb{R}} f := \int_{\mathbb{R}} u + i \cdot \int_{\mathbb{R}} v.$$

Es ist definiert, wenn $u = Re(f)$ und $v = Im(f)$ integrierbar sind. Man setzt weiter

$$\| f \|_1 := \int |f(x)| dx = \int \sqrt{u^2(x) + v^2(x)} dx.$$

Satz 4.71 *Auch für komplex-wertige Funktionen f ist*

$$\left| \int f \right| \leq \int |f|.$$

Beweis. Es sei
$$\int f = c \in \mathbb{C}.$$
Wenn $c = 0$ ist, brauchen wir uns weiter keine Sorgen zu machen. Wir betrachten also nur den Fall $c \neq 0$. Dann ist
$$|c|^2 = \left| \int f \right|^2 = \bar{c} \cdot \int f = \int \bar{c} \cdot f$$
reell und stimmt deswegen überein mit
$$\int Re(\bar{c} \cdot f) \leq \int |c| \cdot |f|.$$
Es folgt
$$|c|^2 \leq |c| \int |f| \quad \text{und} \quad |c| = \left| \int f \right| \leq \int |f|.$$
$\square$

Insbesondere folgt aus Satz 4.14 c): Wenn f reell und integrierbar ist, dann ist auch
$$f(x)e^{-itx} = f(x)cos(tx) + if(x)sin(tx)$$
integrierbar für alle $t \in \mathbb{R}$.

Definition 4.23 *Es sei $f \in L^1(\mathbb{R})$. Dann heißt die komplex-wertige Funktion*
$$t \mapsto \hat{f}(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-itx} dx$$
auf $\mathbb{R}$ *die* Fourier-Transformierte *von f.*

Nach Satz 4.63 ist $\hat{f}$ stetig. Außerdem ist
$$|\hat{f}(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)e^{-itx}| dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \parallel f \parallel_1$$
beschränkt.

Diese Fourier-transformierte Funktion ist (bis auf die Normierung) ein kontinuierliches Analogon der komplexen Fourier-Koeffizienten
$$c_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx} dx$$
einer 2π-periodischen Funktion f. Die Fourier-Koeffizienten bestimmen die Amplituden der harmonischen Schwingungen, aus denen f zusammengesetzt ist. Die Frequenzen $k \in \mathbb{N}$ dieser Schwingungen sind in $\mathbb{R}$ diskret. In Analogie dazu interpretiert man $\hat{f}(t)$ als die 'Frequenzdichte' der Funktion f.

Beispiel 4.45 *Wir betrachten die charakteristische Funktion $f := \chi_{[-1,1]}$. Deren Fourier-Transformierte ist*
$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-itx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} (cos(tx) - isin(tx)) dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{sin(t)}{t}.$$
Diese Funktion $\hat{f}$ ist also nicht mehr Lebesgue-integrierbar.

Beispiel 4.46 *Für die Funktion $f(x) = e^{-x^2/2}$ ist*

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-itx} dx$$

nach Satz 4.64 differenzierbar mit

$$\frac{d\hat{f}}{dt}(t) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-itx} x dx.$$

Mit partieller Integration finden wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-itx} x dx = - e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-itx} \Big|_{-\infty}^{\infty} - it \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-itx} dx = -it \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-itx} dx,$$

also

$$\frac{d\hat{f}}{dt}(t) = -t\hat{f}(t).$$

Diese (komplexe) Differentialgleichung für $\hat{f}$ hat die Lösungen

$$c \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad c \in \mathbb{C}.$$

Wegen

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} \sqrt{2} du = 1$$

ist

$$\hat{f}(t) = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Die Fourier-Transformierte von f stimmt mit der Funktion f überein.

Beispiel 4.47 *Wir berechnen die Fourier-Transformierte der Funktion $f(x) = e^{-|x|}$. Es ist*

$$\begin{aligned}
\hat{f}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} e^{-itx} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x}(e^{-itx} + e^{itx}) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{-x(1+it)}}{-1-it} + \frac{e^{-x(1-it)}}{-1+it} \right)_0^{\infty} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{-1-it} + \frac{1}{-1+it} \right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{1+t^2}
\end{aligned}$$

Beispiel 4.48 *Trennung in Real- und Imaginärteil zeigt*

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) cos(xt) dx - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) sin(xt) dx.$$

Wenn f gerade ist, dann ist $f(x)sin(xt)$ ungerade und

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} cos(xt)dx$$

reell. Wenn f ungerade ist, dann ist $f(x)cos(xt)$ ungerade und

$$\hat{f}(t) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)sin(xt)dx$$

rein imaginär.

Satz 4.72 (Rechenregeln) *Es sei f über $\mathbb{R}$ integrierbar.*
a) Es sei $0 \neq a \in \mathbb{R}$. Für $g(x) := f(ax)$ gilt

$$\hat{g}(t) = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{t}{a}\right).$$

b) Es sei $a \in \mathbb{R}$. Für $g(x) := f(x-a)$ gilt

$$\hat{g}(t) = e^{-iat}\hat{f}(t).$$

c) Ist f stetig differenzierbar und auch f' integrierbar, dann gilt

$$\widehat{f'}(t) = it\hat{f}(t).$$

d) Ist auch $xf(x)$ integrierbar, dann ist $\hat{f}$ differenzierbar mit

$$(\hat{f})' = -i\widehat{xf}(x).$$

e) Ist auch die Funktion g integrierbar, so sind $\hat{f}g$ und $f\hat{g}$ integrierbar mit

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\hat{g}(x)dx.$$

f) Für $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ ist

$$\widehat{f * g} = \sqrt{2\pi}\hat{f} \cdot \hat{g}.$$

Beweis. a) Wir substituieren $u = a \cdot x$ mit der Funktionaldeterminante $|dx/du| = |a|$. Mit der Transformationsformel erhalten wir

$$\hat{g}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(ax)e^{-itx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(u)e^{-i\frac{t}{a}u}|a|du = |a|\hat{f}\left(\frac{t}{a}\right).$$

b) Mit der Substitution $u = x - a$ sehen wir

$$\hat{g}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(u)e^{-it(u+a)}dt = e^{-iat}\hat{f}(t).$$

c) Aus der Integrierbarkeit von f' folgt mit

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(u)du,$$

dass die Grenzwerte $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ existieren. Weil f integrierbar ist, müssen beide Grenzwerte $= 0$ sein. Damit erhalten wir durch partielle Integration

$$\widehat{f'}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f'(x)e^{-itx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(f(x)e^{-itx}\Big|_{-\infty}^{\infty} + it \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-itx}dx \right) = it\hat{f}(t).$$

d) Wenn $xf(x)$ integrierbar ist, dann ist $|xf(x)|$ eine Majorante für

$$\frac{d}{dt}(f(x)e^{-itx}) = -ixf(x)e^{-itx}.$$

Mit Satz 4.64 können wir unter dem Integral differenzieren, um

$$(\hat{f})'(t) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} xf(x)e^{-itx}dx = -i\widehat{xf}(t)$$

zu erhalten.
e) Weil $\hat{f}$ und $\hat{g}$ stetig und beschränkt sind, sind die Funktionen $\hat{f}g$ und $f\hat{g}$ integrierbar. Mit Satz 4.52 (Fubini) folgt

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\hat{g}(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^2} (f(t)g(x)e^{-itx}dx)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^2} (g(x)f(t)e^{-ixt}dt)dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)\hat{f}(x)dx.$$

f) Es ist

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\pi}(\widehat{f*g})(t) &= \int_{\mathbb{R}} (f*g)(x)e^{-itx}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy \right) e^{-itx}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} f(x-y)e^{-it(x-y)} \cdot g(y)e^{-ity}d(x,y)
\end{aligned}$$

Mit $x - y = u$ ist die Integrandenfunktion

$$f(u)e^{-itu} \cdot g(y)e^{-ity} \in L^1(\mathbb{R}^2).$$

Wir können also $x - y = u$ transformieren und erhalten mit Fubini

$$\sqrt{2\pi}(\widehat{f*g})(t) = \int_{\mathbb{R}^2} f(u)e^{-itu} \cdot g(y)e^{-ity}dudy = 2\pi\hat{f}(t) \cdot \hat{g}(t).$$

□

Satz 4.73 (Umkehrsatz) *Es seien f und $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Dann gilt:*
a) Fast überall ist

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)e^{itx}dt = \hat{\hat{f}}(-x).$$

b) In jedem Punkt x, wo f stetig ist, gilt die Gleichung aus a) exakt.

Beweis. a) Es sei $\delta(x) = e^{-x^2/2}$ die Funktion aus Beispiel 4.64 mit $\hat{\delta} = \delta$, und

$$\delta_k(x) = k \cdot \delta(k \cdot x)$$

die zugehörige Dirac-Folge. Mit Satz 4.72 a) ist

$$\hat{\delta_k}(x) = \frac{k}{k}\hat{\delta}\left(\frac{x}{k}\right) = \delta\left(\frac{x}{k}\right).$$

Wir beweisen die Aussage zunächst für die gefalteten Funktionen $f * \delta_k$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\left(\widehat{f*\delta_k}\right)(t)e^{itx}dt &= \int_{\mathbb{R}}\hat{f}(t)\cdot\hat{\delta_k}(t)\cdot e^{itx}dt \\
&= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}f(y)e^{-ity}dy\right)e^{itx}\delta\left(\frac{t}{k}\right)dt \\
&= \int_{\mathbb{R}}f(y)\left(\int_{\mathbb{R}}e^{it(x-y)}\delta\left(\frac{t}{k}\right)dt\right)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}}f(y)k\hat{\delta}(k\cdot(x-y))dy \\
&= (f*\delta_k)(x).
\end{aligned}$$

Dabei darf beim Übergang von der zweiten zur dritten Zeile die Integrationsreihenfolge nach Fubini vertauscht werden, weil der Integrand wegen Satz 4.65 b) zu $L^1(\mathbb{R}^2)$ gehört.

Nun konvergieren die Funktionen $f*\delta_k$ nach Satz 4.68 a) in der L^1-Norm gegen f. Mit Satz 4.72 f) haben wir $\widehat{f*\delta_k} = \sqrt{2\pi}\hat{f}\hat{\delta}_k$. Wegen $\delta(0) = 1$ konvergiert $\hat{\delta}_k$ punktweise gegen 1, und $\hat{f}\hat{\delta}_k$ punktweise gegen $\hat{f}$. Diese Konvergenz wird von der nach Voraussetzung integrierbaren Funktion $|\hat{f}|$ majorisiert. Damit haben wir L^1-Konvergenz (Satz 4.47, Lebesgue), und für eine geeignete Teilfolge der δ_k haben wir hier nach Satz 4.41 (Riesz-Fischer) fast überall punktweise Konvergenz.

b) Wenn $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ ist, dann ist $\hat{\hat{f}}$ stetig nach Satz 4.63. Aus a) folgt deswegen $f(x) = \hat{\hat{f}}(-x)$ in allen Punkten x, wo f stetig ist. $\square$

Satz 4.73 ist ein kontinuierliches Analogon dazu, dass eine periodische Funktion unter gewissen Voraussetzungen durch ihre Fourier-Koeffizienten eindeutig bestimmt ist.

4.7.3 Laplace-Transformation

Die Laplace-Transformation ist ein reelles Analogon zur Fourier-Transformation. Dass sie rein reell ist, ist ein Vorteil. Ein Nachteil, der aber bei der Anwendung auf lineare Differentialgleichungen wieder vorteilhaft ist, besteht darin, dass man auch Anfangswerte berücksichtigen muss.

Definition 4.24 *Die Funktion f sei auf $[0,\infty[$ integrierbar. Dann heißt die Funktion $L\{f\}$ definiert durch*

$$L\{f\}(t) := \int_0^\infty f(x)e^{-tx}dx$$

die Laplace-Transformierte von f.

Für $t > 0$ und $x \geq 0$ ist

$$|f(x)e^{-tx}| \leq |f(x)|.$$

Deswegen ist $f(x)e^{-tx}$ über $[0,\infty[$ integrierbar und $L\{f\}(t)$ ist definiert für $t \geq 0$. Nach Satz 4.63 ist $L\{f\}$ stetig auf $[0,\infty[$. Weiter ist für $t \geq 0$ die Laplace-Transformierte

$$|L\{f\}(t)| = \left|\int_0^\infty f(x)e^{-tx}dx\right| \leq \int_0^\infty |f(x)|\cdot|e^{-tx}|dx \leq \| f \|_1$$

beschränkt.

Beispiel 4.49 *Für $a \geq 0$ betrachten wir die Stufenfunktion*

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad x \leq a \\ 0 & \text{falls} \quad x > a. \end{cases}$$

Ihre Laplace-Transformierte ist

$$L\{f\}(t) = \int_0^a e^{-tx} dx = -\frac{1}{t} e^{-tx} \Big|_0^a = \frac{1 - e^{ta}}{t}.$$

Definition 4.25 *Die Funktion $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$* wächst höchstens exponentiell *wenn Konstanten $M, c \in \mathbb{R}$ existieren mit*

$$|f(x)| \leq M \cdot e^{cx} \quad \text{für alle} \quad x \geq 0.$$

Beispiel 4.50 *Jedes Polynom p wächst höchstens exponentiell mit mit beliebigem $c > 0$. Denn wegen*

$$\lim_{x \to \infty} p(x) e^{-cx} = 0$$

existiert

$$M := \max_{x \geq 0} |p(x)| e^{-cx},$$

und damit gilt

$$|p(x)| \leq M \cdot e^{cx} \quad (x \geq 0).$$

Satz 4.74 *Ist f lokal integrierbar und erfüllt die Bedingungen dieser Definition 4.25, dann besitzt f eine Laplace-Transformierte, die für $t > c$ definiert ist.*

Bweis. Für $t > c$ ist

$$|f(x) e^{-tx}| \leq M \cdot e^{-(t-c)x},$$

und $M \cdot e^{-(t-c)x}$ ist eine integrierbare Majorante für $f(x)e^{-tx}$. Die Behauptung folgt aus Satz 4.48. □

Beispiel 4.51 *Die Funktion $f(x) \equiv 1$ hat offensichtlich exponentielles Wachstum mit jedem $c > 0$. Ihre Laplace-Transformierte ist*

$$L\{f\}(t) = \int_0^\infty e^{-tx} = \frac{1}{t}, \quad (t > 0).$$

Beispiel 4.52 *Die Funktion e^{ax}, $a \in \mathbb{R}$ hat exponentielles Wachstum mit jedem $c > a$. Ihre Laplace-Transformierte*

$$L\{e^{ax}\}(t) = \int_0^\infty e^{(a-t)x} dx = \frac{1}{t - a}$$

ist definiert für $t > a$. Hat f höchstens exponentielles Wachstum, so auch $f(x)e^{ax}$. Ist $F(t)$ die Laplace-Transformierte von $f(x)$, so ist

$$L\{f(x)e^{ax}\}(t) = \int_0^\infty f(x) e^{(a-t)x} dx = F(t - a).$$

Beispiel 4.53 *Hat $f(x)$ höchstens exponentielles Wachstum und die Laplace-Transformierte $F(t)$, so hat auch $x \cdot f(x)$ höchstens exponentielles Wachstum und die Laplace-Transformierte*

$$\begin{aligned} L\{x \cdot f(x)\}(t) &= \int_0^\infty x f(x) e^{-tx} dx \\ &= -\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}\left(f(x)e^{-tx}\right) dx \\ &= -\frac{d}{dt}\int_0^\infty f(x)e^{-tx} dx \qquad \textit{(Satz 4.64)} \\ &= -F'(t). \end{aligned}$$

Satz 4.75 (Rechenregeln) *Die Funktion $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ habe höchstens exponentielles Wachstum. Ihre Laplace-Transformierte sei $F(t)$. Dann gelten:*
a) Für $a > 0$ ist

$$L\{f(ax)\}(t) = \frac{1}{a} F\left(\frac{t}{a}\right).$$

b) Für $a \geq 0$ ist

$$\begin{aligned} L\{f(x+a)\}(t) &= e^{at} \cdot \left(F(t) - \int_0^a f(x)e^{-tx} dx\right), \\ L\{f(x-a)\}(t) &= e^{-at} F(t). \end{aligned}$$

Hier ist $f(x-a) = 0$ gesetzt für $x < a$.
c) $L\{e^{-ax} f(x)\}(t) = F(t+a)$.
d) $L\left\{\int_0^x f(u) du\right\}(t) = \frac{1}{t} F(t)$.
e) Es sei f stetig differenzierbar und f' habe höchstens exponentielles Wachstum. Dann ist

$$L\{f'(x)\}(t) = t \cdot F(t) - f(0).$$

f) Hat zusätzlich g höchstens exponentielles Wachstum und die Laplace-Transformierte G, so ist

$$L\{f * g\} = F \cdot G.$$

Hierbei sind f und g für $x < 0$ definiert durch $f(x) = g(x) = 0$.
g) Ist $f(x) = f(x+p)$ periodisch mit der Periode $p > 0$, so ist

$$L\{f\}(t) = \frac{1}{1 - e^{pt}} \int_0^p f(x) e^{-tx} dx.$$

Beweis. Die Aussagen a) und f) beweist man genauso, wie bei der Fourier-Transformation.
b) Wir berechnen

$$\begin{aligned} L\{f(x+a)\}(t) &= \int_0^\infty f(x+a) e^{-tx} dx \\ &= \int_a^\infty f(u) e^{-t(u-a)} dx \\ &= e^{at} \cdot \int_a^\infty f(u) e^{-tu} du \\ &= e^{at} \cdot \left(F(t) - \int_0^a f(x) e^{-tx} dx\right) \end{aligned}$$

und

$$L\{f(x-a)\}(t) = \int_a^\infty f(x-a)e^{-tx}dx = \int_0^\infty f(u)e^{-t(u+a)}du = e^{-at}F(t).$$

c) Dies ist Beispiel 4.52.

d) Hat $|f(x)| \leq M \cdot e^{cx}$ höchstens exponentielles Wachstum, so ist für $c \neq 0$

$$\left|\int_0^x f(u)du\right| \leq \int_0^x |f(u)|du \leq M \cdot \int_0^x e^{cu}du = M \cdot \frac{1}{c}(e^{cx}-1).$$

Daraus folgt, dass $\int_0^x f(u)du$ höchstens exponentielles Wachstum hat. Weiter berechnen wir

$$L\left\{\int_0^x f(u)du\right\}(t) = \int_0^\infty e^{-tx}\left(\int_0^x f(u)du\right)dx.$$

Nach der vorhergehenden Rechnung existiert das Doppelintegral

$$\int_0^\infty e^{-tx}\left(\int_0^x |f(u)|du\right)dx,$$

und nach Satz 4.54 (Tonelli) dürfen wir die Integrationsreihenfolge vertauschen um

$$L\left\{\int_0^x f(u)du\right\}(t) = \int_0^\infty f(u)\left(\int_u^\infty e^{-tx}dx\right)du = \frac{1}{t}\int_0^\infty f(u)e^{-tu}du = \frac{F(t)}{t}$$

zu erhalten.

e) Nach dem HDI und dem Beweis von d) hat

$$|f(x)| = \left|f(0) + \int_0^x f(u)du\right|$$

höchstens exponentielles Wachstum. Für jedes feste $R > 0$ folgt mit partieller Integration

$$\int_0^R f'(x)e^{-tx}dx = f(x)e^{-tx}\Big|_0^R + t\int_0^R f(x)e^{-tx}dx.$$

Falls t groß genug ist gilt

$$\lim_{R\to\infty} f(R)e^{-tR} = 0$$

und

$$L\{f'\}(t) = \lim_{R\to\infty}\int_0^R f'(x)e^{-tx}dx = -f(0) + t\int_0^\infty f(x)e^{-tx}dx = -f(0) + tL\{f\}(t).$$

g) Wegen der Periodizität ist mit der Substitution $u = x - np$

$$\begin{aligned} L\{f\}(t) &= \int_0^\infty f(x)e^{-tx}dx \\ &= \sum_{n=0}^\infty \int_{np}^{(n+1)p} f(x)e^{-tx}dx \\ &= \sum_{n=0}^\infty \int_0^p f(u)e^{-t(u+np)}du \\ &= \sum_{n=0}^\infty e^{-tnp}\int_0^p f(u)e^{-tu}du \\ &= \frac{1}{1-e^{-tp}}\int_0^p f(x)e^{-tx}dx. \end{aligned}$$

□

Wir verallgemeinern Satz 4.75 e) auf die höheren Ableitungen:

Satz 4.76 *Die Funktion $f : [0, \infty[$ sei n-mal stetig differenzierbar und $f^{(n)}$ habe höchstens exponentielles Wachstum. Dann gilt*

$$L\{f^{(n)}\}(t) = t^n L\{f\}(t) - \left(t^{n-1} f(0) + t^{n-2} f'(0) + ... + t f^{(n-2)}(0) + f^{(n-1)}(0)\right).$$

Beweis. Wir iterieren die Formel aus Satz 4.75 e)

$$L\{f''\}(t) = tL\{f'\}(t) - f'(0) = t^2 L\{f\}(t) - t \cdot f(0) - f'(0)$$

und wiederholen dies noch $n-2$-mal. □

Diese letzte Formel transformiert lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten in Polynom-Gleichungen. Statt allgemeiner Formulierungen ein Beispiel.

Beispiel 4.54 *Wir betrachten das AWP*

$$y'' - 4y = e^{-3x}, \quad y(0) = 1,\, y'(0) = -1$$

für die unbekannte Funktion $y(x)$. Wir wissen, dass ihre Lösung höchstens exponentielles Wachstum hat (Satz 3.25). Also verwenden wir die Laplace-Transformierte $Y(t) = L\{y\}(t)$. Damit wird

$$\begin{aligned}
L\{y'\}(t) &= tY(t) - y(0) \\
L\{y''\}(t) &= t^2 Y(t) - ty(0) - y'(0) \\
L\{e^{-3x}\}(t) &= \frac{1}{t+3} \\
(t^2-4)Y(t) - t + 1 &= \frac{1}{t+3} \\
Y(t) &= \frac{1}{t^2-4}\left(t - 1 + \frac{1}{t+3}\right)
\end{aligned}$$

Damit haben wir die Laplace-Transformierte $Y(t)$ der Lösungsfunktion $y(x)$ ermittelt. Es kommt darauf an, diese zurück zu transformieren. Dafür haben wir keine allgemeine Formel. Aber man kann folgendermaßen zum Ziel kommen: Wir haben mit Partialbruchzerlegung

$$Y(t) = \frac{t^2+2t-2}{(t^2-4)(t+3)} = \frac{1}{5\cdot(t+3)} + \frac{1}{2\cdot(t+2)} + \frac{3}{10\cdot(t-2)}.$$

Genau die gleiche Transformierte hat die Funktion

$$\frac{1}{5}e^{-3x} + \frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{3}{10}e^{2x}.$$

Wenn wir wüssten, dass die Laplace-Transformation injektiv ist, wäre dies die gesuchte Funktion $y(x)$. Das wissen wir noch nicht. Aber wir können die gefundene Funktion in die Differentialgleichung einsetzen und sehen, dass sie das AWP löst.

Aufgabe 4.29 *Es sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch*

$$F(x) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} cos(xt) dt.$$

Zeigen Sie:
a) F ist differenzierbar mit $F'(x) = -xy/2$, $F(0) = \sqrt{\pi}$,
b) $F(x) = \sqrt{\pi} e^{-x^2/4}$.

Aufgabe 4.30 *Berechnen Sie* $\widehat{\chi * \chi}$ *für die Funktion* $\chi := \chi_{[-1,1]}$ *und zeigen Sie damit*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{sin^2(x)}{x^2} dx = \pi.$$

Aufgabe 4.31 *Zeigen Sie für* $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$ *die Transitivität der Faltung*

$$(f * g) * h = f * (g * h).$$

Aufgabe 4.32 *Berechnen Sie für*

$$f := \chi_{[0,\infty[}$$

die Faltungen

$$f * f, \quad f * f * f, \quad ..., \quad f * f * ... * f \; (n \;\, mal).$$

Aufgabe 4.33 *Zeigen Sie für die Funktionen*

	f	g	*falls*	*dass* $f * g =$
a)	$\chi_{[-a,a]}$	$\chi_{[-b,b]}$	$0 < b \leq a$	$\begin{cases} 2b & (\lvert x\rvert \leq a-b) \\ a+b-\lvert x\rvert & (a-b \leq \lvert x\rvert \leq a+b) \\ 0 & (a+b \leq \lvert x\rvert) \end{cases}$
b)	$e^{-a\lvert x\rvert}$	$e^{-b\lvert x\rvert}$	$a, b > 0,\ a \neq b$ $a = b > 0$	$2\frac{be^{-a\lvert x\rvert} - ae^{-b\lvert x\rvert}}{b^2 - a^2}$ $\left(\lvert x\rvert + \frac{1}{a}\right) e^{-a\lvert x\rvert}$
c)	$\begin{cases} e^{-ax} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$	$\begin{cases} e^{-bx} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$	$a, b > 0, a \neq b$	$\begin{cases} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{b-a} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$
d)	e^{-ax^2}	e^{-bx^2}	$a, b > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{a+b}} e^{-\frac{ab}{a+b}x^2}$

Aufgabe 4.34 *Berechnen Sie für* $k \in \mathbb{N}$ *die Fourier-Transformierten der Funktionen*

$$a)\, e(x) := e^{ikx} \cdot \chi_{[-\pi,\pi]}(x), \quad b)\, c(x) := cos(kx) \cdot \chi_{[-\pi,\pi]}(x), \quad c)\, s(x) := sin(kx) \cdot \chi_{[-\pi,\pi]}(x).$$

Aufgabe 4.35 *Zeigen Sie für*

	$f(x)$	$\hat{f}(t) =$
a)	$e^{-ax^2},\ a \neq 0$	$\frac{1}{\sqrt{2\lvert a\rvert}} e^{-\frac{t}{4a}}$
b)	$xe^{-\frac{x^2}{2}}$	$it \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$

Aufgabe 4.36 *Berechnen Sie die Laplace-Transformierten der Funktionen*

$$(x+a)^2, \quad cosh(ax), \quad x \cdot sin(2x).$$

Aufgabe 4.37 *Zeigen Sie*

$$L\{cos^3(x)\}(t) = \frac{t(t^2+7)}{(t^2+9)(t^2+1)}.$$

4.8 Der Hilbertraum L^2

In Abschnitt 4.4, Definition 4.18 haben wir den Vektorraum $L^1(A)$ definiert, als Quotientenraum des Vektorraums der auf A integrierbaren Funktionen nach dem Untervektorraum der Funktionen f mit $\| f \|_{1,A} = 0$. Dann haben wir festgestellt (Satz 4.39), dass $\| f \|_{1,A}$ sowie $\int_A f$ auf diesem Vektorraum wohldefiniert sind. Die Integration

$$L^1(A) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_A f$$

ist $\mathbb{R}$-linear (Satz 4.40), die ursprüngliche Halbnorm $\| f \|_{1,A}$ ist eine Norm auf dem Vektorraum $L^1(A)$, und der Vektorraum $L^1(A)$ mit dieser Norm ist vollständig (Satz 4.41, Riesz-Fischer).

Für das Folgende ist wichtig: Eine Funktion f ist über A Lebesgue-integrierbar, genau dann, wenn (Satz 4.48)

- die Funktion lokal integrierbar ist (Definition 4.12)
- und $\| f \|_{1,A}$ endlich ist.

Definition 4.26 *Eine 'Funktion' f auf A heißt* quadrat-integrierbar*, wenn*

- *sie lokal integrierbar ist und*
- *die Funktion f^2 über A Lebesgue-integrierbar ist.*

Beispiel 4.55 *Jede beschränkte Lebesgue-integrierbare Funktion auf einer messbaren Menge ist quadrat-integrierbar (Satz 4.14 c). Auf $[1,\infty[$ ist die Funktion $f(x) = 1/x$ quadrat-integrierbar, aber nicht integrierbar. Auf $]0,1]$ ist $f(x) = 1/\sqrt{x}$ integrierbar, aber nicht quadrat-integrierbar.*

Beispiel 4.56 *Es sei $A \subset [0,1]$ die schreckliche, nicht messbare Menge von Vitali aus Beispiel 4.35. Die charakteristische Funktion χ_A auf $[0,1]$ ist nicht integrierbar, und weil $[0,1]$ kompakt ist, auch nicht lokal integrierbar. Damit ist auch $f := \chi_A - \frac{1}{2}$ nicht lokal integrierbar. Aber $f^2 = \frac{1}{4}$ ist konstant, und damit ist f quadrat-integrierbar.*

Definition 4.27 *Für eine 'Funktion' $f : A \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ heißt*

$$\| f \|_{2,A} := \sqrt{\| f^2 \|_{1,A}}$$

die L^2-Halbnorm von f auf A. Falls f quadrat-integrierbar ist, dann ist diese Halbnorm endlich.

Beispiel 4.57 *Ist f quadrat-integrierbar über A, dann ist*

$$\| f \|_{2,A} = \sqrt{\int_A f^2}.$$

Satz 4.77 (Rechenregeln) *a) Aus $\| f \|_{2,A} = 0$ folgt $f = 0$ fast überall.*
b) Für $c \in \mathbb{R}$ ist $\| c \cdot f \|_{2,A} = |c| \cdot \| f \|_{2,A}$.
c) Aus $|f| \leq |g|$ folgt $\| f \|_{2,A} \leq \| g \|_{2,A}$.
d) Für beliebige 'Funktionen' $f, g : A \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ gilt die Dreiecksungleichung $\| f + g \|_{2,A} \leq \| f \|_{2,A} + \| g \|_{2,A}$.

Beweis. a) Nach Voraussetzung ist $\| f^2 \|_{1,A} = 0$. Mit Satz 4.37 ist $f^2 = 0$ fast überall, und dann auch $f = 0$ fast überall.

b) Diese Regel gilt nur, weil in der Definition der L^2-Halbnorm die Wurzel verwendet wird:

$$\| c \cdot f \|_{2,A} = \sqrt{\| c^2 \cdot f^2 \|_{1,A}} = |c| \cdot \sqrt{\| f^2 \|_{1,A}} = |c| \cdot \| f \|_{2,A} .$$

c) Mit $|f| \leq |g|$ ist auch $f^2 \leq g^2$, und die Aussage folgt aus der Monotonie der L^1-Halbnorm.

d) Die Dreiecksungleichung für reelle Zahlen zeigt

$$|f + g| \leq |f| + |g|$$

und damit

$$(f + g)^2 \leq |f|^2 + 2|fg| + |g|^2.$$

Mit dem nachfolgenden Satz 4.78 sehen wir

$$\begin{aligned} \| f + g \|_{2,A}^2 &= \| (f + g)^2 \|_{1,A} \\ &\leq \| f^2 \|_{1,A} + 2 \| fg \|_{1,A} + \| g^2 \|_{1,A} \\ &\leq \| f \|_{2,A}^2 + 2 \| f \|_{2,A} \cdot \| g \|_{2,A} + \| g \|_{2,A}^2 \\ &= (\| f \|_{2,A} + \| g \|_{2,A})^2 . \end{aligned}$$

□

Satz 4.78 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) *Für beliebige 'Funktionen' f und g auf A ist*

$$\| f \cdot g \|_{1,A} \leq \| f \|_{2,A} \cdot \| g \|_{2,A} .$$

Beweis. Wenn $\| f \|_{1,A} = 0$ ist, dann ist $f = 0$ fast überall und damit auch $f \cdot g = 0$ fast überall. Es ist $\| f \cdot g \|_{1,A} = 0$, die Ungleichung wird die Gleichung $0 = 0$ und stimmt.

Wenn $\| f \|_{2,A} = \infty$ ist, dann stimmt die Ungleichung trivialerweise.

Es bleibt der Fall

$$0 < \| f \|_{2,A}, \| g \|_{2,A} < \infty.$$

Nachdem wir f durch $f/\parallel f\parallel_{2,A}$ und g durch $g/\parallel g\parallel_{2,A}$ ersetzen, können wir o.B.d.A.

$$\parallel f\parallel_{2,A}=\parallel g\parallel_{2,A}=1,\quad \text{i.e.}\quad \parallel f^2\parallel_{1,A}=\parallel g^2\parallel_{1,A}=1$$

annehmen. Wegen

$$|f\cdot g|\leq\frac{1}{2}(f^2+g^2),\quad \text{i.e.}\quad \parallel f^2\parallel_{1,A}=\parallel g^2\parallel_{1,A}=1$$

ist dann $\parallel f\cdot g\parallel_{1,A}\leq 1$, und damit die Behauptung, offensichtlich. □

Beispiel 4.58 *Es sei f eine quadrat-integrierbare 'Funktion' auf dem Intervall $[0,2\pi]$. Dann ist für jedes $k\in\mathbb{N}$*

$$\parallel f(x)\cdot cos(kx)\parallel_{1,[0,2\pi]}<\infty\quad \textit{und}\quad \parallel f(x)\cdot sin(kx)\parallel_{1,[0,2\pi]}<\infty.$$

Mit f sind auch die Funktionen $f(x)cos(kx)$ und $f(x)sin(kx)$ lokal-integrierbar. Nach Satz 4.24 sind sie Lebesgue-integrierbar auf dem kompakten Intervall $[0,2\pi]$ und es existieren die Fourier-Koeffizienten

$$a_k:=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)cos(kx)dx\quad \textit{und}\quad b_k:=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)sin(kx)dx.$$

Definition 4.28 *Eine Teilmenge $A\subset\mathbb{R}^n$ heißt σ-kompakt, wenn sie Vereinigung abzählbar vieler kompakter Mengen A_k, $k\in\mathbb{N}$ ist.*

Beispiel 4.59 *Jede offene Menge ist σ-kompakt (Beweis von Satz 4.19). Jede abgeschlossene Menge $A\subset\mathbb{R}^n$ ist σ-kompakt, denn sie ist die Vereinigung der kompakten Mengen*

$$A_k:=\{\mathbf{x}\in A:\parallel\mathbf{x}\parallel\leq k\},\quad k\in\mathbb{N}.$$

Von nun an bis zum Ende dieses Paragraphen bezeichne A immer eine derartige σ-kompakte Menge.

Satz 4.79 *Für eine 'Funktion' f auf A sind äquivalent:*
a) Die Funktion f ist quadrat-integrierbar.
b) Die Funktion f (d.h., die triviale Fortsetzung f_A) ist lokal integrierbar, und es ist $\parallel f\parallel_{2,A}<\infty$.
c) Für jede kompakte Menge $K\subset A$ ist $f|K$ integrierbar, und es ist $\parallel f\parallel_{2,A}<\infty$.

