

# Analysis II für Physiker

Wolf P. Barth

Sommersemester 06

Mathematisches Institut der Universität  
Erlangen, Bismarckstraße 1 $\frac{1}{2}$   
e-mail: barth@mi.uni-erlangen.de

Version vom 8. August 2006

## Inhaltsverzeichnis

### -1 Ergänzungen zu Analysis I (Aufgaben) **2**

- 1.1 Ergänzungen zur Differentialrechnung . . . . . 2
- 1.2 Ergänzungen zur Integralrechnung 6

### 0 Kurze Einführung **10**

### 1 Differentialrechnung mehrerer Veränderlicher **13**

- 1.1 Grundlagen . . . . . 13
- 1.2 Differenzierbare Abbildungen . . . 17
- 1.3 Rechenregeln und Beispiele . . . . 23
- 1.4 Taylor-Entwicklung . . . . . 30
- 1.5 Umkehrung differenzierbarer Abbildungen, implizite Funktionen . . 34
- 1.6 Lokale Extrema . . . . . 42
- 1.7 Die Differentialoperatoren *grad*, *rot*, *div* und  $\Delta$  . . . . . 51

### 2 Integralrechnung mehrerer Veränderlicher **58**

- 2.1 Doppelintegrale . . . . . 58
- 2.2 Definitionen . . . . . 62
- 2.3 Volumenberechnung . . . . . 71

- 2.4 Die Integraltransformationsformel . 78
  - 2.4.1 Integration in Polarkoordinaten . . . . . 79
  - 2.4.2 Integration in Kugelkoordinaten . . . . . 80
  - 2.4.3 Volumen eines Rotationskörpers (erste Guldin'sche Regel) . . . . . 81
  - 2.4.4 Volumen der  $n$ -dimensionalen Einheitskugel  $K_n$  . . . . . 82

### 3 Flächenintegrale, Vektoranalysis **86**

- 3.1 Kurvenintegrale . . . . . 86
- 3.2  $k$ -dimensionale Flächen im  $\mathbb{R}^n$  . . 92
- 3.3 Der Integralsatz von Gauß . . . . . 100
- 3.4 Der Integralsatz von Stokes . . . . 108
- 3.5 Potential und Vektorpotential . . . 110

### 4 Fourier-Reihen **117**

- 4.1 Erinnerungen und Ergänzungen zur Integralrechnung . . . . . 117
- 4.2 Das ON-System der Winkelfunktionen . . . . . 119
- 4.3 Fourier-Koeffizienten . . . . . 123
- 4.4 Punktweise Konvergenz . . . . . 130
- 4.5 Konvergenz im quadratischen Mittel 137
- 4.6 Komplexe Schreibweise . . . . . 139

## -1 Ergänzungen zu Analysis I (Aufgaben)

In diesem Abschnitt möchte ich einige Punkte aus der Analysis einer Veränderlichen besprechen, die ich voraussetze, wenn ich mich der Analysis mehrerer Veränderlicher zuwende. Dies ist allerdings abhängig davon, was in der Vorlesung Analysis I behandelt wurde und was nicht. Es ist nicht jedes Jahr das gleiche. Dies ist nur einer der Gründe dafür, dass ich diese Ergänzungen nicht über die Jahre schriftlich fixiere, sondern dass ich sie jedesmal der Situation anpasse. Was ich allerdings schriftlich fixieren möchte sind Aufgaben hierzu. Deswegen stelle ich hier einige Aufgaben zusammen zu den Themen

### -1.1 Ergänzungen zur Differentialrechnung

-1.1,a) Differentiation und Konvergenz

-1.1,b) Höhere Ableitungen

-1.1,c) Lokale Extrema

-1.1,d) Taylor-Reihen

### -1.2 Ergänzungen zur Integralrechnung

-1.2,a) Berechnung von Integralen

-1.2,b) Integration und Konvergenz

-1.2,c) Partialbruchzerlegung

-1.2,d) Flächenberechnung und uneigentliche Integrale

## -1.1 Ergänzungen zur Differentialrechnung

### -1.1 a) Differentiation und Konvergenz

**Aufgabe -1.1 a)** *Entwickeln Sie*

$$f(x) = \frac{1}{4 + x^2}$$

*in eine Potenzreihe um den Nullpunkt und geben Sie deren Konvergenzradius an.*

*b) Bestimmen Sie  $f'(x)$  und differenzieren Sie die Potenzreihe aus a) gliedweise*

**Aufgabe -1.2** *Stellen Sie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$$

*für  $|x| < 1$  als rationale Funktion dar.*

**Aufgabe -1.3** *Stellen Sie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{n!} x^n$$

*als elementare Funktion dar.*

**Aufgabe -1.4** *Es sei*

$$s(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} x^{2n+2}.$$

Berechnen Sie

a)  $s''(x)$ ,

b)  $\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} - \frac{1}{7 \cdot 8} \pm \dots = s(1)$ .

**Aufgabe -1.5** Zeigen Sie für  $x > 0$

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} e^{-nx}.$$

**Aufgabe -1.6** Zeigen Sie für  $|x| < 1$

$$\frac{1-x}{1+x} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

**Aufgabe -1.7** Entwickeln Sie

$$f(x) = \frac{1}{(1-x^2)^2}$$

in eine Potenzreihe um den Nullpunkt.

**-1.1 b) Höhere Ableitungen**

**Aufgabe -1.8** Es sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie

$$f''(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} (f(2h) - 2f(h) + f(0)).$$

**Aufgabe -1.9** Zeigen Sie: Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

ist differenzierbar, aber nicht stetig differenzierbar.

**Aufgabe -1.10** Zeigen Sie

$$\frac{d^k}{dx^k} \frac{1}{1-x} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$$

**Aufgabe -1.11** Beweisen Sie die Produktformel von Leibniz

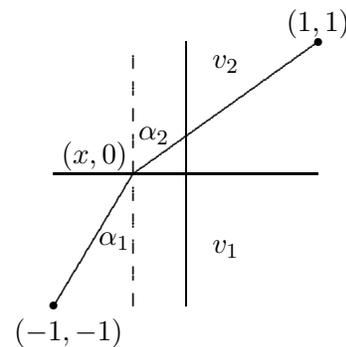
$$\frac{d^n(f \cdot g)}{dx^n} = \sum_{k=0}^n \frac{d^{n-k} f}{dx^{n-k}} \cdot \frac{d^k g}{dx^k}.$$

**-1.1 c) Lokale Extrema**

**Aufgabe -1.12 (Snellius)** Ein Lichtstrahl gelange vom Punkt  $(-1, -1)$  zum Punkt  $(1, 1)$ , indem er zunächst geradlinig von  $(-1, -1)$  zum Punkt  $(x, 0)$  verläuft, und von dort geradlinig nach  $(1, 1)$ . Unterhalb der  $x$ -Achse sei die Lichtgeschwindigkeit  $= v_1$ , darüber  $= v_2$ . Zeigen Sie: Die Zeit, welche der Lichtstrahl für die Gesamtstrecke braucht, ist minimal, wenn

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)}$$

Dabei sind  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  die Winkel wie in nebenstehender Zeichnung. Die Bedeutung  $\sin = \text{Gegenkathete}/\text{Hypotenuse}$  aus der Schule werde als bekannt vorausgesetzt.



**Aufgabe -1.13** Am Rio Grande soll eine rechteckige Weide mit 80 000 qm Fläche eingezäunt werden. Eine Seite der Weide wird vom geradlinigen Fluss begrenzt, hier ist kein Zaun nötig. Wie sind die Seiten der Weide zu wählen, damit die Zaunlänge minimal wird?

**Aufgabe -1.14** Ein Draht der Länge 1m wird in zwei Teile der Längen  $x$  und  $y$  geschnitten, wobei auch die Extremfälle  $x = 0$  und  $x = 1$  möglich seien. Aus einem Teil wird ein Kreis gebogen, aus dem anderen ein Quadrat. Wie muss der Schnitt gelegt werden, damit die Summe der Flächen von Kreis und Quadrat minimal, bzw. maximal wird? (Hinweis: Ein Kreis vom Umfang  $x$  hat die Fläche  $\frac{x^2}{4\pi}$ .)

**Aufgabe -1.15** Bestimmen Sie Lage und Art der lokalen Extrema für die Funktionen ( $n \in \mathbb{N}$ )

a)  $f(x) = x^n e^x$                       b)  $g(x) = x^n \ln(x), (x > 0)$ .

**Aufgabe -1.16** Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion  $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \sin(x)$ .

**Aufgabe -1.17** Bestimmen Sie  $c \in \mathbb{R}$  derart, dass die Gerade  $y = cx$  den Funktionsgraphen von  $e^x$  in einem Punkt berührt.

**Aufgabe -1.18** Die Gleichung

$$y(t) = -\frac{9.81}{2}t^2 + at$$

beschreibt eine Wurfbewegung mit Anfangsgeschwindigkeit  $a > 0$ . Bestimmen Sie die maximale Höhe.

**Aufgabe -1.19** Bestimmen Sie den Maximalwert der Funktion  $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$  für  $0 < x < 1$ .

**Aufgabe -1.20** Die Gleichungen

$$\begin{aligned} x(t) &= b \cdot t \\ y(t) &= -\frac{9.81}{2}t^2 + at \end{aligned}$$

beschreiben eine Wurfbewegung mit horizontaler Anfangsgeschwindigkeit  $b$  und vertikaler Anfangsgeschwindigkeit  $a$ . Berechnen Sie die größtmögliche Wurfweite bei fester Anfangsgesamtgeschwindigkeit  $v = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

**Aufgabe -1.21** Bestimmen Sie die Grundseite  $g$  und Höhe  $h$  eines dem Einheitskreis einbeschriebenen Rechtecks so, dass  $gh^2$  maximal wird.

**Aufgabe -1.22** Zwei Gänge der Breite 1m kreuzen sich rechtwinklig. Was ist die maximale Länge einer Stange (der Dicke 0), die man waagrecht (ohne zu kippen) von einem Gang in den dazu senkrechten Gang transportieren kann?

**-1.1 d) Taylor-Reihen**

**Aufgabe -1.23** Bestimmen Sie eine rationale Zahl  $q$  mit  $|\cos(1) - q| < \frac{1}{100}$

**Aufgabe -1.24** Zeigen Sie für  $|x| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n = -x + (1+x)\ln(1+x).$$

**Aufgabe -1.25** a) Geben Sie das zweite Taylorpolynom  $p_2(x)$  für  $\sin(x - \frac{x^3}{3})$  zum Entwicklungspunkt 0 an.

b) Zeigen Sie für  $|x| \leq 1$

$$|\sin(x - \frac{x^3}{3}) - p_2(x)| \leq \frac{4}{3}|x|^3.$$

**Aufgabe -1.26** Entwickeln Sie  $e^x \sin(x)$  in eine Taylorreihe bis  $x^3$ .

**Aufgabe -1.27** Zeigen Sie für  $0 < x < \pi$

$$\cos(x) > 1 - x^2.$$

**Aufgabe -1.28** Berechnen Sie  $\sin(1)$  auf drei Stellen.

**Aufgabe -1.29** Zeigen Sie

a)  $\sin^2(x) = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 \pm \dots$ ,    b)  $\sin^3(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^5 + \frac{13}{120}x^7 \pm \dots$

**Aufgabe -1.30** Zeigen Sie für  $x \in [0, 10^{-2}]$

$$0 \leq 1 + \frac{x}{2} - \sqrt{1+x} \leq \frac{1}{8}10^{-1}$$

**Aufgabe -1.31** Bestimmen Sie ein Polynom  $p(x)$  vom Grad 3 mit

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} (\cos(2x)\sin(6x) - p(x)) = 0.$$

**Aufgabe -1.32** Zeigen Sie für alle  $x > 0$

$$1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 < (1+x)^{\frac{3}{2}} < 1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2.$$

**Aufgabe -1.33** Entwickeln Sie

$$\frac{x}{x^2 - x - 2}$$

in eine Taylorreihe um  $x = 0$ .

**Aufgabe -1.34** Zeigen Sie für  $|x| < 1$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2k)} x^{2k}.$$

**Aufgabe -1.35** Zeigen Sie:

a) Zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  gibt es ein  $\theta$ ,  $0 < \theta < 1$ , mit

$$e = \sum_{\nu=0}^n \frac{1}{\nu!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!},$$

b)  $e$  ist irrational, d.h., nicht von der Form  $p/q$  mit  $p, q \in \mathbb{N}$ .

## -1.2 Ergänzungen zur Integralrechnung

### -1.2 a) Berechnung von Integralen

**Aufgabe -1.36** Bestimmen Sie eine Stammfunktion für

$$a) \ln(x), (x > 0) \quad b) \arctg(x) \quad c) \sin^2(x) \quad d) e^{-x} \cos(x)$$

**Aufgabe -1.37** Berechnen Sie eine Stammfunktion für

$$f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2} \ln(x) \quad (x > 0).$$

**Aufgabe -1.38** Zeigen Sie für  $m, n \in \mathbb{N}$ :

$$a) \int_0^{2\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \int_0^{2\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = \delta_{mn} \cdot \pi,$$

$$b) \int_0^{2\pi} \cos(mx) \sin(nx) dx = 0.$$

**Aufgabe -1.39** Bestimmen Sie eine Stammfunktion für  $\sqrt{1+x^2}$  durch die Substitution  $x = \sinh(t)$ .

**Aufgabe -1.40** Bestimmen Sie Stammfunktionen für  $\tan(x)$  und  $\cot(x)$ .

**Aufgabe -1.41** Bestimmen Sie durch partielle Integration Stammfunktionen für

$$\arcsin(x) \quad \text{und} \quad \arctan(x).$$

**Aufgabe -1.42** Zeigen Sie, dass

$$F(x) = \ln|x + \sqrt{1+x^2}|$$

eine Stammfunktion von

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

ist.

### -1.2 b) Integration und Konvergenz

**Aufgabe -1.43** Entwickeln Sie

- a)  $\int_0^x e^{-t^2} dt$  in eine Potenzreihe um  $x = 0$ ,  
b)  $\int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$  in eine Potenzreihe um  $x = 0$ ,  
c)  $\int_1^x \frac{e^t}{t} dt$  in eine Potenzreihe um  $x = 1$ .

**Aufgabe -1.44** Stellen Sie

- a)  $\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!} dx$ ,  
b)  $\int_0^1 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3} dx$   
als Reihen dar.

**Aufgabe -1.45** Zeigen Sie

$$\int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1) \cdot (2\nu+1)!}.$$

**-1.2 c) Partialbruchzerlegung**

**Aufgabe -1.46** Berechnen Sie  $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$ .

**Aufgabe -1.47 (Forster I)** a) Bestimmen Sie für

$$f(x) = \frac{1}{1+x^4}$$

eine Partialbruchzerlegung der Form

$$\frac{ax+b}{1+\sqrt{2}x+x^2} + \frac{cx+d}{1-\sqrt{2}x+x^2}.$$

b) Bestimmen Sie eine Stammfunktion für  $f(x)$ .

**Aufgabe -1.48** Bestimmen Sie eine Stammfunktion für

- a)  $\frac{1}{u(u+1)}$  mittels Partialbruchzerlegung,  
b)  $\frac{1}{e^x+1}$  mit der Substitutionsformel,  
c)  $\frac{e^x-1}{e^x+1}$ .

**Aufgabe -1.49** Zeigen Sie

$$\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln(2).$$

**-1.2 d) Flächenberechnung und uneigentliche Integrale**

**Aufgabe -1.50** Berechnen Sie die Fläche unter der Kurve  $y = \sin(x)$  zwischen  $x = -\frac{\pi}{2}$  und  $x = \frac{\pi}{2}$ .

**Aufgabe -1.51** Beweisen oder widerlegen Sie die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_0^h \cos(x^2) dx.$$

**Aufgabe -1.52** a) Berechnen Sie  $\int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}} dx$ .

b) Zeigen Sie, dass  $\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx$  existiert.

**Aufgabe -1.53** Berechnen Sie  $\int_0^\infty \frac{1}{\cosh(x)} dx$ .

**Aufgabe -1.54** Berechnen Sie die Fläche der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

**Aufgabe -1.55** Ist die Fläche im ersten Quadranten zwischen der Hyperbel  $x^2 - y^2 = 1$  und ihrer Asymptote  $y = x$  endlich?

**Aufgabe -1.56** Berechnen Sie

$$a) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx, \quad b) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} dx.$$

**Aufgabe -1.57** Für welche  $0 < \alpha \in \mathbb{R}$  existiert

$$\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x^\alpha} dx \quad ?$$

Berechnen Sie das Integral für diese  $\alpha$ .

**Aufgabe -1.58** Berechnen Sie

$$\int_0^\infty e^{-x} \cos(x) dx \quad \text{und} \quad \int_0^\infty e^{-x} \sin(x) dx.$$

**Aufgabe -1.59** Berechnen Sie

$$I_n := \int_0^\infty e^{-x} x^n dx, \quad n \in \mathbb{N},$$

durch Induktion nach  $n$ .

**Aufgabe -1.60** Berechnen Sie für  $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{-\infty}^\infty x^n e^{-x^2} dx.$$

Verwenden Sie dabei (ohne Beweis)

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

**Aufgabe -1.61** Konvergieren die folgenden Integrale:

$$a) \int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x + 1}, \quad b) \int_0^{\pi/2} \tan(x) dx.$$

**Aufgabe -1.62** Zeigen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx.$$

**Aufgabe -1.63** Zeigen Sie

$$\frac{1}{3000} \leq \sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n^4} \leq \frac{1}{2000}$$

durch Vergleich mit

$$\int_{10}^{\infty} \frac{1}{x^4} dx.$$

## 0 Kurze Einführung

Stoff der Analysis I ist Differential- und Integralrechnung einer reellen Veränderlichen. Dies sind die drei großen Problemkreise

1. Konvergenz (=Folgen und Reihen), stetige Funktionen,
2. Differenzieren,
3. Integrieren.

Und um genau dieselben Problemkreise geht es in dieser Vorlesung Analysis II, allerdings werden wir nicht mehr Funktionen  $f(x)$  einer Veränderlichen betrachten, sondern Funktionen  $f(x_1, \dots, x_n)$  von mehreren Variablen. Als Begleittext zu dieser Vorlesung eignet sich der erste Teil des Buches

- O. Forster: Analysis II, rororo-vieweg

Allerdings wird hier nur die Differentialrechnung abgedeckt. Integration kommt erst im Forster III. Die Darstellung dort ist für uns jedoch zu detailliert. Andere Lehrbücher, die den Stoff dieser Vorlesung enthalten, sind z.B.

- K. Endl, W. Luh: Analysis II, Akad. Verl.ges. Wiesbaden
- H. Fischer, H. Kaul: Mathematik für Physiker 1, Teubner
- S. Großmann: Mathematischer Einführungskurs für Physiker, Teubner

Wenn ich Übungsaufgaben aus einem dieser Bücher übernehme, dann gebe ich das an. Aber ich habe diese Vorlesung schon mehrere Male gehalten. Und viele der Übungsaufgaben von damals übernehme ich jetzt wieder. Dabei kann es vorkommen, dass eine aus den genannten Büchern dabei ist, ohne dass ich das merke. Außerdem werde ich Aufgaben aus dem schriftlichen Staatsexamen Mathematik im nicht-vertieften Fach oder dem schriftlichen Zwischenexamen im vertieften Fach verwenden.

Bevor ich mit der Behandlung des Stoffes beginne, möchte ich erst einiges zur Notation und zum Sprachgebrauch vorausschicken.

Der  $\mathbb{R}^n$  ist der Raum der  $n$ -tupel  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  reeller Zahlen. Die heißen auch *Vektoren*. Man kann sie als Zeilenvektoren schreiben (das geht drucktechnisch einfacher) oder als Spaltenvektoren. Man kann die Indizes unten oder oben schreiben, darauf wird es in dieser Vorlesung nicht ankommen. Es gibt allerdings Teilgebiete der theoretischen Physik, wo man da einen großen Unterschied macht. Hier kann ich darauf nicht sinnvoll eingehen.

Ich habe mir angewöhnt, Vektoren fettgedruckt zu schreiben:

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

An der Tafel macht das Schwierigkeiten, aber im gedruckten Text ist es doch ein sehr schönes Mittel zur Strukturierung.

Man kann einwenden: Warum behandeln die Mathematiker den  $\mathbb{R}^n$  in seiner vollen Allgemeinheit, und nicht nur die Ebene  $\mathbb{R}^2$  und den Raum  $\mathbb{R}^3$ ? Die Mathematik im  $\mathbb{R}^n$  ist für  $n \geq 4$  doch absolut unanschaulich! Wenn es mir auf die Anschaulichkeit ankommt, oder wenn es keinen großen Unterschied

macht, werde ich mich tatsächlich oft auf die Fälle  $n = 2$  oder  $n = 3$  beschränken. Aber die Fälle  $n \geq 4$  kommen eben auch in der Physik vor: Der  $\mathbb{R}^4$  z.B. ist der Raum, in dem die spezielle Relativitätstheorie stattfindet, und ein punktförmiges Teilchen der theoretischen Mechanik wird beschrieben durch seinen Ortsvektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  und seinen Geschwindigkeitsvektor  $\dot{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$ . Der Zustand eines solchen Teilchens ist deswegen ein Vektor  $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \in \mathbb{R}^6$ .

Im ersten Semester behandelt man *Funktionen*, d.h. Abbildungen

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}.$$

In diesem Semester betrachten wir allgemeiner *Abbildungen*

$$F : D \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad D \subset \mathbb{R}^n$$

mit  $n \geq 1$  und  $k \geq 1$ . Eine solche Abbildung ordnet also jedem Vektor  $\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$  einen neuen Vektor  $\mathbf{y} = F(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^k$  zu. Den können wir in Komponenten schreiben

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ F_k(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

und sehen: Die Abbildung  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^k$  ist dasselbe wie das  $k$ -tupel

$$F_1 : D \rightarrow \mathbb{R}, \dots, F_k : D \rightarrow \mathbb{R}$$

ihrer *Komponenten*  $F_\kappa$ ,  $\kappa = 1, \dots, k$ .

Abbildungen  $F : D \rightarrow \mathbb{R}$  (Spezialfall  $k = 1$ ) nennt man *Funktionen*. Eine Abbildung  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^k$  ist also dasselbe, wie das  $k$ -tupel  $(F_1, \dots, F_k)$  ihrer Komponentenfunktionen.

Je nach den Werten der Dimensionen  $n$  und  $k$  benutzt man Abbildungen  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ , zur Beschreibung verschiedener Situationen, und hat manchmal auch spezielle Namen dafür:

- $k = 1$ : Das sind die gewöhnlichen Funktionen  $f(x_1, \dots, x_n)$ . Im Fall  $n = 3$  etwa benutzt man sie zur Beschreibung skalarer Felder, wie es z.B. eine Temperaturverteilung ist.
- $n = 1$ : Hier wird jeder reellen Zahl  $t \in D \subset \mathbb{R}$  (jedem *Parameter*) ein Vektor  $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^k$  zugeordnet. Für  $k = 3$  tritt so etwas auf bei der Beschreibung der Bahn eines punktförmigen Teilchens im Raum. Der Parameter  $t$  ist meist die Zeit. Und eine solche Abbildung  $D \rightarrow \mathbb{R}^k$  mit  $D \subset \mathbb{R}$  nennt man eine *Kurve* im  $\mathbb{R}^k$ .
- $n = k$ : Solche Abbildungen kommen z.B. vor als Koordinatentransformationen. Die wichtigsten davon sind die Transformation in Polarkoordinaten

$$F : \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix},$$

und die Transformation in Kugelkoordinaten

$$F : \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ r \cdot \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ r \cdot \sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

Aber Abbildungen mit  $n = k$ , zumindest in Dimension 3, benutzt man auch zur Beschreibung von physikalischen Situationen: Jedem Vektor  $\mathbf{x}$  wird ein Bildvektor  $\mathbf{y}(\mathbf{x})$  zugeordnet. Stellt man sich diesen Bildvektor  $\mathbf{y}(\mathbf{x})$  im Punkt  $\mathbf{x}$  angeheftet vor, so nennt man das ein *Vektorfeld*. Damit beschreibt man etwa die Geschwindigkeitsverteilung von Flüssigkeitsströmungen oder elektrische oder magnetische Felder.

- $n = 2, k = 3$ : Solche Abbildungen benutzt man zur Beschreibung von *Flächen* (oder spezieller: Oberflächen) im Raum. So wird etwa die Oberfläche der Einheits-Kugel (die Einheits-Sphäre) durch die Abbildung

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cos(\theta) \\ \sin(\varphi)\cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

beschrieben. Wenn man jeden Punkt der Kugeloberfläche nur einmal beschreiben möchte, muss man sich auf den Bereich

$$D : \{(\varphi, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \varphi < 2\pi, -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2\}$$

beschränken.

- $n = k - 1$ : So etwas nennt man - in Analogie zum Fall  $k = 3$  - eine *Hyperfläche* im  $\mathbb{R}^k$ .

# 1 Differentialrechnung mehrerer Veränderlicher

## 1.1 Grundlagen

Inhalt dieses Kapitels ist das Differenzieren von Funktionen mehrerer Veränderlicher, oder allgemeiner von Abbildungen

$$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k.$$

Bevor wir anfangen zu differenzieren, noch einige Definitionen:

**Definition 1.1** Die euklidische Länge (oder Norm) eines Vektors  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  bezeichnen wir mit  $\|\mathbf{x}\|$ , also

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{\nu=1}^n x_\nu^2}.$$

Die Länge  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$  eines Differenzvektors  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$  heißt der Abstand dieser Vektoren.

Ich möchte hier auch kurz erklären, was diese Norm für  $n \times n$ -Matrizen bedeutet. Eine  $n \times n$ -Matrix

$$A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$$

kann man ja auch auffassen als einen Vektor

$$(a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,n}, a_{2,1}, \dots, a_{n,n}) \in \mathbb{R}^{n^2}.$$

Die Norm dieses Vektors nennt man *die Norm der Matrix*  $A$ :

$$\|A\| := \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^2}$$

Mit der Matrix-Norm kann man ganz schön rechnen. Es gilt

- a)  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$  für je zwei  $n \times n$ -Matrizen  $A, B$ .
- b)  $\|A \cdot \mathbf{v}\| \leq \|A\| \cdot \|\mathbf{v}\|$  für jeden Vektor  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ .
- c)  $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$  für je zwei  $n \times n$ -Matrizen  $A, B$ .

Beweise: Eigenschaft a) ist nichts anderes als die Dreiecksungleichung aus der Linearen Algebra im Vektorraum  $\mathbb{R}^{n^2}$  der  $n \times n$ -Matrizen.

b) Der Vektor  $\mathbf{w} = A \cdot \mathbf{v}$  hat die Komponenten

$$w_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} v_j = (A_i, \mathbf{v}),$$

wo  $A_i$  den  $i$ -ten Zeilenvektor der Matrix  $A$  bezeichnet. Aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung der Linearen Algebra folgt

$$|w_i| \leq \|A_i\| \cdot \|\mathbf{v}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n A_{i,j}^2} \cdot \|\mathbf{v}\|,$$

und damit

$$\| \mathbf{w} \| = \sqrt{\sum_{i=1}^n w_i^2} \leq \sqrt{\sum_{i,j=1}^n A_{i,j}^2} \cdot \| \mathbf{v} \| = \| A \| \cdot \| \mathbf{v} \| .$$

c) Bezeichnet  $B^j$  den  $j$ -ten Spaltenvektor der Matrix  $B$ , so hat die Produktmatrix  $A \cdot B$  die Spaltenvektoren  $A \cdot B^j$ . Nach b) ist die Norm eines jeden dieser Vektoren

$$\| A \cdot B^j \| \leq \| A \| \cdot \| B^j \| ,$$

und damit

$$\| A \cdot B \| = \sqrt{\sum_{j=1}^n \| A \cdot B^j \|^2} \leq \| A \| \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^n \| B^j \|^2} = \| A \| \cdot \| B \| . \quad \square$$

Genauso, wie es konvergente Folgen von Zahlen gibt, so gibt es auch konvergente Folgen von Vektoren:

**Definition 1.2** Die Folge  $(\mathbf{x}_\mu)_{\mu \in \mathbb{N}}$  von Vektoren  $\mathbf{x}_\mu \in \mathbb{R}^n$  heißt konvergent gegen den Vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , wenn zu jedem  $0 < \epsilon \in \mathbb{R}$  ein  $M(\epsilon)$  existiert mit

$$\| \mathbf{x}_\mu - \mathbf{x} \| < \epsilon \quad \text{für} \quad \mu > M(\epsilon) .$$

Für jeden Vektor  $\mathbf{v} = (v_i)$  ist

$$|v_i| \leq \| \mathbf{v} \| \leq \sum_{i=1}^n |v_i| .$$

Für  $\mathbf{v} = \mathbf{x}_\mu - \mathbf{x}$  bedeutet das

$$|x_{\mu,i} - x_i| \leq \| \mathbf{x}_\mu - \mathbf{x} \| \leq \sum_{i=1}^n |x_{\mu,i} - x_i| ,$$

und damit sieht man: Die Folge  $(x_\mu)$  konvergiert genau dann gegen den Vektor  $\mathbf{x}$ , wenn für  $i = 1, \dots, n$  die  $i$ -te Komponentenfolge  $x_{\mu,i}$  gegen  $x_i$  konvergiert.

Genau wie für reelle Zahlen hat man auch für Vektoren den Begriff der Cauchy-Folge:

**Definition 1.3** Die Folge  $(\mathbf{x}_\mu)_{\mu \in \mathbb{N}}$  von Vektoren  $\mathbf{x}_\mu \in \mathbb{R}^n$  heißt Cauchy-Folge, wenn zu jedem  $0 < \epsilon \in \mathbb{R}$  ein  $M(\epsilon)$  existiert mit

$$\| \mathbf{x}_\mu - \mathbf{x}_\nu \| < \epsilon \quad \text{für} \quad \mu, \nu > M(\epsilon) .$$

Wegen

$$| \mathbf{x}_{\mu,i} - \mathbf{x}_{\nu,i} | \leq \| \mathbf{x}_\mu - \mathbf{x}_\nu \|$$

ist dann für  $i = 1, \dots, n$  die Folge  $\mathbf{x}_{\mu,i}$  der  $i$ -ten Komponenten eine Cauchy-Folge reeller Zahlen. Die konvergiert. Daraus folgt, dass jede Cauchy-Folge von Vektoren im  $\mathbb{R}^n$  konvergiert.

Wir erinnern uns noch an folgende Definitionen, die fast wörtlich so auch im  $\mathbb{R}^1$  benutzt werden: Eine Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}^n$

heißt	falls
Kugel	$M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \ \mathbf{x} - \mathbf{x}_0\  < r\}$
offen	mit jedem Punkt $\mathbf{x}_0 \in M$ auch eine ganze Kugel um $\mathbf{x}_0$ zu $M$ gehört
abgeschlossen	$\mathbb{R}^n \setminus M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \notin M\}$ offen ist
Abschluss $\bar{N}$ von $N$	$M$ Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen ist, die $N$ enthalten
Rand $\partial N$ von $N$	$M = \bar{N} \cap (\overline{\mathbb{R}^n \setminus N})$
beschränkt	$M$ in einer Kugel enthalten ist
kompakt	$M$ beschränkt und abgeschlossen ist.

Äquivalent dazu, dass  $M$  offen ist, ist die Eigenschaft: Ist  $\mathbf{x} \in M$ , und ist  $\mathbf{x}_\mu$  eine gegen  $\mathbf{x}$  konvergente Folge von Vektoren, so gibt es immer ein  $m \in \mathbb{N}$  mit  $\mathbf{x}_\mu \in M$  für  $\mu > m$ .

Und äquivalent dazu, dass  $M$  abgeschlossen ist, ist die Eigenschaft: Für jede Folge  $\mathbf{x}_\mu$  von Vektoren  $\mathbf{x}_\mu \in M$ , die gegen einen Vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  konvergiert, gilt  $\mathbf{x} \in M$ .

Wir brauchen noch zwei Eigenschaften, die kompakte Mengen charakterisieren. Aber weil wir sie anwenden und keine Theorie machen wollen, interessieren uns nur die folgenden Implikationen:

Wenn  $M \subset \mathbb{R}^n$  kompakt ist, dann gelten:

- Jede Folge von Vektoren  $\mathbf{x}_\mu \in M$  besitzt eine in  $M$  konvergente Teilfolge.
- Ist  $M$  enthalten in einer Vereinigung  $\bigcup U_\mu$  von offenen Mengen  $U_\mu \subset \mathbb{R}^n$ , so ist  $M$  auch schon in einer Vereinigung  $\bigcup_1^m U_\mu$  von endlich vielen dieser offenen Mengen enthalten.

Beweis. a) Für  $\nu = 1, \dots, n$  sind die Komponentenfolgen  $(x_{\mu,\nu})_{\mu \in \mathbb{N}}$  beschränkt, weil  $M$  beschränkt ist. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß in einer Variablen, besitzen sie alle konvergente Teilfolgen. Geht man zu diesen Teilfolgen über, erst in der Folge  $(x_{\mu,1})$ , dann in der Folge  $(x_{\mu,2})$ , usw., so sieht man, dass die Folge  $\mathbf{x}_\mu$  eine konvergente Teilfolge besitzt. Weil  $M$  abgeschlossen ist, muss der Grenzwert dieser Folge zu  $M$  gehören.

b) Wenn es kein  $m$  gibt, mit  $M \subset \bigcup_1^m U_\mu$ , dann gibt es also zu jedem  $m \in \mathbb{N}$  einen Punkt  $\mathbf{x}_m \in M$  mit  $\mathbf{x}_m \notin \bigcup_1^m U_\mu$ . Nach a) hat die Folge  $\mathbf{x}_m$  eine konvergente Teilfolge, wir können gleich annehmen, dass sie selbst konvergiert, etwa gegen  $\mathbf{x} \in M$ . Wegen  $\mathbf{x} \in M \subset \bigcup U_\mu$  gibt es ein  $U_{\mu_0}$  mit  $\mathbf{x} \in U_{\mu_0}$ . Weil  $U_{\mu_0}$  offen ist, gibt es ein  $m$  mit  $\mathbf{x}_\mu \in U_{\mu_0}$  für  $\mu > m$ . Dann ist die ganze Folge enthalten in  $(\bigcup_1^m U_\mu) \cup U_{\mu_0}$ , Widerspruch!

**Beispiel 1.1** Für jede  $n \times n$ -Matrix  $A$  ist die Matrizen-Folge  $(A^\mu)_{\mu \in \mathbb{N}}$  im Vektorraum  $\mathbb{R}^{n^2}$  wohldefiniert, und damit auch die Matrizen-Reihe

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\mu!} A^\mu.$$

Die Matrix-Norm der Partialsummen

$$\sum_{\mu=m_1}^{m_2} \frac{1}{\mu!} A^\mu$$

dieser Reihe kann man abschätzen durch

$$\left\| \sum_{\mu=m_1}^{m_2} \frac{1}{\mu!} A^\mu \right\| \leq \sum_{\mu=m_1}^{m_2} \frac{1}{\mu!} \|A\|^\mu,$$

d.h., durch die Partialsummen der konvergenten Exponentialreihe

$$e^{\|A\|} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\mu!} \|A\|^{\mu}.$$

Deswegen bilden die Partialsummen der Matrizen-Exponentialreihe eine Cauchy-Folge, und die Matrizen-Exponentialreihe konvergiert gegen eine Matrix

$$e^A := \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} A^{\nu}.$$

Eine Abbildung  $F : M \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $M \subset \mathbb{R}^n$  ist in einem Punkt  $\mathbf{x}_0 \in M$  stetig, wenn sie das  $(\epsilon, \delta)$ -Kriterium aus dem ersten Semester wörtlich erfüllt:

Zu jedem  $0 < \epsilon \in \mathbb{R}$   
gibt es ein  $\delta = \delta(\epsilon)$  derart, dass  
für alle  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$   
gilt:  $\|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x}_0)\| < \epsilon$ .

Praktisch bedeutet dies für uns, dass eine Abbildung  $F(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), \dots, F_k(\mathbf{x}))$  stetig ist, wenn ihre  $k$  Komponentenfunktionen  $F_{\kappa}$  stetig sind. Und damit kann man dann auch beweisen, dass Stetigkeit äquivalent zur *Folgenstetigkeit* ist:  $F$  ist stetig in  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  genau dann, wenn für jede Folge  $(\mathbf{x}_{\nu})$  von Vektoren  $\mathbf{x}_{\nu} \in \mathbb{R}^n$  gilt:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathbf{x}_{\nu} = \mathbf{x}_0 \implies \lim_{\nu \rightarrow \infty} F(\mathbf{x}_{\nu}) = F(\mathbf{x}_0).$$

**Beispiel 1.2** Für jede  $n \times n$ -Matrix  $A$  ist die lineare Abbildung

$$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{v} \mapsto A \cdot \mathbf{v}$$

stetig.

*Beweis:* Natürlich können wir  $A \neq 0$  annehmen. Dann ist

$$\|A \cdot \mathbf{v} - A \cdot \mathbf{v}_0\| = \|A \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)\| \leq \|A\| \cdot \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_0\| < \epsilon,$$

falls

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_0\| < \frac{\epsilon}{\|A\|}.$$

Wir brauchen noch den *Satz vom Maximum*, der in einer Variablen so lautet:

Eine auf dem Intervall  $[a, b]$  stetige Funktion nimmt dort ihr Maximum an.

Und in mehreren Variablen:

Eine auf der kompakten Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  stetige Funktion  
nimmt in einem Punkt von  $M$  ihr Maximum an.

**Aufgabe 1.1** Es seien  $A$  und  $B$  zwei kommutierende  $n \times n$ -Matrizen (d.h.,  $A \cdot B = B \cdot A$ ). Zeigen Sie

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B$$

und folgern Sie daraus, dass für jede Matrix  $A$  die Matrix  $e^A$  invertierbar ist.

**Aufgabe 1.2** a) Es sei  $a \in \mathbb{R}$  und

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie für alle  $n \in \mathbb{N}$ :

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}.$$

b) Zeigen Sie für  $t \in \mathbb{R}$ :

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{at} & te^{at} \\ 0 & e^{at} \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 1.3** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie für  $k \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} n = 4k &\Rightarrow A^n = \mathbb{1} \\ n = 4k + 1 &\Rightarrow A^n = A \\ n = 4k + 2 &\Rightarrow A^n = -\mathbb{1} \\ n = 4k + 3 &\Rightarrow A^n = -A \end{aligned}$$

b) Zeigen Sie für  $t \in \mathbb{R}$ :

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

## 1.2 Differenzierbare Abbildungen

Der Differentialquotient

$$\frac{F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x}_0)}{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}$$

hat für  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, n > 1$ , keinen Sinn, weil man durch den Vektor  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$  nicht dividieren kann. Verallgemeinern lässt sich dagegen die Differenzierbarkeit als lineare Approximierbarkeit. In einer Variablen sah das so aus:  $f$  ist differenzierbar in  $x$ , wenn

$$f(x+h) = f(x) + a \cdot h + \varphi(h) \quad \text{mit} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h)}{h} = 0.$$

Dabei ist die Konstante  $a$  die Ableitung  $f'(x)$ . Man verallgemeinert diese Approximations-Eigenschaft folgendermaßen:

**Definition 1.4** Es sei  $M \in \mathbb{R}^n$  offen.  $F : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  heißt in  $\mathbf{x} \in M$  total differenzierbar, wenn eine lineare Abbildung

$$A : \begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \\ \mathbf{h} \mapsto A \cdot \mathbf{h} \end{cases}$$

existiert, so, dass für alle  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$  (für die  $F(\mathbf{x} + \mathbf{h})$  definiert ist), gilt

$$F(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = F(\mathbf{x}) + A \cdot \mathbf{h} + \Phi(\mathbf{h}).$$

Dabei soll

$$\Phi(\mathbf{h}) = F(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{x}) - A \cdot \mathbf{h}$$

eine Abbildung sein, welche die Eigenschaft

$$\lim_{0 \neq \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\Phi(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = \mathbf{0}$$

besitzt. Die lineare Abbildung  $A$  heißt die (totale) Ableitung von  $F$  in  $\mathbf{x}$ , in Zeichen  $A = F'(\mathbf{x})$ .

Die Bedingung an  $\Phi$  in dieser Definition bedeutet, dass  $\Phi(\mathbf{h})$  schneller gegen Null geht, als  $\mathbf{h}$ , also etwa „von zweiter Ordnung“. Die Abbildung  $F : \mathbf{x}' \mapsto F(\mathbf{x}')$  wird somit durch die (affin-) lineare Abbildung  $F(\mathbf{x}) + A \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})$  von höherer als erster Ordnung approximiert. Diese lineare Abbildung ist dabei (im Falle ihrer Existenz) durch die Abbildung  $F$  eindeutig bestimmt: Sind  $A$  und  $B$  zwei lineare Abbildungen wie in der Definition, so gilt

$$\mathbf{0} = \lim_{0 \neq \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{(A - B) \cdot \mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = \lim_{0 \neq \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} (A - B) \cdot \frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}.$$

Die Abbildung  $\mathbf{h} \mapsto (A - B) \cdot (\mathbf{h} / \|\mathbf{h}\|)$  ist konstant auf jedem Strahl  $t \cdot \mathbf{h}_0, 0 < t \in \mathbb{R}$  in der Richtung  $\mathbf{h}_0, \|\mathbf{h}_0\| = 1$ . Da sie für  $t \rightarrow 0$  gegen Null geht, ist sie konstant gleich Null.  $\square$

**Beispiel 1.3** Die konstante Abbildung  $F(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_0$  ist differenzierbar mit Ableitung  $F' = \mathbf{0}$ , denn

$$F(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = \mathbf{y}_0 = F(\mathbf{x}) + \mathbf{0} \cdot \mathbf{h}.$$

**Beispiel 1.4** Jede (affin-) lineare Abbildung  $F(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_0 + A \cdot \mathbf{x}$  ist differenzierbar mit Ableitung  $A$ . Der Beweis ist von ähnlicher Schwierigkeit wie bei Beispiel 1.3.

Natürlich heißt die Abbildung  $F$  auf der ganzen offenen Menge  $M$  differenzierbar, wenn sie in jedem Punkt  $\mathbf{x} \in M$  differenzierbar ist.

**Satz 1.1 (Triviales Differenzierbarkeitskriterium)** Eine Abbildung  $F = (F_1, \dots, F_k)$  mit den Komponentenfunktionen  $F_1, \dots, F_k$  ist genau dann differenzierbar, wenn alle Funktionen  $F_\kappa$  differenzierbar sind. Die lineare Abbildung

$$F'(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$$

ist dann gerade die Abbildung

$$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{h} \mapsto \begin{pmatrix} F'_1(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} \\ \vdots \\ F'_k(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} \end{pmatrix}.$$

Beweis. Wir bezeichnen die Komponentenfunktionen der linearen Abbildung  $A$  mit  $A_1, \dots, A_k$ , also

$$A \cdot \mathbf{h} = \begin{pmatrix} A_1 \cdot \mathbf{h} \\ \vdots \\ A_k \cdot \mathbf{h} \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} & \lim_{\mathbf{0} \neq \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{1}{\|\mathbf{h}\|} (F(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{x}) - A \cdot \mathbf{h}) = \mathbf{0} \\ \iff & \lim_{\mathbf{0} \neq \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{1}{\|\mathbf{h}\|} (F_\kappa(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - F_\kappa(\mathbf{x}) - A_\kappa \cdot \mathbf{h}) = 0 \text{ f\u00fcr alle } \kappa = 1, \dots, k \\ \iff & \text{alle Funktionen } F_\kappa, \kappa = 1, \dots, k, \text{ sind differenzierbar in } \mathbf{x} \text{ mit Ableitung } F'_\kappa(\mathbf{x}) = A_\kappa. \quad \square \end{aligned}$$

Mit Satz 1.1 ist die Differenzierbarkeit einer Abbildung  $F$  auf die Differenzierbarkeit ihrer Komponentenfunktionen  $F_\kappa$  zur\u00fcckgef\u00fchrt. Wir besch\u00e4ftigen uns deswegen jetzt mit Funktionen.

**Satz 1.2 (Notwendiges Differenzierbarkeitskriterium)** *Die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  sei differenzierbar in  $\mathbf{x} \in D$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen. Dann sind alle Funktionen*

$$\varphi_\nu(t) := f(\mathbf{x} + t \cdot \mathbf{e}_\nu), \quad \mathbf{e}_\nu = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\nu\text{-ter Basisvektor}),$$

differenzierbar in  $t = 0$  und die Ableitung ist

$$f'(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} = \sum_{\nu=1}^n \left. \frac{d\varphi_\nu}{dt} \right|_{t=0} \cdot h_\nu.$$

Der Beweis von Satz 1.2 ergibt sich sofort, wenn wir in die Definition der Differenzierbarkeit von  $f$  f\u00fcr die Auslenkung  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$  speziell nur Vektoren  $t \cdot \mathbf{e}_\nu$  einsetzen.

Die Funktion  $\varphi_\nu(t)$  ist genau die \u00c4nderung der Funktion  $f$  in der  $\nu$ -ten Koordinatenrichtung, w\u00e4hrend die \u00fcbrigen Koordinaten festgehalten werden:

$$\varphi_\nu(t) = f(x_1, \dots, x_{\nu-1}, x_\nu + t, x_{\nu+1}, \dots, x_n).$$

Ihre Ableitung hei\u00dft *partielle Ableitung* von  $f$  in Richtung der Koordinate  $x_\nu$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x_\nu}(\mathbf{x}) := \left. \frac{d}{dt} f(x_1, \dots, x_\nu + t, \dots, x_n) \right|_{t=0}.$$

Eine Funktion hei\u00dft *partiell differenzierbar*, wenn sie nach allen  $n$  Variablen partiell differenzierbar ist.

**Beispiel 1.5** Die Funktion

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

ist auf ganz  $\mathbb{R}^2$  partiell differenzierbar mit

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y.$$

Für eine total differenzierbare Funktion  $f$  ist also

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \cdot h_\nu + \varphi(\mathbf{h})$$

mit einer Störfunktion  $\varphi$ , welche ziemlich klein wird, wenn  $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$  geht. Physiker drücken diesen Sachverhalt meist intuitiver wie folgt aus:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

Hier sind  $dx_1 = h_1, \dots, dx_n = h_n$  die Komponenten des Auslenkungsvektors  $\mathbf{h}$ , mathematisch völlig exakt. Aber  $df$ , die 'infinitesimale Änderung'  $df$  von  $f$  hat es in sich. Man stellt sich näherungsweise die Änderung  $f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x})$  vor. Exakt ist das nur bis auf die kleine Störfunktion  $\varphi(\mathbf{h})$ . Das bedeutet die Formulierung 'näherungsweise' oder 'infinitesimal'.

