Elemente der Analysis II

Wolf P. Barth

Nürnberg, Sommersemester 2007

Version vom 7. November 2006

Mathematisches Institut der Universität
Bismarckstr. 1 1/2, D 91054 Erlangen
e-mail: barth@mi.uni-erlangen.de

Inhaltsverzeichnis

3 Differentialrechnung

In der Schule behandelt man das Differenzieren vor dem Integrieren. Der Grenzwert, den man bei der Ableitung bilden muss, ist einfacher zu verstehen, als der beim Integral. Begrifflich sind 'Ableitung' und 'Integral' unabhängig voneinander, zumindest unabhängig voneinander zu definieren. Sie sind am Ende nur durch den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung miteinander verknüpft. Man könnte also im Prinzip auch die Integralrechnung vor der Differentialrechnung behandeln. Logisch hat dieser Aufbau etwas für sich: Es gibt viel mehr integrierbare als differenzierbare Funktionen. Von einem mathematischen Standpunkt aus, ist also das Integrieren eigentlich einfacher als das Differenzieren.

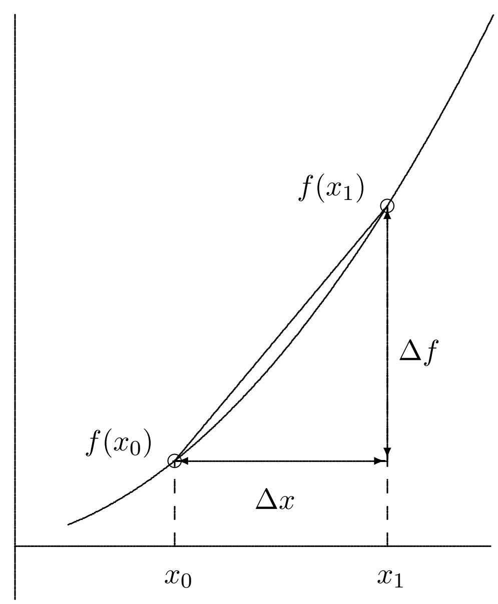
Wir wollen hier dem gewohnten Weg folgen, und zuerst das Differenzieren behandeln.

3.1 Der Differentialquotient

Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und $x_0 \neq x_1 \in D$ seien zwei verschiedene Punkte ('Argumente'). Dann ist

$x_1 - x_0$	die Differenz der Argumente
$f(x_1) - f(x_0)$	die Differenz der Funktionswerte
$\dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$	der Quotient beider Differenzen =: der *Differenzen-Quotient*

Dieser Differenzen-Quotient hat eine geometrische Bedeutung: Er ist die Steigung der Geraden durch die beiden Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_1, f(x_1))$ auf dem Funktionsgraphen. Diese Gerade ist eine *Sekante* des Funktionsgraphen.



Die Reihenfolge der Punkte x_0 und x_1 im Differenzenquotienten ist unwesentlich. Vertauscht man x_0 und x_1, so ändern beide Differenzen, im Zähler und im Nenner, ihr Vorzeichen. Der Quotient der Differenzen bleibt gleich. Wesentlich sind nur zwei Dinge:

1) Die Reihenfolge von x_0 und x_1 muss im Zähler und im Nenner gleich sein.

2) Es muss $x_0 \neq x_1$ sein, für $x_0 = x_1$ kann man den Differenzenquotienten nicht bilden.

Wenn es einem nicht auf die genauen Werte x_0 und x_1 ankommt, kürzt man auch ab:

Δx	die Differenz $x_1 - x_0$ der Argumente
Δf	die Differenz $f(x_1) - f(x_0)$ der Funktionswerte
$\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$	der Differenzen-Quotient

Beispiel 3.1 *Für die Funktion $f(x) = x^2$ ist*

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{x_1^2 - x_0^2}{x_1 - x_0} = x_1 + x_0,$$

weil ja $x_1^2 - x_0^2 = (x_1 + x_0)(x_1 - x_0)$.

Beispiel 3.2 *Für die Funktion $f(x) = 1/x$ ist*

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_0}}{x_1 - x_0} = \frac{x_0 - x_1}{x_0 x_1 (x_1 - x_0)} = -\frac{1}{x_0 x_1}.$$

Beispiel 3.3 *Für die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ ist*

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{\sqrt{x_1} - \sqrt{x_0}}{x_1 - x_0} = \frac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_0}},$$

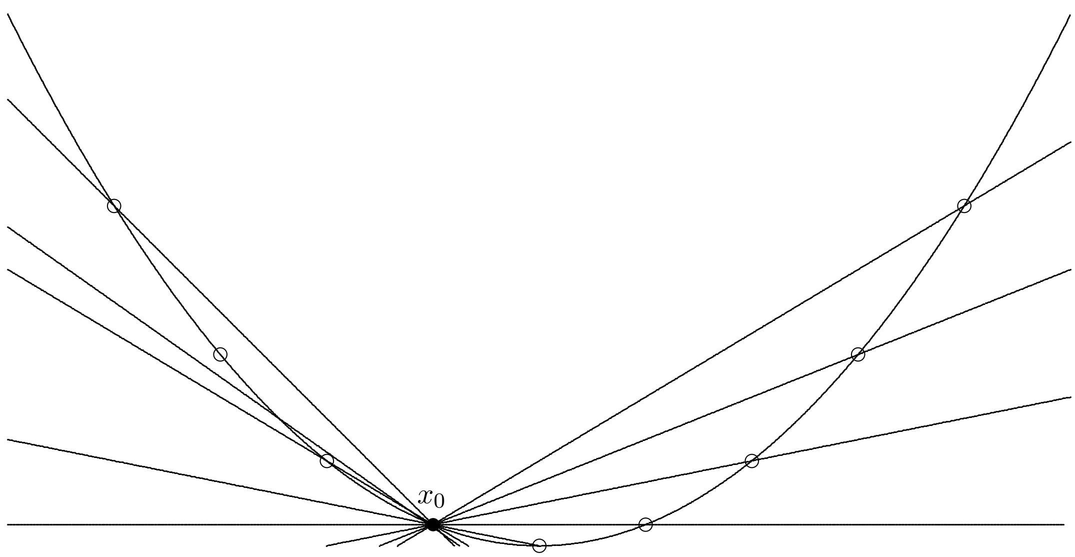
weil ja $x_1 - x_0 = (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_0})(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_0})$.

Beispiel 3.4 *Für die Funktion $f(x) = e^x$ kann man den Differenzenquotienten*

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{e^{x_1} - e^{x_0}}{x_1 - x_0}$$

nicht mehr weiter vereinfachen.

Wenn man x_0 festhält und x_1 im Definitionsbereich der Funktion f variiert bekommt man viele Sekanten des Funktionsgraphen und viele Differenzenquotienten:



Definition 3.1 *Der Grenzwert*

$$\frac{df}{dx}(x_0) := \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

heißt Differentialquotient *oder* Ableitung *der Funktion f im Punkt x_0.*

Bemerkung zur Schreibweise: Die Schreibweise 'Differentialquotient' bin ich mein Leben lang gewöhnt. In neueren Staatsexamensaufgaben habe ich dafür die Schreibweise 'Differnzialquotient' gefunden. Dieser Schreibweise kann ich mich nicht anschließen. Obwohl vor etwa 100 Jahren noch 'differentiieren' statt 'differenzieren' gebräuchlich war.

Dieser Differentialquotient existiert nicht für jede Funktion, bzw, nicht in allen Punkten des Definitionsbereichs mancher Funktionen. Betrachten wir z.B. die Funktion $f(x) := |x|$ im Punkt $x_0 = 0$. Ihr Differenzenquotient ist

$$\frac{|x| - |0|}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 \text{ falls } x > 0 \\ -1 \text{ falls } x < 0 \end{cases}$$

Der Grenzwert dieses Ausdrucks für $x \to 0$ existiert also nicht.

Definition 3.2 *Eine Funktion f heißt* differenzierbar in einem Punkt x_0 *ihres Definitionsbereichs, wenn dort der Differentialquotient existiert. Sie heißt* differenzierbar, *wenn sie in allen Punkten ihres Definitionsbereichs differenzierbar ist. Dann heißt die Funktion*

$$f' : x \mapsto \frac{df}{dx}(x)$$

die Ableitung *von f.*

Beispiel 3.1 *Die Funktion $f(x) := x^2$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. In jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ ist*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0.$$

Die Funktion $f(x) = x^2$ ist also überall differenzierbar und ihre Ableitung ist $f'(x) = 2x$.

Beispiel 3.2 *Die Funktion $f(x) := 1/x$ ist auf $\mathbb{R} \setminus 0$ definiert. In jedem Punkt $x_0 \neq 0$ ist*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left(-\frac{1}{x x_0} \right) = -\frac{1}{x^2}.$$

Die Funktion $f(x) = 1/x$ ist also auf ihrem ganzen Definitionsbereich differenzierbar und ihre Ableitung ist $f'(x) = -1/x^2$.

Beispiel 3.3 *Die Funktion $f(x) := \sqrt{x}$ ist auf $[0, \infty[$ definiert. Der Grenzwert*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

existiert für alle $x_0 > 0$. Diese Funktion ist also auf dem offenen Intervall $]0, \infty[$ differenzierbar und ihre Ableitung ist $f'(x) = 1/2\sqrt{x}$.

Ich habe extra erst ein paar nicht ganz triviale Beispiele behandelt, bevor ich jetzt zu den allereinfachsten übergehe. Man muss diese ganz einfachen Ableitungen natürlich auch kennen, aber die Rechnungen sind hier so einfach, dass man dabei nicht sieht, was eigentlich los ist:

Die konstante Funktion $f(x) \equiv c$ ist überall differenzierbar und ihre Ableitung ist

$$\lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{0}{x - x_0} = 0,$$

die Nullfunktion.

Die Funktion $f(x) := x$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar mit Ableitung

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 1 = 1.$$

Die Funktion $f(x) := c \cdot x$ ist für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{cx - cx_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} c \frac{x - x_0}{x - x_0} = c.$$

Ihre Ableitung ist die konstante Funktion $f'(x) = c$.

Es gibt noch eine andere Methode, den Differentialquotienten hinzuschreiben. Manche Studenten bevorzugen diese sogenannte 'h-Methode': Man setzt $x - x_0 = h$ und dann natürlich $x = x_0 + h$. Dann verschwindet x aus der Formel und h kommt rein:

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Jetzt braucht man den Index am x_0 nicht mehr, weil ja kein anderes x mehr vorkommt, und kann diesen Index weglassen:

$$\frac{df}{dx}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Manchmal bringt diese Schreibweise leichte Vorteile. Beispiele:

$$\begin{aligned}
\frac{d(x^2)}{dx} &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x, \\
\frac{d(x^3)}{dx} &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2.
\end{aligned}$$

Ich möchte mit dieser Methode auch noch die Funktionen e^x, $sin(x)$ und $cos(x)$ ableiten. Dabei benutzen wir die Additionstheoreme für diese Funktionen und berechnen die Grenzwerte mit der Potenzreihendarstellung:

Die Ableitung der Exponentialfunktion ist

$$\begin{aligned}\frac{d\,e^x}{dx} &= \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{e^x e^h - e^x}{h}\\ &= e^x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(e^h-1).\end{aligned}$$

Und mit der Potenzreihe der Exponentialfunktion berechnen wir

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(e^h-1) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left((\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^n}{n!})-1\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h^n}{n!}\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h^{n-1}}{n!}\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^n}{(n+1)!}\right)\\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^n}{(n+1)!}\right)(0)\\ &= 1.\end{aligned}$$

Wir erhalten also die fundamentale Formel:

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

Um den Sinus abzuleiten, brauchen wir sein Additionstheorem

$$sin(x+y) = sin(x)cos(y) + cos(x)sin(y).$$

Damit formen wir den Differentialquotienten um:

$$\begin{aligned}\frac{d\,sin(x)}{dx} &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(sin(x+h)-sin(x))\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(sin(x)cos(h)+cos(x)sin(h)-sin(x))\\ &= sin(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{cos(h)-1}{h}+cos(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{sin(h)}{h}.\end{aligned}$$

Die beiden hier auftretenden Grenzwerte berechnen wir wieder mit der Potenzreihendarstellung:

$$cos(h)-1 = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{h^{2n}}{(2n)!}$$

$$\begin{aligned}
\frac{cos(h)-1}{h} &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{h^{2n-1}}{(2n)!} \\
&= -\frac{h}{2}+\frac{h^3}{4!}\mp ... \\
\lim_{h\to 0}\frac{cos(h)-1}{h} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{h^{2n-1}}{(2n)!}\right)(0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{sin(h)}{h} &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{h}\cdot\frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{h^{2n}}{(2n+1)!} \\
&= 1-\frac{h^2}{3!}\pm ... \\
\lim_{h\to 0}\frac{sin(h)}{h} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{h^{2n}}{(2n)!}\right)(0) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Zusammen haben wir also ausgerechnet

$$\frac{d\,sin(x)}{x} = sin(x)\cdot 0 + cos(x)\cdot 1 = cos(x).$$

Das Additionstheorem des Cosinus ist

$$cos(x+y) = cos(x)cos(y) - sin(x)sin(y).$$

Damit transformieren wir

$$\begin{aligned}
cos(x+h)-cos(x) &= cos(x)cos(h)-sin(x)sin(h)-cos(x) \\
&= cos(x)\cdot(cos(h)-1)-sin(x)\cdot sin(h).
\end{aligned}$$

Mit den beiden soeben ausgerechneten Grenzwerten wird deswegen

$$\begin{aligned}
\frac{d\,cos(x)}{dx} &= cos(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{cos(h)-1}{h} - sin(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{sin(h)}{h} \\
&= cos(x)\cdot 0 - sin(x)\cdot 1 \\
&= -sin(x).
\end{aligned}$$

Damit haben wir die Ableitungen der beiden Winkelfunktionen

$$\boxed{\begin{gathered}(sin(x))' = cos(x) \\ (cos(x))' = -sin(x)\end{gathered}}$$

Aus der Schule wissen Sie, dass die Gerade

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

die *Tangente* an den Funktionsgraphen im Punkt $(x_0, f(x_0))$ ist. Die Ableitung $f'(x_0)$ ist die Steigung der Tangente. Das ist das Allerwichtigste, was man über das Differenzieren überhaupt wissen muss! Aber was bedeutet das, was ist 'die Tangente' in einem Punkt des Funktionsgraphen?

In der mündlichen Prüfung antworten Studenten häufig auf die Frage: 'Was ist die Ableitung einer Funktion f?' mit der Definition: 'Das ist die Steigung der Tangente.' Und wenn ich dann frage, was die Tangente in einem Punkt $(x_0, f(x_0))$ denn sei, dann wundern sie sich, dass ich sowas Einfaches nicht weiß. Sie versuchen, es mir an einem Bild zu erklären. Das Bild wird dann meistens nicht so besonders schön, sie versuchen ein besseres zu malen, wo man besser sieht, was die Tangente ist.

So kann man die Frage nicht beantworten!

Also was ist die Tangente? Sie ist die Gerade durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$ des Funktionsgraphen mit der Steigung $f'(x_0)$. Diese Steigung ist der Grenzwert aller Differenzenquotienten $(f(x)-f(x_0))/(x-x_0)$. Diese Differenzenquotienten sind auch Steigungen von Geraden, und zwar die Steigungen der Sekanten an den Graphen durch die beiden Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$. *Die Tangente ist die Gerade, gegen welche alle Sekanten durch* $(x_0, f(x_0))$ *und* $(x, f(x))$ *konvergieren, wenn* x *gegen* x_0 *geht.* Auch wenn man die Tangente definieren will, kommt man nicht um einen Grenzwert herum.

Eine Gerade ist der Graph einer linearen Funktion

$$x \mapsto a + c \cdot (x - x_0).$$

Hier darf die Steigung c der Geraden natürlich nicht $= \infty$ sein, denn eine senkrechte Gerade ist kein Funktionsgraph. Die Tangente ist der Graph der linearen Funktion

$$x \mapsto f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Was hat diese Funktion mit der Funktion f zu tun? Sie approximiert die Funktion f. 'Approximieren' ist ein anderes Wort für 'Annähern'. Wie gut nähert eine lineare Funktion

$$x \mapsto f(x_0) + c \cdot (x - x_0)$$

die Funktion f an? Das sieht man, wenn man die Differenz

$$\varphi(x) := f(x) - [f(x_0) + c \cdot (x - x_0)] = f(x) - f(x_0) - c \cdot (x - x_0)$$

bildet. Natürlich ist $\varphi(x_0) = 0$, im Punkt x_0 stimmen f und die lineare Funktion $f(x_0) + c \cdot (x - x_0)$ überein, egal wie groß die Steigung c ist. Wie kann man durch geeignete Wahl von c diese Übereinstimmung noch besser machen, und was hat das alles mit der Ableitung zu tun?