Beweis. a) $\Rightarrow$ b): Wenn f quadrat-integrierbar ist, dann ist f lokal integrierbar nach Definition 4.26. Und $\parallel f\parallel_{2,A}<\infty$ folgt mit Beispiel 4.57.

b) $\Rightarrow$ c): Nach Voraussetzung ist f_A integrierbar über jede kompakte Menge, und dann auch über jede kompakte Menge in A.

c) $\Rightarrow$ a): Sei $K\subset\mathbb{R}^n$ kompakt. Dann ist

$$K\cap A=\bigcup_k(K\cap A_k)$$

mit den kompakten Mengen $K_k:=K\cap A_k\subset A$. Die Funktionen

$$f_k:=\min(|f|,k)\cdot\chi_{A_k}$$

sind integrierbar und beschränkt, also quadrat-integrierbar (Beispiel 4.55). Die Folge f_k^2 konvergiert monoton wachsend gegen $f_{K\cap A}^2$ mit beschränkter Integralfolge

$$\int f_k^2 = \| f_k \|_{2,A} \leq \| f \|_{2,A} .$$

Nach Satz 4.44 (B. Levi) ist f^2 integrierbar. □

Satz 4.80 *Die 'Funktionen' f und g seien quadrat-integrierbar über der σ-kompakten Menge $A \subset \mathbb{R}^n$.*
a) Dann ist auch $f+g$ quadrat-integrierbar über A.
b) Die Funktionen f^+ und f^- sind quadrat-integrierbar über A.
c) Die Funktion $f \cdot g$ ist (einfach nur) integrierbar über A.

Beweis. a) Nach Definition 4.26 ist $f+g$ lokal-integrierbar. Aus der Ungleichung

$$(f+g)^2 \leq 2 \cdot (f^2 + g^2)$$

folgt

$$\| f+g \|_2^2 = \| (f+g)^2 \|_1 \leq 2 \cdot \left(\| f^2 \|_1 + \| g^2 \|_1 \right).$$

b) Die Funktionen f^+ und f^- sind lokal-integrierbar mit

$$\| f^+ \|_2 \text{ und } \| f^- \|_2 \leq \| f \|_2 .$$

c) Die Integrierbarkeit von fg folgt aus

$$fg = \frac{1}{2}\left((f+g)^2 - f^2 - g^2 \right).$$

□

In Abschnitt 4.4 haben wir den Vektorraum V_A der Funktionen betrachtet, die

- auf A fast überall definiert sind,
- über A Lebesgue-integrierbar sind.

Er enthält den Untervektorraum N_A der Funktionen, die fast überall auf A verschwinden. Damit haben wir den Vektorraum

$$L^1(A) = V_A / N_A$$

definiert.

Genauso ersetzen wir jetzt die auf A quadrat-integrierbaren 'Funktionen' durch echte Funktionen auf A, die halt nur fast überall definiert sind. Der Vorteil ist: Die können wir auch subtrahieren. Wegen Satz 4.80 a) bilden sie einen Vektorraum W_A. Er enthält genau wie V_A den Untervektorraum

$$N_A := \{ f \in W_A : \| f \|_2 = 0 \} = \{ f \in W_A : f = 0 \text{ fast überall} \}.$$

Definition 4.29 *Der Quotientenraum*

$$L^2(A) := W_A / N_A$$

heißt der Raum der auf A quadrat-integrierbaren Funktionen. (Seine Elemente sind Äquivalenzklassen und keine Funktionen.) Aber die Halbnorm $\| f \|_2$ induziert auf $L^2(A)$ eine echte Norm.

Mit Satz 4.80 c) können wir auf $L^2(A)$ ein Skalarprodukt definieren.

Definition 4.30 *Es seien $f, g \in L^2(A)$. Dann heißt*

$$[f, g] := \int_A fg$$

das Skalarprodukt *dieser beiden Funktionen. Nach Satz 4.80 c) ist $[f, g]$ wohldefiniert.*

Satz 4.81 *Das Skalarprodukt $[f, g]$ ist ein Skalarprodukt im Sinn der Linearen Algebra. D.h., es gelten:*
a) $[f, g]$ ist bilinear bezüglich f und g.
b) Symmetrie: $[f, g] = [g, f]$.
c) Positiv-Definitheit: Es ist stets $[f, f] \geq 0$ und $[f, f] = 0$ genau dann, wenn $f = 0$.

Beweis. Die Eigenschaften a) und b) sind offensichtlich, genauso wie $[f, f] \geq 0$ für alle $f \in L^2(A)$. Wenn aber für eine quadrat-integrierbare Funktion f auf A gilt, dass $[f, f] = \| f \|_{2,A}^2 = 0$ ist, dann ist $f = 0$ fast überall. Damit ist $f \in N_A$ und repräsentiert die Null-Klasse in $L^2(A)$. $\square$

Die Norm $\| f \|_{2,A}$ auf $L^2(A)$ ist genau die zu diesem Skalarprodukt gehörende Norm $\sqrt{[f, f]}$ im Sinn der Linearen Algebra.

Satz 4.82 *Ist A messbar, so ist*

$$L^2(A) \subset L^1(A)$$

ein Untervektorraum.

Beweis. Die Funktion $g := \chi_A = \chi_A^2$ ist integrierbar. Nach Satz 4.80 c) ist für quadrat-integrierbares f die Funktion $fg = f$ (einfach so) integrierbar. Damit folgt

$$N_A \subset W_A \subset V_A \quad \text{und} \quad W_A / N_A \subset V_A / N_A.$$

$\square$

Die L^2-Norm definiert eine Metrik

$$d(f, g) := \| f - g \|_{2,A}$$

auf $L^2(A)$ im Sinn von Definition 1.16. Wie immer in einem normierten Raum ist die Norm-Funktion stetig in Bezug auf die durch sie definierte Metrik. Genauer gilt:

$$|\| f \|_2 - \| g \|_2| \leq \| f - g \|_2 .$$

Beweis: Mit der Dreiecksungleichung ist

$$\| f \|_2 = \| (f - g) + g \|_2 \leq \| f - g \|_2 + \| g \|_2,$$

also

$$\| f \|_2 - \| g \|_2 \leq \| f - g \|_2 .$$

Wenn man f und g vertauscht, gilt dieselbe Ungleichung. $\square$

Der folgende Satz zeigt, dass $L^2(A)$ mit dieser Metrik vollständig ist.

Satz 4.83 (Riesz-Fischer) *Die Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ sei σ-kompakt. Dann gilt: Jede Cauchy-Folge f_k in $L^2(A)$ hat einen L^2-Grenzwert $f \in L^2(A)$. Eine geeignete Teilfolge der Folge f_k konvergiert fast überall in A punktweise gegen f.*

Beweis. Mit f_k sind wegen Satz 4.80 b) auch die Folgen f_k^+ und f_k^- Cauchy-Folgen in $L^2(A)$. Es genügt, die Konvergenz-Aussage für diese Folgen zu beweisen. Deswegen können wir o.B.d.A. annehmen, dass alle $f_k \geq 0$ sind.

Die Cauchy-Eigenschaft ist

$$\| f_k - f_l \|_2 < \epsilon \quad \text{für} \quad k, l > N(\epsilon).$$

Wir fixieren ein $\epsilon > 0$ und ein $k > N(\epsilon)$. Dann ist für alle $l \geq k$

$$\| f_l \|_2 \leq \| f_k \|_2 + \| f_l - f_k \|_2 < \| f_k \|_2 + \epsilon.$$

Mit

$$M := \max\{\| f_1 \|_2, ..., \| f_{k-1} \|_2, \| f_k \|_2 + \epsilon\}$$

ist

$$\| f_l \|_2 \leq M \quad \text{für alle} \quad l \in \mathbb{N}.$$

Die Folge f_k ist bezüglich der L^2-Norm beschränkt.

Aus der Gleichung

$$f_k^2 - f_l^2 = (f_k - f_l)^2 + 2 f_k f_l - 2 f_l^2 = (f_k - f_l)^2 + 2 f_l \cdot (f_k - f_l)$$

folgt die Ungleichung

$$|f_k^2 - f_l^2| \leq (f_k - f_l)^2 + 2|f_l| \cdot |f_k - f_l|$$

und

$$\| f_k^2 - f_l^2 \|_1 \leq \| (f_k - f_l)^2 \|_1 + 2 \| \, |f_l| \cdot |f_k - f_l| \, \|_1 .$$

Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung (Satz 4.78) finden wir

$$\| (f_k - f_l)^2 \|_1 \leq \| f_k - f_l \|_2^2 \quad \text{und} \quad \| \, |f_k| \cdot |f_k - f_l| \, \|_1 \leq \| f_k \|_2 \cdot \| f_k - f_l \|_2 .$$

Insgesamt haben wir

$$\| f_k^2 - f_l^2 \|_1 \leq \| f_k - f_l \|_2^2 + 2M \cdot \| f_k - f_l \|_2 .$$

Dies zeigt: Die Folge der Quadrate f_k^2 ist eine L^1-Cauchy-Folge.

Nach Riesz-Fischer (Satz 4.41) konvergiert die Folge f_k^2 bezüglich der L^1-Norm gegen eine Funktion $F \in L^1(A)$. Eine geeignete Teilfolge der f_k^2 konvergiert sofar fast überall punktweise gegen F. Wegen $f_k^2 \geq 0$ können wir F auf einer Nullmenge abändern um $F \geq 0$ zu erreichen. Wir setzen $f := \sqrt{F}$.

Wegen $f_k \geq 0$ ist

$$|f - f_k| \leq |f| + |f_k| = f + f_k \quad \text{und} \quad (f - f_k)^2 \leq |f - f_k|(f + f_k) = \pm(F - f_k^2).$$

Daraus folgt

$$\| f - f_k \|_2^2 = \| (f - f_k)^2 \|_1 \leq \| F - f_k^2 \|_1 .$$

Deswegen konvergiert $f_k \to f$ in der L^2-Norm.

Wir müssen noch $f \in L^2(A)$ zeigen. Wegen $\| f \|_2 = \sqrt{\| F \|_1} < \infty$ genügt es zu zeigen, dass f lokal integrierbar ist (Satz 4.79). Dazu fixieren wir eine kompakte Menge $K \subset A$. Aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt

$$\| f_K - f_{k,K} \|_1 = \| \chi_K \cdot (f_K - f_{k,K}) \|_1 \leq \| \chi_K \|_2 \cdot \| f_K - f_{k,K} \|_2 = \sqrt{|K|} \cdot \| f_K - f_{k,K} \|_2$$

und

$$\| f_K - f_{k,K} \|_1^2 \leq |K| \cdot \| f_K - f_{k,K} \|_2^2 .$$

Die Differenz $\| f_K - f_{k,K} \|_2^2$ können wir auf K ebenso abschätzen wie oben die Differenz $\| f - f_k \|_2^2$ auf A um

$$\| f_K - f_{k,K} \|_2^2 \leq \| F_K - f_{k,K}^2 \|_1$$

zu erhalten. Damit haben wir gezeigt: Die Folge $f_{k,K}$ konvergiert gegen f_K in der L^1-Norm. Nach Riesz-Fischer (Satz 4.41) ist f_K integrierbar. □

Die folgende Definition ist in der Analysis zentral. Es gibt eine reelle und eine komplexe Version. Ich beschränke mich hier auf erstere.

Definition 4.31 (Hilbert-Raum) *Ein $\mathbb{R}$-Vektorraum H zusammen mit einem Skalarprodukt $[f,g]$ heißt* Hilbert-Raum, *wenn die zugehörige Norm $\| f \| = \sqrt{[f,f]}$ auf H eine Metrik definiert, bezüglich der H vollständig ist.*

Hierzu gibt es folgende bekannte Anekdote: Nach einem Vortrag in der Göttinger Mathematischen Gesellschaft gingen Hilbert und der Zahlentheoretiker Landau zusammen nach Hause. Wobei Hilbert Landau fragte: Sagen Sie mir, lieber Landau, wissen Sie, was der Vortragende wohl mit dem Wort 'Hilbert-Raum' meinte?

Beispiel 4.60 (Scherz) *In der Eingangshalle des Mathematischen Instituts in Göttingen steht eine Büste von David Hilbert. Diese Eingangshalle heißt deswegen der Hilbert-Raum.*

Beispiel 4.61 (Trivial) *Der $\mathbb{R}^n$ zusammen mit dem euklidischen Skalarprodukt ist ein Hilbert-Raum, denn die zugehörige Norm definiert die übliche euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^n$. Und der $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik ist vollständig.*

Beispiel 4.62 (Kleiner l^2) *Eine Folge a_k reeller Zahlen heißt quadrat-summierbar, wenn die unendliche Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2$$

konvergiert. So ist etwa die Folge $a_k := 1/k$ quadrat-summierbar. Die Menge dieser quadratsummierbaren Folgen wird mit $l^2(\mathbb{R})$ bezeichnet. Zusammen mit dem Skalarprodukt

$$[a,b] := \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k \quad \textit{für} \quad a = (a_k), b = (b_k) \in l^2(\mathbb{R})$$

ist sie ein Hilbertraum.

Beweis. a) Vektorraum-Eigenschaft: Für $a = (a_k) \in l^2(\mathbb{R})$ und $c \in \mathbb{R}$ ist $ca = (ca_k) \in l^2(\mathbb{R})$ offensichtlich. Seien $a = (a_k)$ und $b = (b_k) \in l^2(\mathbb{R})$. Dann gibt es reelle Konstanten A, B mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 < A, \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k^2 < B.$$

Nun ist für jede natürliche Zahl N

$$\sum_{k=0}^{N}(a_k + b_k)^2 = \sum_{k=0}^{N} a_k^2 + 2\sum_{k=0}^{N} a_k b_k + \sum_{k=0}^{N} b_k^2 < A + B + 2\sum_{k=0}^{N} a_k b_k.$$

Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung im $\mathbb{R}^N$

$$\sum_{k=0}^{N} |a_k| \cdot |b_k| \leq \sqrt{\sum_{k=0}^{N} a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^{N} b_k^2} < \sqrt{A \cdot B}$$

sehen wir, dass die Reihe $\sum a_k b_k$ absolut konvergiert. Also ist die Folge $(a_k + b_k)$ quadrat-summierbar.

b) Skalarprodukt: Für $a = (a_k)$ und $b = (b_k) \in l^1(\mathbb{R})$ wird das Skalarprodukt

$$[a, b] := \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k$$

definiert. Im Beweis von a) wurde gezeigt, dass diese Reihe konvergiert. Die Eigenschaften eines Skalarprodukts sind für $[a, b]$ offensichtlich.

c) Vollständigkeit: Es seien $a^{(n)} = (a_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ Elemente in l^2, die selbst eine Cauchy-Folge bilden. D.h. also, zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $N = N(\epsilon)$ mit

$$\| a^{(m)} - a^{(n)} \|^2 = \sum_{k=0}^{\infty}(a_k^{(m)} - a_k^{(n)})^2 < \epsilon^2 \quad \textit{für} \quad m, n < N.$$

Für jedes feste k ist dann auch

$$|a_k^{(m)} - a_k^{(n)}| < \epsilon, \quad \textit{falls} \quad m, n > N.$$

Damit ist die Folge $(a_k^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und konvergiert gegen ein $a_k \in \mathbb{R}$. Außerdem ist auch für alle $m, n > N$ und jedes feste $K \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{K}(a_k^{(m)} - a_k^{(n)})^2 < \epsilon^2 \quad \textit{und} \quad \sum_{k=0}^{K}(a_k - a_k^{(n)})^2 = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{K}(a_k^{(m)} - a_k^{(n)})^2 \leq \epsilon^2.$$

Dann ist auch

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k - a_k^{(n)})^2 \leq \epsilon^2,$$

und die Folge $a - a^{(n)} = (a_k - a_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ ist quadrat-summierbar. Wegen

$$a = (a - a^{(n)}) + a^{(n)} \in l^2.$$

kann man die letzte Ungleichung deshalb in der Form

$$\| a - a^{(n)} \| \leq \epsilon$$

schreiben. Das zeigt $a = \lim_{n\to\infty} a^{(n)}$ in l^2. □

Beispiel 4.63 (Großer L^2) *Mit Definition 4.30 ist auf $L^2(A)$ das Skalarprodukt*

$$[f,g] = \int_A fg$$

definiert. Nach Satz 4.83 ist die $L^2(A)$ mit der zugehörigen Norm $\| f \|_{2,A}$ vollständig. Deswegen ist $L^2(A)$ ein Hilbert-Raum.

Satz 4.84 *Die Folgen a_k und b_k seien quadrat-summierbar. Dann konvergiert die Reihe*

$$\sum_k a_k cos(kx) + b_k sin(kx)$$

in $L^2([0,2\pi])$.

Beweis. Die Behauptung folgt aus Satz 4.83 (Riesz-Fischer), wenn wir zeigen, dass die Partialsummen dieser Reihe eine Cauchy-Folge in $L^2([0,2\pi])$ bilden. Dazu schätzen wir mit den Orthogonalitäts-Relationen (Fourier, Satz 1.4) ab

$$\begin{aligned}
\| \sum_{k=m}^{n} a_k cos(kx) + b_k sin(kx) \|_2^2 &= \int_0^{2\pi} \sum_{k,l=m}^{n} (a_k cos(kx) + b_k sin(kx)) \cdot (a_l cos(lx) + b_l sin(lx)) dx \\
&= \sum_{k,l=m}^{n} \int_0^{2\pi} (a_k cos(kx) + b_k sin(kx) \cdot (a_l cos(lx) + b_l sin(lx)) dx \\
&= \pi \sum_{k=m}^{n} (a_k^2 + b_k^2).
\end{aligned}$$

□

Mit Satz 4.84 wird eine lineare Abbildung

$$l^2 \to L^2([0,2\pi]), \quad a \mapsto f_a,$$

definiert. Die müssen wir noch ein wenig genauer hinschreiben. Eine Folge $a \in l^2$ schreiben wir als

$$a = (a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, ...).$$

Dass diese Folge zu l^2 gehört, ist äquivalent dazu, dass die Teilfolgen $(a_k)_{k\geq 0}$ und $(b_k)_{k\geq 1}$ quadrat-summierbar sind. Die zugehörige Funktion

$$f_a = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k cos(kx) + b_k sin(kx)$$

ist bis auf Normierungsfaktoren die Fourier-Reihe zu den Koeffizienten a_k, b_k. Wir werden diese Normierungsfaktoren jetzt so wählen, dass die verwendeten Funktionen ein ON-System im Raum $L^2([0,2\pi])$ bilden. Aufeinander senkrecht stehen sie allemal. Und normiert sehen sie so aus:

$$c_0 := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad c_k := \frac{1}{\sqrt{\pi}} cos(kx),\ s_k := \frac{1}{\sqrt{\pi}} sin(kx)\,(k \geq 1).$$

Mit diesen neu normierten Funktionen wird

$$f_a = a_0 c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k c_k + b_k s_k = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{cos(kx)}{\sqrt{\pi}} + b_k \frac{sin(kx)}{\sqrt{\pi}}.$$

Satz 4.85 *Mit der soeben eingeführten Notation ist die lineare Abbildung*

$$l^2 \to L^2([0, 2\pi]), \quad a \mapsto f_a,$$

eine Isometrie*, d.h., es gilt*

$$\| a \| = \| f_a \|_2 .$$

Beweis. Die Partialsummen der Reihe f_a sind die trigonometrischen Polynome

$$(f_a)_N = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{N} a_k \frac{cos(kx)}{\sqrt{\pi}} + b_k \frac{sin(kx)}{\sqrt{\pi}} \quad \text{mit} \quad \| (f_a)_N \|_2^2 = a_0^2 + \sum_{k=1}^{N} a_k^2 + b_k^2.$$

Mit Satz 4.84 ist in der L^2-Norm

$$f_a = \lim_{N\to\infty} (f_a)_N.$$

Und aus der Stetigkeit der Norm folgt

$$\| f_a \|_2 = \lim_{N\to\infty} \| (f_a)_N \|_2 = \sqrt{a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2}.$$

□

Das hier eingeführte Skalarprodukt

$$[f, g] = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx, \quad f, g \in L^2([0, 2\pi]),$$

ist anders normiert, als das Skalarprodukt im Abschnitt über Fourier-Reihen. Dort wollte ich, dass die Winkelfunktionen ein ON-System bilden. Hier möchte ich, dass das Skalarprodukt keine von der Menge A abhängigen Normierungskonstanten enthält. Die umnormierten Winkelfunktionen bilden ein ON-System in $L^2([0, 2\pi])$. Damit ändern sich auch die Fourier-Koeffizienten einer Funktion $f \in L^2([0, 2\pi])$ zu

$$\begin{aligned} a_0(f) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x)dx \\ a_k(f) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x)cos(kx)dx \quad (k \geq 1) \\ b_k(f) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x)sin(kx)dx \quad (k \geq 1) \end{aligned}$$

Aber weil sowohl das Skalarprodukt, als auch die Fourier-Koeffizienten umnormiert worden sind ist die Fourier-Reihe

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [f, c_k]c_k + [f, s_k]s_k = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f)cos(kx) + b_k(f)sin(kx)$$

genau die gleiche Reihe wie früher.

Satz 4.86 (Umkehrsatz) *a) Es sei $a = (a_0, a_1, b_1, ...) \in l^2$ eine quadrat-summierbare Folge und f_a die oben definierte L^2-Funktion dazu. Dann sind die Fourier-Koeffizienten von f_a genau die Zahlen in der Folge a.*
b) Es seien $f \in L^2([0, 2\pi])$ und $a = a_0(f), a_1(f), b_1(f), ...$ die Folge seiner Fourier-Koeffizienten. Dann ist $a \in l^2$ und $f = f_a$ fast überall, d.h., $f = f_a$ als L^2-Funktion. Mit anderen Worten: Die injektive Abbildung $l^2 \to L^2([0, 2\pi])$ aus Satz 4.85 ist auch surjektiv.

Beweis. a) Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung für $a_k(f)$

$$a_k(f) = [f, c_k] \leq \| f \|_2 \cdot \| c_k \|_2 = \| f \|_2$$

kann man so interpretieren: $a_k(f)$ ist L^2-stetig bezüglich f. Die Partial-Summen $(f_a)_N$ konvergieren gegen f_a in der L^2-Norm. Also ist

$$[f_a, c_k] = \lim_{N\to\infty} [(f_a)_N, c_k] = a_k.$$

Genauso ist $[f_a, s_k] = b_k$.

b) Wir definieren das trigonometrische Polynom

$$f_N := a_0 c_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k c_k + b_k s_k.$$

Für $N \geq k$ ist dann also

$$[f, c_k] = a_k = [f_N, c_k], \quad [f, s_k] = b_k = [f_N, s_k].$$

Daraus folgt

$$[f, f_N] = [f_N, f_N] \quad \text{und} \quad [f - f_N, f_N] = 0.$$

Mit Pythagoras schließen wir

$$\| f \|_2^2 = \| (f - f_N) + f_N \|_2^2 = [(f - f_N) + f_N, (f - f_N) + f_N] = \| f - f_N \|_2^2 + \| f_N \|^2 .$$

Daraus folgt die *Besselsche Ungleichung*

$$a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 = \lim_{N\to\infty} \| f_N \|_2^2 \leq \| f \|_2^2,$$

also gehört die Folge a der Fourier-Koeffizienten zu l^2. Mit diesen Koefizienten bilden wir die Fourier-Reihe $f_a \in L^2([0, 2\pi])$. Nach a) haben die Funktionen f und f_a die gleichen Fourier-Koeffizienten.

Es bleibt zu zeigen: Ist $g \in L^2([0, 2\pi])$ mit $[g, c_k] = [g, s_k] = 0$ für alle k, dann ist $\| g \|_2 = 0$. Dies beweisen wir in Satz 4.88 unten. □

Bevor wir diesen angekündigten Satz 4.88 beweisen, verallgemeinern wir unsere Situation begrifflich durch

Definition 4.32 *Ein ON-System (ONS) in $L^2(A)$ ist eine Folge (c_k) in $L^2(A)$ mit*

$$[c_k, c_l]_{2,A} = \delta_{k,l}.$$

Eine Teilmenge $S \subset L^2(A)$ heißt vollständig*, wenn für jede Funktion $f \in L^2(A)$ gilt:*

$$[f, s]_{2,A} = 0 \text{ für alle } s \in S \quad \Rightarrow \quad \| f \|_{2,A} = 0.$$

Ein vollständiges ON-System in $L^2(A)$ heißt ON-Basis (ONB).

Beispiel 4.64 *Die Winkelfunktionen c_k, s_k bilden ein ONS in $L^2([0, 2\pi])$. Für den Beweis von Satz 4.86 ist noch zu zeigen, dass dieses vollständig ist.*

Jedes ONS (c_k) in $L^2(A)$ definiert für jede Funktion $f \in L^2(A)$ Entwicklungs-Koeffizienten $a_k = [f, c_k]$ genauso, wie zu dem ONS der Winkelfunktionen in $L^2([0, 2\pi])$ die Fourier-Koeffizienten gehören. Wie in Satz 4.86 b) sieht man, dass die Folge a dieser Entwicklungs-Koeffizienten zu l^2 gehört. Mit dieser Folge definiert man die Entwicklung $f_a = \sum a_k c_k \in L^2(A)$. Und $f = f_a \in L_2(A)$ für alle f ist äquivalent dazu, dass das ONS c_k eine ONB ist.

Satz 4.87 (Vollständigkeitskriterium) *Es sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für ein ONS (c_k) in $L^2(B)$ sind äquivalent:*
a) Das ONS ist vollständig.
b) Für jede Treppenfunktion $t \in L^2(B)$ konvergiert die Entwicklung $\sum a_k(t)c_k$ gegen t in der L^2-Norm.

Beweis. Wir brauchen nur die Richtung b) $\Rightarrow$ a) zu zeigen. Wir zeigen zunächst: Zu jedem $f \in L^2(B)$ und zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es eine Treppenfunktion $t \in L^2(B)$ mit $\| f - t \|_{2,B} < \epsilon$. Wegen der Trennung in positiven und negativen Anteil können wir dazu o.B.d.A. $f \geq 0$ annehmen. Nach Satz 4.61 gibt es eine Treppenfunktion $u \in L^2(B)$ mit $\| f^2 - u \|_{1,B} < \epsilon^2$. Ersetzen wir hier u durch die Treppenfunktion $max(u, 0)$, so gilt diese Ungleichung erst recht. Wir können also auch $u \geq 0$ annehmen. Dann definieren wir die Treppenfunktion $t := \sqrt{u}$. Damit folgt

$$(f - t)^2 = |f - t| \cdot |f - t| \leq |f - t| \cdot |f + t| = |f^2 - t^2|,$$

$$\| f - t \|_{2,B}^2 = \| (f - t)^2 \|_{1,B} \leq \| (f - t)(f + t) \|_{1,B} = \| f^2 - t^2 \|_{1,B} < \epsilon^2.$$

Sei nun $[f, c_k] = 0$ für alle k. Zu $\epsilon > 0$ wählen wir eine Treppenfunktion $t \in L^2(B)$ mit $\| f - t \|_{2,B} < \epsilon$. Wegen b) gibt es ein N mit $\| t - \sum_{k=1}^N a_k c_k \|_{2,B} < \epsilon$. Mit der Dreiecksungleichung folgt daraus

$$\| f - \sum_{k=1}^N a_k c_k \|_{2,B} < 2\epsilon.$$

Nun ist

$$\| f - \sum_{k=1}^N a_k c_k \|_{2,B}^2 = [f - \sum_{k=1}^N a_k c_k \, , \, f - \sum_{k=1}^N a_k c_k] = \| f \|_2^2 + \sum_{k=1}^N a_k^2.$$

Wir haben gezeigt: $\| f \|_{2,B}^2 \leq 4\epsilon^2$ für alle $\epsilon > 0$. □

Satz 4.88 (Folgerung) *Das ONS der Winkelfunktionen in $L^2([a, b]) = L^2(]a, b[)$ ist vollständig.*

Beweis. In Fourier, Satz 1.15 haben wir gezeigt: Für jede Treppenfunktion t auf $[0, 2\pi]$ konvergiert die Fourier-Reihe von t im quadratischen Mittel, d.h., in der L^2-Norm, gegen t. □

Aufgabe 4.38 *Zeigen Sie: Der Durchschnitt endlich vieler σ-kompakter Mengen ist wieder σ-kompakt.*

Aufgabe 4.39 *Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und*

$$\varphi : [a, b] \to [0, 2\pi], \quad x \mapsto 2\pi \frac{x - a}{b - a}.$$

Zeigen Sie: Die Abbildung $f \mapsto f \circ \varphi$ definiert einen Vektorraum-Isomorphismus $L^2([0, 2\pi]) \to L^2([a, b])$ mit

$$\| f \|_{2,[0,2\pi]} = \sqrt{\frac{2\pi}{b - a}} \cdot \| f \circ \varphi \|_{2,[a,b]} \, .$$

Aufgabe 4.40 *Es sei* $(p_n)_{n\geq 0}$ *eine Folge von Polynomen mit Grad* $deg(p_n) = n$. *Zeigen Sie:*
a) Die Menge der eingeschränkten Polynome $p_n|]0,2\pi[\in L^2(]0,2\pi[)$ *ist vollständig.*
b) Für jedes Intervall $]a,b[\subset \mathbb{R}$ *ist die Menge der eingeschränkten Polynome* $p_n|]a,b[\in L^2(]a,b[)$ *vollständig.*
c) Die Menge der Funktionen $e^{-x^2}\cdot p_n(x)$ *in* $L^2(\mathbb{R})$ *ist vollständig.*
d) Die Menge der eingeschränkten Funktionen $e^{-x}\cdot p_n(x)|]0,\infty[$ *in* $L^2(]0,\infty[)$ *ist vollständig.*

Aufgabe 4.41 (Legendre-Polynome) *Für* $0\leq n\in\mathbb{N}$ *heißt*

$$P_n := \frac{1}{2^n\cdot n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

das n*-te Legendre-Polynom.*
a) Berechnen Sie P_0, P_1, P_2, P_3 *und beweisen Sie* $deg(P_n) = n$.
Zeigen Sie:
b) Für jede Funktion f *auf* $\mathbb{R}$, *die mindestens* n*-mal stetig differenzierbar ist, gilt*

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx = \frac{1}{2^n\cdot n!}\int_{-1}^{1} f^{(n)}(x)(1-x^2)^n dx$$

und folgern Sie daraus

$$[P_m,P_n] = 0 \text{ für } m\neq n, \quad [P_n,P_n] = \frac{(2n)!}{2^{2n}\cdot(n!)^2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx.$$

(Hier bezeichnet $[\quad,\quad]$ *das Skalarprodukt in* $L^2([-1,1])$*.)*
c) Für die Gamma-Funktion (Beispiel 4.36) gilt

$$\Gamma(1) = 1, \qquad \Gamma(x+1) = x\cdot\Gamma(x) \quad (x>0),$$

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (n\in\mathbb{N}), \qquad \Gamma(n+\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2n+1)!}{2^{2n}\cdot n!}\cdot\Gamma(\frac{1}{2}).$$

d) Es ist

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx = B(-\frac{1}{2},n) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\cdot\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{3}{3})} = 2\cdot\frac{2^{2n}\cdot(n!)^2}{(2n+1)!}, \quad [P_n,P_n] = \frac{2}{2n+1}.$$

e) Die Polynome $\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\cdot P_n$ *bilden eine ONB in* $L^2([-1,1])$.

Aufgabe 4.42 (Hermitesche Funktionen) *Für* $0\leq n\in\mathbb{N}$ *heißt*

$$H_n(x) := (-1)^n\cdot e^{x^2}\cdot\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$$

das n*-te Hermitesche Polynom und*

$$h_n(x) := e^{-x^2/2}\cdot H_n(x)$$

die n*-te Hermitesche Funktion. Das Skalarprodukt in* $L^2(\mathbb{R})$ *werde mit* $[\quad,\quad]$ *bezeichnet.*

a) Berechnen Sie H_1, H_2, H_3, H_4 und zeigen Sie: H_n ist ein Polynom vom Grad n mit dem höchsten Koeffizienten 2^n.
b) Zeigen Sie

$$[h_m, h_n] = (-1)^m [\frac{d^m}{dx^m} e^{-x^2}, H_n] = (-1)^{m-1} [\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} e^{-x^2}, \frac{d}{dx} H_n] = ... = [e^{-x^2}, \frac{d^m}{dx^m} H_n]$$

und folgern Sie daraus

$$[h_m, h_n] = 0 \text{ für } m \neq n \quad \text{und} \quad [h_n, h_n] = 2^n \cdot n! \cdot \sqrt{\pi}.$$

c) Zeigen Sie: Die Funktionen

$$\frac{1}{\sqrt{2^n \cdot n! \cdot \sqrt{\pi}}} \cdot h_n$$

bilden eine ONB in $L^2(\mathbb{R})$.

Aufgabe 4.43 (Laguerresche Funktionen) *Für $0 \leq n \in \mathbb{N}$ heißt*

$$L_n(x) := e^x \cdot \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$$

das n-te Laguerresche Polynom und

$$\ell_n(x) := e^{-x/2} \cdot L_n(x)$$

die n-te Laguerresche Funktion. Das Skalarprodukt in $L^2(]0, \infty[)$ werde mit $[\quad , \quad]$ bezeichnet.
a) Berechnen Sie L_1, L_2, L_3, L_4 und zeigen Sie: L_n ist ein Polynom vom Grad n mit dem höchsten Koeffizienten $(-1)^n$.
b) Zeigen Sie für $n \geq m$

$$[x^m, e^{-x} L_n] = -m \cdot [x^{m-1}, \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^n e^{-x}] = ... = (-1)^m \cdot m! \cdot \int_0^\infty \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} (x^n e^{-x}) dx$$

und folgern Sie daraus

$$[\ell_m, \ell_n] = 0 \text{ für } m \neq n,$$

sowie

$$[\ell_n, \ell_n] = \int_0^\infty e^{-x} L_n(x)^2 dx = (-1)^n \int_0^\infty [x^n, e^{-x} L_n] = n! \Gamma(n+1) = (n!)^2.$$

c) Zeigen Sie: die Funktionen

$$\frac{1}{n!} \cdot \ell_n$$

bilden eine ONB in $L^2(]0, \infty[)$.

5 Flächenintegrale

In Kapitel 4 haben wir nicht nur das Riemann-Integral zum Lebesgue-Integral verallgemeinert, sondern auch die Volumen-Integration im $\mathbb{R}^n$ kennengelernt. In diesem, abschließenden, Kapitel 5 möchte ich die Integration über p-dimensionale Flächen im $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq n-1$, behandeln. Als eine Art Einführung betrachten wir den Spezialfall $p = 1$, d.h., den Fall der Kurven.