Leider ist Satz 1.2 *nicht umkehrbar*. Eine partiell differenzierbare Funktion von  $n > 1$  Variablen braucht nicht total differenzierbar zu sein. Dafür kann man Beispiele konstruieren, die aber sehr konstruiert sind, und deswegen in der Natur kaum vorkommen. Dagegen gilt

**Satz 1.3 (Hinreichendes Differenzierbarkeitskriterium)** *Es sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen, die Funktion  $f$  sei partiell differenzierbar auf  $D$  und die partiellen Ableitungen  $\partial f / \partial x_\nu$  seien stetig auf  $D$ . Dann ist  $f$  total differenzierbar.*

Beweis. Sei  $\mathbf{x} \in D$ . Da  $D$  offen ist, gibt es ein  $r > 0$  derart, dass die Kugel um  $\mathbf{x}$  von diesem Radius  $r$  noch ganz zu  $D$  gehört. Für alle Vektoren  $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|\mathbf{h}\| < r$  gehören also die Vektoren

$$\mathbf{x} + (h_1, \dots, h_\nu, t, 0, \dots, 0), \quad 0 \leq t \leq h_{\nu+1},$$

auch zu  $D$ . Wir kürzen ab

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_0 &:= \mathbf{0} \\ &\vdots \\ \mathbf{h}_\nu &:= (h_1, \dots, h_\nu, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

und folgern aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung, angewendet auf die Funktion

$$g_\nu(t) := f(h_1, \dots, h_{\nu-1}, t, 0, \dots, 0),$$

dass es ein  $\theta$ ,  $0 \leq \theta \leq h_\nu$ , gibt mit

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} + \mathbf{h}_\nu) - f(\mathbf{x} + \mathbf{h}_{\nu-1}) &= g_\nu(h_\nu) - g_\nu(0) \\ &= h_\nu \cdot g'_\nu(\theta) \\ &= h_\nu \cdot \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(\mathbf{x}_\nu), \end{aligned}$$

wobei  $\mathbf{x}_\nu = \mathbf{x} + (h_1, \dots, h_{\nu-1}, \theta, 0, \dots, 0)$ . Es folgt

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) &= f(\mathbf{x}) + \sum_{\nu=1}^n (f(\mathbf{x} + \mathbf{h}_\nu) - f(\mathbf{x} + \mathbf{h}_{\nu-1})) \\ &= f(\mathbf{x}) + \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(\mathbf{x}_\nu) \cdot h_\nu, \\ \frac{1}{\|\mathbf{h}\|} \left[ f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(\mathbf{x}) \cdot h_\nu \right] &= \sum_{\nu=1}^n \frac{h_\nu}{\|\mathbf{h}\|} \left[ \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(\mathbf{x}_\nu) - \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(\mathbf{x}) \right] \\ &\rightarrow 0 \text{ für } \|\mathbf{h}\| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

denn

$$\frac{|h_\nu|}{\|\mathbf{h}\|} \leq 1, \quad \mathbf{x}_\nu \rightarrow \mathbf{x}, \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \text{ ist stetig in } \mathbf{x}.$$

□

Fassen wir zusammen:

$$\text{stetig partiell differenzierbar} \implies \text{total differenzierbar} \implies \text{partiell differenzierbar}$$

Wichtiger als diese etwas spröden Definitionen ist eine anschauliche Vorstellung der Ableitung. Was hat beispielsweise die Ableitung einer Funktion  $f(x)$  einer reellen Variablen aus dem ersten Semester mit einer linearen Abbildung  $A : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  zu tun? Differenzierbarkeit bedeutet

$$f(x+h) = f(x) + f'(x) \cdot h + \varphi(x)$$

mit einer ziemlich kleinen Störfunktion  $\varphi$ .  $f'(x)$  ist die Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion  $f$ . Diese Tangente wird durch

$$h \mapsto f(x) + f'(x) \cdot h$$

parametrisiert, und die lineare Abbildung ist gerade

$$h \mapsto f'(x) \cdot h,$$

nichts anderes als die Multiplikation mit dem Skalar  $f'(x)$ .

Ähnlich kann man noch die Ableitung einer Funktion  $f(x, y)$  von zwei reellen Variablen  $x, y$  verstehen: Der Graph der Funktion ist eine Fläche im  $x, y, z$ -Raum, die über (einem Teil) der  $x, y$ -Ebene ausgebreitet liegt. die Approximationseigenschaft

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}\right) = f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot h_2 + \varphi(h_1, h_2)$$

bedeutet die Approximierung des Graphen von  $f$  durch die Ebene mit der affinen Parametrisierung

$$\mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x' = x + h_1 \\ y' = y + h_2 \\ z' = f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot h_2 \end{pmatrix}$$

und die lineare Abbildung  $f'(x, y)$  ist gerade der lineare Anteil dieser affinen Abbildung. Die affine Ebene, welche durch

$$\mathbf{h} \mapsto f(\mathbf{x}) + f'(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}$$

parametrisiert wird, heißt die *Tangentialebene* im Punkt  $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^3$  an den Graphen der Funktion  $f$ .

Sonst kann man sich (aus Dimensionsgründen) nur noch Abbildungen  $\mathbb{R} \ni t \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$  (Kurven in der Ebene) oder  $\mathbb{R} \ni t \mapsto (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$  (Kurven im Raum) vorstellen. Der Vektor

$$\dot{\mathbf{x}}(t_0) = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt}(t_0) \\ \frac{dy}{dt}(t_0) \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \dot{\mathbf{x}}(t_0) = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt}(t_0) \\ \frac{dy}{dt}(t_0) \\ \frac{dz}{dt}(t_0) \end{pmatrix}$$

heißt *Geschwindigkeitsvektor* der Kurve. Heftet man ihn im Kurvenpunkt  $(x(t_0), y(t_0)) \in \mathbb{R}^2$ , bzw.  $(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) \in \mathbb{R}^3$  an, so spannt er die *Kurventangente* in diesem Punkt auf. Die lineare Abbildung ist dann eine Parametrisierung dieser Kurventangente.

**Aufgabe 1.4 (Gemeinheit, NV)** Für  $x > 0$  und  $y > 0$  sei

$$G(x, y) = x^y + (\ln x) \cdot [(\arctan(\sin(\cos(xy))))^3 - \ln(x + y)].$$

Berechnen Sie die partielle Ableitung 1. Ordnung von  $G$  nach der zweiten Variablen an der Stelle  $(1, 2)$ .

**Aufgabe 1.5 (NV)** Bestimmen Sie die Tangentialebene im Punkt  $(1, -2, 2)$  der Fläche im  $\mathbb{R}^3$ , die durch die Gleichung

$$z = 3x^2y + 2xy^2$$

gegeben ist.

**Aufgabe 1.6 (NV)** Bestimmen Sie die Tangentialebene an den Graphen der Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y$  im Punkt  $(2/0/2)$ .

**Aufgabe 1.7** Gegeben seien zwei differenzierbare Abbildungen

$$\mathbf{a}, \mathbf{b}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (\text{Felder}),$$

sowie daraus gebildet die skalare Funktion  $\varphi(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{b}(\mathbf{x}))$  und das Vektorfeld  $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{x}) \times \mathbf{b}(\mathbf{x})$ . Zeigen Sie

$$a) \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} = \left( \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_\nu} \cdot \mathbf{b} \right) + \left( \mathbf{a} \cdot \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x_\nu} \right), \quad b) \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_\nu} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x_\nu}.$$

**Aufgabe 1.8** Für  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  setzt man oft

$$r = r(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Ist  $f$  eine differenzierbare Funktion einer Variablen, so bezeichnen wir (etwas salopp) mit  $f(r)$  die Funktion  $\mathbf{x} \mapsto f(r(\mathbf{x}))$  auf  $\mathbb{R}^n$ .

a) Berechnen Sie für  $r \neq 0$  die partiellen Ableitungen  $\partial r / \partial x_\nu$ .

b) Zeigen Sie:  $\frac{\partial f(r)}{\partial x_\nu} = \frac{x_\nu}{r} \cdot f'(r)$ .

c) Zeigen Sie:  $\sum_{\nu=1}^n \frac{\partial^2 f(r)}{\partial x_\nu^2} = f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r)$ .

**Aufgabe 1.9 (Großmann, p. 106)** Berechnen Sie  $\partial \varphi / \partial x_\nu$  für

a)  $\varphi(\mathbf{x}) = \frac{e^{-\alpha \|\mathbf{x}\|}}{\|\mathbf{x}\|}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,    b)  $\varphi(\mathbf{x}) = \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|}$ ,  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ .

### 1.3 Rechenregeln und Beispiele

Es gibt keine anderen Rechenregeln als für Funktionen einer Variablen, sie sehen allerdings gelegentlich etwas anders aus.

**Differenzierbarkeit und Stetigkeit.** Jede differenzierbare Abbildung ist stetig: Wenn  $F$  in  $\mathbf{x}$  differenzierbar ist, dann gilt

$$\lim_{\mathbf{0} \neq \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\Phi(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = \lim_{\mathbf{0} \neq \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{1}{\|\mathbf{h}\|} (F(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{x}) - F'(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}) = 0.$$

Nach Multiplikation mit  $\|\mathbf{h}\|$  folgt daraus

$$\lim_{\mathbf{0} \neq \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} (F(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{x}) - F'(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}) = \lim_{\mathbf{0} \neq \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \|\mathbf{h}\| \cdot \lim_{\mathbf{0} \neq \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{1}{\|\mathbf{h}\|} (F(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{x}) - F'(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}) = 0.$$

Weil aber

$$\lim_{\mathbf{0} \neq \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} F'(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} = \mathbf{0}$$

gilt (lineare Abbildungen sind stetig), folgt daraus

$$\lim_{\mathbf{0} \neq \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} F(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = F(\mathbf{x}).$$

**Linearität.** Sind  $F, G : D \rightarrow \mathbb{R}^k$  differenzierbar,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , so ist auch  $\alpha F + \beta G : D \rightarrow \mathbb{R}^k$  differenzierbar mit Ableitung

$$(\alpha F + \beta G)'(\mathbf{x}) = \alpha F'(\mathbf{x}) + \beta G'(\mathbf{x}).$$

Dies ergibt sich unmittelbar aus der Definition, genau wie im ersten Semester.

Weil man Abbildungen i.A. nicht multiplizieren kann, gibt es hier keine allgemeine Produktregel. Aber es gibt Spezialfälle:

a) Sind  $t \mapsto \mathbf{a}(t) \in \mathbb{R}^n$  und  $t \mapsto \mathbf{b}(t) \in \mathbb{R}^n$  differenzierbare Abbildungen, so ist auch

$$t \mapsto (\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{b}(t)) = \sum_{\nu=1}^n a_{\nu}(t) \cdot b_{\nu}(t)$$

differenzierbar mit Ableitung

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{b}(t)) = \sum_{\nu=1}^n \frac{d}{dt}(a_{\nu}(t) \cdot b_{\nu}(t)) = \sum_{\nu=1}^n \dot{a}_{\nu} \cdot b_{\nu} + a \cdot \dot{b}_{\nu} = (\dot{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{b}}).$$

b) Ist  $A(t)$  eine  $n \times n$ -Matrix, die differenzierbar von  $t \in \mathbb{R}$  abhängt, so gilt

$$\frac{d}{dt}(A \cdot \mathbf{a}) = \dot{A} \cdot \mathbf{a} + A \cdot \dot{\mathbf{a}}.$$

c) Sind  $A(t)$  und  $B(t)$  zwei  $n \times n$ -Matrizen, die differenzierbar von  $t \in \mathbb{R}$  abhängen, so gilt

$$\frac{d}{dt}(A \cdot B) = \dot{A} \cdot B + A \cdot \dot{B}.$$

**Kettenregel.** Es sei  $D_n \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $F : D_n \rightarrow \mathbb{R}^k$  differenzierbar in  $\mathbf{x} \in D_n$ , weiter sei  $D_k \subset \mathbb{R}^k$  offen mit  $F(\mathbf{x}) \in D_k$ ,  $G : D_k \rightarrow \mathbb{R}^l$  differenzierbar in  $F(\mathbf{x})$ . Dann ist auch  $G \circ F$  in  $\mathbf{x}$  differenzierbar mit Ableitung

$$(G \circ F)'(\mathbf{x}) = G'(F(\mathbf{x})) \circ F'(\mathbf{x}).$$

Beweis. Wir setzen  $A := F'(\mathbf{x})$ ,  $B := G'(F(\mathbf{x}))$  und

$$\begin{array}{ccc} C & := & B \quad \circ \quad A \\ \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l & & \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l \quad \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k. \end{array}$$

Dann haben wir

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\|\mathbf{h}\|} [G(F(\mathbf{x} + \mathbf{h})) - G(F(\mathbf{x})) - C \cdot \mathbf{h}] \\ = & \frac{1}{\|\mathbf{h}\|} [G(F(\mathbf{x} + \mathbf{h})) - G(F(\mathbf{x})) - G'(F(\mathbf{x})) \cdot (F(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{x})))] \\ & + \frac{1}{\|\mathbf{h}\|} [G'(F(\mathbf{x})) \cdot (F(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{x})) - C \cdot \mathbf{h}] \\ = & \frac{\|F(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{h}\|} \cdot \\ & \frac{1}{\|F(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{x})\|} [G(F(\mathbf{x} + \mathbf{h})) - G(F(\mathbf{x})) - G'(F(\mathbf{x})) \cdot (F(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{x})))] \\ & + \frac{1}{\|\mathbf{h}\|} \cdot G'(F(\mathbf{x})) [F(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{x}) - F'(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}], \end{aligned}$$

falls  $F(\mathbf{x} + \mathbf{h}) \neq F(\mathbf{x})$ . Da  $F$  in  $\mathbf{x}$  stetig ist, geht  $F(\mathbf{x} + \mathbf{h})$  gegen  $F(\mathbf{x})$  für  $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ . Da  $G$  in  $F(\mathbf{x})$  differenzierbar ist, folgt daraus

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{1}{\|F(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{x})\|} [G(F(\mathbf{x} + \mathbf{h})) - G(F(\mathbf{x})) - G'(F(\mathbf{x})) \cdot (F(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{x})))] = \mathbf{0}.$$

Das Produkt

$$F'(\mathbf{x}) \cdot \frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}$$

ist eine stetige Funktion des Einheitsvektors  $\mathbf{h}/\|\mathbf{h}\|$  und bleibt deswegen beschränkt, wenn  $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ . Da  $F$  in  $\mathbf{x}$  differenzierbar ist, gilt

$$\lim_{\mathbf{0} \neq \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \left( \frac{F(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{x})}{\|\mathbf{h}\|} - F'(\mathbf{x}) \cdot \frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} \right) = \mathbf{0},$$

und deswegen bleibt auch

$$\frac{1}{\|\mathbf{h}\|} (F(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{x}))$$

beschränkt für  $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ . Der erste Summand in unserem obigen Ausdruck geht also gegen  $\mathbf{0}$  wenn  $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ . (Dies gilt natürlich auch falls  $F(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = F(\mathbf{x})$ .)

Der zweite Summand geht aber ebenfalls gegen Null, wegen der Differenzierbarkeit von  $F$  in  $\mathbf{x}$  und der Stetigkeit der linearen Abbildung  $G'(F(\mathbf{x}))$ .  $\square$

Jetzt ist es höchste Zeit, ein Wort zur Notation zu sagen. Eine lineare Abbildung  $A : V \rightarrow W$  von einem Vektorraum  $V$  in einen Vektorraum  $W$  schreibt man im allgemeinen  $A : \mathbf{h} \rightarrow A(\mathbf{h})$ . Bei uns kommen die Vektorräume aber immer als  $V = \mathbb{R}^n, W = \mathbb{R}^k$  o.ä. vor. Diese Vektorräume haben die kanonische Standardbasis

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$$

und in dieser Standardbasis hat jede lineare Abbildung eine kanonische Matrix. Deswegen denken wir uns die lineare Abbildung  $A$  immer als Matrixmultiplikation

$$\mathbf{h} \mapsto A \cdot \mathbf{h}$$

und machen keinen großen Unterschied zwischen der linearen Abbildung und ihrer beschreibenden Matrix.

Die Ableitung  $F'(\mathbf{x})$  ist also die  $k \times n$ -Matrix mit den Einträgen

$$\frac{\partial F_\kappa}{\partial x_\nu}(\mathbf{x}), \quad \kappa = 1, \dots, k, \nu = 1, \dots, n.$$

Diese Matrix der partiellen Ableitungen heißt auch *Funktionalmatrix*. Die Funktionalmatrix  $F'(\mathbf{x})$  einer Abbildung  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  ist also wieder eine Abbildung. Allerdings nicht  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ , wie  $F$  es war, sondern eine Abbildung, die jedem  $\mathbf{x}$  eine  $k \times n$ -Matrix  $F'(\mathbf{x})$  zuordnet.  $F'$  ist eine Abbildung  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{k \times n}$ . Hier liegt ein gewisses Problem der Schreibweise: Die Matrix  $F'$  hängt von  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  ab, und andererseits kann man sie wieder auf Vektoren  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$  anwenden. Schreibt man das Resultat als  $F'(\mathbf{x})(\mathbf{h})$ , so sammeln sich sehr schnell viele Klammern an, was unübersichtlich wird. Deswegen lässt man meist eines der Argumente,  $\mathbf{x}$  oder  $\mathbf{h}$ , weg.

Die Kettenregel besagt, dass die linearen Abbildungen  $F'(\mathbf{x})$  und  $G'(F(\mathbf{x}))$  in dieser Reihenfolge hintereinander ausgeführt werden, um die Ableitung von  $G \circ F$  in  $\mathbf{x}$  zu bekommen. Hintereinander Ausführen linearer Abbildungen ist aber Multiplikation der beschreibenden Matrizen. So ist das Produkt der Ableitungen in der Kettenregel das Matrizenprodukt der Funktionalmatrizen. In dieser Form ist die Kettenregel also eine ziemlich wörtliche Verallgemeinerung der Kettenregel aus dem ersten Semester. Nur das Produkt von Skalaren ist ersetzt durch das Produkt von Matrizen.

**Beispiel 1.6 (Richtungsableitung)** Die Funktion  $f(x_1, \dots, x_n)$  sei differenzierbar. Wir betrachten die Funktion auf der Geraden

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t \cdot \mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R}$$

mit Anfangsvektor  $\mathbf{x}_0$  und Richtungsvektor  $\mathbf{v}$ . Schreiben wir die Parametrisierungsabbildung

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \\ t \mapsto \mathbf{x}_0 + t \cdot \mathbf{v}, \end{cases}$$

so ist die auf die Gerade eingeschränkte Funktion  $f(g(t))$ . Wir differenzieren sie nach der Kettenregel

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(0) &= f'(g(0)) \cdot g'(0) \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{dg_1}{dt}(0) \\ \vdots \\ \frac{dg_n}{dt}(0) \end{pmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \right) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(\mathbf{x}_0) \cdot v_\nu. \end{aligned}$$

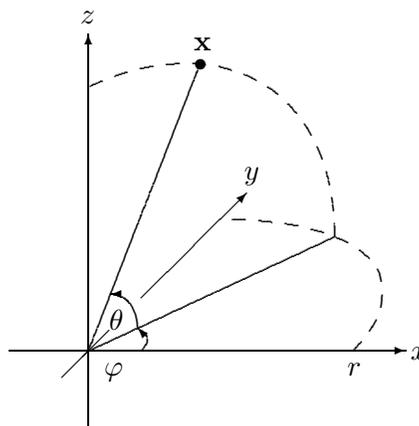
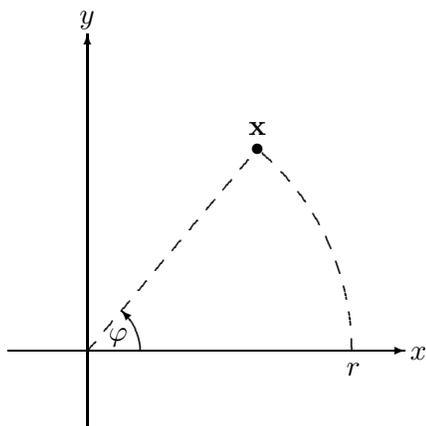
Dieses Produkt nennt man auch die Richtungsableitung von  $f$  in Richtung des Vektors  $\mathbf{v}$ .

**Beispiel 1.7 (Transformation in Polarkoordinaten)** Zwischen den euklidischen Koordinaten  $x, y$  der Ebene und den Polarkoordinaten besteht die Beziehung

$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos(\varphi) \\ y &= r \cdot \sin(\varphi). \end{aligned}$
---

Die Zuordnung  $(r, \varphi) \mapsto (x, y)$  ist eine differenzierbare Abbildung. Wir berechnen ihre Funktionalmatrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \cdot \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cdot \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$



**Beispiel 1.8 (Transformation in Kugelkoordinaten)** Die Beziehung lautet jetzt

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\theta) \\ y &= r \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\theta) \\ z &= r \cdot \sin(\theta). \end{aligned}$$

Die Funktionalmatrix ist

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cos(\theta) & -r\sin(\varphi)\cos(\theta) & -r\cos(\varphi)\sin(\theta) \\ \sin(\varphi)\cos(\theta) & r\cos(\varphi)\cos(\theta) & -r\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & 0 & r\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Ähnlich wie in der Differentialrechnung einer Variablen kann man auch hier die Differentiation iterieren: Man sagt, die Abbildung  $F$  ist

- stetig differenzierbar, wenn  $F$  differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen  $\partial F_\kappa / \partial x_\nu$  wieder stetig sind;
- zweimal differenzierbar, wenn die partiellen Ableitungen wieder differenzierbar sind. In diesem Fall gibt es dann zweite partielle Ableitungen

$$\frac{\partial^2 F_\kappa}{\partial x_{\nu_1} \partial x_{\nu_2}} = \frac{\partial}{\partial x_{\nu_1}} \left( \frac{\partial F_\kappa}{\partial x_{\nu_2}} \right).$$

Wenn diese höheren partiellen Ableitungen stetig sind, dann sind sie unabhängig von der Reihenfolge, in der man differenziert:

**Satz 1.4 (Symmetrie der zweiten Ableitung)** Die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  sei zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_{\nu_1} \partial x_{\nu_2}} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_{\nu_2} \partial x_{\nu_1}}.$$

Beweis. O.B.d.A. beweisen wir die Behauptung nur für den Fall  $n = 2$ . Die Variablen nennen wir dann  $x$  und  $y$ . Da es sich um zweite Ableitungen dreht, bilden wir vom Differenzenquotienten bezüglich  $x$

$$\frac{1}{h}(f(x+h, y) - f(x, y))$$

den Differenzenquotient bezüglich  $y$

$$\begin{aligned} \frac{1}{hk}[(f(x+h, y+k) - f(x, y+k)) - (f(x+h, y) - f(x, y))] &= \\ \frac{1}{hk}[f(x+h, y+k) - f(x, y+k) - f(x+h, y) + f(x, y)]. & \end{aligned}$$

Dieser iterierte Differenzenquotient ist symmetrisch bezüglich  $x$  und  $y$ , die Reihenfolge, in der wir ihn bildeten, sieht man ihm nicht mehr an.

Den Differenzenquotienten schreiben wir nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung als Differentialquotient an einer Zwischenstelle, zuerst bezüglich  $x$

$$\frac{\partial}{\partial x}(f(x + \theta_1 h, y + k) - f(x + \theta_1 h, y))$$

und dann bezüglich  $y$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x + \theta_1 h, y + \theta_2 k)$$

mit  $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$  zwischen 0 und 1.

Wenn wir den Mittelwertsatz in der umgekehrten Reihenfolge anwenden, erst auf  $y$  und dann auf  $x$ , so wird der gleiche Differentialquotient

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x + \theta_3 h, y + \theta_4 k)$$

mit neuen Werten  $\theta_3, \theta_4 \in \mathbb{R}$  zwischen 0 und 1. Wir haben also die Gleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x + \theta_1 h, y + \theta_2 k) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x + \theta_3 h, y + \theta_4 k)$$

für die zweiten partiellen Ableitungen, in vertauschter Reihenfolge, in verschiedenen Punkten. Nun lassen wir aber  $h$  und  $k$  gegen 0 gehen, dann gehen beide Punkte gegen  $(x, y)$  und aus der Stetigkeit der zweiten partiellen Ableitungen folgt Gleichheit der Werte

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y).$$

□

Eine der wichtigsten Anwendungen der Differentialrechnung, jedenfalls historisch die wichtigste, ist das Ermitteln von lokalen Extrema: Maxima und Minima. Auch bei Funktionen  $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$  mehrerer Variablen sagt man, die Funktion nimmt auf einer Menge  $D$  in einem Punkt  $\mathbf{x}_0 \in M$  ein Maximum (Minimum) an, wenn  $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$ , bzw.  $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$  für alle  $\mathbf{x} \in D$ . Und  $\mathbf{x}_0$  ist ein *lokales Maximum*, bzw. *Minimum*, wenn es ein  $r > 0$  gibt, so, dass diese Ungleichungen für alle  $\mathbf{x} \in D$  mit  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r$  gelten.

**Satz 1.5 (Notwendige Bedingung für lokale Extrema)** *Die Funktion  $f$  sei differenzierbar auf der offenen Menge  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Nimmt  $f$  in einem Punkt  $\mathbf{x}_0 \in D$  ein lokales Extremum an, so verschwinden dort die partiellen Ableitungen:*

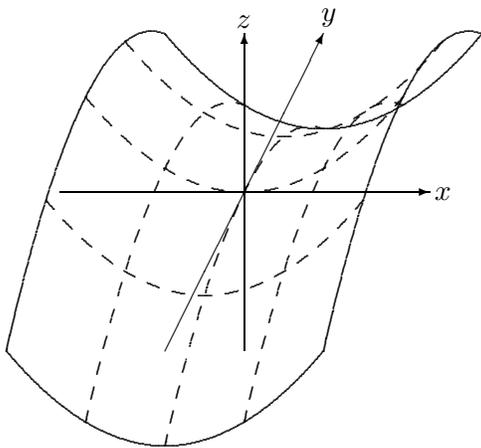
$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) = 0.$$

Beweis. Es gibt ein  $r > 0$  derart, dass alle  $n$  Funktionen

$$f(\mathbf{x}_0 + t \cdot \mathbf{e}_k), \quad k = 1, \dots, n,$$

auf dem offenen Intervall  $|t| < r$  differenzierbar sind. Für  $t = 0$  nehmen sie ein lokales Extremum an, ihre Ableitungen verschwinden für  $t = 0$ , dies sind aber gerade die partiellen Ableitungen von  $f$  in  $\mathbf{x}_0$ .

□



**Beispiel 1.9** Für die Funktion  $f(x, y) = x^2 - y^2$  verschwinden beide partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y,$$

im Nullpunkt. Hier liegt aber kein lokales Extremum, weil  $f(0, 0) = 0$  und  $f(x, 0) > 0$  für alle  $x \neq 0$ , während  $f(0, y) < 0$  für alle  $y \neq 0$ . Einen derartigen Punkt nennt man Sattelpunkt.

**Aufgabe 1.10 (NV)** Warum gibt es keine partiell differenzierbare Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \arctan(xy), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^x \sin y$$

für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ?

**Aufgabe 1.11 (NV)** Es seien  $F$  und  $G$  zweimal stetig partiell differenzierbare Funktionen von  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$  und  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  sei durch  $u(t, x) = F(x + t) + G(x - t)$  definiert. Beweisen Sie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

**Aufgabe 1.12** Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen 2. Ordnung für die Funktionen

$$f(x, y) = 2x^3 + 3xy^2, \quad g(x, y) = e^{2x-y} \cdot \sin(x + y).$$

**Aufgabe 1.13** Differenzieren Sie für  $x > 0$  die Funktionen

$$x^x \quad \text{und} \quad x^{(x^x)}$$

mit Hilfe der Kettenregel in zwei Variablen.

**Aufgabe 1.14** Es sei  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definiert durch

$$(r, \varphi) \mapsto (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)).$$

a) Bestimmen Sie  $F'(r, \varphi)^{-1}$ , wo es existiert.

b) Es sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und  $g = f \circ F$ . Zeigen Sie für  $r \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} F(r, \varphi) &= \cos(\varphi) \cdot \frac{\partial g}{\partial r}(r, \varphi) - \frac{1}{r} \sin(\varphi) \cdot \frac{\partial g}{\partial \varphi}(r, \varphi), \\ \frac{\partial f}{\partial y} F(r, \varphi) &= \sin(\varphi) \cdot \frac{\partial g}{\partial r}(r, \varphi) + \frac{1}{r} \cos(\varphi) \cdot \frac{\partial g}{\partial \varphi}(r, \varphi). \end{aligned}$$

**Aufgabe 1.15 (Formel von Euler)** Es sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und  $0 < p \in \mathbb{N}$ . Die Funktion  $f$  heißt homogen vom Grad  $p$ , wenn für alle  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in \mathbb{R}$  gilt

$$f(t \cdot \mathbf{x}) = t^p \cdot f(\mathbf{x}).$$

Zeigen Sie für jede solche Funktion

$$\sum_{\nu=1}^n x_{\nu} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_{\nu}}(\mathbf{x}) = p \cdot f(\mathbf{x}).$$

**Aufgabe 1.16** Es sei  $\Phi$  eine symmetrische Bilinearform auf  $\mathbb{R}^n$  und  $q(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{x})$  die zugehörige quadratische Form. Zeigen Sie, dass  $q$  in jedem Punkt  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  differenzierbar ist, und berechnen Sie  $q'(\mathbf{x})$ .

**Aufgabe 1.17** Für festes  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  werde eine Abbildung  $\mathbf{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  definiert durch

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \omega \mathbf{e}_3 \times \mathbf{r}(t).$$

**Aufgabe 1.18 (V)** In jedem Punkt des Einheitskreises  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$  berechne man die Ableitung von

$$f(x, y) = (x^2 - 2y^2) \exp(x^2 + y^2)$$

in Richtung der (positiv orientierten) Kreistangente. In welchen Punkten nimmt die Richtungsableitung Extremwerte an und wie groß sind diese? (Hinweis:  $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$ .)

## 1.4 Taylor-Entwicklung

Jede genügend oft differenzierbare Funktion  $f$  von mehreren Variablen kann man genauso, wie eine Funktion einer Variablen, in eine Taylor-Reihe entwickeln. Als ich diese Vorlesung das vor-vorletzte mal las, habe ich diesem Thema nicht die geringste Beachtung geschenkt. Ich dachte, wenn man die Taylor-Entwicklung in einer Variablen verstanden hat, dann kann man die Taylor-Entwicklung in mehreren Variablen im Schlaf. Und außerdem, wo soll das in der Physik vorkommen? Inzwischen hat mich aber eine ziemlich gut informierte Studentin der Mathematik und Physik davon überzeugt, dass ich dieses Thema doch besprechen sollte. Also, was gibt es dazu zu sagen?

Erinnern wir uns - ach es ist so lange her - was die Taylor-Reihe einer Funktion  $f(x)$  einer reellen Variablen  $x$  ist: Man fixiert einen Wert  $x \in \mathbb{R}$ , um den man entwickelt, und eine Auslenkung  $h \in \mathbb{R}$ , und schreibt

$$f(x+h) = f(x) + f'(x) \cdot h + \frac{1}{2} f''(x) \cdot h^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x) h^n + \dots$$

Der Sinn dieser Zeile besteht darin, den Wert  $f(x+h)$  der Funktion  $f$  im ausgelenkten Punkt  $x+h$  durch die Ableitungen  $f^{(\nu)}(x)$  der Funktion  $f$  im fixierten Punkt  $x$  auszudrücken. Dabei gibt es drei Probleme von ganz verschiedenen Schwierigkeitsgraden:

**Problem 1:** Bei der  $\nu$ -ten Ableitung  $f^{(\nu)}(x)$  steht die  $\nu$ -te Potenz  $h^\nu$  der Auslenkung. Das ist ganz einfach zu merken. Und es ist auch sehr praktisch, denn für kleine Auslenkung  $h$  wird  $h^\nu$  sehr klein, umso kleiner, je größer  $\nu$  ist. Es kommt also nur auf die ersten Potenzen an, etwa  $\nu = 0, 1, 2, 3$ , je nach dem, wie genau man es nimmt.

**Problem 2:** Bei der  $\nu$ -ten Ableitung  $f^{(\nu)}(x)$  steht nicht nur die Potenz  $h^\nu$ , sondern noch ein Zahlenfaktor, nämlich

$$\frac{1}{\nu!}.$$

Den muss man sich merken. Aber das geht einigermaßen, wenn man an die Exponentialreihe

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots = \sum \frac{1}{\nu!}x^\nu$$

denkt. Und diese Exponentialreihe muss man einfach wissen. An der führt im Leben eines Naturwissenschaftlers kein Weg vorbei. Und wenn man sich an sie erinnert, erinnert man sich auch an den Zahlenfaktor  $1/\nu!$ .

**Problem 3:** Beim Hinschreiben der Taylor-Reihe muss jeder Mensch irgendwann aufhören. Menschen sind beschränkt, und können nicht alle unendlich vielen Summanden der Taylor-Reihe hinschreiben. In der Praxis ist also eine Taylor-Reihe dazu da, abgebrochen zu werden. Und wenn man abbricht, macht man einen Fehler. Den kann man Restglied  $R_n(h)$  nennen. Und dann sieht die abgebrochene Taylor-Reihe so aus:

$$f(x+h) = \sum_{\nu=0}^n \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(x) h^\nu + R_n(h).$$

Und für einen Mathematiker ist die Kontrolle über das Restglied das Wesentliche. Damit kann er Abschätzungen beweisen. Für einen Physiker dagegen ist das Restglied klein, kleiner als  $const \cdot h^{n+1}$ . Damit kann er Trends feststellen.

Das Schwierigste an der Taylor-Formel ist, sich eine Formel für das Restglied zu merken. Das ist schon in einer Variablen schwierig, in mehreren erst recht. Und deswegen wollen wir uns nicht hierauf konzentrieren, sondern auf die ersten Summanden der Taylor-Reihe.

Betrachten wir also eine Funktion  $f(x, y)$  von zwei Variablen, genügend oft differenzierbar. Wir fixieren einen Aufpunkt  $(x, y)$  und wollen den Wert  $f(x+h, y+k)$  in einem Punkt mit dem Auslenkungsvektor  $(h, k)$  durch eine Reihe ausdrücken. Dazu fixieren wir zuerst noch die Auslenkung  $y+k$  im zweiten Argument, und entwickeln für festes  $y+k$  die Funktion  $f(x+h, y+k)$  der einen Variablen  $h$  in eine Taylor-Reihe. Da kommen dann alle partiellen Ableitungen von  $f$  nach  $x$  vor. Es ist mir zu viel Schreib-Arbeit, die ordentlich hinzuschreiben. Deswegen möchte ich abkürzen:

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_{xxx} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \quad \text{usw.}$$

Dann wird also

$$f(x+h, y+k) = f(x, y+k) + f_x(x, y+k) \cdot h + \frac{1}{2} f_{xx}(x, y+k) \cdot h^2 + \dots + \frac{1}{\mu!} f_{x\dots x}(x, y+k) \cdot h^\mu + \dots$$

(Wie gesagt, das Restglied lasse ich weg, mir kommt es hier nur auf die Taylor-Koeffizienten an.)  
 Damit haben wir also die Funktion  $f$  für festes  $y+k$  in eine Taylor-Reihe nach  $x$  entwickelt. Und jetzt entwickeln wir die Koeffizienten in Taylor-Reihen nach  $y$ :

$$\begin{aligned} f(x, y+k) &= f(x, y) + f_y(x, y) \cdot k + \frac{1}{2} f_{yy}(x, y) \cdot k^2 + \dots + \frac{1}{\nu!} f_{yy\dots y}(x, y) \cdot k^\nu + \dots, \\ f_x(x, y+k) &= f_x(x, y) + f_{xy}(x, y) \cdot k + \frac{1}{2} f_{xyy}(x, y) \cdot k^2 + \dots + \frac{1}{\nu!} f_{xyy\dots y}(x, y) \cdot k^\nu + \dots, \\ f_{xx}(x, y+k) &= f_{xx}(x, y) + f_{xxy}(x, y) \cdot k + \frac{1}{2} f_{xxyy}(x, y) \cdot k^2 + \dots + \frac{1}{\nu!} f_{xxyy\dots y}(x, y) \cdot k^\nu + \dots, \end{aligned}$$

und so weiter. Setzen wir diese Koeffizienten in die eindimensionale Entwicklung nach  $x$  ein, so finden wir

$$\begin{aligned} &f(x+h, y+k) \\ = &f(x, y) + f_y(x, y) \cdot k + \frac{1}{2} f_{yy}(x, y) \cdot k^2 + \frac{1}{3!} f_{yyy}(x, y) \cdot k^3 + \dots \\ &+ f_x(x, y) \cdot h + f_{xy}(x, y) \cdot hk + \frac{1}{2} f_{xyy}(x, y) \cdot hk^2 + \frac{1}{3!} f_{xyyy}(x, y) \cdot hk^3 + \dots \\ &+ \frac{1}{2} f_{xx}(x, y) \cdot h^2 + \frac{1}{2} f_{xxy}(x, y) \cdot h^2k + \frac{1}{2 \cdot 2} f_{xxyy}(x, y) \cdot h^2k^2 + \frac{1}{2 \cdot 3!} f_{xxyyy}(x, y) \cdot h^2k^3 + \dots \\ &+ \frac{1}{3!} f_{xxx}(x, y) \cdot h^3 + \frac{1}{3!} f_{xxxy}(x, y) \cdot h^3k + \frac{1}{3! \cdot 2} f_{xxxyy}(x, y) \cdot h^3k^2 + \frac{1}{3! \cdot 3!} f_{xxxyyy}(x, y) \cdot h^3k^3 + \dots \end{aligned}$$

Das ist ja eine schöne Bescherung! Wie soll man sich diesen Formelkram merken? Naja, was kommt alles vor? Alle partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial^{\mu+\nu} f}{\partial x^\mu \partial y^\nu}(x, y)$$

im Entwicklungspunkt. Und die kommen zusammen mit der Potenz

$$h^\mu k^\nu$$

und dem numerischen Faktor

$$\frac{1}{\mu! \cdot \nu!}.$$

Die Taylor-Reihe in zwei Variablen ist also

$$f(x+h, y+k) = \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} \frac{1}{\mu! \cdot \nu!} \frac{\partial^{\mu+\nu} f}{\partial x^\mu \partial y^\nu}(x, y) \cdot h^\mu k^\nu.$$

Wenn man ein wenig nachdenkt, merkt man, es kann eigentlich gar nicht anders sein. Also ist es doch nicht so schwer zu merken.

**Beispiel 1.10** Entwickeln wir meine Lieblingsfunktion  $f(x, y) = x^y$  im Aufpunkt  $(x, y) = (2, 3)$  bis zur dritten Ordnung! (Wenn man es für diese Funktion kann, dann für jede!) Dazu brauchen wir die Werte

$$f(2, 3) = 2^3 = 8$$

$$\begin{aligned}
f_x(2,3) &= yx^{y-1}\Big|_{(2,3)} = 12 \\
f_{xx}(2,3) &= y(y-1)x^{y-2}\Big|_{(2,3)} = 12 \\
f_{xxx}(2,3) &= y(y-1)(y-2)x^{y-3}\Big|_{(2,3)} = 6 \\
f_y(2,3) &= x^y \ln(x)\Big|_{(2,3)} = 8 \ln(2) \\
f_{xy}(2,3) &= x^{y-1} + yx^{y-1} \ln(x)\Big|_{(2,3)} = 2^2 + 3 \cdot 2^2 \ln(2) = 4 + 12 \ln(2) \\
f_{xxy}(2,3) &= (2y-1)x^{y-2} + y(y-1)x^{y-2} \ln(x)\Big|_{(2,3)} = 10 + 12 \ln(2) \\
f_{yy}(2,3) &= x^y \ln(x)^2\Big|_{(2,3)} = 8 \ln(2)^2 \\
f_{xyy}(2,3) &= 2x^{y-1} \ln(x) + yx^{y-1} \ln(x)^2\Big|_{(2,3)} = 8 \ln(2) + 12 \ln(2)^2 \\
f_{yyy}(2,3) &= x^y \ln(x)^3\Big|_{(2,3)} = 8 \ln(2)^3
\end{aligned}$$

Mit diesen Werten erhalten wir unsere Entwicklung

$$\begin{aligned}
(2+h)^{3+k} &= 8 + \\
&12 \cdot h + 8 \ln(2) \cdot k + \\
&6 \cdot h^2 + (4 + 12 \ln(2)) \cdot hk + 4 \ln(2)^2 \cdot k^2 + \\
&h^3 + (5 + 6 \ln(2)) \cdot h^2 k + (4 \ln(2) + 6 \ln(2)^2) \cdot hk^2 + \frac{4}{3} \ln(2)^3 \cdot k^3 + \dots
\end{aligned}$$

**Aufgabe 1.19** Es sei wie immer  $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung dieser Funktion  $r$  im Punkt  $(x, y) = (1, 0)$  bis zur zweiten Ordnung.

**Aufgabe 1.20 (V)** Berechnen Sie die Taylorreihe der Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x, y) = \sin(x^2 + y^2),$$

mit dem Ursprung des  $\mathbb{R}^2$  als Entwicklungspunkt.

**Aufgabe 1.21 (V)** Berechnen Sie die Taylorreihe von  $f(x, y) = \frac{1}{x+y}$  zum Entwicklungspunkt  $(1, 1) \in \mathbb{R}^2$ .

**Aufgabe 1.22 (V)** Bestimmen Sie die Taylor-Reihe der Funktion

$$F(x, y) = \frac{2xy}{x+y}, \quad x, y > 0;$$

im Punkt  $(x, y) = (1, 1)$  bis einschließlich Glieder zweiter Ordnung.

## 1.5 Umkehrung differenzierbarer Abbildungen, implizite Funktionen

Ist  $D \subset \mathbb{R}^n$  und  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^k$  injektiv, so gibt es eine Umkehrabbildung  $F^{-1} : F(D) \rightarrow D$ , definiert durch  $F^{-1}(F(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ . Ist  $F(D) \subset \mathbb{R}^k$  offen, und sind  $F$  und  $F^{-1}$  differenzierbar, so folgt aus der Kettenregel

$$\begin{aligned} F^{-1} \circ F = id_D &\Rightarrow \mathbb{1}_n = (id_D)' = (F^{-1})' \cdot F' \\ F \circ F^{-1} = id_{F(D)} &\Rightarrow \mathbb{1}_k = (id_{F(D)})' = F' \cdot (F^{-1})'. \end{aligned}$$

Also ist die lineare Abbildung  $(F^{-1})'(F(\mathbf{x}))$  die Inverse der linearen Abbildung  $F'(\mathbf{x})$ . Es folgt:

$$\begin{aligned} k &= n, \\ F'(\mathbf{x}) &\text{ ist nicht-singulär für alle } \mathbf{x} \in D, \\ \det(F'(\mathbf{x})) &\neq 0 \text{ für alle } \mathbf{x} \in D. \end{aligned}$$

Differenzierbare Abbildungen lassen sich also (ähnlich wie lineare Abbildungen) höchstens dann umkehren, wenn die Räume gleiche Dimension haben:  $n = k$ .

**Definition 1.5** Es sei  $F = (F_1, \dots, F_n) : D \rightarrow \mathbb{R}^n, D \subset \mathbb{R}^n$ , differenzierbar. Dann heißt die Determinante

$$\det F'(\mathbf{x}) = \det \left( \frac{\partial F_\kappa}{\partial x_\nu} \right)_{1 \leq \kappa, \nu \leq n}$$

der Funktionalmatrix die Funktionaldeterminante oder Jacobische Determinante von  $F$ .

**Beispiel 1.11** Die Funktionaldeterminante der Transformation in Polarkoordinaten ist

$$\det \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{pmatrix} = r,$$

die Funktionalmatrix der Transformation in Kugelkoordinaten ist

$$\det \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cos(\theta) & -r \sin(\varphi)\cos(\theta) & -r \cos(\varphi)\sin(\theta) \\ \sin(\varphi)\cos(\theta) & r \cos(\varphi)\cos(\theta) & -r \sin(\varphi)\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & & r \cos(\theta) \end{pmatrix} = r^2 \cdot \cos(\theta).$$

**Satz 1.6 (Hilfssatz)** Es sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar,  $\mathbf{x}_0 \in D$  und  $\det F'(\mathbf{x}_0) \neq 0$ . Dann gibt es einen Radius  $r > 0$  derart, dass die Kugel  $K_r(\mathbf{x}_0)$  um  $\mathbf{x}_0$  vom Radius  $r$  noch ganz in  $D$  liegt und

- i)  $F|_{K_r(\mathbf{x}_0)}$  injektiv ist,
- ii) das Bild  $F(K_r(\mathbf{x}_0))$  noch eine Kugel  $K_\rho(F(\mathbf{x}_0))$  enthält mit  $\rho > 0$ .

Beweis. i) Andernfalls gibt es zu jedem  $r > 0$  Punkte  $\mathbf{x}_1$  und  $\mathbf{x}_2 \in D$  mit Abstand  $\leq r$  von  $\mathbf{x}_0$  so, dass  $F(\mathbf{x}_1) = F(\mathbf{x}_2)$ . Sind  $F_1, \dots, F_n$  die Komponentenfunktionen von  $F$ , so heißt dies  $F_\nu(\mathbf{x}_1) = F_\nu(\mathbf{x}_2)$  für  $\nu = 1, \dots, n$ . Wir betrachten die Funktionen

$$f_\nu(t) := F_\nu(\mathbf{x}_1 + t \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)),$$

d.h., die Einschränkungen der  $F_\nu$  auf die Gerade durch  $\mathbf{x}_1$  und  $\mathbf{x}_2$ . Alle  $f_\nu$  sind auf dem Intervall  $0 \leq t \leq 1$  stetig und haben in den Endpunkten den gleichen Wert. Nach dem Satz von Rolle gibt es also Parameter  $t_\nu, 0 < t_\nu < 1$ , mit

$$0 = \left. \frac{df_\nu}{dt} \right|_{t=t_\nu} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_\nu}{\partial x_k}(\mathbf{x}_1 + t_\nu \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)) \cdot (x_{2,k} - x_{1,k}).$$

Die Determinante der quadratischen Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_1 + t_1 \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_1 + t_1 \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}_1 + t_n \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)) & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}_1 + t_n \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)) \end{pmatrix}$$

verschwindet also. Für  $r \rightarrow 0$  gehen alle Punkte  $\mathbf{x}_1 + t_\nu \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$  gegen  $\mathbf{x}_0$ . Die Determinante als stetige Funktion ihrer Einträge konvergiert gegen die Funktionaldeterminante im Punkt  $\mathbf{x}_0$ . Da diese Funktionaldeterminante aber  $\neq 0$  war, ist das ein Widerspruch.

ii). Nach i) gibt es ein  $r > 0$  derart, dass  $F$  auf der abgeschlossenen Kugel  $\overline{K_r(\mathbf{x}_0)}$  injektiv ist. Für alle  $\mathbf{x}$  mit  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = r$  ist also  $\|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x}_0)\| > 0$ . Da

$$\partial K_r(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = r\}$$

kompakt ist, existiert das Minimum

$$m := \min_{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = r} \|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x}_0)\|$$

und es ist  $m > 0$ . Wir setzen  $\rho := \frac{m}{2}$ .

Falls ii) nicht gilt, existiert ein  $\mathbf{y}_1$  mit  $\|\mathbf{y}_1 - F(\mathbf{x}_0)\| < \rho$  so, dass stets  $F(\mathbf{x}) \neq \mathbf{y}_1$ , wenn  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r$ . Also existiert ein  $\mathbf{x}_1 \in K_r(\mathbf{x}_0)$  mit

$$d := \min_{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq r} \|F(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_1\|^2 = \|F(\mathbf{x}_1) - \mathbf{y}_1\|^2 > 0.$$

Der Fall  $\mathbf{x}_1 \in \partial K_r(\mathbf{x}_0)$  kann nicht eintreten, denn für alle  $x$  mit  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = r$  gilt ja

$$\begin{aligned} \|F(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_1\| &= \|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x}_0) - (\mathbf{y}_1 - F(\mathbf{x}_0))\| \\ &\geq \|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x}_0)\| - \|\mathbf{y}_1 - F(\mathbf{x}_0)\| \\ &\geq m - \rho \\ &= \rho \\ &> \|F(\mathbf{x}_0) - \mathbf{y}_1\|. \end{aligned}$$

Die Funktion

$$\begin{aligned} K_r(\mathbf{x}_0) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{x} &\mapsto \|F(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_1\|^2 = \sum_{\nu=1}^n (F_\nu(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_{1,\nu})^2 \end{aligned}$$

nimmt also in  $\mathbf{x}_1 \in K_r(\mathbf{x}_0)$  ein lokales Minimum an. Wegen Satz 1.5 verschwinden dann alle Ableitungen

$$2 \cdot \sum_{\nu=1}^n (F_\nu(\mathbf{x}_1) - \mathbf{y}_{1,\nu}) \cdot \frac{\partial F_\nu}{\partial x_k}(\mathbf{x}_1), \quad k = 1, \dots, n.$$

Der Vektor  $F(\mathbf{x}_1) - \mathbf{y}_1$  ist von  $\mathbf{0}$  verschieden, also ist die Funktionalmatrix  $\frac{\partial F_\nu}{\partial x_k}(\mathbf{x}_1)$  singulär und ihre Determinante verschwindet.

Für  $r \rightarrow 0$  geht  $\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_0$  und aus der Stetigkeit der Funktionaldeterminante erhält man wieder den Widerspruch  $\det(F'(\mathbf{x}_0)) = 0$ .  $\square$

Aus dem Hilfssatz folgern wir

**Satz 1.7 (Lokale Umkehrbarkeit differenzierbarer Abbildungen)** *Es sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar und  $\det(F'(\mathbf{x})) \neq 0$  für alle  $\mathbf{x} \in D$ . Dann gibt es zu jedem  $\mathbf{x}_0 \in D$  eine offene Menge  $U \subset D$  mit*

- $\mathbf{x}_0 \in U$ ,
- $F(U) \subset \mathbb{R}^n$  offen,
- $F : U \rightarrow F(U)$  bijektiv,
- $F^{-1} : F(U) \rightarrow U$  stetig differenzierbar,

und

$$(F^{-1})'(\mathbf{y}) = F'(F^{-1}(\mathbf{y}))^{-1} \quad \text{für alle } \mathbf{y} \in F(U).$$

Beweis. Zu jedem Punkt  $\mathbf{x} \in D$  gibt es wegen Aussage ii) des Hilfssatzes ein  $r > 0$  derart, dass die Bildmenge  $F(K_r(\mathbf{x}))$  eine offene Kugel um  $F(\mathbf{x})$  enthält. Also enthält  $F(D)$  mit jedem Punkt  $F(\mathbf{x})$  eine ganze offene Kugel um diesen Punkt. Die Menge  $F(D)$  ist also offen, ebenso wie das Bild  $F(U)$  einer jeden offenen Teilmenge  $U \subset D$ .