Das sehen wir, wenn wir durch $x - x_0$ dividieren. (Solange $x \neq x_0$ ist, dürfen wir das.)

$$\frac{\varphi(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - c.$$

Genau dann ist die Steigung c gleich dem Differentialquotienten, wenn

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - c = 0$$

ist. Damit haben wir eine andere Charakterisierung des Differentialquotienten beweisen.

Satz 3.1 (Lineare Approximation) *Die Funktion f ist genau dann differenzierbar im Punkt x_0 mit Ableitung c, wenn*

$$f(x) = f(x_0) + c \cdot (x - x_0) + \varphi(x)$$

ist, und

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{\varphi(x)}{x - x_0} = 0.$$

Diese Formel kann man auch mit der 'h-Methode' hinschreiben:

$$f(x+h) = f(x) + c \cdot h + \varphi(h) \quad \text{mit} \quad \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(h)}{h} = 0.$$

Also: Bei x_0 wird $f(x)$ durch die lineare Funktion $f(x_0) + c \cdot (x - x_0)$ approximiert. Die Differenz, der Fehler bei der Approximation ist $\varphi(x)$. Und

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x)}{x - x_0} = 0$$

bedeutet, dass dieser Fehler für $x \to x_0$ gegen 0 geht, und zwar schneller, wesentlich schneller, als die Differenz $x - x_0$ das tut.

Die Formel

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \varphi(x)$$

aus Satz 3.1 schreibt f als Summe dreier Summanden:

$f(x_0)$	eine konstante Funktion
$f'(x_0) \cdot (x - x_0)$	eine lineare Funktion
$\varphi(x)$	eine Funktion, die bei x_0 schnell gegen 0 geht.

Streng genommen hat φ die Eigenschaft

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x)}{x - x_0} \to 0,$$

der Quotient geht gegen 0, aber daraus folgt sofort

$$\lim_{x \to 0} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} (x - x_0) \cdot \frac{\varphi(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x - x_0) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x)}{x - x_0} = 0 \cdot 0 = 0.$$

Auch φ selbst geht gegen 0.

Aus dieser Darstellung der Funktion f folgt für den Grenzwert dieser Funktion

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} f(x) &= \lim_{x \to x_0} \big(f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \varphi(x)\big) \\
&= \lim_{x \to x_0} f(x_0) + \lim_{x \to x_0} f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \lim_{x \to x_0} \varphi(x) \\
&= f(x_0) + 0 + 0 \\
&= f(x_0).
\end{aligned}$$

Diese Eigenschaft $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ bedeutet die Stetigkeit der Funktion f im Punkt x_0.

Satz 3.2 (Differenzierbarkeit und Stetigkeit) *Ist die Funktion f in einem Punkt x_0 differenzierbar, so ist sie dort auch stetig.*

Die Umkehrung dieses Satzes gilt nicht: eine stetige Funktion braucht nicht differenzierbar zu sein. Das Standardbeispiel dafür ist die Funktion $|x|$. Sie ist stetig, aber im Nullpunkt nicht differenzierbar.

Aufgabe 3.1 (V) *Von einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei weiter nichts bekannt, als dass die Ungleichung*

$$-x^2 \leq f(x) \leq x^2 \text{ für alle } x$$

gilt. Zeigen Sie, dass diese Funktion im Nullpunkt differenzierbar ist.

3.2 Rechenregeln für das Differenzieren

Hier müssen wir die fundamentalen Rechenregeln für das Differenzieren beweisen. Davon gibt es vier, sie betreffen die verschiedenen Möglichkeiten, zwei differenzierbare Funktionen f und g zu verknüpfen:

Linearität:	$(af + bg)' = af' + bg'$ für $a, b \in \mathbb{R}$
Produktregel:	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
Quotientenregel:	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ wo $g \neq 0$
Kettenregel:	$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$

Das sind die Formeln. Dazu gehören die Aussagen:

Satz 3.3 (Differenzierbarkeit verknüpfter Funktionen) *a) Wenn f und g in x_0 differenzierbar sind, dann sind es dort auch die Funktionen $af + bg$, $a, b \in \mathbb{R}$ und $f \cdot g$, und deren Ableitungen werden durch obige Formeln gegeben.*

b) Wenn f und g in x_0 differenzierbar sind, und wenn $g(x_0) \neq 0$ ist, dann ist auch f/g in x_0 differenzierbar mit der oben angegebenen Ableitung.

c) Wenn f in x_0 und g in $f(x_0)$ differenzierbar sind, dann ist auch $f(g(x))$ in x_0 differenzierbar und die Ableitung dieser Funktion berechnet sich aus der Kettenregel.

Zum Beweis der Aussagen und der Formeln berechnen wir die entsprechenden Differentialquotienten. Bei der Quotientenregel müssen wir nur noch folgendes dazu sagen: Weil g in x_0 differenzierbar ist, ist es dort auch stetig (Satz 3.2). Weil g in x_0 stetig ist und weil $g(x_0) \neq 0$ ist, hat g auch in der Nähe von x_0 keine Nullstellen (Satz 2.8), und f/g ist dort definiert.

Der Beweis für die Linearität der Ableitung ist ganz einfach: Für zwei in x_0 differenzierbare Funktionen f und g, und zwei Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ ist

$$\lim_{x\to x_0} \frac{(af+bg)(x_0)-(af+bg)(x)}{x-x_0} = a \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + b \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = af'(x_0) + bg'(x_0).$$

Beweis für die Produktregel: Wir müssen die Änderung der Produktfunktion

$$\Delta(fg) = f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0),$$

wo simultan beide Faktoren geändert werden, so umformen, dass sich immer nur ein Faktor ändert. Das geht durch einen Trick:

$$\Delta(fg) = [f(x)g(x) - f(x_0)g(x)] + [f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)] = \Delta f \cdot g(x) + f(x_0) \cdot \Delta g.$$

Für den Differentialquotienten erhalten wir daraus

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \frac{f(x_0)g(x_0) - f(x)g(x)}{x-x_0} &= \left(\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) + f(x_0) \cdot \left(\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right) \\
&= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0),
\end{aligned}$$

denn weil g in x_0 differenzierbar ist, ist es dort auch stetig (Satz 3.2) und

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0).$$

Beweis für die Quotientenregel: Wir betrachten zuerst nur den Spezialfall $f \equiv 1$ und differenzieren $1/g$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)} &= \frac{g(x_0)-g(x)}{g(x)g(x_0)} \\
\lim_{x\to x_0} \left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}\right) / (x-x_0) &= \lim_{x\to x_0} \left(\frac{1}{g(x)g(x_0)} \cdot \frac{g(x_0)-g(x)}{x-x_0}\right) \\
&= \frac{1}{g(x_0)^2} \cdot (-g'(x_0)) \\
&= -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}.
\end{aligned}$$

Mit der Produktregel erhalten wir daraus den Allgemeinfall

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = f' \cdot \frac{1}{g} + f \cdot \frac{-g'}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Beweis der Kettenregel: Die folgende Rechnung liegt nahe:

$$\begin{aligned}
\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x-x_0} &= \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)} \cdot \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \\
\lim_{x\to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x-x_0} &= \lim_{y\to g(x_0)} \frac{f(y) - f(g(x_0))}{y-g(x_0)} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \\
&= f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).
\end{aligned}$$

Die Rechnung ist richtig, aber leider ist $g(x) - g(x_0) = 0$ nicht auszuschließen, ein Nenner kann $= 0$ sein, und die ansonsten richtige Rechnung verliert jede Beweiskraft.

Deswegen ersetze ich (in Anlehnung an Forster I) den Bruch $[f(y) - f(g(x_0))]/[y - g(x_0)]$ durch die Funktion

$$q(y) := \begin{cases} \dfrac{f(y) - f(g(x_0))}{y - g(x_0)} & \text{falls} \quad y \neq g(x_0) \\ \\ f'(y) = f'(g(x_0)) & \text{falls} \quad y = g(x_0) \end{cases}$$

Weil f in $g(x_0)$ differenzierbar ist, ist diese Funktion als Funktion von y stetig in $y = g(x_0)$. Sie hat auch die Eigenschaft

$$f(y) - f(g(x_0)) = q(y) \cdot (y - g(x_0)).$$

Das ist so nach Definition, wenn $y \neq g(x_0)$ ist, und erst recht so, wenn $y = g(x_0)$ ist, weil dann beide Seiten der Gleichung $= 0$ sind.

Jetzt können wir losrechnen:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{q(g(x)) \cdot (g(x) - g(x_0))}{x - x_0} \right) \\ &= \lim_{x \to x_0} q(g(x)) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= q(g(x_0)) \cdot g'(x_0) \\ &= f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0). \end{aligned}$$

$\square$

Mit diesen Regeln haben wir - bis auf das Differenzieren von Umkehrfunktionen - alle Regeln zusammen, die man praktisch braucht. Behandeln wir einige Beispiele:

Die Funktion x^2 haben wir schon in 3.1 als Bespiel differenziert. Mit der Produktregel geht das so:

$$\left(x^2\right)' = (x \cdot x)' = x' \cdot x + x \cdot x' = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x.$$

Ebenso sehen wir

$$\left(x^3\right)' = \left(x \cdot x^2\right)' = x' \cdot x^2 + x \cdot (x^2)' = x^2 + 2x^2 = 3x^2.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ zeigt man durch vollständige Induktion

$$(x^n)' = \left(x \cdot x^{n-1}\right)' = x' \cdot x^{n-1} + x \cdot (x^{n-1})' = x^{n-1} + x \cdot (n-1)x^{n-2} = nx^{n-1}.$$

Damit ist jedes Polynom

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

differenzierbar. Seine Ableitung ist

$$p'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + ... + a_1.$$

Auch jede rationale Funktion p/q, mit Polynomen p und q ist überall differenzierbar, wo der Nenner $\neq 0$ ist.

Insbesondere für die negativen Potenzen $x^{-n} = 1/x^n$, $n > 0$ erhalten wir

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{(x^n)'}{(x^n)^2} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}}.$$

Das ist dieselbe Formel, wie für die positiven Potenzen $x^n, n > 0$:

$$\boxed{(x^n)' = n \cdot x^{n-1},\ n \in \mathbb{Z}}$$

Mit der Quotientenregel kann man z.B. auch die Funktion $tang(x) = sin(x)/cos(x)$, $x \neq \pi/2 + k\pi$, differenzieren. Man erhält

$$(tang(x))' = \left(\frac{sin(x)}{cos(x)}\right)' = \frac{cos^2(x) + sin^2(x)}{cos^2(x)} = \frac{1}{cos^2(x)}.$$

Mit der Kettenregel behandelt man alle geschachtelten Funktionen. Z.B. ist für $a, b \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dx} f(a \cdot x + b) = \frac{df}{dx}(ax + b) \cdot \frac{d(ax + b)}{dx} = f'(ax + b) \cdot a.$$

So können wir die allgemeinen Potenzfunktionen differenzieren:

$$(a^x)' = \frac{d}{dx} e^{x \cdot ln(a)} = e^{x \cdot ln(a)} \cdot ln(a) = a^x \cdot ln(a),$$

oder

$$(x^a)' = \frac{d}{dx} e^{a \cdot ln(x)} = e^{a \cdot ln(x)} \cdot a \cdot (ln(x))' = a \cdot x^a \cdot (ln(x))'.$$

Au weia, das ging ins Auge, weil wir den Logarithmus noch nicht zu differenzieren gelernt haben. Wir wissen eigentlich auch noch gar nicht, ob er überhaupt differenzierbar ist. Das müssen wir uns als nächstes anschauen.

Der Logarithmus ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion. Damit kommen wir also jetzt zum Differenzieren von Umkehrfunktionen.

Eines ist klar: Besitzt die differenzierbare Funktion f eine differenzierbare Umkehrfunktion g, gilt also $g(f(x)) \equiv x$, dann folgt aus der Kettenregel

$$1 = x' = \frac{d}{dx}(g(f(x)) = g'(f(x)) \cdot f'(x),$$

also

$$\boxed{g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}}$$

Das ist die Fomel für die Ableitung der Umkehrfunktion. Man sieht, gut gehen kann das nur, wo $f'(x) \neq 0$. Aber die Frage ist, wann ist die Umkehrfunktion differenzierbar?

Satz 3.4 (Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion) *Die Funktion f sei streng monoton und differenzierbar auf dem Intervall $[x_1, x_2]$. (Nach Satz 2.17 besitzt sie dann eine stetige, streng monotone Umkehrfunktion $g : [y_1, y_2] \to [x_1, x_2]$.) Wenn $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in]x_1, x_2[$, dann ist die Umkehrfunktion auf dem offenen Intervall $]y_1, y_2[$ auch wieder differenzierbar.*

Beweis. Wir zeigen die Existenz des Differentialquotienten für die Umkehrfunktion g in einem festen Punkt $y_0 = f(x_0) \in]y_1, y_2[$. Dazu lassen wir eine Folge $(y_n)_{n\geq 3}$ von Punkten $y_n \in]y_1, y_2[$ gegen y_0 konvergieren. Wir nehmen $y_n \neq y_0$ für alle n an, denn wir wollen ja

$$\lim_{\substack{y \to y_0 \\ y \neq y_0}} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}$$

untersuchen. Weil f streng monoton vorausgesetzt ist, ist dann für $x_n := g(y_n)$ auch $x_n \neq x_0$. Wegen der Stetigkeit der Umkehrfunktion g ist $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Und es folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(y_n) - g(y_0)}{y_n - y_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

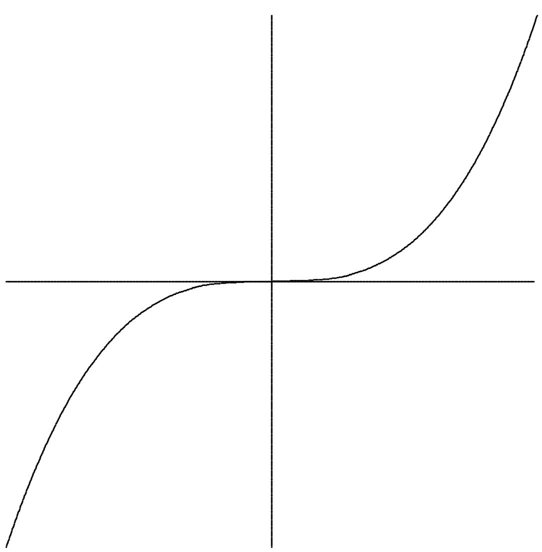
□

Beispiel 3.5 *Ein typisches Beispiel, das die Rolle der Bedingung $f'(x_0) \neq 0$ zeigt, ist die Funktion*

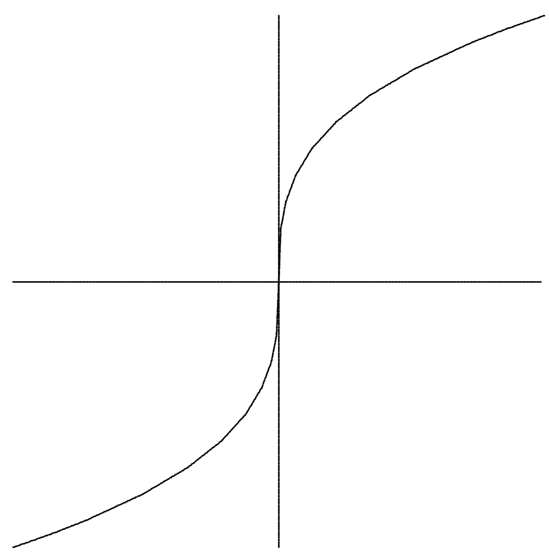
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^3.$$

Diese Funktion wächst streng monoton und hat die stetige, streng monoton wachsende Umkehrfunktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto \sqrt[3]{y}.$$



Die Funktion $f(x) = x^3$



Die Umkehrfunktion $g(y) = \sqrt[3]{y}$

Die Funktion f ist überall differenzierbar, aber $f'(0) = 0$. Die Umkehrfunktion ist auch genau an dieser Stelle nicht differenzierbar, denn wenn sie differenzierbar wäre, wäre ihre Steigung dort unendlich.

Damit können wir jetzt den natürlichen Logarithmus differenzieren:

$$ln(x)' = \frac{1}{(e^y)'|_{y=ln(x)}} = \frac{1}{e^{ln(x)}} = \frac{1}{x}.$$

Für die Potenzfunktion x^a folgt daraus

$$(x^a)' = \frac{d}{dx} e^{a \cdot ln(x)} = e^{a \cdot ln(x)} \frac{d}{dx}(a \cdot ln(x)) = x^a \cdot \frac{a}{x} = a \cdot x^{a-1}.$$

Das passt genau zu der Formel $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, n \in \mathbb{Z}$.