5.1 Kurvenintegrale

Definition 5.1 (Kurve) *Eine Kurve im $\mathbb{R}^n$ wird definiert durch eine Abbildung $f : I \to \mathbb{R}^n$ eines Intervalls $I \subset \mathbb{R}$ in den $\mathbb{R}^n$. Eigentlich ist man an dem Bild (= Spur) $|f| := f(I) \subset \mathbb{R}^n$ der Kurve interessiert. Aber die Kurve beschreiben, oder über sie integrieren, kann man nur mit Hilfe der Abbildung f. Diese Abbildung heißt* Parametrisierung *der Kurve.*

Die Kurve heißt stetig, differenzierbar, ..., *wenn die Parametrisierung stetig, differenzierbar,... ist. Im Fall der differenzierbaren Kurven setzen wir entweder das Intervall $I =]a, b[$ offen voraus, oder dass $I = [a, b]$ abgeschlossen ist, und f definiert und differenzierbar auf einem etwas größeren offenen Intervall $]a', b'[\supset [a, b]$.*

Beispiel 5.1 *Jede Gerade im $\mathbb{R}^n$ mit Anfangsvektor* $\mathbf{a}$ *und Richtungsvektor* $\mathbf{v}$ *ist eine Kurve parametrisiert durch die affin-lineare Abbildung*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \quad f(t) = \mathbf{a} + t \cdot \mathbf{v}.$$

Die Kreislinie vom Radius r im $\mathbb{R}^2$ ist eine Kurve parametrisiert durch

$$R \ni t \mapsto r \cdot (cos(t), sin(t)).$$

Die Wendeltreppe (=Helix) im $\mathbb{R}^3$ wird parametrisiert durch

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \begin{pmatrix} r \cdot cos(t) \\ r \cdot sin(t) \\ c \cdot t \end{pmatrix}, \quad r, c \in \mathbb{R}.$$

Definition 5.2 *Eine* Umparametrisierung *der Kurve $f : I \to \mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung $g : J \to \mathbb{R}^n$ wobei $g = f \circ \gamma$ mit einer bijektiven Abbildung $\gamma : J \to I$. Eigenschaften der Kurve an sich sind solche, die sich bei einer Umparametrisierung nicht ändern.*

Definition 5.3 *Die Kurve*

$$f : I \to \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

sei differenzierbar. Dann heißt

$$f'(t) = \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ \vdots \\ f_n'(t) \end{pmatrix}$$

der Geschwindigkeitsvektor *der Kurve im Kurvenpunkt $f(t)$.*

Bei einer Umparametrisierung wie in Definition 5.2 ändert sich der Geschwindigkeitsvektor $df/dt(t)$ in

$$\frac{dg}{ds}(s) = \frac{df}{dt}(g(s)) \cdot \gamma'(s).$$

Definition 5.4 *Eine stetig differenzierbare Kurve $f : I \to \mathbb{R}^n$ heißt* regulär*, wenn $f'(t) \neq \mathbf{0}$ für alle $t \in I$. In diesem Fall ist für alle $t \in I$ der Einheitsvektor*

$$T(t) = T_f(t) = \frac{1}{\| f'(t) \|} f'(t)$$

definiert. Er heißt der Tangentialvektor *der Kurve im Kurvenpunkt $f(t)$.*

Ist $g(s) = f(\gamma(s))$ eine Umparametrisierung, so ändert sich der Tangentialvektor nicht, falls $\gamma'(s) > 0$. Er ändert sein Vorzeichen, wenn $\gamma'(t) < 0$.

Definition 5.5 *Eine differenzierbare Umparametrisierung der differenzierbaren Kurve f heißt* orientierungserhaltend*, wenn für die Umparametrisierungsabbildung γ gilt, dass stets $\gamma'(s) > 0$. Sie heißt orientierungsumkehrend, wenn stets $\gamma'(t) < 0$.*

Wir wollen in diesem Abschnitt über Kurven integrieren. Dazu:

Definition 5.6 *Die Kurve $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ sei stetig differenzierbar und $u : |f| \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion. Dann heißt*

$$\int_f u ds := \int_a^b u(f(t)) \cdot \| f'(t) \| \, dt$$

Das Kurven-Integral von u über die Kurve f.

Satz 5.1 *Das Kurvenintegral ändert sich nicht bei einer Umparametrisierung.*

Beweis. Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Kurve und $g = f \circ \gamma$ eine Umparametrisierung mit einer stetig differenzierbaren Abbildung $\gamma : [c, d] \to [a, b]$. Wenn γ orientierungserhaltend ist, dann gilt $\gamma(c) = a, \gamma(d) = b$. Mit der Kettenregel folgt

$$\begin{aligned}
\int_g u ds &= \int_c^d u(g(s)) \cdot \| g'(s) \| \, ds \\
&= \int_c^d u(f(\gamma((s))) \| f'(\gamma(s)) \| \cdot |\gamma'(s)| ds \\
&= \int_a^b u(f(t)) \| f'(t) \| \, dt \\
&= \int_f u ds.
\end{aligned}$$

Ist γ orientierungsumkehrend, so werden im Integral die Grenzen a und b vertauscht, das Integral ändert sein Vorzeichen. Aber gleichzeitig ist auch $|\gamma'(s)| = -\gamma(s)$. $\square$

Der wichtigste Spezialfall eines Kurvenintegrals wie in Definition 5.6 ist $u = 1$:

Definition 5.7 *Die Kurve* $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *sei stetig differenzierbar. Dann heißt*

$$L(f) := \int_a^b \parallel f'(t) \parallel dt$$

die Bogenlänge *der Kurve.*

Beispiel 5.2 *Wir betrachten ein Stück des Einheitskreises, parametrisiert durch*

$$f : [0, b] \to \mathbb{R}^2, \quad f(t) = (cos(t), sin(t)).$$

Wegen

$$\parallel f'(t) \parallel = \sqrt{sin^2(t) + cos^2(t)} = 1$$

ist die Bogenlänge dieses Keisstückes $= b$.

So harmlos diese Rechnung auch ist, nur sie rechtfertigt die Definition des Winkels im Bogenmaß als Länge des zugehörigen Kreisbogens.

Beispiel 5.3 (Funktionsgraph) *Es sei* $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine stetig differenzierbare Funktion. Ihr Funktionsgraph ist eine Kurve im* $\mathbb{R}^2$ *mit der Parametrisierung*

$$[a, b] \ni t \mapsto (t, h(t)) \in \mathbb{R}^2.$$

Die Bogenlänge dieses Funktionsgraphen ist

$$\int_a^b \sqrt{1 + h'(t)^2} dt.$$

Beispiel 5.4 (Einheitskreis als Graph) *Die obere Hälfte des Einheitskreises ist der Graph der Funktion*

$$h(x) = \sqrt{1 - x^2} \quad \textit{mit Ableitung} \quad h'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Die Länge des Kreisbogens über dem Intervall $[u, v]$ *mit* $-1 < u < v < 1$ *ist deswegen*

$$\int_u^v \sqrt{1 - \frac{x^2}{1 - x^2}} dx = \int_u^v \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = arcsin(x)|_u^v = arcsin(v) - arcsin(u).$$

Das ist, etwas anders formuliert, genau das Ergebnis in Beispiel 5.2.

Beispiel 5.5 (Bogenlänge der Ellipse) *Wir betrachten die Ellipse*

$$x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

mit zu 1 *normierter waagrechter Hauptachse. Ihre obere Hälfte ist der Graph der Funktion*

$$h(x) = b\sqrt{1 - x^2} \quad \textit{mit Ableitung} \quad h'(x) = b \cdot \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Die Länge des Ellipsenbogens über dem Intervall $[u, v]$ *wie eben ist deswegen*

$$\int_u^v \sqrt{1 + \frac{b^2 x^2}{1 - x^2}} = \int_u^v \sqrt{\frac{1 + (b^2 - 1)x^2}{1 - x^2}}.$$

Dies ist ein sogenanntes elliptisches Integral. *Obwohl es sich nur wenig vom Kreisbogenintegral unterscheidet, kann es für* $b \neq 1$ *nicht mit den uns bekannten elementaren Funktionen ausgedrückt, d.h., nicht in geschlossener Form integriert werden.*

Satz 5.2 (Abschätzung) *Es sei* $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *und* $u : |f| \to \mathbb{R}$ *wie in Definition 5.6. Wenn* $|u(f(t))| \le M$ *für alle* $t \in [a,b]$, *dann gilt*

$$\left| \int_a^b u ds \right| \le M \cdot L(f).$$

Beweis. Es ist

$$\left| \int_f u ds \right| = \left| \int_a^b u(f(t)) \parallel f'(t) \parallel dt \right| \le \int_a^b |u(f(t))| \parallel f'(t) \parallel dt \le \int_a^b M \cdot \parallel f'(t) \parallel dt = M \cdot L(f).$$

□

Wichtigster Spezialfall des Kurvenintegrals $\int_f uds$ ist der Fall, wo die Funktion u die Tangentialkomponente eines Vektorfeldes ist. Das heißt folgendes: Es sei $\mathbf{A} : |f| \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld definiert auf der Spur $|f|$ einer regulären Kurve $f : I \to \mathbb{R}^n$. Die Tangentialkomponente von $\mathbf{A}$ in Richtung der Kurve ist

$$A_{tan}(t) := (\mathbf{A}(f(t)), T_f(t)) = \left(\mathbf{A}(f(t)), \frac{f'(t)}{\parallel f'(t) \parallel} \right).$$

Definition 5.8 *Das* Kurvenintegral *des stetigen Vektorfeldes* $\mathbf{A}$ *über die reguläre Kurve* f *ist*

$$\int_f (\mathbf{A}, ds) := \int_f \mathbf{A}_{tan} ds = \int_a^b A_{tan}(f(t)) \parallel f'(t) \parallel dt = \int_a^b (\mathbf{A}(f(t)), f'(t)) dt.$$

Wichtig und bemerkenswert ist, dass man zur Berechnung dieses Integrals die unangenehm auszurechnende, weil mit einer Wurzel behaftete Größe $\parallel f'(t) \parallel$ nicht auszurechnen braucht.

Beispiel 5.6 *Es sei* $n = 2$ *und* $\mathbf{A}(x,y) := (-y, x)$. *Für den Kreisbogen*

$$f(t) = R \cdot (cos(t), sin(t)), \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

ist

$$\int_f (\mathbf{A}, ds) = \int_0^{2\pi} (R(-sin(t), cos(t)), R(-sin(t), cos(t)))\, dt = \int_0^{2\pi} R^2 dt = 2\pi R^2.$$

Satz 5.3 (Eigenschaften des Kurvenintegrals) *a) Das Kurvenintegral* $\int_f (\mathbf{A}, ds)$ *ändert sich nicht bei orientierungserhaltenden Umparametrisierungen der Kurve* f. *Bei orientierungsumkehrenden Umparametrisierungen ändert es sein Vorzeichen.*
b) Ist $\parallel \mathbf{A}(f(t)) \parallel \le M$ *für alle* t, *so gilt*

$$\left| \int_f (\mathbf{A}, ds) \right| \le L(f) \cdot M.$$

c) Ist $\mathbf{A} = grad(u)$ *ein Gradientenfeld, so gilt*

$$\int_f (\mathbf{A}, ds) = \int_f (grad(u), ds) = u(f(b) - u(f(a)).$$

Beweis a) Bei einer orientierungserhaltenden Umparametrisierung ändert sich der Tangentialvektor T_f nicht, und damit auch nicht die Funktion A_{tan}. Bei einer orientierungsumkehrenden Umparametrisierung ändert T_f und damit A_{tan} sein Vorzeichen. Die Behauptung folgt aus Satz 5.1.

b) Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung ist

$$|A_{tan}| = |(\mathbf{A}, T)| \leq \| \mathbf{A} \| \cdot \| T \| = \| \mathbf{A} \| \leq M.$$

Die Behauptung folgt aus Satz 5.2.

c) Mit der Kettenregel wird

$$\frac{d}{dt}u(f(t)) = (grad\, u(f(t)), f'(t)) = (\mathbf{A}(f(t)), f'(t)).$$

Und daraus folgt

$$\int_f (\mathbf{A}, f'(t))dt = \int_a^b \frac{d}{dt}u(f(t))dt = u(f(b)) - u(f(a)).$$

$\square$

Definition 5.9 *Eine stetige Kurve $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ heißt* stückweise glatt*, wenn es eine Zerlegung*

$$a = t_0 < t_1 < ... < t_k = b$$

des Intervalls $[a, b]$ gibt, so, dass die Kurvenstücke $f|[t_{l-1}, t_l], l = 1, ..., k$, regulär sind. Das Kurvenintegral über diese Kurve ist dann

$$\int_f uds = \sum_{l=1}^{k} \int_{t_{l-1}}^{t_l} u(f(t))dt.$$

Auch für stückweise glatte Kurven f und stetige Funktionen u auf f ist das Kurvenintegral $\int_f uds$ definiert: Man integriert von t_0 bis t_1, holt kurz Luft, integriert dann von t_1 bis t_2 und addiert das zweite Integral zum ersten, und macht so weiter bis zum Integral von t_{k-1} bis t_k.

Definition 5.10 *Eine stückweise glatte Kurve $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ heißt geschlossen, wenn $f(b) = f(a)$ ist.*

Beispiel 5.7 *Eine geschlossene stückweise glatte Kurve ist etwa der Rand des Einheitsquadrats im $\mathbb{R}^2$. Eine Parametrisierung durch das Intervall $[0, 4]$ bekommt man mit*

$$f(t) = \begin{cases} (t, 0) & (0 \leq t \leq 1) \\ (1, t-1) & (1 \leq t \leq 2) \\ (3-t, 1) & (2 \leq t \leq 3) \\ (0, 4-t) & (3 \leq t \leq 4) \end{cases}$$

Für geschlossene Wege lautet Satz 5.3 c):

Satz 5.4 *Die Funktion u sei stetig differenzierbar auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt für jede geschlossene stückweise glatte Kurve f in U:*

$$\int_f (grad\, u, ds) = 0.$$

Definition 5.11 *Das Vektorfeld* $\mathbf{A}$ *sei stetig auf der offenen Menge* $U \subset \mathbb{R}^n$*. Dieses Vektorfeld heißt* konservativ*, wenn* $\int_f (\mathbf{A}, ds) = 0$ *für jede geschlossene stückweise glatte Kurve* f *mit* $|f| \subset U$*.*

Beispiel 5.8 *Das Gradientenfeld einer jeden stetig differenzierbaren Funktion* u *auf* U *ist konservativ. Ist* $\mathbf{A}$ *stetig differenzierbar auf einer offenen Kugel* $U \subset \mathbb{R}^n$ *und erfüllt dort die Symmetrie-Bedingung (Satz 2.25), so ist* $\mathbf{A}$ *ein Gradientenfeld (Satz 2.26) und damit konservativ. Aber Aufgabe 5.3 c) zeigt, dass dies auf* $U = \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ *nicht immer der Fall ist.*

Definition 5.12 *Eine offene Menge* $U \subset \mathbb{R}^n$ *heißt* zusammenhängend*, wenn zu je zwei Punkten* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$ *eine stückweise differenzierbare Kurve* $f : [a,b] \to U$ *existiert mit* $f(a) = \mathbf{x}$ *und* $f(b) = \mathbf{y}$*.*

Beispiel 5.9 *Jede offene Kugel* U *ist zusammenhängend: Man kann zwei Punkte* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$ *durch ein Geradenstück in* U *verbinden. Allgemeiner ist jede konvexe offene Menge zusammenhängend.*

Die offene Menge $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ *in* $\mathbb{R}^2$ *ist zusammenhängend, aber nicht konvex.*

Es sei $U := U_1 \cup U_2$ *mit*

$$U_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 < 1\}, \quad U_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + y^2 < 1\}.$$

Diese Menge U *ist nicht zusammenhängend: Sei etwa* $\mathbf{x} := (1,0) \in U_1$ *und* $\mathbf{y} = (-1,0) \in U_2$*. Wenn es eine stückweise stetig differenzierbare Kurve* $f = (f_1, f_2) : [a,b] \to U$ *mit* $f(a) = \mathbf{x}$ *und* $f(b) = \mathbf{y}$ *gäbe, so wäre* f_1 *eine stetige Funktion auf* $[a,b]$ *mit* $f_1(a) > 0$ *und* $f_1(b) < 0$*. Nach dem Zwischenwertsatz gäbe es ein* $t \in [a,b]$ *mit* $f_1(t) = 0$*. Der Punkt* $f(t) = (0, f_2(t)$ *kann dann nicht zu* U *gehören.*

Satz 5.5 *Für ein stetiges Vektorfeld* $\mathbf{A}$ *auf der zusammenhängenden offenen Menge* $U \subset \mathbb{R}^n$ *sind äquivalent:*
a) Das Feld $\mathbf{A}$ *ist ein Gradientenfeld* $\mathbf{A} = grad\, u$*.*
b) Das Feld $\mathbf{A}$ *ist konservativ.*

Beweis. Wegen Satz 5.4 ist nur die Richtung b) $\Rightarrow$ a) zu zeigen. Dazu fixieren wir einen Punkt $\mathbf{a} \in U$. Weil U zusammenhängend ist, gibt es zu jedem $\mathbf{x} \in U$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve $f : [a,b] \to U$ mit $f(a) = \mathbf{a}$ und $f(b) = \mathbf{x}$. Wir definieren die Funktion $u : U \to \mathbb{R}$ durch

$$u(\mathbf{x}) := \int_f (\mathbf{A}, ds).$$

Weil es viele Kurven f mit den angegebenen Eigenschaften gibt, müssen wir als erstes zeigen: Die Definition der Funktion u ist sinnvoll, d.h.: Ist f_1 noch eine Kurve $f_1 : [c,d] \to U$ mit $f_1(c) = \mathbf{a}$ und $f_1(d) = \mathbf{x}$, dann gilt $\int_f (\mathbf{A}, ds) = \int_{f_1} (\mathbf{A}, ds)$. Dazu setzen wir die Kurven f und f_1 folgendermaßen zu einer Kurve $f_2 : [0,2] \to U$ zusammen:

$$f_2(t) := \begin{cases} f(a + t \cdot (b-a)) & \text{falls } \; 0 \le t \le 1 \\ f_1(d - (t-1) \cdot (d-c)) & \text{falls } \; 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

Wegen $f(b) = f_1(d) = \mathbf{x}$ ist $f_2(t)$ wohldefiniert für $t = 1$ und stückweise stetig differenzierbar. Wegen

$$f_2(0) = f(a) = \mathbf{a} = f_1(c) = f_2(2)$$

ist f_2 geschlossen, also $\int_{f_2} (\mathbf{A}, ds) = 0$. Mit Definition 5.9 ist aber

$$\int_{f_2} (\mathbf{A}, ds) = \int_f (\mathbf{A}, ds) - \int_{f_1} (\mathbf{A}, ds).$$

Jetzt müssen wir noch zeigen $grad\, u = \mathbf{A}$. Dazu fixieren wir $\mathbf{x} \in U$ und eine Koordinate x_ν. Die partielle Ableitung $\partial u/\partial x_\nu u(\mathbf{x})$ ist nach Definition

$$\frac{d}{dt} u(\mathbf{x} + t \cdot \mathbf{e}_\nu)\Big|_{t=0}.$$

Ist $r > 0$ klein genug, so liegt die Kurve $f_2(t) := \mathbf{x} + t \cdot \mathbf{e}_\nu$, $|t| \leq r$, ganz in U. Wir verbinden $\mathbf{a}$ mit $f_2(-r) = \mathbf{x} = r \cdot \mathbf{e}_\nu$ durch eine stückweise stetig differenzierbare Kurve f_1 und setzen diese Kurve f_1 mit f_2 zusammen zu einer Kurve f, die $\mathbf{a}$ mit $\mathbf{x}$ verbindet. Dann ist also

$$u(\mathbf{x}) = \int_f (\mathbf{A}, ds) = \int_{f_1} (\mathbf{A}, ds) + \int_{f_2} (\mathbf{A}, ds).$$

Damit wird

$$\frac{\partial u}{\partial x_\nu}(\mathbf{x}) = \frac{d}{dt} \int_{-r}^{t} (\mathbf{A}, \mathbf{e}_\nu) dt \Big|_{t=0} = \mathbf{A}_\nu(\mathbf{x}).$$

□

Die lineare Abbildung des $\mathbb{R}^2$ in sich mit Matrix

$$D := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist die Drehung um $\pi/2$ nach rechts, d.h., in mathematisch negativer Richtung.

Definition 5.13 *Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre Kurve mit Tangentialvektor $\mathbf{T}(t)$. Dann heißt*

$$\mathbf{N}(t) := D \cdot \mathbf{T}(t)$$

der Normalenvektor *an die Kurve f. Ist $\mathbf{A}$ ein stetiges Vektorfeld auf $|f|$, so heißt*

$$\int_f (\mathbf{A}, \mathbf{N}) ds$$

der Fluss *des Vektorfeldes $\mathbf{A}$ über die Kurve f.*

Ist

$$\mathbf{A} = (A_1, A_2) \quad \text{und} \quad \mathbf{T} = (T_1, T_2),$$

so wird

$$(\mathbf{A}, \mathbf{N}) = A_1 N_1 + A_2 N_2 = A_1 T_2 - A_2 T_1 = det\,(\mathbf{A}, \mathbf{T}).$$

Aufgabe 5.1 *Die* Kettenlinie *ist der Graph der Funktion*

$$y = a \cdot cosh\left(\frac{x}{a}\right), \quad a > 0.$$

Berechnen Sie die Bogenlänge des Stücks der Kettenlinie über dem Intervall $[u, v]$.

Aufgabe 5.2 *Berechnen Sie die Länge der Schnittkurve der beiden Flächen*

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xy = 18z^2\} \quad und \quad \{x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 = 12y\}$$

zwischen den Punkten $(-6,3,-1)$ *und* $(6,3,1)$.

Aufgabe 5.3 *Berechnen Sie die Bogenlänge der*

	$(x,y) =$	
Astroide	$(cos^3(t), sin^3(t))$	$0 \leq t \leq 2\pi$
Kardioide	$(2cos(t) + cos(2t), 2sin(t) + sin(2t))$	$0 \leq t \leq 2\pi$
Archimedischen Spirale	$t(cos(t), sin(t))$	$a \leq t \leq b$
Logarithmischen Spirale	$e^t(cos(t), sin(t)$	$-\infty < t \leq 0$

Aufgabe 5.4 *Auf der rechten Halbebene* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ *ist die Funktion*

$$\varphi(x,y) := arctg\left(\frac{y}{x}\right)$$

stetig differenzierbar.
a) Berechnen Sie $\mathbf{A} := grad(\varphi)$.
b) Zeigen Sie: Das Vektorfeld $\mathbf{A}$ *ist wohldefiniert auf ganz* $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ *und erfüllt dort die Symmetriebedingung (Satz 2.25).*
c) Es sei $f : t \to (cos(t), sin(t))$ *die Standard-Parametrisierung des Einheitskreises. Zeigen Sie:*

$$\int_f (\mathbf{A}, ds) = 2\pi.$$

Aufgabe 5.5 *Es sei* $Q \subset \mathbb{R}^2$ *das Einheitsquadrat und* ∂Q *dessen Rand, parametrisiert wie in Beispiel 5.7. Weiter sei* $\mathbf{A}$ *ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Menge, die* Q *enthält. Zeigen Sie:*
a) (Satz von Stokes, erste Version)

$$\int_{\partial Q} (\mathbf{A}, ds) = \int_Q \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right) d(x,y).$$

b) (Satz von Gauß, erste Version)

$$\int_{\partial Q} (\mathbf{A}, \mathbf{N}) ds = \int_Q \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y}\right) d(x,y).$$

5.2 p-dimensionale Flächen im $\mathbb{R}^n$

Zunächst einige Definitionen, die begrifflich in das zweite Semester, Paragraph 1.2 (Topologie) gehören, aber ohne die ich bisher auch ganz gut auskommen konnte.

Definition 5.14 *Es sei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Eine* Umgebung *$V \subset \mathbb{R}^n$ von $\mathbf{x}$ ist eine Menge V, welche $\mathbf{x}$ einthält, sowie auch eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{x} \in U$.*

Es sei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Teilmenge $A \subset V$ heißt in V abgeschlossen, *wenn $V \setminus A$ offen ist.*

Beispiel 5.10 *Der Graph der Funktion $sin(1/x)$, $x > 0$, ist abgeschlossen in der Halbebene $V := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$. Auf V ist ja die Funktion $f(x, y) := y - sin(1/x)$ stetig. Und $V \setminus A$ ist das Urbild unter f der offenen Menge $\mathbb{R} \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}$. Nach Satz 1.11 b) ist dieses Urbild offen.*

Definition 5.15 *Es sei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine in V abgeschlossene Menge $A \subset V$ heißt* p-dimensionale Fläche, *wenn zu jedem $\mathbf{x} \in V$*

1) eine offene Umgebung $V_{\mathbf{x}} \subset V$ existiert,

2) eine offene Menge $U_{\mathbf{x}} \subset \mathbb{R}^p$ existiert,

3) eine bijektive und in beiden Richtungen stetige Abbildung $F_{\mathbf{x}} : U_{\mathbf{x}} \to A \cap V_{\mathbf{x}}$ existiert, so, dass

$$F_{\mathbf{x}} \text{ differenzierbar ist und für alle } \mathbf{u} \in U_{\mathbf{x}} \text{ gilt } Rang\, F'(\mathbf{u}) = p.$$

Die Abbildung $F_{\mathbf{x}}$ heißt eine lokale Parametrisierung *von A. Wenn alle lokalen Parametrisierungen k-mal stetig differenzierbar sind, dann heißt die Fläche von Klasse C^k.*

Statt p-dimensionale Fläche sagt man meist p-dimensionale Untermannigfaltigkeit von V. Ich bevorzuge hier den Ausdruck p-dimensionale Fläche, weil er nicht so abstrakt klingt.

Beispiel 5.11 *Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve, deren Parametrisierungsabbildung f injektiv ist. Weiter sei $V := \mathbb{R}^n \setminus \{f(a), f(b)\}$. Dann ist $f(]a, b[) \subset V$ eine ein-dimensionale Fläche mit $U_{\mathbf{x}} = U =]a, b[$.*

Hierzu ist noch zu zeigen, dass die Umkehrabbildung $f^{-1} : f(]a, b[) \to]a, b[$ stetig ist: Dazu sei $\mathbf{x} = f(u) \in f(]a, b[)$ und $\mathbf{x}_\nu \in f(]a, b[$ eine Folge mit $\lim(\mathbf{x}_\nu) = \mathbf{x}$. Es sei $u_\nu = f^{-1}(\mathbf{x}_\nu) \in]a, b[$. Die Stetigkeit von f^{-1} bedeutet $\lim u_\nu = u$. Andernfalls gibt es ein $\epsilon > 0$ und unendlich viele u_ν mit $|u_\nu - u| > \epsilon$. Nach Bolzano-Weierstraß gibt es dann eine in $[a, b]$ konvergente Teilfolge u_{ν_i} mit $|u_{\nu_i} - u| > \epsilon$. Sei $u' := \lim_i u_{\nu_i}$. Dann ist $|u' - u| \geq \epsilon$ und $u' \neq u$. Wegen der Stetigkeit von f ist aber

$$f(u') = \lim_i f(u_{\nu_i}) = \lim_i \mathbf{x}_{\nu_i} = \mathbf{x} = f(u).$$

Das steht im Widerspruch zur Injektivität von f auf $[a, b]$.

Beispiel 5.12 *Jede offene Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ ist eine n-dimensionale Fläche mit $U = V = X$ und $F = id$.*

Beispiel 5.13 *Die Einheits-Sphäre*

$$S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \| \mathbf{x} \| = 1\}$$

ist eine $(n-1)$-dimensionale Fläche im $\mathbb{R}^n$.

Dazu betrachten wir die $2n$ offenen Mengen

$$V_i^+ := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \, x_i > 0\}, \quad V_i^- := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \, x_i < 0\}.$$

Jedes $\mathbf{x} \in S$ ist in einer dieser offenen Mengen enthalten. Weiter sei $U := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-1} : \| \mathbf{x} \| < 1\}$ die offene Einheitskugel im $\mathbb{R}^{n-1}$ und

$$F_i^{\pm} : U \to V_i^{\pm}, \quad F_i^{\pm}(\mathbf{u}) := (u_1, ..., u_{i-1}, \pm\sqrt{1 - \| \mathbf{u} \|^2}, u_i, ..., u_{n-1}).$$

Dann ist $F_i^{\pm} : U \to S \cap V_i^{\pm}$ bijektiv und stetig, sogar von Klasse C^∞ mit stetiger Umkehrabbildung

$$\mathbf{x} \mapsto (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n).$$

Schließlich hat die Funktionalmatrix

$$(F_i^{\pm})' = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ * & * & * & * & * & * \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ i-1 \\ i \\ i+1 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Maximalrang $= n-1$.

Definition 5.16 *Die Abbildung $F_{\mathbf{x}} : U_{\mathbf{x}} \to X \cap V_{\mathbf{x}}$ aus Definition 5.15 heißt* Karte *auf X. Sind u_i, $i = 1, ..., p$, die Koordinatenfunktionen auf $U_{\mathbf{x}} \subset \mathbb{R}^p$, so heißen die Funktionen*

$$v_i := u_i \circ F_{\mathbf{x}}^{-1}, \, i = 1, ..., p,$$

lokale Koordinaten *auf X.*

Beispiel 5.14 *Eine Karte der Bundesrepublik Deutschland ist eine Karte auf der 2-Sphäre, der Oberfläche unserer Erdkugel, im Sinn von Definition 5.15. Sind auf dieser Karte die Längengrade senkrechte Geraden und die Breitenkreise waagrechte Geraden so definieren Längengrade und Breitenkreise lokale Koordinaten im Sinn obiger Definition.*

Es sei $F_{\mathbf{x}} : U \to X \cap V_{\mathbf{x}}$ eine Karte auf X mit $F(\mathbf{u}) = \mathbf{x}$ für $\mathbf{u} \in U_{\mathbf{x}} \subset \mathbb{R}^p$. Wegen Definition 5.15, Eigenschaft 3) ist die lineare Abbildung

$$F'_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$$

injektiv.

Definition 5.17 *Der Bild-Vektorraum*

$$T_{\mathbf{x}}(X) := F'_{\mathbf{x}}(\mathbf{u})(\mathbb{R}^p) \subset \mathbb{R}^n$$

heißt der Tangentialraum *an X im Punkt $\mathbf{x}$. (Man denkt ihn sich im Punkt $\mathbf{x}$ angeheftet.) Er wird erzeugt von den Tangentialvektoren $\partial F_{\mathbf{x}}/\partial u_1(\mathbf{u}), ..., \partial F_{\mathbf{x}}/\partial u_p(\mathbf{u})$ mit*

$$\frac{\partial F_{\mathbf{x}}}{\partial u_i}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_{\mathbf{x},1}}{\partial u_i}(\mathbf{u}) \\ \vdots \\ \frac{\partial F_{\mathbf{x},n}}{\partial u_i}(\mathbf{u}) \end{pmatrix}.$$

Sein orthogonales Komplement

$$N_{\mathbf{x}}(X) := T_{\mathbf{x}}(X)^{\perp} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : (\mathbf{y}, \mathbf{t}) = 0 \text{ für alle } \mathbf{t} \in T_{\mathbf{x}}(X)\}$$

heißt der Normalraum *von X in $\mathbf{x}$.*

Definition 5.18 *Es seien $V, W \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ein* Diffeomorphismus *von V auf W ist eine bijektive, stetig differenzierbare Abbildung $G : V \to W$ derart, dass auch die Umkehrabbildung $G^{-1} : W \to V$ stetig differenzierbar ist. Sind $w_1, ..., w_n$ die Koordinatenfunktionen auf $\mathbb{R}^n$, so heißen die Funktionen*

$$g_i := w_i \circ G, \; i = 1, ..., n,$$

krummlinige Koordinaten *auf V.*

Satz 5.6 *Es sei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $X \subset V$ abgeschlossen. Dann sind äquivalent:*
a) (Lokale Parametrisierung) Die Menge $X \subset V$ ist eine p-dimensionale Fläche.
b) (Lokale Linearisierung) Zu jedem $\mathbf{x} \in X$ gibt es eine offene Menge $V_{\mathbf{x}} \subset \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{x} \in V_{\mathbf{x}} \subset V$ und krummlinige Koordinaten $g_1, ..., g_n$ auf $V_{\mathbf{x}}$ so, dass

$$X \cap V_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{y} \in V_{\mathbf{x}} : \; g_{p+1}(\mathbf{y}) = ... = g_n(\mathbf{y}) = 0\}.$$

c) (Lokale Gleichungen) Zu jedem $\mathbf{x} \in X$ gibt es eine offene Menge $V_{\mathbf{x}} \subset \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{x} \in V_{\mathbf{x}} \subset V$ und stetig differenzierbare Funktionen $g_{p+1}, ..., g_n$ auf $V_{\mathbf{x}}$ so, dass

$$X \cap V_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{y} \in V_{\mathbf{x}} : \; g_{p+1}(\mathbf{y}) = ... = g_n(\mathbf{y}) = 0\} \quad \text{und} \quad \text{Rang} \begin{pmatrix} g'_{p+1}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ g'_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = n - p.$$

Beweis. a) $\Rightarrow$ b): Wir fixieren eine Karte $F_{\mathbf{x}} : U_{\mathbf{x}} \to X \cap V_{\mathbf{x}}$ und eine Basis $\mathbf{t}_{p+1}, ..., \mathbf{t}_n \in N_{\mathbf{x}}(X)$ des Normalraums. Damit definieren wir eine Abbildung

$$G : U_{\mathbf{x}} \times \mathbb{R}^{n-p} \to \mathbb{R}^n, \quad G(w_1, ..., w_p, w_{p+1}, ..., w_n) := F_{\mathbf{x}}(w_1, ..., w_p) + \sum_{i=p+1}^{n} w_i \mathbf{t}_i.$$

Es ist $G(\mathbf{u}, \mathbf{0}) = F_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}) = \mathbf{x}$. Und die Funktionalmatrix von G im Punkt $(\mathbf{u}, \mathbf{0})$ ist

$$G'(\mathbf{u}, \mathbf{0}) = \left(\underbrace{F'_{\mathbf{x},1}(\mathbf{u}), ..., F_{\mathbf{x},p}(\mathbf{u})}_{\text{Basis von } T_{\mathbf{x}}(X)}, \quad \underbrace{\mathbf{t}_{p+1}, ..., \mathbf{t}_n}_{\text{Basis von } N_{\mathbf{x}}(X)} \right).$$

Diese Matrix hat den Maximalrang $= n$. Nach Satz 2.16 (Umkehrsatz) ist lokal bei $(\mathbf{u}, \mathbf{0})$ diese Abbildung G stetig differenzierbar umkehrbar. Nachdem wir $V_{\mathbf{x}}$ gegebenenfalls verkleinern sind also die Funktionen

$$w_1 \circ G^{-1} = u_1, ..., w_p \circ G^{-1} = u_p, w_{p+1} \circ G^{-1}, ..., w_n \circ G^{-1}$$

krummlinige Koordinaten auf $V_{\mathbf{x}}$ mit

$$X \cap V_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{y} \in V_{\mathbf{x}} : \, w_{p+1}(\mathbf{y}) = ... = w_n(\mathbf{y}) = 0\}.$$

b) $\Rightarrow$ c): Diese Aussage ist trivial, denn $g_{p+1} = 0, ..., g_n = 0$ sind lokale Gleichungen für X.

c) $\Rightarrow$ a): Die Funktionen $g_{p+1}, ..., g_n$ erfüllen bei $\mathbf{x}$ die Voraussetzungen des Satzes 2.17 (Implizite Funktionen). Es gibt also eine offene Menge $V_{\mathbf{x}} \subset V$ und p Koordinatenfunktionen, etwa $y_1, ..., y_p$, so, dass die Abbildung

$$G : \mathbf{y} \mapsto (y_1, ..., y_p, g_{p+1}(\mathbf{y}), ..., g_n(\mathbf{y}))$$

einen Diffeomorphismus

$$V_{\mathbf{x}} \to W_{\mathbf{x}}, \quad X \cap V_{\mathbf{x}} \to U_{\mathbf{x}} := \{\mathbf{w} \in W_{\mathbf{x}} : \, w_{p+1} = ... = w_n = 0\}$$

definiert. Die Einschränkung von G^{-1} auf $U_{\mathbf{x}}$ ist eine Karte auf X bei $\mathbf{x}$. $\square$

Beispiel 5.15 *Die $n-1$-Sphäre vom Radius R im $\mathbb{R}^n$*

$$S_{n-1}(R) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \parallel \mathbf{x} \parallel = R\}$$

ist eine $n-1$-dimensionale Fläche im $\mathbb{R}^n$. Mit der Funktion $g_n(\mathbf{x}) = \parallel \mathbf{x} \parallel^2 - R^2$ erfüllt sie die Bedingung c) aus Satz 5.6. Für alle $\mathbf{x} \in S_n(R)$ ist ja

$$g_n'(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

Beispiel 5.16 *Jeder lineare Unterraum $X \subset \mathbb{R}^n$ der Dimension p ist eine p-dimensionale Fläche. Er ist ja Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems $g_{p+1}(\mathbf{x}) = ... = g_n(\mathbf{x}) = 0$ mit $n-p$ linear unabhängigen lineare Gleichungen.*

Beispiel 5.17 (Torus) *Die Torus-Fläche entsteht, indem man einen Kreis vom Radius r in der x,z-Ebene hernimmt und um die z-Achse rotieren lässt. Ist r der Kreisradius und R der Abstand des Kreismittelpunktes von der z-Achse, so können wir die Gleichung des Kreises als*

$$(x-R)^2 + z^2 - r^2 = 0$$

annehmen. Hier ersetzen wir x durch $\sqrt{x^2+y^2}$ und erhalten die Gleichung

$$g(x,y,z) := (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 - r^2 = 0$$

für die Rotationsfläche X. Auf der x-Achse $x = y = 0$ ist die definierende Funktion g nicht differenzierbar. Aber wir setzen jetzt

$$0 < r < R$$

voraus. Dann enthält X keine Punkte dieser z-Achse. Die Menge $X \subset \mathbb{R}^3$ ist eine (echte, zweidimensionale) Fläche, wenn wir für alle $\mathbf{x} \in X$ zeigen können: $grad\, g(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$. Dazu berechnen wir

$$grad\, g(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2(\sqrt{x^2+y^2}-R)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 2(\sqrt{x^2+y^2}-R)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 2z \end{pmatrix}.$$

Weil auf X nicht $x = y = 0$ sein kann, ist $grad\, g = \mathbf{0}$ äquivalent mit

$$\sqrt{x^2+y^2} = R, \quad z = 0.$$

Aber diese beiden Bedingungen sind für $\mathbf{x} \in X$ nicht erfüllbar.