Nach Aussage i) des Hilfssatzes gibt es ein  $r > 0$  derart, dass

$$F|_{K_r(\mathbf{x}_0)} : K_r(\mathbf{x}_0) \rightarrow F(K_r(\mathbf{x}_0))$$

bijektiv ist. Wir setzen  $U := K_r(\mathbf{x}_0)$ .

Als nächstes beweisen wir die Stetigkeit von  $F^{-1}$  in allen Punkten  $\mathbf{y} = F(\mathbf{x}) \in F(U)$ ,  $\mathbf{x} \in U$ . Sei  $\mathbf{y}_\nu \in F(U)$  eine Folge von Vektoren mit Grenzwert  $\mathbf{y}$ . Die Folge  $\mathbf{x}_\nu = F^{-1}(\mathbf{y}_\nu)$  der Urbilder ist ganz in der kompakten Menge  $\bar{U}$  enthalten, deswegen besitzt sie eine konvergente Teilfolge  $\mathbf{x}_{\nu_k}$ . Aus der Stetigkeit von  $F$  folgt für jede konvergente Teilfolge  $\mathbf{x}_{\nu_k}$

$$F\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_{\nu_k}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} F(\mathbf{x}_{\nu_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{y}_{\nu_k} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathbf{y}_\nu = \mathbf{y},$$

und aus der Injektivität von  $F$  folgt  $\lim \mathbf{x}_{\nu_k} = \mathbf{x}$ . Zu jedem  $s \in \mathbb{R}$ ,  $0 < s < r$ , kann es also nur endlich viele Punkte  $\mathbf{x}_\nu$  mit  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_\nu\| \geq s$  geben, denn sonst gäbe es auch eine konvergente Teilfolge von solchen Punkten, deren Grenzwert aber nicht  $\mathbf{x}$  sein könnte. Also konvergiert  $\mathbf{x}_\nu = F^{-1}(\mathbf{y}_\nu)$  gegen  $\mathbf{x}$ .

Nach Voraussetzung ist die lineare Abbildung  $F'(\mathbf{x})$  invertierbar, es gibt also die lineare Abbildung  $F'(\mathbf{x})^{-1}$ . Für diese lineare Abbildung gibt es eine Schranke  $0 < a \in \mathbb{R}$  mit

$$\|F'(\mathbf{x})^{-1}(\mathbf{h})\| \leq a \cdot \|\mathbf{h}\|.$$

Daraus folgt für alle  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{x}\| = \|F'(\mathbf{x})^{-1} \cdot F'(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{x})\| \leq a \cdot \|F'(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{x})\|,$$

mit  $c := 1/a$  also

$$\|F'(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{x})\| \geq c \cdot \|\mathbf{u} - \mathbf{x}\|.$$

Wenn der Abstand  $\|\mathbf{u} - \mathbf{x}\|$  klein genug ist, folgt aus der Differenzierbarkeit von  $F$  in  $\mathbf{x}$

$$\begin{aligned} \|F(\mathbf{u}) - F(\mathbf{x})\| &= \|F'(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{u}) - [F(\mathbf{u}) - F(\mathbf{x}) - F'(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{x})]\| \\ &\geq \|F'(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{u})\| - \|F(\mathbf{u}) - F(\mathbf{x}) - F'(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{x})\| \\ &\geq \frac{c}{2} \cdot \|\mathbf{u} - \mathbf{x}\|. \end{aligned}$$

Somit ist für  $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{x}$  der Quotient  $\|\mathbf{u} - \mathbf{x}\| / \|F(\mathbf{u}) - F(\mathbf{x})\| \leq 2/c$  beschränkt.

Wegen der Stetigkeit von  $F^{-1}$  geht für  $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{y}$  stets  $\mathbf{u} := F^{-1}(\mathbf{v}) \rightarrow \mathbf{x}$ . Also gilt

$$\begin{aligned} &\lim_{\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{y}} \frac{1}{\|\mathbf{v} - \mathbf{y}\|} (F^{-1}(\mathbf{v}) - F^{-1}(\mathbf{y}) - F'(\mathbf{x})^{-1}(\mathbf{v} - \mathbf{y})) \\ &= \lim_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{x}} \frac{\|\mathbf{u} - \mathbf{x}\|}{\|F(\mathbf{u}) - F(\mathbf{x})\|} \cdot \frac{1}{\|\mathbf{u} - \mathbf{x}\|} (\mathbf{u} - \mathbf{x} - F'(\mathbf{x})^{-1}(F(\mathbf{u}) - F(\mathbf{x}))) \\ &\leq \frac{2}{c} F'(\mathbf{x})^{-1} \cdot \lim_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{x}} \frac{1}{\|\mathbf{u} - \mathbf{x}\|} \cdot (F'(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{x}) - F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{x})) \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Deswegen ist  $F^{-1}$  differenzierbar mit Ableitung  $(F^{-1})'(\mathbf{y}) = F'(F^{-1}(\mathbf{y}))^{-1}$ . Da die Einträge der Matrix  $F'(F^{-1}(\mathbf{y}))$  stetig sind, sind auch alle partiellen Ableitungen der Komponenten von  $F^{-1}$  stetig.  $\square$

### Beispiel 1.12 Die Polarkoordinatenabbildung

$$F : \quad x = r \cdot \cos(\varphi), \quad y = r \cdot \sin(\varphi)$$

hat die Funktionaldeterminante  $r$ . Für alle  $r > 0$  ist also die Voraussetzung von Satz 1.7 erfüllt und die Abbildung ist lokal umkehrbar. Sie bildet sogar den ganzen Streifen

$$r > 0, \quad 0 < \varphi < 2\pi$$

umkehrbar auf die offene Menge

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : 0 \leq x \in \mathbb{R}\}$$

ab mit der Umkehrabbildung

$$F^{-1} : \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) & \text{für } y > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) & \text{für } x < 0 \\ \frac{3\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) & \text{für } y < 0. \end{cases}$$

(Hierbei ist  $\operatorname{arctg}$  der  $\operatorname{arctg}$ -Hauptwert. Die Umkehrabbildung ist ganz schön unangenehm hinzuschreiben.) Auf keinem Streifen mit einer Breite  $> 2\pi$  ist die Abbildung umkehrbar. Und auch dort, wo  $r = 0$  ist, im Nullpunkt, ist die Abbildung nicht lokal umkehrbar.

Es liegt also in der Natur der Sache, dass man keine Aussagen über globale Umkehrbarkeit machen kann, die der Tatsache vergleichbar wären, dass eine stetig differenzierbare Funktion einer Variablen mit Ableitung  $\neq 0$  auf einem Intervall umkehrbar ist.

Eine *implizite Funktion* ist eine Funktion  $f(x)$ , die nicht explizit, sondern durch eine Gleichung definiert ist, die man erst auflösen muss. So definiert beispielsweise die Kreisgleichung

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

die Funktion  $y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$  auf dem Intervall  $(-r, r)$ . Man hätte zur Auflösung der Kreisgleichung genau so gut die negative Quadratwurzel nehmen können, oder auch  $x = \sqrt{r^2 - y^2}$ . Aber es gibt keine Funktion  $y = f(x)$  oder  $x = f(y)$ , deren Graph die ganze Kreislinie ist. Dies zeigt wieder einen wesentlichen Aspekt: meist sind nicht-lineare Gleichungen nur lokal auflösbar.

Der Satz über implizite Funktionen gilt in beliebiger Dimension. Wir wollen ihn nur in Dimension 2 beweisen, weiter unten aber in voller Allgemeinheit formulieren.

**Satz 1.8 (Implizite Funktionen, n=2)** *Es sei*

- $D \subset \mathbb{R}^2$  *offen*,  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in D$ ,
- $g : D \rightarrow \mathbb{R}$  *stetig differenzierbar*,
- $g(\mathbf{x}_0) = 0$ ,  $\frac{\partial g}{\partial y}(\mathbf{x}_0) \neq 0$ .

*Dann gibt es*

- *ein Intervall*  $(x_0 - r, x_0 + r)$ ,  $r > 0$ , *um*  $x_0$ ,
- *eine Teilmenge*  $D' \subset D$ ,
- *und eine stetig differenzierbare Funktion*  $f : (x_0 - r, x_0 + r) \rightarrow \mathbb{R}$

*derart, dass*

$$(x, y) \in D' \text{ mit } g(x, y) = 0 \iff |x - x_0| < r \text{ und } y = f(x).$$

Man sagt: Die Gleichung  $g(x, y) = 0$  wird durch die Funktion  $y = f(x)$  lokal nach  $y$  aufgelöst. Beweis. Durch Hinzunahme der Koordinatenfunktion  $x$  ergänzen wir  $g$  zu einer Abbildung

$$G : \begin{cases} D \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x, g(x, y)). \end{cases}$$

Diese Abbildung hat die Funktionalmatrix

$$G'(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

und die Funktionaldeterminante  $\partial g / \partial y$ . Nach Satz 1.7 ist  $G$  in  $\mathbf{x}_0$  lokal umkehrbar, d.h., es gibt eine offene Menge  $D' \subset D$ ,  $\mathbf{x}_0 \in D'$ , derart, dass  $G(D') \subset \mathbb{R}^2$  offen und  $G : D' \rightarrow G(D')$  umkehrbar ist.

Es sei  $G(\mathbf{x}_0) = (x_0, 0) \in G(D')$ . Wir verkleinern  $G(D')$  zu einem Rechteck

$$R: \quad |x - x_0| < r, \quad |y| < s,$$

dann ersetzen wir  $G(D')$  durch  $R$  und  $D'$  durch die Teilmenge  $G^{-1}(R)$ . Wir definieren  $f: (x_0 - r, x_0 + r) \rightarrow \mathbb{R}$  als die  $y$ -Komponente von  $G^{-1}(x, 0)$ . Dann haben wir

$$\begin{aligned} (x, y) \in D' \text{ mit } g(x, y) = 0 &\Leftrightarrow (x, y) \in D' \text{ mit } G(x, y) \in \text{x-Achse} \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in (D' \cap G^{-1}(\text{x-Achse})) \\ &\Leftrightarrow |x - x_0| < r \text{ und } (x, y) = G^{-1}(x, 0) \\ &\Leftrightarrow |x - x_0| < r \text{ und } y = f(x). \end{aligned}$$

□

**Satz 1.9 (Zusatz)** Die Ableitung der nach Satz 1.7 existierenden Funktion  $y = f(x)$ , welche die Gleichung  $g(x, y) = 0$  nach  $y$  auflöst, berechnet sich aus den partiellen Ableitungen von  $g$  zu

$$f'(x) = -\frac{\partial g}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^{-1}.$$

Beweis. Es ist  $g(x, f(x))$  identisch 0. Also verschwindet auch die Ableitung dieser Funktion nach  $x$ . Mit der Kettenregel ist die Ableitung aber

$$\frac{d}{dx}g(x, f(x)) = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{df}{dx}.$$

Da  $\partial g/\partial y \neq 0$  vorausgesetzt war, folgt aus dieser Gleichung die Behauptung. □

**Beispiel 1.13** Es sei  $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$  die Kreisgleichung. Wenn  $y \neq 0$ , dann ist  $\partial g/\partial y = 2y \neq 0$ . Die Gleichung ist also lokal nach  $y$  auflösbar:

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}.$$

Genau in den Schnittpunkten des Kreises mit der  $x$ -Achse gilt dies nicht ( $y = 0$ ), und dort ist dann die Kreislinie auch nicht als Graph einer Funktion  $y = f(x)$  zu beschreiben. Die Ableitung

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{y}$$

berechnet sich nach dem Zusatz aus der Funktion  $g$  als

$$-\frac{\partial g}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^{-1} = -2x \cdot (2y)^{-1}.$$

Es stimmt.

**Beispiel 1.14** Wir betrachten die ideale Gasgleichung  $P \cdot V = \text{const} \cdot T$ , wo wir der Einfachheit halber  $\text{const} = 1$  setzen. Wir haben also

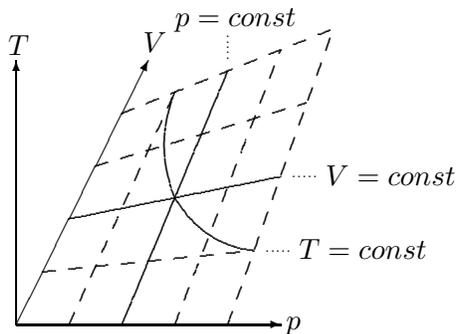
$$p \cdot V = T.$$

Dies können wir als Gleichung einer Fläche im drei-dimensionalen  $(p, V, T)$ -Raum auffassen. Wir können diese Gleichung aber auch nach jeder der drei Variablen auflösen:

$$T = p \cdot V, \quad p = \frac{T}{V}, \quad V = \frac{T}{p}.$$

Setzt man eine Variable konstant, so ergibt dies eine Gleichung zwischen den beiden anderen Variablen:

$$T = \text{const} \Rightarrow p \cdot V = \text{const}, \quad p = \text{const} \Rightarrow \frac{T}{V} = \text{const}, \quad V = \text{const} \Rightarrow \frac{T}{p} = \text{const}.$$



Diese Gleichung können wir nach einer Variablen auflösen, z.B.

$$V = \frac{\text{const}}{p} \quad (T = \text{const})$$

und diese Auflösung ableiten, etwa

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{T=\text{const}} = -\frac{\text{const}}{p^2}.$$

So sind die Größen

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -\frac{T}{p^2}, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{V}, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p = p$$

definiert. Wir finden durch Inspektion

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p = -\frac{T}{p^2} \cdot \frac{1}{V} \cdot p = -\frac{T}{p \cdot V} = -1.$$

Dies ist kein Zufall: Wenn immer eine Beziehung  $g(x, y, z)$  zwischen drei Größen  $x, y, z$  besteht, und wir (unter den Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen) auflösen können

$$\begin{aligned} y = y(x) & \quad \text{aus} \quad g(x, y, z_0) = 0 \\ x = x(z) & \quad \text{aus} \quad g(x, y_0, z) = 0 \\ z = z(y) & \quad \text{aus} \quad g(x_0, y, z) = 0, \end{aligned}$$

haben wir nach dem Zusatz die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{z=\text{const}}(x_0) &= -\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\right)^{-1} \\ \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_{y=\text{const}}(z_0) &= -\frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\right)^{-1} \\ \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{x=\text{const}}(y_0) &= -\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\right)^{-1} \\ \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{z=\text{const}} \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_{y=\text{const}} \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{x=\text{const}} &= (-1)^3 \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial y}^{-1} \cdot \frac{\partial g}{\partial z} \cdot \frac{\partial g}{\partial x}^{-1} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial z}^{-1} \\ &= -1. \end{aligned}$$

Schließlich noch der Satz über implizite Funktionen (ohne Beweis) in der allgemeinen Form.

**Satz 1.10 (Implizite Funktionen)** Es seien  $g_1, \dots, g_k$  Funktionen von  $n + k$  Veränderlichen  $\mathbf{z} = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k)$ . Für  $\kappa = 1, \dots, k$  sei  $g_\kappa(\mathbf{z}_0) = 0$  und die Funktionalmatrix

$$\left( \frac{\partial g_\kappa}{\partial z_j}(\mathbf{z}_0) \right)_{\kappa=1, \dots, k, j=1, \dots, n+k}$$

habe Maximalrang, es sei etwa die  $k \times k$ -Unterdeterminante

$$\det \left( \frac{\partial g_\kappa}{\partial y_j}(\mathbf{z}_0) \right)_{\kappa, j=1, \dots, k} \neq 0.$$

Dann kann man die Gleichungen  $g_\kappa(\mathbf{z}) = 0$  lokal nach  $y_1, \dots, y_k$  auflösen:

$$g_1(\mathbf{z}) = \dots = g_k(\mathbf{z}) = 0 \iff y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_k = f_k(x_1, \dots, x_n).$$

**Satz 1.11 (Zusatz)** Die Funktionalmatrix

$$\left( \frac{\partial y_\pi}{\partial x_\nu} \right)_{\pi=1, \dots, k, \nu=1, \dots, n}$$

berechnet sich als

$$- \left( \frac{\partial g_\kappa}{\partial y_j} \right)_{\kappa, j=1, \dots, k}^{-1} \cdot \left( \frac{\partial g_\kappa}{\partial x_\nu} \right)_{\kappa=1, \dots, k, \nu=1, \dots, n}.$$

**Aufgabe 1.23** Die Abbildung  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  sei definiert durch

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy.$$

Wo ist  $F$  lokal umkehrbar? Bestimmen Sie eine lokale Umkehrung  $F^{-1} : x = x(u, v), y = y(u, v)$  bei  $(u, v) = (1, 0)$  derart, dass  $F^{-1}(1, 0) = (1, 0)$ .

**Aufgabe 1.24** Wo ist

$$e^{x-y} - (x+y)^2 = 0$$

lokal nach  $y$  auflösbar? Berechnen Sie dort die Ableitung der Auflösung  $y(x)$ .

**Aufgabe 1.25 (Fischer-Kaul p.429)** Die van der Waalssche Gasgleichung lautet

$$f(p, V, T) := \left( p + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) - RT = 0, \quad a, b, R \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie

$$\left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T \quad \text{und} \quad \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

dort, wo  $\partial f / \partial V \neq 0$ .

**Aufgabe 1.26 (V)** Sei  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ . Man zeige, dass durch  $f(x, y) = 0$  in einer Umgebung von  $(x_0, y_0) = (\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$  implizit eine differenzierbare Funktion  $y(x)$  definiert wird, die in  $x_0$  ihr Maximum annimmt.

**Aufgabe 1.27 (V)** Für  $x, y \in \mathbb{R}$  sei  $f(x, y) := (e^x \cos(y), e^x \sin(y))$ .

a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix  $(Df)(x, y)$  und begründen Sie, weshalb  $f$  auf  $\mathbb{R}^2$  total differenzierbar ist.

b) Sei

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f \text{ um } (x, y) \text{ lokal umkehrbar}\}.$$

Man zeige

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \notin \pi/2 + \pi\mathbb{Z}\}.$$

c) Bestimmen Sie die Ableitung der lokalen Inversen von  $f$  um  $(0, 0)$  im Punkt  $f(0, 0)$ .

**Aufgabe 1.28 (V)** Die Abbildung  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  sei durch  $f(x, y) = ((x + y)^3, (x - y)^7)$  definiert.

a) Beweisen Sie, dass  $f$  injektiv ist.

b) Welche Punkte besitzen eine Umgebung  $U$ , so dass die Umkehrabbildung  $(f|U)^{-1}$  existiert und differenzierbar ist?

**Aufgabe 1.29 (V)** Die durch  $x^3 + y^3 - 2xy$  implizit gegebene Kurve in der Ebene geht durch den Punkt  $(1, 1)$ . Wie lautet die Gleichung der Tangente an die Kurve in diesem Punkt?

**Aufgabe 1.30** Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  gegeben durch

$$f(x, y) := (e^{x+y} \cos(x - y), e^{x+y} \sin(x - y)).$$

Untersuchen Sie  $f$  auf lokale und globale Invertierbarkeit.

## 1.6 Lokale Extrema

Bei differenzierbaren Funktionen  $f(x)$  einer reellen Variablen  $x$  gibt es für lokale Extrema zwei Kriterien:

Notwendiges Kriterium:  $x_0$  ist lokales Extremum  $\Rightarrow f'(x_0) = 0$ .

Hinreichendes Kriterium:  $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0 \Rightarrow x_0$  ist lokales Extremum.

Das notwendige Kriterium für ein Extremum einer Funktion  $f(x_1, \dots, x_n)$  von mehreren Variablen haben wir bereits kennengelernt:

$$f \text{ hat in } \mathbf{x}_0 = (x_{0,1}, \dots, x_{0,n}) \text{ ein lokales Extremum} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) = 0.$$

Zur Formulierung eines hinreichenden Kriteriums brauchen wir alle zweiten partiellen Ableitungen  $\partial^2 f / \partial x_\mu \partial x_\nu$ . Diese zweiten Ableitungen bilden eine  $n \times n$ -Matrix

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix},$$

die sogenannte *Hesse-Matrix*. Wenn  $f$  zweimal stetig differenzierbar ist, d.h., wenn die zweiten partiellen Ableitungen stetig sind, hängen diese nicht von der Reihenfolge ab, in der sie gebildet werden. Wir brauchen uns also nicht darum zu kümmern, ob es  $\partial^2 f / \partial x_\mu \partial x_\nu$  oder  $\partial^2 f / \partial x_\nu \partial x_\mu$  heißt. Das ist schön, weil dies bedeutet, dass die Hesse-Matrix symmetrisch ist. Symmetrische Matrizen werden in der linearen Algebra ausführlich untersucht. (Hauptachsentransformation!) Dies werden wir jetzt anwenden.

Schränken wir  $f$  auf eine Gerade

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t \cdot \mathbf{v}$$

durch  $\mathbf{x}_0$  mit Richtungsvektor  $\mathbf{v}$  ein, so ist die zweite Ableitung der eingeschränkten Funktion

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} f(\mathbf{x}_0 + t \cdot \mathbf{v}) &= \frac{d}{dt} \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(\mathbf{x}_0 + t \cdot \mathbf{v}) \cdot v_\nu \\ &= \sum_{\mu, \nu=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_\mu \partial x_\nu}(\mathbf{x}_0 + t \cdot \mathbf{v}) \cdot v_\mu v_\nu. \end{aligned}$$

Im Punkt  $\mathbf{x}_0$  selbst ( $t = 0$ ) erhalten wir für diese zweite Ableitung

$$\sum_{\mu, \nu=1}^n H_{\mu, \nu} \cdot v_\mu v_\nu = \mathbf{v}^t \cdot H \cdot \mathbf{v},$$

den Wert der durch die Hessematrix gegebenen quadratischen Form auf dem Richtungsvektor  $\mathbf{v}$ .

Eine quadratische Form  $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}^t \cdot H \cdot \mathbf{v}$  heißt *positiv definit*, wenn für alle Vektoren  $0 \neq \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  der Wert  $\mathbf{v}^t \cdot H \cdot \mathbf{v}$  positiv, d.h. echt  $> 0$  ist. Dies ist äquivalent dazu, dass alle Eigenwerte der Matrix  $H$  positiv sind. Die Form heißt *negativ definit*, wenn  $\mathbf{v}^t \cdot H \cdot \mathbf{v} < 0$  für alle  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ .

In der linearen Algebra beweist man aber auch ein Kriterium, bei dem man die Eigenwerte nicht zu kennen braucht:

**Satz 1.12 (Hurwitz-Kriterium)** *Eine symmetrische reelle Matrix*

$$H = (h_{\mu, \nu})_{\mu, \nu=1, \dots, n}$$

*ist genau dann positiv definit, wenn ihre  $n$  Hauptminoren  $D_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , positiv sind:*

$$D_k := \det(h_{\mu, \nu})_{\mu, \nu=1, \dots, k} > 0.$$

**Satz 1.13 (Hinreichendes Kriterium für lokales Minimum)** *Die Funktion  $f$  sei zweimal stetig differenzierbar auf der offenen Menge  $D \subset \mathbb{R}^n$ . In dem Punkt  $\mathbf{x}_0 \in D$  gelte*

- $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$ ,
- die Hesse-Matrix  $H_f(\mathbf{x}_0)$  ist positiv definit.

Dann hat  $f$  in  $\mathbf{x}_0$  ein lokales Minimum.

Beweis. Wenn  $\mathbf{x}_0$  kein lokales Minimum für  $f$  wäre, dann gäbe es eine Folge von Punkten  $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{x}_k \in D$ , die gegen  $\mathbf{x}_0$  konvergiert, mit  $f(\mathbf{x}_k) \leq f(\mathbf{x}_0)$  für alle  $k$ . Sei  $\mathbf{v}_k := \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ . Dann wird durch

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathbf{x}_0 + t \cdot \mathbf{v}_k$$

die Gerade durch  $\mathbf{x}_0$  und  $\mathbf{x}_k$  parametrisiert. Die auf diese Gerade eingeschränkte Funktion

$$\varphi(t) := f(\mathbf{x}_0 + t \cdot \mathbf{v}_k)$$

der reellen Variablen  $t$  hat bei  $t = 0$

- verschwindende Ableitung  $\varphi'(0) = \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(\mathbf{x}_0) \cdot v_{k,\nu}$
- und positive zweite Ableitung  $\varphi''(0) = \sum_{\mu,\nu=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_\mu \partial x_\nu}(\mathbf{x}_0) \cdot v_{k,\mu} v_{k,\nu}$ .

Wäre die zweite Ableitung von  $\varphi$

$$\varphi''(t) = \sum_{\mu,\nu=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_\mu \partial x_\nu}(\mathbf{x}_0 + t \cdot \mathbf{v}_k) \cdot v_{k,\mu} v_{k,\nu}$$

auf dem ganzen  $t$ -Intervall  $[0, 1]$  positiv, so hätte  $\varphi$  auf diesem ganzen Intervall monoton wachsende erste Ableitung, die Funktion wäre echt monoton wachsend. Da

$$\varphi(1) = f(\mathbf{x}_k) \leq f(\mathbf{x}_0) = \varphi(0),$$

kann dies nicht der Fall sein. Es gibt also einen Zwischenwert  $0 < \theta < 1$  mit  $\varphi''(\theta) = 0$ . Setzen wir  $\mathbf{y}_k := \mathbf{x}_0 + \theta \mathbf{v}_k$ , so haben wir deswegen für die Einheitsvektoren  $\mathbf{w}_k := \mathbf{v}_k / \|\mathbf{v}_k\|$

$$H_f(\mathbf{y}_k)(\mathbf{w}_k) = \frac{1}{\|\mathbf{v}_k\|^2} \sum_{\mu,\nu=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_\mu \partial x_\nu}(\mathbf{y}_k) v_{k,\mu} v_{k,\nu} = 0.$$

Da die Einheitskugel im  $\mathbb{R}^n$  kompakt ist, besitzt die Folge der Vektoren  $\mathbf{w}_k$  eine konvergente Teilfolge. Nachdem wir zu dieser Teilfolge übergehen können wir o.B.d.A. annehmen  $\mathbf{w}_k \rightarrow \mathbf{w}_0$  für  $k \rightarrow \infty$ . Die Funktion

$$D \times \mathbb{R}^n \ni (\mathbf{x}, \mathbf{v}) \mapsto H_f(\mathbf{x})(\mathbf{v})$$

ist stetig, da die zweiten partiellen Ableitungen von  $f$  stetig vorausgesetzt sind. Es folgt

$$H_f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{w}_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} H_f(\mathbf{x}_k)(\mathbf{w}_k) = 0.$$

Das geht aber nicht, weil  $H_f(\mathbf{x}_0)$  positiv definit und der Vektor  $\mathbf{w}_0 \neq \mathbf{0}$  ist. □

Geht man von  $f$  über zu  $-f$ , so erhält man aus Satz 1.13 ein hinreichendes Kriterium für das Vorhandensein eines lokalen Maximum: Die Funktion  $f$  sei zweimal stetig differenzierbar auf der

offenen Menge  $D \subset \mathbb{R}^n$ . In einem Punkt  $\mathbf{x}_0 \in D$  sollen alle ersten partiellen Ableitungen verschwinden und die Hesse-Matrix negativ-definit sein. Dann ist  $\mathbf{x}_0$  ein lokales Maximum.

Die symmetrische Matrix  $H$  heißt *indefinit*, wenn es Vektoren  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{w}$  gibt mit

$$\mathbf{v}^t \cdot H \cdot \mathbf{v} > 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{w}^t \cdot H \cdot \mathbf{w} < 0.$$

Ist die Hesse-Matrix  $H_f(\mathbf{x})$  indefinit in einem Punkt  $\mathbf{x}$ , wo  $\text{grad}(f) = \mathbf{0}$  ist, so liegt dort bestimmt kein Extremum vor: Auf der Geraden  $\mathbf{x} + t \cdot \mathbf{v}$  hat  $f$  ein lokales Minimum, und auf der Geraden  $\mathbf{x} + t \cdot \mathbf{w}$  ein lokales Maximum. Und beliebig nahe bei  $\mathbf{x}$  gibt es Punkte  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  mit

$$f(\mathbf{x}_1) < f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}_2).$$

Ein Beispiel dafür ist der am Ende von 1.3 diskutierte Sattelpunkt  $f(x, y) = x^2 - y^2$ . Die Hesse-Matrix im Nullpunkt

$$H_f(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

ist indefinit.

Es gibt auch noch *semidefinite* Matrizen  $H$ , wo also entweder stets  $\mathbf{v}^t \cdot H \cdot \mathbf{v} \geq 0$  oder  $\mathbf{v}^t \cdot H \cdot \mathbf{v} \leq 0$  gilt. Ist die Hesse-Matrix  $H_f(\mathbf{x})$  semidefinit, so kann man mit unseren Methoden über ein eventuelles Extremum nichts aussagen.

Im  $n$ -dimensionalen Raum,  $n \geq 2$ , gibt es noch ein Phänomen, das in einer Dimension nicht vorkommt: *Extrema unter Nebenbedingungen*. Dabei wird nicht ein Extremum auf einer offenen Teilmenge  $D \subset \mathbb{R}^n$  gesucht, sondern unter einer (oder mehreren) Nebenbedingung(en). Physiker nennen soetwas häufig auch etwas plastischer *Zwangsbedingungen*. So eine Bedingung wird durch eine Funktion  $g(x)$  gegeben, die den Wert 0 haben soll. Die Bedingung etwa, dass sich ein Punkt  $x$  auf der Einheitskugel aufhalten soll, wird durch die Funktion  $g(x) = \sum x_\nu^2 - 1 = 0$  beschrieben.

Die Methode, lokale Extrema unter Nebenbedingungen zu suchen, beruht auf dem Satz über implizite Funktionen. Wir wollen sie in Dimension  $n = 2$  beweisen, weiter unten aber noch ganz allgemein formulieren.

**Satz 1.14 (Lagrange-Multiplikator,  $n = 2$ )** Die Funktionen  $f(x, y)$  und  $g(x, y)$  seien differenzierbar,  $g$  stetig differenzierbar, auf der offenen Menge  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Für  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in D$  gelte

$$g(\mathbf{x}_0) = 0, \quad \text{grad}(g)[\mathbf{x}_0] \neq 0.$$

Die Funktion  $f$  nehme im Punkt  $\mathbf{x}_0$  ein Extremum unter der Nebenbedingung  $g(\mathbf{x}) = 0$  an. Dann existiert ein Skalar  $\lambda \in \mathbb{R}$  (Lagrange-Multiplikator) so, dass

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_0) &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_0) &= \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(\mathbf{x}_0) \end{aligned}$$

Beweis. O.B.d.A. sei  $\partial g / \partial y(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$ . Wegen des Satzes über implizite Funktionen können wir die Gleichung  $g(x, y) = 0$  bei  $\mathbf{x}_0$  lokal nach  $y$  auflösen. Sei  $y = h(x), |x - x_0| < r$ , eine derartige

Auflösung. Dass  $f$  ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung  $g(x, y) = 0$  besitzt, das heißt, dass die Funktion  $x \mapsto f(x, h(x))$  bei  $x_0$  ein lokales Extremum besitzt. Es folgt

$$0 = \frac{d}{dx} f(x, h(x)) \Big|_{x=x_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_0) \cdot \frac{dh}{dx}(x_0).$$

Andererseits wissen wir aber auch (Zusatz zum Satz über implizite Funktionen)

$$0 = \frac{d}{dx} g(x, h(x)) \Big|_{x=x_0} = \frac{\partial g}{\partial x}(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(\mathbf{x}_0) \cdot \frac{dh}{dx}(x_0).$$

Damit haben wir ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{dh}{dx}(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit einer nichttrivialen Lösung. Dann müssen die Zeilen der Koeffizienten-Matrix linear abhängig sein. Es besteht also eine nichttriviale lineare Relation

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(\mathbf{x}_0) + \mu \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_0) &= 0, \\ \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(\mathbf{x}_0) + \mu \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_0) &= 0, \end{aligned}$$

Weil  $\partial g / \partial y(\mathbf{x}_0) \neq 0$ , kann  $\mu$  nicht 0 sein. Wir können dann beispielsweise  $\mu = -1$  annehmen und erhalten die Behauptung.  $\square$

**Beispiel 1.15** Wir untersuchen die Funktion  $f(x, y) = x^3 + y^3$  unter der Nebenbedingung  $x^2 + y^2 = 1$  auf lokale Extrema. Wir haben also  $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$  und

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2, & \frac{\partial g}{\partial x} &= 2x, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 3y^2, & \frac{\partial g}{\partial y} &= 2y. \end{aligned}$$

Aus Satz 1.14 erhalten wir die Bedingungen

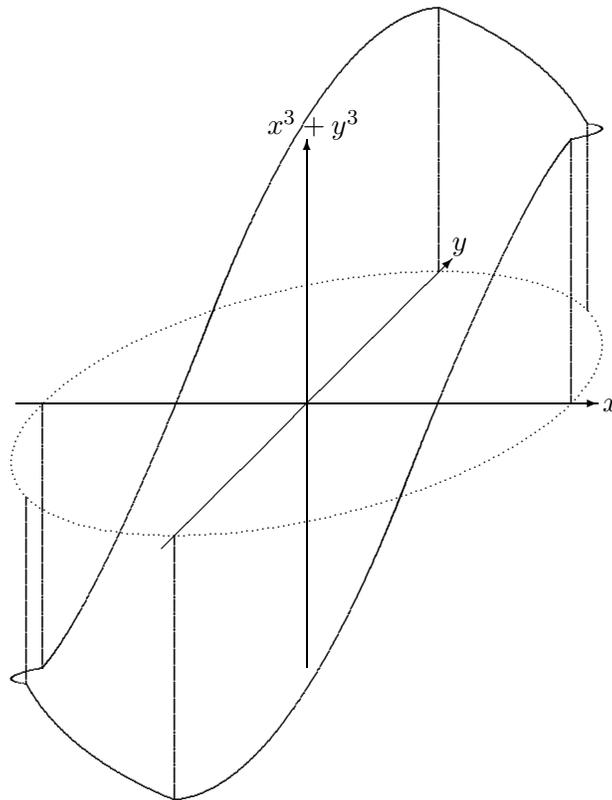
$$3x^2 = \lambda 2x, \quad 3y^2 = \lambda 2y.$$

Um  $\lambda$  zu eliminieren, fassen wir dies als ein lineares Gleichungssystem mit nicht-trivialer Lösung  $(1, -\lambda)$  und Determinante

$$3x^2 \cdot 2y - 3y^2 \cdot 2x = 6xy \cdot (x - y) = 0$$

auf. Dies ergibt die Bedingungen

$$\begin{aligned} x = 0 &\implies y = \pm 1 &\implies f(x, y) = \pm 1 \\ y = 0 &\implies x = \pm 1 &\implies f(x, y) = \pm 1 \\ x = y &\implies x = y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} &\implies f(x, y) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$



Damit haben wir sechs Punkte auf dem Kreis ausgerechnet. Zwischen diesen Punkten hat die Funktion  $f$  auf dem Kreis kein lokales Extremum, ist also monoton. Daraus können wir schließen, dass alle sechs Punkte lokale Extrema unter der Nebenbedingung sind, und zwar

$(x, y)$	$f(x, y)$	
$(1, 0)$	$1$	Maximum
$(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	lokales Minimum
$(0, 1)$	$1$	Maximum
$(-1, 0)$	$-1$	Minimum
$(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	lokales Maximum
$(0, -1)$	$-1$	Minimum.

Wir wollen noch das allgemeine Kriterium formulieren.

**Satz 1.15 (Lagrange-Multiplikatoren)** Es sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und  $G = (G_1, \dots, G_k) : D \rightarrow \mathbb{R}^k$  stetig differenzierbar. Der Rang der Funktionalmatrix von  $G$  in  $\mathbf{x}_0 \in D$

$$\left( \frac{\partial G_\kappa}{\partial x_\nu}(\mathbf{x}_0) \right)_{\nu=1, \dots, n, \kappa=1, \dots, k}$$

sei  $= k$ . Nimmt  $f$  in  $\mathbf{x}_0 \in D$  ein lokales Extremum unter den Nebenbedingungen  $G_1 = \text{const}_1, \dots, G_k =$

const<sub>k</sub> an, dann gibt es Skalare  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$  (Lagrange-Multiplikatoren), so, dass gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) &= \lambda_1 \frac{\partial G_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) + \dots + \lambda_k \frac{\partial G_k}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) \\ &\vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) &= \lambda_1 \frac{\partial G_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) + \dots + \lambda_k \frac{\partial G_k}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0). \end{aligned}$$

Dies sind  $n$  Gleichungen. Zusammen mit den  $k$  Nebenbedingungen haben wir  $n + k$  Gleichungen für die  $n + k$  Unbekannten  $x_{0,1}, \dots, x_{0,n}$  und  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ . Obwohl diese Gleichungen i.a. nicht-linear sind, besteht doch eine gewisse Hoffnung, dass man sie auflösen und so das Extremum  $\mathbf{x}_0$  ermitteln kann.

**Aufgabe 1.31 (NV)** Sei

$$f(x, y) := \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + 4x - 9y \quad (x \neq 0, y \neq 0).$$

Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von  $f$ .

**Aufgabe 1.32 (NV)** Gegeben sei die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$f(x, y) = (x^2 + 2y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 1).$$

- Skizzieren Sie die Menge  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$  und markieren Sie die Bereiche, wo  $f(x, y)$  positiv, bzw. negativ ist.
- Berechnen Sie die Ableitung  $f'$  und die Hesse-Matrix von  $f$ .
- Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von  $f$ .

**Aufgabe 1.33 (NV)** Gegeben sei die Menge

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x^2 \geq 0 \text{ und } x - y^2 \geq 0\}$$

und die Funktion  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f(x, y) = \sqrt{x - y^2}.$$

Bestimmen Sie alle Extrema von  $f$  in  $B$ .

**Aufgabe 1.34** Es sei  $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$  eine positiv definite symmetrische  $n \times n$ -Matrix und  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ . Wo besitzt

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i$$

ein lokales Minimum oder Maximum?

**Aufgabe 1.35** Es seien

$$L_1 : \mathbf{x}(s) = \mathbf{w}_1 + s\mathbf{v}_1, \quad L_2 : \mathbf{y}(t) = \mathbf{w}_2 + t\mathbf{v}_2$$

zwei Geraden im  $\mathbb{R}^n$  mit  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathbb{R}^n$  und  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  linear unabhängig. Zeigen Sie: Es gibt eindeutig bestimmte Punkte  $\mathbf{x}_0 \in L_1$  und  $\mathbf{y}_0 \in L_2$ , für die der Abstand  $\|\mathbf{x}(s) - \mathbf{y}(t)\|$  minimal ist.

**Aufgabe 1.36** a) Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion

$$h(x, y) = x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 - 6x - 6y.$$

b) Bestimmen Sie das Maximum der Funktion  $h$  auf der Kreisscheibe  $x^2 + y^2 \leq 16$  vom Radius 4.

**Aufgabe 1.37** Bestimmen Sie die Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1^2 \cdot \dots \cdot x_n^2,$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x_1, \dots, x_n) := x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1 = 0.$$

**Aufgabe 1.38** (V) Für alle  $x, y, z \in \mathbb{R}$  beweise man die Implikation

$$x^6 + y^6 + z^6 = 1 \implies x^5 + y^5 + z^5 \leq \sqrt[6]{3}.$$

**Aufgabe 1.39** (V) Welche Punkte der Menge

$$M = \{(x, y, z) \mid x^4 + y^4 + z^4 = 3\} \subset \mathbb{R}^3$$

haben minimalen Abstand vom Ursprung des  $\mathbb{R}^3$ ? (Rechnung!)

**Aufgabe 1.40** (V) Beweisen Sie, dass die auf  $\mathbb{R}^2$  definierte stetig differenzierbare reelle Funktion

$$f : (x, y) \mapsto e^{-x^2}(2y^3 - 3y^2 + 1) + e^x(2y^3 - 3y^2)$$

genau einen kritischen Punkt besitzt, in dem  $f$  ein lokales, aber kein globales Maximum hat.

**Aufgabe 1.41** (V) Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $f(x, y) = 2x^3 - y^3 + 12x^2 + 27y$ . Man finde alle kritischen Punkte von  $f$  und klassifiziere das Verhalten von  $f$  in diesen Punkten.

**Aufgabe 1.42** (V) Seien  $p_1, \dots, p_n > 0$  und  $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}^3$ . Die Funktion  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  sei gegeben durch

$$f(x) := \sum_{j=1}^n p_j \|x - y_j\|^2,$$

wobei  $\|\cdot\|$  die euklidische Norm im  $\mathbb{R}^3$  bezeichnet. Man zeige, dass es genau eine Minimalstelle von  $f$  gibt, und gebe diese an.

**Aufgabe 1.43** (V) Durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{36} = 1$$

ist ein Ellipsoid  $E$  im  $\mathbb{R}^3$  gegeben. Die  $E$  einbeschriebenen Quader  $Q$  sind von der Form  $Q = [-x, x] \times [-y, y] \times [-z, z]$  mit  $(x, y, z) \in E$  und  $x, y, z > 0$ . Zeigen Sie, dass es unter diesen Quadern genau einen mit größtem Volumen gibt, und geben Sie diesen an.

**Aufgabe 1.44 (V)** Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$e^{x-y} + x^2 - y^2 - e(x+1) + 1 = 0$$

in einem Intervall um 0 implizit eine Funktion  $y = \varphi(x)$  mit  $\varphi(0) = -1$  definiert. Zeigen Sie weiter, dass diese Funktion  $\varphi$  ein lokales Minimum in 0 hat.

**Aufgabe 1.45 (V)** Gegeben seien positive reelle Konstanten  $p, q, r$ . Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x, y, z) = x^p y^q z^r$$

auf der Menge

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0, x^3 + y^3 + z^3 = 1\}$$

ein absolutes Maximum hat. Berechnen Sie den maximalen Wert von  $f$  auf  $A$ .

**Aufgabe 1.46 (V)** Es sei  $R \subset \mathbb{R}^2$  das abgeschlossene Rechteck mit den Eckpunkten  $(1, -1)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(-2, 1)$  und  $(-2, -1)$ . Man bestimme Maximum und Minimum der Funktion

$$f : R \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto (x^2 - 1)e^{-y^2}.$$

**Aufgabe 1.47 (V)** Sei  $K$  die Kreisfläche  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$  und  $A = (0, 0)$ ,  $B = (1, -1)$ ,  $C = (2, 5)$ . Man bestimme diejenigen Punkte von  $K$ , für welche die Summe der Abstandsquadrate von den Punkten  $A, B$  und  $C$  am kleinsten, bzw. am größten ist.

**Aufgabe 1.48 (V)** Man bestimme auf

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2z = x^2 + y^2\}$$

den Punkt, der von  $(0, 4, 1)$  minimalen Abstand hat.

**Aufgabe 1.49 (V)** Bestimmen Sie die Punkte der ebenen Kurve

$$x^2 - xy + y^2 = 3, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

die

- a) den kleinsten Abstand vom Ursprung
- b) den größten Abstand vom Ursprung haben.

**Aufgabe 1.50 (V)** Bestimmen Sie für die auf  $\mathbb{R}^2$  durch

$$f(x, y) := y^4 + x^2 - 2y^2 - x$$

definierte reelle Funktion  $f$  Lage und Art

- a) der lokalen Extrema auf  $\mathbb{R}^2$ ,
- b) der globalen Extrema auf  $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^4 \leq 20\}$ .

**Aufgabe 1.51 (V)** Man zeige, dass unter allen Quadern gleicher Oberfläche (in  $\mathbb{R}^3$ ) der Würfel maximales Volumen hat.

**Aufgabe 1.52 (V)** Bestimmen Sie alle globalen Maximalstellen und Minimalstellen der Funktion  $h(x, y, z) := \sin(x) + \sin(y) + \sin(z)$  auf der Sphäre  $S \subset \mathbb{R}^3$  mit Radius  $\pi/2$  um den Nullpunkt des  $\mathbb{R}^3$ .

(Hinweis: Bei der Bestimmung des Lagrange-Multiplikators stößt man auf die Funktion  $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t}$ . Untersuchen und benutzen Sie ihr Monotonieverhalten auf den Intervallen  $[-\frac{\pi}{2}, 0[$  und  $]0, \frac{\pi}{2}]$ .)

**Aufgabe 1.53 (V)** Man bestimme den Quader größten Volumens, dessen Kantenlängen  $x, y, z$  die Bedingung  $x + y^2 + z^3 = 1$  erfüllen.

## 1.7 Die Differentialoperatoren $grad$ , $rot$ , $div$ und $\Delta$

Die partiellen Ableitungen einer differenzierbaren Funktion  $f$  kann man zusammenfassen zu einem Vektorfeld

$$grad(f) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right),$$

das man den *Gradienten* der Funktion  $f$  nennt. Wollen wir die Abhängigkeit vom Punkt  $\mathbf{x}$  ausdrücken, so schreiben wir

$$grad(f)[\mathbf{x}].$$

Wir hatten aus der Kettenregel eine Formel für die Richtungsableitung in Richtung des Vektors  $\mathbf{v}$  hergeleitet, die wir als Skalarprodukt mit dem Gradienten deuten können:

$$\left. \frac{d}{dt} f(\mathbf{x} + t \cdot \mathbf{v}) \right|_{t=0} = (grad(f)[\mathbf{x}], \mathbf{v}).$$

Für den Winkel  $\alpha$  zwischen dem Richtungsvektor  $\mathbf{v}$  und dem Gradienten gilt, wenn wir  $\mathbf{v}$  auf Länge 1 normieren,

$$(grad(f), \mathbf{v}) = \cos(\alpha) \cdot \| grad(f) \|.$$

Es folgt, dass die Richtungsableitung von  $f$  in Richtung des Gradienten *maximal* ist. Der Gradient weist in die Richtung des stärksten Anstiegs der Funktion  $f$ .

Im Wesentlichen den gleichen Sachverhalt kann man auch folgendermaßen ausdrücken: *Der Gradient  $grad(f)$  steht senkrecht auf den Niveauflächen  $f = const$ .* Wir wollen das nur für  $n = 2$  verifizieren. Sei also  $f(x, y)$  eine differenzierbare Funktion und  $f(x, y) = c$  eine Niveaulinie. Wir nehmen an, wir können die Gleichung  $f(x, y) = c$  lokal nach  $y$  auflösen:  $y = y(x)$ . Dann ist also

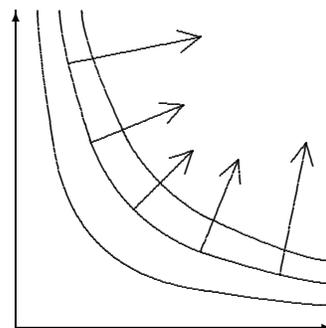
$$\begin{aligned}
f(x, y(x)) &\equiv 0, \\
\frac{d}{dx}f(x, y(x)) &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy(x)}{dx} \\
&\equiv 0, \\
\text{grad}(f) &= \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \perp \left( 1, \frac{dy(x)}{dx} \right).
\end{aligned}$$

Der Gradient steht also senkrecht auf dem Vektor  $(1, dy(x)/dx)$ . Dieser Vektor ist aber gerade der Tangentialvektor an die Kurve

$$x \mapsto (x, y(x)),$$

die parametrisierte Niveaulinie.