Wir können dies insbesondere auf $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ anwenden und erhalten

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{d}{dx} x^{1/n} = \frac{1}{n} x^{1/n-1} = \frac{1}{n} x^{-(n-1)/n} = \frac{1}{n} \frac{1}{(\sqrt[n]{x})^{n-1}}.$$

Zum Abschluss dieses Paragraphen möchte ich noch zwei etwas exotischere Umkehrfunktionen differenzieren: den Arcus-Tangens und den Arcus-Sinus:

$$\frac{d}{dx} arctg(x) = \frac{1}{(tang(y))'|_{y=arctang(x)}} = cos^2(arctang(x)).$$

Was ist denn hier noch zu machen? Wenn $y = arctg(x)$ ist, dann ist $x = tang(y)$ und

$$x^2 = tang^2(y) = \frac{sin^2(y)}{cos^2(y)} = \frac{1 - cos^2(y)}{cos^2(y)} = \frac{1}{cos^2(y)} - 1$$

$$cos^2(y) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Wir bekommen also die sehr überraschende Formel

$$\boxed{\frac{d}{dx} arctg(x) = \frac{1}{1+x^2}.}$$

Ähnlich ist

$$\frac{d}{dx} arcsin(x) = \frac{1}{(sin(y))'|_{y=arcsin(x)}} = \frac{1}{cos(arcsin(x))}.$$

Wenn $y = arcsin(x)$ ist, dann ist $x = sin(y)$ und

$$cos(arcsin(x)) = \sqrt{1 - sin^2(arcsin(x))} = \sqrt{1-x^2}.$$

Es folgt also

$$\boxed{\frac{d}{dx} arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.}$$

Aufgabe 3.2 *Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden, auf* $]0,\infty[$ *definierten Funktionen:*

$$g_1(x) := x \cdot ln(x), \quad g_2(x) := \frac{ln(x)}{x}, \quad g_3(x) := \frac{1}{ln(x)}.$$

Aufgabe 3.3 *Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden, auf* $]0,\infty[$ *definierten Funktionen:*

$$f_1(x) := x^{(x^x)}, \quad f_2(x) := (x^x)^x, \quad f_3(x) := x^{(x^a)}, \quad f_4(x) := x^{(a^x)}, \quad f_5(x) := a^{(x^x)}.$$

Dabei ist $a > 0$ *eine reelle Konstante.*

Aufgabe 3.4 (Logarithmische Ableitung) *Es seien* $f, g :]a,b[\to \mathbb{R}$ *differenzierbare Funktionen mit* $(f \cdot g)(x) \neq 0$ *für alle* $x \in]a,b[$*. Zeigen Sie*

$$\frac{(f \cdot g)'}{fg} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}.$$

3.3 Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

3.3.1 Lokale Extrema

Definition 3.3 *Es sei* $f : D \to \mathbb{R}$ *eine reelle Funktion. Ein Punkt* $x_0 \in D$ *heißt ein* lokales Maximum *(bzw.* Minimum*), wenn ein* $\delta > 0$ *existiert mit*

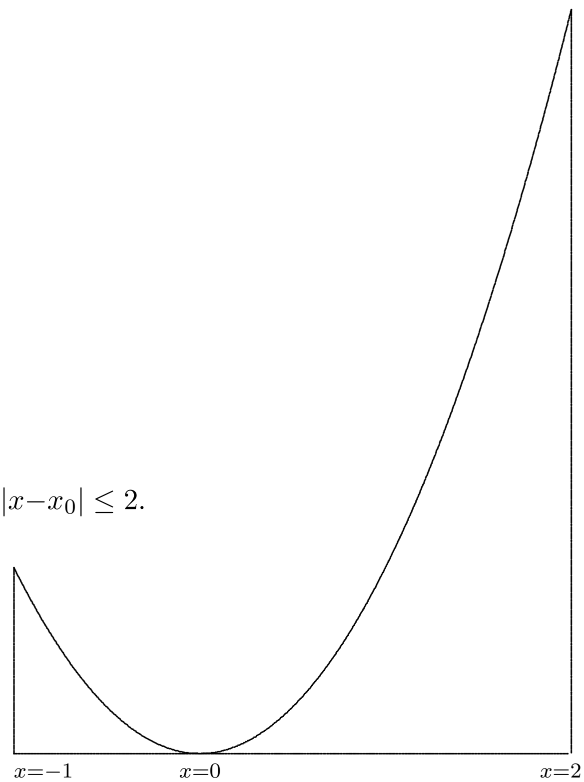
$$x \in D,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$$

(bzw. $f(x) \geq f(x_0)$ *bei einem lokalen Minimum). Ein* lokales Extremum *ist entweder ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum.*

Beispiel 3.6 *Betrachten wir als Beispiel die Funktion $f(x) = x^2$ auf dem Intervall $D := [-1, 2]$. Es ist $f(0) = 0 \leq x^2 = f(x)$ für alle $x \in D$. Also ist $x_0 = 0$ ein lokales Minimum. Es ist sogar ein* globales *Minimum. Weiter ist $f(2) = 4 \geq x^2 = f(x)$ für alle $x \in D$. Also ist $x_0 = 2$ ein globales Maximum. Schauen wir uns noch den linken Endpunkt $x_0 = -1$ von D an. Hier ist*

$$f(-1) = 1 \geq x^2 = f(x) \text{ für alle } x \in D \text{ mit } x \leq 1, \text{ d.h. } |x - x_0| \leq 2.$$

Also ist x_0 ein lokales Maximum. Wegen $f(x_0) = 1 < f(2) = 4$ ist dieses Maximum kein globales Maximum.



Nach dem Satz vom Maximum besitzt eine stetige Funktion auf einem beschränkten, abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ immer ein (globales) Maximum und ein (globales) Minimum. Ein Extremum (lokal oder global) kann in einem Endpunkt des Intervalls liegen. Das kann man rauskriegen, indem man - wie im obigen Beispiel - die Werte in den Endpunkten ausrechnet. Ein Extremum im Innern kann man so nicht rauskriegen, weil man nicht unendlich viele Funktionswerte ausrechnen und miteinander vergleichen kann. Hier hilft das Berechnen der Ableitung.

Satz 3.5 (Extrema, notwendige Bedingung) *Die Funktion f sei differenzierbar auf einem offenen Intervall $]a, b[$. Wenn $x_0 \in]a, b[$ ein lokales Extremum dieser Funktion ist, dann gilt*

$$f'(x_0) = 0.$$

(Der Punkt x_0 liegt automatisch im Innern des Intervalls, nicht auf dem Rand, weil das Intervall offen ist.)

Beweis. Wir führen den Beweis nur in dem Fall, dass x_0 ein lokales Maximum ist. Bei einem lokalen Minimum geht er analog.

Nach Voraussetzung gibt es also ein δ mit

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad x \in]a, b[\text{ und } f(x) \leq f(x_0).$$

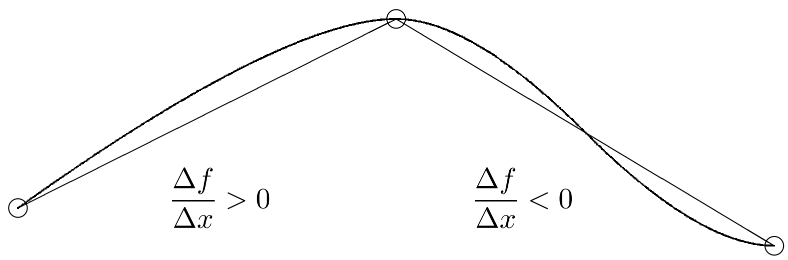
Für diese x ist dann der Differenzenquotient

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \leq 0 & \text{falls} \quad x > x_0 \\ \geq 0 & \text{falls} \quad x < x_0 \end{cases}$$

Es gibt Folgen x_n, die gegen x_0 konvergieren, mit $x_n < x_0$. Deswegen muss

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \geq 0$$

sein. Ebenso gibt es Folgen, die gegen x_0 konvergieren, mit $x_n > x_0$. Daraus folgt, dass auch $df/dx(x_0) \leq 0$ sein muss. Beides zusammen zeigt $df/dx(x_0) = 0$. $\square$



Der eben bewiesene Satz ist nicht umkehrbar! Wenn in einem Punkt x_0 gilt $f'(x_0) = 0$, so braucht dort kein lokales Extremum vorzuliegen. Das ist z.B. so für die Funktion $f(x) = x^3$ im Punkt $x_0 = 0$.

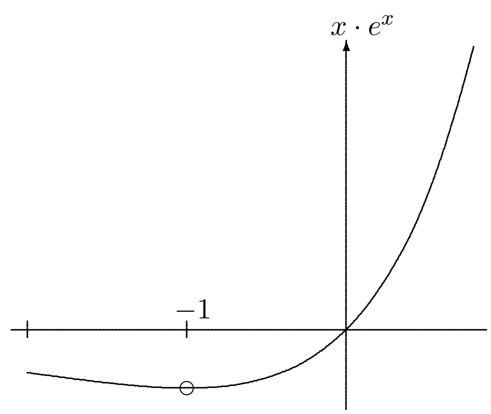
Beispiel 3.7 *Ich möchte noch ein Rechenbeispiel diskutieren: Die Funktion*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x \cdot e^x.$$

Sie ist differenzierbar mit Ableitung

$$f'(x) = e^x + x \cdot e^x = (1 + x) \cdot e^x.$$

Diese Ableitung verschwindet nur im Punkt $x = -1$, nur dort kann ein lokales Extremum vorliegen. Ist das aber auch wirklich eines? Dazu diskutieren wir den globalen Verlauf des Funktionsgraphen. Für $x \to \infty$ ist $\lim f(x) = \infty$. Die Funktion wächst also rechts von $x = -1$ monoton. (Es kann ja nirgends ein lokales Extremum sein.) Für $x \to -\infty$ geht $f(x)$ gegen 0. Weil $f(-1) = -1/e < 0$ ist, muss die Funktion links von $x = -1$ (monoton) fallen. Der Punkt $x = -1$ ist also tatsächlich ein lokales, sogar ein globales Minimum.



3.3.2 Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Es gibt drei Versionen des Mittelwertsatzes. Die einfachste Version davon ist der folgende Satz.

Satz 3.6 (von Rolle) *Die Funktion f sei stetig auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ und differenzierbar auf dem offenen Intervall $]a, b[$. Wenn*

$$f(a) = f(b)$$

gilt, dann gibt es ein $\xi \in]a, b[$ mit

$$f'(\xi) = 0.$$

Beweis. Nach dem Satz vom Maximum nimmt die Funktion f ihr Maximum in einem Punkt $\xi \in [a, b]$ an. Entweder ist $\xi \in]a, b[$ ein innerer Punkt des Intervalls, oder ξ ist ein Randpunkt. In diesem Fall ist $f(x) \leq f(a)$ für alle $x \in [a, b]$. Dann betrachten wir den Punkt $\xi \in [a, b]$, in dem f sein Minimum annimmt. Entweder ist dieses ξ ein innerer Punkt des Intervalls, oder das Maximum $f(a)$ der Funktionswerte von f ist zugleich das Minimum. Dann ist aber $f = const$ und $f'(\xi) = 0$ für jeden Punkt $\xi \in]a, b[$.

Wenn also f nicht konstant ist, dann gibt es einen inneren Punkt ξ des Intervalls (a, b), in dem f ein Extremum annimmt. Nach Satz 3.5 ist $f'(\xi) = 0$. □

Satz 3.7 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung) *Die Funktion f sei stetig auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ und differenzierbar auf dem offenen Intervall $]a, b[$. Dann gibt es ein $\xi \in]a, b[$ mit*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Der Satz von Rolle ist der Spezialfall $f(a) = f(b)$ dieses Satzes.

Beweis des Mittelwertsatzes. Wir führen die Aussage auf den Satz von Rolle zurück, indem wir von f zur Funktion

$$F(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

übergehen. Es ist

$$\begin{aligned}
F(a) &= f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot 0 \\
&= f(a), \\
F(b) &= f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (b - a) \\
&= f(b) - (f(b) - f(a)) \\
&= f(a).
\end{aligned}$$

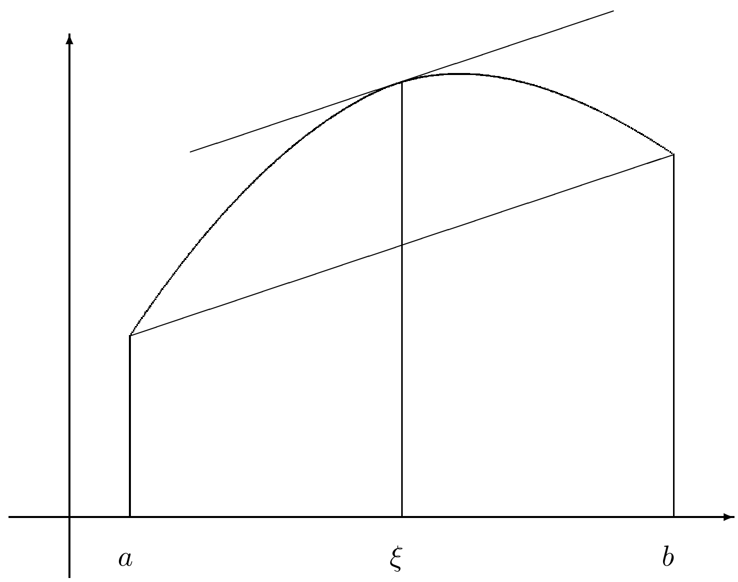
Also erfüllt F die Voraussetzung $F(a) = F(b)$ des Satzes von Rolle. Deswegen gibt es einen Punkt $\xi \in]a, b[$, in dem die Ableitung F' verschwindet. Nun ist

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

und aus $F'(\xi) = 0$ folgt dann

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□



Der Mittelwertsatz selbst ist ziemlich theoretisch, und man benutzt ihn selten. Seinen Anwendungen dagegen begegnet man auf Schritt und Tritt. Stellen wir einige davon zusammen:

1) *Ist die Funktion f differenzierbar auf dem Intervall $]a, b[$ mit der Ableitung $f' \equiv 0$, dann ist sie konstant*

Beweis. Wir greifen uns zwei beliebige Punkte $x_1 < x_2$ aus dem Intervall heraus. Nach dem Mittelwertsatz ist

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1) = 0 \cdot (x_2 - x_1) = 0.$$

Also sind alle Funktionswerte $f(x)$, $x \in]a, b[$, gleich. die Funktion ist konstant. □

2) *Ist die Funktion f differenzierbar auf dem Intervall $]a, b[$, und ist ihre Ableitung f' durch*

$$m \leq f'(x) \leq M \qquad \textit{für alle } x \in]a, b[$$

beschränkt, so gilt für je zwei Punkte $x_1 \leq x_2 \in]a, b[$

$$m \cdot (x_2 - x_1) \leq f(x_2) - f(x_1) \leq M \cdot (x_2 - x_1).$$

Beweis. Die Aussage folgt sofort aus $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1)$. □

3) *Ist die Funktion f differenzierbar auf dem Intervall $]a, b$ mit Ableitung $f' > 0$, dann wächst die Funktion dort streng monoton. (Analog: $f' < 0 \Longrightarrow$ streng monoton fallend, $f' \geq 0 \Longrightarrow$ monoton steigend, $f' \leq 0 \Longrightarrow$ monoton fallend.)*

Beweis. Für $x_1 < x_2 \in (a, b)$ ist

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1) > 0.$$

□

4) *(Eindeutigkeit der e-Funktion): Ist f auf dem Intervall $]a, b[$ differenzierbar mit $f' \equiv f$, dann gilt $f(x) = c \cdot e^x$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ für alle $x \in]a, b[$.*

Beweis. Wir betrachten die differenzierbare Funktion

$$F(x) := f(x) \cdot e^{-x}.$$

Ihre Ableitung ist

$$F'(x) = f'(x) \cdot e^{-x} - f(x) \cdot e^{-x} = f(x) \cdot (e^{-x} - e^{-x}) = 0.$$

Also ist $F \equiv c$ und $f(x) = c \cdot e^x$. □

3.3.3 Die Regel von de l'Hospital

Der Mittelwertsatz besitzt noch eine Verallgemeinerung, die schwer zu merken und kaum anzuwenden ist, außer eben beim Beweis der Regel von de l'Hospital.