Es sei $\mathbf{x} \in X$ ein Punkt auf der p-dimensionalen Fläche $X \subset V \subset \mathbb{R}^n$. Ferner liege für X in einer offenen Menge $V_{\mathbf{x}}$, $\mathbf{x} \in V_{\mathbf{x}} \subset \mathbb{R}^n$ gleichzeitig vor

- eine explizite Beschreibung durch eine Karte $F_{\mathbf{x}} : U_{\mathbf{x}} \to V_{\mathbf{x}}$,
- eine implizite Beschreibung durch $n-p$ Gleichungen $g_{p+1} = ... = g_n = 0$ wie in Satz 5.6 c).

Dann ist also für $i = p+1, ..., n$ und $\mathbf{u} \in U_{\mathbf{x}}$

$$g_i(F(\mathbf{u})) \equiv 0.$$

Mit der Kettenregel folgt für $j = 1, ..., p$

$$grad\, g_i(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial F_{\mathbf{x}}}{\partial u_j}(\mathbf{u}) = 0.$$

Die $n-p$ Vektoren $grad\, g_i(\mathbf{x})$ stehen also senkrecht auf den p Vektoren $\partial F_{\mathbf{x}}/\partial u_j(\mathbf{u})$, welche den p-dimensionalen Tangentialraum $T_{\mathbf{x}}(X)$ erzeugen. Weil die $n-p$ Gradienten $grad\, g_i(\mathbf{x})$ linear unabhängig sind, erzeugen bilden diese eine Basis des Normalraums $N_{\mathbf{x}}(X)$.

Landkarten derselben Gegend auf unserer Erdkugel überlappen sich gelegentlich. Der Wechsel von der einen zur anderen Karte bereitet dann Schwierigkeiten. Aber die wesentlichen Informationen dürfen sich beim Kartenwechsel nicht ändern. Genauso ist es beim Kartenwechsel auf einer p-dimensionalen Fläche. Das machen wir jetzt präzise.

Es seien also auf der p-dimensionalen Fläche zwei Karten

$$F_1 : U_1 \to X \cap V_1, \quad F_2 : U_2 \to X \cap V_2$$

gegeben. Sie überlappen sich, wenn

$$D := X \cap V_1 \cap V_2 = F_1(U_1) \cap F_2(U_2) \neq \emptyset.$$

In dieser Situation ist die Überlappungsabbildung (der Kartenwechsel)

$$F_{2,1} := (F_2|D)^{-1} \circ F_1 : F_1^{-1}(D) \to F_2^{-1}(D)$$

definiert.

Satz 5.7 *Wenn X von Klasse C^k ist, dann ist auch die Abbildung $F_{2,1}$ von Klasse C^k.*

.

Beweis. Wie im Beweis von Satz 5.6, Richtung a) $\Rightarrow$ b), betrachten wir die Abbildung $G_2 : U_2 \times \mathbb{R}^{n-p} \to \mathbb{R}^n$. Sie ist von Klasse C^k mit $F_2 = G_2 | U_2 \times \mathbf{0}$. Wir fixieren $\mathbf{x} \in D$. Nachdem wir eventuell V_2 verkleinern, ist auch G_2^{-1} auf V_2 von Klasse C^k (Umkehrsatz). Dann ist auch $F_{2,1} = G_2^{-1} \circ F_1$ auf $F_1^{-1}(D)$ von Klasse C^k. □

Den Sachverhalt in Satz 5.7 kann man auch so ausdrücken: Für $i = 1, 2$ seien $u_1^{(i)}, ..., u_p^{(i)}$ die lokalen Koordinaten auf D definiert durch die Karte F_i. Dann ist der Koordinatenwechsel

$$(u_1^{(1)}, ..., u_p^{(1)}) = F_{2,1} \circ (u_1^{(2)}, ..., u_p^{(2)})$$

eine C^k-Abbildung.

Satz 5.8 *a) Der Tangentialraum $T_{\mathbf{x}}(X)$ und der Normalraum $N_{\mathbf{x}} \subset \mathbb{R}^n$ sind Karten-unabhängig.*
b) Es sei $D = X \cap V_1 \cap V_2$ wie oben und $f : D \to \mathbb{R}$. Die Funktion $f \circ F_1$ auf $F_1^{-1}(D)$ ist differenzierbar (bzw. von Klasse C^l, $l \leq k$,) genau dann, wenn die Funktion $f \circ F_2$ auf $F_2^{-1}(D)$ dies ist.

Beweis a) Weil $N_{\mathbf{x}}$ das orthogonale Komplement von $T_{\mathbf{x}}$ ist, genügt es, die Behauptung für den Tangentialraum zu zeigen. Dazu wählen wir eine implizite Beschreibung $g_{p+1} = ... = g_n = 0$ von X bei $\mathbf{x} \in D$. Es sei $\mathbf{u}_1 = F_1^{-1}(\mathbf{x}) \in U_1$ und $\mathbf{u}_2 = F_2^{-1}(\mathbf{x}) \in U_2$. Dann ist

$$span\left(\frac{\partial F_1}{\partial u_1^{(1)}}(\mathbf{u}_1), ..., \frac{\partial F_1}{\partial u_p^{(1)}}(\mathbf{u}_1)\right) = \{grad\, g_{p+1}(\mathbf{x}), ..., grad\, g_n(\mathbf{x})\}^\perp = span\left(\frac{\partial F_2}{\partial u_1^{(2)}}(\mathbf{u}_2), ..., \frac{\partial F_2}{\partial u_p^{(2)}}(\mathbf{u}_2)\right).$$

b) Es ist $f \circ F_1 = (f \circ F_2) \circ F_{2,1}$. □

Definition 5.19 *Es sei X von Klasse C^k und $f : X \to \mathbb{R}$. Die Funktion f heißt differenzierbar auf X (bzw. von Klasse $C^l, l \leq k$), wenn $f \circ F$ dies ist für jede Karte $F : U \to X$. Nach Satz 5.8 b) ist diese Eigenschaft bei $\mathbf{x} \in X$ unabhängig von der dort gewählten Karte.*

So, jetzt müssen wir das Kurvenintegral $\int_f g ds$ verallgemeinern zum Flächenintegral $\int_F g do$. Alles geht im Wesentlichen genau so, wie beim Kurvenintegral, nur müssen wir uns überlegen, wodurch wir $ds = \| f'(t) \| dt$ ersetzen. Der Tangentialraum an die Fläche ist aufgespannt durch die p Tangentialvektoren $\partial F/\partial u_1, ..., \partial F/\partial u_p$. Und deswegen ersetzen wir die Länge des Tangentialvektors df/dt durch das Volumen des p-dimensionalen Parallelotops

$$P\left(\frac{\partial F}{\partial u_1}, ..., \frac{\partial F}{\partial u_p}\right),$$

das von den p angegebenen Tangentialvektoren aufgespannt wird. Das p-dimensionale Volumen eines p-dimensionalen Parallelotops im $\mathbb{R}^n$ haben wir allerdings noch nicht gehabt! Wir gehen davon aus, dass sich dieses p-dimensionale Volumen nicht ändert, wenn wir es durch eine orthogonale Transformation $M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ transformieren. Das führt auf

Definition 5.20 *Es seien die p Vektoren $\mathbf{v}_1,...\mathbf{v}_p \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Dann gibt es eine orthogonale Transformation $M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, wleche diese p Vektoren in den Untervektorraum*

$$\mathbb{R}^p = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_{p+1} = ... = x_n = 0\}$$

abbildet. Und wir definieren das p-dimensionale Volumen des Parallelotops $P(\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_p)$ als

$$|P(\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_p)|^p := |P(M\mathbf{v}_1,...,M\mathbf{v}_p)|,$$

das Volumen des in den $\mathbb{R}^p$ gedrehten p-dimensionalen Parallelotops. Das ist der Absolutbetrag der Determinante der $p \times p$-Matrix $(M\mathbf{v}_1,...,M\mathbf{v}_p)$. (Hier werden die p Vektoren als Vektoren im $\mathbb{R}^p$ aufgefasst.)

Diese Definition wirft einige Fragen auf. Z.B.: Ist sie unabhängig von der Wahl der orthogonalen Transformation M? Oder: Wie sollen wir es ausrechnen? Hier hilft die *Gramsche Determinante*:

Definition 5.21 *Es seien $\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_p \in \mathbb{R}^p$. Die Gramsche Determinante dieser Vektoren ist*

$$g(\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_p) := \sqrt{det((\mathbf{v}_i.\mathbf{v}_j))_{i,j=1,...,p}},$$

die Quadratwurzel aus der Determinante der $p \times p$-Matrix (Gramsche Matrix)

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{v}_1.\mathbf{v}_1) & (\mathbf{v}_1.\mathbf{v}_2) & ... & (\mathbf{v}_1.\mathbf{v}_p) \\ (\mathbf{v}_2.\mathbf{v}_1) & (\mathbf{v}_2.\mathbf{v}_2) & ... & (\mathbf{v}_2.\mathbf{v}_p) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\mathbf{v}_p.\mathbf{v}_1) & (\mathbf{v}_p.\mathbf{v}_2) & ... & (\mathbf{v}_p.\mathbf{v}_p) \end{pmatrix}.$$

Satz 5.9 *a) Die Gramsche Determinante ist invariant unter orthogonalen Transformationen $M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.*
b) Sind die Vektoren $\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_p$ enthalten in $\mathbb{R}^p \subset \mathbb{R}^n$, so ist ihre Gramsche Determinante das p-dimensionale Volumen des von diesen Vektoren aufgespannten p-dimensionalen Parallelotops.

Beweis. a) Die Matrix in der Gramschen Determinante hat als Einträge lauter Skalarprodukte. Diese ändern sich nicht bei orthogonalen Transformationen. Also ändert sich auch nicht die Gramsche Matrix, ebenso wenig wie ihre Determinante.

b) Wenn die letzten $n-p$ Koordinaten der Vektoren $\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_p$ alle $=0$ sind, so betrachten wir die p Vektoren $\mathbf{w}_1,...,\mathbf{w}_p \in \mathbb{R}^p$, die aus den Vektoren $\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_p$ entstehen, indem man diese letzten $n-p$ Einträge streicht. Das p-dimensionale Volumen des p dimensionalen Parallelotops $P(\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_p)$ ist dann

$$|P(\mathbf{w}_1,...,\mathbf{w}_p)| = |det(\mathbf{w}_1,...,\mathbf{w}_p)|.$$

Wir betrachten die $p \times p$-Matrix

$$W := (\mathbf{w}_1,...,\mathbf{w}_p).$$

Damit wird

$$|det(W)| = \sqrt{det(W)^2} = \sqrt{det(W^t) \cdot det(W)} = \sqrt{det(W^t \cdot W)}.$$

Die Einträge der Matrix $W^t \cdot W$ sind aber die Skalarprodukte

$$(\mathbf{w}_i.\mathbf{w}_j) = (\mathbf{v}_i.\mathbf{v}_j).$$

Und damit ist die Matrix $W^t \cdot W$ die Gramsche Matrix der Vektoren $\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_p$. □

Weltanschaulich wichtig ist die folgende Formel:

Satz 5.10 (Lagrange-Identität) *Es sei $1 \leq p \leq n$ und $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_p \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt*

$$det((\mathbf{v}_i.\mathbf{v}_j))_{i,j=1,...,p} \quad = \quad \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < ... < k_k \leq n} \Big(det_{k_1,...,k_p}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_p)\Big)^2.$$

Die letzte Determinante ist die Determinante der $p \times p$-Matrix, die entsteht, wenn man aus der $n \times p$-Matrix $(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_p)$ nur die Zeilen mit den Indizes $k_1, ..., k_p$ nimmt.

Beweis. Wir rechnen erst mal los:

$$\begin{aligned}
det((\mathbf{v}_i.\mathbf{v}_j))_{i,j=1,...,p} &= det\left(\sum_{k=1}^n v_{i,k} v_{j,k}\right)_{i,j=1,...,p} \\
&= \sum_{\sigma \in \Sigma_p} sign(\sigma)(\sum_{k_1=1}^n v_{1,k_1} v_{\sigma(1),k_1}) \cdot ... \cdot (\sum_{k_p=1}^n v_{p,k_p} v_{\sigma(p),k_p}) \\
&= \sum_{k_1,...,k_p=1}^n \sum_{\sigma} sign(\sigma)(v_{1,k_1} v_{\sigma(1),k_1}) \cdot ... \cdot (v_{p,k_p} v_{\sigma(p),k_p}) \\
&= \sum_{k_1,...,k_p=1}^n det\,(v_{i,k_i} v_{j,k_i})_{i,j=1,...,p}
\end{aligned}$$

Hier ist die letzte Determinante ist etwas schwer zu verstehen. Deswegen möchte ich sie für $p = 3$ einmal hinschreiben

$$det \begin{pmatrix} v_{1,k_1}v_{1,k_1} & v_{1,k_1}v_{2,k_1} & v_{1,k_1}v_{3,k_1} \\ v_{2,k_2}v_{1,k_2} & v_{2,k_2}v_{2,k_2} & v_{2,k_2}v_{3,k_2} \\ v_{3,k_3}v_{1,k_3} & v_{3,k_3}v_{2,k_3} & v_{3,k_3}v_{3,k_3} \end{pmatrix} = v_{1,k_1}v_{2,k_2}v_{3,k_3} \cdot det \begin{pmatrix} v_{1,k_1} & v_{2,k_1} & v_{3,k_1} \\ v_{1,k_2} & v_{2,k_2} & v_{3,k_2} \\ v_{1,k_3} & v_{2,k_3} & v_{3,k_3} \end{pmatrix}.$$

Wenn hier zwei der Indizes k_1, k_2, k_3 übereinstimmen, dann sind in dieser Matrix zwei Zeilen gleich und ihre Determinante ist $= 0$. Wir können sie in der obigen Summe weglassen. Wir brauchen also nur über Index-p-tupel $(k_1, ..., k_p)$ zu summieren, wo alle k_i voneinander verschieden sind. Jedes derartige Index-p-tupel geht aber durch eine Permutation $\sigma \in \Sigma_p$ aus genau einem Index-p-tupel mit $k_1 < k_2 < ... < k_p$ hervor. Dazu gehört die Teilsumme

$$\sum_{\sigma \in \Sigma_p} v_{1,k_{\sigma(1)}} \cdot ... \cdot v_{p,k_{\sigma(p)}} \cdot sign(\sigma) \cdot det\,(v_{j,k_l})_{k,l=1}^m = det\,(v_{i,k_m})_{i,m=1,...,p}\, det\,(v_{j,k_l})_{j,l=1,...,p} = det\left(v_{i,k_j}\right)^2_{i,j=1,...,p}.$$

Und wenn man hier über alle Index-p-tupel mit $k_1 < ... < k_p$ summiert entsteht die behauptete Formel. □

Beispiel 5.18 ($p = 2$) *Für $p = n = 2$ ist die Matrix der Skalarprodukte*

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{v}_1.\mathbf{v}_1) & (\mathbf{v}_1.\mathbf{v}_2) \\ (\mathbf{v}_2.\mathbf{v}_1) & (\mathbf{v}_2.\mathbf{v}_2) \end{pmatrix} = V^t \cdot V \quad \textit{mit der Matrix} \quad V = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2).$$

Und die Lagrange-Identität schrumpft zusammen auf

$$\sqrt{det(V^t \cdot V)} = \sqrt{det(V)^2}.$$

Für $p = 2, n = 3$ sind die 2×2 Unterdeterminanten $det_{i_1,i_2}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ gerade die Koordinaten des Kreuz-Produkt-Vektors $\mathbf{w} := \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$:

$$\begin{array}{rcl} det_{1,2}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) & = & \mathbf{w}_3 \\ det_{1,3}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) & = & -\mathbf{w}_2 \\ det_{2,3}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) & = & \mathbf{w}_1 \end{array}$$

Und die Lagrange-Identität wird die bekannte (?) Formel für die Länge des Kreuz-Produkt-Vektors

$$\| \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \|^2 = \| \mathbf{v}_1 \|^2 \cdot \| \mathbf{v}_2 \|^2 - (\mathbf{v}_1 . \mathbf{v}_2)^2.$$

Dies kann man so interpretieren: Die Fläche des von zwei Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$ aufgspannten Parallelogramms ist die Länge des Kreuz-Produkt-Vektors $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$.

Im Allgemeinen kann man die $p \times p$-Determinante $|det_{i_1,...,i_p}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_p)|$ interpretieren als das Volumen des p-dimensionalen Parallelotops, das aus dem Parallelotop $P(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_p)$ entsteht, indem man es in den Unterraum projiziert, der von den Basis-Vektoren $\mathbf{e}_{i_1}, ..., \mathbf{e}_{i_p}$ aufgespannt wird. Dann ist die Lagrange-Identität soetwas wie ein Pythagoras für die Volumina p-dimensionaler Parallelotope.

Die Oberfläche p dimensionaler Flächen definieren wir als Integral über die Gramsche Determinante. Wenn die lokale Parametrisierung F stetig differenzierbar ist, dann ist diese Gramsche Determinante $g(\partial F/\partial u_1, ..., \partial F/\partial u_p)$ stetig.

Definition 5.22 *Es sei $X \subset V \subset \mathbb{R}^n$ eine p-dimensionale Fläche und $F : U \to X$ eine Karte. Wenn $U_0 \subset U$ kompakt ist, dann heißt $F(U_0) \subset X$ ein p-dimensionales Flächenstück. Ist F von Klasse C^1, so ist die* Oberfläche *dieses Flächenstücks definiert durch*

$$O(F(U_0)) := \int_{U_0} \sqrt{g\left(\frac{\partial F}{\partial u_1}, ..., \frac{\partial F}{\partial u_p}\right)} d(u_1, ..., u_p).$$

Diese Oberfläche ist auch definiert, wenn U_0 offen, sowie beschränkt ist, und die stetige Funktion g beschränkt.

Beispiel 5.19 (Funktionsgraph) *Es sei $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Der Funktionsgraph*

$$X = \{(\mathbf{u}, f(\mathbf{u})) : \mathbf{u} \in U\} \subset V := U \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n$$

ist eine $(n-1)$-dimensionale Fläche, parametrisiert durch die C^1-Karte $F : \mathbf{u} \mapsto (\mathbf{u}, f(\mathbf{u}))$. Die Tangentialvektoren dazu sind

$$\left(\frac{\partial F}{\partial u_1}, ..., \frac{\partial F}{\partial u_{n-1}}\right) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial u_1} & ... & \frac{\partial f}{\partial u_{n-1}} \end{pmatrix}.$$

Und die $n \times (n-1)$-Matrix all dieser Tangentialvektoren ist

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1}_{n-1} \\ grad\, f \end{pmatrix}.$$

Die Gramsche Determinante berechnen wir mit der Lagrange-Identität. Dazu brauchen wir die $(n-1)\times(n-1)$-Unterdeterminanten $d_{i_1,...,i_{n-1}}$ der obigen Matrix. Für $(i_1,...,i_{n-1})=(1,...,n-1)$ ist dies die Determinante $det(E_{n-1})=1$. In allen anderen Fällen ist

$$(i_1,...,i_{n-1})=(1,...,\check{k},...,n),$$

wobei $\check{k}$ bedeutet, dass der Index k weggelassen ist. Die zugehörige Unter-Determinante ist (Entwicklung nach der letzten Zeile) $\pm\partial f/\partial u_k$. Die Lagrange-Identität wird

$$g=\sum_{i_1<...<i_{n-1}} d^2_{i_1,...,i_{n-1}}=1+\sum_{k=1}^{n-1}(\pm\frac{\partial f}{\partial u_k})^2=1+\parallel grad\,f\parallel^2.$$

Damit wird die Oberfläche eines durch $U_0\subset U$ parametrisierten Flächenstücks

$$\int_{U_0}\sqrt{1+\parallel grad\,f\parallel^2}d(u_1,...,u_{n-1}).$$

Beispiel 5.20 (Rotationsfläche) *Die Funktion $f(z)$ sei stetig differenzierbar und >0 auf dem Intervall $[a,b]$ der z-Achse. Wenn man den Funktionsgraphen von f um die z-Achse rotieren lässt ensteht die zugehörige* Rotationsfläche. *Sie wird parametrisiert durch*

$$F:(\varphi,z)\mapsto(f(z)cos(\varphi),f(z)sin(\varphi)).$$

Die zugehörigen partiellen Ableitungen sind

$$\frac{\partial F}{\partial\varphi}=\begin{pmatrix}-f(z)sin(\varphi)\\ f(z)cos(\varphi)\\ 0\end{pmatrix},\quad\frac{\partial F}{\partial z}=\begin{pmatrix}f'(z)cos(\varphi)\\ f'(z)sin(\varphi)\\ 1\end{pmatrix}.$$

Deren Kreuz-Produkt-Vektor

$$\frac{\partial F}{\partial\varphi}\times\frac{\partial F}{\partial z}=f(z)\begin{pmatrix}cos(\varphi)\\ sin(\varphi)\\ -f'(z)\end{pmatrix}$$

hat die Länge

$$f(z)\cdot\sqrt{1+f'(z)^2}.$$

Damit wird die Oberfläche der Rotationsfläche

$$\int_0^{2\pi}\int_a^b f(z)\sqrt{1+f'(z)^2}dzd\varphi=2\pi\cdot\int_a^b f(z)\sqrt{1+f'(z)^2}dz.$$

Das letzte Integral kann man interpretieren als Bogenintegral $\int f\,ds$ der Funktion f über die rotierende Kurve.

Satz 5.11 (Kugeloberfläche) *Für $n\geq 2$ ist die Oberfläche der Kugel $K_n(R)\subset\mathbb{R}^n$*

$$R^{n-1}o_n\quad mit\quad o_n=n\kappa_n=2\pi\cdot\kappa_{n-2}.$$

Beweis. Die 'obere' Hälfte der Kugeloberfläche ist

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + ... + x_n^2 = R^2,\, x_n > 0\}.$$

Das ist der Graph der Funktion

$$f : K_{n-1}(R) \to \mathbb{R}, \quad f(u_1, ..., u_n) = \sqrt{R^2 - (u_1^2 + ... + u_{n-1}^2)}.$$

Wir berechnen

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} = \frac{-u_i}{\sqrt{R^2 - \parallel \mathbf{u} \parallel^2}}, \quad grad\, f = \frac{-\mathbf{u}}{\sqrt{R^2 - \parallel \mathbf{u} \parallel^2}}, \quad \sqrt{1 + \parallel grad\, f \parallel^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \parallel \frac{\mathbf{u}}{R} \parallel^2}}.$$

Mit Satz 4.16 b) wird die halbe Kugeloberfläche

$$\int_{K_{n-1}(R)} \frac{1}{\sqrt{1 - \parallel \frac{\mathbf{u}}{R} \parallel^2}} = R^{n-1} \int_{K_{n-1}(1)} \frac{1}{\sqrt{1 - \parallel \mathbf{u} \parallel^2}}.$$

Das letzte Integral ist die halbe Oberfläche der Einheitskugel. Bezeichnen wir die Oberfläche der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$ mit o_n, so haben wir bewiesen: Die Oberfläche der Kugel vom Radius R im $\mathbb{R}^n$ ist $R^{n-1} \cdot o_n$.

Es bleibt die Berechnung von

$$\frac{1}{2} o_n = \int_{K_{n-1}(1)} \frac{1}{\sqrt{1 - \parallel \mathbf{u} \parallel^2}} d\mathbf{u} = (n-1)\kappa_{n-1} \int_0^1 \frac{r^{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} dr.$$

(Hier haben wir Satz 4.31 in Dimension $n-1$ benutzt.)

Für $n = 2$ ist

$$\frac{1}{2} o_2 = \kappa_1 \int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} = 2 \cdot arcsin(1) = \pi, \quad o_2 = 2\pi.$$

Das ist bekannt. Für $n = 3$ haben wir

$$\frac{1}{2} o_3 = 2\kappa_2 \int_0^1 \frac{r dr}{\sqrt{1-r^2}} = 2\pi \cdot (-\sqrt{1-r^2})\Big|_0^1 = 2\pi, \quad o_3 = 4\pi.$$

Das ist neu. Für $n \geq 4$ finden wir mit partieller Integration

$$\int_0^1 \frac{r^{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} dr = -\frac{1}{2}\sqrt{1-r^2} \cdot r^{n-3} + \int_0^1 \sqrt{1-r^2} \cdot (n-3) r^{n-4} dr = (n-3) \int_0^1 \sqrt{1-r^2} r^{n-4} dr.$$

Wieder mit Satz 4.32, jetzt aber in Dimension $n-3$, ist

$$(n-3)\kappa_{n-3} \int_0^1 \sqrt{1-r^2} r^{n-4} dr = \int_{K_{n-3}(1)} \sqrt{1 - \parallel u \parallel^2} d\mathbf{u} = \frac{1}{2}\kappa_{n-2},$$

$$(n-3) \int_0^1 \sqrt{1-r^2} r^{n-4} dr = \frac{1}{2} \cdot \frac{\kappa_{n-2}}{\kappa_{n-3}}.$$

Insgesamt erhalten wir mit $\kappa_{n-1} = 2\pi \cdot \kappa_{n-3}/(n-1)$ (Satz 4.32)

$$\frac{1}{2} o_n = (n-1)\kappa_{n-1} \cdot \frac{1}{2} \frac{\kappa_{n-2}}{\kappa_{n-3}}, \quad o_n = (n-1) \frac{\kappa_{n-1}\kappa_{n-2}}{\kappa_{n-3}} = 2\pi\kappa_{n-2} = n\kappa_n.$$

□

Für $n = 0$ und $n = 1$ kann man sich über die Größen o_n streiten. Setzen wir auch hier $o_n = n \cdot \kappa_n$. Dann gilt also für kleine n mit Satz 4.32

n	0	1	2	3	4	5
κ_n	1	2	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{\pi^2}{2}$	$\frac{8\pi^2}{15}$
o_n	0	2	2π	4π	$2\pi^2$	$\frac{8\pi^2}{3}$

Inzwischen ist die Notation etwas schwerfällig geworden. Meistens ist aus dem Zusammenhang klar, welche Parametrisierung eines Flächenstücks wir meinen. Dann kürzen wir die Gramsche Determinante einfach mit $\sqrt{g} = \sqrt{g(\mathbf{u})}$ ab und die Oberfläche des Flächenstücks $X_0 = F(U_0)$ mit

$$O(X_0) = \int_{U_0} \sqrt{g} d\mathbf{u} = \int_{X_0} d^p o.$$

Damit können wir auch das Integral einer Funktion über ein Flächenstück definieren:

Definition 5.23 *Es sei $F : U_0 \to X_0$ ein p-dimensionales Flächenstück und $f : X_0 \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann heißt*

$$\int_{X_0} f\, d^p o := \int_{U_0} f(F(\mathbf{u}))\sqrt{g(\mathbf{u})} d\mathbf{u}$$

das Integral von f über das Flächenstück X_0.

Jetzt ist es höchste Zeit, dass wir uns - genau wie bei Kurven - um die Unabhängigkeit dieses Integrals von der Parametrisierung kümmern.

Satz 5.12 *Das Integral $\int_X f\, d^p o$ ist unabhängig von der Parametrisierung des Flächenstücks X_0.*

Beweis. Es seien $F_1 : U_1 \to X$ und $F_2 : U_2 \to X$ zwei Parametrisierungen des gleichen Flächenstücks X_0. Wie früher sei $F_{2,1} = F_2^{-1} \circ F_1 : U_1 \to U_2$ die Übergangsabbildung. Die zugehörigen Funktionalmatrizen sind

$$F_1'(\mathbf{u}_1) = \left(\frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{u}_1}\right) \quad \text{und} \quad F_2'(\mathbf{u}_2) = \left(\frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{u}_2}\right).$$

Die Kettenregel für Abbildungen (Satz 2.13) zeigt

$$F_1'(\mathbf{u}_1) = (F_2 \circ F_{2,1})'(\mathbf{u}_1) = F_2'(F_{2,1}(\mathbf{u}_1)) \cdot F_{2,1}'(\mathbf{u}_1).$$

Für die Gramschen Matrizen

$$G_1(\mathbf{u}_1) = F_1'(\mathbf{u}_1)^t \cdot F_1'(\mathbf{u}_1) \quad \text{und} \quad G_2(\mathbf{u}_2) = F_2'(\mathbf{u}_2)^t \cdot F_2'(\mathbf{u}_2)$$

folgt daraus

$$G_1(\mathbf{u}_1) = F_{2,1}'(\mathbf{u}_1)^t \cdot G_2(F_{2,1}(\mathbf{u}_1)) \cdot F_{2,1}'(\mathbf{u}_1)$$

und für die Gramschen Determinanten

$$\sqrt{g_1(\mathbf{u}_1)} = \sqrt{g_2(F_{2,1}(\mathbf{u}_1))} \cdot |det F_{2,1}'(\mathbf{u}_1)|.$$

Und mit der Transformationsformel (Satz 4.55) erhalten wir

$$\int f\sqrt{g_1}d\mathbf{u}_1 = \int f\sqrt{g_2\circ F_{2,1}}|detF'_{2,1}|d\mathbf{u}_1 = \int f\sqrt{g_2}d\mathbf{u}_2.$$

□

Eine Fläche X kann man nicht immer durch eine einzige Karte parametrisieren. Deswegen kann man die Integration nicht immer nur auf einer Karte ausführen. Es ist aber legitim, die Fläche X in mehrere Flächenstücke zu zerlegen. Man muss dann schreiben

$$X = \bigcup_{i=1}^{m} X_i,$$

wo $F_i : U_i \to X$ lokale Parametrisierungen sind und

$$F_i|(U_i)_0 : (U_i)_0 \to X_i, \quad (U_i)_0 \subset U_i,$$

Flächenstücke mit Nullmengen

$$F_i^{-1}(X_i \cap X_j) \subset \partial(U_i)_0.$$

Beispiel 5.21 *Den Torus (Beispiel 5.17) kann man global parametrisieren durch*

$$F : U = [0,2\pi]\times[0,2\pi] \ni (u_1,u_2) \mapsto \begin{pmatrix} cos(u_1)\cdot(R+rcos(u_2)) \\ sin(u_1)\cdot(R+rcos(u_2)) \\ rsin(u_2) \end{pmatrix}.$$

Damit ist der Torus aber nicht als ein Flächenstück im Sinn von Definition 5.22 beschrieben und das sogar aus zwei Gründen:

1) *der Parameterbereich ist nicht offen,*

2) *die Parametrisierung ist nicht injektiv.*

Aber wenn man F einschränkt auf die vier Teilquadrate

$$U_1 = [0,\pi]\times[0,\pi], \quad U_2 = [0,\pi]\times[\pi,2\pi], \quad U_3 = [0,\pi]\times[\pi,2\pi], \quad U_4 = [\pi,2\pi]\times[\pi,2\pi],$$

dann hat man eine Zerlegung im oben angegebenen Sinn.

Definition 5.24 *Hat man eine Fläche $X = \bigcup X_i$ wie oben zerlegt in Flächenstücke, dann setzt man*

$$\int_X f\, d^p o := \sum_i \int_{X_i} f\, d^p o.$$

Natürlich muss man sofort zeigen, dass diese Definition unabhängig von der gewählten Zerlegung ist:

Satz 5.13 *Es seien $X = \bigcup X_i = \bigcup Y_j$ zwei Zerlegungen in Flächenstücke. Dann ist*

$$\sum_i \int_{X_i} f\, d^p o = \sum_j \int_{Y_j} f\, d^p o.$$

Beweis. Die Durchschnitte $D_{i,j} := X_i \cap Y_j$ sind Flächenstücke mit

$$\sum_i \int_{X_i} f\, d^p o = \sum_{i,j} \int_{D_{i,j}} f\, d^p o = \sum_j \int_{Y_j} f\, d^p o.$$

□

Aufgabe 5.6 *a) Bestimmen Sie die Flächen der von den Vektoren*

$$\mathbf{v}_1 = (1,0,1), \mathbf{v}_2 = (0,1,1) \quad bzw. \quad \mathbf{w}_1 = (1,0,1), \mathbf{w}_2 = (0,1,-1)$$

aufgespannten Parallelogramme im $\mathbb{R}^3$.
b) Bestimmen Sie die Oberfläche des $(n-1)$-dimensionalen Parallelotops im $\mathbb{R}^n$, das von den Vektoren

$$\mathbf{v}_i := \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{i+1},\ i = 1, ..., n-1,$$

aufgespannt wird.
c) Bestimmen Sie die Oberfläche des n-dimensionalen Parallelotops im $\mathbb{R}^{2n}$, das von den Vektoren

$$\mathbf{v}_i := \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_{2n+1-i},\ i = 1, ..., n,$$

aufgespannt wird.