Niveaulinien und Gradientenfeld der Funktion  $x \cdot y$



Es ist häufig wichtig zu entscheiden, ob ein gegebenes Vektorfeld

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (A_1(x_1, \dots, x_n), \dots, A_n(x_1, \dots, x_n))$$

ein Gradientenfeld ist oder nicht:

$$\mathbf{A} = \text{grad}(f) \quad ??$$

Gradientenfelder tragen mehr oder weniger schöne Namen (z.B. *konservativ*), ebenso wie die Funktionen  $f$  deren Gradienten sie sind ( $-f$  heißt *Potential* des Feldes  $\mathbf{A}$ .) Ist  $\mathbf{A}$  stetig differenzierbar, so folgt aus der Symmetrie der zweiten Ableitungen (Satz 1.4) das folgende, wirklich enorm wichtige, Kriterium

**Satz 1.16 (Notwendiges Kriterium für Gradientenfelder)** Das Vektorfeld  $\mathbf{A}$  sei stetig differenzierbar. Ist  $\mathbf{A} = \text{grad}(f)$  ein Gradientenfeld, so gilt

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \quad (\text{Symmetriebedingung})$$

für alle  $\mu, \nu = 1, \dots, n$ .

Beweis. In der Tat:

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_\nu \partial x_\mu} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_\mu \partial x_\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}.$$

□

**Beispiel 1.16** Die Funktion  $f = x^2 + y^2$  auf  $\mathbb{R}^2$  hat den Gradienten

$$\text{grad}(f) = (2x, 2y).$$

Natürlich ist deswegen die Symmetriebedingung

$$\frac{\partial(2x)}{\partial y} = 0 = \frac{\partial(2y)}{\partial x}$$

erfüllt. Die ist auch für das Feld

$$\mathbf{A} = (y, x)$$

erfüllt ( $f = xy$ ), aber z.B. nicht für

$$\mathbf{A} = (y, -x).$$

Dieses Feld kann also kein Potential besitzen.

Später, wenn wir gut genug integrieren können, werden wir sehen, dass die Symmetriebedingung lokal auch hinreichend für die Existenz eines Potentials ist, also die Gradientenfelder charakterisiert.

In die Symmetriebedingung hat man  $\mu, \nu = 1, \dots, n$  unabhängig voneinander einzusetzen. Natürlich braucht man  $\mu = \nu$  nicht auszuprobieren, und wenn die Symmetriebedingung für  $\mu \neq \nu$  erfüllt ist, dann gilt sie auch nach Vertauschen von  $\mu$  und  $\nu$ . Sie stellt also

$$\frac{1}{2}(n^2 - n) = \frac{1}{2}n \cdot (n - 1)$$

skalare Bedingungen dar. I.A. ist diese Anzahl viel größer als  $n$ , aber in unserem 3-dimensionalen Anschauungsraum ist diese Anzahl genau gleich der Dimension:

$$\frac{1}{2}3 \cdot 2 = 3.$$

So banal das ist, so ist es doch eine der Grundtatsachen des Lebens. Man kann also die drei Gleichungen

$$\frac{\partial A_3}{\partial x_2} = \frac{\partial A_2}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial A_1}{\partial x_3} = \frac{\partial A_3}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial A_2}{\partial x_1} = \frac{\partial A_1}{\partial x_2}$$

zu einer Vektorgleichung zusammenfassen:

$$\text{rot}(\mathbf{A}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Jedem Vektorfeld  $\mathbf{A}$  im dreidimensionalen Raum ordnet man so ein neues Vektorfeld zu, seine Rotation  $\text{rot}(\mathbf{A})$ . Und die Symmetriebedingung im Dreidimensionalen schreibt sich

$$\text{rot}(\text{grad}(f)) = 0.$$

Natürlich hat das Rotationsfeld etwas mit "Drehung" zu tun. Dazu betrachten wir als Beispiel das Geschwindigkeitsfeld bei Drehung um eine Achse mit Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ :

$$\mathbf{A}(x_1, x_2, x_3) = \omega \times \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \omega_2 \cdot x_3 - \omega_3 \cdot x_2 \\ \omega_3 \cdot x_1 - \omega_1 \cdot x_3 \\ \omega_1 \cdot x_2 - \omega_2 \cdot x_1 \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \omega_2 \cdot x_3 - \omega_3 \cdot x_2 \\ \omega_3 \cdot x_1 - \omega_1 \cdot x_3 \\ \omega_1 \cdot x_2 - \omega_2 \cdot x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\omega_1 \\ 2\omega_2 \\ 2\omega_3 \end{pmatrix} = 2 \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Ein Vektorfeld  $\mathbf{A}$  auf dem  $\mathbb{R}^n$  hat eine  $n \times n$  Funktionalmatrix

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}.$$

Deren *Spur*

$$\operatorname{div}(\mathbf{A}) = \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu}$$

heißt *Divergenz* des Vektorfeldes. Im Unterschied zur Rotation ist die Divergenz

- ein Skalar, kein Vektor,
- in allen Dimensionen  $n$  sinnvoll zu definieren.

**Beispiel 1.17** Die Divergenz des Ortsvektorfeldes  $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$  ist

$$\operatorname{div}(\mathbf{x}) = \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial x_\nu}{\partial x_\nu} = n.$$

Und wenn man ein Vektorfeld  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  mit einer skalaren Funktion  $f(\mathbf{x})$  multipliziert, bekommt man

$$\operatorname{div}(f \cdot \mathbf{A}) = \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial(f \cdot A_\nu)}{\partial x_\nu} = \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_\nu} A_\nu + \sum_{\nu=1}^n f \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu} = (\operatorname{grad}(f), \mathbf{A}) + f \cdot \operatorname{div}(\mathbf{A}).$$

Man kann die Divergenz eines Rotationsfeldes bilden (nicht die Rotation einer Divergenz, da letztere ein Skalar ist):

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{rot}(\mathbf{A})) &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right) \\ &= \frac{\partial^2 A_1}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial x_3 \partial x_2} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial x_2 \partial x_1} \\ &= 0, \end{aligned}$$

wieder wegen der Symmetrie der zweiten Ableitungen! Wir haben also die Formel

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\mathbf{A})) = 0$$

bewiesen. Ähnlich wie  $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}(f)) = 0$  kann man die Formel  $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\mathbf{A})) = 0$  auch als notwendige Bedingung dafür auffassen, dass ein Vektorfeld  $\mathbf{B}$  ein Rotationsfeld ist: Gibt es ein Feld  $\mathbf{A}$  mit  $\mathbf{B} = \operatorname{rot}(\mathbf{A})$ , so ist notwendigerweise  $\operatorname{div}(\mathbf{B}) = 0$ .

Es gibt noch eine Möglichkeit, zwei der drei Differentialoperatoren *grad*, *rot* und *div* sinnvoll zu kombinieren: den *Laplace-Operator* angewandt auf eine Funktion  $f$

$$\Delta(f) = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f)) = \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_\nu^2}.$$

Dies ist wieder in jeder beliebigen Dimension  $n$  möglich, liefert aber von der Dimension abhängige Ergebnisse. Betrachten wir etwa die Funktion

$$f(x_1, \dots, x_n) = \|\mathbf{x}\|^m = \left(\sum_{\nu=1}^n x_\nu^2\right)^{m/2}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(\|\mathbf{x}\|) &= \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \cdot \mathbf{x}, \\ \operatorname{grad}(\|\mathbf{x}\|^m) &= m \|\mathbf{x}\|^{m-1} \cdot \operatorname{grad}(\|\mathbf{x}\|) \\ &= m \|\mathbf{x}\|^{m-2} \cdot \mathbf{x}, \\ \Delta(f) &= m \cdot \operatorname{div}(\|\mathbf{x}\|^{m-2} \cdot \mathbf{x}) \\ &= m \cdot [(\operatorname{grad}(\|\mathbf{x}\|^{m-2}), \mathbf{x}) + \|\mathbf{x}\|^{m-2} \operatorname{div}(\mathbf{x})] \\ &= m \cdot [(m-2) \|\mathbf{x}\|^{m-4} \cdot (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + n \cdot \|\mathbf{x}\|^{m-2}] \\ &= m \cdot (n + m - 2) \cdot \|\mathbf{x}\|^{m-2} \\ &= 0 \\ \Leftrightarrow m &= 2 - n. \end{aligned}$$

Funktionen  $f$  mit  $\Delta(f) = 0$  heißen *harmonisch*. Wir haben ausgerechnet: Auf  $\mathbb{R}^n$  (ohne Nullpunkt) ist

$$r^{2-n} = \|\mathbf{x}\|^{2-n}$$

harmonisch. Für  $n = 1$  ist dies die kaum erwähnenswerte Tatsache, dass die zweite Ableitung der Funktion  $|x|$  verschwindet ( $x \neq 0$ ). Für  $n = 2$  die noch uninteressantere, entsprechende Aussage für die konstanten Funktionen. Aber für  $n = 3$  etwa ist  $1/r$  harmonisch.

Allerdings ist die Dimension 2 dadurch nicht sehr benachteiligt: Für die Funktion  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$  ist

$$\begin{aligned} \Delta(f) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{2x}{x^2 + y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{2y}{x^2 + y^2} \right) \\ &= \frac{4}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{4y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= 0, \end{aligned}$$

also ist  $\ln(r) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$  in Dimension 2 harmonisch.

Die Produktregel der Differentiation führt nach dem Schema

$$\operatorname{grad}(f \cdot g) = g \cdot \operatorname{grad}(f) + f \cdot \operatorname{grad}(g)$$

oder

$$\operatorname{div}(f \cdot \mathbf{A}) = (\operatorname{grad}(f), \mathbf{A}) + f \cdot \operatorname{div}(\mathbf{A})$$

in Verbindung mit den drei Operationen *grad*, *rot* und *div* zu reichhaltigem Formelmaterial. Hierzu vergleiche man etwa Seite 126 im Buch von Großmann. Um die Merkbarekeit dieser Regeln zu erhöhen kann man den Operator *Nabla*

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

einführen. Einerseits ist der ein Vektorfeld auf dem  $\mathbb{R}^3$ , andererseits auch ein Differentialoperator. Mit etwas Fingerspitzengefühl wird

- *grad*(*f*) das Produkt  $\nabla f$  (von rechts) dieses Operators mit der Funktion *f*,
- *rot*(**A**) das Kreuzprodukt  $\nabla \times \mathbf{A}$ ,
- *div*(**A**) das Skalarprodukt  $(\nabla, \mathbf{A})$ .

Die bekannten Eigenschaften des Skalar- und Kreuzproduktes aus der linearen Algebra erleichtern Herleitung und Erinnerung an die erwähnten Formeln.

**Aufgabe 1.54** Bestimmen Sie Divergenz und Rotation der Vektorfelder

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 1.55** Bestimmen Sie *rot*(**a**) und *rot*(*rot*(**a**)) für das Vektorfeld

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} yz^2 \\ zx^2 \\ xy^2 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 1.56** Zeigen Sie für differenzierbare Funktionen *f, g* und Vektorfelder **A, B** auf dem  $\mathbb{R}^3$

- |  |   |  |
|--|---|--|
| 1) <i>grad</i> ( <i>f</i> · <i>g</i> )                               | = | <i>g</i> · <i>grad</i> ( <i>f</i> ) + <i>f</i> · <i>grad</i> ( <i>g</i> )  |
| 2) <i>div</i> ( <i>f</i> · <b>A</b> )                                | = | ( <i>grad</i> ( <i>f</i> ), <b>A</b> ) + <i>f</i> · <i>div</i> ( <b>A</b> )  |
| 3) $\Delta$ ( <i>f</i> · <i>g</i> )                                  | = | <i>g</i> · $\Delta$ ( <i>f</i> ) + 2( <i>grad</i> ( <i>f</i> ), <i>grad</i> ( <i>g</i> )) + <i>f</i> · $\Delta$ ( <i>g</i> ) |
| 4) <i>rot</i> ( <i>f</i> · <b>A</b> )                                | = | <i>grad</i> ( <i>f</i> ) × <b>A</b> + <i>f</i> · <i>rot</i> ( <b>A</b> )   |
| 5) <i>rot</i> ( <i>f</i> · <i>grad</i> ( <i>g</i> ))                 | = | <i>grad</i> ( <i>f</i> ) × <i>grad</i> ( <i>g</i> )  |
| 6) <i>div</i> ( <b>A</b> × <b>B</b> )                                | = | ( <b>B</b> , <i>rot</i> ( <b>A</b> )) − ( <b>A</b> , <i>rot</i> ( <b>B</b> ))  |
| 7) <i>div</i> ( <i>grad</i> ( <i>f</i> ) × <i>grad</i> ( <i>g</i> )) | = | 0  |

**Aufgabe 1.57** Es seien  $a \in \mathbb{R}$  und  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ .

- a) Bestimmen Sie den Gradient der Funktion  $(x^2 + y^2 + z^2)^a$ .
- b) Bestimmen Sie für  $r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  den Gradient der Funktion  $r^a$ .
- c) Bestimmen Sie Divergenz und Rotation des Vektorfeldes  $\hat{\mathbf{x}} := \frac{1}{r}\mathbf{x}$ .

**Aufgabe 1.58** Es sei  $f(x, y)$  eine genügend oft differenzierbare Funktion auf  $\mathbb{R}^2$  und

$$f(r, \varphi) = f(x(r, \varphi), y(r, \varphi))$$

dieselbe Funktion in Polarkoordinaten.

a) Zeigen Sie:  $\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$ .

- b) Bestimmen Sie alle harmonischen Funktionen  $f$  auf  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{0}$ , die nur von  $r$  und nicht von  $\varphi$  abhängen.

**Aufgabe 1.59** Es sei  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow \mathbb{R}$  genügend oft differenzierbar. Zeigen Sie:  $f \cdot \mathbf{x}$  ist genau dann ein Gradientenfeld, wenn  $f = f(r)$  ist.

## 2 Integralrechnung mehrerer Veränderlicher

### 2.1 Doppelintegrale

Ein *Doppelintegral* ist ein Integral der Form

$$\int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx dy := \int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx \right) dy.$$

**Beispiel 2.1** *Es ist*

$$\begin{aligned} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} (x + y^2) dx dy &= \int_{a_2}^{b_2} \left[ \frac{1}{2}x^2 + y^2x \right]_{x=a_1}^{x=b_1} dy \\ &= \int_{a_2}^{b_2} \left( \frac{1}{2}b_1^2 + y^2b_1 - \frac{1}{2}a_1^2 - y^2a_1 \right) dy \\ &= \left[ \frac{1}{2}(b_1^2 - a_1^2)y + (b_1 - a_1)\frac{1}{3}y^3 \right]_{y=a_2}^{y=b_2} \\ &= \frac{1}{2}(b_1^2 - a_1^2)(b_2 - a_2) + \frac{1}{3}(b_1 - a_1)(b_2^3 - a_2^3). \end{aligned}$$

*Dieses Doppelintegral ist leicht zu verwechseln mit dem Integral, wo zuerst über  $y$  und dann über  $x$  integriert wird:*

$$\begin{aligned} \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} (x + y^2) dy dx &= \int_{a_1}^{b_1} \left[ xy + \frac{1}{3}y^3 \right]_{y=a_2}^{y=b_2} dx \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \left[ x(b_2 - a_2) + \frac{1}{3}(b_2^3 - a_2^3) \right] dx \\ &= \frac{1}{2}(b_1^2 - a_1^2)(b_2 - a_2) + \frac{1}{3}(b_1 - a_1)(b_2^3 - a_2^3) \end{aligned}$$

*Glücklicherweise ist das Resultat dasselbe!*

Das Doppelintegral ist also folgendermaßen zu verstehen: Für festes  $y \in [a_2, b_2]$  berechnen wir

$$F(y) := \int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx,$$

hoffen, dass die Funktion  $F(y)$  wieder integrierbar ist, und bilden

$$\int_{a_2}^{b_2} F(y) dy = \int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx \right) dy.$$

Falls  $f(x, y)$  auf dem Rechteck  $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$  stetig ist, funktioniert das tatsächlich auch immer:

**Satz 2.1 (Lemma: Stetige Abhängigkeit des Integrals von einem Parameter)** Die Funktion  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig, dann ist auch die Funktion  $F : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}$

$$F : y \mapsto \int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx$$

wieder stetig (und deswegen über das Intervall  $[a_2, b_2]$  integrierbar).

Beweis. Es sei  $y_0 \in [a_2, b_2]$  fest und  $y_k \in [a_2, b_2]$  eine Folge die gegen  $y_0$  konvergiert. Wir wollen zeigen, dass die Funktionenfolge

$$f_k : \begin{cases} [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x, y_k) \end{cases}$$

gleichmäßig gegen

$$f_0 : \begin{cases} [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x, y_0) \end{cases}$$

konvergiert. Denn aus der Vertauschbarkeit von gleichmäßiger Konvergenz und Integration folgt dann

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F(y_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{a_1}^{b_1} f_k(x) dx = \int_{a_1}^{b_1} f_0(x) dx = F(y_0),$$

und  $F$  ist stetig in  $y_0$ .

Würde  $f_k \rightarrow f$  nicht gleichmäßig konvergieren, dann gäbe es ein  $0 < \epsilon \in \mathbb{R}$  und unendlich viele  $k \in \mathbb{N}$  mit  $|f_0(x_k) - f_k(x_k)| > \epsilon$  für ein  $x_k \in [a_1, b_1]$ . Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt die Folge  $x_k$  eine in  $[a_1, b_1]$  konvergente Teilfolge. Wir können o.B.d.A. gleich annehmen, dass die Folge  $x_k$  selbst konvergiert, etwa gegen  $x_0 \in [a_1, b_1]$ . Dann konvergiert die Folge  $(x_k, y_k) \in [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$  gegen  $(x_0, y_0)$ . Aus der Stetigkeit von  $f$  in diesem Punkt folgt dann der Widerspruch

$$\lim f_k(x_k) = \lim f(x_k, y_k) = f(x_0, y_0) = \lim f_0(x_k).$$

□

Man möchte nicht immer nur über Rechtecke integrieren. Wenn wir das Volumen der Einheitskugel

$$K_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

ausrechnen wollen, möchten wir gerne die Funktion

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

über die Einheitskreisscheibe

$$S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

integrieren. (Auf einer größeren Menge ist die Funktion  $f$  ja auch gar nicht definiert.) Dazu setzen wir  $f$  trivial und brutal auf das Einheitsquadrat  $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$  fort zu

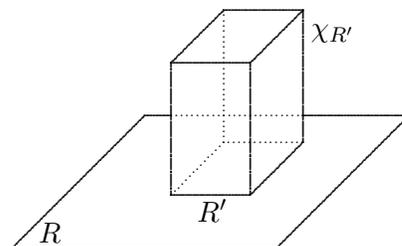
$$f_Q(x, y) := \begin{cases} \sqrt{1 - x^2 - y^2} & \text{falls } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{falls } x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$$

Diese Funktion  $f_Q : Q \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig und wir können das Doppelintegral

$$\begin{aligned}
 \iint_{S_1} \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy &:= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_Q(x,y) dx dy \\
 &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy \\
 &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2} (1-y^2) \pi dy \quad (\text{Halbkreisfläche vom Radius } \sqrt{1-y^2}) \\
 &= \frac{\pi}{2} [y - \frac{1}{3} y^3]_{-1}^1 \\
 &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

berechnen.

Doppelintegration funktioniert auch häufig, wenn  $f$  nicht stetig ist: Seien dazu Zwischenpunkte  $a_1 \leq a'_1 \leq b'_1 \leq b_1$  und  $a_2 \leq a'_2 \leq b'_2 \leq b_2$  gewählt und  $R' \subset R$  das Rechteck  $[a'_1, b'_1] \times [a'_2, b'_2]$ . Die charakteristische Funktion  $\chi_{R'}$  des Rechtecks  $R'$  ist definiert durch



$$\begin{aligned}
 \chi_{R'}(x,y) &= 1 \Leftrightarrow (x,y) \in R' \\
 \chi_{R'}(x,y) &= 0 \Leftrightarrow (x,y) \notin R'
 \end{aligned}$$

Für diese Funktion ist

$$\begin{aligned}
 \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} \chi(x,y) dx dy &= \int_{a_2}^{b_2} \left\{ \begin{array}{ll} \int_{a'_1}^{b'_1} dx & \text{falls } y \in [a'_2, b'_2] \\ 0 & \text{falls } y \notin [a'_2, b'_2] \end{array} \right\} dy \\
 &= \int_{a'_2}^{b'_2} (b'_1 - a'_1) dy \\
 &= (b'_1 - a'_1)(b'_2 - a'_2).
 \end{aligned}$$

Das Integral über die charakteristische Funktion des Rechtecks  $R'$  ist die Fläche dieses Rechtecks!

Dieses Ergebnis ist unabhängig von der Reihenfolge, in der man beide Integrationen ausführt:

$$\int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{a_1}^{b_1} \chi(x,y) dx \right) dy = (b'_1 - a'_1)(b'_2 - a'_2) = \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_2}^{b_2} \chi(x,y) dy \right) dx.$$

**Aufgabe 2.1** Berechnen Sie

- a)  $\int_0^1 \int_0^1 xy \, dx dy,$
- b)  $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (e^x + e^y) \, dx dy,$
- c)  $\int_0^1 \int_x^{2x} e^{(x^2)} \, dy dx,$
- d)  $\int_0^1 \int_0^y \sqrt{1-y^2} \, dx dy.$

**Aufgabe 2.2 (NV)** Sei  $D \subset \mathbb{R}^2$  das Dreieck mit den Ecken  $(0,0)$ ,  $(5,1)$  und  $(3,3)$ . Berechnen Sie  $\int_D x \, dx \, dy$ .

**Aufgabe 2.3 (NV)**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sei im abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  stetig. Beweisen Sie

$$\int_a^x \left[ \int_a^u (u-v)^n f(v) \, dv \right] du = \int_a^x \frac{(x-v)^{n+1}}{n+1} f(v) \, dv$$

für alle  $x \in [a, b]$  und alle  $n \in \mathbb{N}$ .

**Aufgabe 2.4 (Fischer-Kaul p.460)** Berechnen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \int_0^\infty (x-y)e^{-(x+y)} \, dx \, dy = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \int_0^R (x-y)e^{-(x+y)} \, dx \, dy.$$

**Aufgabe 2.5 (V)** Bestimmen Sie alle  $\alpha \in \mathbb{R}$ , für welche die reelle Funktion

$$f : (x, y) \mapsto (x+y)^\alpha$$

über  $]0, 1[ \times ]0, 1[$  integrierbar ist. (Geben Sie an, in welchem Sinn Sie die Integrierbarkeit verstehen.)

**Aufgabe 2.6 (V)** Gegeben seien das Dreieck

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0, x+y \leq 1\}$$

und die Funktionen

$$f_{m,n} := x^n y^m$$

für  $n, m \in \mathbb{N}_0$  und  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Zeigen Sie

$$\int_D x^n y^m \, d(x, y) = \frac{n!m!}{(n+m+2)!}.$$

**Aufgabe 2.7 (V)** Sei  $B$  das Dreieck der  $x, y$ -Ebene mit den Ecken  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(1,1)$ . Man berechne

$$\int_B \frac{\sin x}{x} \, d(x, y).$$

**Aufgabe 2.8 (V)** Berechnen Sie

$$\int_T (x+y+z) \, dx \, dy \, dz,$$

wobei  $T$  das Tetraeder mit den Ecken  $(0,0,0)$ ,  $(1,0,0)$ ,  $(0,1,0)$  und  $(0,0,1)$  im  $\mathbb{R}^3$  bezeichnet.

**Aufgabe 2.9 (V)** Sei  $F$  ein halber Kreisring, genauer

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0 \text{ und } a^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$$

mit  $0 < a < 1$ . Die  $y$ -Koordinate  $s_y$  des Schwerpunkts  $S$  von  $F$  ergibt sich bekanntlich aus der Beziehung

$$s_y \int_F dy \, dx = \int_F y \, dy \, dx.$$

Für welche  $a$  liegt  $S$  auf dem Rand von  $F$  ?

**Aufgabe 2.10 (V)** Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x, y) := e^{-x}$  und

$$M_a := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x \leq a\} \text{ für } a > 0.$$

- a) Zeigen Sie, dass  $f$  für jedes  $a > 0$  auf  $M_a$  Riemann-integrierbar ist.
- b) Berechnen Sie  $F_a := \int_{M_a} f(x, y) d(x, y)$  für  $a > 0$ .
- c) Zeigen Sie:  $\lim_{a \rightarrow \infty} F_a = 1$ .

## 2.2 Definitionen

Wir definieren hier Riemann-integrierbare Funktionen analog zur Definition in einer Variablen, nur müssen wir dabei stets Intervalle ersetzen durch deren  $n$ -dimensionale Verallgemeinerungen, die Quader: Ein Quader  $Q \subset \mathbb{R}^n$  ist eine Teilmenge der Form

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : a_1 \leq x_1 \leq b_1, \dots, a_n \leq x_n \leq b_n\}.$$

Dabei sind  $a_1 \leq b_1, \dots, a_n \leq b_n \in \mathbb{R}$  vorgegebene Zahlen. Ein Quader ist also immer abgeschlossen und beschränkt. Falls  $a_\nu = b_\nu$  für ein  $\nu$ , so ist der Quader entartet (d.h. zu dünn). Ein (abgeschlossenes, beschränktes) Intervall ist ein eindimensionaler Quader, ein Rechteck ist ein zweidimensionaler Quader.

Das Volumen des Quaders  $Q$  ist

$$|Q| = (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n),$$

das Produkt der Längen seiner Kanten.

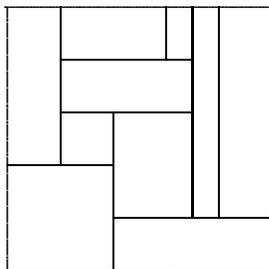
Genauso wie man definieren kann, was eine Zerlegung eines Intervalls in Teilintervalle ist, kann man definieren was eine Zerlegung des Quaders  $Q$  in Teilquader  $Q_k$  ist. Problematisch ist dabei allein schon das Hinschreiben einer solchen Zerlegung, da die Eckpunkte jetzt nicht mehr linear angeordnet sind. Die einfachsten Zerlegungen sind Produktzerlegungen von  $Q$ . Sie kommen von Zerlegungen der Kanten

$$a_k = x_k^{(0)} \leq x_k^{(1)} \leq \dots \leq x_k^{(s(k)-1)} \leq x_k^{(s(k))} = b_k$$

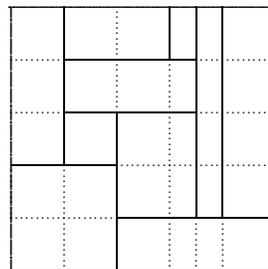
her und bestehen aus allen Produktquadern

$$[x_1^{(\sigma_1)}, x_1^{(\sigma_1+1)}] \times \dots \times [x_n^{(\sigma_n)}, x_n^{(\sigma_n+1)}], \quad 0 \leq \sigma_1 \leq s(1) - 1, \dots, 0 \leq \sigma_n \leq s(n) - 1.$$

Jede Zerlegung von  $Q$  kann man verfeinern zu einer Produktzerlegung:



Zerlegung und ..



feinere Produktzerlegung

Bei einer Zerlegung  $Q = \cup Q_k$  sollen sich die Teilquader nur in Randpunkten schneiden. Am einfachsten ist dies folgendermaßen zu formulieren: Ein *halboffener Quader*  $Q^o$  ist die Teilmenge

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : a_1 \leq x_1 < b_1, \dots, a_n \leq x_n < b_n\}.$$

Für die halboffenen Quader einer Zerlegung gilt

$$Q^o = \cup Q_k^o, \quad Q_k^o \cap Q_l^o = \emptyset \text{ für } k \neq l.$$

Bei einer Produktzerlegung ist die Summe der Volumina der Teilquader

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_n} (x_1^{(\sigma_1+1)} - x_1^{(\sigma_1)}) \cdot \dots \cdot (x_n^{(\sigma_n+1)} - x_n^{(\sigma_n)}) &= \\ \{(x_1^{(1)} - x_1^{(0)}) + (x_1^{(2)} - x_1^{(1)}) + \dots + (x_1^{(s(1))} - x_1^{(s(1)-1)})\} \cdot \dots &= \\ \dots \cdot \{(x_n^{(1)} - x_n^{(0)}) + (x_n^{(2)} - x_n^{(1)}) + \dots + (x_n^{(s(n))} - x_n^{(s(n)-1)})\} &= \\ \{b_1 - a_1\} \cdot \dots \cdot \{b_n - a_n\} &= |Q|. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass für jede Zerlegung  $Q = \cup Q_k$  gilt

$$|Q| = \sum_k |Q_k|.$$

Auf dem Quader gibt es den Vektorraum  $T[Q]$  der Treppenfunktionen. Jede Treppenfunktion  $\varphi \in T[Q]$  ist konstant im Inneren der Teilquader einer Zerlegung. Eigentlich kommt es nicht darauf an, wie sie auf den Rändern der Teilquader definiert ist. Da wir aber keine unnötigen Schwierigkeiten wollen, vereinbaren wir, dass eine Treppenfunktion auf den *halboffenen Quadern* ihrer Zerlegung konstant sein soll.

Sind  $c_k \in \mathbb{R}$  die Werte der Treppenfunktion  $\varphi$  auf den Teilquadern  $Q_k$ , so ist

$$\int_Q \varphi(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x} := \sum_k c_k \cdot |Q_k|$$

das *Volumenintegral dieser Treppenfunktion* über  $Q$ . Dieses Integral ändert sich nicht, wenn man die Zerlegung  $Q_k$  durch feinere Zerlegungen ersetzt, auf deren Teilquadern  $\varphi$  auch konstant ist.

Ist eine reelle Funktion  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  auf dem Quader  $Q$  beschränkt, so gibt es Treppenfunktionen  $\varphi, \psi \in T[Q]$  mit  $\varphi \leq f \leq \psi$ . Die Funktion  $f$  heißt *Riemann-integrierbar* auf dem Quader  $Q$ , wenn zu jedem  $0 < \epsilon \in \mathbb{R}$  Treppenfunktionen  $\varphi, \psi \in T[Q]$  existieren mit

$$\varphi \leq f \leq \psi, \quad \int_Q \psi(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x} - \int_Q \varphi(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x} < \epsilon.$$

Dann ist

$$\inf \left\{ \int_Q \psi(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x} : f \leq \psi \in T[Q] \right\} = \sup \left\{ \int_Q \varphi(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x} : f \geq \varphi \in T[Q] \right\},$$

und dieser Wert heißt dann das *Riemann-Integral*

$$\int_Q f(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x}$$

über  $Q$ . Das ist ja schön. Weniger schön ist, dass wir damit noch kein Integral praktisch ausrechnen können. Wir können mit dieser Definition nur

- das Integral von Treppenfunktionen ausrechnen,
- wie bei einer Variablen zeigen, dass das Integral linear und
- monoton ist,
- und zeigen, dass stetige Funktionen integrierbar sind.

Das praktische Ausrechnen der Volumenintegrale geschieht durch Mehrfachintegration

$$\int_Q f(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x} = \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Volumenintegral = Mehrfach-Integral

Diese Gleichung müssen wir nur erst, in mehreren Schritten, beweisen:

*Mehrfachintegrale von charakteristischen Funktionen.* Sei  $\varphi_1 \in T[Q]$  die charakteristische Funktion eines halboffenen Teilquaders

$$Q_1 = [\alpha_1, \beta_1) \times \dots \times [\alpha_n, \beta_n) \subset Q,$$

d.h.,

$$\varphi_1(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathbf{x} \in Q_1 \\ 0 & \text{falls } \mathbf{x} \notin Q_1 \end{cases}$$

Dann ist das Volumenintegral (wir nehmen irgendeine Quaderzerlegung von  $Q$ , in der  $Q_1$  als Teilquader vorkommt)

$$\int_Q \varphi_1(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x} = |Q_1|.$$

Und das Mehrfach-Integral ist

$$\begin{aligned} \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} \varphi_1(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n &= \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \varphi_1(x_1, \dots, x_n) dx_1 \right) dx_2 \dots dx_n \\ &= \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_2}^{b_2} (\beta_1 - \alpha_1) \varphi_2(x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n, \\ &= (\beta_1 - \alpha_1) \cdot \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_2}^{b_2} \varphi_2(x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n, \end{aligned}$$

wo  $\varphi_2$  definiert ist durch

$$\varphi_2(x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \alpha_2 \leq x_2 < \beta_2, \dots, \alpha_n \leq x_n < \beta_n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

So macht man weiter und findet auch für das Mehrfachintegral

$$\int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} \varphi_1(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = (\beta_1 - \alpha_1) \cdot \dots \cdot (\beta_n - \alpha_n) = |Q_1|.$$

Beide Integrale stimmen überein.

*Mehrfachintegrale von Treppenfunktionen.* Eine Treppenfunktion  $\varphi \in T[Q]$  zu einer Zerlegung  $Q = \cup Q_m$  ist eine endliche Linearkombination

$$\varphi = \sum_m c_m \chi_{Q_m}$$

von charakteristischen Funktionen von halboffenen Teilquadranten. Aus der Linearität des Integrals folgt deshalb die eben bewiesene Gleichung allgemeiner für Treppenfunktionen.

*Mehrfachintegrale für Riemann-integrierbare Funktionen.* Sei  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrierbar und jede der Funktionen von  $x_k, \dots, x_n$  wieder integrierbar, welche entsteht, wenn wir schon über  $x_1, \dots, x_{k-1}$  integriert haben. (Dies ist z.B. erfüllt, wenn  $f$  stetig ist.) Dann ist das Mehrfach-Integral

$$\int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

wohldefiniert. Zu jedem  $\epsilon > 0$  gibt es Treppenfunktionen  $\varphi, \psi \in T(Q)$  mit

$$\varphi \leq f \leq \psi, \quad \int_Q \psi(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x} - \int_Q \varphi(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x} < \epsilon.$$

Aus der Monotonie des Volumenintegrals folgt

$$\int_Q \varphi(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x} \leq \int_Q f(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x} \leq \int_Q \psi(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x}$$

und aus der Monotonie des Mehrfach-Integrals

$$\int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} \varphi(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \leq \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \leq \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} \psi(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Weil Volumenintegral und Mehrfach-Integral für die Treppenfunktionen  $\varphi$  und  $\psi$  übereinstimmen, folgt

$$\left| \int_Q f(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x} - \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \right| \leq \int_Q \psi(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x} - \int_Q \varphi(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x} < \epsilon.$$

Und weil dies für jedes  $\epsilon > 0$  gilt, haben wir damit die Gleichheit des Volumenintegrals und des Mehrfach-Integrals von  $f$  bewiesen. Wir fassen zusammen:

**Satz 2.2 (Fubini)** Für jede Riemann-integrierbare Funktion  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ , die bei festen  $x_{k+1}, \dots, x_n$  bezüglich  $x_1, \dots, x_k$  Riemann-integrierbar ist, ist

$$\int_Q f(x_1, \dots, x_n) d^n \mathbf{x} = \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Insbesondere ist das mehrfache Integral unabhängig von der Reihenfolge in der man über die  $n$  Variablen integriert.

**Beispiel 2.2** Es sei  $f(x, y) = e^{x-y}$ . Dann ist nach dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}
 \int_{\substack{a_1 \leq x \leq b_1 \\ a_2 \leq y \leq b_2}} f(x, y) d^2 \mathbf{x} &= \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} e^{x-y} dx dy \\
 &= \int_{a_2}^{b_2} (e^{b_1-y} - e^{a_1-y}) dy \\
 &= e^{a_1-y} - e^{b_1-y} \Big|_{a_2}^{b_2} \\
 &= e^{a_1-b_2} - e^{a_1-a_2} - e^{b_1-b_2} + e^{b_1-a_2} \\
 &= \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} e^{x-y} dy dx.
 \end{aligned}$$

Wir wollen nicht nur über Quader integrieren. Beispielsweise auch über Kugeln. Oder über andere kompakte Mengen. (Trägheitsmomente oder Schwerpunkte von starren Körpern werden ja durch Volumenintegrale über solche Körper definiert). Wenn wir eine stetige Funktion  $f$  über eine kompakte Menge  $K$  integrieren wollen, so werden wir

- die kompakte Menge  $K$  in einen Quader  $Q$  einschließen :  $K \subset Q$ ,
- die Funktion  $f$  trivial und brutal zu einer Funktion  $f_Q$  auf  $Q$  fortsetzen durch  $f_Q(\mathbf{x}) = 0$  für  $\mathbf{x} \in Q, \mathbf{x} \notin K$  (natürlich ist  $f_Q$  i.a. nicht mehr stetig auf  $Q$ ),
- versuchen, die unstetige Funktion  $f_Q$  über  $Q$  zu integrieren und

$$\int_K f(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x} := \int_Q f_Q(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x}$$

setzen.

Es ist leicht zu sehen, dass das so definierte Integral nicht von dem gewählten Quader  $Q$  abhängt. Weniger leicht ist die Frage zu klären, ob  $f_Q$  über  $Q$  integrierbar ist, das so definierte Integral also überhaupt existiert. Dazu müssen wir die Menge der Unstetigkeitsstellen von  $f_Q$  untersuchen. Diese Menge muss eine *Nullmenge* sein.

**Definition 2.1** Eine Teilmenge  $N \subset \mathbb{R}^n$  heißt Nullmenge, wenn es zu jedem  $\epsilon > 0$  endlich viele Quader  $Q_\mu \subset \mathbb{R}^n, \mu = 1, \dots, m$  gibt mit

$$N \subset \cup_{\mu=1}^m Q_\mu, \quad \sum_{\mu=1}^m |Q_\mu| \leq \epsilon.$$

**Beispiel 2.3**

- 0) Sind  $N_1$  und  $N_2$  Nullmengen, so auch  $N_1 \cup N_2$ . Jede Teilmenge  $N'$  einer Nullmenge  $N$  ist wieder eine Nullmenge.

1) Jede beschränkte Menge  $N \subset \mathbb{R}^n$ , die in einem linearen Unterraum  $x_k = 0$  enthalten ist, ist eine Nullmenge.

*Beweis:* O.B.d.A. betrachten wir die Hyperebene  $x_n = 0$ . Da  $N$  beschränkt ist, gibt es einen Quader

$$Q := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_1| \leq r, \dots, |x_{n-1}| \leq r, |x_n| \leq \epsilon \cdot r^{1-n}\}$$

mit  $N \subset Q$ . Und es ist  $|Q| = r^{n-1} \cdot \epsilon r^{1-n} = \epsilon$ .

2)  $K \subset \mathbb{R}^n$  sei kompakt und  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist der Graph von  $f$

$$\Gamma_f = \{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \in K \times \mathbb{R} : \mathbf{x} \in K\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

eine Nullmenge.

*Beweis.* Wir schließen  $K$  in einen Quader  $Q$  ein:  $K \subset Q \subset \mathbb{R}^n$ . Wegen Lemma 2.3 (unten) gibt es Treppenfunktionen  $\varphi, \psi \in T[Q]$  mit

$$\varphi \leq \psi, \quad \varphi(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}) \leq \psi(\mathbf{x}) \text{ für alle } \mathbf{x} \in K, \quad \int_Q (\psi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})) d^n \mathbf{x} < \epsilon.$$

Sei  $Q = \cup Q_\nu$  eine Zerlegung, auf deren (offenen) Quadern beide Treppenfunktionen  $\varphi = p_\nu, \psi = q_\nu$  konstant sind. Dann sind die Produktmengen  $Q_\mu \times [p_\mu, q_\mu]$  Quader im  $\mathbb{R}^{n+1}$  mit

$$\sum_\mu |Q_\mu \times [p_\mu, q_\mu]| = \sum_\mu |Q_\mu| \cdot (q_\mu - p_\mu) = \int_Q (\psi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})) d^n \mathbf{x} < \epsilon.$$

Die Vereinigung dieser Produktmengen enthält den Graphen  $\Gamma_f$ . □

Beispiel 2.3 2) zeigt insbesondere, dass der Rand einer Kugel eine Nullmenge ist, denn den können wir aus den Graphen der beiden stetigen Funktion  $\pm \sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2}$  zusammensetzen.

**Satz 2.3 (Lemma)** Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt,  $Q \subset \mathbb{R}^n$  ein Quader, der  $K$  enthält und  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann gibt es zu jedem  $0 < \epsilon \in \mathbb{R}$  Treppenfunktionen  $\varphi, \psi \in T[Q]$  mit

$$\varphi \leq \psi, \quad \varphi(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}) \leq \psi(\mathbf{x}) \text{ für alle } \mathbf{x} \in K, \quad \int_Q (\psi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})) d^n \mathbf{x} < \epsilon.$$

*Beweis.* Da  $f$  stetig ist, gibt es zu jedem  $\mathbf{x} \in K$  einen offenen Quader

$$Q_{\mathbf{x}} = \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi_\nu - x_\nu| < \delta_{\mathbf{x}} \text{ für } \nu = 1, \dots, n\}$$

mit  $|f(\xi) - f(\mathbf{x})| < \epsilon$  für alle  $\xi \in \bar{Q}_{\mathbf{x}} \cap K$ . Da  $K$  kompakt ist, liegt  $K$  in der Vereinigung von endlich vielen dieser Quader, etwa  $Q_1, \dots, Q_N$ . In jedem dieser Quader  $Q_\nu$  liegt also ein Punkt  $\mathbf{x}_\nu$  mit

$$p_\nu := f(\mathbf{x}_\nu) - \epsilon \leq f(\xi) \leq q_\nu := f(\mathbf{x}_\nu) + \epsilon \text{ für alle } \xi \in Q_\nu \cap K.$$

Es gibt eine Zerlegung  $Q = \cup Q'_\mu$  derart, dass jeder Quader  $Q'_\mu$ , der  $K$  schneidet, ganz in einem Quader  $Q_\nu$  enthalten ist. Wir definieren  $\varphi$  und  $\psi \in T[Q]$  durch

$$\begin{aligned} \varphi|_{Q'_\mu} &= \psi|_{Q'_\mu} := 0 \text{ falls } Q'_\mu \cap K = \emptyset \\ \varphi|_{Q'_\mu} &:= p_\nu, \psi|_{Q'_\mu} := q_\nu \text{ falls } Q'_\mu \cap K \neq \emptyset \text{ und } Q'_\mu \subset Q_\nu. \end{aligned}$$

Diese Treppenfunktionen erfüllen

$$\phi(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}) \leq \psi(\mathbf{x}) \text{ für } \mathbf{x} \in K$$

und

$$\int_Q (\psi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{x})) d^n \mathbf{x} \leq \epsilon \cdot |Q|.$$

□

**Satz 2.4 (Integrierbarkeitskriterium)** Die Funktion  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  auf dem Quader  $Q$  sei beschränkt und stetig außerhalb einer Nullmenge. Dann ist  $f$  über  $Q$  Riemann-integrierbar.

Beweis. Sei  $\epsilon > 0$  vorgegeben. Sei  $N$  die Nullmenge und seien  $Q_\mu, \mu = 1, \dots, m$ , offene Quader mit  $N \subset \cup Q_\mu, \sum |Q_\mu| < \epsilon$ . Da  $V := \cup Q_\mu$  offen ist, ist  $W := Q \setminus V$  kompakt. Nach Lemma 2 gibt es Treppenfunktionen  $\varphi, \psi \in T[Q]$  mit  $\varphi(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}) \leq \psi(\mathbf{x})$  für alle  $\mathbf{x} \in W$  und  $\int_Q (\psi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})) d^n \mathbf{x} < \epsilon$ .

Nach Übergang zu einer genügend feinen Zerlegung von  $Q$  können wir annehmen, dass die Quader  $Q_\mu$  Teilquader der Zerlegung sind, bezüglich der  $\varphi$  und  $\psi$  definiert sind. Auf den Teilquadern  $Q_\mu$  ersetzen wir die Werte von  $\varphi$  durch  $-C$  und die von  $\psi$  durch  $C$ , wo  $C \in \mathbb{R}$  eine Schranke mit  $|f| < C$  ist. Dann haben wir  $\varphi(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}) \leq \psi(\mathbf{x})$  für alle  $\mathbf{x} \in Q$  und

$$\int_Q (\psi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})) d^n \mathbf{x} \leq \epsilon + 2C \cdot \sum |Q_\mu| = \epsilon(1 + 2C).$$

□

Dieses Kriterium zeigt insbesondere: Ist  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt mit einem Rand, der eine Nullmenge ist,  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $f_Q$  eine trivial-brutale Fortsetzung von  $f$  auf einen Quader  $Q \supset K$ , so ist  $f_Q$  über  $Q$  integrierbar. Die Menge der Unstetigkeitsstellen von  $f_Q$  kann nämlich nur auf dem Rand von  $K$  liegen.

Die ältesten Anwendungen von Volumenintegralen sind die Berechnung von

- Volumina (s. §2.3)
- Schwerpunkten
- Trägheitsmomenten.

**Definition 2.2** Ist  $M \subset \mathbb{R}^3$  realisiert als Körper mit der Massendichte  $\mu(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in M$ . Dann hat der Schwerpunkt  $\mathbf{s}$  des Körpers die Koordinaten

$$s_\nu = \frac{1}{m} \int_M x_\nu \mu(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} \quad \text{wo} \quad m := \int_M \mu(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x}$$

die Gesamtmasse des Körpers ist.

**Beispiel 2.4** 1) Sei etwa  $M = M_1 \cup M_2$ , wo  $M_1 \cap M_2 = \emptyset$  (oder eine Nullmenge) ist. Sei  $m$  die Gesamtmasse von  $M$  und  $m_i$  die von  $M_i$  für  $i = 1, 2$ . Sei  $\mathbf{s}$  der Schwerpunkt von  $M$  und  $\mathbf{s}_i$  der von  $M_i$ . Dann gilt

$$\mathbf{s} = \frac{1}{m} (m_1 \mathbf{s}_1 + m_2 \mathbf{s}_2).$$

Beweis: Es ist

$$m = \int_M \mu(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} = \int_{M_1} \mu(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} + \int_{M_2} \mu(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} = m_1 + m_2.$$

Und die  $\nu$ -te Koordinate des Gesamtschwerpunkts  $\mathbf{s}$  ist

$$s_\nu = \frac{1}{m} \int_M x_\nu \mu(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} = \frac{1}{m} \int_{M_1} x_\nu \mu(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} + \frac{1}{m} \int_{M_2} x_\nu \mu(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} = \frac{m_1}{m} s_{1,\nu} + \frac{m_2}{m} s_{2,\nu}.$$

2) In der Mathematik ist natürlich meistens  $\mu(\mathbf{x}) \equiv 1$ . Berechnen wir als Beispiel den Schwerpunkt des Dreiecks mit den Ecken  $\mathbf{0}$ ,  $\mathbf{a} = (a, 0)$  und  $\mathbf{b} = (0, b)$ , wo  $a, b > 0$ . Die schräge Dreiecksseite hat die Gleichung

$$\frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 1, \quad y = b - \frac{b}{a}x.$$

Deswegen ist die Gesamtmasse des Dreiecks

$$m = \int_0^a \int_0^{b-bx/a} dy dx = \int_0^a \left( b - \frac{b}{a}x \right) dx = bx - \frac{b}{2a}x^2 \Big|_0^a = ab - \frac{ab}{2} = \frac{ab}{2}.$$

Und die  $x$ -Komponente des Schwerpunkts ist

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{m} \int_0^a \int_0^{b-bx/a} x dy dx \\ &= \frac{1}{m} \int_0^a \left( bx - \frac{b}{a}x^2 \right) dx \\ &= \frac{1}{m} \left( \frac{b}{2}x^2 - \frac{b}{3a}x^3 \right) \Big|_0^a \\ &= \frac{1}{m} \left( \frac{a^2b}{2} - \frac{a^2b}{3} \right) \\ &= \frac{2}{ab} \cdot \frac{a^2b}{6} \\ &= \frac{a}{3}. \end{aligned}$$

Genauso findet man für die  $y$ -Komponente des Schwerpunkts

$$s_2 = \frac{b}{3}.$$

Der Schwerpunkt ist also

$$\mathbf{s} = \frac{1}{3}(a, b).$$

Dies ist ein Spezialfall der allgemeinen Formel für den Schwerpunkt eines Dreiecks mit den Ecken  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}$ :

$$\mathbf{s} = \frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}).$$

Diese Formel kann man genauso verifizieren, wie wir das für den Fall unseres Dreiecks mit zwei achsenparallelen Seiten getan haben. Es geht im Prinzip genauso, nur kommt man wegen der drei i.A. schrägen Seiten auf Fallunterscheidungen, je nach Lage der Ecken, und auf idiotisch komplizierte Teilintegrale.