Satz 3.8 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung, allgemeinste Form) *Die zwei Funktionen f und g seien stetig auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ und differenzierbar auf dem offenen Intervall $]a, b[$, mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in]a, b[$. Dann ist $g(b) \neq g(a)$ und es gibt ein $\xi \in]a, b[$ mit*

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

(Der Mittelwertsatz ist hierin als Spezialfall $g(x) \equiv x$ enthalten.)

Beweis. Die Aussage $g(a) \neq g(b)$ folgt sofort aus dem Satz von Rolle. Zum Beweis der Formel betrachten wir die Hilfsfunktion

$$F(x) := f(x) - (g(x) - g(a)) \cdot \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Sie ist auch stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf $]a, b[$. Und wieder gilt

$$F(a) = f(a) = F(b).$$

Nach dem Satz von Rolle gibt es also ein $\xi \in]a, b[$ mit

$$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - g'(\xi) \cdot \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Wenn wir diese Gleichung etwas umordnen, erhalten wir die behauptete Formel. □

Satz 3.9 (Regel von de l'Hospital) *Die beiden Funktionen f und g seien stetig auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ und differenzierbar auf dem offenen Intervall $]a, b[$, mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in]a, b[$. Weiter sei $f(a) = g(a) = 0$, der Quotient $f(a)/g(a)$ also nicht definiert. Wenn der Grenzwert*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existiert, dann existiert auch der Grenzwert

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x)}{g(x)},$$

und beide Grenzwerte stimmen überein.

Beweis. Für jedes $x \in]a, b[$ erfüllen die Funktionen f und g die Voraussetzungen des allgemeinen Mittelwertsatzes. Es gibt also zu jedem $x \in]a, b[$ ein $\xi_x \in]a, x[$ mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}.$$

Für $x \to a$ geht auch $\xi_x < x$ gegen a. Wenn dabei der Quotient auf der rechten Seite der Gleichung gegen einen Grenzwert geht, dann geht auch der Quotient auf der linken Seite gegen diesen Grenzwert. $\square$

Beispiel 3.8 *Betrachten wir zuerst den uns bereits bekannten Grenzwert*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$

Wenn wir Zähler und Nenner differenzieren, wird

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{l'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1.$$

Beispiel 3.9 *Etwas unheimlicher ist schon*

$$\lim_{x\to 0, x>0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x} \cdot ln(1+x)}.$$

Mit de l'Hospital sehen wir

$$\lim_{x\to 0} \frac{ln(1 + x)}{x} \stackrel{l'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1/(1 + x)}{1} = 1,$$

und weil die e-Funktion stetig ist, wird

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x} \cdot ln(1+x)} = e^1 = e.$$

Aus diesem Resultat folgt natürlich auch ($x := 1/n$)

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

eine Formel, die vielleicht auch schon aus der Schule bekannt ist.

Beispiel 3.10 *Ändern wir das letzte Beispiel etwas ab:*

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0} e^{x\cdot ln(1+1/x)}.$$

Es ist

$$\lim_{x\to 0} x\cdot ln(1+\frac{1}{x}) = \lim_{x\to 0}\frac{ln(1+1/x)}{1/x} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to}\frac{\frac{1}{1+1/x}\cdot(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+1/x} = 0.$$

Mit der Stetigkeit der e-Funktion erhalten wir schließlich

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^0 = 1.$$

Im letzten Beispiel haben wir den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} x\cdot ln(1+\frac{1}{x})$$

vom Typ $0\cdot\infty$ umgeschrieben in einen Quotienten vom Typ ∞/∞ und darauf de l'Hospital angewendet. Das ist erlaubt, ich möchte aber nicht weiter darauf eingehen. Man kann damit also auch gelegentlich Produkte und nicht nur Quotienten untersuchen. Überhaupt ist diese Regel sehr flexibel. Sie gilt auch für uneigentliche Grenzwerte (wo der Grenzwert $=\infty$ ist, oder $x\to\infty$ geht). Da gibt es viele Fälle, die ich hier nicht alle aufführen möchte.

3.3.4 Differenzieren und konvergente Funktionenfolgen

Es sei $(f_n)_{n\in N}$ eine Folge differenzierbarer Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$, die gegen eine Grenzfunktion $f : D\to\mathbb{R}$ konvergiert. Wir wollen hier die Frage behandeln, unter welcher Bedingung auch die Grenzfunktion differenzierbar ist, und die Folge (f_n') der Ableitungen gegen die Ableitung f' der Grenzfunktion konvergiert:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx}f_n = \frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty} f_n \ ?$$

Beispiel 3.11 *Zunächst ein einfaches Gegenbeispiel, das zeigt: selbst die Bedingung der gleichmäßigen Konvergenz reicht hierfür nicht aus. Wir betrachten die Funktionen*

$$f_n : \mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad f_n(x) := \frac{1}{n}sin(n\cdot x).$$

Wegen $|sin(x)|\le 1$ *konvergiert diese Folge auf ganz* $\mathbb{R}$ *gleichmäßig gegen die Nullfunktion* $f\equiv 0$*,*

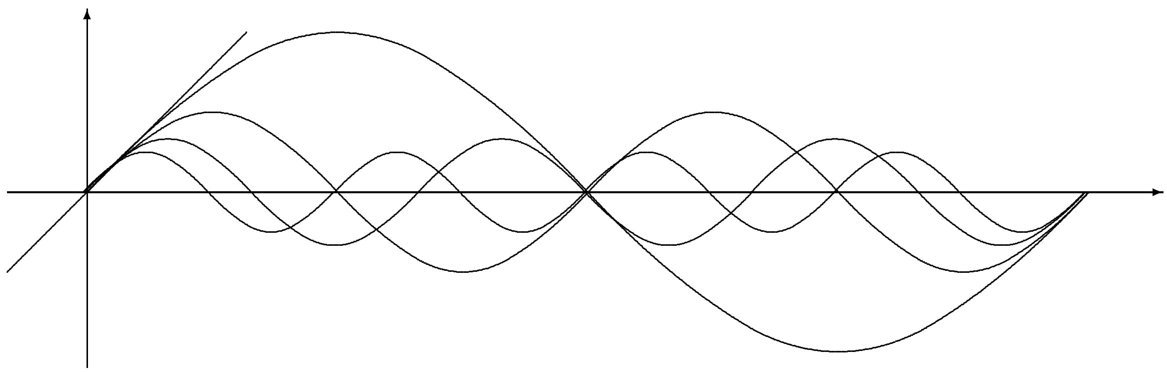
$$\lim_{n\to\infty} f_n \equiv 0 \quad \textit{(gleichmäßig)}.$$

Die Ableitungen sind

$$f_n' = \frac{1}{n}\cdot cos(n\cdot x)\cdot n = cos(n\cdot x).$$

Sie konvergieren keineswegs gegen $f'\equiv 0$*, z.B. ist*

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(0) = \lim_{n\to\infty} cos(n\cdot 0) = cos(0) = 1.$$



Die Bedingung dafür, dass die Folge der Ableitungen gegen die Ableitung der Grenzfunktion konvergiert, ist etwas kompliziert. Wir formulieren sie im folgenden Satz. Dieser Satz an sich ist nicht so furchtbar wichtig, aber wir werden ihn auf Potenzreihen anwenden, und diese Anwendung ist sehr wichtig.

Satz 3.10 (Ableitung und Funktionenfolgen) *Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen $f_n :]a,b[\to \mathbb{R}$. Es gebe Funktionen $f, g :]a,b[\to \mathbb{R}$ so, dass*

$$f_n \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} f \quad \text{und} \quad f_n' \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} g$$

auf $]a,b[$ gleichmäßig konvergieren. Dann ist die Grenzfunktion f differenzierbar mit Ableitung

$$f' = g.$$

Wenn man etwas genauer hinschaut, sieht man dass die Funktionen f_n selbst nur punktweise gegen f zu konvergieren brauchen, aber die gleichmäßige Konvergenz der Ableitungen ist unverzichtbar.

Beweis des Satzes. Wir beweisen die Aussage in einem festen Punkt $x_0 \in]a,b[$.

1) Wir definieren neue Funktionen $F_n : (a,b) \to \mathbb{R}$ (im wesentlichen die Differenzenquotienten der f_n) durch

$$F_n(x) := \begin{cases} \dfrac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} & (x \neq x_0) \\ f_n'(x_0) & (x = x_0), \end{cases}$$

Für die Grenzfunktion f definieren wir analog eine neue Funktion $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ durch

$$F(x) := \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & (x \neq x_0) \\ g(x_0) & (x = x_0). \end{cases}$$

Weil die f_n in x_0 differenzierbar sind, sind die F_n auf ganz $]a,b[$ stetig. Und wegen $f_n \to f$, $f_n' \to g$ konvergieren die F_n auf $]a,b[$ punktweise gegen F. Wir werden zeigen, dass die F_n auf $]a,b[$ sogar gleichmäßig gegen F konvergieren. Nach Satz 2.9 ist F also stetig. Insbesondere folgt daraus

$$g(x_0) = F(x_0) = \lim_{x\to x_0} F(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Also ist f in x_0 differenzierbar mit Ableitung $f'(x_0) = g(x_0)$.

2) Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Die stetigen Funktionen f_n' konvergieren gleichmäßig gegen g, also ist auch g stetig. Deswegen gibt es ein $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ mit

$$|x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad x \in]a, b[\text{ und } |g(x) - g(x_0)| < \frac{\epsilon}{4}.$$

Außerdem gibt es wegen der gleichmäßigen Konvergenz $f_n' \to g$ ein $N(\epsilon)$ mit

$$n > N(\epsilon) \quad \Longrightarrow \quad |g(x) - f_n'(x)| < \frac{\epsilon}{4} \text{ für alle } x \in]a, b[.$$

Für alle m und $n \in \mathbb{N}$ folgt aus dem Zwischenwertsatz für die differenzierbaren Funktionen f_m und f_n

$$F_m(x) - F_n(x) = f_m'(\xi_m) - f_n'(\xi_n)$$

mit Punkten $\xi_m = \xi_m(x)$ und $\xi_n = \xi_n(x)$ zwischen x und x_0. Ist nun $|x - x_0| < \delta$, so ist auch

$$|\xi_m - x_0| < \delta \text{ und } |\xi_n - x_0| < \delta.$$

Ist außerdem $m > N(\epsilon)$ und $n > N(\epsilon)$, so folgt

$$\begin{aligned} |F_m(x) - F_n(x)| &= |f_m'(\xi_m) - f_n'(\xi_n)| \\ &= |\underbrace{f_m'(\xi_m) - g(\xi_m)}_{<\epsilon/4} + \underbrace{g(\xi_m) - g(x_0)}_{<\epsilon/4} + \underbrace{g(x_0) - g(\xi_n)}_{<\epsilon/4} + \underbrace{g(\xi_n) - f_n'(\xi_n)}_{<\epsilon/4}| \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$|F_m(x) - F(x)| = |F_m(x) - \lim_{n\to\infty} F_n(x)| \le \epsilon$$

für $m > N(\epsilon)$ und $|x - x_0| < \delta(\epsilon)$.

3) Jetzt betrachten wir noch die $x \in]a, b[$ mit $|x - x_0| \ge \delta(\epsilon)$. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz $f_n \to f$ gibt es ein $N'(\epsilon)$ mit

$$n > N'(\epsilon) \quad \Longrightarrow \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \cdot \frac{\delta}{2} \text{ für alle } x \in]a, b[.$$

Daraus folgt für $|x - x_0| \ge \delta$

$$\begin{aligned} |F_n(x) - F(x)| &= \underbrace{\frac{1}{|x - x_0|}}_{<1/\delta} \cdot |\underbrace{f_n(x) - f(x)}_{<\epsilon\delta/2} - \underbrace{(f_n(x_0) - f(x_0))}_{<\epsilon\delta/2}| \\ &< \frac{1}{\delta} \cdot 2\epsilon\frac{\delta}{2} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Wenn $n > N(\epsilon)$ und $> N'(\epsilon)$ ist, dann gilt also

$$|F_n(x) - F(x)| < \epsilon$$

für alle $x \in]a, b[$. Das ist die behauptete gleichmäßige Konvergenz $F_n \to F$. $\square$

Satz 3.11 (Korollar: Gliedweises Differenzieren von Potenzreihen) *Auf dem Intervall $|x| < r$ sei die Funktion f in eine Potenzreihe*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

entwickelbar. Dann ist f differenzierbar mit Ableitung

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Die Potenzreihe für f' entsteht aus der von f durch gliedweises Differenzieren:

$$(a_n x^n)' = n a_n x^{n-1} \text{ für } n \geq 1.$$

Nach Satz 2.4 konvergiert sie auch auf dem Intervall $|x| < r$.

Beweis des Korollars. Auf jedem echten Teilintervall $|x| < \rho$, $\rho < r$ konvergieren die Partialsummen

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

der Potenzreihe für f gleichmäßig gegen f. Ihre Ableitungen

$$S_n' = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$$

sind die Partialsummen der modifizierten, auf $|x| < r$ konvergenten Potenzreihe

$$g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

und konvergieren deswegen auf $|x| < \rho$ gleichmäßig gegen g. Aus Satz 3.10 folgt

$$f' = \lim S_n' = g.$$

□

Beispiel 3.12 *Differenzieren wir als Beispiele einige uns mittlerweile hoffentlich sehr vertraute Potenzreihen:*

$$\begin{aligned} (e^x)' &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)' \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!}\right)' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\
&= e^x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(sin(x))' &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)' \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)' \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)x^{2n}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\
&= cos(x)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3.5 *Zeigen Sie, dass die Funktion*

$$f : [0, \infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) := x^n e^{-x}$$

genau ein relatives und absolutes Maximum an der Stelle $x = n$ besitzt.

Aufgabe 3.6 *Untersuchen Sie in Abhängigkeit von $a, b \in \mathbb{R}$ die Funktion*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := x^3 + ax^2 + bx$$

auf lokale Extrema.

Aufgabe 3.7 *Bestimmen Sie die lokalen Extrema für die Funktionen ($n \in \mathbb{N}$)*

$$f(x) := x^n e^x, \quad g(x) := x^n ln(x), \; (x > 0).$$

Aufgabe 3.8 *Bestimmen Sie den Maximalwert der Funktion $f(x) := x \cdot \sqrt{1 - x^2}$ für $0 < x < 1$.*

Aufgabe 3.9 (NV) *Am Rio Grande soll eine rechteckige Weide mit 80 000 Quadratmeter Fläche eingezäunt werden. Eine Seite der Weide wird vom geradlinigen Fluss begrenzt, hier ist kein Zaun nötig. Wie lang sind die Seiten der Weide zu wählen, damit die Zaunlänge minimal ist?*

Aufgabe 3.10 (NV) *Ein Draht der Länge 1m wird in zwei Teile der Längen x und y geschnitten, wobei die Extremfälle $x = 0$ und $x = 1$ auch möglich sind. Aus einem Teil wird ein Kreis gebogen, aus dem anderen ein Quadrat. Wie muss der Schnitt gelegt werden, damit die Summe der Flächen von Kreis und Quadrat minimal, bzw. maximal wird? (Hinweis: Ein Kreis vom Radius r hat den Umfang $2r\pi$ und die Fläche $r^2\pi$.)*

Aufgabe 3.11 *Ein Fischer befindet sich in einem Ruderboot auf dem Meer 8 km vom geradlinigen Strand entfernt. Der ihm am nächsten liegende Punkt am Strand sei A. Der Fischer möchte zu einem anderen am Strand liegenden Punkt, und zwar möglichst schnell. Welchen Punkt am Strand sollte er ansteuern, wenn er mit einer Geschwindigkeit von 3 km/h rudern und mit 6 km/h marschieren kann, und wenn B in 10 km Entfernung von A liegt?*

Aufgabe 3.12 *Bestimmen Sie die Grundseite g und die Höhe h eines dem Einheitskreis einbeschriebenen Rechtecks so, dass gh^2 maximal wird.*

Aufgabe 3.13 (V) *Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei durch*

$$g(y) := e^y + sin(y)$$

definiert.
a) *Weshalb ist die Einschränkung $g|[0, \infty]$ streng monoton, die Einschränkung $g|] - \infty, 0]$ aber nicht?*
b) *Es sei $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion von $g|[0, \infty[$, also $g(f(x)) = x$ für alle $x \in [1, \infty[$. Weiter sei $x_0 > 1$. Berechnen Sie $f'(x_0)$ aus y_0.*

Aufgabe 3.14 (V) *Zeigen Sie:*
a) *Für jedes $x \in]0, \infty[$ konvergiert die Reihe*

$$F(x) := -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^2 x}.$$

b) *Die entstehende Funktion $F :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ ist differenzierbar mit*

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^4 e^{-n^2 x}.$$

Aufgabe 3.15 (NV) *Die Funktion $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ sei gegeben durch*

$$f(x) := 2e^x - x.$$

Zeigen Sie:
a) $f(]0, \infty[) =]2, \infty[$,
b) *f besitzt eine differenzierbare Umkehrfunktion f^{-1},*
c) *für alle $x \neq y \in]2, \infty[$ gilt $|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)| < |x - y|$.*

Aufgabe 3.16 (NV) *Die Funktionen* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *seien stetig und auf* $]a, b[$ *differenzierbar. Weiter sei* $f(a) = g(a)$ *und* $f'(x) < g'(x)$ *für alle* $x \in]a, b[$. *Zeigen Sie*

$$f(x) < g(x) \quad \textit{für alle} \quad x \in]a, b].$$

Aufgabe 3.17 (NV) *Zeigen Sie: Die Funktion*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := x + e^x$$

hat genau eine Nullstelle.