Aufgabe 5.7 *Es sei $K_2(1)$ die Einheitskreisscheibe im $\mathbb{R}^2$. Die Funktionen $f_i : K_2(1) \to \mathbb{R}$, $i = 1,2,3,$ seien definiert durch*

$$f_1(x,y) = x^2 + y^2, \quad f_2(x,y) = x^2 - y^2, \quad f_3(x,y) = 1 - x^2.$$

Bestimmen Sie jeweils die Oberfläche der Funktionsgraphen.

Aufgabe 5.8 *Es seien $f_i : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $i = 1,2,$ definiert durch*

$$f_1(z) = 1 - \frac{1}{2} z^2, \quad f_2(z) = cosh(z).$$

Bestimmen Sie die Oberflächen der Rotationsflächen im $\mathbb{R}^3$, die entstehen, wenn man die zugehörigen Funktionsgraphen um die z-Achse rotieren lässt.

Aufgabe 5.9 *Die Oberfläche S der Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$ mit den Koordinaten x, y, z werde parametrisiert durch*

$$[0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \ni (\varphi, \theta) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\varphi) cos(\theta) \\ sin(\varphi) cos(\theta) \\ sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie
a) die zugehörige Gramsche Determinante,
b) $\int_S d^2o$, die Kugeloberfläche,
c) $\int_S x d^2 o$, d) $\int_S x^2 d^2 o$.

Aufgabe 5.10 *Zeigen Sie: Die Parametrisierung der Einheitssphäre $S \subset \mathbb{R}^3$ durch*

$$F : U = [-1,1] \times [0,2\pi] \ni (u,\varphi) \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{1-u^2}cos(\varphi) \\ \sqrt{1-u^2}sin(\varphi) \\ u \end{pmatrix}$$

ist flächentreu, d.h., für jede messbare Menge $U_0 \subset U$ ist die Oberfläche von $F(U_0)$ gleich der Fläche $|U_0|$.

Aufgabe 5.11 *Berechnen Sie die Oberfläche des Torus (Beispiel 5.17).*

5.3 Hyperflächen im $\mathbb{R}^n$

Definition 5.25 *Eine* Hyperfläche *im $\mathbb{R}^n$ ist eine Fläche $H \subset \mathbb{R}^n$ der Dimension $p = n-1$.*

Beispiel 5.22 *Jede Kurve im $\mathbb{R}^2$ ist eine solche Hyperfläche. Die Einheitssphäre*

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \| \mathbf{x} \| = 1\}$$

ist eine Hyperfläche im $\mathbb{R}^n$. Das ist ein Spezialfall der folgenden allgemeineren Situation: Es sei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : V \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Die Nullstellenmenge

$$H := \{\mathbf{x} \in V : \ f(\mathbf{x}) = 0\}$$

dieser Funktion ist eine Hyperfläche, wenn $grad\, f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ für alle $\mathbf{x} \in H$.

Der Normalraum $N_{\mathbf{x}}(H)$ an eine Hyperfläche $H \subset \mathbb{R}^n$ in einem jeden Punkt $\mathbf{x} \in H$ hat Dimension 1. Er enthält genau zwei Einheitsvektoren, die sich um das Vorzeichen unterscheiden. Sie heißen die *Normalen-Einheitsvektoren.*

Beispiel 5.23 *Ist $H = \{\mathbf{x} : \ f(\mathbf{x}) = 0\}$ eine Hyperfläche wie in Beispiel 5.22, dann ist*

$$\frac{1}{\| grad\, f(\mathbf{x}) \|} \cdot grad\, f(\mathbf{x})$$

ein Normalen-Einheitsvektor in $N_{\mathbf{x}}(H)$. Sei etwa ganz konkret $n = 3$ und

$$f(x,y,z) := \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$$

mit $a,b,c \neq 0$. Dann ist $\{f \leq 0\}$ ein Ellipsoid und $H = \{f = 0\}$ dessen Oberfläche. Auf H ist

$$grad\, f = \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2}\right) \neq \mathbf{0}.$$

Ein Normalen-Einheitsvektor in $(x,y,z) \in H$ ist

$$\frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}} \cdot \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2}\right).$$

Wir brauchen auch Normalen-Einheitsvektoren, wenn die Hyperfläche H nicht implizit als $H = \{f = 0\}$ gegeben ist, sondern explizit durch Karten $F : U \to V$, $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$. Dazu verallgemeinern wir das Kreuz-Produkt zweier Vektoren im $\mathbb{R}^3$ auf das Vektor-Produkt von $n-1$ Vektoren im $\mathbb{R}^n$.

Definition 5.26 *Es seien $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$. Der Vektor*

$$\mathbf{w} = [\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{n-1}]$$

mit den Koordinaten

$$w_i := (-1)^{i+1} \cdot det_{1,...,\check{i},...,n}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{n-1})$$

heißt das Vektorprodukt *der Vektoren $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{n-1}$.*

Beispiel 5.24 *Der Fall $n = 2$ ist nicht sehr repräsentativ. Hier haben wir nur einen Vektor*

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Sein Vektorprodukt ist

$$[\mathbf{v}] = \begin{pmatrix} det_2(\mathbf{v}) \\ -det_1(\mathbf{v}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix} = D \cdot \mathbf{v},$$

wo D die 2×2-Matrix vor Definition 5.13 ist, welche die Drehung um $\pi/2$ nach rechts beschreibt.

Beispiel 5.25 *Für $n = 3$ ist dieses Vektorprodukt das übliche Kreuzprodukt. Seien etwa*

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \\ v_{1,3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \\ v_{2,3} \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^3.$$

Dann ist

$$[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] = \begin{pmatrix} det_{2,3}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \\ -det_{1,3}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \\ det_{2,3}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{1,2}v_{2,3} - v_{1,3}v_{2,2} \\ v_{1,3}v_{2,1} - v_{1,1}v_{2,3} \\ v_{1,1}v_{2,2} - v_{1,2}v_{2,1} \end{pmatrix} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2.$$

Satz 5.14 (Eigenschaften des Vektorprodukts) *a) Die Länge des Vektorprodukts ist*

$$\| [\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{n-1}] \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(det_{1,...,\check{i},...,n}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{n-1}) \right)^2} = \sqrt{g(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{n-1})},$$

die Gramsche Determinante.
b) Die beiden linearen Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}.[\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{n-1}]) \quad und \quad \mathbf{x} \mapsto det(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{n-1})$$

sind identisch gleich. Insbesondere ist $[\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{n-1}] \neq \mathbf{0}$ genau dann, wenn die Vektoren $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{n-1}$ linear unabhängig sind.
c) Für $i = 1, ..., n-1$ ist

$$(\mathbf{v}_i.[\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{n-1}]) = 0,$$

d.h., das Vektorprodukt steht senkrecht auf allen Vektoren $\mathbf{v}_i$, $i = 1, ..., n-1$.

Beweis a) ist die Lagrange-Identität. b) folgt durch Entwicklung der Determinante nach der ersten Spalte. Und c) folgt aus b). $\square$

Wir betrachten jetzt eine Karte

$$F : U \to H \subset \mathbb{R}^n, \quad U \subset \mathbb{R}^{n-1},$$

auf der Hyperfläche H. In $\mathbf{x} \in H$ ist der Tangentialraum

$$T_{\mathbf{x}}(H) = span\left(\frac{\partial F}{\partial u_1}, ..., \frac{\partial F}{\partial u_{n-1}}\right)$$

und die $n-1$ Tangentialvektoren $\partial F / \partial u_i$ sind linear unabhängig. Mit Satz 5.14 c) ist das Vektorprodukt

$$\left[\frac{\partial F}{\partial u_1}, ..., \frac{\partial F}{\partial u_{n-1}}\right] \neq \mathbf{0}$$

und erzeugt den Normalraum $\mathbf{N}_{\mathbf{x}}(H)$. Daraus folgt

Satz 5.15 *Im Gültigkeitsbereich der Karte F ist das Vektorfeld*

$$\mathbf{N} := \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \left[\frac{\partial F}{\partial u_1}, ..., \frac{\partial F}{\partial u_{n-1}}\right]$$

ein Einheits-Normalen-Vektorfeld.

Jeder Einheits-Normalen-Vektor in $\mathbf{x} \in F(U)$ stimmt mit $\mathbf{N}_{\mathbf{x}}$ überein oder unterscheidet sich davon um das Vorzeichen.

Definition 5.27 *Es seien*

- *$H \subset \mathbb{R}^n$ eine Hyperfläche,*
- *$F : U_0 \to H_0 \subset H$, $U_0 \subset \mathbb{R}^{n-1}$, ein Hyperflächenstück auf H,*
- *$\mathbf{N}$ ein Einheits-Normalen-Feld auf H_0,*
- *$\mathbf{A}$ ein stetiges Vektorfeld auf H_0.*

Dann heißt das Integral

$$\int_{H_0} (\mathbf{A}.\mathbf{N}) d^{n-1} o$$

der Fluss *des Feldes $\mathbf{A}$ über das Hyperflächenstück H_0 in Richtung von $\mathbf{N}$.*

Ist insbesondere $\mathbf{N}$ gegeben wie in Satz 5.15, dann wird dieses Fluss-Integral

$$\int_{H_0} (\mathbf{A}.\mathbf{N}) d^{n-1} o = \int_{U_0} \left(\mathbf{A}.\frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial F}{\partial u_1}, ..., \frac{\partial F}{\partial u_{n-1}}\right]\right) \sqrt{g} d^{n-1} u = \int_{U_0} det\left(\mathbf{A}, \frac{\partial F}{\partial u_1}, ..., \frac{\partial F}{\partial u_{n-1}}\right) d^{n-1} u.$$

Beispiel 5.26 (Funktionsgraph) *Es sei $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, und*

$$F : U \to \mathbb{R}^n, \quad F(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} f(\mathbf{u}) \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}.$$

Dann ist für $i = 1, ..., n-1$

$$\frac{\partial F}{\partial u_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u_i} \\ \mathbf{e}_i \end{pmatrix}$$

und

$$\left(\mathbf{A}, \left[\frac{\partial F}{\partial u_1}, ..., \frac{\partial F}{\partial u_{n-1}}\right]\right) = det \begin{pmatrix} A_1 & \frac{\partial f}{\partial u_1} & ... & \frac{\partial f}{\partial u_{n-1}} \\ A_2 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ A_n & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Entwicklung dieser Determinante nach ihrer ersten Spalte ergibt

$$A_1 - A_2 \frac{\partial f}{\partial u_1} - A_3 \frac{\partial f}{\partial u_2} - ... - A_n \frac{\partial f}{u_{n-1}} = A_1 - ((A_2, ..., A_n).grad\, f)\,.$$

Ist insbesondere $A_2 = ... = A_n = 0$, so wird das Fluss-Integral

$$\int_U A_1 d^{n-1}u.$$

Beispiel 5.27 *Wir betrachten die Einheitssphäre $S = \{\| \mathbf{x} \| = 1\} \subset \mathbb{R}^n$ und das Ortsvektor-Feld $\mathbf{A} = \mathbf{x}$. Ein Einheits-Normalenfeld ist*

$$\mathbf{N} = \mathbf{x}.$$

Das Fluss-Integral dieses Vektorfelds über die Sphäre ist

$$\int_S (\mathbf{x}.\mathbf{x}) d^{n-1}o = \int_S d^{n-1}o = o_n,$$

die Oberfläche der Sphäre.

In jedem Punkt einer Hyperfläche gibt es zwei Normalen-Einheitsvektoren, die sich um das Vorzeichen unterscheiden. Das schafft unerwünschte Komplikationen.

Definition 5.28 *Es seien $F_1 : U \to H$ und $F_2 : V \to H$ zwei Karten auf derselben Hyperfläche H. Dann sind sowohl*

$$\mathbf{N}_1 := \left[\frac{\partial F_1}{\partial u_1}, ..., \frac{\partial F_1}{\partial u_{n-1}}\right] \text{ auf } F_1(U) \quad \text{als auch} \quad \mathbf{N}_2 := \left[\frac{\partial F_2}{\partial v_1}, ..., \frac{\partial F_2}{\partial v_{n-1}}\right] \text{ auf } F_2(V)$$

Normalen-Vektorfelder. Beide erzeugen den Normal-Raum $\mathbf{N}_\mathbf{x}(H)$ in jedem Punkt $\mathbf{x}$ im Durchschnitt $D := F_1(U) \cap F_2(V)$. Deswegen gibt es eine stetige Funktion h auf D mit

$$\mathbf{N}_2(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{N}_1(\mathbf{x}) \quad \text{für alle} \quad \mathbf{x} \in D.$$

(Weil nie $h(\mathbf{x}) = 0$ sein kann, ist für zusammenhängendes D entweder immer $h(\mathbf{x}) > 0$ oder immer $h(\mathbf{x}) < 0$.) Man sagt, die beiden Karten überlappen orientierungs-erhaltend, wenn stets $h(\mathbf{x}) > 0$. In diesem Fall stimmen die beiden Normalen-Einheits-Vektorfelder

$$\frac{1}{\parallel \mathbf{N}_1 \parallel}\mathbf{N}_1 \quad und \quad \frac{1}{\parallel \mathbf{N}_2 \parallel}\mathbf{N}_2$$

überein.

Wenn zwei Karten orientierungs-erhaltend überlappen, dann sind auf deren gemeinsamem Geltungsbereich für jedes Vektorfeld die beiden Fluss-Integrale gleich. Andernfalls unterscheiden sie sich um das Vorzeichen.

Satz 5.16 (Kriterium für orientierungserhaltendes Überlappen) *Es seien $F_1 : U \to H$ und $F_2 : V \to H$ zwei Karten auf derselben Hyperfläche H mit Überlappungsmenge $D : F(U) \cap F(V)$ und Übergangsabbildung*

$$F_{2,1} = F_2^{-1} \circ F_1 : F_1^{-1}(D) \to F_2^{-1}(D).$$

Beide Karten überlappen genau dann orientierungserhaltend, wenn für alle $\mathbf{u} \in F_1^{-1}(D)$ gilt

$$det F'_{2,1}(\mathbf{u}) > 0.$$

Beweis. Wegen $F_1 = F_2 \circ F_{2,1}$ folgt aus der Kettenregel

$$\underbrace{F'_1(\mathbf{u})}_{n\times n-1} = \underbrace{F'_2(F_{2,1}(\mathbf{u}))}_{n\times n-1} \cdot \underbrace{F'_{2,1}(\mathbf{u})}_{n-1\times n-1}.$$

Für die $n-1\times n-1$-Unterdeteminanten dieser Matrizen ist nach dem Determinantenmultiplikationssatz

$$det_{1,\ldots,\check{i},\ldots,n}(F'_1(\mathbf{u})) = det_{1,\ldots,\check{i},\ldots,n}(F'_2(F_{2,1}(\mathbf{u})) \cdot det(F'_{2,1}(\mathbf{u})).$$

Daraus folgt für die Vektorprodukte

$$\mathbf{N}_1 = \left[\frac{\partial F_1}{\partial u_1}, ..., \frac{\partial F_1}{\partial u_{n-1}}\right] = \left[\frac{\partial F_2}{\partial v_1}, ..., \frac{\partial F_2}{\partial v_{n-1}}\right] \cdot det(F'_{2,1}) = \mathbf{N}_2 \cdot det(F'_{2,1}),$$

und damit die Behauptung. □

Definition 5.29 *Eine* Orientierung *der Hyperfläche H wird definiert durch eine Überdeckung $H = \bigcup H_i$ mit Karten $F_i : U_i \to H$, so, dass je zwei Karten F_i und F_j orientierungserhaltend überlappen. Die Orientierung ist das zugehörige Einheits-Normalen-Feld. Die Hyperfläche H heißt* orientierbar, *wenn es eine solche Orientierung gibt. Die orientierbare Hyperfläche H heißt* orientiert, *wenn sie mit einer der beiden möglichen Orientierungen versehen ist.*

Beispiel 5.28 *Ist $H \subset \mathbb{R}^n$ eine Hyperfläche und* $\mathbf{N}$ *ein* stetiges *Normalen-Einheits-Vektorfeld, so definiert dieses Feld eine Orientierung von H.*

Beispiel 5.29 (Möbiusband) *Das Möbiusband im* $\mathbb{R}^3$ *wird parametrisiert durch*

$$F(u,v) := \begin{pmatrix} cos(u) \\ sin(u) \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} sin(u/2) \cdot cos(u) \\ sin(u/2) \cdot cos(u) \\ cos(u/2) \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{c} 0 \leq u \leq 2\pi, \\ -1 < v < 1. \end{array}$$

Es entsteht, indem man das v-Intervall $]-1,1[$ *mit seinem Mittelpunkt auf dem Einheitskreis herumführt und und gleichzeitig um* 180^o *dreht. Nach einem Umlauf hat sich die Orientierung umgedreht. Das kann man auch nachrechnen. Dazu berechenen wir ein Normalen-Einheits-Vektorfeld auf der Kurve* $v = 0$*:*

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,0) = \begin{pmatrix} -sin(u) \\ cos(u) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial F}{\partial v}(u,0) = \begin{pmatrix} sin(u/2) \cdot cos(u) \\ sin(u/2) \cdot sin(u) \\ cos(u/2) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{N}(u,0) = \frac{\partial F}{\partial u}(u,0) \times \frac{\partial F}{\partial v}(u,0) = \begin{pmatrix} cos(u/2) \cdot cos(u) \\ cos(u/2) \cdot sin(u) \\ -sin(u/2) \end{pmatrix}.$$

Das Resultat ist ein Einheits-Normalen-Feld, aber mit der Eigenschaft

$$\mathbf{N}(u + 2\pi, 0) = -\mathbf{N}(u,0).$$

Das Möbiusband ist nicht *orientierbar.*

Das Fluss-Integral eines Vektorfeldes $\mathbf{A}$ über eine ganze Hyperfläche H wird wie üblich definiert als die Summe der Integrale über endlich viele Hyperflächenstücke $H_i \subset H$, die ganz H überdecken, und die sich gegenseitig nur in Nullmengen (bezüglich ihrer jeweiligen Karten) schneiden. Die Normalen-Einheits-Vektorfelder, definiert durch die jeweiligen Karten, müssen in den Durchschnitten übereinstimmen. Das geht nur, wenn die Hyperfläche H orientierbar ist! Wenn H das nicht ist, dann ist das Fluss-Integral nicht sinnvoll definierbar.

Wichtige orientierbare Hyperflächen sind Ränder von Volumina.

Definition 5.30 *Ein Volumen* $X \subset \mathbb{R}^n$ *ist nichts anderes als eine kompakte Menge. Der Rand* ∂X *(Definition 1.6) ist dann auch kompakt. Man sagt, das Volumen* X *hat glatten Rand, wenn zu jedem* $\mathbf{x} \in \partial X$ *eine offene Umgebung* $V_{\mathbf{x}} \subset \mathbb{R}^n$ *und eine* C^1*-Funktion* $f_{\mathbf{x}} : V_{\mathbf{x}} \to \mathbb{R}$ *existieren so, dass*

- $X \cap V_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{y} \in V_{\mathbf{x}} : \ f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) \leq 0\}$,
- $grad\, f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) \neq \mathbf{0}$ *für alle* $\mathbf{y} \in \partial X \cap V_{\mathbf{x}}$.

Nach Satz 5.6 c) ist der Rand ∂X eines Volumens X mit glattem Rand eine Hyperfläche.

Beispiel 5.30 *Es sei* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *eine* C^1*-Funktion und* $c \in \mathbb{R}$ *so, dass die Menge*

$$X_c := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \ f(\mathbf{x}) \leq c\} \subset \mathbb{R}^n$$

kompakt ist. Der Rand ∂X_c *ist dann enthalten in der Niveau-Menge*

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \ f(\mathbf{x}) = c\}.$$

Dieser Rand ist glatt, wenn $grad\, f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ *für alle* $\mathbf{x} \in \partial X_c$.

Bekannte einfache Beispiele sind die Kugel vom Radius $r > 0$*, hier ist*

$$f(\mathbf{x}) = \| \mathbf{x} \|^2, \quad c = r^2,$$

und das Innere des Torus (Beispiel 5.17), wo

$$f(x,y,z) = (\sqrt{x^2+y^2} - R^2)^2 + z^2, \quad c = r^2.$$

Satz 5.17 *Der Rand eines Volumens* $X \subset \mathbb{R}^n$ *mit glattem Rand ist eine orientierbare Hyperfläche.*

Beweis. Es sei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $X \cap V = \{\mathbf{y} \in V : f(\mathbf{y}) \leq 0\}$ wie in Definition 5.30. Auf $\partial X \cap V$ definieren wir das stetige Feld von Einheits-Normalenvektoren

$$\mathbf{N} := \frac{1}{\| grad\, f \|} \cdot grad\, f.$$

Ist $\mathbf{x} \in \partial X \cap V$, so ist die Richtungsableitung von f in Richtung $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ mit Satz 2.3

$$\partial_{\mathbf{N}} f = (grad\, f.\mathbf{N}) = \frac{1}{\| grad\, f \|}(grad\, f.grad\, f) = \| grad\, f \| > 0.$$

Daraus folgt: Es gibt ein $\epsilon > 0$ so, dass

$$f(\mathbf{x} + t \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x})) > 0 \text{ für } 0 < t < \epsilon$$

und

$$f(\mathbf{x} + t \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x})) < 0 \text{ für } -\epsilon < t < 0.$$

Für $0 < t < \epsilon$ gehört also $\mathbf{x} + t \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x})$ nicht zu X, während diese Punkte für $-\epsilon < t < 0$ zu X gehören. Diese Eigenschaft ist unabhängig von der Wahl von V und der Funktion f. Das Feld $\mathbf{N}$ ist dasselbe auf zwei überlappenden Karten von ∂X. □

Definition 5.31 *Das Feld* $\mathbf{N}$ *aus dem Beweis von Satz 5.17 heißt das* nach außen weisende *Normalen-Einheits-Vektorfeld. Das Feld* $-\mathbf{N}$ *heißt das* nach innen weisende *Feld. Es sei* X *ein Volumen mit glattem Rand und* $\mathbf{N}$ *das nach außen weisende Normalen-Einheitsfeld auf* ∂X*. Ist das Vektorfeld* $\mathbf{A}$ *stetig auf* ∂X*, so heißt das Fluss-Integral*

$$\int_{\partial X} (\mathbf{A}.\mathbf{N}) d^{n-1} o$$

der Fluss des Feldes aus X *nach außen.*

Nicht alle Volumina haben einen glatten Rand. Manchmal ist der Rand aber noch stückweise glatt.

Beispiel 5.31 (Quader) *Ein Quader* $Q \subset \mathbb{R}^n$ *ist eine Menge*

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : a_\nu \leq x_\nu \leq b_\nu, \nu = 1, ..., n\} \quad mit \quad a_\nu < b_\nu \text{ } für\ \nu = 1, ..., n.$$

Der Rand ∂Q *des Quaders besteht aus den* $2n$ *Hyperflächen-Stücken*

$$H_\nu^+ := \{\mathbf{x} \in Q : x_\nu = b_\nu\} \text{ } und \text{ } H_\nu^- := \{\mathbf{x} \in Q : x_\nu = a_\nu\}, \quad \nu = 1, ..., n.$$

Ein nach außen weisendes Einheits-Normalenfeld auf H_ν^+ wird definiert durch $\mathbf{N} = \mathbf{e}_\nu$, auf H_ν^- durch $-\mathbf{e}_\nu$. Dieses Feld $\mathbf{N}$ ist nicht mehr stetig auf ∂Q. Auf den Kanten des Quaders ändert es seine Richtung. Trotzdem ist für jedes stetige Vektorfeld $\mathbf{A}$ auf Q der Fluss nach außen immer noch sinnvoll definiert durch

$$\int_{\partial Q} (\mathbf{A}.\mathbf{N}) d^{n-1}o := \sum_{\nu=1}^{n} \int_{H_\nu^+} (\mathbf{A}.\mathbf{e}_\nu) d^{n-1}o - \int_{H_\nu^-} (\mathbf{A}.\mathbf{e}_\nu) d^{n-1}o.$$

Satz 5.18 (Satz von Gauß für Quader) *Das Vektorfeld $\mathbf{A}$ sei stetig differenzierbar auf einer offenen Menge, die den Quader Q aus Beispiel 5.31 enthält. Dann gilt*

$$\int_{\partial Q} (\mathbf{A}.\mathbf{N}) d^{n-1}o = \int_Q div(\mathbf{A}) d\mathbf{x}.$$

Beweis. Wir erinnern uns:

$$div(\mathbf{A}) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu}.$$

Für jeden dieser n Summanden berechnen wir das Volumen-Integral

$$\int_Q \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu} d\mathbf{x},$$

indem wir zuerst in x_ν-Richtung integrieren. Nach Fubini ist das Resultat ja unabhängig von der Integrationsreihenfolge. Wir erhalten

$$\int_{a_1}^{b_1} ... \int_{a_{\nu-1}}^{b_{\nu-1}} \int_{a_{\nu+1}}^{b_{\nu+1}} ... \int_{a_n}^{b_n} \left(\int_{a_\nu}^{b_\nu} \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu} dx_\nu \right) dx_n ... dx_{\nu+1} dx_{\nu-1} ... dx_1.$$

Das innere Integral ist mit dem HDI leicht auszuwerten. Es ist

$$A_\nu(x_1, ..., x_{\nu-1}, b_\nu, x_{\nu+1}, ..., x_n) - A_\nu(x_1, ..., x_{\nu-1}, a_\nu, x_{\nu+1}, ..., x_n).$$

Mit der Notation aus Beispiel 5.31 ist das gesamte Integral

$$\int_{H_\nu^+} (\mathbf{A}.\mathbf{e}_\nu) d^{n-1}o - \int_{H_\nu^-} (\mathbf{A}.\mathbf{e}_\nu) d^{n-1}o = \int_{H_\nu^+} (\mathbf{A}.\mathbf{N}) d^{n-1}o + \int_{H_\nu^-} (\mathbf{A}.\mathbf{N}) d^{n-1}o.$$

Die behauptete Formel ergibt sich durch Addition dieser Integrale für $\nu = 1, ..., n$. □

Im nächsten Paragraphen müssen wir Satz 5.18 verallgemeinern auf Volumina, deren Rand lokal so aussieht, wie der Rand eines Quaders. Solche Volumina werde ich Volumina mit stückweise glattem Rand nennen.

Definition 5.32 *Eine kompakte Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ heißt* Volumen mit stückweise glattem Rand, *wenn zu jedem $\mathbf{x} \in \partial X$ eine offene Umgebung V von $\mathbf{x}$ und lokale Koordinaten $g_1, ..., g_n$ auf V existieren, sowie eine Zahl $r \leq n$ derart, dass*

$$g_1(\mathbf{x}) = 0, ..., g_r(\mathbf{x}) = 0$$

und

$$X \cap V = \{\mathbf{y} \in V : g_1(\mathbf{y}) \leq 0, ..., g_r(\mathbf{y}) \leq 0\}.$$

Wenn hier $r = 0$ gewesen sein sollte, dann ist die Bedingung aus Definition 5.32 überhaupt keine Bedingung für $X \cap V$. Es ist $X \cap V = V$. Mit $\mathbf{x}$ gehört auch die ganze offene Menge V zu X. Dann kann $\mathbf{x}$ kein Randpunkt von X gewesen sein. In Definition 5.32 ist als immer $r \geq 1$.

Wenn $r = 1$ gewesen sein sollte, dann ist $\partial X \cap V$ die Menge $\{\mathbf{y} \in V : g_1(\mathbf{y}) = 0\}$. Das ist eine Hyperfläche in V. Wir sagen: Der Rand von X ist in $\mathbf{x}$ glatt und $\mathbf{x}$ ist ein glatter Randpunkt von X. Nach dieser Definition ist auch jeder Randpunkt $\mathbf{y} \in \partial X \cap V$ glatt, wenn eine einzige der Ungleichungen $g_i(\mathbf{y}) \leq 0$ eine Gleichung ist, und die anderen Ungleichungen strikt sind.

Satz 5.19 *Ob der Randpunkt $\mathbf{x} \in \partial X$ glatt ist, das ist unabhängig von der Wahl der offenen Umgebung V und der Wahl der lokalen Koordinaten $g_1, ..., g_n$ auf V.*

Beweis. Es seien V, V' offene Umgebungen von $\mathbf{x}$ und $g_1, ..., g_n$, bzw. $g'_1, ..., g'_n$ lokale Koordinaten auf V bzw. V' mit

$$X \cap V = \{\mathbf{y} \in V : g_1(\mathbf{y}) \leq 0\}, \quad X \cap V' = \{\mathbf{y} \in V' : g'_1(\mathbf{y}) \leq 0, ..., g'_r(\mathbf{y}) \leq 0\}.$$

Nachdem wir zu $V \cap V'$ übergehen, können wir o.B.d.A. annehmen, dass $V = V'$ ist. Wir betrachten die Funktionen $g'_1, ..., g'_r$ unter der Nebenbedingung $g_1 = 0$. Weil die Menge

$$\{\mathbf{y} \in V : g_1(\mathbf{y}) = 0\}$$

zu X gehört, ist für alle $\mathbf{y} \in V$, die der Nebenbedingung $g_1(\mathbf{y}) = 0$ genügen

$$g'_1(\mathbf{y}) \leq 0, ..., g'_r(\mathbf{y}) \leq 0.$$

Weil außerdem $g'_1(\mathbf{x}) = ... = g'_r(\mathbf{x}) = 0$ ist, haben die Funktionen $g'_1, ..., g'_r$ bei $\mathbf{x}$ ein lokales Extremun unter der Nebenbedingung $g_1 = 0$. Aus Satz 2.24 folgt

$$grad\, g'_1(\mathbf{x}) = \lambda_1 \cdot grad\, g_1(\mathbf{x}), ..., grad\, g'_r(\mathbf{x}) = \lambda_r \cdot grad\, g_1(\mathbf{x}).$$

Weil $g'_1, ..., g'_n$ lokale Koordinaten sind, ist

$$Rang(grad\, g'_1(\mathbf{x}), ..., grad\, g'_n(\mathbf{x})) = n$$

maximal. Dann muss

$$Rang(grad\, g'_1(\mathbf{x}), ..., g'_r(\mathbf{x})) = r$$

sein. Alle diese Gradienten sind aber Vielfache von $grad\, g_1(\mathbf{x})$. Daraus folgt $r = 1$. Also ist $\mathbf{x}$ auch glatter Randpunkt bezüglich der lokalen Koordinaten $g'_1, ..., g'_n$. □

Mit den lokalen Koordinaten $g_1, ..., g_n$ kann man Integrale über X und über ∂X in Integrale über geradlinige Koordinaten transformieren. Dazu betrachten wir den Diffeomorphismus

$$G = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} : V \to U \subset \mathbb{R}^n$$

und die (stetig differenzierbare) Umkehrabbildung $F : U \to V$. Dann ist

$$G(X \cap V) = Q \cap U \quad \text{und} \quad F(Q \cap U) = X \cap V$$

mit

$$Q = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n : u_1 \leq 0, ..., u_r \leq 0\}.$$

Mit der Integral-Transformationsformel transformiert man für eine stetige Funktion f auf $X \cap V$ das Volumenintegral über $X \cap V$ vermöge

$$\int_{X \cap V} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{Q \cap U} f(F(\mathbf{u})) |det F'(\mathbf{u})| d\mathbf{u}.$$

Komplizierter ist die Transformation des Fluss-Integrals über den Rand von X.

Dazu fixieren wir ν, $1 \leq \nu \leq r$, und betrachten die Hyperfläche

$$H_\nu = \{\mathbf{y} \in V : g_\nu(\mathbf{y}) = 0\}.$$

Unter G wird sie abgebildet in die Hyperfläche

$$K_\nu = \{\mathbf{u} \in U : u_\nu = 0\}.$$

Auf H_ν ist das Vektorprodukt

$$\left[\frac{\partial F}{\partial u_1}, ..., \frac{\check{\partial F}}{\partial u_\nu}, ..., \frac{\partial F}{\partial u_n}\right]$$

ein Normalenfeld. Ist $\mathbf{N}$ das zugehörige Normalen-Einheitsvektorfeld, so transformiert sich das Fluss-Integral vermöge

$$\int_{H_\nu} (\mathbf{A}.\mathbf{N}) d^{n-1}o = \int_{K_\nu} det\left(\mathbf{A}, \frac{\partial F}{\partial u_1}, ..., \frac{\check{\partial F}}{\partial u_\nu}, ..., \frac{\partial F}{\partial u_n}\right) d^{n-1}u.$$

Das Problem dabei ist vor allem, dass das so definierte Normalenfeld nicht immer nach außen weist:

Satz 5.20 *In der soeben präzisierten Situation ist*

$$\frac{(-1)^{\nu+1}}{det F'}\left[\frac{\partial F}{\partial u_1}, ..., \frac{\check{\partial F}}{\partial u_\nu}, ..., \frac{\partial F}{\partial u_n}\right]$$

ein nach außen weisendes Normalenfeld.

Beweis. Das Vektorfeld $grad\, g_\nu$ auf H_ν weist nach außen. Dieser Vektor ist der ν-te Zeilenvektor in der Funktionalmatrix $G'(\mathbf{y})$, $\mathbf{y} \in H_\nu$. Mit $\mathbf{u} = G(\mathbf{y})$ ist $G'(\mathbf{y}) = (F'(\mathbf{u}))^{-1}$. Wir verwenden die Beschreibung der inversen Matrix aus der Linearen Algebra

$$(F'(\mathbf{u}))^{-1} = \frac{1}{det(F'(\mathbf{u}))} \cdot (F'(\mathbf{u}))^{adj}$$

mit der adjungierten Matrix

$$(F'(\mathbf{u}))^{adj} = \left((-1)^{k+l} det_k^l F'(\mathbf{u})\right)^t.$$

Hier bedeutet det_k^l die Streichungsdeterminante zur k-ten Zeile und der l-ten Spalte. Damit wird $grad\, g_\nu(\mathbf{y})$ der Vektor

$$\frac{1}{det F'(\mathbf{u})}\left((-1)^{k+\nu} det_k^\nu F'(\mathbf{u})\right)_{k=1,...,n} = \frac{(-1)^{\nu+1}}{det F'(\mathbf{u})}\left((-1)^{k+1} det_k^\nu F'(\mathbf{u})\right)_{k=1,...,n} =$$

$$= \frac{(-1)^{\nu+1}}{detF'(\mathbf{u})} \left[\frac{\partial F}{\partial u_1}, ..., \frac{\check{\partial F}}{\partial u_\nu}, ..., \frac{\partial F}{\partial u_n} \right]. \qquad \square$$

Um den Fluss eines stetigen Vektorfeldes über den Rand eines globalen Volumens mit stückweise glattem Rand zu definieren, muss man diesen Rand aus (glatten) Hyperflächenstücken zusammensetzen. Es ist klar, wie das gehen muss: Ist V eine offene Menge wie in Definition 5.32, so ist $\partial X \cap V$ die Vereinigung der Mengen

$$H_1 = \{\mathbf{y} \in V : \; g_1(\mathbf{y}) = 0, g_2(\mathbf{y}) \leq 0, ..., g_r(\mathbf{y}) \leq 0\},$$

$$\vdots$$

$$H_r := \{\mathbf{y} \in V : \; g_1(\mathbf{y}) \leq 0, ..., g_{r-1}(\mathbf{y}) \leq 0, g_r(\mathbf{y}) = 0\}.$$

Wenn diese Mengen kompakt wären, dann wären sie Hyperflächenstücke, und wir könnten das Fluss-Integral darüber bilden. Aber am Rand von V hören diese Mengen auf kompakt zu sein. Das kann man irgenwie reparieren. Aber dann muss man all diese Hyperflächenstücke zusammensetzen, um den ganzen Rand von X zu erhalten. Das ist technisch schon sehr aufwendig. Und der zusammengestückelte Beweis des Satzes von Gauß ist schier unmöglich. Deswegen werde ich im nächsten Paragraphen eine neue Technologie einführen. Ich werde den Rand und alle vorkommenden Integrale nicht zusammenstückeln, sondern aufweichen.