**Definition 2.3** Ist der Körper  $M \subset \mathbb{R}^3$  wie in der letzten Definition, so ist sein Trägheitsmoment bezüglich der  $x_3$ -Achse

$$T = \int_M (x_1^2 + x_2^2) \mu(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x}.$$

Beispielsweise ist das Trägheitsmoment des Einheitswürfels

$$M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x_\mu \leq 1\}$$

mit konstanter Massendichte  $\mu(\mathbf{x}) = 1$

$$\begin{aligned} T &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x_1^2 + x_2^2) dx_3 dx_1 dx_2 \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (x_1^2 + x_2^2) dx_1 dx_2 \\ &= \int_0^1 \left[ \frac{1}{3} x_1^3 + x_1 x_2^2 \right]_{x_1=0}^{x_1=1} dx_2 \\ &= \int_0^1 \left( x_2^2 + \frac{1}{3} \right) dx_2 \\ &= \left[ \frac{1}{3} x_2^3 + \frac{1}{3} x_2 \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

**Aufgabe 2.11** Es sei  $Q \subset \mathbb{R}^3$  der Quader

$$-a \leq x \leq a, \quad -b \leq y \leq b, \quad -c \leq z \leq c.$$

Berechnen Sie für  $l, m, n \in \mathbb{N}$  das Integral

$$\int_Q x^l y^m z^n d^3 \mathbf{x},$$

- a) falls ein Exponent ungerade ist,  
b) falls alle drei Exponenten gerade sind.

**Aufgabe 2.12** Die kinetische Energie eines Körpers  $K$  der konstanten Massendichte 2 bei Rotation mit Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um eine Achse durch den Nullpunkt ist

$$T = \int_K \|\omega \times \mathbf{x}\|^2 d^3 \mathbf{x}.$$

Benutzen Sie die Formel

$$\|\omega \times \mathbf{x}\|^2 = (\omega \times \mathbf{x}, \omega \times \mathbf{x}) = \|\omega\|^2 \|\mathbf{x}\|^2 - (\omega, \mathbf{x})^2$$

um  $T$  in der Form

$$T = \sum_{i,j=1}^3 \theta_{i,j} \omega_i \omega_j, \quad \theta_{i,j} = \int_K (\|\mathbf{x}\|^2 \delta_{i,j} - x_i x_j) d^3 \mathbf{x}$$

zu schreiben. Berechnen Sie den Tensor  $\theta_{i,j}$  für den Quader  $Q$  aus der vorhergehenden Aufgabe.

**Aufgabe 2.13** Beweisen Sie den Satz von Steiner: Es sei  $J$  das Trägheitsmoment eines starren Körpers bezüglich einer Drehachse  $L$ , und  $J_S$  das Trägheitsmoment desselben Körpers bezüglich einer zu  $L$  parallelen Achse  $L_S$  durch den Schwerpunkt des Körpers. Der Körper habe die Masse  $M$ , und der Abstand zwischen  $L$  und  $L_S$  sei  $s$ . Dann gilt

$$J = J_S + s^2 \cdot M.$$

### 2.3 Volumenberechnung

Das  $n$ -dimensionale Volumen  $|M|$  einer Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}^n$  ist das Integral

$$|M| := \int_Q \chi_M(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x}$$

über ihre charakteristische Funktion

$$\chi_M(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathbf{x} \in M \\ 0 & \text{falls } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus M \end{cases}$$

Dabei ist über irgend einen Quader  $Q \subset \mathbb{R}^n$  zu integrieren, der die Menge  $M$  enthält. Schwierigkeiten machen dabei die Unstetigkeitsstellen von  $\chi_M$ . Diese liegen auf dem Rand  $\partial M$  von  $M$ . Aus Satz 2.4 wissen wir,  $\chi_M$  ist integrierbar, wenn  $\partial M$  eine Nullmenge ist. *Damit ist das Volumen einer Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  definiert, wenn*

- die Menge  $M$  beschränkt ist,
- ihr Rand  $\partial M$  eine Nullmenge ist.

Eine solche Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  heißt *messbar*. Das 1-dimensionale Volumen heißt auch *Länge*, das 2-dimensionale Volumen *Fläche*.

**Beispiel 2.5** a) Eine Nullmenge ist messbar mit Volumen  $=0$ .

b) Das Volumen eines Quaders  $|Q|$  ist der schon früher definierte Inhalt  $(b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n)$ . Spezialfälle davon sind

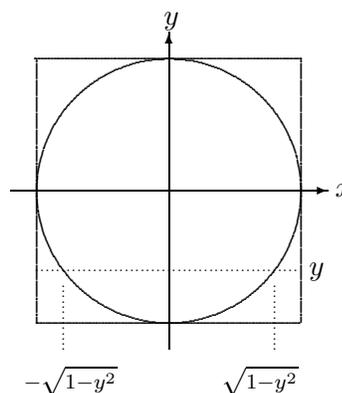
- die Länge eines Intervalls  $I \subset \mathbb{R}$  (1-dimensionaler Inhalt)
- die Fläche eines Rechtecks  $R \subset \mathbb{R}^2$  (2-dimensionaler Inhalt)

c) Die Fläche des Einheitskreises berechnet sich durch Integration seiner charakteristischen Funktion

$$\chi(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{falls } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

über das Einheitsquadrat:

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \chi(x, y) dx dy \\
 &= \int_{-1}^1 \left( \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 1 dx \right) dy \\
 &= \int_{-1}^1 2\sqrt{1-y^2} dy \\
 &= 2 \cdot \frac{\pi}{2} \quad (\text{Kreisintegral}) \\
 &= \pi.
 \end{aligned}$$



d) Das Volumen der Einheitskugel im  $\mathbb{R}^3$  berechnet sich durch Integration ihrer charakteristischen Funktion

$$\chi(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \\ 0 & \text{falls } x^2 + y^2 + z^2 > 1 \end{cases}$$

über den Einheitswürfel:

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \chi(x, y, z) dx dy dz &= \int_{-1}^1 \left( \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \left( \int_{-\sqrt{1-z^2-y^2}}^{\sqrt{1-z^2-y^2}} 1 dx \right) dy \right) dz \\
 &= \int_{-1}^1 \left( \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} 2\sqrt{1-z^2-y^2} dy \right) dz \\
 &= 2 \int_{-1}^1 \frac{\pi}{2} \cdot (1-z^2) dz \quad (\text{Kreisintegral}) \\
 &= \pi \cdot \left( z - \frac{1}{3} z^3 \right) \Big|_{z=-1}^{z=1} \\
 &= \pi \cdot \left( 2 - \frac{2}{3} \right) \\
 &= \frac{4}{3} \pi.
 \end{aligned}$$

**Satz 2.5 (Lemma)** Es seien  $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$  messbar. Dann sind auch  $M_1 \cup M_2$  und  $M_1 \cap M_2$  messbar mit

$$|M_1 \cup M_2| + |M_1 \cap M_2| = |M_1| + |M_2|.$$

Beweis. Für je zwei Mengen  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  ist

$$\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Mit  $C_1 := \mathbb{R}^n \setminus M_1$  und  $C_2 := \mathbb{R}^n \setminus M_2$  folgt daraus

$$\begin{aligned}
 \partial(M_1 \cup M_2) &= \overline{M_1 \cup M_2} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus (M_1 \cup M_2)} \\
 &= \overline{M_1 \cup M_2} \cap \overline{C_1 \cap C_2} \\
 &\subset (\overline{M_1} \cap \overline{C_1} \cap \overline{C_2}) \cup (\overline{M_2} \cap \overline{C_1} \cap \overline{C_2})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \subset (\overline{M_1} \cap \overline{C_1}) \cup (\overline{M_2} \cap \overline{C_2}) \\
& = \partial(M_1) \cup \partial(M_2), \\
\partial(M_1 \cap M_2) & = \overline{M_1 \cap M_2} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus (M_1 \cap M_2)} \\
& = \overline{M_1 \cap M_2} \cap \overline{C_1 \cup C_2} \\
& \subset (\overline{M_1} \cap \overline{M_2} \cap \overline{C_1}) \cup (\overline{M_1} \cap \overline{M_2} \cap \overline{C_2}) \\
& \subset (\overline{M_1} \cap \overline{C_1}) \cup (\overline{M_2} \cap \overline{C_2}) \\
& = \partial(M_1) \cup \partial(M_2).
\end{aligned}$$

Also sind  $M_1 \cup M_2$  und  $M_1 \cap M_2$  messbar. Die behauptete Gleichung folgt dann aus der Gleichung

$$\chi_{M_1 \cup M_2} + \chi_{M_1 \cap M_2} = \chi_{M_1} + \chi_{M_2}$$

für die charakteristischen Funktionen. □

**Satz 2.6 (Lemma)** a) *Das Volumen ist translationsinvariant: Ist  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  und*

$$M + \mathbf{a} := \{\mathbf{x} + \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \in M\},$$

*so sind die Volumina*

$$|M| = |M + \mathbf{a}|$$

*gleich.*

b) *Bei einer Streckung um den Faktor  $c \in \mathbb{R}$  multipliziert sich das Volumen mit dem Faktor  $|c|^n$ .*

Beweis. a) folgt daraus, dass Treppenfunktionen unter Translation wieder in Treppenfunktionen übergehen

$$\varphi \in T[Q + \mathbf{a}] \Rightarrow \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{a}) \in T[Q]$$

und der Translationsinvarianz von deren Integral:

$$\int_{Q+\mathbf{a}} \varphi(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x} = \int_Q \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{a}) d^n \mathbf{x}.$$

b) Auch unter Streckungen gehen Treppenfunktionen in Treppenfunktionen über, ihr Integral multipliziert sich dabei mit dem Faktor  $|c|^n$ . □

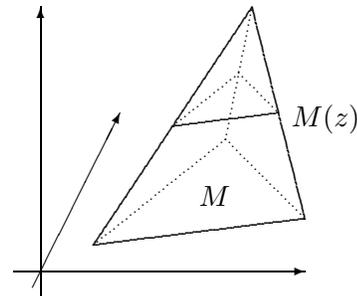
Das folgende klassische Prinzip der Volumenbestimmung ist nur eine Umformulierung der mehrfachen Integration.

**Satz 2.7 (Cavalierisches Prinzip)** *Die Menge  $M \subset \mathbb{R}^3$  sei messbar und beschränkt. Für jedes  $z_0 \in \mathbb{R}$  sei der Höhenschnitt*

$$M(z_0) := \{(x, y, z) \in M : z = z_0\}$$

*messbar (als Menge im  $\mathbb{R}^2$ ). Dann ist*

$$|M| = \int |M(z)| dz.$$



Beweis. Nach Definition ist

$$\begin{aligned} |M| &= \int \left( \int \int \chi_M(x, y, z) dx dy \right) dz \\ &= \int |M(z)| dz. \end{aligned}$$

□

**Beispiel 2.6** Volumen einer Pyramide: *Es sei  $F \subset \mathbb{R}^2$  eine gegebene Grundfläche und  $\mathbf{v} = (x_0, y_0, h) \in \mathbb{R}^3$  ein Vektor der Höhe  $h > 0$  über der  $(x, y)$ -Ebene. Die Pyramide  $P$  mit Grundfläche  $F$  und Spitze  $\mathbf{v}$  ist die Menge*

$$P = \{(x, y, z) = s(x, y, 0) + t(x_0, y_0, h) : (x, y) \in F, s + t = 1, s, t \geq 0\}.$$

Ihr Höhengchnitt

$$P(z_0) = \{(x, y, z_0) = s(x, y, 0) + t(x_0, y_0, h)\}, \quad t \cdot h = z_0$$

ist die mit dem Faktor  $s = 1 - \frac{z_0}{h}$  gestreckte Grundfläche. Nach Lemma 2.4b) und dem Cavalierischen Prinzip ist also das Pyramidenvolumen

$$\begin{aligned} |P| &= \int_0^h |F| \cdot \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 dz \\ &= |F| \int_0^h \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 dz \\ &= |F|(-h) \cdot \frac{1}{3} \left(1 - \frac{z}{h}\right)^3 \Big|_{z=0}^{z=h} \\ &= |F| \frac{-h}{3} (0 - 1) \\ &= \frac{1}{3} \cdot |F| \cdot h \end{aligned}$$

ein Drittel von Grundfläche mal Höhe.

Volumen des Einheitssimplex: *Das Einheitssimplex ist die  $n$ -dimensionale Verallgemeinerung des rechtwinkligen, gleichschenkligen Dreiecks:*

$$\Delta_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_\nu \geq 0, \sum_{\nu=1}^n x_\nu \leq 1\}.$$

*Sein Höhengschnitt mit der Hyperebene  $x_n = z, 0 \leq z \leq 1$ , ist das  $(n-1)$ -dimensionale Einheitssimplex mit dem Faktor  $1 - z$  gestreckt. Also ist die Schnittfläche  $|\Delta_{n-1}| \cdot (1 - z)^{n-1}$ . Natürlich gilt das Cavalierische Prinzip auch in  $n$  Dimensionen. Daraus folgt dann*

$$\begin{aligned} |\Delta_n| &= \int_0^1 |\Delta_{n-1}| \cdot (1 - z)^{n-1} dz \\ &= |\Delta_{n-1}| \cdot \left( \int_0^1 \zeta^{n-1} d\zeta \right) \\ &= |\Delta_{n-1}| \cdot \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

Das Einheitsintervall hat Länge 1, das gleichschenklige rechtwinklige Dreieck der Kathetenlänge 1 hat die Fläche  $1/2$  und die Pyramide der Höhe 1 über diesem Dreieck hat das Volumen

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3!}.$$

Ein  $n$ -dimensionales Parallelotop wird von  $n$  Vektoren  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^n$  aufgespannt:

$$P(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} = \sum_{\nu=1}^n \lambda_\nu \mathbf{x}_\nu, 0 \leq \lambda_\nu \leq 1\}.$$

Der Rand des Parallelotops besteht aus endlich vielen beschränkten Seitenflächen, die in Hyperebenen liegen. Dies sind Graphen linearer Abbildungen, und damit Nullmengen. Also sind Parallelotope messbar.

**Satz 2.8 (Lemma)** a) Wenn die Vektoren  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  linear abhängig sind, ist der Inhalt  $|P(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)| = 0$ .

b) Für jede Permutation  $\sigma$  der Zahlen  $1, \dots, n$  ist

$$P(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = P(\mathbf{x}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{x}_{\sigma(n)}).$$

c) Für jeden Skalar  $c \in \mathbb{R}$  ist

$$|P(c \cdot \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)| = |c| \cdot |P(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)|.$$

d)  $|P(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)| = |P(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)|$ .

Beweis. a) Wenn die Vektoren linear abhängig sind, liegen sie alle in einer Hyperebene. Das Parallelotop ist dann eine Nullmenge.

b) Nach einer Permutation der aufspannenden Vektoren werden die Vektoren desselben Parallelotops, nur in anderer Reihenfolge, hingeschrieben.

c) Wir behandeln zunächst den Spezialfall  $2 \leq c \in \mathbb{N}$ . Das gedehnte Parallelotop

$$\begin{aligned} P(c \cdot \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) &= \{\mathbf{x} = \lambda_1 \cdot c\mathbf{x}_1 + \sum_{\nu=2}^n \lambda_\nu \mathbf{x}_\nu : 0 \leq \lambda_\nu \leq 1\} \\ &= \{\mathbf{x} = \lambda_1 \cdot \mathbf{x}_1 + \sum_{\nu=2}^n \lambda_\nu \mathbf{x}_\nu : 0 \leq \lambda_1 \leq c, 0 \leq \lambda_\nu \leq 1 \text{ für } \nu \geq 2\} \\ &= P(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) \\ &\cup P(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) + \mathbf{x}_1 \\ &\vdots \\ &\cup P(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) + (c-1) \cdot \mathbf{x}_1 \end{aligned}$$

ist Vereinigung von  $c$  verschobenen Kopien des ursprünglichen Parallelotops. Sie schneiden sich nur in Seitenflächen. Aus Lemma 2.3 und der Translationsinvarianz des Volumens (Lemma 2.4a)) ergibt sich

$$\begin{aligned} |P(c \cdot \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)| &= |P(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) + \mathbf{x}_1| + \\ &\vdots \\ &+ |P(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) + (c-1) \cdot \mathbf{x}_1| \\ &= c \cdot |P(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)|. \end{aligned}$$

Daraus kann man für alle  $0 < c = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} |P(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)| &= q |P(\frac{1}{q} \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)| \\ |P(\frac{p}{q} \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)| &= p \cdot |P(\frac{1}{q} \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)| \\ &= \frac{p}{q} \cdot |P(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)| \end{aligned}$$

folgern. Ist nun  $0 < c \in \mathbb{R}$ , so wählen wir  $c_1, c_2 \in \mathbb{Q}$  mit  $c_1 < c < c_2$  und haben

$$\begin{aligned} P(c_1 \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) &\subset P(c \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) \subset P(c_2 \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) \\ c_1 \cdot |P(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)| &\leq |P(c \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)| \leq c_2 \cdot |P(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)|. \end{aligned}$$

Wenn wir jetzt  $c_1$  und  $c_2$  gegen  $c$  gehen lassen, folgt die Aussage auch für die positive reelle Zahl  $c$ .  
Wegen

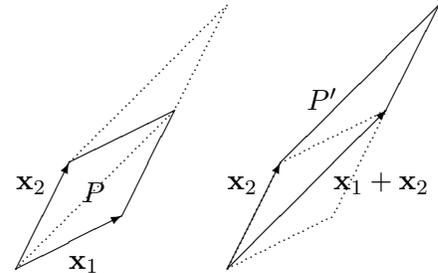
$$|P(-\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)| = |P(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) - \mathbf{x}_1| = |P(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)|$$

folgt daraus für alle  $c \in \mathbb{R}$

$$|P(c \cdot \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)| = |c| \cdot |P(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)|.$$

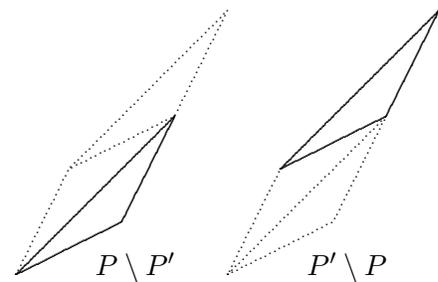
d) Es ist

$$\begin{aligned} P' &= P(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) \\ &= \{ \mathbf{x} = \lambda_1(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) + \sum_{\nu=2}^n \lambda_\nu \mathbf{x}_\nu : 0 \leq \lambda_\nu \leq 1 \} \\ &= \{ \mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + (\lambda_1 + \lambda_2) \mathbf{x}_2 + \sum_{\nu=3}^n \lambda_\nu \mathbf{x}_\nu : 0 \leq \lambda_\nu \leq 1 \}. \end{aligned}$$



Daraus folgt

$$\begin{aligned} P \setminus P' &= \{ \mathbf{x} = \sum_{\nu=1}^n \lambda_\nu \mathbf{x}_\nu : 0 \leq \lambda_\nu \leq 1, \lambda_1 > \lambda_2 \} \\ P' \setminus P &= \{ \mathbf{x} = \sum_{\nu=1}^n \lambda_\nu \mathbf{x}_\nu : 1 < \lambda_2 \leq 1 + \lambda_1 \} \\ &= (P \setminus P') + \mathbf{x}_2. \end{aligned}$$



Und mit Lemma 2.3 haben wir

$$|P| = |P \cap P'| + |P \setminus P'| = |P \cap P'| + |P' \setminus P| = |P'|.$$

□

Natürlich interessieren uns weniger diese Rechenregeln, sondern die Volumenformel für das Parallelotop, die man daraus gewinnen kann:

**Satz 2.9 (Volumen des Parallelotops)** Das Parallelotop  $P(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \subset \mathbb{R}^n$  hat das Volumen

$$|P(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)| = |\det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)|.$$

Dies ist die geometrische Bedeutung der Determinante.

Beweis des Satzes. Sei  $\delta(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  die Differenz der beiden Seiten der behaupteten Gleichung. Wenn die Vektoren  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  linear abhängig sind, sind beide Seiten der Gleichung  $= 0$  und auch  $\delta = 0$ . Sind  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{x}_n = \mathbf{e}_n$  die Einheitsvektoren, so ist  $P(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  der Einheits-Würfel, und

$$\begin{aligned} |P(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)| &= 1 \\ \det(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) &= 1 \\ \delta &= 0. \end{aligned}$$

Ein linear unabhängiges  $n$ -tupel von Vektoren  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^n$  kann man aus dem  $n$ -tupel der Einheitsvektoren durch elementare Matrizenumformungen gewinnen. Lemma 2.5) zeigt, dass sich dabei das Volumen des Parallelotops genauso ändert, wie der Absolutbetrag der Determinante. Damit haben wir  $\delta = 0$  für alle  $n$ -tupel von Vektoren.  $\square$

**Aufgabe 2.14 (Archimedes)** Betrachten Sie folgende Mengen im  $\mathbb{R}^3$ :

$$\begin{aligned} \text{Halbkugel} & \quad H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2, z \geq 0\}, \\ \text{Zylinder} & \quad Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq r^2, 0 \leq z \leq r\}, \\ \text{Kegel} & \quad K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq r\}. \end{aligned}$$

Folgern Sie aus dem Cavalierischen Prinzip

$$|H| = |Z| - |K|$$

und überprüfen Sie das Ergebnis anhand der bekannten Formeln für diese Volumina.

**Aufgabe 2.15 (NV)** Berechnen Sie das Volumen der Menge

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq y^2 \leq z^3 \leq 1\}.$$

**Aufgabe 2.16 (NV)** Berechnen Sie das uneigentliche Integral  $\int_K dx dy dz$  wobei

$$K := \{(x, y, z) : y^2 + z^2 \leq e^{-2x}, 0 \leq x\}$$

ist.

**Aufgabe 2.17** Es sei  $0 < k \in \mathbb{R}$  und  $V$  der Rotationskörper

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq 1 - z^k\}.$$

Bestimmen Sie das Volumen und den Schwerpunkt von  $V$ .

## 2.4 Die Integraltransformationsformel

Die Integraltransformationsformel ist die Verallgemeinerung der Substitutionsformel auf  $n$  Dimensionen. Wir betrachten zunächst die Transformation von Volumina bei linearen Abbildungen.

**Satz 2.10 (Volumen und lineare Abbildungen)** *Es sei  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \mapsto A \cdot \mathbf{x}$  eine lineare Abbildung und  $M \subset \mathbb{R}^n$  messbar. Dann ist auch*

$$A \cdot M = \{A \cdot \mathbf{x} : \mathbf{x} \in M\}$$

*messbar mit Volumen*

$$|A \cdot M| = |\det(A)| \cdot |M|.$$

Beweis. Wir schließen  $M$  in einen Quader  $Q$  ein und zerlegen  $Q$  wie im Beweis von Satz 2.4. Es gibt also Teilquader  $Q_\mu$  der Zerlegung mit

$$\partial M \subset \cup_{\mu=1}^m Q_\mu, \quad \sum_{\mu=1}^m |Q_\mu| < \epsilon.$$

Alle anderen Teilquader der Zerlegung sind entweder ganz in  $M$  enthalten oder schneiden  $M$  nicht. Seien  $Q_i$  diejenigen Quader, die in  $M$  enthalten sind. Dann haben wir also

$$\cup_i Q_i \subset M \subset (\cup_i Q_i) \cup (\cup_\mu Q_\mu).$$

Die Bilder der Quader  $Q_i$  und  $Q_\mu$  sind Parallelotope  $A \cdot Q_i$  und  $A \cdot Q_\mu$  im  $\mathbb{R}^n$ . Nach Satz 2.9 sind ihre Volumina die mit dem Faktor  $|\det(A)|$  multiplizierten ursprünglichen Volumina. Damit haben wir  $A \cdot M$  eingeschachtelt

$$\cup A \cdot Q_i \subset A \cdot M \subset (\cup_i A \cdot Q_i) \cup (\cup_\mu A \cdot Q_\mu)$$

zwischen zwei messbare Mengen mit Volumendifferenz

$$\sum_{\mu} |A \cdot Q_\mu| \leq |\det(A)| \cdot \epsilon.$$

Daraus folgt, dass  $\partial(A \cdot M)$  eine Nullmenge ist. Also ist  $A \cdot M$  messbar mit Volumen

$$|\det(A)| \cdot \sum_i |Q_i| \leq |A \cdot M| \leq |\det(A)| \cdot (\sum_i |Q_i| + \epsilon).$$

Lassen wir  $\epsilon$  gegen Null gehen, so geht  $\sum_i |Q_i|$  gegen  $|M|$  und  $|\det(A)| \sum_i |Q_i|$  gegen  $|\det(A)| \cdot |M|$ .  $\square$

**Beispiel 2.7** *Das Ellipsoid*

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$$

*mit den Halbachsen  $a, b$  und  $c$  ist das Bild der Einheitskugel unter der linearen Abbildung*

$$(x, y, z) \mapsto (ax, by, cz)$$

*mit Determinante  $a \cdot b \cdot c$ . Das Volumen des Ellipsoids ist deswegen*

$$\frac{4}{3} \cdot a \cdot b \cdot c \cdot \pi.$$

Das Verhalten von Volumina bei Streckung um einen Faktor  $c \in \mathbb{R}$  (Satz 2.6,b) ist ein Spezialfall von Satz 2.10, wo  $A$  die lineare Abbildung  $\mathbf{x} \mapsto c \cdot \mathbf{x}$  mit Determinante  $c^n$  ist.

Weil orthogonale Abbildungen Determinante  $\pm 1$  haben, ändern sich Volumina unter orthogonalen Transformationen nicht.

Satz 2.10 ist ein elementarer Spezialfall der Integraltransformationsformel. Zunächst kann man Satz 2.10 verallgemeinern von Volumina (Integration über die charakteristische Funktion) auf beliebige Volumenintegrale (Integration über beliebige integrierbare Funktionen):

$$\int_{A \cdot M} f(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x} = |\det(A)| \cdot \int_M f(A \cdot \mathbf{x}) d^n \mathbf{x}.$$

Anders formuliert: bei der Substitution  $\mathbf{y} = A \cdot \mathbf{x}$  besteht zwischen den Integralen die Beziehung

$$\int_{A \cdot M} f(\mathbf{y}) d^n \mathbf{y} = |\det(A)| \cdot \int_M f(A \cdot \mathbf{x}) d^n \mathbf{x}.$$

Eine richtige (umkehrbare) Transformation ist dies natürlich nur, wenn  $\det(A) \neq 0$ . Aber wenn  $\det(A) = 0$ , dann sind beide Seiten der Gleichung 0 und auch dann stimmt die Formel.

Die *Integraltransformationsformel* ist die Verallgemeinerung dieser Formel auf beliebige stetig differenzierbare (nicht notwendig lineare) Abbildungen  $\Phi : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Dabei ist dann allerdings  $\det(A)$  zu ersetzen durch die Funktionaldeterminante der Abbildung  $\Phi$ . Diese ist aber i.a. keine Konstante und muss deswegen unter das Integral:

$$\int_{\Phi(M)} f(\mathbf{y}) d^n \mathbf{y} = \int_M f(\Phi(\mathbf{x})) |\det(\Phi'(\mathbf{x}))| d^n \mathbf{x}$$

Der Beweis dieser Integraltransformationsformel besteht darin, die differenzierbare Abbildung  $\Phi$  lokal durch ihre Ableitung, die lineare Abbildung  $\Phi'$ , zu approximieren, Satz 2.10 zu verwenden, und dann einen Grenzübergang durchzuführen, siehe etwa Forster III, §2. Für uns sind die Details zu technisch, und wir wollen die Integraltransformationsformel deswegen nicht beweisen. Darum wollen wir uns auch keine Mühe geben, sie als Satz schön säuberlich mit allen Voraussetzungen zu formulieren. Stattdessen diskutieren wir Beispiele.

### 2.4.1 Integration in Polarkoordinaten

In §1.3 haben wir die Funktionalmatrix der Abbildung

$$(r, \varphi) \mapsto (x = r \cos(\varphi), y = r \sin(\varphi))$$

ausgerechnet, die euklidische Koordinaten  $(x, y)$  in Polarkoordinaten transformiert. Die Determinante dieser Funktionalmatrix ist

$$r \cdot \cos^2(\varphi) + r \cdot \sin^2(\varphi) = r.$$

Ist  $M$  eine Menge im  $(x, y)$ -Raum,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine integrierbare Funktion und  $M'$  die zu  $M$  gehörige Menge im  $(r, \varphi)$ -Raum, so lautet die Integraltransformationsformel

$$\int_M f(x, y) dx dy = \int_{M'} f(r, \varphi) r dr d\varphi.$$

Die Fläche eines Kreises  $M$  vom Radius  $r$  berechnet sich beispielsweise zu

$$\int_0^r \int_0^{2\pi} \rho d\varphi d\rho = \int_0^r 2\pi \rho d\rho = 2\pi \frac{1}{2} \rho^2 \Big|_0^r = r^2 \cdot \pi.$$

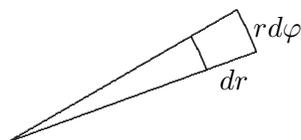
Wenn man weiß was ein Flächenelement ist (als Mathematiker hat man damit Probleme) kann man den Übergang in Polarkoordinaten so ausdrücken: das Flächenelement  $dx dy$  in Polarkoordinaten ist  $r dr d\varphi$ .

Eine berühmte Anwendung der Transformation in Polarkoordinaten ist die Berechnung des uneigentlichen Integrals

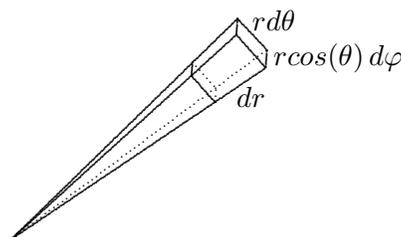
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad (\text{Fehlerintegral}) .$$

Man berechnet das Quadrat

$$\begin{aligned} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r d\varphi dr \\ &= 2\pi \cdot \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr \\ &= 2\pi \cdot \left[ -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^{\infty} \\ &= \pi \end{aligned}$$



Flächenelement  $r dr d\varphi$



Volumenelement  $r^2 \cos(\theta) dr d\varphi d\theta$

## 2.4.2 Integration in Kugelkoordinaten

Auch die Funktionalmatrix für die Transformation in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ y &= r \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ z &= r \sin(\theta) \end{aligned}$$

haben wir in §1.3 ausgerechnet. Ihre Determinante ist (Entwicklung nach der dritten Zeile):

$$\begin{aligned} \sin(\theta) \cdot [r^2(\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi))\sin(\theta)\cos(\theta)] + r \cos(\theta)[r(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi))]\cos^2(\theta) &= \\ r^2 \sin^2(\theta)\cos(\theta) + r^2 \cos^3(\theta) &= r^2 \cos(\theta). \end{aligned}$$

Die umgangssprachliche, etwas vereinfachende Formulierung hierfür ist: Das Volumenelement lautet in Kugelkoordinaten

$$dx dy dz = r^2 \cos(\theta) dr d\varphi d\theta.$$

Natürlich ist die Berechnung des Volumens der Kugel vom Radius  $r$  in diesen Koordinaten besonders einfach:

$$\int_0^r \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho^2 \cos(\theta) d\theta d\varphi d\rho = 2\pi \cdot \int_0^r \rho^2 d\rho \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\theta) d\theta = 2\pi \cdot \frac{r^3}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3} r^3 \pi.$$

### 2.4.3 Volumen eines Rotationskörpers (erste Guldinsche Regel)

Ein Rotationskörper  $M$  entsteht durch die Rotation einer Fläche  $F$  um eine Achse. Sei die Rotationsachse etwa die  $z$ -Achse, und sei die rotierende Fläche in der  $(x, z)$ -Ebene gelegen, etwa

$$F = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : z_1 \leq z \leq z_2, 0 \leq x \leq f(z)\}.$$

Dabei sei  $f : [z_1, z_2] \rightarrow \mathbb{R}$  eine positive, integrierbare Funktion von  $z$ . Dann ist  $M$  der Körper

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z_1 \leq z \leq z_2, x^2 + y^2 \leq f^2(z)\}.$$

Wir transformieren ihn in *Zylinderkoordinaten*

$$x = r \cos(\varphi), y = r \sin(\varphi), z = z, dx dy dz = r dr d\varphi dz.$$

Die zu  $M$  gehörende Menge in Zylinderkoordinaten ist

$$M_0 = \{(r, \varphi, z) : z_1 \leq z \leq z_2, r^2 \leq f^2(z)\}$$

und das Volumen von  $M$  wird

$$\begin{aligned} |M| &= \int_{M_0} r dr d\varphi dz \\ &= \int_{z_1}^{z_2} \int_0^{f(z)} \int_0^{2\pi} r d\varphi dr dz \\ &= 2\pi \cdot \int_{z_1}^{z_2} \int_0^{f(z)} r dr dz \\ &= 2\pi \cdot |F| \cdot s, \\ s &:= \frac{1}{|F|} \int_F x dx dz. \end{aligned}$$

Die Strecke  $s$  kann man als Abstand des Schwerpunkts der Fläche  $F$  von der Rotationsachse deuten. Die Guldinsche Regel sagt dann

$$|M| = |F| \cdot (2\pi s)$$

$$\text{Volumen} = \text{rotierende Fläche} \cdot \text{Rotationsweg des Schwerpunkts}$$

Natürlich muss die rotierende Fläche nicht unbedingt die Fläche unter dem Graphen einer Funktion  $f(z)$  sein, man kann auch einen Kreis von Radius  $r$  im Abstand  $R > r$  um die  $z$ -Achse rotieren lassen. Der Rotationskörper ist ein *Torus*. Sein Volumen ist nach der Guldinschen Regel

$$(2\pi \cdot R) \cdot (r^2 \cdot \pi).$$

### 2.4.4 Volumen der $n$ -dimensionalen Einheitskugel $K_n$

Die  $n$ -dimensionale Kugel vom Radius  $r$  hat nach Lemma 2.4b) das Volumen  $|K_n| \cdot r^n$ . Daraus leiten wir eine Rekursionsformel für das Volumen der  $n + 2$ -dimensionalen Kugel her:

$$\begin{aligned}
 |K_{n+2}| &= \int \dots \int_{x_1^2 + \dots + x_{n+2}^2 \leq 1} dx_{n+2} \dots dx_1 \\
 &= \int \int_{x_1^2 + x_2^2 \leq 1} \left( \int \dots \int_{x_3^2 + \dots + x_{n+2}^2 \leq 1 - x_1^2 - x_2^2} dx_{n+2} \dots dx_3 \right) dx_2 dx_1 \\
 &= \int \int_{x_1^2 + x_2^2 \leq 1} |K_n| \cdot \sqrt{1 - (x_1^2 + x_2^2)}^n dx_1 dx_2 \\
 &= |K_n| \cdot \int_0^1 \int_0^{2\pi} r \sqrt{1 - r^2}^n d\varphi dr \\
 &= |K_n| \cdot 2\pi \cdot \int_0^1 r \sqrt{1 - r^2}^n dr \\
 &= |K_n| \cdot 2\pi \cdot \left. \frac{-1}{n+2} \sqrt{1 - r^2}^{n+2} \right|_0^1 \\
 &= |K_n| \cdot \frac{2\pi}{n+2} \\
 |K_{2n}| &= \frac{1}{n!} \pi^n \\
 |K_{2n+1}| &= \frac{2^{n+1}}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+1)} \pi^n.
 \end{aligned}$$

**Aufgabe 2.18 (Großmann, p. 225)** Die Ladungsverteilung eines Atomkerns vom Radius  $R$  sei näherungsweise durch

$$\rho(r) = \frac{aR^6}{r^6 + R^6}$$

zu beschreiben. Skizzieren Sie  $\rho(r)$ . Berechnen Sie die gesamte Ladung des Kerns.

**Aufgabe 2.19** Es sei  $K \subset \mathbb{R}^3$  die Kugel vom Radius  $R$  und  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.

a) Zeigen Sie:  $\int_K f(r) d^3 \mathbf{x} = 4\pi \int_0^R f(r) r^2 dr$ .

b) Bestimmen Sie  $\int_K r^n d^3 \mathbf{x}$  für  $n = -3$ .

c) Berechnen Sie das Trägheitsmoment

$$\int_K (x^2 + y^2) d^3 \mathbf{x}$$

der Kugel bezüglich der  $z$ -Achse.

**Aufgabe 2.20** Eine Vollkugel vom Radius  $R$  sei aus Material der konstanten Massendichte  $\mu$  ( $0 < \mu < 1$ ) gefertigt. Beim Schwimmen auf Wasser (Massendichte 1) taucht sie bis zu einer Tiefe  $T$  ein,  $0 < T < 2R$ . Berechnen Sie aus  $T$  die Massendichte  $\mu$ .

**Aufgabe 2.21** Bestimmen Sie die Funktionalmatrix für den Übergang

$$\begin{aligned}x &= \sin(u)\cosh(v), & \cosh(v) &= \frac{1}{2}(e^v + e^{-v}), \\y &= \cos(u)\sinh(v), & \sinh(v) &= \frac{1}{2}(e^v - e^{-v})\end{aligned}$$

in elliptische Koordinaten. Berechnen Sie damit die Größe der von Ellipse und Hyperbel begrenzten Fläche

$$F = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{1+a^2} + \frac{y^2}{a^2} \leq 1, \frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{1-b^2} \leq 1 \right\},$$

wo  $a = \sinh(v_0) > 0$  und  $b = \sin(u_0) > 0$ .

**Aufgabe 2.22 (NV)** Die Menge  $T$  entstehe durch Rotation des Flächenstücks

$$Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, |x - 1| + |z| \leq 1\}$$

um die  $z$ -Achse. Berechnen Sie das Volumen von  $T$ .

**Aufgabe 2.23 (NV)** Berechnen Sie das Volumen der Durchschnittsmenge der folgenden beiden Zylinder

$$\begin{aligned}Z_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq R^2\}, \\Z_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq R^2\}.\end{aligned}$$

**Aufgabe 2.24 (V)** Man berechne das Integral

$$\int_K x^2 y \, d(x, y, z),$$

wobei  $K$  das Zylinderstück

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

ist.

**Aufgabe 2.25 (V)** Berechnen Sie das Volumen der Menge

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2 + z^2)^2 < z\}$$

mit Hilfe von Zylinderkoordinaten.

**Aufgabe 2.26 (V)** a) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante der Abbildung  $f : (r, \varphi) \rightarrow (x, y)$ , wobei

$$\begin{aligned}x &= r \cos^3 \varphi \\y &= r \sin^3 \varphi\end{aligned} \quad (0 < r < \infty, 0 < \varphi < 2\pi).$$

b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Punktmenge

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ : x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leq 1\}.$$

**Aufgabe 2.27 (V)** a) Sei  $U = ]0, \infty[ \times ]0, \infty[ \subset \mathbb{R}^2$  und  $f : U \rightarrow U$  gegeben durch

$$f(x, y) = (x^2y, y^2x).$$

Beweisen Sie, dass  $f$  bijektiv ist, und geben Sie die Umkehrabbildung an.

b) Berechnen Sie die Fläche von

$$S := \{(u, v) : u, v > 0, 1 \leq u^2/v \leq 8, 1 \leq v^2/u \leq 8\}.$$

**Aufgabe 2.28 (V)** Gegeben sind die reellen Zahlen  $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$  mit  $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$  und

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |a_1x + b_1y + c_1| + |a_2x + b_2y + c_2| \leq 1\}.$$

Berechnen Sie die Fläche von  $M$ .

**Aufgabe 2.29 (V)** Sei  $a > 0$ . Berechnen sie den Flächeninhalt der folgenden Punktmenge  $M$  im  $\mathbb{R}^2$ :

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, (x^2 + y^2) \leq 2a^2xy\}.$$

**Aufgabe 2.30 (V)** Sei  $G$  derjenige Kreissektor mit Radius 1, dessen linker Schenkel auf der  $y$ -Achse und dessen rechter Schenkel auf der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten liegt. Man berechne das Gebietsintegral

$$\int \int_G \frac{y}{x^2 + y^2} dx dy.$$

**Aufgabe 2.31 (V)** Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}_{++} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0\}$  der durch die Bedingungen  $1 \leq xy \leq 2$  und  $0 \leq x^2 - y^2 \leq 1$  definierte Bereich (Skizze!). Berechnen Sie

$$\int_{\Omega} (x^4 - y^4) dx dy$$

mittels einer geeigneten Koordinatentransformation.

**Aufgabe 2.32 (V)**  $D \subset \mathbb{R}^3$  sei jener Bereich, der nach unten durch die  $x, y$ -Ebene, nach oben durch das Rotationsparaboloid  $z = x^2 + y^2 + 4$  und seitlich durch den auf der  $x, y$ -Ebene stehenden Kreiszyylinder  $x^2 + y^2 = 9$  begrenzt wird. Man gebe eine graphische Darstellung und berechne das Volumen von  $D$ .

**Aufgabe 2.33 (V)** Für  $k = 1, 2, 3$  sei

$$A_k = \{x \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \sum_{i \neq k} x_i \leq 1\};$$

man bestimme das 3-dimensionale Maß der Menge

$$A = A_1 \cap A_2 \cap A_3.$$

**Aufgabe 2.34 (V)** Man berechne das Volumen des Körpers

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}.$$

**Aufgabe 2.35 (V)** Sei  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 7\}$ . Man berechne

$$\int_B x(x^2 + y^2)^2 d(x, y).$$

**Aufgabe 2.36 (V)** Man berechne

$$\int \int_{x^2 + y^2 \leq 2\pi} 2x \cos(x^2 + y^2) dx dy.$$

**Aufgabe 2.37 (V)** Bestimmen Sie den Flächeninhalt der folgenden Punktmenge im  $\mathbb{R}^2$ :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x^2 + y^2)^3 \leq 16x^2\}.$$

**Aufgabe 2.38 (V)** Berechne das Volumen des Volltorus  $V \subset \mathbb{R}^3$  der Punkte  $(x, y, z)$  mit

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - 3)^2 + z^2 \leq 1.$$

**Aufgabe 2.39 (V)** a) Für  $a \in ]0, \infty[$  sei  $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion und

$$\Delta_a := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0, x + y \leq a\}.$$

Beweisen Sie

$$\int_{\Delta_a} f(x + y) d(x, y) = \int_0^a f(t) \cdot t dt.$$

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\Delta_1} (x + y)^2 e^{(x+y)^2} d(x, y).$$

**Aufgabe 2.40 (V)** Berechnen Sie

$$\int \int_D st ds dt,$$

wobei  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

**Aufgabe 2.41 (V)** Es seien  $K = \{(\phi, r) \in \mathbb{R}^2 \mid \phi \in [0, 2\pi], 0 \leq r \leq 1 + \cos\phi\}$  und  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \Phi(\phi, r) = (r \cos\phi, r \sin\phi)$ .

a) Skizzieren Sie  $K$  und  $\Phi(K)$ , und berechnen Sie die Fläche von  $\Phi(K)$ .

b) Zeigen Sie, dass der Körper

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \Phi(K), 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

das Volumen  $\frac{5}{3}\pi$  hat.

**Aufgabe 2.42 (V)** Man berechne  $\int_B xy dx dy$ , wobei

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0 \text{ und } (x - 1)^2 + y^2 \leq 1\}.$$

### 3 Flächenintegrale, Vektoranalysis

Im  $\mathbb{R}^n$  kann man nicht nur über Volumina integrieren, sondern auch über Flächen

- der Dimension 1 (Kurven),
- der Dimension 2 (echte Flächen),
- $\vdots$
- der Dimension  $n-1$  (Hyperflächen).

Über eine Fläche der Dimension  $k$  wird integriert, indem man sie lokal mit  $k$  Parametern parametrisiert und dann im Parameter-Raum integriert. Wir besprechen zunächst den einfachsten Fall: Kurven.

#### 3.1 Kurvenintegrale

Eine Kurve im  $\mathbb{R}^n$  ist eine differenzierbare Abbildung eines Parameterintervalls  $[a, b]$  in den  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\gamma : \begin{cases} [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ t \mapsto (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)). \end{cases}$$

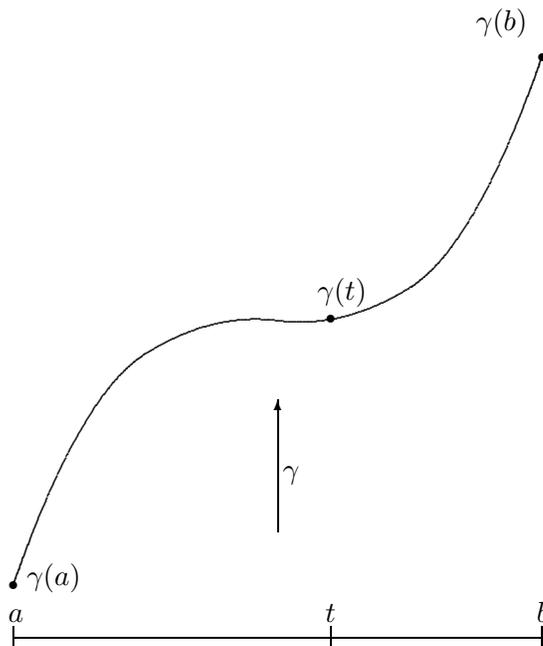
Eigentlich interessiert uns nur das Bild der Kurve

$$|\gamma| := \gamma([a, b]) \subset \mathbb{R}^n$$

und nicht so sehr die Parametrisierungsabbildung. Es ist aber leider so, daß wir mit der Kurve nur rechnen können, wenn sie in parametrisierter Form vorliegt. Und daß wir nicht an der Parametrisierung interessiert sind, können wir nur dadurch zum Ausdruck bringen, daß uns eine andere Parametrisierung derselben Kurve genauso recht ist: Eine Umparametrisierung der Kurve  $\gamma$  besteht aus einem umkehrbaren, in beide Richtungen differenzierbaren Parameterwechsel:

$$t = \varphi(\tau), \tau \in [\alpha, \beta], \varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b] \quad \text{differenzierbar mit} \quad \varphi'(\tau) \neq 0.$$

Konsequenterweise interessieren uns deswegen auch nur Eigenschaften der Kurve, die sich bei Umparametrisierung nicht ändern.



Das ist allerdings, wie manches was ich hier zu Papier bringe, etwas vereinfacht. Häufig kommen Kurven vor als Bahnen, die ein Massenpunkt im Raum im Lauf einer Bewegung beschreibt. Der Parameter  $t$  ist dann natürlich die Zeit. Und ohne Not sollte man die Kurve nicht auf einen anderen Parameter transformieren. Eine zweite Modifikation ist nötig, weil Parametertransformationen  $\varphi$  monoton wachsend ( $\varphi' > 0$ ) oder monoton fallend ( $\varphi' < 0$ ) sein können. Im letzteren Fall werden die Parameter der Endpunkte vertauscht. Es sollte niemanden überraschen, wenn sich dann das eine oder andere Vorzeichen ändert.

Schließlich ist es zwar sehr schön, wenn die Kurve durchgehend differenzierbar ist, aber nicht immer unbedingt nötig. Es reicht meist, wenn  $\gamma$  stetig ist und wenn es eine Zerlegung des Parameterintervalls gibt, so, daß  $\gamma$  auf den Teilintervallen (stetig) differenzierbar ist. Soetwas nennen wir dann *stückweise differenzierbar*.

**Beispiel 3.1** Die Kreislinie ist eine differenzierbare Kurve

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)),$$

während der Rand  $\partial Q$  des Quadrats

$$Q = \{(x, y) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$$

nur stückweise differenzierbar ist:

$$\gamma(t) := \begin{cases} (1, t) & \text{für } -1 \leq t \leq 1 \\ (2-t, 1) & \text{für } 1 \leq t \leq 3 \\ (-1, 4-t) & \text{für } 3 \leq t \leq 5 \\ (t-6, -1) & \text{für } 5 \leq t \leq 7 \end{cases}$$

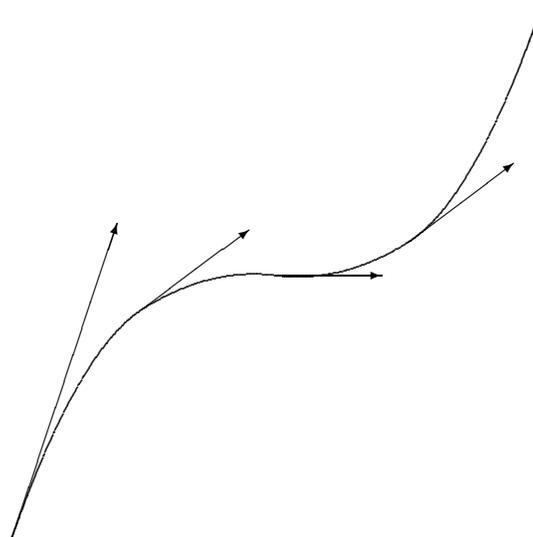
Eine differenzierbare Kurve hat in jedem Punkt einen *Geschwindigkeitsvektor*

$$\gamma'(t) = \dot{\gamma}(t) = \frac{d\gamma}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{d\gamma_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d\gamma_n}{dt} \end{pmatrix}$$

Seine Länge  $\|\dot{\gamma}\|$  heißt Geschwindigkeit der Kurve und das Integral darüber

$$s = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

heißt die (*Bogen-*) Länge der Kurve. Auch wenn der Geschwindigkeitsvektor bei einer stückweise differenzierbaren Kurve in endlich vielen Punkten nicht definiert ist, so ist die Länge doch sinnvoll definiert.