Aufgabe 3.18 (NV) *Zeigen Sie mit dem Mittelwertsatz, dass*

$$\frac{x}{1+x} \leq ln(1+x) \leq x \quad \textit{für alle} \quad x > -1.$$

Aufgabe 3.19 (NV) *Gegeben sei die Funktionenfolge*

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) := x \cdot exp(-nx^2).$$

a) *Zeigen Sie, dass diese Folge punktweise gegen eine differenzierbare Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *konvergiert.*
b) f_n' *sei die Ableitung von* f_n *und* f' *die Ableitung von* f. *Konvergiert die Folge* $(f_n')_{n \in \mathbb{N}}$ *punktweise gegen* f'*?*

Aufgabe 3.20 *Zeigen Sie:*

$$\lim_{n \to \infty} n(\sqrt[n]{q} - 1) = ln(q).$$

Aufgabe 3.21 *Es sei* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *eine stetig differenzierbare Funktion mit* $f(0) = 1$. *Beweisen Sie, dass*

$$\lim_{x \to 0} \sqrt[x]{f(x)} = e^{f'(0)}.$$

3.4 Höhere Ableitungen

Wenn die Ableitung f' einer differenzierbaren Funktion f wieder differenzierbar ist, kann man die Differentiation widerholen, usw.:

Definition 3.4 *Die Funktion* $f : D \to \mathbb{R}$ *heißt*

- *zweimal differenzierbar, wenn* f *differenzierbar und auch* f' *wieder differenzierbar ist. Man schreibt dann*

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = f'' := (f')'.$$

$\vdots$

- *n-mal differenzierbar, wenn f schon $n-1$-mal differenzierbar ist und die $(n-1)$-te Ableitung $f^{(n-1)}$ wieder differenzierbar ist. Man schreibt dann*

$$\frac{d^n f}{dx^n} = f^{(n)} := (f^{(n-1)})'.$$

- *unendlich oft differenzierbar, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ die Funktion f n-mal differenzierbar ist.*
- *n-mal stetig differenzierbar, wenn f n-mal differenzierbar und die n-te Ableitung $f^{(n)}$ stetig ist.*

Manchmal benutzt man auch die Notationen

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^n(D) &:= \{f : D \to \mathbb{R},\ f\ n\text{-mal stetig differenzierbar}\} \\ \mathcal{C}^\infty(D) &:= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^n(D) \\ &= \{f : D \to \mathbb{R},\ f \text{ unendlich oft differenzierbar}\} \end{aligned}$$

Beispiel 3.13 *Die Funktion $f(x) := x$ ist unendlich oft differenzierbar:*

$$f' = 1,\ f'' = 0,\ f^{(n)} = 0 \textit{ für alle } n \geq 2.$$

Jedes Polynom ist unendlich oft differenzierbar, allerdings sind alle seine n-ten Ableitungen $= 0$, wenn n größer als der Grad des Polynoms ist.

Beispiel 3.14 *Die Funktion e^x ist unendlich oft differenzierbar mit*

$$f^{(n)} = e^x \textit{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beispiel 3.15 *Die Funktion $sin(x)$ ist unendlich oft differenzierbar mit*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} sin(x) &= cos(x), \\ \frac{d^2}{dx^2} sin(x) &= \frac{d}{dx} cos(x) \\ &= -sin(x) \\ \frac{d^3}{dx^3} sin(x) &= \frac{d}{dx}(-sin(x)) \\ &= -cos(x) \\ \frac{d^4}{dx^4} sin(x) &= \frac{d}{dx}(-cos(x)) \\ &= sin(x) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Beispiel 3.16 *Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei abschnittsweise definiert durch*

$$f(x) := \begin{cases} x^3 & \text{für} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Dann ist

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{für} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

wieder differenzierbar. Die zweite Ableitung

$$f''(x) = \begin{cases} 6x & \text{für} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

ist zwar stetig, aber im Nullpunkt nicht mehr differenzierbar. Damit ist die Funktion f zweimal stetig differenzierbar, und nicht öfter.

Beispiel 3.17 *Es gibt aber auch abschnittsweise definierte Funktionen, die unendlich oft differenzierbar sind. Ein Beispiel dafür ist die Funktion*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} e^{-1/x} & \text{für} \quad x > 0 \\ 0 & \text{für} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Außerhalb des Nullpunkts ist die Funktion differenzierbar, sogar unendlich oft. Der Differenzenquotient im Nullpunkt ist

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad x < 0 \\ \frac{1}{x} e^{-1/x} & \text{falls} \quad x > 0 \end{cases}$$

Und wegen

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} e^{-1/x} = \lim_{u \to \infty} u \cdot e^{-u} = 0$$

ist $f'(0) = 0$. Um einzusehen, dass f unendlich oft differenzierbar ist, beweist man durch vollständige Induktion:

(a_n) Es gibt Polynome p_n, $n \in \mathbb{N}$, mit

$$f^{(n)}(x) = p_n\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-1/x}$$

für $x > 0$.

(b_n) $f^{(n)}(0) = 0$.

Induktionsanfang: Aussage (b_1) haben wir soeben bewiesen, (a_1) folgt durch Differenzieren: Für $x > 0$ ist

$$f'(x) = e^{-1/x} \cdot \frac{1}{x^2} = p_1\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-1/x}$$

mit $p_1(u) := u^2$.

Induktionsschluss. $(a_n) \Longrightarrow (a_{n+1})$*: Für* $x > 0$ *differenzieren wir* $f^{(n)}$,

$$\begin{aligned}
(f^{(n)})' &= \frac{d}{dx}\left(p_n\left(\frac{1}{x}\right)\cdot e^{-1/x}\right) \\
&= p_n'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot e^{-1/x} + p_n\left(\frac{1}{x}\right)\cdot e^{-1/x}\cdot\frac{1}{x^2} \\
&= p_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot e^{-1/x}
\end{aligned}$$

mit

$$p_{n+1}(u) := u^2(p_n(u) - p_n'(u)).$$

(a_n) *und* $(b_n) \Longrightarrow (b_{n+1})$*: Der Differenzenquotient von* $f^{(n)}$ *im Nullpunkt ist*

$$\frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0} = \frac{f^{(n)}(x)}{x} = \begin{cases} 0 & \textit{für} \quad x < 0 \\ \frac{p_n(1/x)\cdot e^{-1/x}}{x} & \textit{für} \quad x > 0 \end{cases}$$

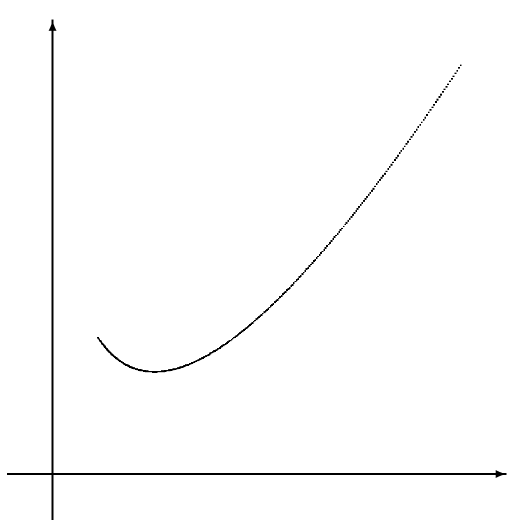
und wegen

$$\lim_{x\to 0} \frac{p_n(1/x)\cdot e^{-1/x}}{x} = \lim_{u\to\infty} u p_n(u) e^{-u} = 0$$

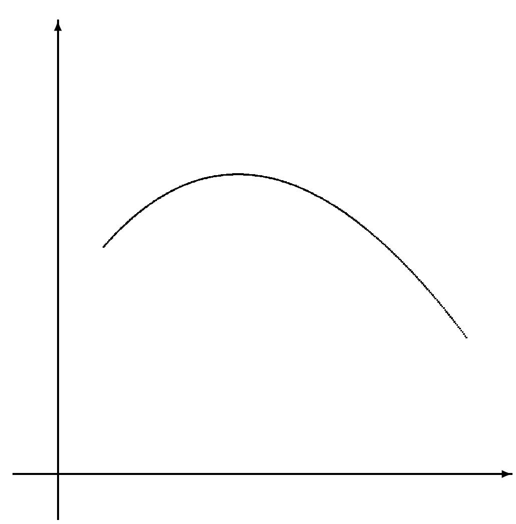
ist $f^{(n+1)}(0) = 0$. □

Die erste Ableitung f' macht Aussagen über die Änderung der Funktion f: ist etwa $f' > 0$, so ist die Funktion f streng monoton steigend.

Ähnlich macht die zweite Ableitung f'' Aussagen über die Änderung von f': Ist etwa $f'' > 0$, so ist f' streng monoton steigend. D.h., die Steigung der Funktion wächst monoton. Die Tangente weist immer stärker nach oben. Eine solche Funktion heißt *konvex*. Entsprechend heißt eine Funktion mit $f'' < 0$ *konkav*.



Konvexe Funktion



Konkave Funktion

Beispiel 3.18 *Für die Funktion $f(x) := arctg(x)$ ist*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2}, \\ f''(x) &= -\frac{2x}{(1+x^2)^2}. \end{aligned}$$

Also ist $arctg(x)$ eine monoton steigende Funktion, konvex für $x < 0$ und konkav für $x > 0$. Im Punkt $x = 0$ ist $f'' = 0$, die Krümmung geht von konvex in konkav über. Ein solcher Punkt heißt Wendepunkt.

Es ist klar, dass man diese Konvexitäts-/Konkavitäts-Eigenschaft heranziehen kann, um lokale Extrema zu charakterisieren.

Satz 3.12 (Extrema, hinreichende Bedingung) *Die Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar, im Punkt $x_0 \in (a, b)$ sogar zweimal differenzierbar. Wenn*

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) \neq 0,$$

dann liegt in x_0 ein lokales Extremum dieser Funktion vor, und zwar:

$$\begin{aligned} f''(x_0) > 0 &\implies \text{lokales Minimum,} \\ f''(x_0) < 0 &\implies \text{lokales Maximum.} \end{aligned}$$

Beweis. Es genügt den Fall $f''(x_0) > 0$ zu diskutieren. Nach Voraussetzung ist der Differentialquotient von f'

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0.$$

Es gibt deswegen ein $\delta > 0$ mit

$$|x - x_0| < \delta \quad \implies \quad x \in (a, b) \text{ und } \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0.$$

Für $x_0 - \delta < x < x_0$ ist also $f'(x) < 0$, links von x_0 fällt die Funktion streng monoton, und dort ist $f(x) > f(x_0)$. Für $x_0 < x < x + \delta$ dagegen ist $f'(x) > 0$, die Funktion wächst rechts von x_0 streng monoton, und auch hier ist $f(x) > f(x_0)$. Insgesamt ist $f(x) \geq f(x_0)$ für $|x - x_0| < \delta$, und deswegen hat die Funktion hier ein lokales Minimum. □

Beispiel 3.19 *Betrachten wir noch einmal die in 3.3.1 diskutierte Funktion $f(x) := x \cdot e^x$. Es ist*

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x+1) \cdot e^x, \\ f''(x) &= e^x + (x+1) \cdot e^x \\ &= (x+2) \cdot e^x. \end{aligned}$$

Im Punkt $x = -1$ ist

$$f' = 0 \textit{ und } f'' = e^{-1} > 0,$$

dort liegt also ein lokales Minimum. Im Punkt $x = -2$ übrigens ist $f'' = 0$. Dieser Punkt ist ein Wendepunkt, er trennt den konkaven Teil der Funktion ($x < -2$) vom konvexen Teil ($x > -2$).

Aufgabe 3.22 *Die Funktionen* $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ *seien auf ihrem Definitionsintervall* n*-mal differenzierbar. Zeigen Sie durch Induktion nach* n

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(f(x)g(x)\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x).$$

Aufgabe 3.23 *Diskutieren Sie den Verlauf (Extrema, Wendepunkte, Konvexität, Konkavität, Grenzwerte für* $x \to \pm\infty$*) der Funktion*

$$f(x) := \frac{2x}{x^2+1}.$$

Aufgabe 3.24 (NV) *Die Funktion* $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ *sei zweimal stetig differenzierbar und habe drei verschiedene Nullstellen. Zeigen Sie, dass es eine Stelle* $x_0 \in]a, b[$ *gibt mit* $f''(x_0) = 0$.

Aufgabe 3.25 (NV) *Mit* $a, b \in \mathbb{R}$, $b > -1$, *sei die Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definiert durch*

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{sinh(x)}{b + cosh(x)} & \text{für} \quad x < 0 \\ 0 & \text{für} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Bestimmen Sie a *und* b *so, dass* f *an der Stelle* $x = 0$ *dreimal stetig differenzierbar ist. Was ergibt sich dann für die Stetigkeit der vierten Ableitung?*

Aufgabe 3.26 *Das Legendre-Polynom* n*-ter Ordnung wird definiert durch*

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right).$$

Zeigen Sie, dass P_n *der folgenden Differentialgleichung genügt:*

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

3.5 Taylor-Formel und Taylor-Reihen

Definition 3.5 *Die Funktion $f]a,b[\to \mathbb{R}$ sei im Punkt $x_0 \in]a,b[$ mindestens n-mal differenzierbar. Dann heißt das Polynom*

$$p_n(x) = p_n(x_0, x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

das n-te Taylor-Polynom *von f bezüglich x_0.*

Mit dem Summenzeichen schreibt sich das Taylor-Polynom

$$p_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(x - x_0)^\nu.$$

Diese Form erinnert stark an die Exponentialreihe.

Die ersten Spezialfälle sind

$p_0(x) = f(x_0)$	Konstante (=Funktionswert)
$p_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$	Lineare Approximation (vgl. Satz 3.1)
$p_2(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2$	Quadratische Approximation

Den Mittelwertsatz

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = f(x_0) + f'(\xi) \cdot (x - x_0)$$

kann man auffassen als eine (nullte) Approximation von f durch die Konstante $f(x_0)$, das nullte Taylor-Polynom. Der Fehler dieser Approximation wird durch $f'(\xi) \cdot (x - x_0)$ gegeben. Wir brauchen eine analoge Formel für die Approximation der Funktion f durch das n-te Taylor-Polynom.

Das geht mit der h-Methode etwas übersichtlicher. Zunächst die nullte Approximation:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0 + \theta \cdot h) \cdot h.$$

Hier ist $x = x_0 + h$ gesetzt. Die Zahl ξ zwischen x_0 und $x = x_0 + h$ kann man dann

$$\xi = x_0 + \theta h \text{ mit } \theta \in \mathbb{R},\ 0 < \theta < 1$$

schreiben. Das n-te Taylor-Polynom sieht dann so aus:

$$p_n(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot h^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot h^n.$$

Satz 3.13 (Taylor-Formel) *Die Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ sei $(n+1)$-mal stetig differenzierbar und der Punkt $x_0 \in (a,b)$ sei fest gewählt. Zu jedem $h \in \mathbb{R}$ mit $x_0 + h \in (a,b)$ gibt es dann ein $\theta \in \mathbb{R}$, $0 < \theta < 1$ mit*

$$f(x_0 + h) = p_n(x_0 + h) + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta \cdot h)}{(n+1)!} \cdot h^{n+1}.$$

Die rechte Seite dieser Formel ist fast das $n+1$-te Taylor-Polynom. Die $n+1$-te Ableitung $f^{(n+1)}$ wird aber nicht im Entwicklungspunkt x_0 ausgewertet, sondern in einem Zwischenpunkt $x_0 + \theta \cdot h$.

Setzt man in dieser Formel $n = 0$, so entsteht die nullte Approximation, die mit dem Mittelwertsatz äquivalent ist. Und mit dem Mittlewertsatz, allerdings in der verallgemeinerten Version, werden wir auch die allgemeine Formel beweisen.