Aufgabe 5.12 *Es sei* $X \subset \mathbb{R}^3$ *das Volumen*

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \; x_1^2 + x_2^2 \leq 4, \; 0 \leq x_3 \leq 3\}.$$

Weiter sei das Vektorfeld

$$\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}) = (4x_1, -2x_2^2, x_3^2)$$

gegeben. Berechnen Sie (ohne den Satz von Gauß)
a) $\int_X div(\mathbf{A}) d\mathbf{x}$,
b) den Fluss des Feldes $\mathbf{A}$ *aus* X *nach außen.*

Aufgabe 5.13 *Es sei*

$$S^+ := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2, \; x_3 \geq 0\}$$

die nördliche Halbkugelfläche vom Radius r*. Sie sei orientiert durch das Normalenfeld* $\mathbf{N} = \mathbf{x}$*. Weiter sei*

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (cos(2\pi t), sin(2\pi t), 0)$$

eine Parametrisierung für den Rand des Flächenstücks S^+*. Das Vektorfeld* $\mathbf{A}$ *sei gegeben durch*

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) := (x_2, \; x_1(1 - 2x_3), \; -x_1 x_2).$$

Berechnen Sie (ohne den Satz von Stokes)
a) $\int_f (\mathbf{A}.ds)$,
b) $\int_{S^+} (rot(\mathbf{A}).\mathbf{N}) do$.

Aufgabe 5.14 *Der Volltorus im* $\mathbb{R}^3$ *ist das Volumen*

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 - r^2 \leq 0\}.$$

Seine Oberfläche ist die Torus-Fläche aus Beispiel 5.17.
a) Zeigen Sie (etwa mit dem Cavalierischen Prinzip): dieser Volltorus hat das Volumen $2\pi^2 \cdot r^2 R$.
b) Zeigen Sie: die Torusoberfläche wird parametrisiert durch

$$\begin{aligned} x &= (R + rcos(\theta))cos(\varphi), \\ y &= (R + rcos(\theta))sin(\varphi), \\ z &= rsin(\theta), \end{aligned}$$

wo $0 \leq \varphi, \theta \leq 2\pi$.
c) Es sei $\mathbf{N}$ *das durch die Parametrisierung definierte Normalenfeld auf der Torusoberfläche. Zeigen Sie: Dieses Normalenfeld weist nach außen.*
d) Zeigen Sie: für das Ortsvektorfeld $\mathbf{A} = \mathbf{x}$ *ist*

$$(\mathbf{A}.\mathbf{N}) = 2r^2 R \cdot (1 + cos^2(\theta)).$$

e) Berechnen Sie (ohne den Satz von Gauß) den Fuss des Feldes $\mathbf{A}$ *aus dem Torusvolumen nach außen, und verifizieren Sie damit den Satz von Gauß für das Feld* $\mathbf{A}$ *auf dem Volltorus.*

Aufgabe 5.15 *Betrachtet werde der Quader*

$$Q = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : a_1 \leq x_1 \leq b_1, ..., a_n \leq x_n \leq b_n\} \subset \mathbb{R}^n$$

und das Vektorfeld

$$\mathbf{A} = (x_1^2, ..., x_n^2).$$

Zeigen Sie:

$$\int_{\partial Q} (\mathbf{A}.\mathbf{N}) d^{n-1}o = (a_1 + b_1 + ... + a_n + b_n) \cdot |Q|.$$

Aufgabe 5.16 *Es sei* $H \subset \mathbb{R}^n$ *eine Hyperfläche. Es gebe zwei Karten* $F_i : U_i \to H$, $i = 1, 2$, *mit* $H = F_1(U_1) \cup F_2(U_2)$. *Der Durchschnitt* $F_1(U_1) \cap F_2(U_2)$ *sei zusammenhängend. Zeigen Sie: H ist orientierbar.*

Aufgabe 5.17 *a) Berechnen Sie das Vektorprodukt*

$$\left[\frac{\partial F}{\partial u_1}, ..., \frac{\partial F}{\partial u_n}\right]$$

in der Situation von Beispiel 5.26. Was ergibt sich insbesondere für das Paraboloid:

$$n = 2, \quad f(u_1, u_2) = \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2)\,?$$

b) Das Paraboloid P sei mit der Orientierung aus a) versehen. Berechnen Sie den Fluss des Feldes
$\mathbf{A} := (x, \mathbf{u})$ *durch das Stück von P über dem Einheitskreis* $\{u_1^2 + u_2^2 \leq 1\}$,
$\mathbf{B} := (x, u_1^m, u_2^n)$, $m, n \in \mathbb{N}$, *durch das Stück von P über dem Einheitsquadrat*

$$\{0 \leq u_1 \leq 1,\ 0 \leq u_2 \leq 1\}.$$

5.4 Der Integralsatz von Gauß

Die Zerlegung einer Hyperfläche in Hyperflächenstücke ist die wesentliche Technik, um das Integral tatsächlich zu berechnen. Für theoretische Beweise ist sie ziemlich unhandlich. Hierzu möchte ich eine neue Technologie einführen:

Es gibt eine C^∞-Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

1) $0 \leq g \leq 1$,
2) $g|]-\infty, 0] \equiv 0$,
3) $g|[1, \infty[\equiv 1$.

Dazu betrachten wir zunächst die C^∞-Funktion

$$g_1 : \mathbb{R} \to [0,1], \quad g_1(x) := \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ e^{-1/x} & (x > 0) \end{cases}$$

Die C^∞-Funktion $g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g_2(x) := 1 - e \cdot g_1(x)$$

hat die Eigenschaften

- $g_2(x) = 1$ für $x \leq 0$,
- $0 \leq g_2(x) \leq 1$ für $0 \leq x \leq 1$,
- $-e \leq g_2(x) \leq 0$ für $x \geq 1$.

Die C^∞-Funktion $g_3 := g_1(g_2(x))$ erfüllt deswegen

- $g_3(x) = 1/e$ für $x \leq 0$,
- $0 \leq g_3(x) \leq 1/e$ für $0 \leq x \leq 1$,
- $g_3(x) = 0$ für $x \geq 1$.

Die Funktion g definiert durch

$$g(x) := 1 - e \cdot g_3(x)$$

schließlich hat die Eigenschaften 1),2),3).

Satz 5.21 *Es seien $0 < r < R$ gegeben. Wir betrachten die offenen Kugeln*

$$K(r) \subset K(R) \subset \mathbb{R}^n$$

um den Nullpunkt $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$. Dann gibt es eine C^∞-Funktion $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

1) $0 \leq h \leq 1$,

2) $h|B_r \equiv 1$,

3) $h|(\mathbb{R}^n \setminus B_R) \equiv 0$.

Beweis. Eine derartige Funktion wird definiert durch

$$h(\mathbf{x}) := 1 - g\left(\frac{\| \mathbf{x} \| - r}{R - r}\right).$$

□

So, jetzt beginnen mich die (Unterlassungs-) Sünden meiner Vergangenheit einzuholen. In 1.2 habe ich definiert, was offene und abgeschlossene Mengen $X \subset \mathbb{R}^n$ sind. Auch was der Rand ∂X einer Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ ist, habe ich dort definiert. Was der Abschluss $\bar{X}$ einer Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ ist, habe ich dort aber nicht definiert. Auch ohne ihn war es bis jetzt ganz schön.

Definition 5.33 *Der Abschluss $\bar{X}$ einer Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ ist die Menge $X \cup \partial X$.*

Satz 5.22 *Der Abschluss $\bar{X}$ von X ist die kleinste abgeschlossene Menge des $\mathbb{R}^n$, welche X enthält.*

Beweis. a) Die Menge $\bar{X} = X \cup \partial X$ ist abgeschlossen: Für $Y := \mathbb{R}^n \setminus X$ ist $\partial Y = \partial X$. Zu zeigen ist, dass $Y \setminus \partial Y$ offen ist. Sei also $\mathbf{y} \in Y \setminus \partial Y$ beliebig. Wenn wir zeigen können, es gibt eine offene Kugel $K_r(\mathbf{y})$ um $\mathbf{y}$ mit Radius $r > 0$, die ganz in $Y \setminus \partial Y$ enthalten ist, dann sind wir fertig. Andernfalls gäbe es aber in jeder Kugel $K_r(\mathbf{y})$ eine Punkt $\mathbf{x} \in X \cup \partial X$. Dann gibt es in der Kugel auch einen Punkt $\mathbf{x} \in X$. Das würde $\mathbf{y} \in X \cup \partial X$ bedeuten. Das ist aber gerade ausgeschlossen.

b) Es ist zu zeigen: Jede abgeschlossen Menge $A \subset \mathbb{R}^n$, welche X enthält, enthält auch $\bar{X}$, d.h., auch den Rand ∂X. Nun ist $U := \mathbb{R}^n \setminus A$ offen. Falls $\partial X \subset A$ nicht gelten würde, dann gäbe es einen Punkt $\mathbf{y} \in U$, der zu ∂X gehört. Wegen der Offenheit von U geht das nicht. □

Definition 5.34 *Es sei $X \subset \mathbb{R}^n$ und $f : X \to \mathbb{R}$. Der* Träger *supp(f) von f ist der Abschluss der Menge*

$$\{\mathbf{x} \in X : f(\mathbf{x}) \neq 0\}.$$

Satz 5.23 *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ von Klasse C^k mit supp$(f) \subset U$ kompakt. Dann ist die Funktion $\bar{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch*

$$\bar{f}(\mathbf{x}) := \begin{cases} f(\mathbf{x}) & (\mathbf{x} \in U) \\ 0 & (\mathbf{x} \notin U) \end{cases}$$

auch wieder von Klasse C^k.

Beweis. Nur für $\mathbf{x} \in \partial U$ ist es nicht ganz trivial, dass $\bar{f}$ bei $\mathbf{x}$ k-mal stetig differenzierbar ist. Aber wegen $U \cap \partial U = \emptyset$ ist $\mathbf{x} \notin K :=$ *supp*$(f) \subset U$. Dann gibt es eine offene Kugel B um $\mathbf{x}$ mit $B \cap K = \emptyset$. Auf B ist $\bar{f}$ die Null-Funktion und damit unendlich oft differenzierbar. □

Satz 5.24 *Es seien $K \subset U \subset \mathbb{R}^n$ mit K kompakt und U offen. Dann gibt es eine C^∞-Funktion $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit*

1) $0 \leq h \leq 1$,

2) $h(\mathbf{x}) = 1$ *für alle* $\mathbf{x} \in K$,

3) der Träger supp(h) ist kompakt und in U enthalten.

Beweis. Zu jedem $\mathbf{x} \in K$ gibt es eine Kugel $B_r(\mathbf{x})$ um $\mathbf{x}$ von einem Radius $r > 0$ mit Abschluss $\bar{B}_{2r}(\mathbf{x}) \in U$. Weil K kompakt ist, wird es durch endlich viele derartige Kugeln $B_{r_i}(\mathbf{x}_i)$ überdeckt. Nach Satz 5.24 gibt es für jedes i eine C^∞-Funktion $h_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

1) $0 \leq h_i \leq 1$,
2) $h_i | B_{r_i}(\mathbf{x}_i) \equiv 1$,
3) $supp(h_i) \subset \bar{B}_{r_i}(\mathbf{x}_i)$.

Die Funktion $f := \sum_i h_i$ hat dann die Eigenschaft 3) der Behauptung. Weiter ist $f(\mathbf{x}) \geq 1$ für alle $\mathbf{x} \in K$. Ist g die Funktion vom Beginn dieses Abschnitts 5.4, so hat $g \circ f$ zusätzlich die Eigenschaften 1) und 2) der Behauptung. $\square$

Satz 5.25 (Folgerung) *Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, enthalten in der Vereinigung $\bigcup_1^m U_i$ endlich vieler offener Mengen $U_i \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist $K = \bigcup_1^m K_i$ Vereinigung kompakter Mengen $K_i \subset K$ mit $K_i \subset U_i$.*

Beweis (Induktion nach m). Für $m = 1$ ist nichts zu zeigen. Wir beweisen die Behauptung für $m = 2$: Die Menge $K' := K \setminus U_2$ ist kompakt und es ist $K' \subset U_1$. Nach Satz 5.24 gibt es eine stetige Funktion $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $0 \leq h \leq 1$, $h|K' \equiv 1$ und $supp(h) \subset U_1$. Wir definieren die kompakten Teilmengen

$$K_1 := \{\mathbf{x} \in K : h(\mathbf{x}) \geq \frac{1}{2}\}, \quad K_2 := \{\mathbf{x} \in K : h(\mathbf{x}) \leq \frac{1}{2}\}$$

von K. Dann ist $K = K_1 \cup K_2$ klar. Wegen $K_1 \subset supp(h)$ ist $K_1 \subset U_1$. Wegen $K_2 \cap K' = \emptyset$ ist $K_2 \subset U_2$.

Schluss (von m auf $m+1$): Es sei $U := U_1 \cup ... \cup U_m$. Dann ist $K \subset U \cup U_{m+1}$. Wegen der für $m = 2$ bewiesenen Aussage ist $K = K' \cup K_{m+1}$ mit kompakten Mengen $K' \subset U$ und $K_{m+1} \subset U_{m+1}$. Nach Induktionsannahme ist $K' = \bigcup_1^m K_i$ mit kompakten Mengen $K_i \subset U_i$. $\square$

Satz 5.26 (Zerlegung der Eins) *Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $K \subset \bigcup_{i=1}^m U_i$ mit endlich vielen offenen Mengen U_i. Dann gibt es C^∞-Funktionen $h_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit*

- *$h_i \geq 0$,*
- *$supp(h_i) \subset U_i$ kompakt,*
- *$\sum_{i=1}^m h_i(\mathbf{x}) = 1$ für alle $\mathbf{x} \in K$.*

Beweis. Nach Satz 5.25 wählen wir kompakte Mengen $K_i \subset U_i$ so, dass $K = \bigcup_{i=1}^m K_i$. Nach Satz 5.24 existieren C^∞-Funktionen $f_i : \mathbb{R}^n \to [0, \infty[$ mit

$$f_i(\mathbf{x}) = 1 \text{ für } \mathbf{x} \in K_i \quad \text{und} \quad supp(f_i) \subset U_i \text{ kompakt.}$$

Wir setzen

$$f := \sum_{i=1}^m f_i.$$

Dann ist

$$f(\mathbf{x}) \geq 1 \text{ für } \mathbf{x} \in K \quad \text{und} \quad supp(f) = \bigcup_{i=1}^m supp(f_i) \subset \bigcup_{i=1}^m U_i.$$

Am liebsten würden wir

$$h_i := \frac{f_i}{f}$$

setzen, denn dann ist für alle $\mathbf{x} \in K$

$$\sum_{i=1}^{m} h_i(\mathbf{x}) = \frac{\sum f_i(x)}{\sum f_i(\mathbf{x})} = 1.$$

Auf K geht das in Ordnung, aber leider ist h_i dort nicht definiert, wo $f(\mathbf{x}) = 0$ ist, selbst wenn $f_i(\mathbf{x}) = 0$ sein sollte.

Wir müssen noch einmal schrumpfen: Wir definieren die offene Menge

$$U := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) > \frac{1}{2}\}.$$

Dann gilt

$$K \subset U \subset supp(f) \subset \bigcup U_i.$$

Nach Satz 5.24 gibt es eine C^∞-Funktion $g \geq 0$ auf $\mathbb{R}^n$ mit

$$g(\mathbf{x}) = 1 \text{ für } \mathbf{x} \in K \quad \text{und} \quad supp(g) \subset U.$$

Wir definieren Funktionen $h_i : \mathbb{R}^n \to [0, \infty[$ durch

$$h_i(\mathbf{x}) := \begin{cases} \dfrac{g(\mathbf{x}) \cdot f_i(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})} & \text{falls } \mathbf{x} \in U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wegen $f(\mathbf{x}) > 0$ für $\mathbf{x} \in U$ ist h_i wohldefiniert. Außerdem ist h_i von Klasse C^∞. Nur für $\mathbf{x} \in \partial U$ ist das nicht klar. Aber wenn $\mathbf{x}$ zu ∂U gehört, dann gehört $\mathbf{x}$ auch nicht zu der abgeschlossenen Menge $supp(g)$. Es gibt eine offene Umgebung von $\mathbf{x}$, auf der $g \equiv 0$ und $f > 1/4$. Deswegen ist h_i auch in diesem Punkt $\mathbf{x}$ von Klasse C^∞.

Mit diesen Funktionen h_i haben wir

$$supp(u_i) \subset supp(f_i) \subset U_i$$

und für alle $\mathbf{x} \in K$

$$\sum_{i=1}^{m} h_i(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{g(\mathbf{x}) \cdot f_i(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})} = \sum_{i=1}^{m} \frac{f_i(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})} = 1.$$

□

Satz 5.26 wird folgendermaßen angewendet: Eine stetige Funktion f sei zu integrieren über die kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$. Ist $K \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_i$ mit offenen Mengen U_i und h_i, $i = 1, ..., m$, eine Zerlegung der Eins wie in Satz 5.26, dann gilt

$$\int_K f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_K \sum_{i=1}^{m} h_i(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} \int_K h_i(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} \int_{K \cap U_i} h_i(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Die globale Integration (über K) beim Satz von Gauß wird damit zurückgeführt auf lokale Integrationen (über $K \cap U_i$).

Zunächst verwenden wir diese Technik, um das Rand-Integral für Volumina mit stückweise glattem Rand überhaupt zu erklären:

Definition 5.35 *Es sei $X \subset \mathbb{R}^n$ ein Volumen mit stückweise glattem Rand. Dann gibt es endlich viele offene Mengen V_i, $i = 1, ..., m$, mit $X \subset \bigcup_{i=1}^m V_i$ und so, dass für jedes i die Menge $X \cap V_i$ beschrieben wird wie in Definition 5.32 mit lokalen Koordinaten $g_1^{(i)}, ..., g_n^{(i)}$. Wir wählen eine Zerlegung der Eins h_i, $i = 1, ..., m$, mit $supp(h_i) \subset V_i$ kompakt. Dann ist*

$$\partial X = \bigcup_{i=1}^{m} \partial X \cap supp(h_i).$$

Und jeder Durchschnitt $\partial X \cap supp(h_i)$ besteht aus den r Hyperflächenstücken

$$H_{i,j} := \{\mathbf{x} \in supp(h_i) : \ g_1(\mathbf{x}) \leq 0, ..., g_j(\mathbf{x}) = 0, ..., g_r(\mathbf{x}) \leq 0\}.$$

Ist weiter $\mathbf{A}$ ein stetiges Vektorfeld auf X, so definieren wir den Fluss von $\mathbf{A}$ über ∂X nach außen als

$$\sum_{i,j} \int_{H_{i,j}} h_i(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{A}.\mathbf{N}_{i,j}) d^{n-1}o,$$

wo $\mathbf{N}_{i,j}$ ein nach außen weisendes Normalen-Einheitsfeld auf $H_{i,j}$ ist.

Natürlich wäre hier als erstes zu zeigen, dass das so definierte Integral von der getroffenen Wahl der V_i und der Zerlegung der Eins unabhängig ist. Aber beim Beweis des Satzes von Gauß wird das (für stetig differenzierbares $\mathbf{A}$) mit herauskommen. Deswegen möchte ich diese Unabhängigkeit hier nicht extra beweisen.

Satz 5.27 (Integralsatz von Gauß) *Es sei $X \subset \mathbb{R}^n$ ein Volumen mit stückweise glattem Rand, $\mathbf{A}$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf (einer offenen Umgebung von) X und $\mathbf{N}$ ein nach außen weisendes Normalen-Einheits-Vektorfeld auf ∂X. Dann gilt*

$$\int_X div(\mathbf{A}) d\mathbf{x} = \int_{\partial X} (\mathbf{N}.\mathbf{A}) d^{n-1}o.$$

Beweis. Wir wählen offene Mengen $V_i, i = 1, ..., m$, und lokale Koordinanten $g_j^{(i)}$ auf V_i mit $X \subset \bigcup_{i=1}^m V_i$ und so, dass $X \cap V_i$ wie in Definition 5.32 beschrieben wird. Weiter sei h_i, $i = 1, ..., m$, eine zugehörige Zerlegung der Eins. Dann ist also auf X

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{m} h_i \cdot \mathbf{A} \quad \text{und} \quad \int_X div(\mathbf{A}) d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} \int_{X \cap V_i} div(h_i \cdot \mathbf{A}) d\mathbf{x}.$$

Deswegen genügt es zu zeigen

$$\int_{X \cap V_i} div(h_i \cdot \mathbf{A})\, d\mathbf{x} = \int_{\partial X \cap V_i} (\mathbf{N}.h_i \cdot \mathbf{A})\, d^{n-1}o.$$

Um unsere Notation zu verschlanken unterbrechen wir den Beweis hier und holen nochmal Luft. Wie wir sahen, genügt es, den Satz von Gauß in der Situation von Definition 5.32 zu beweisen:

Satz 5.28 (Satz von Gauß, lokal) *Es sei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen, und $g_1, ..., g_n$ seien lokale Koordinaten auf V. Weiter sei*

$$X = \{\mathbf{y} \in V : g_1(\mathbf{y}) \leq 0, ..., g_r(\mathbf{y}) \leq 0\}.$$

Das Vektorfeld $\mathbf{A}$ sei stetig differenzierbar auf V mit kompaktem Träger. (D.h., es gibt eine kompakte Menge $K \subset V$ mit $\mathbf{A}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$ für alle $\mathbf{y} \in V$, $\mathbf{y} \notin K$). Dann gilt

$$\int_X div(\mathbf{A}) d\mathbf{x} = \int_{\partial X} (\mathbf{A}.\mathbf{N}) d^{n-1}o.$$

Beweis. Bevor wir in den Beweis einsteigen merken wir zwei Tatsachen an:

1) Weil die Funktion $div(\mathbf{A})$ außerhalb von K verschwindet, ist ihr Integral nur über die kompakte Menge $X \cap K$ zu bilden, und damit wohldefiniert. Ähnlich ist das Fluss-Integral auch nur über kompakte Hyperflächen-Stücke zu bilden und ebenfalls wohldefiniert.

2) Wenn die $g_1, ..., g_n$ keine lokalen, krummlinigen Koordinaten auf V sind, sondern die euklidischen Koordinaten $x_1, ..., x_n$, dann gibt es einen Quader Q der Form

$$Q = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : a_1 \leq x_1 \leq 0, ..., a_r \leq x_r \leq 0, a_{r+1} \leq x_{r+1} \leq b_{r+1}, ..., a_n \leq x_n \leq b_n\}$$

mit $Q \cap V = X \cap V$. Weil der Träger des Vektorfeldes $\mathbf{A}$ in V enthalten ist, können wir dieses Vektorfeld $\equiv \mathbf{0}$ auf Q fortsetzen, und erhalten ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf Q mit

$$\int_X div(\mathbf{A})d\mathbf{x} = \int_Q div(\mathbf{A})d\mathbf{x}, \quad \int_{\partial X} (\mathbf{A}.\mathbf{N})d^{n-1}o = \int_{\partial Q} (\mathbf{A}.\mathbf{N})d^{n-1}o.$$

Für dieses Vektorfeld auf Q ist der Satz von Gauß aber schon bewiesen (Satz 5.18).

Der Beweis des Satzes besteht jetzt darin, die Aussage auf V mit seinen krummlinigen Koordinaten $g_1, ..., g_n$ in eine Aussage auf einer offenen Menge U mit euklidischen Koordinaten $x_1, ..., x_n$ zu transformieren. Dazu betrachten wir den Diffeomorphismus $G : V \to W \subset \mathbb{R}^n$ aus Definition 5.32. Die offene Menge W nennen wir jetzt U und die euklidischen Koordinaten auf $U = W$ nennen wir $u_1, ..., u_n$. Dann ist also $g_i = u_i \circ G$ für $i = 1, ..., n$. Wir bezeichnen mit $F : U \to V$ die Umkehrabbildung G^{-1}. Dann ist also $u_i = g_i \circ F$ und

$$X \cap V = F(Q) \text{ mit } Q := \{\mathbf{u} \in U : u_1 \leq 0, ..., u_r \leq 0\} \subset U.$$

Für das Hyperflächenstück

$$H_i := \partial X \cap \{g_i = 0\}, \quad i = 1, ..., r,$$

gilt

$$H_i = F(Q \cap \{u_i = 0\}).$$

Mit Satz 5.20 ist das Fluss-Integral über H_i

$$\begin{aligned} \textstyle\int_{Q \cap \{u_i = 0\}} (\mathbf{A}.\mathbf{N}) du_1 ... \check{du_i} ... du_n &= \pm \int_{Q \cap \{u_i=0\}} (-1)^{i+1} det \left(\mathbf{A}, \frac{\partial F}{\partial u_1}, ..., \frac{\check{\partial F}}{\partial u_i}, ..., \frac{\partial F}{\partial u_n} \right) du_1 ... \check{u}_i ... du_n \\ &= \pm \textstyle\int_{Q \cap \{u_i=0\}} B_i du_1 ... \check{du_i} ... du_n \end{aligned}$$

wo

$$B_i := det \left(\frac{\partial F}{\partial u_1}, ..., \underbrace{\mathbf{A}}_{i}, ..., \frac{\partial F}{\partial u_n} \right)$$

und das Vorzeichen vor dem Integral das Vorzeichen der Funktionaldeterminante $det(F'(\mathbf{u}))$ ist.

Mit diesen Funktionen B_i definieren wir das *transformierte Vektorfeld*

$$\mathbf{B} := \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix}$$

auf U. Weil $\mathbf{e}_i$ auf dem Hyperflächenstück $Q \cap \{u_i = 0\}$ der nach außen weisende Normalenvektor ist, folgt

$$\int_{\partial Q} (\mathbf{B}.\mathbf{N}) d^{n-1}u = \sum_{i=1}^{n} \int_{Q\cap\{u_i=0\}} (\mathbf{B}.\mathbf{e}_i) d^{n-1u} = \sum_{i=1}^{n} \int_{Q\cap\{u_i=0\}} B_i du_1 ... d\check{u}_i ... du_n = \pm \int_{\partial X} (\mathbf{A}.\mathbf{N}) d^{n-1}o.$$

Um zu zeigen, dass auch die Volumenintegrale übereinstimmen, verwenden wir den Integraltransformationssatz in der Form

$$\int_X div(\mathbf{A})(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_Q div(\mathbf{A})(F(\mathbf{u})) \cdot |det(F'(\mathbf{u}))|\, d\mathbf{u}.$$

Die Behauptung (mit dem richtigen Vorzeichen) folgt, wenn wir zeigen:

$$div(\mathbf{B})(\mathbf{u}) = div(\mathbf{A})(F(\mathbf{u})) \cdot det(F'(\mathbf{u})).$$

Zum Beweis dieser Formel differenzieren wir vorschriftsmäßig, indem wir die Determinante spaltenweise ableiten:

$$div(\mathbf{B})(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial B_i}{\partial u_i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} det\left(\frac{\partial F}{\partial u_1}, ..., \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_j}\frac{\partial F_j}{\partial u_i}, ..., \frac{\partial F}{\partial u_n}\right) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i} det\left(\frac{\partial F}{\partial u_1}, ..., \underbrace{\frac{\partial^2 F}{\partial u_i \partial u_j}}_{j}, ... \underbrace{\mathbf{A}}_{i}, ..., \frac{\partial F}{\partial u_n}\right).$$

Im zweiten Summanden laufen i und j von 1 bis n unter der Nebenbedingung $i \neq j$. Mit jedem Summanden kommt auch der Summand vor, wo i und j vertauscht sind. Alle Summanden heben sich paarweise weg.

Es bleibt der erste Summand. Wir ziehen die Summe aus der Determinante heraus und schreiben ihn

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial u_i} det\left(\frac{\partial F}{\partial u_1}, ..., \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_j}, ..., \frac{\partial F}{\partial u_n}\right).$$

Hier entwickeln wir die Determinante nach der i-ten Spalte und erhalten

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial u_i} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+i+k} \frac{\partial A_k}{\partial x_j} \cdot det_k^i(F'(\mathbf{u})).$$

Hier ist $det_k^i F'(\mathbf{u})$ die Streichungsdeterminante der Funktionaldeterminante $detF'(\mathbf{u})$ zur k-ten Zeile und i-ten Spalte. Schließlich vertauschen wir die Summationsreihenfolge in

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial A_k}{\partial x_j} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{1+i+k} \frac{\partial F_j}{\partial u_i} \cdot det_k^i F'(\mathbf{u}).$$

Hier interpretieren wir die letzte Summe als die Entwicklung einer Determinante nach der k-ten Zeile. Und zwar als Entwicklung derjenigen Determinante, die aus der Funktionaldeterminante $detF'(\mathbf{u})$ entsteht, wenn man ihre k-te Zeile durch den Vektor

$$grad\, F_j = \left(\frac{\partial F_j}{\partial u_1}, ..., \frac{\partial F_j}{\partial u_n}\right)$$

ersetzt. Für $j = k$ erhalten wir genau die Funktionaldeterminante. Und für $j \neq k$ hat die Determinante zwei gleich Zeilen und fällt weg. Das Ergebnis unserer langen Rechnung ist

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial A_k}{\partial x_j} \cdot \delta_{j,k} \cdot det F'(\mathbf{u}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial A_k}{\partial x_k} \cdot det F'(u) = div(\mathbf{A})(F(\mathbf{u})) \cdot det F'(\mathbf{u}).$$

$\square$

Beispiel 5.32 *Wir wenden den Satz von Gauß an auf die n-dimensionale Vollkugel*

$$X = K_R = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \| \mathbf{x} \| \leq R\}$$

mit dem Rand

$$\partial X = S_R = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \| \mathbf{x} \| = R\}$$

und das Ortsvektorfeld $\mathbf{A} = \mathbf{x}$. Damit ist

$$div(\mathbf{x}) = n \quad und \quad \int_{K_R} div(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = n \cdot |K_R| = n \cdot R^n \cdot \kappa_n.$$

Das nach außen weisende Normalenfeld ist

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\| \mathbf{x} \|} \cdot \mathbf{x}.$$

damit wird das Flussintegral

$$\int_{S_R} (\mathbf{x}.\mathbf{N}) d^{n-1}o = \int_{S_R} \frac{(\mathbf{x}.\mathbf{x})}{\| \mathbf{x} \|} = R \int_{S_R} d^{n-1}o = R \cdot O(S_R),$$

wo $O(S_R)$ die Kugeloberfläche ist. Die bewiesene Formel lautet

$$O(S_R) = n \cdot R^{n-1} \cdot \kappa_n.$$

Für $R = 1$ finden wir insbesondere

$$o_n = n \cdot \kappa_n,$$

die Formel in Satz 5.11.

Beispiel 5.33 (Leibniz) *Es sei $X \subset \mathbb{R}^2$ kompakt mit stückweise glattem Rand. Wir betrachten das Vektorfeld*

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{x} \quad mit \quad div(\mathbf{A}) = 1.$$

In dieser Situation lautet der Gaußsche Integralsatz

$$|X| = \int_X div(\mathbf{A}) d\mathbf{x} = \int_{\partial X} (\mathbf{A}.\mathbf{N}) ds.$$

Wird der Rand ∂X lokal parametrisiert durch

$$\mathbf{x} = (x(t), y(t)),$$

so ist der Geschwindigkeitsvektor

$$\dot{\mathbf{x}} = (\dot{x}, \dot{y}).$$

Wird der Rand im mathematisch positiven Sinn durchlaufen so ist

$$\mathbf{N} := D \cdot \dot{\mathbf{x}} = (\dot{y}, -\dot{x})$$

ein nach außen weisendes Normalenfeld mit

$$(\mathbf{A}.\mathbf{N}) = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

Wir erhalten die Leibnizsche Sektorformel

$$|X| = \frac{1}{2}\int_{\partial X}(x\dot{y} - y\dot{x})dt.$$

Diese Formel wird in einem Gerät namens Planimeter angewendet.

Das letzte Beispiel verallgemeinert sich zu

Satz 5.29 (Green-Riemann) *Es sei $X \subset \mathbb{R}^2$ wie eben und $\mathbf{A} = (P, Q)$. Dann gilt*

$$\int_X (Q_x - P_y)dxdy = \int_{\partial X}(P\dot{x} + Q\dot{y})dt.$$

Die rechte Seite der letzten Formel schreibt man meist intuitiver

$$\int_{\partial X} Pdx + Qdy.$$

Beweis des Satzes. Das Umlauf-Integral ist

$$\int_{\partial X}(P\dot{x} + Q\dot{y})dt = \int_{\partial X}\left(\begin{pmatrix} Q \\ -P \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \end{pmatrix}\right) dt = \int_{\partial X}\left(\begin{pmatrix} Q \\ -P \end{pmatrix} .\mathbf{N}\right) ds.$$

Mit Gauß folgt die Behauptung aus

$$div \begin{pmatrix} Q \\ -P \end{pmatrix} = Q_x - P_y.$$

□

Wir betrachten jetzt den Spezialfall $\mathbf{A} = f \cdot grad\, g$, wo $X \subset \mathbb{R}^n$ und f, g stetig differenzierbar auf (einer offenen Umgebung von) X sind. Dann ist

$$div(\mathbf{A}) = (grad\, f.grad\, g) + f\Delta g.$$

Und für ein Normalen-Einheitsvektorfeld $\mathbf{N}$ ist

$$(\mathbf{A}.\mathbf{N}) = f \cdot (grad\, g.\mathbf{N}) = f \cdot \partial_{\mathbf{N}} g$$

mit der Richtungsableitung $\partial_{\mathbf{N}} g$. Der Integralsatz von Gauß lautet in dieser Situation:

Satz 5.30 (Erste Greensche Formel)

$$\int_X (grad\, f.grad\, g)d\mathbf{x} + \int_X f\Delta g d\mathbf{x} = \int_{\partial X} f \cdot \partial_{\mathbf{N}} g d^{n-1}o.$$

Geht man über zu

$$\mathbf{A} = f \cdot grad\, g - g \cdot grad\, f,$$

so folgt daraus

Satz 5.31 (Zweite Greensche Formel)

$$\int_X (f \cdot \Delta g - g \cdot \Delta f) d\mathbf{x} = \int_{\partial X} (f \cdot \partial_{\mathbf{N}} g - g \cdot \partial_{\mathbf{N}} f) d^{n-1} o.$$

Besonders geeignet sind diese Formeln für harmonische Funktionen, d.h., für Funktionen f mit $\Delta f \equiv 0$. Ist etwa in der ersten Greenschen Formel $f = g$ harmonisch, so lautet sie

$$\int_X \| grad\, f \|^2 \, d\mathbf{x} = \int_{\partial X} f \cdot \partial_{\mathbf{N}} f d^{n-1} o.$$

Wenn hier f auf dem Rand ∂X verschwindet, so folgt

$$\int_X \| grad\, f \|^2 \, d\mathbf{x} = 0,$$

und daraus $grad\, f \equiv \mathbf{0}$, d.h., $f = const = 0$.