**Beispiel 3.2 (Kreislinie)** In der Parametrisierung

$$x = r\cos(t), y = r\sin(t), a \leq t \leq b,$$

wird die Bogenlänge

$$s = \int_a^b \sqrt{r^2 \sin^2(t) + r^2 \cos^2(t)} = r(b - a).$$

**Beispiel 3.3 (Graph einer Funktion)** Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetig differenzierbare Funktion, so ist ihr Graph eine stetig differenzierbare Kurve mit Parametrisierung

$$x \rightarrow (x, f(x)).$$

Der Geschwindigkeitsvektor ist

$$\frac{d\gamma}{dx} = (1, f'(x))$$

und die Bogenlänge

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

**Beispiel 3.4 (Noch einmal die Kreislinie als Graph)** Der obere Halbkreis wird parametrisiert durch den Graphen der Funktion

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{mit Ableitung} \quad f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Die Länge des Kreissegments über dem Intervall  $[u, v]$ ,  $-r < u < v < r$  ist dann

$$\int_u^v \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = \int_u^v \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = r \cdot \arcsin\left(\frac{x}{r}\right) \Big|_u^v = r \cdot \arcsin\left(\frac{v}{r}\right) - r \cdot \arcsin\left(\frac{u}{r}\right).$$

**Beispiel 3.5 (Bogenlänge der Ellipse)** Die obere Hälfte der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

wird parametrisiert als Graph der Funktion

$$f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{mit Ableitung} \quad f'(x) = \frac{b}{a} \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Die Länge des Ellipsenbogens über dem Intervall  $[u, v]$  ist dann

$$\int_u^v \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} \frac{x^2}{a^2 - x^2}} dx = \int_u^v \sqrt{\frac{a^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2}{a^2 - x^2}} dx$$

Dieses ist ein sogenanntes elliptisches Integral. Obwohl es sich nur wenig vom Kreisintegral unterscheidet, kann es nicht mit den uns bekannten elementaren Funktionen ausgedrückt, d.h. in geschlossener Form integriert werden.

**Beispiel 3.6 (Schraubenlinie)** Die Kurve

$$x = r \cos(t), \quad y = r \sin(t), \quad z = t$$

hat den Geschwindigkeitsvektor

$$\gamma'(t) = (-r \sin(t), r \cos(t), 1)$$

der konstanten Länge  $\sqrt{1 + r^2}$ . Ihre Bogenlänge ist deswegen proportional zu  $t$ .

Es sei die Funktion  $f$  stetig auf einer Umgebung der stückweise differenzierbaren Kurve  $\gamma$ . Dann kann man die Funktion  $f$  längs der Kurve  $\gamma$  folgendermaßen integrieren

$$\int_{\gamma} f ds := \int_a^b f ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt.$$

**Satz 3.1 (Lemma)** *Das Integral  $\int f ds$  ist unabhängig von der Parametrisierung: Bei einer Umparometrisierung  $t = t(\tau)$  ändert sich der Wert des Integrals nicht.*

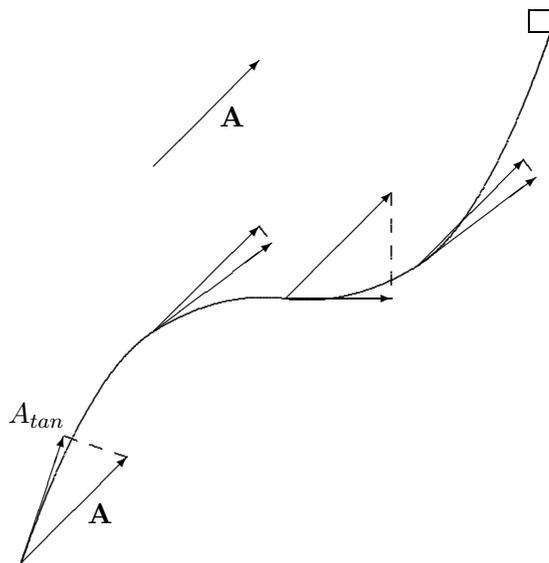
Beweis. Mit dem Parameter  $\tau$  wird

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f ds &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t(\tau))) \cdot \left\| \frac{d}{d\tau} \gamma(t(\tau)) \right\| d\tau \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t(\tau))) \cdot \left\| \frac{d\gamma}{dt}(t(\tau)) \right\| \cdot \left| \frac{dt}{d\tau} \right| d\tau \quad (\text{Kettenregel}) \\ &= \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt \quad (\text{Substitutionsformel}). \end{aligned}$$

Das Integral  $\int f ds$  kommt praktisch nur vor mit  $f = 1$ , dies ist das Bogenlängenintegral, und mit einer Funktion  $f$ , die Tangentialkomponente eines Vektorfeldes ist. Dies heißt folgendes: Es sei  $\mathbf{A}$  ein stetiges Vektorfeld, definiert auf einer Umgebung des Weges  $\gamma$ . Dann ist

$$A_{tan} := \left( \mathbf{A}(\gamma(t)), \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \right)$$

das Skalarprodukt des Vektorfeldes mit dem Einheitsvektor in Tangentialrichtung der Kurve. Wir können  $A_{tan}$  als den Anteil des Feldes in Tangentialrichtung der Kurve deuten. Man definiert als *Kurvenintegral des Feldes  $\mathbf{A}$*



$$\int_{\gamma} (\mathbf{A}, ds) := \int_{\gamma} A_{tan} ds = \int_a^b A_{tan}(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b (A(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)) dt.$$

Nach Lemma 3.1 ist dieses Integral von der gewählten Parametrisierung des Weges  $\gamma$  unabhängig.

**Beispiel 3.7** *Wir betrachten das Feld*

$$K = -\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3} = -\frac{\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|^2}.$$

(Es kann gedeutet werden als Gravitationsfeld.) Wir berechnen

$$\int_{\gamma} (K, ds) = \int_a^b -\left( \frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|^3}, \dot{\gamma}(t) \right) dt$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_a^b \frac{x(t)\dot{x}(t) + y(t)\dot{y}(t) + z(t)\dot{z}(t)}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}^3} dt \\
&= - \int_a^b \frac{d}{dt} \frac{-1}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}} dt \\
&= \frac{1}{\|\gamma(b)\|} - \frac{1}{\|\gamma(a)\|}.
\end{aligned}$$

Das Integral war deswegen so einfach auszuwerten, weil das Feld

$$K = \text{grad}(f) \text{ mit } f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

ein Gradientenfeld war.

Für Gradientenfelder gilt stets die Formel

$$\int_{\gamma} (\text{grad}(f), ds) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)),$$

die sich sofort aus dem HDI ergibt.

**Definition 3.1** Das Feld  $\mathbf{A}$  heißt konservativ, wenn eine differenzierbare Funktion  $f$  ( $= \pm$  Potential) existiert mit

$$\mathbf{A} = \text{grad}(f).$$

**Satz 3.2 (Wegekriterium für konservative Felder)** Ein stetiges Feld  $\mathbf{A}$  auf einer offenen Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  ist genau dann konservativ, wenn für jeden geschlossenen Weg  $\gamma$  gilt

$$\int_{\gamma} (\mathbf{A}, ds) = 0.$$

(Der Weg  $\gamma$  heißt geschlossen, wenn Anfangs- und Endpunkt gleich sind.)

Beweis. “ $\Rightarrow$ “: Wenn  $\gamma(b) = \gamma(a)$ , dann ist

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} (\mathbf{A}, ds) &= \int_a^b (\mathbf{A}(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)) dt \\
&= \int_a^b (\text{grad}(f)[\gamma(t)], \dot{\gamma}(t)) dt \\
&= \int_a^b \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) dt \quad (\text{Kettenregel}) \\
&= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

“ $\Leftarrow$ “: Wir fixieren einen Punkt  $\mathbf{x}_0 \in M$  und definieren eine Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$f(\mathbf{x}) := \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} (\mathbf{A}, ds).$$

Dies ist so zu verstehen, daß wir einen Weg in  $M$  wählen, der  $\mathbf{x}_0$  mit  $\mathbf{x}$  verbindet, und das Wegintegral von  $\mathbf{A}$  längs dieses Weges bilden. Da nach Voraussetzung das Integral über jeden geschlossenen Weg  $= 0$  ist, ist der Wert  $f(\mathbf{x})$  unabhängig von der Auswahl des Weges. Wenn  $M$  nicht zusammenhängt, d.h. wenn wir nicht alle Punkte  $\mathbf{x} \in M$  mit  $\mathbf{x}_0$  durch eine Weg in  $M$  verbinden können, definieren wir  $f(\mathbf{x})$  zunächst nur für die Punkte, die wir mit  $\mathbf{x}_0$  verbinden können, wählen dann einen anderen Punkt  $\mathbf{x}_0$  und machen so weiter.

Als nächstes zeigen wir, dass das so definierte  $f$  partiell differenzierbar mit  $\partial f / \partial x_\nu = A_\nu$  ist. Es genügt, sich dies für  $\nu = 1$  zu überlegen. Dazu bilden wir den Differentialquotienten

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) &= \left. \frac{d}{dt} f(\mathbf{x} + t \cdot \mathbf{e}_1) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x} + t \cdot \mathbf{e}_1} (\mathbf{A}, ds) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x} + t \cdot \mathbf{e}_1} (\mathbf{A}, ds) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \int_0^t (\mathbf{A}(\mathbf{x} + \tau \cdot \mathbf{e}_1), \mathbf{e}_1) d\tau \right|_{t=0} \quad (\gamma(\tau) = \mathbf{x} + \tau \cdot \mathbf{e}_1, \gamma' = \mathbf{e}_1) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \int_0^t A_1(\mathbf{x} + \tau \cdot \mathbf{e}_1) d\tau \right|_{t=0} \\ &= A_1(\mathbf{x} + t \cdot \mathbf{e}_1) \Big|_{t=0} \\ &= A_1(x). \end{aligned}$$

□

Das im Beweis benutzte Verfahren zur Konstruktion der Funktion  $f$  hilft auch in der Praxis. Als Beispiel betrachten wir das Vektorfeld

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y + z \\ z + x \\ x + y \end{pmatrix}.$$

Es erfüllt die Symmetriebedingung (Satz 1.16)

$$\frac{\partial A_1}{\partial y} = 1 = \frac{\partial A_2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} = 1 = \frac{\partial A_3}{\partial x}$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} = 1 = \frac{\partial A_3}{\partial y},$$

die für die Existenz einer Potentialfunktion notwendig ist.

Wir wählen  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  und verbinden diesen Punkt mit einem Punkt  $(x, y, z)$  durch den Weg

$$(t, 0, 0), 0 \leq t \leq x, \quad (x, t, 0), 0 \leq t \leq y, \quad (x, y, t), 0 \leq t \leq z.$$

Nach dem Konstruktionsverfahren wird

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \int_0^x 0 \cdot dt + \int_0^y x \cdot dt + \int_0^z (x + y) dt \\ &= xy + xz + yz. \end{aligned}$$

Man überzeugt sich sofort, daß diese Funktion  $f$  den Gradienten  $\mathbf{A}$  hat.

**Aufgabe 3.1 (V)** Man berechne die Bogenlänge der Kettenlinie  $y = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ ,  $x \in [-c, c]$ . ( $c > 0$ ,  $a > 0$ )

**Aufgabe 3.2 (V)** Berechnen Sie die Länge der Schnittkurve der beiden Flächen

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy = 18z\} \quad \text{und} \quad \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 = 12y\}$$

zwischen den Punkten  $(-6, 3, -1)$  und  $(6, 3, 1)$ .

**Aufgabe 3.3 (V)** Es sei  $F(x, y) = (e^y, xe^y)$ ,  $G(x, y) = (x^2y, xy^3)$ . Prüfen Sie, ob die Vektorfelder  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ein Potential besitzen, und geben Sie im Falle der Existenz ein Potential an. Welchen Wert hat das Integral von  $F$  längs der Kurve  $\gamma$  mit der Parameterdarstellung  $\gamma(t) = (\cos(t), e^t \cdot \sin(t))$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ ?

**Aufgabe 3.4 (V)** Es sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  das stetig differenzierbare Vektorfeld mit den Komponenten  $f_1(x, y) = xy$ ,  $f_2(x, y) = \alpha x^2 + y$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ).

- Berechnen Sie die beiden Kurvenintegrale von  $(0, 0)$  nach  $(x, y)$  längs der achsenparallelen Wege.
- Bestimmen Sie  $\alpha$  so, daß  $f$  die Integrabilitätsbedingungen erfüllt, und geben Sie für diesen Fall eine Stammfunktion  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  (also mit  $f = \text{grad}(F)$ ) von  $f$  an.
- Mit diesem  $f$  bilden wir das 3-dimensionale Vektorfeld

$$g : U := \{(x, y, z) : z \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x, y, z) = (f_1(x, y), f_2(x, y), \frac{1}{z}).$$

Sind die Kurvenintegrale  $\int_{\gamma} (g_1 dx + g_2 dy + g_3 dz)$  längs Wegen  $\gamma$  in  $U$  wegunabhängig? (Begründen Sie Ihre Antwort.)

**Aufgabe 3.5 (V)** Prüfen Sie in den folgenden Beispielen, ob zu  $g$  eine Stammfunktion existiert, also eine in ganz  $\mathbb{R}^2$  bzw.  $\mathbb{R}^3$  differenzierbare Funktion  $f$ , deren Ableitung (Gradient) gleich  $g$  ist. Geben Sie jeweils eine Stammfunktion an, falls sie existiert.

- $g(x, y) = (x^2y, xy^2)$ .
- $g(x, y, z) = \left( \frac{yz}{1 + x^2y^2z^2}, \frac{xz}{1 + x^2y^2z^2}, \frac{xy}{1 + x^2y^2z^2} \right)$ .

### 3.2 $k$ -dimensionale Flächen im $\mathbb{R}^n$

Wir wollen Kurvenintegrale (eindimensionaler Parameterbereich) auf den Fall  $k$ -dimensionaler Parameterbereiche verallgemeinern. Als Parameterbereich nehmen wir dann  $k$ -dimensionale Quader

$$[a_1, b_1] \times \dots \times [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}^k.$$

Eine (stetig) differenzierbare Abbildung

$$F : \begin{cases} [a_1, b_1] \times \dots \times [a_k, b_k] \rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t_1, \dots, t_k) \mapsto F(t_1, \dots, t_k) = \begin{pmatrix} F_1(t_1, \dots, t_k) \\ \vdots \\ F_n(t_1, \dots, t_k) \end{pmatrix} \end{cases}$$

heißt *k*-dimensionales Flächenstück.

**Beispiel 3.8** Die Kugeloberfläche vom Radius *R* wird parametrisiert durch

$$\begin{cases} [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} t_1 = \varphi \\ t_2 = \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x = R \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ y = R \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ z = R \sin(\theta) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Die Oberfläche des Torus, entstanden durch Rotation einer Kreisscheibe vom Radius *r* um die *z*-Achse, während ihr Mittelpunkt auf einem Kreis vom Radius *R* rotiert, wird parametrisiert durch

$$\begin{cases} [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} R \cos(\varphi) \\ R \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ r \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Alles, was wir aus solchen Flächenstücken zusammensetzen können, wollen wir eine *Fläche* nennen, ohne genau auf die Definition einzugehen. So ist zum Beispiel die Oberfläche des Quaders

$$\{x \in \mathbb{R}^n : a_1 \leq x_1 \leq b_1, \dots, a_n \leq x_n \leq b_n\}$$

eine  $(n - 1)$ -dimensionale Fläche, zusammengesetzt aus den  $2n$  Flächenstücken  $R_\nu^\pm$

$$\begin{aligned} R_\nu^+ : (t_1, \dots, t_{n-1}) &\mapsto (t_1, \dots, t_{\nu-1}, b_\nu, t_\nu, \dots, t_{n-1}) \\ R_\nu^- : (t_1, \dots, t_{n-1}) &\mapsto (t_1, \dots, t_{\nu-1}, a_\nu, t_\nu, \dots, t_{n-1}) \end{aligned}$$

der Dimension  $n - 1$ .

Umparametrisierungen eines Flächenstücks werden genau so wie bei Kurven definiert:

$$t_1 = t_1(\tau_1, \dots, \tau_k), \dots, t_k = t_k(\tau_1, \dots, \tau_k), \quad \text{wobei die Funktionaldeterminante } \det \left( \frac{\partial t_\kappa}{\partial \tau_\lambda} \right) \neq 0.$$

Dem Durchlaufsinne bei der Kurve entspricht hier die Orientierung des Flächenstücks. Wir definieren nicht, was eine Orientierung ist, aber wir definieren: eine Umparametrisierung erhält (bzw. ändert) die Orientierung des Flächenstücks, wenn

$$\det \left( \frac{\partial t_\kappa}{\partial \tau_\lambda} \right) > 0, \text{ bzw. } < 0.$$

Bei einer Kurve gab es einen Geschwindigkeitsvektor  $d\gamma/dt$ . Bei einem  $k$ -dimensionalen Flächenstück gibt es  $k$  partielle Ableitungen

$$\mathbf{v}_\kappa(\mathbf{t}) := \frac{\partial F}{\partial t_\kappa}(\mathbf{t}), \quad \kappa = 1, \dots, k.$$

Dies sind die Geschwindigkeitsvektoren an die  $k$  Parameterkurven

$$t \mapsto F(t_1, \dots, t_{\kappa-1}, t, t_{\kappa+1}, \dots, t_k)$$

durch den Flächenpunkt

$$\mathbf{x} = F(t_1, \dots, t_k).$$

Diese  $k$  Vektoren spannen ein  $k$ -dimensionales Parallelotop auf, das im Flächenpunkt  $\mathbf{x}$  die Fläche berührt. Aus dem  $k$ -dimensionalen Volumen dieses Parallelotops müssen wir uns das  $k$ -dimensionale Flächenelement unseres Flächenstücks basteln. Nur, das  $k$ -dimensionale Volumen eines  $k$ -dimensionalen Parallelotops haben wir noch nicht gehabt. Genauer, wir haben das nur für

- $k = 1$  :  $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + \dots, v_n^2}$
- $k = n$  :  $|P(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)| = |\det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)|$

gehabt.

Wir kombinieren beide Formeln: Zunächst projizieren wir unsere  $k$  Vektoren  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  in alle möglichen  $k$ -dimensionalen Koordinaten-Unterräume. Im  $x_{\nu_1}, \dots, x_{\nu_k}$ -Unterraum beispielsweise erhalten wir die  $k$  Vektoren

$$\begin{pmatrix} v_{1,\nu_1} \\ \vdots \\ v_{1,\nu_k} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} v_{k,\nu_1} \\ \vdots \\ v_{k,\nu_k} \end{pmatrix}.$$

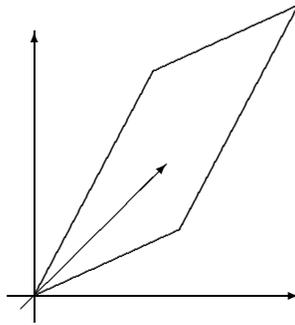
Sie spannen in diesem  $\mathbb{R}^k$  ein  $k$ -dimensionales Parallelotop auf. Dessen Volumen ist der Betrag der  $k \times k$ -Determinante

$$\det_{\nu_1, \dots, \nu_k}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) := \det \begin{pmatrix} v_{1,\nu_1} & \dots & v_{k,\nu_1} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{1,\nu_k} & \dots & v_{k,\nu_k} \end{pmatrix}.$$

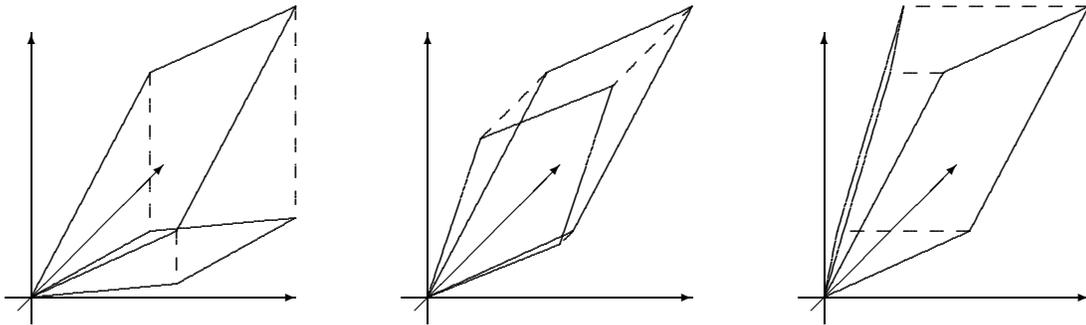
Ähnlich wie bei Pythagoras ziehen wir die Wurzel aus der Quadratsumme aller dieser Determinanten:

$$\sqrt{g(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)} := \sqrt{\sum_{\nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_k} [\det_{\nu_1, \dots, \nu_k}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)]^2}.$$

Dies ist tatsächlich das  $k$ -dimensionale Volumen des von den  $k$  Vektoren  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$  aufgespannten  $k$ -dimensionalen Parallelotops.



Parallelogramm im Raum und ...



seine drei Projektionen

Dies wollen wir hier auch nicht beweisen, aber was bedeutet es denn für zwei Vektoren

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 ?$$

Nach Definition ist

$$\begin{aligned} \det_{1,2}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= a_1 b_2 - a_2 b_1 = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_3 \\ \det_{2,3}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= a_2 b_3 - a_3 b_2 = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_1 \\ \det_{1,3}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= a_1 b_3 - a_3 b_1 = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{g(\mathbf{a}, \mathbf{b})} &= \sqrt{\det_{1,2}(\mathbf{a}, \mathbf{b})^2 + \det_{1,3}(\mathbf{a}, \mathbf{b})^2 + \det_{2,3}(\mathbf{a}, \mathbf{b})^2} \\ &= \sqrt{((\mathbf{a} \times \mathbf{b})_1)^2 + ((\mathbf{a} \times \mathbf{b})_2)^2 + ((\mathbf{a} \times \mathbf{b})_3)^2} \\ &= \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|. \end{aligned}$$

Vielleicht entsinnt sich der eine oder andere der Formel

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| &= \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot |\sin(\alpha)| \\ &= \text{Fläche des von } \mathbf{a} \text{ und } \mathbf{b} \text{ aufgespannten Parallelogramms.} \end{aligned}$$

Dabei ist  $\alpha$  der Winkel zwischen  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$ . In guten Skripten zur Linearen Algebra findet man für das Quadrat der Fläche des Parallelogramms auch die Formel

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 &= \|\mathbf{a}\|^2 \cdot \|\mathbf{b}\|^2 \cdot \sin^2(\alpha) \\
 &= \|\mathbf{a}\|^2 \cdot \|\mathbf{b}\|^2 \cdot (1 - \cos^2(\alpha)) \\
 &= (\mathbf{a}, \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b}, \mathbf{b}) \cdot \left(1 - \left(\frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|}\right)^2\right) \\
 &= (\mathbf{a}, \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b}, \mathbf{b}) - (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2 \\
 &= \det\left(\begin{pmatrix} \mathbf{a}^t \\ \mathbf{b}^t \end{pmatrix} \cdot (\mathbf{a}, \mathbf{b})\right) \\
 &= \det\left((\mathbf{a}, \mathbf{b})^t \cdot (\mathbf{a}, \mathbf{b})\right) \\
 \sqrt{g(\mathbf{a}, \mathbf{b})} &= \sqrt{\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})^t \cdot (\mathbf{a}, \mathbf{b})}.
 \end{aligned}$$

Diese Formel verallgemeinert sich auf alle  $k < n$  und heißt *Lagrange-Identität*: Für  $k$  Vektoren  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$  ist

$$\begin{aligned}
 \det\left((\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)^t \cdot (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)\right) &= \det((\mathbf{v}_\kappa, \mathbf{v}_\lambda)_{\kappa, \lambda=1, \dots, k}) \\
 &= \sum_{\nu_1 < \dots < \nu_k} \det_{\nu_1, \dots, \nu_k}(v_1, \dots, v_k)^2.
 \end{aligned}$$

Es ist eine der Fundamentalformeln der Multilinearen Algebra. Einen Beweis findet man beispielsweise in Forster III, p. 136,137, allerdings ohne die Bezeichnung Lagrange-Identität.

Mit der Lagrange-Identität nimmt unser Volumen die Form

$$\sqrt{g(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)} = \sqrt{\det((\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)^t \cdot (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k))} = \sqrt{\det(\mathbf{v}_\kappa, \mathbf{v}_\lambda)}$$

an. Diese Determinante heißt *Gramsche Determinante* der  $k$  Vektoren  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ .

**Beispiel 3.9 (Gramsche Determinante der Kugeloberfläche)** Die beiden Tangentialvektoren sind

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -R \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ R \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial F}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -R \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ -R \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ R \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

und die Gramsche Determinante ist

$$\begin{aligned}
 g &= \det \begin{pmatrix} -R \sin(\varphi) \cos(\theta) & R \cos(\varphi) \cos(\theta) & 0 \\ -R \cos(\varphi) \sin(\theta) & R \sin(\varphi) \sin(\theta) & R \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -R \sin(\varphi) \cos(\theta) & -R \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ R \cos(\varphi) \cos(\theta) & -R \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ 0 & R \cos(\theta) \end{pmatrix} \\
 &= \det \begin{pmatrix} R^2 \cos^2(\theta) & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix} \\
 &= [R^2 \cos(\theta)]^2
 \end{aligned}$$

**Beispiel 3.10 (Gramsche Determinante der Torusoberfläche)** Die beiden Tangentialvektoren sind

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi)(R + r\cos(\theta)) \\ \cos(\varphi)(R + r\cos(\theta)) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial F}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -r\cos(\varphi)\sin(\theta) \\ -r\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

und die Gramsche Determinante

$$g = \det \begin{pmatrix} (R + r\cos(\theta))^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} = [r(R + r\cos(\theta))]^2$$

**Beispiel 3.11 (Gramsche Determinante des Graphen einer Funktion  $f(x, y)$ )** Die Parametrisierungsabbildung ist

$$F : (x, y) \mapsto (x, y, f(x, y))$$

und die Tangentialvektoren sind

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Somit ist die Gramsche Determinante

$$\begin{aligned} g &= \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right) \cdot \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \\ &= 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \end{aligned}$$

**Definition 3.2** Das  $k$ -dimensionale Volumen eines Flächenstücks

$$F : [a_1, b_1] \times \dots \times [a_k, b_k] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

ist das Integral über die Gramsche Determinante

$$\int_F d\sigma := \int_{a_k}^{b_k} \dots \int_{a_1}^{b_1} \sqrt{g(t_1, \dots, t_k)} dt_1 \dots dt_k.$$

Diese Definition wäre sinnlos, wenn sie nicht invariant unter Umparametrisierung wäre. Um dies zu prüfen, gehen wir mit einer Umparametrisierungsabbildung

$$t_1 = t_1(\tau_1, \dots, \tau_k), \dots, t_k = t_k(\tau_1, \dots, \tau_k)$$

zu neuen Parametern  $\tau_1, \dots, \tau_k$  über. Sind

$$\frac{\partial F}{\partial t_1} = \mathbf{v}_1, \dots, \frac{\partial F}{\partial t_p} = \mathbf{v}_k$$

die alten Tangentialvektoren, so sind mit der Kettenregel die neuen Tangentialvektoren

$$\frac{\partial F}{\partial \tau_\kappa} = \sum_{\lambda=1}^k \frac{\partial F}{\partial t_\lambda} \cdot \frac{\partial t_\lambda}{\partial \tau_\kappa}.$$

Die für die Gramsche Determinante wesentliche  $n \times k$ -Matrix

$$(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$$

wird ersetzt durch die Matrix

$$(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) \cdot \left( \frac{\partial t_\lambda}{\partial \tau_\kappa} \right)$$

und  $g(t_1, \dots, t_k)$  durch

$$\begin{aligned} g(\tau_1, \dots, \tau_k) &= \det \left\{ \left( \frac{\partial t_\lambda}{\partial \tau_\kappa} \right)^t \cdot (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)^t \cdot (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) \cdot \left( \frac{\partial t_\lambda}{\partial \tau_\kappa} \right) \right\} \\ &= g(t_1, \dots, t_k) \cdot \left| \det \frac{\partial t_\lambda}{\partial \tau_\kappa} \right|^2 \end{aligned}$$

Und - als eine ihrer wichtigsten Anwendungen - folgt aus der Integraltransformationsformel

$$\int \dots \int \sqrt{g(\tau_1, \dots, \tau_k)} d\tau_1 \dots d\tau_k = \int \dots \int \sqrt{g(t_1, \dots, t_k)} \left| \det \frac{\partial t_\lambda}{\partial \tau_\kappa} \right| d\tau_1 \dots d\tau_k = \int \dots \int \sqrt{g(t_1, \dots, t_k)} dt_1 \dots dt_k.$$

**Beispiel 3.12 (Kugeloberfläche)** Wir haben die Gramsche Determinante bereits ausgerechnet

$$\sqrt{g(\varphi, \theta)} = R^2 \cos(\theta).$$

Also wird die Oberfläche der Kugel vom Radius  $R$

$$R^2 \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\theta) d\varphi d\theta = 2\pi R^2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\theta) d\theta = 4R^2 \pi.$$

**Beispiel 3.13 (Torusoberfläche)** Hier ist

$$\sqrt{g(\varphi, \theta)} = r(R + r \cos(\theta))$$

und die Oberfläche

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r(R + r \cos(\theta)) d\varphi d\theta = 2\pi r \cdot \int_0^{2\pi} (R + r \cos(\theta)) d\theta = 2\pi r \cdot 2\pi R.$$

**Beispiel 3.14 (Oberfläche eines Rotationskörpers (2. Guldinsche Regel))** Die Oberfläche eines Rotationskörpers wie in 2.4.3 wird parametrisiert durch

$$F(z, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)f(z) \\ \sin(\varphi)f(z) \\ z \end{pmatrix}, \quad z_1 \leq z \leq z_2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Die beiden Tangentialvektoren sind

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi)f(z) \\ \cos(\varphi)f(z) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)f'(z) \\ \sin(\varphi)f'(z) \\ 1 \end{pmatrix}$$

und die Gramsche Determinante ist

$$g = \det \begin{pmatrix} f^2(z) & 0 \\ 0 & 1 + f'(z)^2 \end{pmatrix}, \quad \sqrt{g} = f(z)\sqrt{1 + f'(z)^2}.$$

Also berechnet sich die Oberfläche des Rotationskörpers zu

$$\begin{aligned} \int_{z_1}^{z_2} \int_0^{2\pi} \sqrt{g(z, \varphi)} d\varphi dz &= 2\pi \int_{z_1}^{z_2} f(z)\sqrt{1 + f'(z)^2} dz \\ &= 2\pi \cdot \underbrace{\frac{\int_{z_1}^{z_2} f(z)\sqrt{1 + f'(z)^2} dz}{\int_{z_1}^{z_2} \sqrt{1 + f'(z)^2} dz}}_{\text{Abstand des Schwerpunkts}} \cdot \underbrace{\int_{z_1}^{z_2} \sqrt{1 + f'(z)^2} dz}_{\text{Bogenlänge des Graphen}} \\ &\quad \text{des Graphen von } f \text{ von der } z\text{-Achse} \quad \text{der Funktion } f \end{aligned}$$

Nachdem man das 'infinitesimale Oberflächenlement' und die Oberfläche einer Fläche definiert hat, kann man genau wie bei Kurven auch das Integral

$$\int_F f do := \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_k}^{b_k} f(F(t_1, \dots, t_k)) \sqrt{g(t_1, \dots, t_k)} dt_k \dots dt_1$$

von Funktionen über solche  $k$ -dimensionale Flächen (-stücke) definieren. Und genau wie bei der Oberfläche selbst, sieht man, dass dieses Integral *von der Parametrisierung unabhängig* ist. In dieser allgemeinen Form kommt das Integral jedoch selten vor. Die Funktionen, über die integriert werden soll, sind zumeist aus Vektorfeldern hergeleitet. Dies werden wir in den beiden nächsten Paragraphen besprechen.

**Aufgabe 3.6 (V)** Sei  $\sigma$  das Oberflächenmaß auf  $\Delta := \{(x_1, x_2, x_3) \in ]0, 1[^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$ . Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\int_{\Delta} (1 - x_1 + x_2)x_3 d\sigma.$$

**Aufgabe 3.7 (V)** Es sei

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\int_S x^4 do.$$

### 3.3 Der Integralsatz von Gauß

Der Integralsatz von Gauß ist die  $n$ -dimensionale Verallgemeinerung des HDI. Ein Volumenintegral wird durch ein Randintegral ausgedrückt. Zunächst beschäftigen wir uns etwas genauer mit dem Rand von Volumina im  $\mathbb{R}^n$ . Meistens diskutieren wir nur den Fall  $n = 3$ , da vieles für beliebiges  $n$  genauso geht.

Sei  $F : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein differenzierbares Flächenstück. Die beiden Tangentialvektoren

$$\frac{\partial F}{\partial t_1}, \quad \frac{\partial F}{\partial t_2}$$

spannen ein Parallelogramm im  $\mathbb{R}^3$  auf, das die Fläche berührt und dessen Größe in das infinitesimale Flächenelement eingeht. Der Flächeninhalt dieses Parallelogramms ist die Länge des Kreuzprodukts

$$\mathbf{N} := \frac{\partial F}{\partial t_1} \times \frac{\partial F}{\partial t_2}$$

dieser beiden Tangentialvektoren. Der Kreuzproduktvektor  $\mathbf{N}$  steht senkrecht auf dem Parallelogramm und damit senkrecht auf der Fläche. Deswegen heißt er *Normalenvektor*. Er definiert einen *Normaleneinheitsvektor*

$$\hat{\mathbf{N}} = \frac{\mathbf{N}}{\|\mathbf{N}\|}.$$

(Natürlich kann das Kreuzprodukt auch einmal verschwinden, wenn die beiden Tangentialvektoren parallel sind. Dann stimmt etwas nicht mit der Fläche - eine Singularität hat sich gebildet. Das ist nur etwas für höhere Semester, wir schließen soetwas hier einfach aus.)

Die Länge des Normalenvektors hängt stark von der gewählten Parametrisierung ab, die des Normaleneinheitsvektors nicht, denn die ist immer  $= 1$ . Aber der Normaleneinheitsvektor hat auch noch eine Richtung, die sich ändert, wenn wir beispielsweise die Reihenfolge der Parameter  $t_1$  und  $t_2$  vertauschen. Wenn man von einer Seite der Fläche auf die andere möchte, durch die Fläche hindurch, kann man das in zwei Richtungen, die beiden Richtungen in welche die beiden Normaleneinheitsvektoren zeigen.

Betrachten wir etwa die Randfläche

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$$

der Kugel vom Radius  $r$ . Das Vektorfeld  $(x, y, z)/r$  ist das *nach außen weisende Normaleneinheitsvektorfeld*, während das Normaleneinheitsvektorfeld  $-(x, y, z)/r$  nach innen weist. Überall, wo ein Körper, oder ein Volumen im  $\mathbb{R}^3$  einen glatten (=differenzierbaren) Rand hat, gibt es ein nach innen und ein nach außen weisendes Normaleneinheitsfeld. Dies ist genau so bei Volumina in  $\mathbb{R}^n$ , nur ist der Rand eines solchen Volumens eine Fläche der Dimension  $n - 1$  im  $\mathbb{R}^n$  (Hyperfläche).

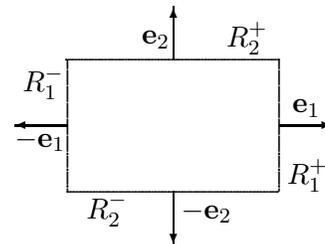
#### Beispiel 3.15 Der Rand $\partial Q$ des Quaders

$$Q = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : a_\nu \leq x_\nu \leq b_\nu\}$$

besteht aus den  $2n$  Hyperebenenstücken

$$R_\nu^+ = \{\mathbf{x} \in Q : x_\nu = b_\nu\},$$

$$R_\nu^- = \{\mathbf{x} \in Q : x_\nu = a_\nu\}.$$



Das nach außen weisende Normaleneinheitsfeld auf  $R_\nu^+$  ist das konstante Vektorfeld  $\mathbf{e}_\nu$ , während  $-\mathbf{e}_\nu$  das nach außen weisende Normaleneinheitsfeld auf  $R_\nu^-$  ist.

Ist ein Normaleneinheitsfeld  $\hat{\mathbf{N}}$  längs einer Fläche  $F$  im  $\mathbb{R}^3$  oder einer Hyperfläche im  $\mathbb{R}^n$  fixiert, und ist noch zusätzlich ein Vektorfeld  $\mathbf{A}$  gegeben, so heißt das Skalarprodukt

$$(\mathbf{A}, \hat{\mathbf{N}}) = (\mathbf{A}(F(\mathbf{t})), \hat{\mathbf{N}}(F(\mathbf{t})))$$

der Fluss des Feldes über die Fläche in Richtung des Normaleneinheitsfeldes  $\hat{\mathbf{N}}$ , im Flächenpunkt  $F(\mathbf{t})$ . Das Integral

$$\int_F (\mathbf{A}, \hat{\mathbf{N}}) do$$

heißt der Fluss von  $\mathbf{A}$  über das Flächenstück. Meist betrachtet man den Fluss eines Vektorfeldes über den Rand eines Volumens nach außen, d.h. den Fluss aus diesem Volumen heraus.

Ist beispielsweise  $F(t_1, t_2)$  die Parametrisierung einer Fläche im  $\mathbb{R}^3$  mit Normalenfeld

$$\mathbf{N} = \frac{\partial F}{\partial t_1} \times \frac{\partial F}{\partial t_2}$$

und Normaleneinheitsfeld

$$\hat{\mathbf{N}} = \frac{\mathbf{N}}{\|\mathbf{N}\|},$$

so ist der Fluss über die Fläche in Richtung von  $\mathbf{N}$

$$\int_F (\mathbf{A}, \hat{\mathbf{N}}) do = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} (\mathbf{A}, \frac{\mathbf{N}}{\|\mathbf{N}\|}) \left\| \frac{\partial F}{\partial t_1} \times \frac{\partial F}{\partial t_2} \right\| dt_2 dt_1.$$

In der Praxis ist das Berechnen des Normierungsfaktors  $\|\mathbf{N}\|$  und die Division durch diesen Faktor meist sehr aufwendig. Doch glücklicherweise kürzt sich dieser Faktor heraus! Das ist ein ganz wesentlicher, stark vereinfachender Punkt! Das Flussintegral wird also

$$\int_F (\mathbf{A}, \hat{\mathbf{N}}) do = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} (\mathbf{A}, \frac{\partial F}{\partial t_1} \times \frac{\partial F}{\partial t_2}) dt_2 dt_1.$$

Noch weiter erleichternd kommt die Determinantenformel für drei Vektoren  $\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$

$$(\mathbf{A}, \mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \det(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$$

aus der Linearen Algebra hinzu. Damit wird das Flussintegral

$$\int_F (\mathbf{A}, \hat{\mathbf{N}}) do = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \det(\mathbf{A}, \frac{\partial F}{\partial t_1}, \frac{\partial F}{\partial t_2}) dt_2 dt_1.$$

**Beispiel 3.16** Sei etwa die Fläche

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z = 1\}$$

gegeben (das Stück der Ebene  $x + y + z = 1$  im ersten Oktanten), zum Beispiel parametrisiert durch

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 - x - y \end{pmatrix}.$$

Sei außerdem der Fluss des Feldes

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

durch dieses dreieckige Flächenstück zu berechnen. Wir bilden die beiden Tangentialvektoren

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und berechnen das Flussintegral

$$\begin{aligned} \iint (\mathbf{A}, \mathbf{N}) dx dy &= \iint \det \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (x + y + z) dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} 1 dy dx \\ &= \int_0^1 (1 - x) dx \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Dieses Flussintegral verallgemeinert sich leicht auf  $n - 1$ -dimensionale Flächen im  $\mathbb{R}^n$  (Hyperflächen). Solche Hyperflächen werden durch  $n - 1$  Parameter  $t_1, \dots, t_{n-1}$  parametrisiert. Daraus kann man in jedem Punkt  $n - 1$  Tangentialvektoren

$$\frac{\partial F}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial t_{n-1}}$$

berechnen. Und im  $\mathbb{R}^n$  gibt es ein Produkt

$$[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}] \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1} \in \mathbb{R}^n,$$

von  $n - 1$  Vektoren, welches das Kreuzprodukt von zwei Vektoren im  $\mathbb{R}^3$  verallgemeinert. Am einfachsten definiert man es durch die Determinantenformel

$$(\mathbf{x}, [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}]) = \det(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}),$$

die für jeden beliebigen (Test-) Vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  gelten soll. Wegen

$$\det(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}) = 0, \quad k = 1, \dots, n-1,$$

ist klar, dass dieser Produktvektor auf den  $n-1$  Tangentialvektoren senkrecht steht. Wir können ihn als Normalenvektor nehmen. Dann wird das Flussintegral

$$\int_F (\mathbf{A}, \hat{\mathbf{N}}) d\sigma = \int \dots \int \det \left( \mathbf{A}, \frac{\partial F}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial t_{n-1}} \right) dt_1 \dots dt_{n-1}.$$

Dieses Integral hängt von der Orientierung des Hyperflächenstücks ab: vertauscht man zwei Parameter  $t_k$  und  $t_l$ , ändert sich das Vorzeichen des Normalenvektors  $N$ .

Das waren alles Vorbereitungen. Jetzt wollen wir den HDI

$$\int_a^b \frac{dF}{dx}(x) dx = F(b) - F(a)$$

auf zwei Dimensionen verallgemeinern. Dazu integrieren wir die partielle Ableitung

$$\frac{\partial v}{\partial x}$$

über ein Rechteck

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a_1 \leq x \leq b_1, a_2 \leq y \leq b_2\}$$

in der Ebene  $\mathbb{R}^2$ . Wir finden

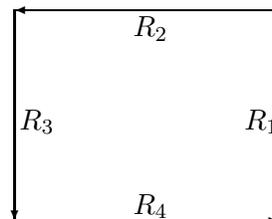
$$\begin{aligned} \int_R \frac{\partial v}{\partial x} d^2 \mathbf{x} &= \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} \frac{\partial v}{\partial x} dx dy \\ &= \int_{a_2}^{b_2} (v(b_1, y) - v(a_1, y)) dy \quad (\text{HDI}) \\ &= \int_{R_1} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ v(x, y) \end{pmatrix} \right), ds + \int_{R_3} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ v(x, y) \end{pmatrix} \right), ds, \end{aligned}$$

wobei die beiden Wege

$$\begin{aligned} R_1 &: [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (b_1, t), \\ R_3 &: [-b_2, -a_2] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (a_1, -t), \end{aligned}$$

Teile des Randes von  $R$  sind, so orientiert, dass bei ihrem Durchlaufen das Rechteck  $R$  zur Linken liegt. Definieren wir ähnlich noch die beiden fehlenden Randstücke

$$\begin{aligned} R_2 &: [-b_1, -a_1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (-t, b_2) \\ R_4 &: [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (t, a_2), \end{aligned}$$



so finden wir analog

$$\int_R \frac{\partial u}{\partial y} d^2 \mathbf{x} = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \frac{\partial u}{\partial y} dy dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{a_1}^{b_1} ((u(x, b_2) - u(x, a_2))) dx \\
&= - \int_{R_2} \left( \begin{pmatrix} u(x, y) \\ 0 \end{pmatrix} \right), ds - \int_{R_4} \left( \begin{pmatrix} u(x, y) \\ 0 \end{pmatrix} \right), ds.
\end{aligned}$$

Die vier Wege  $R_1, \dots, R_4$  setzen sich zusammen zum mathematisch positiv orientierten Rand  $\partial R$  des Rechtecks  $R$ . Durch Addition finden wir

$$\int_R \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) d^2 \mathbf{x} = \oint_{\partial R} \left( \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} \right), ds.$$

Diese Formel ist im wesentlichen schon der ganze Satz von Gauß. Bevor wir sie weiter verallgemeinern wollen wir sie noch in ihrer klassischen Form schreiben

$ \int_R \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial R} u dx + v dy $	Formel von Gauß-Green
--	--------------------------

Die rechte Seite dieser Formel liest sich schön intuitiv: auf den Randstücken  $R_1$  und  $R_3$  integriert man die Funktion  $v$  über  $dy$ , einmal nach oben, dann nach unten, und auf den Randstücken  $R_2$  und  $R_4$  integriert man  $u$  über  $dx$ . Nur, was ist hier  $dx$  und  $dy$ ? Offensichtlich bedeutet  $dx$  und  $dy$  hier doch etwas mehr als das übliche: 'Achtung, hier ist das Integral zuende!' Denn  $dx$  fühlt irgendwie die  $x$ -Richtung des Weges,  $dy$  die  $y$ -Richtung.  $dx$  und  $dy$  sind *Differentiale*. Wenn sich das Semester noch länger hinzieht, werden wir uns darum kümmern, was das ist: ein Differential! ??

Jetzt interpretieren wir den Integrand auf der rechten Seite als Flussintegral:

$$\left( \begin{pmatrix} -v(x, y) \\ u(x, y) \end{pmatrix} \right), ds = \left( \begin{pmatrix} -v(x, y) \\ u(x, y) \end{pmatrix} \right), \dot{\gamma}(t) dt = \left( \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right), \hat{\mathbf{N}} \parallel \dot{\gamma}(t) \parallel dt.$$

Hier ist  $\hat{\mathbf{N}}$  der nach außen weisende Normaleneinheitsvektor auf dem Rand des Rechtecks  $R$ . Damit können wir die Formel umschreiben

$ \int_R \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) d^2 \mathbf{x} = \oint_{\partial R} \left( \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right), \hat{\mathbf{N}} ds $
--

Das Flussintegral des Vektorfeldes

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

über den Rand des Rechtecks  $R$ , nach außen, ist gleich dem Flächenintegral der Divergenz

$$div(\mathbf{A}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

über das Innere des Rechtecks.

In dieser Form verallgemeinert sich die Formel auf ein beliebiges Volumen  $Vol$  mit glattem Rand im  $\mathbb{R}^n$ :

$\int_{Vol} \operatorname{div}(\mathbf{A}) d^n \mathbf{x} = \oint_{\partial Vol} (\mathbf{A}, \mathbf{N}) do$	Satz von Gauß
---	------------------

Wir wollen den Beweis hier nicht durchführen, nur andeuten. Er besteht aus drei Schritten:

1. Beweis der Formel für Quader im  $\mathbb{R}^n$ . Das geht mit Hilfe des HDI ganz genauso, wie wir es für Rechtecke gemacht haben. Nur hat ein  $n$ -dimensionaler Quader eben  $2n$  Oberflächenstücke. Die müssen alle so orientiert werden, dass der Normalenvektor  $\mathbf{N}$  nach außen weist.
2. Beweis der Formel für krummlinige Quader im  $\mathbb{R}^n$ . Das sind Volumenstücke (i.a. mit Kanten) die man differenzierbar durch Quader parametrisieren kann. Der Beweis für diese Volumina ist eine Anwendung der Integraltransformationsformel, im Innern und auf dem Rand.
3. Aufbauen beliebiger Volumina durch Zusammensetzen krummliniger Quader. Die Quader stoßen dabei aneinander, und auf den Seitenflächen, wo sie aneinanderstoßen, da kürzen sich die Flussintegrale raus. Hier liegt der Hund begraben - richtig tief.