Beweis des Satzes. Das n-te Taylorpolynom $p_n(x)$ ist gerade so gemacht, dass seine ersten n Ableitungen im Entwicklungspunkt x_0 mit denen von f übereistimmen:

$$\begin{array}{rcl} p_n(x_0) & = & f(x_0) \\ p_n'(x_0) & = & f'(x_0) \\ p_n''(x_0) & = & f''(x_0) \\ & \vdots & \\ p_n^{(n)}(x_0) & = & f^{(n)}(x_0) \\ p_n^{(n+1)}(x) & \equiv & 0 \end{array}$$

Die Nenner im Taylor-Polynom sind gerade so gewählt, dass sie sich mit den Koeffizienten herauskürzen, die beim Differenzieren der Faktoren $(x - x_0)^\nu$ auftreten.

Jetzt betrachten wir die Differenz

$$g := f - p_n.$$

Diese Funktion erfüllt

$$g(x_0) = g'(x_0) = g''(x_0) = ... = g^{(n)}(x_0) = 0 \quad \text{ und } \quad g^{(n+1)}(x) \equiv f^{(n+1)}(x).$$

Wir nehmen nun $h > 0$ an, also $0 < h < b - x_0$. (Für $h < 0$ geht der Beweis analog.) Auf dem Intervall $[x_0, x_0 + h]$ erfüllen die Funktionen $g(x)$ und $(x - x_0)^{n+1}$ die Voraussetzungen des verallgemeinerten Mittelwertsatzes. Es gibt also eine Zwischenstelle $x_0 + \theta_1 \cdot h$, $0 < \theta_1 < 1$, mit

$$\frac{g(x_0 + h)}{h^{n+1}} = \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h^{n+1} - 0^{n+1}} = \frac{g'(x_0 + \theta_1 h)}{(n+1) \cdot (\theta_1 h)^n}.$$

Jetzt wendet man den verallgemeinerten Mittelwertsatz auf das Intervall $[x_0, x_0 + \theta_1 h]$ sowie die Funktionen $g'(x)$ und $(n+1)(x - x_0)^n$ an. Es folgt

$$\frac{g(x_0 + h)}{h^{n+1}} = \frac{g'(x_0 + \theta_1 h)}{(n+1)(\theta_1 h)^n} = \frac{g''(x_0 + \theta_2 h)}{(n+1)n \cdot (\theta_2 h)^{n-1}}$$

mit einem θ_2, $0 < \theta_2 < \theta_1$. So kann man weitermachen und erhält schließlich ein θ_{n+1}, $0 < \theta_{n+1} < \theta_n < ... < \theta_1 < 1$ mit

$$\frac{g(x_0 + h)}{h^{n+1}} = ... = \frac{g^{(n+1)}(x_0 + \theta_{n+1} h)}{(n+1)! \cdot (\theta_{n+1} h)^0},$$

also

$$g(x_0 + h) = \frac{g^{(n+1)}(x_0 + \theta_{n+1} h)}{(n+1)!} h^{n+1}.$$

Hier setzen wir wieder f und p_n ein:

$$f(x_0 + h) - p_n(x_0 + h) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)}{(n+1)!}.$$

Das ist genau die behauptete Formel. $\square$

Die Differenz $f - p_n$ zwischen einer Funktion f und ihrem n-ten Taylor-Polynom p_n nennt man das n-te *Restglied* R_n. Man braucht es, um abzuschätzen, wie gut die Funktion f durch ihr Taylor-Polynom approximiert wird. Wir haben die Fomel

$$f = p_n + R_n \quad \text{mit} \quad R_n(x_0 + h) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)}{(n+1)!} \cdot h^{n+1}$$

bewiesen. Diese Form heißt 'Lagrangesches Restglied'. Es gibt noch andere Formeln für das Restglied, mit denen man manchmal besser abschätzen kann, die man sich aber nur schwer merken kann. Wir brauchen sie nicht.

Beispiel 3.20 *Das n-te Taylor-Polynom der Exponentialfunktion e^x bezüglich $x_0 = 0$ ist*

$$p_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu!} \frac{d^\nu}{dx^\nu} e^x|_{x=0} x^\nu = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{x^\nu}{\nu!}.$$

Das ist genau die n-te Partialsumme der Exponentialreihe. Das n-te Restglied ist

$$R_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}, \quad |\theta| < 1.$$

Will man beispielsweise die Exponentialfunktion auf dem Intervall $[0,1]$ auf drei Stellen hinter dem Komma approximieren, so muss man

$$|R_n(x)| \leq \frac{e}{(n+1)!} < 0.0005$$

erreichen. In einer Übungsaufgabe des letzten Semesters war $e < 3$ zu zeigen. Wenn wir das benützen, sehen wir: es muss

$$(n+1)! > \frac{3}{0.0005} = 0.6 \cdot 10^4 = 6000$$

sein. Nun ist

$$4! = 24, \quad 5! = 120, \quad 6! = 720, \quad 7! = 5040,$$

also dürfte $n + 1 = 8$ genügen.

Beispiel 3.21 *Betrachten wir $cos(x)$ mit dem Entwicklungspunkt $x = 0$. Die Cosinus-Funktion hat $\pm sin(x)$ als Ableitungen ungeraden Grades, die verschwinden im Nullpunkt, in der Taylorformel treten sie nicht als Koeffizienten auf. Die geraden Ableitungen des Cosinus sind*

$$\frac{d^{2k}}{dx^{2k}} cos(x)|_{x=0} = (-1)^k.$$

Also ist das $2n$-te Taylorpolynom

$$p_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu)!} x^{2\nu},$$

der Anfang der Cosinus-Reihe. Das zugehörige Restglied ist

$$R_n(x) = \frac{\pm sin(\theta x)}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Will man den Cosinus auf dem Intervall $[0, \pi/2]$ *auf drei Stellen hinter dem Komma approximieren, so muss*

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1} < 0.0005$$

erreicht werden. Schätzen wir $\pi/2 < 2$ *ab, so heißt das*

$$(2n+1)! > \frac{2^{2n+1}}{0.0005} = 2^{2n+2} \cdot 10^3.$$

Das ist schon schwieriger:

$2n+1$	$(2n+1)!$	2^{2n+2}
7	5 040	256
9	362 880	1024
11	39 916 800	4096

Das dürfte genügen. Das Taylorpolynom p_{10} *leistet das gewünschte.*

Beispiel 3.22 *Jetzt möchte ich noch die Taylorpolynome des Logarithmus ausrechnen. Um den Nullpunkt können wir ihn nicht entwickeln, da ist er ja nicht definiert. Aber nehmen wir halt* $x_0 = 1$. *Wir brauchen für* $f(x) = ln(x)$ *die Ableitungen*

$$\begin{array}{rcl} f' &=& x^{-1} \\ f'' &=& -x^{-2} \\ f''' &=& 2x^{-3} \\ f^{(4)} &=& -6x^{-4} \\ &\vdots& \\ f^{(n)} &=& (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n} \end{array}$$

und die Taylorkoeffizienten

$$\frac{f^{(n)}(1)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \quad (n \geq 1).$$

Das n-te Taylorpolynom des Logarithmus $ln(x)$ *bezüglich* $x_0 = 1$ *ist also*

$$p_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} \pm ...$$

Das n-te Restglied ist

$$R_n(x) = \frac{(-1)^n \xi^{-(n+1)}}{n+1}(x-1)^{n+1} \text{ mit } \xi = 1 + \theta(x-1),\ \theta < 1.$$

Für $1 < x \leq 2$ ist auch $1 < \xi < x$ und

$$|R_n(x)| < \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)\xi^{n+1}} < \frac{1}{n}.$$

Wenn $1 \leq x \leq 2$ geht also $R_n \to 0$ für $n \to \infty$. Die Taylorpolynome konvergieren gegen $ln(x)$ auf dem Intervall $[1,2]$, der ln wird hier durch die Reihe

$$ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

dargestellt. Diese Information hat zwei Seiten.

Die positive: Wir finden so merkwürdige Formeln wie

$$ln(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm ...,$$

$$ln(3) - ln(2) = ln\left(\frac{3}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}.$$

Die negative: Für $0 < x < 1$ funktioniert unsere Restgliedabschätzung nicht, obwohl die Reihe hier genauso konvergiert, wie für $1 < x < 2$ (ihr Konvergenzradius ist ja $= 1$). Helfen wir uns mit einem Trick: Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n$$

stellt eine auf dem Intervall $(0,2)$ differenzierbare Funktion f dar mit der Ableitung (gliedweises Differenzieren)

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot n(x-1)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (1-x)^{n-1} = \frac{1}{x}.$$

Also ist

$$\frac{d}{dx}\left(f(x) - ln(x)\right) = 0$$

und $f(x) - ln(x)$ konstant. Diese Konstante ist $f(1) - ln(1) = 0$, deswegen ist $f(x) = ln(x)$ für $0 < x < 2$, und die Reihe konvergiert auch auf dem linken Teilintervall $(0,1)$ gegen den Logarithmus.

Wenn eine Funktion f in einem Punkt x_0 unendlich oft differenzierbar ist, kann man die *Taylor-Reihe* bezüglich x_0

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

hinschreiben. Aber:

- Diese Taylor-Reihe braucht nicht zu konvergieren.
- Selbst, wenn sie konvergiert, braucht sie nicht gegen f zu konvergieren. In 3.4, Beispiel 5) haben wir eine abschnittsweise definierte Funktion $f \not\equiv 0$ betrachtet, die unendlich oft differenzierbar ist mit $f^{(n)}(0) = 0$ für alle n. Ihre Taylor-Reihe ist identisch $\equiv 0$, kann also nicht gegen f konvergieren.

Satz 3.14 (Eindeutigkeit der Potenzreihenentwicklung) *Ist die Funktion f in einer Umgebung eines Punktes x_0 in eine Potenzreihe entwickelbar, so stimmt diese Potenzreihenentwicklung mit der Taylor-Reihe bezüglich x_0 überein.*

Beweis. O.B.d.A. nehmen wir $x_0 = 0$ an. Die Potenzreihen-Entwicklung von f sei

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu.$$

Nach 3.3.4 darf man konvergente Potenzreihen gliedweise differenzieren. Die Ableitung ist wieder eine konvergente Potenzreihe, die man wieder gliedweise differenzieren darf, usw. Deswegen ist f unendlich oft differenzierbar. Für die n-te Ableitung erhalten wir

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$	a_0
1	$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu a_\nu x^{\nu-1}$	a_1
2	$\sum_{\nu=2}^{\infty} \nu(\nu-1) a_\nu x^{\nu-2}$	$2 \cdot a_2$
3	$\sum_{\nu=3}^{\infty} \nu(\nu-1)(\nu-2) a_\nu x^{\nu-3}$	$2 \cdot 3 \cdot a_3$
$\vdots$		$\vdots$
n		$n! \cdot a_n$

Wir sehen also

Potenzreihen-Koeffizienten	$f^{(n)}(0)$	Taylor-Koeffizienten
a_n	$n! \cdot a_n$	a_n

Die Potenzreihen-Entwicklung ist mit der Taylor-Reihe identisch. $\square$

Wir hätten diesen Satz auch aus Satz 2.11 folgern können.

Wir kennen Potenzreihen-Entwicklungen für die folgenden Funktionen. Diese Entwicklungen sind dann also auch die Taylorreihen dieser Funktionen und konvergieren gegen dieselben:

Funktion	Reihe	Konvergenzradius
$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	1
$\frac{1}{(1-x)^2}$	$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$	1
$exp(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	∞
$sin(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	∞
$cos(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	∞
$ln(1+x)$	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$	1

Aus diesen Reihen kann man durch leichte Modifikationen eine Vielzahl ähnlicher Reihenentwicklungen herleiten. Z.B. kann man in der geometrischen Reihe x durch $-x$ erstzen und erhält

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \qquad (|x| < 1),$$

oder, wenn man hierin x durch x^2 ersetzt

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \qquad (|x| < 1).$$

Diesem Katalog möchte ich jetzt noch ein Beispiel hinzufügen: Die Potenzfunktion

$$f(x) = (1+x)^a, a \in \mathbb{R}, |x| < 1.$$

Durch Ableiten erhalten wir ihre Taylor-Koeffizienten:

n	$f^{(n)}(x)$	$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$
0	$(1+x)^a$	1
1	$a(1+x)^{a-1}$	a
2	$a(a-1)(1+x)^{a-2}$	$\frac{a(a-1)}{2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	$a(a-1)\cdot \ldots \cdot(a-k+1)(1+x)^{a-k}$	$\frac{a(a-1)\cdot \ldots \cdot(a-k+1)}{k!}$

Wenn a eine natürliche Zahl ist, und $k \leq a$, dann ist der Taylorkoeffizient

$$\frac{a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-k+1)}{k!} = \binom{a}{k}$$

ein Binomialkoeffizient. Wird hier aber $k \geq a+1$, so ist immer einer der Faktoren im Zähler $= a-(a+1)+1 = 0$, der Taylorkoeffizient ist $= 0$. Man erhält also für eine natürliche Zahl $a = n$ als Taylorreihe das Polynom

$$\sum_{n=0}^{a} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^a,$$

die Taylor-Entwicklung ist in diesem Fall genau die binomische Formel. Nichts hindert uns daran, auch für beliebige reelle Zahlen $a \in \mathbb{R}$ 'Binomialkoeffizienten'

$$\binom{a}{k} := \frac{a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-k+1)}{k!}$$

zu definieren. Mit diesen Koeffizienten ist dann also die Taylorreihe

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^k.$$

in Verallgemeinerung der binomischen Formel (der Spezialfall $a \in \mathbb{N}$).

Ob und wo diese *binomische Reihe* gegen $(1+x)^a$ konvergiert, ist noch eine ganz andere Frage. Wenn ich mich recht erinnere, wird die Restglied-Abschätzung hier sehr unangenehm. Zeigen wir erst einmal die Konvergenz mit dem Quotientenkriterium:

$$\left| \frac{\binom{a}{n+1} x^{n+1}}{\binom{a}{n} x^n} \right| = \left| \frac{a-n}{n+1} \cdot x \right| = \left| \frac{\frac{a}{n} - 1}{1 + \frac{1}{n}} \right| \cdot |x| \to |x|.$$

Die Binomialreihe konvergiert also für $|x| < 1$. Obwohl die Reihe für $|x| < 1$ konvergiert, und dort eine unendlich oft differenzierbare Funktion darstellt, braucht dies nicht die Ausgangsfunktion $(1+x)^a$ zu sein. Eine Restgliedabschätzung könnte dies klären, aber um die möchte ich mich drücken. Deswegen greife ich zu einem Kunstgriff:

Für die Funktion $f(x) = (1+x)^a$ ist

$$f'(x) = a(1+x)^{a-1} = \frac{a}{1+x} \cdot f,$$

für die Funktion

$$g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$$

ist

$$\begin{aligned} g'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{a}{n} x^{n-1} \\ (1+x)\cdot g'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left((n+1)\binom{a}{n+1} + n\binom{a}{n} \right) x^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a-1)\cdot \ldots \cdot (a-n) + n\cdot a(a-1)\cdot \ldots \cdot (a-n+1)}{n!} x^n \\
&= a \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n \\
&= a\cdot g.
\end{aligned}$$

Also erfüllt g dieselbe Gleichung

$$g'(x) = \frac{a}{1+x} g.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\left(\frac{g}{f}\right)' &= \frac{g'f - f'g}{f^2} \\
&= \frac{1}{f^2}\left(\frac{a}{1+x} gf - g\frac{a}{1+x} f\right) \\
&\equiv 0.
\end{aligned}$$

Die Funktion g/f ist also für $|x| < 1$ konstant, und zwar gleich der Konstanten

$$\frac{g(0)}{f(0)} = 1.$$

Also ist tatsächlich $f = g$ und wir haben die binomische Reihe

$$\boxed{(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n, \quad (a \in \mathbb{R},\, |x| < 1)}$$

Außer der binomischen Formel ($a \in N$) sind hierin noch andere interessante Spezialfälle enthalten:

- Der Fall $a = -1$: Die Binomialkoeffizienten sind

  $$\frac{(-1)(-2)\cdot \ldots \cdot (-n)}{n!} = (-1)^n$$

  und wir bekommen die bekannte Entwicklung

  $$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

- Der Fall $a = \frac{1}{2}$: Die Binomialkoeffizienten sind $= 1$ für $n = 0$ und für $n \geq 1$

  $$\begin{aligned}
  \binom{\frac{1}{2}}{n} &= \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdot \ldots \cdot (\frac{1}{2} - n + 1)}{n!} \\
  &= \frac{1}{2\cdot n!} \cdot \underbrace{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdot \ldots \cdot (-\frac{2n-3}{2})}_{n-1 \text{ Faktoren}} \\
  &= \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n!} \cdot 1\cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-3)
  \end{aligned}$$

Somit sind die Koeffizienten am Anfang

n	0	1	2	3	4
Koeffizient	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$-\frac{5}{128}$

und

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} \pm ...$$

- Der Fall $a = -\frac{1}{2}$ würde auf eine ähnliche Reihenentwicklung für

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

führen. Aber das könnte vielleicht doch etwas zu weit vom absoluten Pflicht-Stoff in der Differentialrechnung wegführen.