Wendet man dies an auf die Differenz $f - g$ zweier harmonischer Funktionen, so erhält man

Satz 5.32 *Es sei $X \subset \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit stückweise glattem Rand. Die Funktionen f und g seien harmonisch auf (einer offenen Umgebung von) X. Gilt $f \equiv g$ auf dem Rand von X, so gilt $f \equiv g$ auf ganz X.*

Ich möchte diesen Abschnitt beschließen mit einer Interpretation des Begriffs der Divergenz.

Satz 5.33 *Es sei $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer Umgebung des Nullpunkts $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt*

$$div(\mathbf{A})(\mathbf{0}) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{|K(r)|} \int_{\partial K(r)} (\mathbf{A}.\mathbf{N}) d^{n-1} o.$$

Beweis mit dem Satz von Gauß: Es ist zu zeigen, dass

$$div(\mathbf{A})(\mathbf{0}) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{|K(r)|} \int_{K(r)} div(\mathbf{A})(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Wir schreiben kürzer $div(\mathbf{A})(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ und haben

$$f(\mathbf{0}) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{|K(r)|} \int_{K(r)} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

zu zeigen. Dazu approximieren wir

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{0}) + (grad\, f(\mathbf{0}).\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{x}) \quad \text{mit} \quad \lim_{\|\mathbf{x}\| \to \mathbf{0}} \frac{\varphi(\mathbf{x})}{\| \mathbf{x} \|} = 0.$$

Die drei Summanden auf der rechten Seite dieser Gleichung integrieren wir einzeln. Es ist

$$\int_{K(r)} f(\mathbf{0}) d\mathbf{x} = f(\mathbf{0}) \cdot |K(r)|.$$

Die Funktion $(grad\, f(\mathbf{0}).\mathbf{x})$ ist ungerade in dem Sinn, dass

$$(grad\, f(\mathbf{0}).-\mathbf{x}) = -(grad\, f(\mathbf{0}).\mathbf{x}).$$

Wenn wir die Kugel $K(r)$ in zwei Hälften aufspalten, etwa $x_n \geq 0$ und $x_n \leq 0$, dann unterscheiden sich die Integrale über diese beiden Hälften genau um das Vorzeichen. Damit erhalten wir

$$\int_{K(r)} (grad\, f(\mathbf{0}).\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0.$$

Beim dritten Summanden nehmen wir unsere Zuflucht zum bekannten ϵ. Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $R(\epsilon)$ derart, dass für $\parallel \mathbf{x} \parallel < R(\epsilon)$ gilt $|\varphi(\mathbf{x})| \leq \epsilon \cdot \parallel \mathbf{x} \parallel$. Für $r \leq R(\epsilon)$ folgt daraus

$$\left| \int_{K(r)} \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| \leq \int_{K(r)} \epsilon d\mathbf{x} = \epsilon \cdot |K(r)|.$$

Damit folgt die behauptete Formel.

Beweis ohne den Satz von Gauß: Jetzt approximieren wir das Vektorfeld $\mathbf{A}$ als

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{0}) + \mathbf{A}'(\mathbf{0}).\mathbf{x} + \Phi(\mathbf{x}) \quad \text{mit} \quad \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{0}} \frac{\Phi(\mathbf{x})}{\parallel \mathbf{x} \parallel} = \mathbf{0}.$$

Dann bilden wir für alle drei Summanden einzeln das Fluss-Integral über den Rand $\partial K(r)$. Das nach außen weisende Einheits-Normalenvektorfeld ist $\mathbf{N} = \mathbf{x}/r$. Damit wird

$$\int_{\partial K(r)} (\mathbf{A}(\mathbf{0}).\mathbf{N}) d^{n-1}o = \frac{1}{r} \int_{\partial K(r)} (\mathbf{A}(\mathbf{0}).\mathbf{x}) d^{n-1}o = 0,$$

weil der Integrand eine ungerade Funktion von $\mathbf{x}$ ist. Beim dritten Summanden verwenden wir, dass es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $R(\epsilon)$ gibt mit $\parallel \Phi(\mathbf{x}) \parallel < \epsilon \parallel \mathbf{x} \parallel$ für $\parallel \mathbf{x} \parallel \leq R(\epsilon)$. Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\Phi(\mathbf{x}).\mathbf{N})| \leq \epsilon \parallel \mathbf{x} \parallel$$

folgt daraus für $r < R(\epsilon)$

$$\left| \int_{\partial K(r)} (\Phi(\mathbf{x}).\mathbf{N}) d^{n-1}o \right| \leq \epsilon \cdot r \cdot r^{n-1} o_n = \epsilon \cdot \cdot n \cdot r^n \kappa_n = \epsilon \cdot n \cdot |K(n)|$$

und

$$\lim_{r \to 0} \int_{\partial K(R)} (\Phi(\mathbf{x}).\mathbf{N}) d^{n-1}o = 0.$$

Es bleibt das Integral über den zweiten Summanden

$$\int_{\partial K(r)} (\mathbf{A}'(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{x}.\mathbf{N}) d^{n-1}o = \frac{1}{r} \int_{\partial K(r)} \mathbf{x}^t \cdot \mathbf{A}'(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{x} d^{n-1}o.$$

Hier ist der Integrand die quadratische Form

$$\mathbf{x}^t \cdot \mathbf{A}(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}^t \cdot S \cdot \mathbf{x}$$

mit der symmetrischen Matrix

$$S = \frac{1}{2}(\mathbf{A}'(\mathbf{0}) + \mathbf{A}'(\mathbf{0})^t).$$

Mit einer orthogonalen Transformation $\mathbf{x} = T \cdot \mathbf{u}$ gehen wir über in ein Koordinatensystem $(u_1, ..., u_n)$, in dem die quadratische Form

$$\mathbf{x} \cdot S \cdot \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i^2$$

diagonalisert ist (Hauptachsentransformation). Dabei ändert sich das Oberflächenintegral nicht. Streng genommen habe ich das nicht bewiesen. Aber die Gramsche Determinante ändert sich nicht, und weil diese ganze Aussage sowieso nur didaktischen Wert hat, möchte ich das nicht weiter begründen. Damit ist also

$$\int_{\partial K(r)} (\mathbf{A}'(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{x}.\mathbf{N}) d^{n-1}o = \int_{\partial K(r)} \sum_i \lambda_i u_i^2 d^{n-1}o = \sum_i \lambda_i \int_{\partial K(r)} u_i^2 d^{n-1}o.$$

Aus Symmetriegründen ist hier

$$\int_{\partial K(r)} u_i^2 d^{n-1}o = \frac{1}{n} \int_{\partial K(r)} \parallel \mathbf{u} \parallel^2 d^{n-1}o = \frac{1}{n} r^2 |\partial K(r)| = \frac{1}{n} r^{n+1} o_n = r^{n+1}\kappa_n = r \cdot |K(r)|.$$

Damit wird

$$\frac{1}{r} \int_{\partial K(r)} \mathbf{x}^t \cdot \mathbf{A}'(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{x} d^{n-1}o = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot r|K(r)| = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot |K(r)|.$$

Hier ist $\sum_i \lambda_i$ die Spur der transformierten Matrix. Aber bei der Transformation ändert sich diese Spur nicht. Also folgt

$$\sum_i \lambda_i = tr(S) = tr(\mathbf{A}'(\mathbf{0})) = \sum_i \frac{\partial A_i}{\partial x_i}(\mathbf{0}) = div(\mathbf{A})(\mathbf{0}).$$

$\square$

Der letzte Beweis zeigt, dass hinter der Beseutung der Divergenz letztenendlich die Invarianz der Spur bei Basis-Transformationen steckt.

Aufgabe 5.18 *Es sei $X \subset \mathbb{R}^2$ ein (2-dimensionales) Volumen mit stückweise glattem Rand und $\mathbf{A}$ das Vektorfeld*

$$x^m y^n \cdot \begin{pmatrix} (m+1)y \\ (n+1)x \end{pmatrix} \qquad m, n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie:

$$\int_{\partial X} (\mathbf{A}.ds) = 0.$$

Aufgabe 5.19 *Es sei $X \subset \mathbb{R}^n$ ein Volumen mit stückweise glattem Rand und $\mathbf{0} \notin \partial X$. Zeigen Sie für das Vektorfeld*

$$\mathbf{A} := \frac{\mathbf{x}}{\parallel \mathbf{x} \parallel^n}:$$

Der Fluss dieses Feldes über den Rand von X nach außen ist

0 *falls* $\mathbf{0} \notin X$

o_n *falls* $\mathbf{0} \in X$.

Aufgabe 5.20 *Berechnen Sie die Größen der Flächen im* $\mathbb{R}^2$*, die begrenzt werden von folgenden Kurven:*

a) Kubik: $x = t^2 - 1$, $y = t(t^2 - 1)$, $\quad -1 \leq t \leq 1$,

b) Astroide: $x = cos^3(t), y = sin^3(t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$,

c) Dreispitz: $x = 2sin(t) - sin(2t), y = 2cos(t) - cos(2t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$.

Aufgabe 5.21 *Das Flächenstück* $X \subset \mathbb{R}^2$ *werde von einer Kurve berandet, welche in Polarkoordinaten gegeben ist durch*

$$r = r(\varphi),\ a \leq \varphi \leq b,$$

mit $r(a) = r(b) = 0$*. Zeigen Sie mit der Leibnizschen Sektorformel*

$$|X| = \frac{1}{2}\int_a^b r^2(\varphi)d\varphi.$$

Aufgabe 5.22 *Berechnen Sie mit Aufgabe 5.21 die Größen der Flächen, die umschlossen werden durch folgende Kurven:*

		$r(\varphi) =$	
a)	*Kardioide*	$1 + r \cdot cos(\varphi)$	$0 \leq \varphi \leq 2\pi$
b)	*Lemniskate*	$\sqrt{cos(2\varphi)}$	$-\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/4$
c)	*Folium*	$\dfrac{sin(\varphi)cos(\varphi)}{cos^3(\varphi) + sin^3(\varphi)}$	$0 \leq \varphi \leq \pi/2$
d)	*Rosette*	$sin(2\varphi)$	$0 \leq \varphi \leq \pi/2$
e)	*Eikurve*	$cos^2(\varphi)$	$-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$

5.5 Äußere Algebra

Der Integralsatz von Gauß besitzt eine Verallgemeinerung auf Integrale über p-dimensionale Flächen und deren Ränder. Allerdings besteht hier Klärungsbedarf hinsichtlich der Frage, was man über eine p-dimensionale Fläche X integrieren kann. Das wird eine alternierende p-Form ω heißen. In jedem Punkt $\mathbf{x} \in X$ operiert $\omega(\mathbf{x})$ auf dem Tangentialraum $T_{\mathbf{x}}(X)$. Und wie das geschieht, das ist ein Thema der Linearen Algebra, angewendet auf diesen Tangentialraum. Deswegen kommt jetzt dieser Paragraph, der zur Linearen Algebra gehört.

Definition 5.36 *Es sei* V *ein* $\mathbb{R}$*-Vektorraum. Eine* p*-Linearform (Multi-Linearform der Stufe* p*, kovarianter Tensor der Stufe* p*) ist eine Funktion*

$$f : \underbrace{V \times ... \times V}_{p} \to \mathbb{R},$$

die in jedem ihrer p *Argumente linear ist. Explizit heißt das*

$$f(\mathbf{v}_1, ..., a\mathbf{v}'_i + b\mathbf{v}''_i, ...\mathbf{v}_n) = a \cdot f(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}'_i, ..., \mathbf{v}_n) + b \cdot f(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}''_i, ..., \mathbf{v}_n)$$

für alle $i = 1, ..., p$*, alle* $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}'_i, \mathbf{v}''_i, ..., \mathbf{v}_n \in V$ *und alle* $a, b \in \mathbb{R}$.

Beispiel 5.34 *Eine Linearform $f \in V^*$ ist eine 1-Linearform im Sinn von Definition 5.36. Eine Bilinearform auf V ist eine 2-Linearform im Sinn von Definition 5.36. Sind $f_1, ..., f_p \in V^*$ Linearformen, so ist deren Tensorprodukt $f_1 \otimes ... \otimes f_p$ definiert durch*

$$(f_1 \otimes ... \otimes f_p)(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_p) := f_1(\mathbf{v}_1) \cdot ... \cdot f_p(\mathbf{v}_p),$$

eine p-Linearform auf V.

Satz 5.34 *a) Die p-Linearformen auf V bilden einen $\mathbb{R}$-Vektorraum $\bigotimes^p V$.*

b) Ist V endlich-dimensional mit Dimension n, und ist $f_1, ..., f_n \in V^*$ eine Basis des Dualraums V^*, so bilden die n^p Tensor-Produkte

$$f_{i_1} \otimes ... \otimes f_{i_p}, \quad i_1, ..., i_p = 1, ..., n,$$

eine Basis von $\bigotimes^p V$.

Beweis. a) Diese Behauptung ist ziemlich klar: Sind p-Linearformen f und g gegeben, so ist auch $f + g$ eine solche p-Linearform, sowie die Funktion $a \cdot f$ für $a \in \mathbb{R}$.

b) Nach Voraussetzung gibt es eine Basis $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n \in V$ mit $f_i(\mathbf{v}_j) = \delta_{i,j}$. Es sind zwei Tatsachen nachzuweisen.

i) Die Tensorprodukte spannen auf: Sei also $f \in \bigotimes^p V$ eine beliebige p-Linearform. Für $i_1, ..., i_p = 1, ..., n$ setzen wir

$$c_{i_1,...,i_p} := f(\mathbf{v}_{i_1}, ..., \mathbf{v}_{i_p}).$$

Damit definieren wir die p-Linearform

$$g := \sum_{i_1,...,i_p=1}^{n} c_{i_1,...,i_p} f_{i_1} \otimes ... \otimes f_{i_p}.$$

Für jedes p-tupel $\mathbf{v}_{j_1}, ..., \mathbf{v}_{j_p}$ von Basisvektoren gilt dann

$$\begin{aligned} g(\mathbf{v}_{j_1}, ..., \mathbf{v}_{j_p}) &= \sum_{i_1,...,i_p=1}^{n} c_{i_1,...,i_p} f_{i_1}(\mathbf{v}_{j_1}) \cdot ... \cdot f_{i_p}(\mathbf{v}_{j_p}) \\ &= \sum_{i_1,...,i_p=1}^{n} c_{i_1,...,i_p} \delta_{i_1,j_1} \cdot ... \cdot \delta_{i_p,j_p} \\ &= c_{j_1,...,j_p} \\ &= f(\mathbf{v}_{j_1}, ..., \mathbf{v}_{j_p}). \end{aligned}$$

Die beiden p-Linearformen f und g stimmen also überein auf allen p-Tupeln von Basisvektoren. Wegen der p-Linearität sind sie dann identisch gleich.

ii) Die Tensorprodukte sind linear unabhängig: Sei also eine Linearkombination

$$f = \sum_{i_1,...,i_p=1}^{n} c_{i_1,...,i_p} f_{i_1} \otimes ... \otimes f_{i_p} \equiv 0$$

vorgelegt. Wenn wir ein p-Tupel $\mathbf{v}_{j_1}, ..., \mathbf{v}_{j_p}$ von Basisvektoren einsetzen, finden wir

$$0 = f(\mathbf{v}_{j_1}, ..., \mathbf{v}_{j_p}) = \sum_{i_1,...,i_p=1}^{n} c_{i_1,...,i_p} \delta_{i_1,j_1} \cdot ... \cdot \delta_{i_p,j_p} = c_{j_1,...,j_p}.$$

Alle Koeffizienten $c_{j_1,...,j_p}$ sind also $= 0$. $\square$

Die allgemeine Theorie der p-Linearformen ist ziemlich kurz erklärt. Es gibt genau zwei, ziemlich langweilige Rechenoperationen:

Satz 5.35 *a) (Tensorprodukt) Die Abbildung*

$$\bigotimes^p V \times \bigotimes^q V \to \bigotimes^{p+q} V$$

definiert durch $(f, g) \mapsto f \otimes g$ *mit*

$$(f \otimes g)(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{p+q}) := f(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_p) \cdot g(\mathbf{v}_{p+1}, ..., \mathbf{v}_{p+q})$$

ist bilinear und assoziativ.

b) (Liftung) Es sei W *ein zweiter* $\mathbb{R}$*-Vektorraum und* $F : V \to W$ *linear. Dann wird eine* $\mathbb{R}$*-lineare Abbildung* $F^* : \bigotimes^p W \to \bigotimes^p V$ *definiert durch*

$$(F^* g)(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_p) := g(F(\mathbf{v}_1), ..., F(\mathbf{v}_p)).$$

Diese Abbildung ist verträglich mit dem Tensorprodukt.

Die Beweise sind so offensichtlich, zeitraubend und langweilig, dass ich sie nicht durchführen möchte. Ich möchte nur erklären, was sich hinter dem noch nicht erläuterten Fach-Chinesisch verbirgt: Die Assoziativität in a) bedeutet

$$(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h) \quad \text{für alle} \quad f \in \bigotimes^p V,\ g \in \bigotimes^q V,\ h \in \bigotimes^r V.$$

Und die Verträglichkeit in b) bedeutet

$$F^*(f \otimes g) = F^*(f) \otimes F^*(g) \quad \text{für alle} \quad f \in \bigotimes^p W,\ g \in \bigotimes^q W.$$

Beispiel 5.35 *Die Abbildung* $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *habe die darstellende* $n \times m$*-Matrix* $A = (a_{i,k})$*. D.h., für* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ *ist*

$$F(\mathbf{x}) = \left(\sum_{k=1}^m a_{i,k} x_k \right)_{i=1,...,n}.$$

Ist $f_1, ..., f_n \in (\mathbb{R}^n)^*$ *die Dualbasis zur kanonischen Basis, so ist für alle* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$

$$(F^* f_l)(\mathbf{x}) = f_l \left(\sum_{k=1}^m a_{i,k} x_k \right)_{i=1,...,n} = \sum_{k=1}^m a_{l,k} x_k.$$

Jede Linearform $f \in (\mathbb{R}^n)^*$ *hat eine Darstellung*

$$f = \sum_{l=1}^n c_l f_l.$$

Sie wird geliftet in $F^* f$ *mit*

$$(F^* f)(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^n c_l (F^* f_l)(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{l=1}^n c_l a_{l,k} \right) x_k.$$

Das bedeutet: In der Dualbasis zur kanonischen Basis von $\mathbb{R}^m$ *hat die Linearform* F^*f *die Koeffizienten* $\sum_{l=1}^n c_l a_{l,k}$. *Diese Koeffizienten erhält man aus dem Koeffizientenvektor* $(c_1, ..., c_n)$ *indem man diesen Vektor als Spaltenvektor von links an die darstellende Matrix A multipliziert. Oder äquivalent dazu: Die Koeffizienten der gelifteten Form sind die Einträge des Produkts*

$$A^t \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

mit der transponierten Matrix A^t. *Das ist Stoff der Linearen Algebra I und sollte wohlbekannt sein.*

In der Linearen Algebra sind symmetrische Bilinearformen sehr wichtig als begriffliche Überhöhung der symmetrischen Matrizen. Das Gegenteil davon, alternierende oder schiefsymmetrische Bilinearformen spielen dagegen kaum eine Rolle. Hier jedoch beginnt mit der Schief-Symmetrie die Theorie überhaupt erst spannend zu werden.

Definition 5.37 *Die p-Linearform* $f \in \bigotimes^p V$ *heißt* alternierend *oder* schiefsymmetrisch, *wenn für alle* $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_i, ..., \mathbf{v}_j, ..., \mathbf{v}_p \in V$ *gilt*

$$f(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_j, ..., \mathbf{v}_i, ..., \mathbf{v}_n) = -f(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_i, ..., \mathbf{v}_j, ..., \mathbf{v}_n).$$

Beim Vertauschen zweier Argumente ändert die Bilinearform ihr Vorzeichen. Weil jede Permutation $\sigma \in \Sigma_p$ *ein Produkt von Vertauschungen ist, ist dazu äquivalent:*

$$f(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, ..., \mathbf{v}_{\sigma(p)}) = sign(\sigma) \cdot f(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_p).$$

Beispiel 5.36 *Jede* 1*-Linearform* $f \in V^*$ *ist alternierend, weil da keine zwei Argumente vertauscht werden können. Sind* $f, g \in V^*$ *Linearformen, so ist*

$$f \wedge g := f \otimes g - g \otimes f$$

eine alternierende Bilinearform. Auf $\mathbb{R}^n$ *ist die Determinante*

$$det : (\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n) \mapsto det(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n)$$

eine alternierende n-Linearform. Allgemeiner sind die Unterdeterminanten $det_{i_1,...,i_p}$ *alternierende p-Linearformen auf* $\mathbb{R}^n$.

Weil ein Vektorraum V mit einer Basis $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n \in V$ praktisch dasselbe ist, wie eine Kopie des $\mathbb{R}^n$, sind die Unterdeterminanten $det_{i_1,...,i_p}$ aus dem letzten Beispiel allgemein wie folgt zu definieren:

Definition 5.38 *Es sei* $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n \in V$ *eine Basis und* $f_1, ..., f_n \in V^*$ *die zugehörige Dualbasis. Für jedes Index-p-tupel* $1 \leq i_1 < ... < i_p \leq n$ *wird die p-Form* $f_{i_1} \wedge ... \wedge f_{i_p} \in \bigotimes^p V$ *definiert durch*

$$f_{i_1} \wedge ... \wedge f_{i_p}(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_p) := \sum_{\sigma \in \Sigma_p} f_{i_1}(\mathbf{x}_{\sigma(1)}) \cdot ... \cdot f_{i_p}(\mathbf{x}_{\sigma_p}) = det\left(f_i(\mathbf{x}_j)\right)_{i=i_1,...,i_p, j=1,...,p}$$

für $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_p \in V$. *Dass diese p-Form* $f_{i_1} \wedge ... \wedge f_{i_p}$ alternierend *ist, folgt daraus, dass die Determinante einer Matrix beim Vertauschen von zwei Spalten der Matrix ihr Vorzeichen ändert.*

Ist die p-Form f alternierend, so ist $f(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_p) = 0$, wenn zwei der Vektoren $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_p \in V$ übereinstimmen. Das gilt insbesondere für Basisvektoren $\mathbf{v}_{i_1}, ..., \mathbf{v}_{i_p} \in V$. Nur wenn die Basisvektoren $\mathbf{v}i_1, ..., \mathbf{v}_{i_p}$ paarweise voneinander verschieden sind, dann kann der Wert von f auf diesem p-tupel von 0 verschieden sein. Und wenn die $i_1, ..., i_p$ alle paarweise voneinander verschieden sind, dann kann man sie ordnen: Es gibt eine Permutation $\sigma \in \Sigma_p$ mit

$$i_{\sigma(1)} < ... < i_{\sigma(p)}.$$

Ähnlich wie bei der Determinante sieht man auch hier für alternierende p-Formen f:

$$f(\mathbf{v}_{i_{\sigma(1)}}, ..., \mathbf{v}_{i_{\sigma(p)}}) = sign(\sigma) \cdot f(\mathbf{v}_{i_1}, ..., \mathbf{v}_{i_p}).$$

Die Werte von f auf allen p-tupeln von Basisvektoren sind festgelegt durch die Werte von f auf den p-tupeln von Basisvektoren mit echt aufsteigender Index-Folge.

Jetzt ist vielleicht der Moment gekommen, um die Notation etwas zu komprimieren (und das Verständnis von Formeln entsprechend zu erschweren).

Definition 5.39 *Ein Index-p-tupel* $(i_1, ..., i_p)$ *kürzen wir ab als* $I := (i_1, ..., i_p)$. *Ein Vektor-p-tupel* $(\mathbf{v}_{i_1}, ..., \mathbf{v}_{i_p})$ *kürzen wir entsprechend ab als*

$$\mathbf{v}_I := (\mathbf{v}_{i_1}, ..., \mathbf{v}_{i_p}).$$

Wer das will, der kann das Objekt $\mathbf{v}_I$ *einen* Multivektor *nennen. Auch die oben definierten p-Formen kürzen wir entsprechend ab:*

$$f_I := f_{i_1} \wedge ... \wedge f_{i_p}.$$

Eine p-Form f ist festgelegt duch ihre Werte auf allen p-tupeln $\mathbf{v}_I$ von Basisvektoren. Ist f alternierend, so ist f festgelegt durch seine Werte auf p-tupeln $\mathbf{v}_I$ mit echt aufsteigender Index-Folge I.

Jetzt kommt das Analogon zu Satz 5.33 für alternierende p-Formen:

Satz 5.36 *a) Die alternierenden p-Formen bilden einen* $\mathbb{R}$*-Untervektorraum* $\bigwedge^p V \subset \bigotimes^p V$.

b) Ist $f_1, ..., f_n \in V^*$ *eine Basis des Dualraums, so bilden die p-Formen*

$$f_I = f_{i_1} \wedge ... \wedge f_{i_p}, \quad 1 \leq i_1 < ... < i_p \leq n,$$

eine Basis von $\bigwedge^p V$.

Beweis. Zu a) ist nicht viel zu sagen. Es ist klar, dass jede Linearkombination von alternierenden p-Formen wieder alternierend ist.

b) Es sei $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n \in V$ die Basis dual zu $f_1, ..., f_n$. Auch hier sind zwei Tatsachen nachzuweisen.

Aufspannen: Es sei $f \in \Lambda^p V$. Für jedes echt aufsteigende Index-p-tupel J sei

$$c_J := f(\mathbf{v}_J) \in \mathbb{R}.$$

Für die Formen f_I ist

$$f_I(\mathbf{v}_J) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad J = I \\ 0 & \text{falls} \quad J \neq I \end{cases}$$

Daraus folgt
$$f = \sum_J c_J f_J.$$

Lineare Unabhängigkeit: Es sei
$$\sum_I c_I f_I = 0.$$
Durch Einsetzen von p-tupeln $\mathbf{v}_J$ findet man hieraus $c_I = 0$ für alle I. $\square$

Satz 5.37 (Korollar) *Hat der Vektorraum V die Dimension n, so ist*
$$dim \bigwedge^p V = \binom{p}{n}.$$
Insbesondere ist
$$\bigwedge^p V = 0 \quad für \quad p > n.$$

Die beiden Rechenoperationen für p-Formen (Tensor-Produkt und Transformation) sind für alternierende p-Formen schon viel komplizierter. Zuallererst ist das Tensorprodukt zweier alternierender Formen i.A. nicht mehr alternierend:

Beispiel 5.37 *Es seien f_1 und f_2 die ersten beiden Linearformen aus der Dualbasis von V. Dann ist*
$$f_1 \otimes f_2(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = f_1(\mathbf{v}_1) \cdot f_2(\mathbf{v}_2) = 1 \cdot 1 = 1,$$
$$f_1 \otimes f_2(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) = f_1(\mathbf{v}_2) \cdot f_2(\mathbf{v}_1) = 0 \cdot 0 = 0 \neq -f_1 \otimes f_2(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2).$$

Das repariert man folgendermaßen.

Definition 5.40 (Äußeres Produkt) *Es seien $f \in \bigwedge^p V$ und $g \in \bigwedge^q V$. Das* äußere Produkt $f \wedge g \in \bigwedge^{p+q} V$ *wird definiert durch*
$$(f \wedge g)(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{p+q}) := \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{p+q}} sign(\sigma) \cdot (f \otimes g)(\mathbf{x}_{\sigma(1)}, ..., \mathbf{x}_{\sigma(p+q)}).$$

Beispiel 5.38 *Die wesentlichste Rechnung in diesem ganzen Abschnitt verstecke ich in diesem Beispiel. Wie oben sei $f_1, ..., f_n \in V^*$ eine Dualbasis. Weiter seien*
$$I = \{i_1, ..., i_p\} \quad und \quad J = \{j_1, ..., j_q\} \subset \{1, ..., n\}$$
zwei disjunkte, aufsteigend geordnete Indexmengen. Ich möchte das äußere Produkt $f_I \wedge f_J$ berechnen. Wir erinnern uns:
$$f_I(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_p) = \sum_{\tau \in \Sigma_p} sign(\tau) f_{i_1}(\mathbf{x}_{\tau(1)}) \cdot ... \cdot f_{i_p}(\mathbf{x}_{\tau(p)}),$$
$$f_J(\mathbf{x}_{p+1}, ..., \mathbf{x}_{p+q}) = \sum_{\rho \in \Sigma_q} sign(\rho) f_{j_1}(\mathbf{x}_{p+\rho(1)}) \cdot ... \cdot f_{j_q}(\mathbf{x}_{p+\rho(q)}).$$
Für $\sigma \in \Sigma_{p+q}$ folgt daraus
$$f_I(\mathbf{x}_{\sigma(1)}, ..., \mathbf{x}_{\sigma(p)}) = \sum_{\tau \in \Sigma_p} sign(\tau) f_{i_1}(\mathbf{x}_{\sigma\tau(1)}) \cdot ... \cdot f_{i_p}(\mathbf{x}_{\sigma\tau(p)}),$$

$$f_J(\mathbf{x}_{\sigma(p+1)},...,\mathbf{x}_{\sigma(p+q)}) = \sum_{\rho\in\Sigma_q} sign(\rho) f_{j_1}(\mathbf{x}_{\sigma(p+\rho(1))}) \cdot ... \cdot f_{j_q}(\mathbf{x}_{\sigma(p+\rho(q))}).$$

Damit berechnen wir

$$\begin{aligned}
f_I \wedge f_J(\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_{p+q}) &= \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma\in\Sigma_{p+q}} sign(\sigma) \sum_{\tau\in\Sigma_p} sign(\tau) \sum_{\rho\in\Sigma_q} sign(\rho) \cdot \\
&\quad f_{i_1}(\mathbf{x}_{\sigma\tau(1)}) \cdot ... \cdot f_{i_p}(\mathbf{x}_{\sigma\tau(p)}) \cdot f_{j_1}(\mathbf{x}_{\sigma(p+\rho(1))}) \cdot ... \cdot f_{j_q}(\mathbf{x}_{\sigma(p+\rho(q))}) \\
&= \frac{1}{p!q!} \sum_{\tau\in\Sigma_p} sign(\tau) \sum_{\rho\in\Sigma_q} sign(\rho) \sum_{\sigma\in\Sigma_{p+q}} sign(\sigma) \cdot \\
&\quad f_{i_1}(\mathbf{x}_{\sigma\tau(1)}) \cdot ... \cdot f_{i_p}(\mathbf{x}_{\sigma\tau(p)}) \cdot f_{j_1}(\mathbf{x}_{\sigma(p+\rho(1))}) \cdot ... \cdot f_{j_q}(\mathbf{x}_{\sigma(p+\rho(q))}) \\
&= \frac{1}{p!q!} \sum_{\tau\in\Sigma_p} sign(\tau)^2 \sum_{\rho\in\Sigma_q} sign(\rho)^2 \sum_{\sigma\in\Sigma_{p+q}} sign(\sigma) \cdot \\
&\quad f_{i_1}(\mathbf{x}_{\sigma(1)}) \cdot ... \cdot f_{i_p}(\mathbf{x}_{\sigma(p)}) \cdot f_{j_1}(\mathbf{x}_{\sigma(p+1)}) \cdot ... \cdot f_{j_q}(\mathbf{x}_{\sigma(p+q)}) \\
&= f_{I\cup J}(\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_{p+q}).
\end{aligned}$$

Hier haben wir das ungeordnete Index-$p+q$-tupel $I \cup J$ verwendet. Ordnen wir es durch eine Permutation $\kappa : I \cup J \to K$, so erhalten wir das Ergebnis

$$f_I \wedge f_J = sign(\kappa) \cdot f_K.$$

Satz 5.38 (Rechenregeln) *Das oben definierte äußere Produkt hat folgende Eigenschaften:*
a) Bilinearität,
b) Assoziativität,
c) modifizierte Kommutativität

$$g \wedge f = (-1)^{p\cdot q} f \wedge g \quad \text{für} \quad f \in \bigwedge^p V, g \in \bigwedge^q V,$$

d) für $I = \{i_1,...,i_p\}$, $i_1 < ... < i_p$, und Linearformen $f_{i_1},...,f_{i_p}$ der obigen Dualbasis ist das (wegen der Assoziativität wohldefinierte) p-fache äußere Produkt

$$f_{i_1} \wedge ... \wedge f_{i_p} = f_I,$$

mit der in Definition 5.38 definierten Basisform f_I.

Beweis. a) Die Bilinearität folgt so einfach aus der Bilinearität des Tensor-Produktes, dass ich die Formeln nicht einmal hinzuschreiben brauche.

b) Wegen der Bilinearität genügt es, die Aussage für Basis-Formen f_H, f_I, f_J mit disjunkten Index-Mengen $H, I, J \subset \{1,...,n\}$ zu beweisen. Wir betrachten die geordneten Index-Mengen

$$K := H \cup I,\ L := I \cup J,\ M := H \cup I \cup J.$$

Mit Beispiel 5.38 wissen wir

$$f_H \wedge f_I = sign(\kappa) \cdot f_K, \quad f_I \wedge f_J = sign(\lambda) \cdot f_L,$$

mit den ordnenden Permutationen $\kappa : H \cup I \to K$ und $\lambda : I \cup J \to L$. Ist $\mu : H \cup I \cup J \to M$ die ordnende Permutation, so folgt daraus

$$(f_H \wedge f_I) \wedge f_J = sign(\mu) \cdot f_M = f_H \wedge (f_I \wedge f_J).$$

c) Auch diese Aussage brauchen wir nur für Basisformen $f = f_I$ und $g = f_J$ zu beweisen. Ist $\lambda : I \cup J \to J \cup I$ die Permutation, welche die Reihenfolge der Mengen I und J vertauscht, so folgt auch diese Aussage aus Beispiel 5.38.

d) Diese Aussage folgt durch vollständige Induktion nach p mit Beispiel 5.38 für $J = \{i_p\}$. $\square$

Die zweite oben betrachtete Rechenoperation war die Liftung

$$F^* : \bigotimes^p W \to \bigotimes^p V, \quad F^* f := f \circ F.$$

Ist hier f alternierend, so ist dies auch $f \circ F$. Damit folgt: Jede lineare Abbildung $F : V \to W$ induziert eine lineare Abbildung

$$F^* : \bigwedge^p W \to \bigwedge^p V.$$

Satz 5.39 *Die Liftung F^* ist verträglich mit dem äußeren Produkt. D.h., es gilt*

$$F^*(f \wedge g) = F^* f \wedge F^* g.$$

Beweis. Es sei $f \in \bigwedge^p W$ und $g \in \bigwedge^q V$. Der Beweis folgt aus der Formel

$$(f \wedge g)(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{p+q}} (f \otimes g)(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{p+q}),$$

weil F^* linear ist und verträglich mit dem Tensorprodukt.