**Beispiel 3.17** *Wir integrieren das Ortsvektorfeld*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

über den Rand der Kugel  $B$  vom Radius  $R$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{A}) &= \frac{\partial x_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial x_n}{\partial x_n} \\ &= n \\ \mathbf{N} &= \mathbf{A} \\ \hat{\mathbf{N}} &= \frac{1}{R} \cdot \mathbf{A} \\ n \cdot |B| &= \int_B \operatorname{div}(\mathbf{A}) d^n \mathbf{x} \\ &= \oint_{\partial B} (\mathbf{A}, \hat{\mathbf{N}}) do \\ &= \oint_{\partial B} R do \\ &= R \cdot \text{Kugeloberfläche vom Radius } R. \end{aligned}$$

Speziell für  $R = 1$  erhalten wir daraus die Beziehung

$$\text{Oberfläche der Einheitskugel} = n \cdot \text{Volumen der Einheitskugel im } \mathbb{R}^n.$$

**Beispiel 3.18** *Wir betrachten im dreidimensionalen Raum das Vektorfeld*

$$\mathbf{A} = -\operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

In §1.6 sahen wir

$$\operatorname{div}(\mathbf{A}) = -\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0, \quad (r \neq 0).$$

Aus dem Gaußschen Satz folgt, für jedes Volumen  $V$ , das den Nullpunkt nicht enthält

$$\int_{\partial V} (\mathbf{A}, \mathbf{N}) d\sigma = \int_V \operatorname{div}(\mathbf{A}) d^3\mathbf{x} = 0.$$

Enthält  $V$  aber den Nullpunkt, so auch eine  $\epsilon$ -Kugel  $B_\epsilon$  um den Nullpunkt, und indem wir das erste Ergebnis auf des Volumen  $V \setminus B_\epsilon$  anwenden, sehen wir

$$0 = \int_{V \setminus B_\epsilon} \operatorname{div}(\mathbf{A}) d^3\mathbf{x} = \int_{\partial V} (\mathbf{A}, \mathbf{N}) d\sigma - \int_{\partial B_\epsilon} (\mathbf{A}, \mathbf{N}) d\sigma.$$

Dies zeigt insbesondere: Aus allen Volumina, welche den Nullpunkt im Inneren enthalten, ist der Fluss von  $\mathbf{A}$  gleich. Wir berechnen diesen Fluss für die Einheitskugel ( $\mathbf{N} = \mathbf{x}$ ):

$$\int_{\partial B_1} \left(-\operatorname{grad}\frac{1}{r}, \mathbf{x}\right) d\sigma = \int_{\partial B_1} \frac{1}{r^3} d\sigma = \int_{\partial B_1} 1 d\sigma = 4\pi.$$

Das bedeutet also: Das auf  $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$  definierte Feld  $\mathbf{A}$  ist quellenfrei ( $\operatorname{div}(\mathbf{A}) = 0$ ), aber in seiner Singularität im Nullpunkt  $\mathbf{0}$  sitzt eine Quelle der Stärke  $4\pi$ .

**Beispiel 3.19** In der Ebene betrachten wir das Vektorfeld

$$\mathbf{A}(x, y) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

Für jede Teilfläche  $R$  der Ebene lautet die Formel von Gauß-Green

$$\frac{1}{2} \oint_{\partial R} (-y) dx + x dy = \frac{1}{2} \int_R (1 + 1) dx dy = |R|.$$

Die Fläche von  $R$  kann man also durch dieses Rand-Integral

$$|R| = \frac{1}{2} \int_{\partial R} x dy - y dx$$

berechnen! Das hat eine praktische Anwendung: Will man die Fläche eines krummlinigen Grundstücks auf einem Lageplan wissen, so gibt es ein Gerät, das hat einen Arm mit einer Rolle daran, die man um die Grundstücksgrenze auf dem Plan herumführt. Das Gerät berechnet dann das Randintegral, und man kann die Grundstücksfläche ablesen. (Ich glaube, diese Dinge heißen Planimeter.)

**Beispiel 3.20** Die Torus-Oberfläche mit Radien  $R$  und  $r$  wird parametrisiert durch

$$\mathbf{x} = F(\varphi, \theta) = R \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cos(\theta) \\ \sin(\varphi)\cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen die beiden Tangentialvektoren

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = (R + r\cos(\theta)) \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial F}{\partial \theta} = r \begin{pmatrix} -\cos(\varphi)\sin(\theta) \\ -\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

und den Fluss des Ortsvektor-Feldes  $\mathbf{x}$  über die Torus-Oberfläche

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{x}, \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \varphi}, \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \theta}) &= R(R + r\cos(\theta))r \cdot \det \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & -\cos(\varphi)\sin(\theta) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ 0 & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &+ r(R + r\cos(\theta))r \cdot \det \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cos(\theta) & -\sin(\varphi) & -\cos(\varphi)\sin(\theta) \\ \sin(\varphi)\cos(\theta) & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &= Rr(R + r\cos(\theta))\cos(\theta) \\ &+ r^2(R + r\cos(\theta))(\sin(\theta)(\sin^2(\varphi)\sin(\theta) + \cos^2(\varphi)\sin(\theta)) \\ &\quad + \cos(\theta)(\cos^2(\varphi)\cos(\theta) + \sin^2(\varphi)\cos(\theta)) \\ &= Rr(R + r\cos(\theta))\cos(\theta) + r^2(R + r\cos(\theta)). \end{aligned}$$

Damit wird das Fluss-Integral

$$\begin{aligned} \int \int (\mathbf{x} \cdot d\mathbf{o}) &= 2\pi \int_0^{2\pi} (R^2 r \cos(\theta) + Rr^2 \cos^2(\theta) + Rr^2 + r^3 \cos(\theta)) d\theta \\ &= 2\pi(Rr^2\pi + Rr^2 2\pi) \\ &= 6\pi^2 Rr^2 \end{aligned}$$

Wegen  $\operatorname{div}(\mathbf{x}) = 3$  wird das 3-fache Torus-Volumen mit dem Satz von Gauß

$$\int \int \int \operatorname{div}(\mathbf{x}) dx dy dz = 6Rr^2\pi^2$$

und das Torus-Volumen selbst

$$V = (2R\pi) \cdot (r^2\pi),$$

in Übereinstimmung mit der ersten Guldinschen Regel.

**Aufgabe 3.8 (V)** Sei

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq \pi\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, 0 \leq y\}.$$

$\partial K$  bezeichne die Randkurve (die  $K$  im positiven Sinn umläuft). Man berechne

$$\int_{\partial K} y \sin(x) dy - y^2 dx.$$

**Aufgabe 3.9 (V)** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Rotation eines zweimal stetig differenzierbaren Vektorfeldes  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $K$  eine Kugel im  $\mathbb{R}^3$  und  $d\sigma$  das (vektorielle) Oberflächenelement auf  $\partial K$ . Bestimmen Sie

$$\int_{\partial K} f \cdot d\sigma.$$

**Aufgabe 3.10 (V)** Die Kurve  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  sei durch  $\alpha(t) := (\cos t, \sin t)$  definiert. Man berechne das Kurvenintegral

$$\int_{\alpha} (x^2 dx + x dy).$$

### 3.4 Der Integralsatz von Stokes

Wir gehen zurück zur Formel von Gauß-Green:

$$\int_R (v_x - u_y) dx dy = \oint_{\partial R} u dx + v dy.$$

Das Integral auf der rechten Seite formen wir jetzt nicht um in ein Flussintegral, sondern deuten es als Wegintegral

$$\int_{\partial R} \left( \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, ds \right).$$

Den Integrand auf der linken Seite kann man als Rotation interpretieren, wenn man die Ebene  $\mathbb{R}^2$  als  $x, y$ -Ebene im  $\mathbb{R}^3$  auffasst. Dann ist nämlich

$$\text{rot} \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_x - u_y \end{pmatrix}.$$

Das zweidimensionale Integral auf der linken Seite ist also das Flächenintegral der  $z$ -Komponente des Rotationsfeldes über  $R$ . Die  $z$ -Komponente ist das Skalarprodukt mit dem nach oben weisenden Normaleneinheitsvektor  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$  der zur Parametrisierung des Rechtecks durch  $x$  und  $y$  gehört. Für das Feld  $\mathbf{A} = (u, v, 0)$  haben wir damit die Formel

$\int_R (\text{rot}(\mathbf{A}), \mathbf{N}) do = \oint_{\partial R} (\mathbf{A}, ds)$	Satz von Stokes
--	--------------------

bewiesen. Geben wir dem Feld  $A$  noch eine  $z$ -Komponente, so ändert sich zwar  $\text{rot}(\mathbf{A})$ , nicht aber die  $z$ -Komponente  $(\text{rot}(\mathbf{A}), \mathbf{N})$  von  $\text{rot}(\mathbf{A})$ . Auch das Weg-Integral über  $\partial R \subset \mathbb{R}^2$  ändert sich nicht. Der Satz von Stokes gilt in dieser Form also für beliebige (stetig differenzierbare) Vektorfelder  $\mathbf{A}$ .

Ähnlich wie den Satz von Gauß kann man diesen Satz von Stokes verallgemeinern

- zunächst auf 'krummlinige Rechtecke' im Raum, d.h. auf Flächenstücke in unserem Sinn,
- dann durch Zusammensetzen auf beliebige *orientierte* Flächen im Raum.

Mit 'orientierter' Fläche  $F$  ist hier Folgendes gemeint: Auf der ganzen Fläche ist ein stetiges Normalenfeld  $\mathbf{N}$  gewählt. (Bei dem sogenannten Möbiusband geht das z.B. nicht, beim Rand eines Volumens geht das immer.) Und die Durchlaufrichtung  $\dot{\gamma}$  des Randes  $\partial F$  ist so zu wählen, dass die Rechte-Hand-Regel mit Daumen =  $\mathbf{N}$ , Zeigefinger =  $\dot{\gamma}$  und Mittelfinger ins Innere der Fläche weisend gilt.

**Beispiel 3.21** *Wir betrachten die Sattelfläche*

$$F : (x, y) \mapsto (x, y, x^2 - y^2), \quad x^2 + y^2 \leq 1$$

*über dem Einheitskreis mit den Tangentialvektoren*

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2y \end{pmatrix},$$

und dem Normalenfeld

$$\frac{\partial F}{\partial x} \times \frac{\partial F}{\partial y} = \begin{pmatrix} -2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für das Vektorfeld

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \text{rot}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

wird das Flächenintegral

$$\begin{aligned} \int \int (\text{rot}(\mathbf{A}), \mathbf{N}) d\sigma &= \int \int_{x^2+y^2 \leq 1} (2y - 2x + 1) dx dy \\ &= 2 \underbrace{\int \int_{x^2+y^2 \leq 1} y dx dy}_{=0} - 2 \underbrace{\int \int_{x^2+y^2 \leq 1} x dx dy}_{=0} + \int \int_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy \\ &= \pi, \end{aligned}$$

und das Weg-Integral

$$\begin{aligned} \gamma(\varphi) &= (\cos(\varphi), \sin(\varphi), \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)) \\ &= (\cos(\varphi), \sin(\varphi), \cos(2\varphi)) \\ \dot{\gamma}(\varphi) &= (-\sin(\varphi), \cos(\varphi), -2\sin(2\varphi)) \\ \int_{\gamma} (\mathbf{A}, ds) &= \int_0^{2\pi} \left( \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ -2\sin(2\varphi) \end{pmatrix} \right) d\varphi \\ &= - \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(2\varphi) \sin(\varphi) d\varphi}_{=0} + \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi) d\varphi}_{=\pi} - \underbrace{\int_0^{2\pi} 2\sin(\varphi) \sin(2\varphi) d\varphi}_{=0} \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Es stimmt!

**Aufgabe 3.11 (V)** Gegeben sei das Gebiet  $G = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  und auf  $G$  das Vektorfeld  $\mathbf{v}$  mit  $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} / \|\mathbf{x}\|^3$ .  $S$  bezeichne die Einheitssphäre  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| = 1\}$  und  $\mathbf{n}$  das äußere Einheitsnormalenfeld von  $S$ .

a) Berechnen Sie

$$\int_S \langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle dF,$$

wobei  $dF$  das Flächenelement von  $S$  und  $\langle, \rangle$  das Standard-Skalarprodukt des  $\mathbb{R}^3$  bezeichnet. Dabei darf vorausgesetzt werden, dass die Oberfläche der Kugel  $4\pi$  ist.

b) Verifizieren Sie, dass  $\text{div}(\mathbf{v}) = 0$  ist.

c) Zeigen Sie mit Hilfe des Stokes'schen Satzes, dass es kein auf dem Gebiet  $G$  differenzierbares Vektorfeld  $\mathbf{w}$  gibt mit  $\mathbf{v} = \text{rot}(\mathbf{w})$ .

**Aufgabe 3.12 (V)** Sei  $\Phi : [0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^3$  definiert durch

$$\Phi(u, v) := (\cos(u) \cdot \cos(v), \sin(u) \cdot \cos(v), \sin(v))$$

und  $F$  die durch  $\Phi$  gegebene orientierte Fläche, wobei die Orientierung so gewählt ist, dass der Normalenvektor  $\mathbf{N}_F$  im Punkt  $(0, 0, 1)$  die Richtung der positiven  $z$ -Achse hat. weiter sei  $\mathbf{w} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  gegeben durch  $\mathbf{w}(x, y, z) := (y, x^2, x^2 + y^2)$ . Zeigen Sie, dass das folgende Oberflächenintegral (2. Art)

$$\int_F \text{rot}(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{N}_F \, d\sigma$$

existiert und den Wert  $-\pi$  hat.

### 3.5 Potential und Vektorpotential

Hier, in diesem letzten Paragraphen der Vorlesung, wollen wir uns noch einmal ganz ausführlich mit dem Problem der konservativen Felder und ihrer Potentiale beschäftigen. Sei also  $\mathbf{A}$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}^n$ . Dafür, dass  $\mathbf{A}$  ein Potential hat, kennen wir die

**Notwendige Bedingung:** Wenn eine differenzierbare Funktion  $\varphi$  existiert mit

$$\mathbf{A} = \text{grad}(\varphi),$$

dann gilt die Symmetriebedingung (Satz 1.16)

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \quad \text{für} \quad \mu, \nu = 1, \dots, n.$$

Und wir kennen die

**Hinreichende Bedingung:** Erfüllt  $\mathbf{A}$  das Wegekriterium (Satz 3.2), dass

$$\int_\gamma (\mathbf{A}, ds) = 0$$

für jeden geschlossenen Weg  $\gamma$  in  $M$ , dann gibt es eine differenzierbare Funktion  $\varphi$  auf  $M$  mit

$$\mathbf{A} = \text{grad}(\varphi).$$

Diese beiden Bedingungen sehen, rein optisch, sehr verschieden aus. Aber über den Satz von Stokes hängen sie sehr eng zusammen:

**Satz 3.3 (Infinitesimales Kriterium für konservative Felder in der Ebene)** Es sei  $\mathbf{A} = (u, v)$  ein differenzierbares Vektorfeld auf einem Kreis  $K = \{x^2 + y^2 < r^2\}$  (d.h. also: ohne Singularitäten im Innern des Kreises), das der Symmetrie-Bedingung genügt:

$$u_y = v_x.$$

Dann ist  $\mathbf{A}$  das Gradientenfeld einer differenzierbaren Funktion  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ .

Beweis. Wir erinnern uns an den Beweis von Satz 3.2. Dort setzten wir zwar voraus

$$\int_{\gamma}(\mathbf{A}, ds) = 0$$

für jeden geschlossenen Weg  $\gamma$ . Gebraucht haben wir allerdings nur Wege, die zusammengesetzt waren aus Stücken parallel zu Koordinatenachsen.

Jetzt wissen wir

$$\int_{\partial R}(\mathbf{A}, ds) = \int_R(v_x - u_y)dxdy = 0$$

für jedes Rechteck  $R \subset K$ . Deswegen erhalten wir denselben Wert  $f(x, y)$ , wenn wir das Feld  $\mathbf{A}$  vom Nullpunkt zum Punkt  $(x, y) \in K$  integrieren, einmal

zuerst auf der  $x$ -Achse von  $(0, 0)$  nach  $(x, 0)$  und dann parallel zur  $y$ -Achse von  $(x, 0)$  nach  $(x, y)$ ,

oder zuerst auf der  $y$ -Achse von  $(0, 0)$  nach  $(0, y)$  und dann parallel zur  $x$ -Achse von  $(0, y)$  nach  $(x, y)$ .

Beim Berechnen der partiellen Ableitungen unserer so definierten Funktion  $f$  haben wir durch  $(x, y)$  nur die beiden Wege parallel zur  $x$ -Achse und zur  $y$ -Achse benutzt. Genau wie im Beweis von Satz 3.2 folgt daher

$$f_x = u, f_y = v.$$

Wesentlich für diesen Beweis war, dass die Rechtecke, auf deren Rändern wir vom Nullpunkt nach  $(x, y)$  gelangen, immer mit ihrem ganzen Inneren in der Kreisscheibe liegen, wo  $\mathbf{A}$  differenzierbar ist und der Symmetriebedingung genügt.  $\square$

**Satz 3.4 (Infinitesimales Kriterium für konservative Felder in Dimension  $n$ )** *Das Vektorfeld  $\mathbf{A}$  sei differenzierbar auf der Kugel  $K = \{x_1^2 + \dots + x_n^2 < r^2\} \subset \mathbb{R}^n$  und genüge dort der Symmetriebedingung*

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_j} = \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \quad \text{für alle } 1 \leq i, j \leq n.$$

*Dann gibt es eine auf  $K$  differenzierbare Funktion  $f$  mit  $\mathbf{A} = \text{grad}(f)$ .*

Beweis. Schränken wir  $\mathbf{A}$  auf eine Ebene parallel zur  $x_i, x_j$ -Ebene ein, so erfüllt das Feld dort die Symmetriebedingung in zwei Variablen. Das Randintegral um jedes Rechteck  $R$  in dieser Ebene, das ganz in  $K$  liegt, ist also  $= 0$ . Also ist  $\int_{\partial R}(\mathbf{A}, ds) = 0$  für jedes Rechteck  $R \subset K$ , das parallel zu einer Koordinatenebene ist. Daraus kann man folgern, dass  $\int_{\gamma}(\mathbf{A}, ds)$  denselben Wert hat, für alle Wege, die den Nullpunkt mit einem Punkt  $\mathbf{x}$  verbinden, und nur aus Stücken achsenparalleler Geraden in  $K$  bestehen. Somit kann man wieder eine Funktion  $f$  definieren, deren partielle Ableitung nach  $x_\nu$  gerade  $A_\nu$  ist.  $\square$

Es sieht also so aus, als ob

- die Symmetriebedingung,
- die Wegebedingung,
- die Existenz eines Potentials  $\varphi$

äquivalent sind. Das sieht aber nur so aus. In Satz 3.3 und Satz 3.4 wird die Äquivalenz von Symmetriebedingung und Wegebedingung auf jeder offenen Kugel  $K \subset \mathbb{R}^n$ , nicht auf jeder offenen Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  bewiesen. Das ist kein kleiner Schönheitsfehler, der sich durch Mogeln mit Buchstaben bereinigen lässt, sondern wieder eine der ganz fundamentalen Grundtatsachen des Lebens. Bevor ich versuche, das zu erklären, erst ein

**Beispiel 3.22** *Es sei  $\varphi$  der Winkel aus der Transformation in Polarkoordinaten. Auf der Halbebene  $\{x > 0\} \subset \mathbb{R}^2$  ist  $\varphi$  durch*

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left( \frac{y}{x} \right)$$

*erklärt. Die Definition von  $\varphi$  auf ganz  $\mathbb{R}^2$  dagegen macht Schwierigkeiten. Das liegt z.B. am Nullpunkt. Welcher Winkel gehört zum Nullvektor  $\mathbf{0}$ ? Andererseits kann man den Winkel auch schlecht global erklären.  $\varphi = 2\pi$  gehört zu denselben Vektoren wie  $\varphi = 0$ . Deswegen funktioniert die Erklärung einer stetigen Funktion  $\varphi$  auf  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{0}$  nicht so richtig.*

*O.k., schauen wir uns jetzt das Feld*

$$\operatorname{grad}(\varphi) = (A_1, A_2)$$

*mit*

$$A_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{-y/x^2}{1 + (y/x)^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad A_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1/x}{1 + (y/x)^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

*an. Es ist das Feld*

$$\operatorname{grad}(\varphi) = \mathbf{A} = \frac{(-y, x)}{\|\mathbf{x}\|^2}.$$

*Und das Bemerkenswerte daran ist: Dieses Vektorfeld ist wunderschön auf ganz  $\mathbb{R}^2$  definiert, bis auf die Singularität im Nullpunkt. Von den Definitionsproblemen seines Potentials  $\varphi$  hat es nichts mitbekommen. Und auf ganz  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{0}$ , wo das Feld  $\mathbf{A}$  definiert ist, erfüllt es die Symmetriebedingung:*

$$\frac{\partial A_1}{\partial y} = \frac{-(x^2 + y^2) + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial x} = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial y} = \frac{\partial A_2}{\partial x}.$$

*Die Symmetriebedingung ist erfüllt, aber das Potential, der Winkel  $\varphi$  existiert nicht.*

*Wenn jemand meint, vielleicht existiert doch irgend ein Potential für  $\mathbf{A}$ , dann soll er mal das Feld  $\mathbf{A}$  über den Rand  $\partial K$  des Einheitskreises  $K$  integrieren:*

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)), \quad \dot{\gamma}(t) = (-\sin(t), \cos(t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

*Er findet, wenn er sich nicht verrechnet,*

$$\int_{\partial K} (\mathbf{A}, ds) = \int_0^{2\pi} \left( \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \right) dt = \int_0^{2\pi} 1 \cdot dt = 2\pi.$$

*Und dieses Integral über den geschlossenen Weg  $\partial K$  ist  $2\pi$ , und das ist  $\neq 0$ . Da beißt die Maus keinen Faden ab.*

Das Wegekriterium ist auf  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{0}$  nicht erfüllt, auf  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{0}$  besitzt das wirbelfreie Feld  $\mathbf{A}$  kein Potential! Der Grund dafür ist natürlich die heimtückische Singularität des Feldes  $\mathbf{A}$  im Nullpunkt.

Man kann präzise machen, was es heißt, dass ein Weg  $\gamma$  in  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{0}$  'nicht um den Nullpunkt rumgeht'. (Man kann ihn dann in  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{0}$  stetig auf einen Punkt zusammenziehen.) Und für einen Weg  $\gamma$ , der nicht um den Nullpunkt rumgeht, kann man in der Tat beweisen  $\int_{\gamma}(\mathbf{A}, ds) = 0$ . Und genau das ist der Sinn der Voraussetzung, dass  $M = K$  in Satz 3.2 ein Kreis ist: Ist  $K$  ein Kreis, dessen Inneres ganz in  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{0}$  enthalten ist, dann kann kein Weg in  $K$  um den Nullpunkt rumgehen. Deswegen folgt aus der Symmetriebedingung für  $\mathbf{A}$  die Wegunabhängigkeit des Integrals  $\int_{\gamma}(\mathbf{A}, ds)$ , falls der Weg ganz in  $K$  verläuft.

Man kann diesen Effekt, den ich eben am Beispiel erklärt habe, noch etwas präziser machen. Dazu die

**Definition 3.3** Die offenen Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}^n$  heißt einfach-zusammenhängend, wenn man jeden geschlossenen Weg  $\gamma$  in  $M$  stetig auf einen Punkt zusammen ziehen kann. (Auch das kann man noch präziser sagen.)

So ist z.B.  $M = (\mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{0}) \subset \mathbb{R}^2$  nicht einfach-zusammenhängend, weil man den Rand des Einheitskreises nicht zusammenziehen kann. Auch wenn man aus  $\mathbb{R}^3$  eine Gerade herausnimmt ist das Resultat  $M$  nicht einfachzusammenhängend. Aber wenn man nur einen Punkt herausnimmt, bleibt etwas einfach-zusammenhängendes übrig, der Punkt ist einfach zu klein.

**Satz 3.5** Das Vektorfeld  $\mathbf{A}$  sei stetig differenzierbar auf der einfach-zusammenhängenden offenen Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  und erfülle dort die Symmetrie-Bedingung. Dann besitzt  $\mathbf{A}$  auf  $M$  ein Potential.

Diesen Satz möchte ich hier nicht beweisen, die dafür notwendigen Methoden sind einfach zu abstrakt. Ich hoffe, diesen Satz durch die Diskussion des Beispiels plausibel gemacht zu haben.

Wir können diese ganze Problematik so auffassen (nehmen wir der Einfachheit halber den dreidimensionalen Fall): Die Implikation

$$\mathbf{A} = \text{grad}(\varphi) \implies \text{rot}(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$$

ist umkehrbar, wenn  $M$ , die Menge, wo  $\mathbf{A}$  definiert ist, einfach-zusammenhängend ist.

Nun gab es noch eine andere solche Formel:

$$\mathbf{A} = \text{rot}(\mathbf{B}) \implies \text{div}(\mathbf{A}) = 0.$$

Ist die auch umkehrbar? Das heißt also Folgendes: Sei  $\mathbf{A}$  ein quellenfreies Feld,  $\text{div}(\mathbf{A}) = 0$ . Gibt es dann ein Feld  $\mathbf{B}$  mit  $\mathbf{A} = \text{rot}(\mathbf{B})$ ?

Wenn dieses  $\mathbf{B}$  existiert, dann heißt es *Vektorpotential* von  $\mathbf{A}$ . Und wenn so ein Vektorpotential  $\mathbf{B}$  existiert, dann ist es eindeutig bestimmt bis auf Summanden  $\mathbf{B}'$  mit

$$\text{rot}(\mathbf{B} + \mathbf{B}') = \text{rot}(\mathbf{B}), \quad \text{rot}(\mathbf{B}') = \mathbf{0},$$

also bis auf ein Gradientenfeld  $\mathbf{B}' = \text{grad}(\varphi)$ , falls das Definitionsgebiet einfach-zusammenhängend ist.

Es ist wieder so, dass man die Existenz eines Vektorpotentials zu einem quellenfreien Feld  $\mathbf{A}$  auf einer Kugel beweisen kann. Dazu braucht man aber den Satz über Vertauschbarkeit von Differentiation und Integration, ohne den ich bisher ausgekommen bin. Er gehört natürlich nach seiner Thematik überhaupt nicht in diesen Paragraphen, aber wir brauchen ihn.

**Satz 3.6 (Differentiation unter dem Integral)** *Es sei  $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$  ein Rechteck und  $f(x, y)$  darauf stetig differenzierbar. Dann ist die Funktion*

$$F(y) := \int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx$$

auf dem Intervall  $[a_2, b_2]$  differenzierbar mit Ableitung

$$\frac{dF}{dy} = \frac{d}{dy} \int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx = \int_{a_1}^{b_1} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx.$$

Beweis. Dass eine Funktion  $f$  einer Variablen in  $y$  differenzierbar ist mit Ableitung  $f'(y)$ , das kann man auch so ausdrücken: die mit dem Differenzenquotienten gebildete Funktion

$$f_1(y') := \begin{cases} \frac{f(y') - f(y)}{y' - y} & \text{für } y' \neq y \\ f'(y) & \text{für } y' = y \end{cases}$$

ist in  $y$  stetig. Ist die Funktion  $f(x, y)$  von zwei Variablen stetig partiell nach  $y$  differenzierbar, so sieht man unter Verwendung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, dass die Funktion

$$f_1(x, y') := \begin{cases} \frac{f(x, y') - f(x, y)}{y' - y} & \text{für } y' \neq y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) & \text{für } y' = y \end{cases}$$

stetig ist.

Nach Satz 2.1 ist dann auch die Funktion

$$\begin{aligned} F_1(y') &= \int_{a_1}^{b_1} f_1(x, y') dx \\ &= \begin{cases} \int_{a_1}^{b_1} \frac{f(x, y') - f(x, y)}{y' - y} dx & (y' \neq y) \\ \int_{a_1}^{b_1} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx & (y' = y) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{F(y') - F(y)}{y' - y} & (y' \neq y) \\ \int_{a_1}^{b_1} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx & (y' = y) \end{cases} \end{aligned}$$

in  $y$  stetig. Das heißt,

$$F(y) = \int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx$$

ist differenzierbar mit Ableitung

$$F'(y) = \int_{a_1}^{b_1} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx.$$

□

So, nun können wir ein Vektorpotential konstruieren:

**Satz 3.7 (Vektorpotential)** *Das Vektorfeld  $\mathbf{A}$  sei stetig differenzierbar auf der offenen Einheitskugel  $K \subset \mathbb{R}^3$  und habe die Eigenschaft*

$$\operatorname{div}(\mathbf{A}) = 0.$$

*Dann gibt es ein differenzierbares Vektorfeld  $\mathbf{B}$  auf  $K$  mit*

$$\operatorname{rot}(\mathbf{B}) = \mathbf{A}.$$

Beweis (Großmann, p. 190). Wir gehen vom Vektorfeld  $\mathbf{A}$  über zu der alternierenden Matrix

$$(a_{i,j}) := \begin{pmatrix} 0 & A_3 & -A_2 \\ -A_3 & 0 & A_1 \\ A_2 & -A_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit definieren wir

$$B_i(\mathbf{x}) := \sum_{j=1}^3 x_j \int_0^1 a_{j,i}(t\mathbf{x}) t dt.$$

Dieses Feld  $\mathbf{B}$  tut's. Das rechnen wir nur für die erste Komponente nach (dabei benutzen wir die Differentiation unter dem Integral):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_1(\mathbf{B}) &= \frac{\partial B_3}{\partial x_2} - \frac{\partial B_2}{\partial x_3} \\ &= \int_0^1 \left( \frac{\partial \sum_1^3 x_j a_{j,3}(t\mathbf{x})}{\partial x_2} - \frac{\partial \sum_1^3 x_j a_{j,2}(t\mathbf{x})}{\partial x_3} \right) t dt \\ &= \int_0^1 \left( a_{2,3} + tx_1 \frac{\partial a_{1,3}}{\partial x_2} + tx_2 \frac{\partial a_{2,3}}{\partial x_2} - a_{3,2} - tx_1 \frac{\partial a_{1,2}}{\partial x_3} - tx_3 \frac{\partial a_{3,2}}{\partial x_3} \right) t dt \\ &= \int_0^1 \left( 2A_1 + tx_1 \underbrace{\left( -\frac{\partial A_2}{\partial x_2} - \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \right)}_{\partial A_1 / \partial x_1} + tx_2 \frac{\partial A_1}{\partial x_2} + tx_3 \frac{\partial A_1}{\partial x_3} \right) t dt \\ &= \int_0^1 (2tA_1 + t^2 \sum_1^3 x_j \frac{\partial A_1}{\partial x_j}) dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} (t^2 A_1(t\mathbf{x})) dt \\ &= A_1(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

□

Auch dieser Satz gilt wieder nur auf Kugeln. (Dass im Beweis die Einheitskugel benutzt wurde, ist natürlich unerheblich, es geht genauso für jede Kugel.) Und auch dieser Satz wird falsch, wenn das Definitionsgebiet des Feldes  $\mathbf{A}$  Löcher hat, wo  $\mathbf{A}$  Singularitäten haben kann. Ein Beispiel dafür ist Aufgabe 3.11. Das quellenfreie Vektorfeld  $\mathbf{v} = \mathbf{x}/r^3$  hat nur eine einzige Singularität im Nullpunkt. Trotzdem hat es auf keinem Gebiet ein Vektorpotential, das eine den Nullpunkt umschließende Sphäre enthält.

Das ist mehr als merkwürdig. Es ist der Ausgangspunkt einer Theorie, welche in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts im Wesentlichen von dem französischen Mathematiker E. Cartan entwickelt wurde. Und diese Theorie (der Differentialformen und Cohomologiegruppen) ist heutzutage ein ganz wesentliches Werkzeug zum Verständnis geometrisch-räumlicher Situationen. Grob gesagt geht es darum, Räume, bzw. Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  in Bezug auf die Anzahlen und die Dimensionen ihrer Löcher zu klassifizieren. Diese Löcher sind Hindernisse gegen die Existenz von Potentialen oder Vektorpotentialen, oder noch allgemeinerer Potentiale.

**Aufgabe 3.13** *Bestimmen Sie ein Vektorpotential*

a) *für das Vektorfeld*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix},$$

b) *für das Vektorfeld  $\mathbf{a} \times \mathbf{x}$ , wo  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$  ein konstanter Vektor ist.*

## 4 Fourier-Reihen

Wenn man die Bibliothek nach Titeln mit dem Stichwort 'Fourier' durchsucht, erhält man eine unüberschaubare Vielfalt von Büchern. Die folgenden sind deswegen wohl mehr oder weniger zufällig zusammengestellt:

Dyke, P.P.G.: An Introduction to Laplace Transforms and Fourier Series. Springer (2000)

Lighthill, M.J.: Einführung in die Theorie der Fourier-Analyse und der verallgemeinerten Funktionen. BI (1966)

Meschkowski, H.: Reihenentwicklungen in der mathematischen Physik. BI (1963)

Tolstow, G.P.: Fourierreihen. VEB Verl. d. Wissensch. (1955)

Williams, W.E.: Fourierreihen und Randwertaufgaben. Taschentext 25. Verlag Chemie - Physik Verlag (1974)

Viel abgeschrieben habe ich auch aus dem bekannten Forster I. Das letzte Kapitel dieses Buches heißt 'Fourier-Reihen'. Allerdings verwendet Forster ziemlich konsequent den komplexen Formalismus.

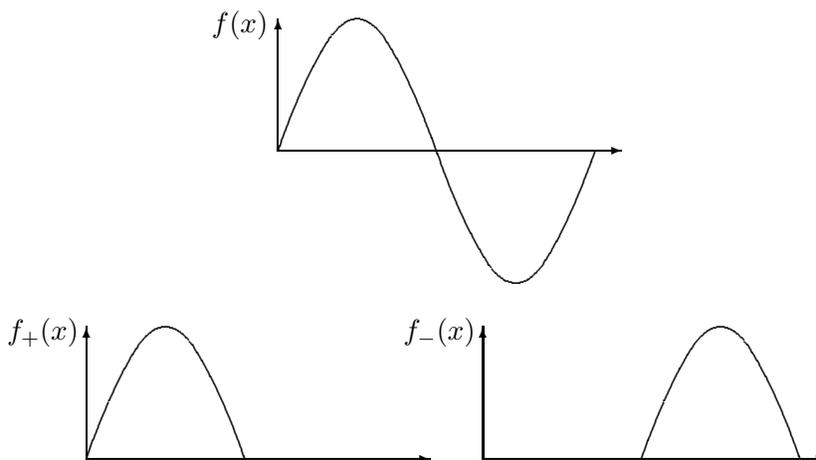
### 4.1 Erinnerungen und Ergänzungen zur Integralrechnung

In diesem Abschnitt bezeichnet  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  immer eine Riemann-integrierbare Funktion. Das heißt also,  $|f| \leq C$  ist beschränkt und zu jedem  $\epsilon > 0$  existieren Treppenfunktionen  $\varphi, \psi$  auf  $[a, b]$  mit

$$\varphi \leq f \leq \psi, \quad \int_a^b (\varphi(x) - \psi(x)) dx < \epsilon.$$

**Definition 4.1** Der positive Anteil  $f_+$  und der negative Anteil  $f_-$  von  $f$  sind definiert durch

$$f_+(x) := \max\{f(x), 0\}, \quad f_-(x) := -\min\{f(x), 0\} = \max\{-f(x), 0\} = (-f)_+(x).$$



Mit dieser Definition ist

$$f = f_+ - f_- \quad \text{und} \quad |f| = f_+ + f_-.$$

Außerdem sind auch  $f_+$  und  $f_-$  Riemann-integrierbar. Denn für  $f_+$  etwa ist

$$\varphi_+ \leq f_+ \leq \psi_+ \quad \text{und} \quad \int_a^b (\psi_+(x) - \varphi_+(x)) dx \leq \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x)) dx.$$

Daraus folgt, dass auch  $|f|$  Riemann-integrierbar ist.

Wir brauchen häufig die Ungleichung

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Beweis dieser Ungleichung: Wegen

$$f(x) \leq |f(x)| \quad \text{und} \quad -f(x) \leq |f(x)|$$

folgt

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad \text{und} \quad -\int_a^b f(x) dx = \int_a^b -f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

**Satz 4.1 a)** Für alle  $1 \leq p \in \mathbb{R}$  ist auch  $|f|^p$  Riemann-integrierbar.

**b)** Mit  $f$  und  $g$  ist auch  $f \cdot g$  Riemann-integrierbar.

Beweis a) Die Behauptung ändert sich nicht, wenn wir von  $f$  zu  $|f|$  übergehen. Deswegen können wir gleich  $f \geq 0$  annehmen. Weil  $|f| \leq C$  beschränkt ist, folgt

$$|f|^p = C^p \cdot \left( \frac{|f|}{C} \right)^p \quad \text{mit} \quad \frac{|f|}{C} \leq 1.$$

Deswegen genügt es, die Behauptung für  $0 \leq f \leq 1$  zu zeigen. Dann können wir auch Treppenfunktionen  $\varphi, \psi$  mit

$$0 \leq \varphi \leq f \leq \psi \leq 1, \quad \varphi^p \leq f^p \leq \psi^p$$

wählen.

Jetzt kommt der Trick: Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung, angewendet auf die Funktion  $x^p$  zeigt für  $a < b$

$$\frac{b^p - a^p}{b - a} = p \cdot \xi^{p-1} \quad \text{mit} \quad a \leq \xi \leq b$$

und für  $0 \leq a \leq b \leq 1$

$$b^p - a^p \leq p \cdot (b - a).$$

Damit erhalten wir

$$\int_a^b (\psi^p(x) - \varphi^p(x)) dx \leq p \cdot \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x)) dx \leq p \cdot \epsilon.$$

Somit ist  $|f|^p$  Riemann-integrierbar.

b) Die Integrierbarkeit von  $f \cdot g$  folgt aus der einfachen Gleichung

$$f \cdot g = \frac{1}{4} ((f + g)^2 - (f - g)^2).$$

□

Mit  $f$  sind also für alle  $r \in \mathbb{R}$  auch die Funktionen  $f(x) \cdot \cos(r \cdot x)$  und  $f(x) \cdot \sin(r \cdot x)$  Riemann-integrierbar.

**Satz 4.2 (Lemma von Riemann)** *Es sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrierbar. Dann gilt*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cdot \sin(r \cdot x) dx = 0.$$

Beweis. Offensichtlich geht

$$\left| \int_a^b \sin(r \cdot x) dx \right| = \left| -\frac{1}{r} \cos(r \cdot x) \Big|_a^b \right| \leq \frac{2}{r} \rightarrow 0$$

für  $r \rightarrow \infty$ .

Daraus folgt die Behauptung für Treppenfunktionen. Denn jede Treppenfunktion schreibt sich als endliche Summe

$$\varphi = \sum_i c_i \varphi_i$$

mit

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } a_i \leq x \leq b_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Im Allgemeinfall wählen wir eine Treppenfunktion  $\varphi$  mit

$$\varphi \leq f \quad \text{und} \quad \int_a^b (f(x) - \varphi(x)) dx < \epsilon.$$

Wir benutzen

$$\int_a^b f(x) \sin(r \cdot x) dx = \int_a^b (f(x) - \varphi(x)) \cdot \sin(r \cdot x) dx + \int_a^b \varphi(x) \cdot \sin(r \cdot x) dx.$$

Hier geht der rechte Summand gegen 0 für  $r \rightarrow \infty$ . Und für den linken Summanden haben wir

$$\left| \int_a^b (f(x) - \varphi(x)) \cdot \sin(r \cdot x) dx \right| \leq \int_a^b (f(x) - \varphi(x)) \cdot |\sin(r \cdot x)| dx \leq \int_a^b (f(x) - \varphi(x)) dx \leq \epsilon. \quad \square$$

Natürlich geht der Beweis genauso für die Cosinus-Funktion:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cdot \cos(r \cdot x) dx = 0.$$

## 4.2 Das ON-System der Winkelfunktionen

Wir betrachten hier Riemann-integrierbare Funktionen auf dem festen Intervall  $[0, 2\pi]$  und definieren

$$[f, g] := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot g(x) dx.$$

Dieser Ausdruck  $[f, g]$  ist ein (verallgemeinertes) Skalarprodukt im folgenden Sinn:

- i)  $[f, g] = [g, f]$  ist symmetrisch in  $f$  und  $g$ ;
- ii)  $[f, g]$  ist linear in Bezug auf  $f$  und  $g$ ;
- iii)  $[f, f] \geq 0$  für alle  $f$ .

Wegen iii) kann man eine *Norm* wie folgt definieren:

$$\|f\| := \sqrt{[f, f]} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(x) dx}.$$

Weil  $f$  unstetig sein darf, kann man leider nicht  $f \equiv 0$  schließen, falls  $\|f\| = 0$ . Aber es gilt immer noch:

**Satz 4.3** *Wie immer seien  $f$  und  $g$  Riemann-integrierbar auf  $[0, 2\pi]$ .*

a) *Wenn  $\|f\| = 0$  ist, dann gilt  $[f, g] = 0$  für alle  $g$ .*

b) **(Cauchy-Schwarz)** *Für alle  $f, g$  ist*

$$[f, g]^2 \leq \|f\|^2 \cdot \|g\|^2.$$

c) **(Dreiecksungleichung)** *Für alle  $f$  und  $g$  ist*

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

Beweis. a) Sei  $\|f\| = 0$  und  $g$  beliebig. Für alle  $t \in \mathbb{R}$  ist dann

$$0 \leq q(t) := \|f + t \cdot g\|^2 = 2t \cdot [f, g] + t^2 \cdot \|g\|^2.$$

Offensichtlich ist  $q(0) = 0$ . Also hat  $q$  bei  $t = 0$  ein lokales Minimum und es folgt

$$0 = \frac{d}{dt} q(t)|_{t=0} = 2[f, g].$$

b) Wir betrachten die Funktion

$$h(x) := \|f\|^2 g(x) - [f, g] f(x).$$

Für diese Funktion finden wir

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|h\|^2 \\ &= \|f\|^4 \|g\|^2 - 2\|f\|^2 [f, g]^2 + [f, g]^2 \|f\|^2 \\ &= \|f\|^2 \cdot (\|f\|^2 \|g\|^2 - [f, g]^2). \end{aligned}$$

Wenn wir hier durch  $\|f\|^2$  kürzen steht die Behauptung da. Kürzen dürfen wir natürlich nur, wenn  $\|f\| \neq 0$  ist. Aber wenn doch  $\|f\| = 0$  sein sollte, folgt die Ungleichung schon aus a)

c) Die Dreiecksungleichung folgt rein formal aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung wie in Lineare Algebra I. □

Um Schreibarbeit zu sparen fixieren wir die folgenden Funktionen auf  $[a, b]$ :

$$c_0(x) := \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$c_n(x) := \cos(n \cdot x), \quad s_n(x) := \sin(n \cdot x) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

**Satz 4.4 (Orthogonalitätsrelationen)** Für die Funktionen  $c_n, s_n$  gilt

$$[c_n, c_n] = [s_n, s_n] = 1, \quad [c_n, s_m] = 0$$

und falls  $m \neq n$

$$[c_m, c_n] = [s_m, s_n] = 0.$$

Beweis. Für  $c_0$  rechnet man sehr leicht nach

$$[c_0, c_0] = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} dx = \frac{2\pi}{2\pi} = 1,$$

$$[c_0, c_n] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \cos(n \cdot x) dx = 0, \quad [c_0, s_n] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \sin(n \cdot x) dx = 0.$$

Um die anderen Formeln zu beweisen, integrieren wir zunächst das Additionstheorem für die Cosinus-Funktion

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos((m+n)x) dx &= \int_0^{2\pi} \cos(mx)\cos(nx) dx - \int_0^{2\pi} \sin(mx)\sin(nx) dx, \\ \int_0^{2\pi} \cos((m-n)x) dx &= \int_0^{2\pi} \cos(mx)\cos(nx) dx + \int_0^{2\pi} \sin(mx)\sin(nx) dx. \end{aligned}$$

Für  $m \neq n$  haben beide Zeilen den Wert 0. Durch Addition bzw. Subtraktion beider Zeilen findet man

$$[\cos(mx), \cos(nx)] = [\sin(mx), \sin(nx)] = 0.$$

Und für  $m = n \geq 1$  folgt aus der ersten Zeile

$$[\cos(nx), \cos(nx)] = [\sin(nx), \sin(nx)],$$

während die zweite Zeile zeigt

$$[\cos(nx), \cos(nx)] + [\sin(nx), \sin(nx)] = 2, \quad [\cos(nx), \cos(nx)] = [\sin(nx), \sin(nx)] = 1.$$

Damit bleibt nur noch  $[\cos(mx), \sin(nx)] = 0$  nachzuweisen. Dazu integrieren wir das Additionstheorem für die Sinus-Funktion

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{2\pi} \sin((m+n)x) dx = \int_0^{2\pi} \sin(mx)\cos(nx) dx + \int_0^{2\pi} \cos(mx)\sin(nx) dx, \\ 0 &= \int_0^{2\pi} \sin((m-n)x) dx = \int_0^{2\pi} \sin(mx)\cos(nx) dx - \int_0^{2\pi} \cos(mx)\sin(nx) dx. \end{aligned}$$

Addition beider Zeilen liefert das noch ausstehende Ergebnis. □

**Definition 4.2** Es seien  $a_0, a_1, a_2, \dots$  und  $b_1, b_2, \dots$  reelle Zahlen. Dann heißt die Funktion

$$f(x) := a_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

ein trigonometrisches Polynom .

Aus den Orthogonalitätsrelationen folgt sofort:

**Satz 4.5** Für jedes trigonometrische Polynom der obigen Form ist

$$a_k = [f, c_k], k = 0, \dots, n \quad \text{und} \quad b_k = [f, s_k], k = 1, \dots, n.$$

**Definition 4.3 (Sehr Wesentlich)** Die Funktion  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  sei Riemann-integrierbar. Wegen Satz 4.1 b) sind die Zahlen

$$a_k := [f, c_k], k = 0, 1, \dots \quad \text{und} \quad b_k := [f, s_k], k = 1, 2, \dots$$

definiert. Sie heißen die Fourier-Koeffizienten von  $f$ . Für jedes  $N \in \mathbb{N}$  nennen wir (Terminologie nicht so furchtbar einheitlich!)

$$f_N(x) := a_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(n \cdot x) + b_n \sin(n \cdot x))$$

das  $N$ -te Fourier-Polynom von  $f$ . Und die Reihe

$$\lim_{N \rightarrow \infty} f_N(x) = a_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n \cdot x) + b_n \cdot \sin(n \cdot x))$$

heißt die Fourier-Reihe der Funktion  $f$ .

Ob die Fourier-Reihe von  $f$  konvergiert, und wenn, wogegen (hoffentlich gegen  $f$ ), und in welchem Sinn (punktweise, gleichmäßig oder im 'quadratischen Mittel' (kommt noch)), das ist genau das Haupt-Thema dieses Kapitels.

Zunächst stellen wir nur einmal fest: Für jedes trigonometrische Polynom  $f$  vom Grad  $N$  ist das Fourier-Polynom  $f_N = f$ . Und die Fourier-Reihe bricht beim Grad  $N$  ab, sie stimmt mit  $f = f_N$  überein.

Die Winkelfunktionen  $c_n, s_n, n \in \mathbb{N}$ , spannen im  $\mathbb{R}$ -Vektorraum aller auf  $[0, 2\pi]$  Riemann-integrierbaren Funktionen einen Unter-Vektorraum auf. Aus den Orthogonalitäts-Relationen folgt, dass diese Funktionen  $c_n, s_n$  linear unabhängig sind. Also hat dieser Untervektorraum die Dimension  $2N + 1$ .

Das Fourier-Polynom  $f_N$  ist die Orthogonal-Projektion von  $f$  in diesen Unter-Vektorraum im folgenden Sinn:

$$[f - f_N, c_n] = [f - f_N, s_n] = 0 \quad \text{für alle } n \leq N.$$

In der Tat: für alle  $n \leq N$  ist

$$[f, c_n] = [f_N, c_n] = a_n, \quad [f, s_n] = [f_N, s_n] = b_n.$$

Insbesondere finden wir

$$[f - f_N, f_N] = 0$$

und damit

$$[f, f_N] = [f_N, f_N].$$

**Satz 4.6 (Besselsche Ungleichung)** Für die Fourier-Koeffizienten der Funktion  $f$  gilt

$$a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx.$$

Beweis. Es ist

$$f = (f - f_N) + f_N \quad \text{mit} \quad [f_N, f - f_N] = 0.$$

Wie bei Pythagoras folgt deswegen

$$[f, f] = [f - f_N, f - f_N] + [f_N, f_N].$$

Wegen  $[f - f_N, f - f_N] \geq 0$  erhält man daraus

$$a_0^2 + \sum_1^N (a_n^2 + b_n^2) = [f_N, f_N] \leq [f, f] = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(x) dx. \quad \square$$

### 4.3 Fourier-Koeffizienten

Hier stellen wir einige Eigenschaften der Fourier-Koeffizienten zusammen und rechnen auch für einige Funktionen die Fourier-Koeffizienten aus. Bisher haben wir vorausgesetzt, dass die betrachteten Funktionen auf dem Intervall  $[0, 2\pi]$  definiert und dort auch Riemann-integrierbar sind.