Aufgabe 3.27 *Zeigen Sie für $|x| < 1$*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n = -x + (1+x) \cdot ln(1+x).$$

Aufgabe 3.28 *Entwickeln Sie*

$$\frac{x}{x^2 - x - 2}$$

in eine Taylorreihe um $x_0 = 0$.

Aufgabe 3.29 (NV) *Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^x sin(x)$. Bestimmen Sie mit Hilfe der Taylor-Formel ein Polynom vom Grad 3 so, dass*

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - p(x)}{x} = 0.$$

Aufgabe 3.30 (NV) *Entwickeln Sie die Funktionen*

$$exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^x \quad und \quad f :]0, \infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$$

an der Stelle $x_0 = 1$ in eine Taylorreihe und geben Sie die Konvergenz-Intervalle dieser Reihen an.

Aufgabe 3.31 (NV) *Zeigen Sie für alle $x > 0$*

$$(1+x)^{3/2} < 1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2.$$

Aufgabe 3.32 (NV) *Zeigen Sie für* $|x| < 1$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)} = -x + (1+x)ln(1+x).$$

Aufgabe 3.33 (V) *Berechnen Sie*

$$\frac{1}{\sqrt{e}} = e^{-1/2}$$

mit einem Fehler $< 1/3000$. *Es genügt, eine Summe von (positiven oder negativen) Brüchen anzugeben.*

Aufgabe 3.34 (NV) *Beweisen Sie mit der Taylorformel: Für jedes* $x \in [0, \frac{1}{100}]$ *gilt*

$$0 \leq 1 + \frac{x}{2} - \sqrt{1+x} \leq \frac{1}{8} \cdot 10^{-4}.$$

Aufgabe 3.35 (NV) *Berechnen Sie für* $sin(1)$ *eine rationale Näherung so, dass der Fehler kleiner als* 0.001 *ist.*

Aufgabe 3.36 (NV) a) *Berechnen Sie das zweite Taylorpolynom* $p_2(x)$ *der Funktion* $sin(x - \frac{x^3}{3})$ *zum Entwicklungspunkt* 0.
b) *Zeigen Sie für alle* $x \in \mathbb{R}$ *mit* $|x| \leq 1$

$$|sin(x - \frac{x^3}{3}) - p_2(x)| \leq \frac{4}{3}|x^3|.$$

Damit möchte ich die Behandlung der Differentialrechnung beenden. Ich glaube, alles Wesentliche besprochen zu haben, und wende mich im nächsten Kapitel der Integralrechnung zu.

4 Integralrechnung

4.1 Treppenfunktionen

Bekanntlich ist das Integral $\int f(x)dx$ die Fläche unter dem Graphen der Funktion f. So kann man aber das Integral nicht definieren, denn was ist die Größe einer Fläche, die von einer krummen Linie begrenzt wird? Das ist schwierig. Deswegen schauen wir erst einmal Funktionen an, deren Graph eben keine krumme Linie ist, sondern Rechtecke begrenzt. Das sind die Treppenfunktionen. Zur Erinnerung

Definition 4.1 (s. 2.1) *Eine* Zerlegung *eines Intervalls (a,b) wird definiert durch endlich viele Zwischenpunkte*

$$a = t_0 < t_1 < ... < t_\nu < t_{\nu+1} < ... < t_{n-1} < t_n = b.$$

Die Teilintervalle *dieser Zerlegung sind die Intervalle $[t_\nu, t_{\nu+1}]$, $\nu = 0, ..., n-1$. Eine* Treppenfunktion *auf dem Intervall $[a,b]$ ist eine Funktion $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$, zu der es eine Zerlegung gibt, so, dass*

$$\varphi|(t_\nu, t_{\nu+1}) = c_\nu$$

auf den offenen Teilintervallen konstant ist.

Satz 4.1 (Treppenfunktionen) *Die Treppenfunktionen auf einem festen Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ bilden einen $\mathbb{R}$-Vektorraum $T[a,b]$.*

Beweis. Es ist zu zeigen:

$$\varphi \in T[a,b],\ c \in \mathbb{R} \Longrightarrow c \cdot \varphi \in T[a,b], \quad \varphi, \psi \in T[a,b] \Longrightarrow \varphi + \psi \in T[a,b].$$

Die erste Eigenschaft ist klar: Wenn $\varphi|(t_\nu, t_{\nu+1}) = c_\nu$ ist, dann ist auch $c \cdot \varphi|(t_\nu, t_{\nu+1}) = c \cdot c_\nu$ konstant, $c \cdot \varphi$ ist also eine Treppenfunktion zur gleichen Zerlegung wie φ.

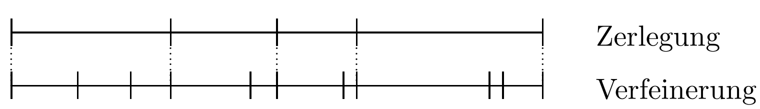
Die zweite Aussage ist ganauso einfach, wenn zu φ und ψ dieselbe Zerlegung gehört. Dann brauchen wir ja nur die (konstanten) Funktionen auf den Teilintervallen addieren, und die Summenfunktion ist auf denselben Teilintervallen auch wieder konstant. Aber das ist eben das Problem: Zwei Treppenfunktionen φ und ψ gehören i.A. zu zwei verschiedenen Zerlegungen.

Dieses Problem gehen wir fundamentalistisch an:

Definition 4.2 *Eine Zerlegung $a = s_0 < s_1 < ... < s_m = b$ heißt* Verfeinerung *der Zerlegung $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ oder* feiner als *diese Zerlegung, wenn*

$$\{s_0, s_1, ..., s_m\} \supset \{t_0, t_1, ..., t_n\}.$$

Jeder Zwischenpunkt der Zerlegung $\{t_\nu\}$ ist also auch ein Zwischenpunkt der Zerlegung $\{s_\mu\}$.



Satz 4.2 (Hilfssatz) *Je zwei Zerlegungen $\{t_\mu\}$ und $\{u_\nu\}$ desselben Intervalls besitzen eine gemeinsame Verfeinerung.*

Beweis. Wir bilden die Vereinigungsmenge

$$\{t_\mu\} \cup \{u_\nu\}$$

der Zwischenpunkte beider Zerlegungen, ordnen sie richtig, und nehmen sie als Zwischenpunkte einer neuen Zerlegung $\{s_\lambda\}$. Dann ist also

$$\{s_\lambda\} = \{t_\mu\} \cup \{u_\nu\}$$

und die neue Zerlegung ist feiner als die beiden ersten. □

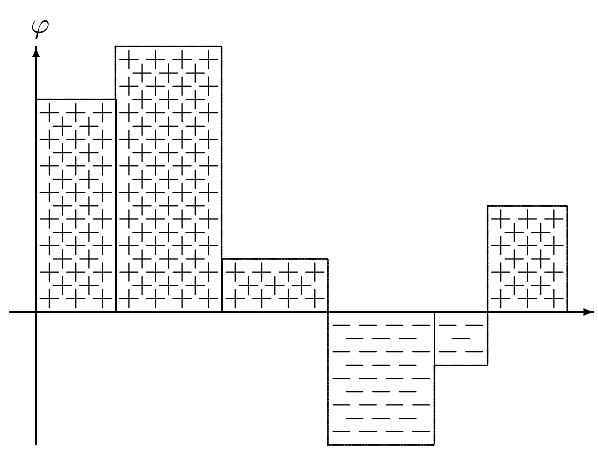
Ende des Beweises von Satz 4.1: Die Treppenfunktion $\varphi \in T[a, b]$ sei definiert bezüglich der Zerlegung $\{t_\mu\}$ und ψ bezüglich der Zerlegung $\{u_\nu\}$. Wir wählen eine gemeinsame Verfeinerung $\{s_\lambda\}$ für beide Zerlegungen. Auf den offenen Teilintervallen dieser feineren Zerlegung sind beide Treppenfunktionen konstant. Dann ist auch $\varphi + \psi$ darauf konstant und $\varphi + \psi \in T[a, b]$ eine Treppenfunktion. □

Definition 4.3 *Es sei $\varphi \in T[a, b]$ eine Treppenfunktion, konstant $= c_\nu$ auf den Intervallen $(t_\nu, t_{\nu+1})$ einer Zerlegung $\{t_\nu\}_{\nu=0,\ldots,n}$. Dann heißt die Zahl*

$$\int_a^b \varphi(x)dx := \sum_{\nu=0}^{n-1} c_\nu \cdot (t_{\nu+1} - t_\nu)$$

das Integral *der Treppenfunktion über das Intervall $[a, b]$.*

Jedes Produkt $c_\nu \cdot (t_{\nu+1} - t_\nu)$ ist die Fläche des Rechtecks zwischen dem Teilintervall $[t_\nu, t_{\nu+1}]$ und dem Graphen der Funktion φ über diesem Intervall. Ist $\varphi < 0$ auf diesem Teilintervall, so zählt diese Teilfläche negativ. Das Integral $\int \varphi$ ist die Summe all dieser Teilflächen. Es ist die (mit Vorzeichen genommene) Fläche zwischen dem Graphen von φ und der x-Achse.



Um dieses Integral $\int_a^b \varphi(x)dx = \sum c_\nu(t_{\nu+1} - t_\nu)$ über die Treppenfunktion φ zu berechnen, braucht man die Werte c_ν der Treppenfunktion und die Zwischenpunkte t_ν der Zerlegung. Die Zerlegung werden wir aber oft verfeinern. Dabei ändert sich natürlich das Integral nicht: Sind

$$t_\nu = s_k < s_{k+1} < ... < s_{l-1} < s_l = t_{\nu+1}$$

die Zwischenpunkte einer Verfeinerung $\{s_\lambda\}$ zwischen t_ν und $t_{\nu+1}$, so ist die Fläche des Teilrechtecks

$$\sum_{\lambda=k}^{l-1} c_\lambda \cdot (s_{\lambda+1} - s_\lambda) = c_\nu \cdot \sum_{\lambda=k}^{l-1} (s_{\lambda+1} - s_\lambda) = c_\nu \cdot (t_{\nu+1} - t_\nu)$$

unabhängig von der gewählten Verfeinerung. Das zeigt:

Beim Übergang von der Zerlegung $\{t_\nu\}$ zu einer Verfeinerung ändert sich das Integral $\int_a^b \varphi(x)dx$ nicht.

Satz 4.3 *Das Integral $\int_a^b \varphi(x)dx$ über Treppenfunktionen $\varphi \in T[a,b]$ hat die folgenden Eigenschaften:*

1) $c \in \mathbb{R}$, $\varphi \in T[a,b] \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b c \cdot \varphi(x)dx = c \cdot \int_a^b \varphi(x)dx$

2) $\varphi, \psi \in T[a,b] \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b (\varphi(x) + \psi(x))dx = \int_a^b \varphi(x)dx + \int_a^b \psi(x)dx$

3) $\varphi, \psi \in T[a,b]$ *mit* $\varphi \leq \psi$ *(d.h.,* $\varphi(x) \leq \psi(x)$ *für alle* $x \in [a,b]$*)*
$\Longrightarrow \quad \int_a^b \varphi(x)dx \leq \int_a^b \psi(x)dx.$

Die Beweise dieser Eigenschaften sind offensichtlich. Beim Beweis von 2) und 3) muss man halt zu einer gemeinsamen Verfeinerung für φ und ψ übergehen.

Ich habe diese Eigenschaften auch nicht hier aufgeschrieben, weil sie so tiefsinnig sind, sondern, weil ich sie dauernd brauchen werde, wenn ich das Integral über richtige Funktionen definieren und untersuchen werde.

Noch eine Bemerkung: Die Eigenschaften 1) und 2) zusammen bedeuten, dass die Abbildung

$$T[a,b] \to \mathbb{R}, \qquad \varphi \mapsto \int_a^b \varphi(x)dx$$

linear ist. Eigenschaft 3) nennt man 'Monotonie' dieser linearen Abbildung.

4.2 Das Riemann-Integral

In diesem Abschnitt werden wir definieren, was integrierbare Funktionen sind, und was deren Integral sein soll. Wir konzentrieren uns hier auf Definitionen und Begriffe, und nicht auf Rechenverfahren. Wir werden eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ von oben und von unten durch Treppenfunktionen approximieren, und ihr Integral $\int_a^b f(x)dx$ mit Hilfe der approximierenden Treppenfunktionen definieren. Diese Art, das Integral zu definieren, nennt man 'Riemann-Integral'. Es gibt noch andere Methoden, das Integral zu definieren. Die Bezeichnung 'Riemann-Integral' bezieht sich nicht auf die Zahl, die als Wert des

Integrals herauskommt (die ist auch bei anderen Integralbegriffen immer dieselbe), sondern auf die Art, wie das Integral definiert ist.

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beliebige (nicht notwendig stetige) Funktion. Wenn f nach oben beschränkt ist, etwa $f(x) \leq M$ für alle $a \leq x \leq b$, dann gibt es Treppenfunktionen $\varphi \in T[a,b]$ mit $f \leq \varphi$, z.B. die Treppenfunktion $\varphi(x) \equiv M$. Und umgekehrt: Wenn es eine Treppenfunktion $\varphi \in T[a,b]$ gibt mit $f \leq \varphi$, dann ist f nach oben beschränkt, denn jede Treppenfunktion nimmt nur endlich viele verschiedene Werte an, und ist deswegen beschränkt. Für die Beschränktheit nach unten hat man die analoge Aussage. Insgesamt sehen wir: Für eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sind äquivalent:

- die Funktion ist (nach oben und unten) beschränkt;
- es gibt Treppenfunktionen $\varphi, \psi \in T[a,b]$ mit $\psi \leq f \leq \varphi$.

Definition 4.4 *Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine* beschränkte *Funktion. Dann heißt*

$$\int_a^{*b} f(x)dx := \inf\{\int_a^b \varphi(x)dx : \ \varphi \in T[a,b], \ \varphi \geq f\}$$

das Oberintegral *von f über das Intervall $[a,b]$ und*

$$\int_{*a}^{b} f(x)dx := \sup\{\int_a^b \psi(x)dx : \ \psi \in T[a,b], \ \psi \leq f\}$$

das Unterintegral *von f über $[a,b]$.*

Weil f nach oben beschränkt ist, gibt es Treppenfunktionen $\varphi \in T[a,b]$ mit $\varphi \geq f$. Deswegen ist die Menge

$$\{\int_a^b \varphi(x)dx : \ \varphi \in T[a,b], \ \varphi \geq f\}$$

nicht leer. Und weil f nach unten beschränkt ist, etwa $f(x) \geq m$ für alle $x \in [a,b]$, ist auch

$$\varphi(x) \geq f(x) \geq m$$

für alle $\varphi \geq f$, und deswegen

$$\int_a^b \varphi(x)dx \geq m(b-a)$$

für diese φ. Deswegen ist diese Menge von Integralen $\int_a^b \varphi(x)dx$ nach unten beschränkt. sie besitzt also ein Infimum. Das Oberintegral einer beschränkten Funktion f auf einem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ existiert also immer.

Genauso sieht man, dass das Unterintegral existiert.