Beispiel 5.39 (Determinante) *Wir betrachten $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Die Dualbasis zur kanonischen Basis im $\mathbb{R}^n$ sei $f_1, ..., f_n \in (\mathbb{R}^n)^*$. Die alternierende n-Linearform*

$$det := f_1 \wedge ... \wedge f_n \in \bigwedge^n (\mathbb{R}^n)$$

ist nichts anderes als die wohlbekannte $n \times n$-Determinante. Ist $g_1, ..., g_m \in (\mathbb{R}^m)^*$ die Dualbasis zur kanonischen Basis $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_m$ des $\mathbb{R}^m$, so sind die Formen g_I, $|I| = n$, eine Basis von $\bigwedge^n (\mathbb{R}^m)^*$. In dieser Basis können wir entwickeln

$$F^* det = \sum_I c_I g_I.$$

(Nicht-trivial ist die Situation allerdings nur, wenn $m \geq n$.) Jeden Koeffizienten c_I können wir ermitteln, indem wir den Multivektor $\mathbf{e}_I$ einsetzen:

$$c_I = (F^* det)(\mathbf{e}_I) = det\left(F(\mathbf{e}_{i_1}), ..., F(\mathbf{e}_{i_n})\right).$$

Ist A die darstellende Matrix von F, d.h., $F(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$, so sind die Vektoren $F(\mathbf{e}_i) = A \cdot \mathbf{e}_i$, $i = i_1, ..., i_n$, gerade die Spaltenvektoren der $n \times m$-Matrix A zu den Indizes $i_1, ..., i_n$. Bezeichnen wir mit $det^I(A)$ die zughörigen $n \times n$-Unterdeterminanten von A, so haben wir berechnet:

$$c_I = det^I(A).$$

Sind $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^m$ beliebige Vektoren, so folgt daraus

$$det(F(\mathbf{x}_1), ..., F(\mathbf{x}_n)) = \sum_{|I|=n} det^I(A) f_I(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n) = \sum_I det^I(A) \cdot det_I(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n).$$

Insbesondere für $m = n$ bedeutet dies:

$$F^* det_W = det(A) \cdot det_V.$$

Wenn wir im Beispiel 5.39 die Vektoren $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n$ zu einer $m \times n$-Matrix

$$B = (\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n)$$

zusammenfassen, so liest sich das Ergebnis

$$det(A \cdot B) = \sum_{|I|=n} det^I(A) \cdot det_I(B).$$

Das ist

Satz 5.40 (Allgemeine Lagrange-Identität) *Für $n \leq m$ sei A eine $n \times m$-Matrix und B eine $m \times n$-Matrix. Dann ist*

$$det(A \cdot B) = \sum_{|I|=n} det^I(A) \cdot det_I(B).$$

Die Lagrange-Identität (Satz 5.10) ist hiervon der Spezialfall $A = B$.

Beispiel 5.40 *Wir betrachten jetzt $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und wollen*

$$F^* : \bigwedge^{n-1} \mathbb{R}^n \to \bigwedge^{n-1} \mathbb{R}^n$$

beschreiben. Eine $n-1$-Form f hat eine Basisdarstellung

$$f = \sum_{|I|=n-1} a_I f_I = \sum_{1 \leq i_1 < ..., i_{n-1} \leq n} a_{i_1,...,i_{n-1}} f_{i_1} \wedge ... \wedge f_{i_{n-1}}.$$

Die Darstellung vereinfachen wir, indem wir nicht über alle vorkommenden Indizes summieren, sondern nur über den weggelassenen:

$$f = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_i f_1 \wedge ... \check{f}_i ... \wedge f_n.$$

Wenden wir diese Form an auf ein $n-1$-tupel von Vektoren $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$, so ist das Ergebnis

$$f(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_i det_{1,...,\check{i},...,n}(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{n-1}) = (\mathbf{a}.[\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{n-1}])$$

mit dem Koeffizientenvektor $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_n)$.

Die Liftung von f hat eine Basisdarstellung

$$F^* f = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} b_i f_1 \wedge ... \check{f}_i ... \wedge f_n,$$

in der wir die Koeffizienten b_i bestimmen wollen. Dazu werten wir die Form F^*f aus auf einem $n-1$-tupel $\mathbf{e}_1, ..., \hat{\mathbf{e}}_i, ..., \mathbf{e}_n$ von Basisvektoren. Das Resultat ist

$$(-1)^{i+1} b_i = F^* f(\mathbf{e}_1, ..., \hat{\mathbf{e}}_i, ..., \mathbf{e}_n) = (\mathbf{a}.[F\mathbf{e}_1, ..., \widehat{F\mathbf{e}_i}, ..., F\mathbf{e}_n])$$

oder

$$b_i = det(F\mathbf{e}_1, ..., \underbrace{\mathbf{a}}_{i}, ..., F\mathbf{e}_n).$$

Aufgabe 5.23 *Die lineare Abbildung* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *sei bezüglich der Standardbasis durch die Matrix*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Dualbasis zur Standardbasis sei $f_1, f_2, f_3 \in (\mathbb{R}^3)^*$. *Berechnen Sie:*

$$a)\, F^*(f_1 + 2f_2 + 3f_3), \quad b)\, F^*(f_1 \wedge f_2 + f_2 \wedge f_3), \quad c)\, F^*(f_1 \wedge f_2 \wedge f_3).$$

Aufgabe 5.24 *Eine alternierende* p*-Form* $f \in \bigwedge^p \mathbb{R}^n$ *heißt* zerfallend, *wenn es Linearformen* $h_1, ..., h_p \in (\mathbb{R}^n)^*$ *gibt mit* $f = h_1 \wedge ... \wedge h_p$. *Zeigen Sie:*

a) Jede Form $f \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ *zerfällt,*
b) jede Form $f \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^4$ *ist Summe von höchstens zwei zerfallenden Formen,*
c) eine Form $f \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^4$ *zerfällt genau dann, wenn* $f \wedge f = 0$.

Aufgabe 5.25 *Die Abbildung* $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *sei linear mit dem (modifizierten) charakteristischen Polynom*

$$\chi(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n.$$

Zeigen Sie für $i = 1, ..., n$: *Der Koeffizient* a_i *ist die Spur der linearen Abbildung*

$$F^* : \bigwedge^i \mathbb{R}^n \to \bigwedge^i \mathbb{R}^n.$$

5.6 Alternierende Differentialformen im $\mathbb{R}^n$

Definition 5.41 *Es sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen. Eine alternierende Differentialform auf* U *der Stufe* p *(oder kurz: eine* p*-Form auf* U*) ist eine Abbildung*

$$\omega : U \to \bigwedge^p \mathbb{R}^n.$$

Weil die Formen f_I, $|I| = p$, eine Basis des Vektorraums $\bigwedge^p \mathbb{R}^n$ bilden, hat ω ein Darstellung

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum_{|I|=p} \omega_I(\mathbf{x}) f_I$$

mit Funktionen $\omega_I : U \to \mathbb{R}$. Die p-Form ω ist von Klasse C^k, wenn alle ihre Koeffizienten ω_I dies sind. Für den (unendlich-dimensionalen) $\mathbb{R}$-Vektorraum der p-Formen von Klasse C^k schreiben wir

$$\Omega^p_k(U) \quad \text{oder meistens kürzer} \quad \Omega^p(U).$$

Beispiel 5.41 *Mit der kanonische Dualbasis $f_1, ..., f_n \in (\mathbb{R}^n)^*$ schreibt sich jede 1-Form als*

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} v_i(\mathbf{x}) f_i.$$

Auf den ersten Blick ist ω nichts anderes als das Vektorfeld $\mathbf{v} = (v_1, ..., v_n)$. Für jeden Vektor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ist mit diesem Vektorfeld

$$\omega(\mathbf{x})(\mathbf{y}) = (\mathbf{v}(\mathbf{x}).\mathbf{y}), \quad bzw. \quad \omega(\mathbf{x}) = (\mathbf{v}(\mathbf{x}).-).$$

Der Zusammenhang zwischen ω und $\mathbf{v}$ wird durch das euklidische Skalarprodukt hergestellt. Das geht auch ganz in Ordnung, solange wir die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$ festhalten. Wir werden aber vor allem Formen betrachten, die nicht auf einem Vektorraum mit einer kanonischen Basis operieren. Dann ist die Unterscheidung zwischen 1-Form (kovariant) und Vektorfeld (kontravariant) unerlässlich.

Ein Vektorfeld auf U kann man sich vorstellen als eine Vorschrift, die in jedem Punkt $\mathbf{x} \in U$ ein kleines Vektorpfeilchen anheftet. Eine Linearform ist kein Vektorpfeilchen. Aber ihre Nullstellenmenge ist eine Hyperebene im $\mathbb{R}^n$. Etwas leger kann man sich eine 1-Form auf U vorstellen als eine Vorschrift, die in jedem Punkt $\mathbf{x} \in U$ eine kleine Hyperebene anheftet.

Beispiel 5.42 **($p = n - 1$)** *Die $n - 1$-Formen $f_1 \wedge ...\check{f}_i... \wedge f_n$, $i = 1, ..., n$, bilden eine Basis von $\bigwedge^{n-1} \mathbb{R}^n$. Jede $n - 1$-Form ω auf U hat deswegen eine Basisdarstellung*

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} v_i(\mathbf{x})(-1)^{i+1} f_1 \wedge ...\check{f}_i... \wedge f_n.$$

Mit dieser Wahl der Vorzeichen ist also

$$\omega(\mathbf{x})(\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_{n-1}) = det(\mathbf{v}(\mathbf{x}), \mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_{n-1}).$$

Aber auch diese Darstellung ist nicht koordinatenunabhängig.

Bei Differentialformen gibt es zunächst die algebraischen Rechenoperationen, die in Abschnitt 5.5 eingeführt wurden. Die wendet man punktweise an, das ist nicht viel Neues.

1) Punktweise Addition von p-Formen: Die Summe zweier p-Formen ω und $\omega' \in \Omega^p(U)$ ist definiert durch

$$(\omega + \omega')(\mathbf{x}) = \omega(\mathbf{x}) + \omega'(\mathbf{x}).$$

2) Punktweise Multiplikation mit einer Funktion: Für $\omega \in \Omega_k^p(U)$ und $g \in C^k(U)$ ist die p-Form $g \cdot \omega \in \Omega_k^p$ definiert durch

$$(g \cdot \omega)(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \cdot \omega(\mathbf{x}).$$

Die in 1) und 2) beschriebenen Rechenstrukturen kann man gelehrt, aber bedeutungsleer, so ausdrücken: Mit ihnen wird $\Omega_k^p(U)$ ein $C^k(U)$-Modul.

3) Punktweises (äußeres) Produkt: Für Formen $\omega \in \Omega^p(U)$ und $\sigma \in \Omega^q(U)$ wird das Produkt $\omega \wedge \sigma \in \Omega^{p+q}$ definiert durch

$$(\omega \wedge \sigma)(\mathbf{x}) := \omega(\mathbf{x}) \wedge \sigma(\mathbf{x}).$$

Weil dieses Produkt punktweise definiert ist, gelten (punktweise) die Rechenregeln aus Satz 5.37.

4) Liften unter einer Abbildung F: In Satz 5.38 haben wir p-Formen unter einer linearen Abbildung $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ geliftet. Hier kommt jetzt der erste neue Gesichtspunkt. Wir verwenden eine *differenzierbare* Abbildung

$$F : U \to V, \quad U \subset \mathbb{R}^m, V \subset \mathbb{R}^n,$$

und liften *punktweise* mit der linearen Abbildung

$$F'(\mathbf{u}) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{u} \in U.$$

Für $\omega \in \Omega^p(V)$ wird also $F^*(\omega)$ punktweise definiert durch

$$(F^*\omega)(\mathbf{u}) := F'(\mathbf{u})^*\omega(F(\mathbf{u})).$$

Ausführlich hingeschrieben heißt das: Sind $\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_p \in \mathbb{R}^m$, so ist

$$(F^*\omega)(\mathbf{u})(\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_p) = \omega(F(\mathbf{u}))(F'(\mathbf{u})\mathbf{y}_1, ..., F'(\mathbf{u})\mathbf{y}_p).$$

Für dieses Liften gelten (punktweise) die (punktweisen) Rechenregeln:

Linearität: $F^*(g_1\omega_1 + g_2\omega_2) = (g_1 \circ F) \cdot F^*(\omega_1) + (g_2 \circ F) \cdot F^*(\omega_2)$ für $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^p(V)$ und Funktionen g_1, g_2 auf V,

Produktregel: $F^*(\omega \wedge \sigma) = F^*(\omega) \wedge F^*(\sigma)$ für $\omega \in \Omega^p(V), \sigma \in \Omega^q(V)$.

Zu beachten ist, dass diese Rechenoperationen koordinatenunabhängig definiert sind. Das Ergebnis in Koordinaten auszurechnen ist meist Teil des Problems. Ich diskutiere die einfachsten Beispiele.

Beispiel 5.43 ($p = 1$) *Es sei $\omega \in \Omega^1(V)$, in Koordinaten-Darstellung*

$$\omega(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{v}) f_i.$$

Dafür ist

$$(F^*\omega) = \sum_{i=1}^{n} a_i \circ F \cdot \left(f_i \circ (\frac{\partial F_k}{\partial u_l}) \right) = \sum_{i,l=1}^{n,m} a_i \circ F \cdot \frac{\partial F_i}{\partial u_l} h_l.$$

Dabei bilden die $h_l \in (\mathbb{R}^m)^*$ die kanonische Dualbasis.

Beispiel 5.44 ($p = n$) *Eine n-Form auf V schreibt sich*

$$\omega = g \cdot f_1 \wedge ... \wedge f_n.$$

Ihre Liftung ist

$$(F^*\omega)(\mathbf{u})(\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_n) = g(F(\mathbf{u})) \cdot det(F'(\mathbf{u})(\mathbf{y}_1), ..., F'(\mathbf{u})(\mathbf{y}_n)).$$

Ist insbesondere $m = n$, so ist $F'(\mathbf{u})$ eine $n \times n$-Matrix, und die Determinante ist

$$det(F'(\mathbf{u}) \cdot (\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_n)) = det(F'(\mathbf{u})) \cdot det(\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_n).$$

In diesem Fall erhalten wir

$$F^*(\omega) = g \circ F \cdot det(F') \cdot h_1 \wedge ... \wedge h_n.$$

Beim Liften wird die Funktionaldeterminante dranmultipliziert. Das ist wichtig für die Integraltransformationsformel, und eigentlich der wesentliche Grund für diesen ganzen Formalismus.

Beispiel 5.45 **(**$p = n-1$**)** *Analog zu Beispiel 5.40 schreiben wir*

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_i(\mathbf{x}) f_1 \wedge ... \wedge \check{f}_i \wedge ... \wedge f_n.$$

Ist insbesondere $m = n$*, so wird die Liftung*

$$(F^*\omega)(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{n} b_i(\mathbf{u}) h_1 \wedge ... \wedge \check{h}_i \wedge ... \wedge h_n$$

mit

$$b_i(\mathbf{u}) = det(F_1'(\mathbf{u}), ..., \mathbf{a}(F(\mathbf{u})), ..., F_n'(\mathbf{u})).$$

Wie alles in der Analysis kann man auch Differentialformen differenzieren und integrieren. Das Differenzieren birgt gefährliche neue Aspekte. Deswegen zuerst

5) Integration: Es sei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen und

$$\omega = g(\mathbf{x}) f_1 \wedge ... \wedge f_n \in \Omega^n(U).$$

Man definiert

$$\int_V \omega = \int_V g(\mathbf{x}) f_1 \wedge ... \wedge f_n := \int_V g(\mathbf{x}) dx_1 ... dx_n.$$

Man lässt also einfach die Dächer weg und ersetzt die Basisformen f_i durch die Symbole dx_i. (Das wird noch Konsequenzen haben!) Definiert ist das Integral, wenn g stetig und beschränkt ist. Es ist auch definiert, wenn man V durch eine kompakte Menge $V_0 \subset V$ ersetzt, auf der g stetig ist. Oder, was wir später brauchen, das Integral ist definiert für offenes V und ω mit kompaktem Träger in V.

Wegen der Liftung von Differentialformen, welche die Funktionaldeterminante automatisch enthält, wird die Transformationsformel besonders einfach:

Satz 5.41 *Es seien* $U, V \subset \mathbb{R}^n$ *offen und* $F : U \to V$ *bijektiv, differenzierbar, mit differenzierbarer Umkehrabbildung. Für jede stetige n-Form* ω *auf* V *mit kompaktem Träger ist*

$$\int_V \omega = \pm \int_U F^*(\omega).$$

Hier gilt das positive Vorzeichen, wenn $det(F') > 0$ *ist, das negative, wenn* $det(F') < 0$ *ist.*

Beweis. Mit der Integral-Transformationsformel finden wir

$$\begin{aligned}\int_V \omega &= \int_V g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int_U g(F(\mathbf{u})) |det F'(\mathbf{u})| d\mathbf{u} \\ &= \pm \int_U F^*(\omega).\end{aligned}$$

□

Schließlich kommen wir zum bereits angekündigten Differenzieren von Differentialformen. Diese Operation heißt

6) Äußere Ableitung: Wir behandeln zuerst den Fall der 0-Formen = Funktionen separat. Es sei also $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $g : U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Ihre äußere Ableitung ist das (berüchtigte) *Differential*

$$dg := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i} f_i.$$

Dabei sind $x_1, ..., x_n$ die Koordinaten auf $\mathbb{R}^n$, bezüglich der kanonischen Basis $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$ und $f_1, ..., f_n$ die Dualbasis zur kanonischen Basis.

Das Differential df ist also eine 1-Form. In jedem Punkt $\mathbf{x} \in U$ ist das Differential $dg(\mathbf{x})$ eine Linearform auf dem $\mathbb{R}^n$. Das ist der Unterschied zum Gradienten $grad\, g$. Den haben wir uns bisher als Vektor vorgestellt. Etwas weniger gelehrt geschrieben ist das Differential die Linearform

$$dg(\mathbf{x}) = (grad\, g(\mathbf{x}), -).$$

Beispiel 5.46 *Das Differential einer Koordinatenfunktion x_i ist*

$$dx_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial x_k} f_k = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k} f_k = f_i.$$

Die eben durchgeführte triviale Rechnung nehmen wir zum Anlass, die ohnehin ungeliebten Linearformen $f_i \in V^*$ ein für alle mal los zu werden. Wir schreiben also künftig immer dx_i statt f_i. Eine p-Form sieht damit so aus:

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum_{i_i < ... < i_p} \omega_{i_1,...,i_p}(\mathbf{x}) dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p}.$$

Will man Multi-Indizes verwenden, so vereinbart man

$$d\mathbf{x}_I := dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p} \quad \text{für} \quad I = i_1, ..., i_p.$$

Damit kann man also auch schreiben

$$\omega = \sum_{|I|=p} \omega_I d\mathbf{x}_I.$$

Das Differential einer Funktion g nimmt damit die intuitive Gestalt

$$dg = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i$$

an. In dieser Formel sind die Differentiale keine geheimnisvollen infinitesimal kleinen Objekte, sondern ganz normale Linearformen.

So, und jetzt kommt der Fall $p \geq 1$: Die äußere Ableitung der p-Form

$$\omega = \sum_{|I|=p} \omega_I d\mathbf{x}_I$$

ist die $p+1$-Form

$$d\omega := \sum_{|I|=p} d\omega_I \wedge d\mathbf{x}_I = \sum_{|I|=p} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} dx_i \wedge d\mathbf{x}_I.$$

Beispiel 5.47 *Wir berechnen die äußere Ableitung einer* 1*-Form* df*. Dabei sei die Funktion* f *zweimal stetig differenzierbar. Dann ist die äußere Ableitung die* 2*-Form*

$$\begin{aligned} d(df) &= d\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k\right) \\ &= \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} dx_i \wedge dx_k \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} dx_i \wedge dx_i + \sum_{i<k} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}\right) dx_i \wedge dx_k \\ &= 0 \end{aligned}$$

wegen $dx_i \wedge dx_i = 0$ *und wegen der Symmetrie*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}.$$

Das war die äußere Ableitung einer 1-Form, die ein Differential df ist. Für eine 1-Form ω, die kein Differential ist, berechnen wir allgemein

Beispiel 5.48 *Für die* 1*-Form* $\omega = \sum_{k=1}^{n} \omega_k dx_k$ *ist*

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i,k} \frac{\partial \omega_k}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_k \\ &= \sum_{i<k} \left(\frac{\partial \omega_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x_k}\right) dx_i \wedge dx_k \end{aligned}$$

Insbesondere für $n = 3$ hat ω die drei Koeffizienten ω_1, ω_2 und ω_3. Auch $d\omega$ hat dann drei Koeffizienten, und zwar

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial \omega_1}{\partial x_2} - \dfrac{\partial \omega_2}{\partial x_1} & \text{bei} \quad dx_1 \wedge dx_2 \\ \dfrac{\partial \omega_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial \omega_3}{\partial x_1} & \text{bei} \quad dx_1 \wedge dx_3 \\ \dfrac{\partial \omega_2}{\partial x_3} - \dfrac{\partial \omega_2}{\partial x_1} & \text{bei} \quad dx_2 \wedge dx_3 \end{array}$$

Schreibt man für die Basis-2-Formen nicht $dx_i \wedge dx_k$ sondern

$$d\check{x}_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3,\ -dx_1 \wedge d\check{x}_2 \wedge dx_3,\ dx_1 \wedge dx_2 \wedge d\check{x}_3,$$

so sind die Koeffizienten genau die Koeffizienten des Rotationsfeldes zum Vektorfeld $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Der Fachmann sagt, das folgende Diagramm ist kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} \text{1-Form } \omega & \rightarrow & \text{Vektorfeld } (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{2-Form } d\omega & \rightarrow & \text{Vektorfeld } rot(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \end{array}$$

Beispiel 5.49 ($p = n-1$) *Wir berechnen die äußere Ableitung der* $n-1$*-Form*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_i dx_1 \wedge ... \check{dx_i} ... \wedge dx_n$$

und erhalten

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} da_i \wedge dx_1 \wedge ... \check{dx_i} ... \wedge dx_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \right) \wedge dx_k \wedge dx_1 \wedge ... \check{dx_i} ... \wedge dx_n \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \right) dx_1 \wedge ... \wedge dx_i \wedge ... \wedge dx_n. \end{aligned}$$

Wenn wir die Koeffizienten einer $n-1$-Form ω wie in Beispiel 5.45 zu einem Vektorfeld $\mathbf{A} = (a_1, ..., a_n)$ zusammenfassen, dann hat die n-Form $d\omega$ den Koeffizienten $div(\mathbf{A})$. Wieder kann man dies mit einem Diagramm ausdrücken: Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (n-1) - \text{Form } \omega & \rightarrow & \text{Vektorfeld } \mathbf{A} \\ \downarrow d & & \downarrow div \\ n - \text{Form } d\omega & \leftarrow & div(A) \\ = div(\mathbf{A}) dx_1 \wedge ... \wedge dx_n & & \end{array}$$

ist kommutativ.

Satz 5.42 (Rechenregeln) *Die äußere Ableitung*

$$d : \Omega_k^p \rightarrow \Omega_{k-1}^{p+1}$$

hat folgende Eigenschaften:

a) Linearität: Für $a, b \in \mathbb{R}$ *ist* $d(a\omega + b\sigma) = a d\omega + b d\sigma$.

b) Produktregel: Für $\omega \in \Omega^p$ *und* $\sigma \in \Omega^q$ *ist*

$$d(\omega \wedge \sigma) = (d\omega) \wedge \sigma + (-1)^p \omega \wedge d\sigma.$$

Insbesondere gilt für eine Funktion (= 0-Form) f

$$d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega.$$

c) Transformationsregel: Für differenzierbares $F : U \rightarrow V$ *und* $\omega \in \Omega^p(V)$ *ist*

$$F^*(d\omega) = d(F^*\omega).$$

Insbesondere folgt hieraus, dass die äußere Ableitung unabhängig vom Koordinatensystem definiert ist.

d) Symmetriebedindung: $d(d\omega) = 0$.

Beweise. a) Das Differential df einer Funktion f ist offensichtlich linear in Bezug auf f. Für zwei p-Formen

$$\omega = \sum_I \omega_I dx_I, \quad \sigma = \sum_I \sigma_I dx_I \in \Omega^p$$

folgt damit

$$\begin{aligned} d(a\omega + b\sigma) &= \sum_I d(a\omega_I + b\sigma_I) \wedge dx_I \\ &= \sum_I (ad\omega_I + bd\sigma_I) \wedge dx_I \\ &= ad\omega + bd\sigma. \end{aligned}$$

b) Wegen der Additivität aus a) und der Bilinearität des äußeren Produkts (Satz 5.38) genügt es, die Aussage für Formen

$$\omega = f \cdot dx_I,\ |I| = p, \quad \sigma = g \cdot dx_J,\ |J| = q,$$

zu zeigen. Das äußere Produkt dieser beiden Formen ist

$$\omega \wedge \sigma = fg \cdot dx_I \wedge dx_J.$$

Und dessen äußere Ableitung ist

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \sigma) &= d(fg) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= gdf \wedge dx_I \wedge dx_J + fdg \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= df \wedge dx_I \wedge gdx_J + (-1)^p (fdx_I) \wedge dg \wedge dx_J \\ &= d\omega \wedge \sigma + (-1)^p \omega \wedge d\sigma. \end{aligned}$$

c) Wegen der Linearität der äußeren Ableitung d und der Liftung F^* genügt es, die Aussage für eine Form $\omega = f \cdot dx_I$ zu zeigen. Wegen der Produktregel für die Liftung ist deren Liftung

$$F^*\omega = f \circ F \cdot (F^* dx_{i_1}) \wedge ... \wedge (F^* dx_{i_p}).$$

Für die äußere Ableitung $d\omega = df \wedge dx_I$ folgt ebenso

$$F^* d\omega = F^*(df) \wedge (F^* dx_{i_1}) \wedge ... \wedge (F^* dx_{i_p}).$$

Es genügt also die Aussage

$$d(f \circ F) = F^* df$$

für Funktionen zu beweisen. Die Koordinaten auf U schreiben wir $u_1, ..., u_m$ und die auf V als $v_1, ..., v_n$. Dann ist

$$d(f \circ F) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f \circ F}{\partial u_i} du_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial v_j} \frac{\partial F_j}{\partial u_i}.$$

Mit (Beispiel 5.43)

$$F^* dv_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial u_i} du_i$$

wird

$$F^*df = F^* \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial v_j} dv_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial v_j} F^* dv_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial v_j} \frac{\partial F_j}{\partial u_i} du_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial (f \circ F)}{\partial u_i} du_i = d(f \circ F).$$

d) Auch diese Aussage brauchen wir nur für eine Form $\omega = f dx_I$ zu beweisen. Nach Definition ist

$$d\omega = df \wedge dx_I$$

und mit der Produktregel

$$d(d\omega) = d(df) \wedge dx_I - df \wedge d(dx_I).$$

Hier ist $d(df) = 0$ nach Beispiel 5.47. Und durch Induktion nach p folgt wieder mit der Produktregel

$$dx_I = d(dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p}) = d(dx_{i_1}) \wedge dx_{i_2} \wedge ... dx_{i_p} - x_{i_1} \wedge d(dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_p}) = ... = 0. \qquad \square$$

Definition 5.42 *Eine Form $\omega \in \Omega^p(U)$ heißt* geschlossen, *wenn $d\omega = 0$. Sie heißt* exakt, *wenn eine Form $\sigma \in \Omega^{p-1}$ existiert mit $d\sigma = \omega$.*

Mit anderen Worten: die geschlossenen Formen bilden den Kern der Abbildung

$$d : \Omega^p(U) \to \Omega^{p+1}(U),$$

die exakten Formen das Bild der Abbildung

$$d : \Omega^{p-1}(U) \to \Omega^p(U).$$

Eine 1-Form $\omega = \sum_i a_i dx_i$ ist genau dann exakt, also $\omega = df$, wenn das Vektorfeld $\mathbf{A} = (a_1, ..., a_n)$ ein Gradientenfeld $\mathbf{A} = grad\, f$ ist. Und ω ist genau dann geschlossen, wenn $\mathbf{A}$ der Symmetriebedingung

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}, \quad i \neq j = 1, ..., n,$$

genügt. Auf einer konvexen offenen Menge U sind beide Bedingungen äquivalent. Übersetzen wir das wieder in eine Aussage über die 1-Form ω, so sehen wir:

Für eine 1-Form ω (von Klasse C^2) auf einer konvexen offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:

- ω ist geschlossen,
- ω ist exakt.

Nicht-trivial ist hier natürlich nur die Richtung

$$d\omega = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = df.$$

Diese Aussage verallgemeinert sich auf Formen beliebiger Stufe und heißt dann Poincare-Lemma.

Satz 5.43 (Poincare-Lemma) *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen sowie konvex. Für $\omega \in \Omega_2^p$, $p \geq 1$, gilt dann: Aus*

$$d\omega = 0$$

folgt, dass es eine Form $\sigma \in \Omega_2^{p-1}$ gibt mit

$$d\sigma = \omega.$$

Der Beweis ergibt sich sehr einfach aus dem folgenden technischen Lemma. (Ich habe das hier alles aus Forster III abgeschrieben.)

Satz 5.44 (Technisches Lemma) *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir betrachten Mengen*

$$[0,1] \times U \subset \mathbb{R}^{n+1} \quad \textit{und} \quad V \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

und die Abbildungen

$$F_0, F_i : U \to M \times U$$

definiert durch

$$F_0(\mathbf{x}) := (0, \mathbf{x}), \quad F_1(\mathbf{x}) = (1, \mathbf{x}).$$

Dabei ist $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine offene Menge, welche die Menge $[0,1] \times U$ enthält. Ist $\sigma \in \Omega_1^p(U)$, $p \geq 1$, geschlossen, so gibt es ein $\eta \in \Omega_1^{p-1}(U)$ mit

$$F_1^*\sigma - F_0^*\sigma = d\eta.$$

Beweis. Wir bezeichnen die Koordinaten auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+1}$ mit $(t, u_1, ..., u_n)$. Wir schreiben

$$\omega = \sum_{|I|=p} f_I dx_I + \sum_{|J|=p-1} g_J dt \wedge dx_J$$

und berechnen

$$F_1^*\omega = \sum_I f_I(1, \mathbf{x}) dx_I, \quad F_0^*\omega = \sum_I f_I(0, \mathbf{x}) dx_I,$$

$$d\omega = \sum_I \frac{\partial f_I}{\partial t} dt \wedge dx_I + \sum_I \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_I}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I - \sum_J \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_J}{\partial x_i} dt \wedge dx_i \wedge dx_J.$$

Weil $d\omega = 0$ vorausgesetzt ist, heben sich insbesondere die dt enthaltenden Summanden auf. Damit finden wir

$$\sum_I \frac{\partial f_I}{\partial t} dx_I = \sum_J \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_J}{\partial x_i} dt \wedge dx_i \wedge dx_I.$$

Die Koeffizienten auf beiden Seiten dieser Gleichung integrieren wir über t von 0 bis 1:

$$\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(t, \mathbf{x}) dt = f_I(1, x) - f_I(0, \mathbf{x}), \quad \int_0^1 \frac{\partial g_J}{\partial x_i}(t, \mathbf{x}) dt = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^1 g_J(t, \mathbf{x}) dt.$$

Nun definieren wir die $p-1$-Form η auf U durch

$$\eta := \sum_J \left(\int_0^1 g_J(t, \mathbf{x}) dt \right) dx_J.$$

Jetzt müssen wir nur noch nachrechnen

$$\begin{aligned}
d\eta &= \sum_J \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\int_0^1 g_J(t, \mathbf{x}) dt \right) dx_i \wedge dx_J \\
&= \sum_J \left(\int_0^1 \frac{\partial g_J}{\partial x_i} dt \right) dx_i \wedge dx_J \\
&= \sum_I \left(\frac{\partial f_I}{\partial t} dt \right) dx_I \\
&= \sum_I f_I(1, x) dx_I - \sum_I f_I(0, \mathbf{x}) dx_I \\
&= F_1^*\sigma - F_0^*\sigma.
\end{aligned}$$

□

Beweis des Poincare-Lemmas. Wir können o.B.d.a. annehmen, dass U den Nullpunkt enthält. Wir verwenden die Abbildung

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad F(t, \mathbf{x}) := t \cdot \mathbf{x}.$$

Dann ist $V := F^{-1}(U) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen mit $[0,1] \times U \subset V$. Die Abbildungen F_0 und F_1 seien wie im vorangegangenen Lemma definiert. Die p-Form

$$\sigma := F^* \omega$$

auf V ist geschlossen (Satz 5.42 c). Nach dem Lemma gibt es eine $p-1$-Form η auf U mit

$$d\eta = F_1^* \sigma - F_0^* \sigma.$$

Die Abbildung $F \circ F_i : U \to U$ ist die Identität. Damit folgt

$$F_1^* \sigma = F_1^*(F^* \omega) = (F \circ F_1)^* \omega = \omega.$$

Die Abbildung $F \circ F_0 : U \to U$ ist konstant, die Null-Abbildung. Damit wird

$$F_0^*(\sigma) = (F \circ F_0)^* \omega = 0.$$

Insgesamt zeigen die beiden letzten Gleichungen

$$\omega = d\sigma.$$

□

Aufgabe 5.26 *Es seien die Differentialformen*

$$\omega = x_2 dx_1 - x_3 dx_2 + x_4 dx_3 + x_1 dx_4 \in \Omega^1(\mathbb{R}^4) \quad \textit{und} \quad \sigma = x_3 x_4 dx_1 \wedge dx_2 + x_1 x_2 dx_3 \wedge dx_4 \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$$

sowie die Abbildung $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$

$$(u_1, u_2, u_3, u_4) \mapsto (e^{u_1} cos(u_2), e^{u_1} sin(u_2), u_3^2 - u_4^2, 2u_3 u_4)$$

gegeben. Berechnen Sie die Differentialformen

$$\omega \wedge \sigma,\ d\omega,\ d\sigma, d\omega \wedge \sigma,\ d\omega \wedge d\sigma,\ d(\omega \wedge \sigma),$$

$$F^* \omega,\ F^* \sigma\, F^* d\sigma.$$

Aufgabe 5.27 *Im* $\mathbb{R}^2$ *seien Polarkoordinaten* $(r, \varphi)1)$ *und* (r, φ_2) *eingeführt durch*

$$x_1 = rcos(\varphi_1), x_2 = rsin(\varphi_1), \quad (0 \le \varphi_1 < 2\pi)$$

auf $U_1 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1, x_2) :\ x_1 \ge 0, x_2 = 0\}$, *beziehungsweise*

$$x_1 = rcos(\varphi_2 + \frac{\pi}{2}), x_2 = rsin(\varphi_2 + \frac{\pi}{2}), \quad (0 \le \varphi_2 < 2\pi)$$

auf $U_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1, x_2) :\ x_1 = 0, x_2 \ge 0\}$. *Zeigen Sie: Für die Formen* $d\varphi_i \in \Omega^1(U_i)$, $i = 1, 2$, *ist* $d\varphi_i = \omega | U_i$ *mit*

$$\omega - \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2} dx_1 + \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} dx_2 \in \Omega_1(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{0}).$$