**Definition 4.4** Eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt periodisch mit der Periode  $2\pi$ , wenn

$$f(x + n \cdot (2\pi)) = f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ und alle } n \in \mathbb{Z}.$$

Eine derartige Funktion ist eindeutig bestimmt durch ihre Werte auf dem Intervall  $[0, 2\pi[$ . Und umgekehrt: Jede Funktion  $f : [0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}$  kann man durch

$$f(x + n \cdot (2\pi)) := f(x) \quad \text{für } 0 \leq x < 2\pi, n \in \mathbb{Z},$$

zu einer  $2\pi$ -periodischen Funktion auf ganz  $\mathbb{R}$  fortsetzen. Die Fourier-Koeffizienten der fortgesetzten periodischen Funktion sind identisch mit denen der ursprünglichen, auf dem Intervall  $[0, 2\pi[$  definierten Funktion.

Eine gewisse Komplikation ergibt sich daraus, dass für die fortgesetzte Funktion nicht unbedingt

$$f(2\pi) = f(0)$$

sein muss, falls  $f$  denn schon, wie immer bisher, auf dem ganzen Intervall  $[0, 2\pi]$  definiert sein sollte, d.h., auch im rechten Endpunkt  $x = 2\pi$  einen vorgeschriebenen Wert hat. Auf diesen Wert kommt es aber nicht so furchtbar an. Wenn man den Wert einer Funktion in diesem Punkt durch

$$f(2\pi) := f(0)$$

abändert,

- bleibt sie Riemann-integrierbar, wenn sie es vorher war;

- ändern sich ihre Fourier-Koeffizienten nicht.

Wir werden deswegen im Folgenden alle unsere Funktionen als  $2\pi$ -periodisch voraussetzen. Das spielt eigentlich nur deswegen eine Rolle, weil wir gelegentlich nicht von 0 bis  $2\pi$  integrieren werden, sondern von  $a$  bis  $a + 2\pi$ . Das Integral bleibt gleich. Denn sei etwa  $a = \alpha + 2n\pi$  mit  $0 \leq \alpha < 2\pi$ , dann ist wegen der Periodizität

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)dx = \int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(x)dx = \int_\alpha^{2\pi} f(x)dx + \int_{2\pi}^{\alpha+2\pi} f(x)dx = \int_0^\alpha f(x)dx + \int_\alpha^{2\pi} f(x)dx = \int_0^{2\pi} f(x)dx.$$

Für die Fourier-Koeffizienten gelten:

1) **Linearität:**  $a_k(c_1f_1 + c_2f_2) = c_1a_k(f_1) + c_2a_k(f_2)$  und ebenso für die Koeffizienten  $b_k(f)$ . Das folgt aus der Linearität des Integrals.

2) **Symmetrie:** Die Funktion  $f$  heißt

$$\text{gerade, wenn } f(x) = f(-x) \quad \text{bzw.} \quad f(x) = f(2\pi - x);$$

$$\text{ungerade, wenn } f(x) = -f(-x) \quad \text{bzw.} \quad f(x) = -f(2\pi - x).$$

Es gilt:

- $f$  gerade  $\Rightarrow b_k(f) = 0$  für alle  $k$ ;
- $f$  ungerade  $\Rightarrow a_k(f) = 0$  für alle  $k$ .

Ist nämlich  $f$  gerade, dann ist  $f(x)\sin(k \cdot x)$  ungerade. Und ist  $f$  ungerade, dann ist  $f(x)\cos(k \cdot x)$  ungerade. Und für jede ungerade Funktion  $f$  gilt

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^0 f(x)dx + \int_0^\pi f(x)dx = 0,$$

denn wegen der Substitutionsformel ist

$$\int_{-\pi}^0 f(x)dx = -\int_0^\pi f(x)dx.$$

3) **Verschiebung:** Für  $c \in \mathbb{R}$  sei

$$f_c(x) := f(x - c).$$

Dann gilt  $a_0(f_c) = a_0(f)$  und für alle  $k \geq 1$

$$\begin{pmatrix} a_k(f_c) \\ b_k(f_c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(k \cdot c) & -\sin(k \cdot c) \\ \sin(k \cdot c) & \cos(k \cdot c) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_k(f) \\ b_k(f) \end{pmatrix}.$$

Beweise. Mit der Substitutionsformel ist klarerweise

$$a_0(f_c) = \int_0^{2\pi} f(x - c) \frac{1}{\sqrt{2}} dx = \int_{-c}^{2\pi - c} f(u) \frac{1}{\sqrt{2}} du = \int_0^{2\pi} f(u) \frac{1}{\sqrt{2}} du = a_0(f).$$

Und wenn wir noch die Additionstheoreme der Winkelfunktionen heranziehen, sehen wir

$$\begin{aligned}
 a_k(f_c) &= \int_0^{2\pi} f(x-c)\cos(k \cdot x)dx = \int_{-c}^{2\pi-c} f(u)\cos(k \cdot (u+c))dx = \\
 &= \int_0^{2\pi} f(u)(\cos(k \cdot u)\cos(kc) - \sin(k \cdot u)\sin(kc))dx = a_k(f)\cos(kc) - b_k(f)\sin(kc), \\
 b_k(f_c) &= \int_0^{2\pi} f(x-c)\sin(k \cdot x)dx = \int_{-c}^{2\pi-c} f(u)\sin(k \cdot (u+c))dx = \\
 &= \int_0^{2\pi} f(u)(\sin(k \cdot u)\cos(kc) + \cos(k \cdot u)\sin(kc))dx = b_k(f)\cos(kc) + a_k(f)\sin(kc). \quad \square
 \end{aligned}$$

4) **Integration:** Die Funktion  $f$  sei stetig differenzierbar auf dem Intervall  $[0, 2\pi]$ , das heißt, stetig differenzierbar auf einem offenen Intervall  $]a, b[$ , welches das Intervall  $[0, 2\pi]$  enthält. Bei der Berechnung der Fourier-Koeffizienten spielt, wie schon gesagt, der Wert von  $f$  im rechten Endpunkt  $2\pi$  keine Rolle. Die Fourier-Koeffizienten von  $f$  sind auch die Fourier-Koeffizienten der  $2\pi$ -periodischen Fortsetzung von  $f$ .

Für  $k \geq 1$  gilt dann

$$a_k(f) = -\frac{1}{k}b_k(f'), \quad b_k(f) = \frac{1}{k}a_k(f') + \frac{1}{\pi k}(f(0) - f(2\pi)).$$

Wenn die Funktion  $f$  aber etwa auf dem Intervall  $[-\pi, \pi]$  stetig differenzierbar sein sollte, ändern sich diese Formeln marginal:

$$a_k(f) = -\frac{1}{k}b_k(f'), \quad b_k(f) = \frac{1}{k}a_k(f') - \frac{(-1)^k}{\pi k}(f(\pi) - f(-\pi)).$$

Beweise (Partielle Integration). Für  $f$  auf dem Intervall  $[0, 2\pi]$  ist wegen  $\sin(2k \cdot \pi) = 0$

$$\begin{aligned}
 a_k(f) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\cos(k \cdot x)dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left( f(x) \cdot \frac{1}{\pi} \sin(k \cdot x) \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f'(x) \cdot \frac{1}{k} \sin(k \cdot x)dx \right) \\
 &= -\frac{1}{k}b_k(f')
 \end{aligned}$$

und wegen  $\cos(2k \cdot \pi) = 1$

$$\begin{aligned}
 b_k(f) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\sin(k \cdot x)dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left( f(x) \cdot \left(-\frac{1}{k}\right)\cos(k \cdot x) \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} f'(x) \cdot \frac{1}{k} \cos(k \cdot x)dx \right) \\
 &= -\frac{1}{\pi k}(f(2\pi) - f(0)) + \frac{1}{k}a_k(f').
 \end{aligned}$$

Wenn  $f$  ursprünglich auf dem Intervall  $[-\pi, \pi]$  definiert ist, müssen wir über diese Intervall integrieren. Wegen  $\sin(k\pi) = 0$  ändert sich nichts bei der Rechnung für  $a_k(f)$ . Aber jetzt ist

$$\cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
 b_k(f) &= \frac{1}{\pi} \left( f(x) \cdot \left(-\frac{1}{k}\right) \cos(k \cdot x) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cdot \frac{1}{k} \cos(k \cdot x) dx \right) \\
 &= -\frac{1}{\pi k} (f(\pi) - f(-\pi)) \cos(k \cdot \pi) + \frac{1}{k} a_k(f') \\
 &= \frac{1}{k} a_k(f') - (-1)^k \frac{1}{\pi k} (f(\pi) - f(-\pi))
 \end{aligned}$$

Wir wollen jetzt die Fourier-Koeffizienten einiger häufig auftretenden Funktionen berechnen. Um die Konvergenz der zugehörigen Fourier-Reihe werden wir uns aber erst später kümmern.

**Beispiel 4.1 (Treppenfunktion)** *Es sei  $0 < c < 2\pi$  und*

$$f(x) := \begin{cases} \pi & \text{für } 0 \leq x \leq c \\ 0 & \text{für } c < x < 2\pi \end{cases}$$

*Wir berechnen*

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_0^c \pi dx = \frac{c}{\sqrt{2}}, \\
 a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^c \pi \cdot \cos(k \cdot x) dx = \frac{1}{k} \cdot \sin(k \cdot x) \Big|_0^c = \frac{1}{k} \cdot \sin(k \cdot c), \\
 b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^c \pi \cdot \sin(k \cdot x) dx = -\frac{1}{k} \cdot \cos(k \cdot x) \Big|_0^c = \frac{1}{k} - \frac{1}{k} \cdot \cos(k \cdot c).
 \end{aligned}$$

*Damit wird die Reihe*

$$\frac{c}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (\sin(k \cdot c) \cos(k \cdot x) + (1 - \cos(k \cdot c)) \sin(k \cdot x)).$$

Spezialfälle ergeben sich insbesondere für  $c = 2\pi$ , wo die Reihe nach dem konstanten nullten Summanden trivial abbricht, und für  $c = \pi$ :

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2k+1} \sin((2k+1) \cdot x).$$

**Beispiel 4.2 (Sägezahn)** *Wieder sei  $0 < c < 2\pi$ . Wir betrachten*

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\pi}{c} x & \text{für } 0 \leq x \leq c \\ 0 & \text{für } c < x \leq 2\pi \end{cases}$$

*Wieder berechnen wir direkt*

$$a_0 = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_0^c \frac{\pi}{c} x dx = \frac{1}{c\sqrt{2}} \int_0^c x dx = \frac{c}{2\sqrt{2}},$$

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^c \frac{\pi}{c} x \cdot \cos(k \cdot x) dx \\
&= \frac{1}{c} \int_0^c x \cdot \cos(k \cdot x) dx \\
&= \frac{1}{c} \left( x \cdot \frac{1}{k} \sin(kx) \Big|_0^c - \int_0^c \frac{1}{k} \cdot \sin(k \cdot x) dx \right) \\
&= \frac{1}{c} \left( \frac{c}{k} \sin(kc) - \frac{1}{k} \left( -\frac{1}{k} \cdot \cos(k \cdot x) \right) \Big|_0^c \right) \\
&= \frac{1}{k} \sin(k \cdot c) + \frac{1}{ck^2} (\cos(k \cdot c) - 1) \\
b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^c \frac{\pi}{c} x \cdot \sin(k \cdot x) dx \\
&= \frac{1}{c} \int_0^c x \cdot \sin(k \cdot x) dx \\
&= \frac{1}{c} \left( -x \cdot \frac{1}{k} \cos(kx) \Big|_0^c + \int_0^c \frac{1}{k} \cdot \cos(k \cdot x) dx \right) \\
&= \frac{1}{c} \left( -\frac{c}{k} \cos(kc) + \frac{1}{k} \left( \frac{1}{k} \cdot \sin(k \cdot x) \right) \Big|_0^c \right) \\
&= -\frac{1}{k} \cos(k \cdot c) + \frac{1}{ck^2} \sin(k \cdot c)
\end{aligned}$$

Damit wird die Reihe

$$\begin{aligned}
&\frac{c}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} \sin(k \cdot c) + \frac{1}{ck^2} \cos(k \cdot c) - \frac{1}{ck^2} \right) \cos(k \cdot x) \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} \left( -\frac{1}{k} \cos(k \cdot c) + \frac{1}{ck^2} \sin(k \cdot c) \right) \sin(k \cdot x).
\end{aligned}$$

Spezialfälle dieses Ergebnisses sind

$$\begin{aligned}
c = 2\pi : & \quad \frac{\pi}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin(k \cdot x), \\
c = \pi : & \quad \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1) \cdot x) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin(k \cdot x).
\end{aligned}$$

**Beispiel 4.3 (Parabelbogen)** Es sei

$$f(x) := (x - \pi)^2, \text{ für } 0 \leq x \leq 2\pi.$$

Diese Funktion ist gerade, deswegen ist

$$b_k = 0 \text{ für alle } k.$$

Wir berechnen direkt

$$a_0 = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} (x - \pi)^2 dx = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{3} (x - \pi)^3 \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \left( \frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^3}{3} \right) = \frac{\pi^2\sqrt{2}}{3}.$$

Die anderen Koeffizienten  $a_k$  berechnen wir durch Integration. Es ist ja

$$f'(x) = 2(x - \pi) = -2\pi + 4 \cdot \frac{x}{2}$$

mit den Fourier-Koeffizienten (vgl. Beispiel 4.2,  $c = 2\pi$ )

$$a_k(f') = 0, \quad b_k(f') = -\frac{4}{k}.$$

Es folgt

$$a_k(f) = -\frac{1}{k} b_k(f') = \frac{4}{k^2}.$$

Damit wird die Fourier-Reihe

$$\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos(k \cdot x).$$

**Beispiel 4.4 (Gleichgerichteter Sinus)** Jetzt sei

$$f(x) := \begin{cases} \sin(x) & \text{für } 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{für } \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

Wir berechnen direkt

$$a_0 = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_0^{\pi} \sin(x) dx = \frac{\sqrt{2}}{\pi},$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x) \cdot \cos(k \cdot x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (\sin((1+k) \cdot x) + \sin((1-k) \cdot x)) dx.$$

Für  $k = 1$  erhalten wir

$$a_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin(2x) dx = 0,$$

während für  $k > 1$  gilt

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \left( -\frac{1}{1+k} \cos((1+k) \cdot x) \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{1-k} \cos((1-k) \cdot x) \Big|_0^{\pi} \right).$$

Für ungerades  $k$  ist

$$\cos(0) = \cos((1+k)\pi) = \cos((1-k)\pi) = 0$$

und deswegen  $a_k = 0$ . Für gerades  $k$  dagegen ist

$$\cos(0) = 1, \quad \cos((1+k)\pi) = \cos((1-k)\pi) = -1$$

und

$$a_k = -\frac{1}{2\pi} \left( \frac{-2}{1+k} + \frac{-2}{1-k} \right) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{1+k} + \frac{1}{1-k} \right) = -\frac{2}{\pi} \frac{1}{(k+1)(k-1)}.$$

Für die Koeffizienten  $b_k$  finden wir

$$b_k = \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \sin(x) \sin(k \cdot x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \cos((1-k) \cdot x) - \cos((1+k) \cdot x) dx.$$

Mit Cosinus-Integration erhalten wir  $b_1 = 1/2$ , während sich für  $k > 1$  ergibt  $b_k = 0$ . Insgesamt wird die Fourier-Reihe

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin(x) - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \cos(2k \cdot x).$$

**Beispiel 4.5 (Zackenfunktion)** Schließlich untersuchen wir noch

$$f(x) := \begin{cases} \pi(1 + \frac{x}{c}) & \text{für } -c \leq x \leq 0 \\ \pi(1 - \frac{x}{c}) & \text{für } 0 \leq x \leq c \\ 0 & \text{für } c \leq x \leq 2\pi - c \end{cases}$$

Dabei ist  $c$  ein Parameter mit  $0 < c < \pi$ . Weil die Funktion gerade ist, gilt  $b_k = 0$  für alle  $k$ . Wir berechnen direkt

$$a_0 = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_{-c}^c f(x) dx = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \cdot c \cdot \pi = \frac{c}{\sqrt{2}}$$

und

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^c \pi(1 - \frac{x}{c}) \cos(k \cdot x) dx \\ &= 2 \left( \underbrace{(1 - \frac{x}{c}) \cdot \frac{1}{k} \cdot \sin(k \cdot x)}_{=0} \Big|_0^c + \frac{1}{kc} \int_0^c \sin(k \cdot x) dx \right) \\ &= \frac{2}{kc} \cdot \left( -\frac{1}{k} \cos(k \cdot x) \Big|_0^c \right) \\ &= -\frac{2}{ck^2} (\cos(k \cdot c) - 1). \end{aligned}$$

Damit wird die Fourier-Reihe

$$\frac{c}{2} + \frac{2}{c} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} (1 - \cos(k \cdot c)) \cdot \cos(k \cdot x).$$

**Aufgabe 4.1** Zeigen Sie:

a) Die Funktion  $|\sin(x)|$  auf  $[0, 2\pi]$  hat die Fourier-Reihe

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \cos(k \cdot x);$$

b) Die Funktion  $x^2$  auf  $[0, 2\pi]$  hat die Fourier-Reihe

$$\frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos(k \cdot x) - 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin(k \cdot x).$$

#### 4.4 Punktweise Konvergenz

Für alle  $x \in ]0, 2\pi[$  ist  $0 < x/2 < \pi$  und  $\sin(x/2) > 0$ . Deswegen sind die Quotienten in der folgenden Summenformel wohldefiniert für alle  $x \in ]0, 2\pi[$ .

**Satz 4.7 (Summenformeln)** Für alle  $x \in ]0, 2\pi[$  gilt

$$\sum_{k=1}^n \cos(k \cdot x) = \frac{\sin(\frac{2n+1}{2} \cdot x)}{2\sin(\frac{x}{2})} - \frac{1}{2}, \quad \sum_{k=1}^n \sin(k \cdot x) = \frac{\cos(\frac{x}{2}) - \cos(\frac{2n+1}{2} \cdot x)}{2\sin(\frac{x}{2})}.$$

Beweis. Die erste Summenformel ist äquivalent zu

$$\sin(\frac{x}{2}) + \sum_{k=1}^n 2\cos(k \cdot x)\sin(\frac{x}{2}) = \sin(\frac{2n+1}{2} \cdot x).$$

Wir verwenden das Sinus-Additionstheorem in der Form

$$\sin(kx + \frac{x}{2}) - \sin(kx - \frac{x}{2}) = 2\cos(k \cdot x)\sin(\frac{x}{2}).$$

Damit wird die linke Seite der zu beweisenden Gleichung

$$\sin(\frac{x}{2}) + \left(\sin(\frac{3}{2}x) - \sin(\frac{x}{2})\right) + \dots + \left(\sin(\frac{2n+1}{2}x) - \sin(\frac{2n-1}{2}x)\right).$$

Hier kürzen sich alle Summanden heraus, bis auf den, der die rechte Seite unserer Gleichung ist.

Die andere Summenformel erhalten wir ganz analog, wenn wir das Cosinus-Additionstheorem in der Form

$$\cos(kx - \frac{x}{2}) - \cos(kx + \frac{x}{2}) = 2\sin(k \cdot x)\sin(\frac{x}{2})$$

verwenden. □

Die Herleitung der Summenformeln funktioniert nur für  $0 < x < 2\pi$ , weil wir durch  $\sin(x/2)$  dividieren müssen. Aber die Formel

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \cos(k \cdot x) = \frac{\sin(\frac{2n+1}{2} \cdot x)}{2\sin(\frac{x}{2})} - \frac{1}{2}}$$

gilt trotzdem für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Dazu müssen wir uns nur um den Punkt  $x = 0$  kümmern. Die linke Seite macht dabei keinerlei Schwierigkeiten. Sie lautet

$$\sum_{k=1}^n \cos(k \cdot 0) = \sum_{k=1}^n 1 = n.$$

Und die rechte Seite hat für  $x \rightarrow 0$  den Grenzwert (Regel von de l'Hospital)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{2n+1}{2} \cdot x)}{\sin(\frac{x}{2})} - \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2n+1}{2} \cdot \cos(\frac{2n+1}{2} \cdot x)}{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos(\frac{x}{2})} - \frac{1}{2} = \frac{2n+1}{2} - \frac{1}{2} = n.$$

Wir müssen also nur die rechte Seite stetig über den Nullpunkt fortsetzen, und die Summenformel behält ihre Gültigkeit.

Insbesondere ist die  $2\pi$ -periodische Funktion

$$\frac{\sin(\frac{2n+1}{2} \cdot x)}{\sin(\frac{x}{2})}$$

auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert und stetig. Damit können wir diese Funktion integrieren.

**Satz 4.8** *Es ist*

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin(\frac{2n+1}{2} \cdot x)}{2\sin(\frac{x}{2})} dx = \pi, \quad \int_0^\pi \frac{\sin(\frac{2n+1}{2} \cdot x)}{2\sin(\frac{x}{2})} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Beweis. Mit

$$\int_0^{2\pi} \cos(k \cdot x) dx = 0$$

erhält man aus der Summenformel den Wert des ersten Integrals zu

$$\int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^n \cos(k \cdot x) dx + \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} dx = \pi.$$

Außerdem ist die Integranden-Funktion

$$\frac{\sin(\frac{2n+1}{2} \cdot x)}{2\sin(\frac{x}{2})}$$

gerade und

$$\int_0^\pi \frac{\sin(\frac{2n+1}{2} \cdot x)}{2\sin(\frac{x}{2})} dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\frac{2n+1}{2} \cdot x)}{2\sin(\frac{x}{2})} dx = \frac{\pi}{2}. \quad \square$$

**Satz 4.9 (Dirichlet-Integral)** *Die Funktion  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  sei Riemann-integrierbar und  $2\pi$ -periodisch auf ganz  $\mathbb{R}$  fortgesetzt. Für ihr  $N$ -tes Fourier-Polynom gilt*

$$f_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin(\frac{2N+1}{2} \cdot t)}{2\sin(\frac{t}{2})} dt.$$

Beweis. Mit der Definition der Fourier-Koeffizienten  $a_k$  und  $b_k$  wird

$$\begin{aligned} f_N(x) &= \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^N (a_k \cos(k \cdot x) + b_k \sin(k \cdot x)) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt \\ &\quad + \sum_{k=1}^N \left( \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(k \cdot t) dt \right) \cdot \cos(k \cdot x) + \left( \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(k \cdot t) dt \right) \cdot \sin(k \cdot x) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^N \cos(k \cdot (t-x)) \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f(t) \cdot \frac{\sin(\frac{2N+1}{2} \cdot (t-x))}{\sin(\frac{1}{2} \cdot (t-x))} dt. \end{aligned}$$

Im Integral substituieren wir  $t = x+u$  und erhalten dafür nach Verschiebung des Integrations-Intervalls

$$\int_{-x}^{2\pi-x} f(x+u) \frac{\sin(\frac{2N+1}{2} \cdot u)}{2\sin(\frac{u}{2})} du = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) \frac{\sin(\frac{2N+1}{2} \cdot u)}{2\sin(\frac{u}{2})} du. \quad \square$$

Damit die Fourier-Koeffizienten einer Funktion  $f$  definiert sind, braucht die Funktion  $f$  nicht stetig zu sein. Meistens ist sie das ja auch nicht im Punkt  $2\pi$ , wenn wir sie  $2\pi$ -periodisch fortsetzen.

Die Fourier-Koeffizienten und damit die Fourier-Reihe von  $f$  sind immer definiert, wenn  $f$  Riemann-integrierbar ist. Endlich viele Unstetigkeitsstellen spielen dabei keine Rolle.

Anders ist es, wenn wir die Konvergenz der Fourier-Reihe beweisen wollen. Da darf  $f$  nur endlich viele Sprung-Stellen haben und muss dort rechts- und links-seitig differenzierbar sein im folgenden Sinn:

**Definition 4.5** *Es sei  $\delta > 0$  und  $f : ]x - \delta, x + \delta[ \rightarrow \mathbb{R}$  definiert. Auf dem Definitions-Intervall sei  $f$  stetig mit eventueller Ausnahme des Punktes  $x$ . Dann definieren wir:*

$$f_+(x) := \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} f(x+h), \quad f_-(x) := \lim_{h \rightarrow 0, h < 0} f(x+h),$$

$$f'_+(x) := \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \frac{f(x+h) - f_+(x)}{h}, \quad f'_-(x) := \lim_{h \rightarrow 0, h < 0} \frac{f(x+h) - f_-(x)}{h}.$$

Wir nennen  $f$  rechts- und links-seitig differenzierbar in  $x$ , wenn

- $f$  auf seinem Definitions-Intervall mit Ausnahme des Punktes  $x$  stetig differenzierbar ist;
- die Grenzwerte  $f_+(x), f_-(x), f'_+(x), f'_-(x)$  existieren;
- $f'_+(x) = \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} f'(t)$  und  $f'_-(x) = \lim_{t \rightarrow 0, t < 0} f'(t)$  gilt.

Die Fälle  $f_+(x) \neq f_-(x)$  und/oder  $f'_+(x) \neq f'_-(x)$  sind dabei ausdrücklich zugelassen. Aber aus der Definition folgt, dass die Funktionen

$$f_+, f'_+ : [x, x + \delta]$$

definiert durch

$$f_+(u) := \begin{cases} f(u) & \text{für } u > x \\ f_+(x) & \text{für } u = x \end{cases}, \quad f'_+(u) := \begin{cases} f'(u) & \text{für } u > x \\ f'_+(x) & \text{für } u = x \end{cases}$$

stetig sind, ebenso wie die analog definierten Funktionen  $f_-$  und  $f'_-$ .

**Satz 4.10 (Lemma)** *Die Funktion sei  $2\pi$ -periodisch und stetig differenzierbar auf dem Intervall  $[0, 2\pi]$  mit Ausnahme endlich vieler Punkte. Dort sei sie aber rechts- und linksseitig stetig differenzierbar. Dann ist für alle  $x$  mit obigen Notationen die Funktion*

$$\frac{f_+(x+u) - f_+(x)}{\sin(\frac{u}{2})} : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$$

Riemann-integrierbar. (Ebenso gilt für  $f_-$  die analoge Aussage.)

Beweis. Wegen

$$\frac{f_+(x+u) - f_+(x)}{\sin(\frac{u}{2})} = \frac{f_+(x+u) - f_+(x)}{u} \cdot \frac{u}{\sin(\frac{u}{2})}$$

und wegen der Stetigkeit von  $u/\sin(u/2)$  genügt es zu zeigen, dass  $(f_+(x+u) - f_+(x))/u$  Riemann-integrierbar ist. Auf jedem abgeschlossenen Intervall, das  $u = 0$  nicht enthält, ist die Funktion stückweise stetig und damit integrierbar. Aber für  $u \rightarrow 0$  hat die Funktion nach Voraussetzung den Grenzwert  $f'_+(x)$  und ist in  $u = 0$  stetig fortsetzbar. Deswegen ist die Funktion auch auf jedem Intervall  $[0, \delta]$  Riemann-integrierbar.  $\square$

**Satz 4.11 (Punktweise Konvergenz)** Die Funktion  $f$  sei stetig differenzierbar auf dem Intervall  $[0, 2\pi]$  bis auf endlich viele Punkte. Dort sei sie rechts- und links- differenzierbar. Dann konvergiert die Fourier-Reihe von  $f$  in  $x$  gegen

$$\frac{1}{2}(f_+(x) + f_-(x)).$$

Beweis. Mit Satz 4.9 kennen wir die Partialsummen

$$f_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) \cdot \frac{\sin(\frac{2N+1}{2}u)}{2\sin(\frac{u}{2})} du$$

der Fourier-Reihe im Punkt  $x$ . Um die Behauptung

$$\lim_{N \rightarrow \infty} f_N(x) = \frac{1}{2}(f_+(x) + f_-(x))$$

zu zeigen, genügt es die beiden Gleichungen

$$\frac{1}{2}f_+(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x+u) \frac{\sin(\frac{2N+1}{2} \cdot u)}{2\sin(\frac{u}{2})} du, \quad \frac{1}{2}f_-(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x+u) \frac{\sin(\frac{2N+1}{2} \cdot u)}{2\sin(\frac{u}{2})} du$$

zu beweisen. Wir beweisen nur die erste dieser beiden Gleichungen, weil die zweite ganz analog zu beweisen ist.

Wir erinnern uns an die Gleichung

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(\frac{2N+1}{2} \cdot u)}{\sin(\frac{u}{2})} du$$

und multiplizieren sie mit der Konstanten  $f_+(x)$ :

$$\frac{1}{2}f_+(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f_+(x) \cdot \frac{\sin(\frac{2N+1}{2} \cdot u)}{\sin(\frac{u}{2})} du.$$

Die Behauptung läuft deswegen auf

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} (f(x+u) - f_+(x)) \cdot \frac{\sin(\frac{2N+1}{2} \cdot u)}{2\sin(\frac{u}{2})} du = 0$$

hinaus. Diese Gleichung folgt aber aus dem Lemma von Riemann, weil die Funktion

$$\frac{f(x+u) - f_+(x)}{\sin(\frac{u}{2})}$$

auf dem Intervall  $[0, \pi]$  Riemann-integrierbar ist. □

**Satz 4.12 (Korollar)** Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 4.11 sei die Funktion  $f$  in  $x$  stetig. Dann konvergiert die Fourier-Reihe von  $f$  in  $x$  gegen  $f(x)$ .

Beweis.  $f(x) = (f_+(x) + f_-(x))/2$ . □

Die punktweise Konvergenz der Fourier-Reihen führt zu den merkwürdigsten Formeln. Wir stellen einige davon zusammen:

Die Entwicklung der Treppenfunktion für  $c = \pi$  lautet

$$\frac{\pi}{2} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1) \cdot x).$$

Im Punkt  $x = \pi/2$  erhält man

$$\pi = \frac{\pi}{2} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1},$$

bzw.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}}$$

Diese Formel stammt von Leibniz. Sie ist ja auch ein schönes Beispiel für das nach ihm benannte Konvergenzkriterium.

Die Entwicklung des Sägezahns für  $c = \pi$  im Punkt  $x = \pi$  liefert

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

und ergibt

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$$

Nun ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{3}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Daraus folgt

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}.$$

Der gleichgerichtete Sinus hat für  $x = \pi$  den Wert

$$0 = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1}.$$

Damit folgt

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{1}{2}}.$$

Und für  $x = \pi/2$  ergibt der gleichgerichtete Sinus

$$1 = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2 - 1},$$

also

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2 - 1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}.}$$

**Aufgabe 4.2** Zeigen Sie

a) für  $-\pi \leq x \leq \pi$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(k \cdot x);$$

b) falls  $a \neq 0$ , für  $-\pi < x < \pi$

$$e^{ax} = \frac{e^{a\pi} - e^{-a\pi}}{\pi} \left( \frac{1}{2a} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 + a^2} (a \cos(k \cdot x) - k \sin(k \cdot x)) \right);$$

c) falls  $a \notin \mathbb{Z}$  für  $-\pi \leq x \leq \pi$

$$\cos(a \cdot x) = \frac{2}{\pi} \sin(a \cdot \pi) \left( \frac{1}{2a} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot a}{a^2 - k^2} \cos(k \cdot x) \right);$$

d) falls  $a \notin \mathbb{Z}$  für  $-\pi < x < \pi$

$$\sin(a \cdot x) = \frac{2}{\pi} \sin(a \cdot \pi) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot k}{a^2 - k^2} \sin(k \cdot x).$$

Graph	$f(x) :=$ für	Fourier-Koeffizienten
	$\frac{\pi}{2}$ $x = 0, c$ $\pi$ $0 < x < c$ $0$ $c < x < 2\pi$	$a_0 = \frac{c}{\sqrt{2}}$ $a_k = \frac{1}{k} \sin(k \cdot c)$ $b_k = \frac{1}{k} (1 - \cos(k \cdot c))$
	$\frac{\pi}{c} \cdot x$ $0 \leq x < c$ $\frac{\pi}{2}$ $c$ $0$ $c < x \leq 2\pi$	$a_0 = \frac{c}{2\sqrt{2}}$ $a_k = \frac{1}{k} \sin(k \cdot c)$ $+ \frac{1}{ck^2} (\cos(k \cdot c) - 1)$ $b_k = -\frac{1}{c} \cos(k \cdot c)$ $+ \frac{1}{ck^2} \sin(k \cdot c)$
	$(x - \pi)^2$ $0 \leq x \leq 2\pi$	$a_0 = \frac{\pi^2 \sqrt{2}}{3}$ $a_k = \frac{4}{k^2}$ $b_k = 0$
	$\sin(x)$ $0 \leq x \leq \pi$ $0$ $\pi \leq x \leq 2\pi$	$a_0 = \frac{\sqrt{2}}{\pi}$ $a_{2k+1} = 0$ $a_{2k} = -\frac{2}{\pi} \frac{\cos(2k \cdot x)}{(2k-1)(2k+1)}$ $b_1 = \frac{1}{2}$ $b_k = 0$ für $k \geq 2$
	$\pi(1 + \frac{x}{c})$ $-c \leq x \leq 0$ $\pi(1 - \frac{x}{c})$ $0 \leq x \leq c$ $0$ $c \leq x \leq 2\pi - c$	$a_0 = \frac{c}{\sqrt{2}}$ $a_k = \frac{2}{ck^2} (1 - \cos(k \cdot c))$

## 4.5 Konvergenz im quadratischen Mittel

**Definition 4.6** Es seien  $f_n, n \in \mathbb{N}$ , und  $f$  Riemann-integrierbare Funktionen auf dem Intervall  $[0, 2\pi]$ . Die Funktionenfolge  $f_n$  konvergiert gegen  $f$  im quadratischen Mittel, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\| = 0,$$

bzw. explizit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} (f(x) - f_n(x))^2 dx = 0.$$

Mit dieser Definition konvergiert die Fourier-Reihe von  $f$ , wenn

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - f_N\| = 0.$$

Im Beweis von Satz 4.6 haben wir gesehen:

$$\|f\|^2 = \|f_N\|^2 + \|f - f_N\|^2.$$

Wegen der Orthogonalität der Winkelfunktionen ist

$$\|f_N\|^2 = a_0^2 + \sum_1^N (a_k^2 + b_k^2).$$

Es folgt

**Satz 4.13** Die Fourier-Reihe von  $f$  konvergiert gegen  $f$  im quadratischen Mittel genau dann, wenn

$$\|f\|^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx = a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2).$$

Die Gleichung in Satz 4.13 heißt *Parsevalsche Gleichung*.

**Beispiel 4.6** Die Fourier-Koeffizienten der Treppenfunktion in Beispiel 4.1 waren

$$a_0 = \frac{c}{\sqrt{2}}, \quad a_k = \frac{1}{k} \sin(k \cdot c), \quad b_k = \frac{1}{k} (1 - \cos(k \cdot c)).$$

Damit wird

$$a_k^2 + b_k^2 = \frac{1}{k^2} (\sin^2(k \cdot c) + 1 - 2\cos(k \cdot c) + \cos^2(2(k \cdot c))) = \frac{1}{k^2} (2 - 2\cos(k \cdot c)).$$

Mit den speziellen Werten

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

und (Beispiel 4.3)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos(k \cdot c) = \frac{1}{4} (c - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{12} = \frac{c^2}{4} - \frac{\pi c}{2} + \frac{\pi^2}{6}$$

wird die Reihe über die Quadrate der Fourier-Koeffizienten

$$c^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos(k \cdot c) = \frac{c^2}{2} + \frac{\pi^2}{3} - \frac{c^2}{2} + \pi c - \frac{\pi^2}{3} = \pi c.$$

Nun ist auch

$$[f, f] = \frac{1}{\pi} \int_0^c \pi^2 = \pi c.$$

Wir haben bewiesen: Die Fourier-Reihe der Treppenfunktion aus Beispiel 4.1 konvergiert gegen diese Funktion im quadratischen Mittel.

Mit diesem Beispiel beweisen wir ganz allgemein

**Satz 4.14** Für jede auf  $[0, 2\pi]$  Riemann-integrierbare Funktion  $f$  konvergiert die Fourier-Reihe von  $f$  auf dem Intervall  $[0, 2\pi]$  im quadratischen Mittel gegen  $f$ . Insbesondere gilt die Parsevalsche Gleichung für jedes Riemann-integrierbare  $f$ .

Beweis (Forster I). Jede Treppenfunktion  $\varphi$  ist eine endliche Linearkombination

$$\varphi = \sum_{i=1}^k t_i f_i, \quad t_i \in \mathbb{R},$$

von Treppenfunktionen  $f_i$  wie in Beispiel 4.1. Für die Partialsummen der Fourier-Reihen folgt aus der Linearität der Fourier-Koeffizienten

$$\varphi_N = \sum_{i=1}^k t_i (f_i)_N.$$

Also geht

$$\|\varphi - \varphi_N\| = \left\| \sum_{i=1}^k t_i (f_i - (f_i)_N) \right\| \leq \sum_{i=1}^k |t_i| \|f_i - (f_i)_N\|$$

gegen 0 für  $N \rightarrow \infty$ . Damit ist Behauptung bewiesen für alle Treppenfunktionen.

Ist nun  $f$  eine beliebige Riemann-integrierbare Funktion, so ist  $f$  insbesondere beschränkt. Für unseren Beweis können wir deswegen o.B.d.A.

$$|f(x)| \leq 1 \quad \text{für alle } x \in [0, 2\pi]$$

annehmen. Dann gibt es Treppenfunktionen  $\varphi$  und  $\psi$  mit

$$-1 \leq \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) \leq 1 \quad \text{für alle } x \in [0, 2\pi]$$

und

$$\int_0^{2\pi} (\psi(x) - \varphi(x)) dx < \epsilon.$$

Wir setzen  $g := f - \varphi$  und finden

$$|g(x)|^2 \leq |\psi(x) - \varphi(x)|^2 \leq 2(\psi(x) - \varphi(x)).$$

Damit wird

$$\|g\|^2 \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} (\psi(x) - \varphi(x)) dx < \frac{2\epsilon}{\pi}$$

und

$$\|g - g_N\|^2 = \|g\|^2 - \|g_N\|^2 \leq \|g\|^2 < \frac{2\epsilon}{\pi}.$$

Und wenn  $N$  so groß ist, daß  $\|\varphi - \varphi_N\| < \epsilon$ , dann ist

$$\|f - f_N\| = \|(\varphi - \varphi_N) + (g - g_N)\| \leq \|\varphi - \varphi_N\| + \|g - g_N\| < \left(1 + \frac{2}{\pi}\right) \cdot \epsilon. \quad \square$$

**Aufgabe 4.3 a)** Werten Sie die Parsevalsche Gleichung aus für die Funktion aus Beispiel 4.3 und zeigen Sie damit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

b) Zeigen Sie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^4} = \frac{241}{23\,040} \pi^4.$$

**Aufgabe 4.4** Zeigen Sie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^6} = \pi^6 \cdot \left(\frac{1}{960} - \frac{1}{2^6 \cdot 945}\right).$$

## 4.6 Komplexe Schreibweise

Ist  $f = u + i \cdot v$  eine  $\mathbb{C}$ -wertige Funktion, so integriert man ganz formal

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b (u(x) + i \cdot v(x)) dx := \int_a^b u(x) dx + i \cdot \int_a^b v(x) dx.$$

Insbesondere nennt man  $f$  Riemann-integrierbar, wenn sein Real- und Imaginärteil Riemann-integrierbar ist. Aus Satz 4.1 ) folgt, dass auch das Produkt komplexwertiger Riemann-integrierbarer Funktionen wieder Riemann-integrierbar ist. Für zwei solche Funktionen  $f$  und  $g$  modifizieren wir das verallgemeinerte Skalarprodukt wie folgt:

$$[f, g] := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Damit gilt

$$\|f\|^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (u(x)^2 + v(x)^2) dx = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Wir betrachten für  $k \in \mathbb{Z}$  die Exponentialfunktionen

$$e_k(x) := \frac{1}{\sqrt{2}} e^{ik \cdot x}.$$

**Satz 4.15 (Komplexe Orthogonalitätsrelationen)** Für diese Funktionen  $e_k$  gilt

$$[e_k, e_l] = \delta_{k,l}.$$

Beweis. Für  $k \neq 0$  ist

$$\int_0^{2\pi} e^{ikx} dx = \int_0^{2\pi} (\cos(k \cdot x) + i \sin(k \cdot x)) dx = 0,$$

während für  $k = 0$  gilt

$$\int_0^{2\pi} e^{i0x} dx = \int_0^{2\pi} 1 dx = 2\pi.$$

Nun ist

$$[e_k, e_l] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{kix} \cdot e^{-lix} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k-l)x} dx.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

**Definition 4.7** Die komplexwertige Funktion  $f$  sei Riemann-integrierbar auf  $[0, 2\pi]$ . Dann heißen die Zahlen

$$c_k := [f, e_k] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot e^{-ik \cdot x} dx, \quad k \in \mathbb{Z},$$

die komplexen Fourier-Koeffizienten von  $f$ .

**Satz 4.16 (Vergleich)** Die Funktion  $f$  sei reellwertig. Dann ist  $c_0 = a_0$ , während für  $k \geq 1$

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_k - ib_k), \quad c_{-k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_k + ib_k).$$

Diese Formeln rechnet man einfach nach. Die Umkehrformeln sind ( $k \geq 1$ )

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_k + c_{-k}), \quad b_k = \frac{i}{\sqrt{2}}(c_k - c_{-k}).$$

Natürlich ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e_k(x)$$

die komplexe Fourier-Reihe. Für reellwertiges  $f$  bekommt man mit obigen Formeln

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e_k(x) &= a_0 \frac{1}{\sqrt{2}} + \\ &\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}}(a_k - ib_k) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(k \cdot x) + i \sin(k \cdot x)) + \\ &\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}}(a_k + ib_k) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(k \cdot x) - i \sin(k \cdot x)) \\ &= a_0 \frac{1}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k \cdot x) + b_k \sin(k \cdot x)). \end{aligned}$$

Das ist die ganz normale reelle Fourier-Reihe.

**Beispiel 4.7** Wir betrachten die Funktion  $e^x$  auf dem Intervall  $[0, 2\pi]$ . Ihre komplexen Fourier-Koeffizienten sind

$$\begin{aligned}c_k &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} e^x \cdot e^{-ikx} dx \\&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{(1-ik)\cdot x} dx \\&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1-ik} e^{(1-ik)\cdot x} \Big|_0^{2\pi} \\&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1+ik}{1+k^2} (e^{2\pi} - 1)\end{aligned}$$

Daraus erhält man die reellen Fourier-Koeffizienten

$$\begin{aligned}a_k &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1+ik}{1+k^2} + \frac{1-ik}{1+k^2} \right) \cdot (e^{2\pi} - 1) = \frac{1}{\pi} \frac{e^{2\pi} - 1}{1+k^2}, \\b_k &= \frac{i}{2\pi} \left( \frac{1+ik}{1+k^2} - \frac{1-ik}{1+k^2} \right) \cdot (e^{2\pi} - 1) = -\frac{k}{\pi} \frac{e^{2\pi} - 1}{1+k^2}.\end{aligned}$$

Tabelle einiger Fourier-Reihen aus [Tolstow p.137 f]

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cos(k \cdot x) = -\ln\left(2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right),$	$0 < x < 2\pi,$
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin(k \cdot x) = \frac{\pi - x}{2},$	$0 < x < 2\pi,$
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos(k \cdot x) = \frac{1}{12}(3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2),$	$0 \leq x \leq 2\pi,$
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin(k \cdot x) = -\int_0^x \ln\left(2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right) dt,$	$0 \leq x \leq 2\pi,$
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \sin(k \cdot x) = \frac{1}{12}(x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x),$	$0 \leq x \leq 2\pi,$
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cos(k \cdot x) = \ln\left(2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right),$	$-\pi < x < \pi,$
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(k \cdot x) = \frac{x}{2},$	$-\pi < x < \pi,$
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \cos(k \cdot x) = \frac{1}{12}(\pi^2 - 3x^2),$	$-\pi \leq x \leq \pi,$
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \sin(k \cdot x) = \int_0^x \ln\left(2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right) dt,$	$-\pi \leq x \leq \pi,$
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^3} \sin(k \cdot x) = \frac{1}{12}(\pi^2 x - x^3),$	$-\pi \leq x \leq \pi.$

## Index

- Abbildung
  - differenzierbare, 18
  - stetige, 16
- Ableitung
  - partielle, 19
  - Richtungs-, 26
  - Symmetrie, 27
  - totale, 18
- Besselsche Ungleichung, 122
- Bogenlänge, 87
- Cavalierisches Prinzip, 73
- Determinante
  - Gramsche, 96
  - Jacobische, 34
- Differenzierbarkeitskriterium
  - hinreichendes, 20
  - notwendiges, 19
  - triviales, 19
- Dirichlet-Integral, 131
- Divergenz, 54
- Doppelintegral, 58
- Exponentialfunktion für Matrizen, 16
- Feld
  - konservatives, 90
- Fläche, 12, 93
- Flächenelement in Polarkoordinaten, 80
- Flächenstück, 93
  - Umparametrisierung, 93
- Fluss, 101
- Flussintegral, 101
- Folge von Vektoren
  - Cauchy-, 14
  - konvergente, 14
- Formel
  - von Euler, 30
  - von Gauß-Green, 104
- Fourier-Koeffizienten, 123
  - des gleichgerichteten Sinus, 127, 129
  - des Parabelbogens, 127, 129
  - einer Sägezahn-Funktion, 126
  - einer Treppenfunktion, 125
  - einer Zackenfunktion, 128
  - komplexe, 140
- Fourier-Polynom, 121
- Fourier-Reihe, 121
  - komplexe, 140
- Funktion
  - charakteristische, 60
- Funktion, periodische, 123
- Funktionaldeterminante, 34
- Funktionalmatrix, 25
- Gradient, 51
- Gradientenfeld
  - notwendige Bedingung, 52
  - Symmetriebedingung, 52
- Gramsche Determinante, 96
- Guldinsche Regel
  - erste, 81
  - zweite, 98
- Hesse-Matrix, 43
- Hurwitz-Kriterium, 43
- Hyperfläche, 12
- Implizite Funktionen, 38, 41
- Integral-Transformationsformel, 79
- Kugelkoordinaten, 11, 27
- Kurve, 11, 86
  - Bogenlänge, 87
  - Geschwindigkeitsvektor, 22
  - Tangente, 22
  - Umparametrisierung, 86
- Kurvenintegral
  - einer Funktion, 89
  - eines Vektorfeldes, 89
- Lagrange-Identität, 96
- Lagrange-Multiplikator, 45
- Laplace-Operator, 55
- Lemma von Riemann, 118
- Lokales Extremum, 44
  - Nebenbedingung, 45
  - notwendige Bedingung, 28

Matrix-Norm, 13  
 Mehrfach-Integral, 64  
 Menge  
     abgeschlossene, 15  
     kompakte, 15  
     messbare, 71  
     offene, 15  
  
 Nebenbedingung, 45  
 Normalen-Einheitsvektor, 100  
 Normalenvektor, 100  
 Nullmenge, 66  
  
 Orthogonalitätsrelationen  
     der Winkelfunktionen, 120  
     komplexe, 140  
  
 Parallelotop, 75  
 Parsevalsche Gleichung, 137  
 Polarkoordinaten, 11, 26  
 Potential, 90  
  
 Quader, 62  
     Produktzerlegung, 62  
     Zerlegung, 62  
  
 Richtungsableitung, 26  
 Riemann  
     Lemma von, 118  
 Riemann-Integral, 63  
 Rotation, 53  
  
 Satz  
     vom Maximum, 16  
     von Fubini, 65  
     von Gauß, 105  
     von Stokes, 108  
 Schwerpunkt, 68  
  
 Tangentialebene, 22  
 Taylor-Reihe, 30  
 Trägheitsmoment, 70  
 Treppenfunktion, 63  
 trigonometrisches Polynom, 121  
  
 Ungleichung  
     Besselsche, 122  
  
 Vektorfeld, 12  
  
 Vektorpotential, 113  
 Volumen, 71  
      $k$ -dimensionales, 97  
     des Parallelotops, 76  
     eines  $k$ -dimensionalen Parallelotops, 94  
     und lineare Abbildungen, 78  
 Volumenelement in Kugelkoordinaten, 81  
 Volumenintegral  
     einer Treppenfunktion, 63