Beispiel 4.1 *Sei f selbst eine Treppenfunktion. Dann ist offensichtlich*

$$\int_a^{*b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \int_{*a}^b f(x)dx.$$

Beispiel 4.2 *Sei f die Dirichletsche Sprungfunktion*

$$f(x) := \begin{cases} 0 \text{ falls } x \in \mathbb{Q} \\ 1 \text{ falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

auf dem Intervall $[0,1]$. In jedem Teilintervall $(t_\nu, t_{\nu+1}) \subset [0,1]$ gibt es rationale und irrationale reelle Zahlen. Ist $\varphi|(t_\nu, t_{\nu+1}) = c_\nu$ mit $\varphi \geq f$, so muss deswegen $c_\nu \geq 1$ sein. Für alle $\varphi \in T[a,b]$ mit $\varphi \geq f$ ist deswegen $\int_0^1 \varphi(x)dx \geq 1 \cdot (1-0) = 1$. Das Oberintegral $\int_0^{*1} f(x)dx$ über die Dirichletsche Sprungfunktion ist ≥ 1. Weil die konstante Treppenfunktion $\varphi \equiv 1$ auch $\geq f$ ist, und $\int_0^1 \varphi(x)dx = 1$ für diese Funktion ist, gilt sogar Gleichheit:

$$\int_0^{*1} f(x)dx = 1.$$

Analog sieht man

$$\int_{*0}^{1} f(x)dx = 0.$$

Beispiel 4.3 *Betrachten wir die Funktion $f(x) \equiv x$ auf dem Intervall $[0,1]$. Für jede Zahl $k \in \mathbb{N}$ definieren wir eine Treppenfunktion $\varphi_k \in T[0,1]$ folgendermaßen:*

Wir zerlegen das Intervall $[0,1]$ in k gleichlange Teilintervalle $[t_\nu, t_{\nu+1}]$ der Länge $1/k$ indem wir

$$t_\nu := \frac{\nu}{k}, \quad \nu = 0, ..., k,$$

setzen. Die Treppenfunktion $\varphi_k \in T[a,b]$ definieren wir durch

$$\varphi_k := \frac{\nu+1}{k} \quad \text{auf} \quad [\frac{\nu}{k}, \frac{\nu+1}{k}].$$

Dann ist $\varphi_k \geq f$ und

$$\int_0^1 \varphi_k(x)dx = \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\nu}{k} \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{k^2} \cdot \sum_{\nu=1}^{k} \nu = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{k+1}{k}.$$

Für $k \to \infty$ geht dieses Integral $\int \varphi_k(x)dx$ gegen $1/2$. Daraus folgt

$$\int_0^{*1} xdx \leq \frac{1}{2}.$$

Analog sieht man auch $\int_{*0}^1 xdx \geq 1/2$. Weil immer $\int_* f(x)dx \leq \int^* f(x)dx$ ist (s. nächster Satz), haben wir damit

$$\int_0^{*1} xdx = \int_{*0}^{1} xdx = \frac{1}{2}$$

berechnet.

Im nächsten Satz, und immer im Folgenden, wenn der Zusammenhang klar ist, kürze ich ab:

$$\int_a^{*b} f(x)dx =: \int^* f, \quad \int_{*a}^{b} f(x)dx =: \int_* f.$$

Satz 4.4 (Eigenschaften des Ober- und Unterintegrals) *Für alle auf einem Intervall $[a,b]$ beschränkte Funktionen f, g und und für alle $c \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\begin{array}{ll} 0) & \int_* f \leq \int^* f \\ \\ i) & \int^*(f+g) \leq \int^* f + \int^* g \\ & \int_*(f+g) \geq \int_* f + \int_* g \\ \\ ii) & \int^*(cf) = c\int^* f \quad (c \geq 0) \\ & \int_*(cf) = c\int_* f \quad (c \geq 0) \\ \\ iii) & \int^*(cf) = c\int_* f \quad (c < 0) \\ \\ iv) & f \geq g \quad \Longrightarrow \quad \int^* f \geq \int^* g,\ \int_* f \geq \int_* g \end{array}$$

Beweis. Wenn φ und ψ Treppenfunktionen mit $\varphi \geq f \geq \psi$ sind, dann folgt aus Satz 4.3 $\int_a^b \varphi(x)dx \geq \int_a^b \psi(x)dx$. Daraus ergibt sich 0)

i) Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es Treppenfunktionen $\varphi, \psi \in T[a,b]$ mit
$\varphi \geq f$ und $\int_a^b \varphi(x)dx \leq \int^* f + \epsilon$,
$\psi \geq g$ und $\int_a^b \psi(x)dx \leq \int^* g + \epsilon$.
Wegen $f + g \leq \varphi + \psi$ folgt daraus

$$\int^*(f+g) \leq \int_a^b (\varphi+\psi)dx = \int_a^b \varphi(x)dx + \int_a^b \psi(x)dx \leq \int^* f + \int^* g + 2\epsilon.$$

Weil dies für alle $\epsilon > 0$ so ist, muss

$$\int^*(f+g) \leq \int^* f + \int^* g$$

gelten. Die Aussage für das Unterintegral beweist man analog.

ii) Für $c = 0$ ist die Behauptung offensichtlich. Sei $c > 0$. Dann ist

$$\varphi \geq f \quad \Longleftrightarrow c \cdot \varphi \geq c \cdot f.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \int^*(c \cdot f) &= inf\{\int_a^b \psi(x)dx : \ \psi \in T[a,b], \psi \geq cf\} \\ &= inf\{\int_a^b c\varphi(x)dx : \ \varphi \in T[a,b], \varphi \geq f\} \\ &= c \cdot inf\{\int_a^b \varphi(x)dx : \ \varphi \in T[a,b], \varphi \geq f\} \\ &= c\int^* f. \end{aligned}$$

Wieder beweist man die Aussage für das Unterintegral ganz analog.

iii) Wegen ii) genügt es, die Behauptung für $c = -1$ zu zeigen. Nun ist

$$\varphi \geq -f \quad \Longleftrightarrow \quad -\varphi \leq f.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\int^* (-f) &= inf\{\int_a^b \varphi(x)dx : \ \varphi \in T[a,b], \varphi \geq -f\} \\
&= inf\{\int_a^b \varphi(x)dx : \ \varphi \in T[a,b], -\varphi \leq f\} \\
&= inf\{-\int_a^b (-\varphi)(x)dx : \ \varphi \in T[a,b], -\varphi \leq f\} \\
&= inf\{-\int_a^b \psi(x)dx : \ \psi \in T[a,b], \psi \leq f\} \\
&= -sup\{\int_a^b \psi(x)dx : \ \psi \in T[a,b], \psi \leq f\} \\
&= -\int_* f.
\end{aligned}$$

iv) Wir zeigen die Behauptung nur für das Oberintegral. Jede Treppenfunktion $\varphi \geq f$ erfüllt auch $\varphi \geq g$. Also ist

$$\int^* f = inf\{\int \varphi : \ \varphi \geq f\} \geq \{\int \varphi : \ \varphi \geq g\} = \int^* g.$$

□

Definition 4.5 *Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt* Riemann-integrierbar*, wenn*

$$\int_{*a}^{b} f(x)dx = \int_a^{*b} f(x)dx.$$

Und dann heißt dieser gemeinsame Wert von Unter- und Oberintegral über f das Riemann-Integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

von f über das Intervall $[a,b]$.

Satz 4.5 (Integrierbarkeitskriterium) *Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ Treppenfunktionen $\varphi, \psi \in T[a,b]$ existieren mit*

$$\varphi \geq f \geq \psi \quad \text{und} \quad \int_a^b \varphi(x)dx - \int_a^b \psi(x)dx < \epsilon.$$

Beweis. $\Longrightarrow$: Nach Voraussetzung ist

$$\int^* f = \int_* f =: I.$$

Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ Treppenfunktionen $\varphi \geq f \geq \psi$ mit

$$\int_a^b \varphi(x)dx - I < \frac{\epsilon}{2}, \quad I - \int_a^b \psi(x)dx < \frac{\epsilon}{2}.$$

Daraus folgt

$$\int_a^b \varphi(x)dx - \int_a^b \psi(x)dx < \epsilon.$$

$\Longleftarrow$: Wegen

$$\int \varphi(x)dx \geq \int^* f \text{ und } \int_* f \geq \int_a^b \psi(x)dx$$

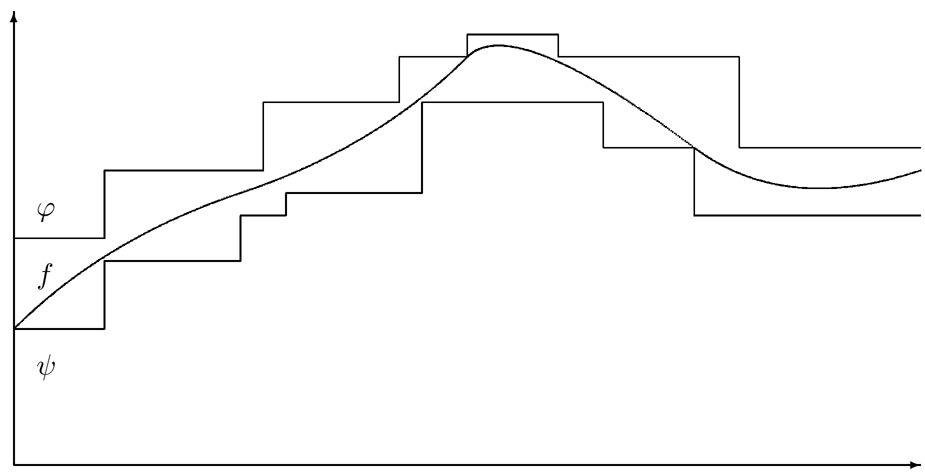
ist also für alle $\epsilon > 0$

$$\int^* f - \int_* f \leq \int_a^b \varphi(x)dx - \int_a^b \psi(x)dx < \epsilon.$$

Das bedeutet

$$\int^* f = \int_* f$$

und f ist Riemann-integrierbar. $\square$



Satz 4.6 (Korollar) *Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ ist Riemann-integrierbar.*

Beweis. Nach Satz 2.18 gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Treppenfunktion $\varphi \in T[a, b]$ mit

$$|f(x) - \varphi(x)| < \epsilon$$

für alle $x \in [a, b]$. Für die Treppenfunktionen

$$\psi_1 := \varphi + \epsilon, \quad \psi_2 := \varphi - \epsilon \in T[a, b]$$

gilt dann

$$\psi_1(x) \geq f(x) \geq \psi_2(x) \text{ für alle } x \in [a, b]$$

und

$$\int_a^b \psi_1(x)dx - \int_a^b \psi_2(x)dx = \int_a^b (\psi_1(x) - \psi_2(x))dx = \int_a^b 2\epsilon dx = 2\epsilon \cdot (b - a).$$

Na ja, hätten wir am Anfang statt ϵ die Zahl $\epsilon/2(b - a)$ vorgegeben, dann wäre hier ϵ rausgekommen. $\square$

Satz 4.7 *Jede monotone (nicht notwendig stetige) Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ ist Riemann-integrierbar.*

Beweis. Wir behandeln nur den Fall, dass f monoton steigt.
Durch

$$t_\nu := a + \nu \cdot \frac{b-a}{n}, \quad \nu = 0, .., n,$$

zerlegen wir das Intervall $[a, b]$ in n gleichlange Intervalle $[t_\nu, t_{\nu+1}]$. Auf jedem dieser Intervalle ist

$$f(t_\nu) \le f(x) \le f(t_{\nu+1}), \quad t_\nu \le x \le t_{\nu+1}.$$

Wir definieren Treppenfunktionen φ und $\psi :\in T[a, b]$ durch

$$\begin{array}{rl} \varphi(x) := f(t_{\nu+1}) \text{ für } x \in [t_\nu, t_{\nu+1}) & \text{(Wert im rechten Zwischenpunkt)} \\ \psi(x) := f(t_\nu) \text{ für } x \in [t_\nu, t_{\nu+1}) & \text{(Wert im linken Zwischenpunkt)} \end{array}$$

und $\varphi(b) = \psi(b) := f(b)$. Dann ist

$$\varphi(x) \ge f(x) \ge \psi(x) \text{ für alle } x \in [a, b]$$

und

$$\begin{aligned} \int_a^b (\varphi(x) - \psi(x))dx &= \sum_{\nu=1}^{n} [f(t_\nu) - f(t_{\nu-1})] \cdot [t_{\nu+1} - t_\nu] \\ &= \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{\nu=1}^{n} [f(t_\nu) - f(t_{\nu-1})] \\ &= \frac{b-a}{n} \cdot (f(b) - f(a)) \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

wenn nur

$$n > \frac{1}{\epsilon}(b-a)(f(b) - f(a))$$

gewählt wird. □

Satz 4.8 *Das Riemann-Integral hat folgende Eigenschaften:*

a) <u>Linearität</u>. Für je zwei integrierbare Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ und reelle Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist auch die Funktion $\alpha f + \beta g$ auf $[a, b]$ integrierbar mit

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

b) <u>Monotonie</u>: Sind $f \ge g$ zwei integrierbare Funktionen so ist

$$\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx.$$

c) <u>Additivität</u>: Ist f auf $[a,b]$ integrierbar und $a < c < b$, so ist f auch über $[a,c]$ und $[c,b]$ integrierbar mit

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

d) <u>Konvergenz</u>: Konvergiert die Folge (f_n) integrierbarer Funktionen $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, so ist auch f integrierbar mit

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Beweis. a) Für jede beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und jedes $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma \geq 0$, ist nach Satz 4.4 ii)

$$\int^* (\gamma f) = \gamma \int^* f, \quad \int_* (\gamma f) = \gamma \int_* f.$$

Wenn f integrierbar ist, ist $\int^* f = \int_* f$ und auch

$$\int^* (\gamma f) = \int_* (\gamma f) = \gamma \int f.$$

Wenn $\gamma < 0$ ist, erhält man dasselbe Ergebnis mit Satz 4.4 iii).

Für je zwei beschränkte Funktionen f und g ist nach Satz 4.4 i)

$$\int^* f + \int^* g \geq \int^* (f+g) \geq \int_* (f+g) \geq \int_* f + \int_* g.$$

Wenn f und g integrierbar sind, ist $\int^* f = \int_* f$ und $\int^* g = \int_* g$. Daraus folgt

$$\int^* (f+g) = \int_* (f+g) = \int f + \int g.$$

b) Mit Satz 4.4 iv) ist

$$\int_a^b f(x)dx = \int^* f \geq \int^* g = \int_a^b g(x)dx.$$

c) Jede Zerlegung des Intervalls $[a,b]$ kann man durch Hinzunahme des Punktes c so verfeinern, dass sie diesen Punkt c als Zwischenpunkt enthält. Daraus folgt

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \int_a^c \varphi(x)dx + \int_c^b \varphi(x)dx$$

für alle Treppenfunktionen $\varphi \in T[a,b]$. Sei nun $\epsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es $\varphi, \psi \in T[a,b]$ mit

$$\varphi \geq f \geq \psi \text{ und } \int_a^b \varphi(x)dx - \int_a^b \psi(x)dx = \int_a^b (\varphi(x) - \psi(x))dx < \epsilon.$$

Wegen $\int_c^b (\varphi(x) - \psi(x))dx \geq 0$ folgt daraus

$$\int_a^c (\varphi(x) - \psi(x))dx = \int_a^b (\varphi(x) - \psi(x))dx - \int_c^b (\varphi(x) - \psi(x))dx < \epsilon,$$

also ist $f|[a,c]$ integrierbar. ebenso sieht man, dass $f|[c,b]$ integrierbar ist. Weiter ist

$$\begin{aligned}
\int^* f &= \inf\{\int_a^b \varphi : \varphi \in T[a,b], \varphi \geq f\} \\
&= \inf\{\int_a^c \varphi + \int_c^b \varphi : \varphi \in T[a,b], \varphi \geq f\} \\
&\geq \inf\{\int_a^c \varphi_1 : \varphi_1 \in T[a,c], \varphi_1 \geq f\} + \inf\{\int_c^b \varphi_2 : \varphi_2 \in T[c,b], \varphi_2 \geq f\} \\
&= \int_a^{*c} f + \int_c^{*b} f.
\end{aligned}$$

Ebenso sieht man

$$\int_{*a}^c f + \int_{*c}^b f \leq \int_{*a}^b f.$$

Aus

$$\int_a^{*b} f = \int_{*a}^b f, \quad \int_a^{*c} f = \int_{*a}^c f, \quad \int_c^{*b} f = \int_{*c}^b f$$

folgt die Behauptung.

d) Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz gibt es ein $N(\epsilon)$ mit

$$n \geq N(\epsilon) \quad \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \text{ für alle } x \in [a,b].$$

Wir können das auch so schreiben:

$$f_n - \epsilon \leq f \leq f_n + \epsilon.$$

Insbesondere ist f beschränkt. Deswegen existieren $\int^* f$ und $\int_* f$ und erfüllen

$$\int^* f \leq \int^* (f_n + \epsilon) = \int^* f_n + \epsilon(b-a),$$

$$\int_* f \geq \int_* (f_n - \epsilon) = \int_* f_n - \epsilon(b-a),$$

$$\int^* f - \int_* f \leq \left(\int^* f_n + \epsilon(b-a)\right) - \left(\int_* f_n - \epsilon(b-a)\right) = 2\epsilon(b-a).$$

Da dies für alle $\epsilon > 0$ gilt, ist die Grenzfunktion f integrierbar. Außerdem ist

$$\int_a^b (f_n - \epsilon) \leq \int_a^b f \leq \int_a^b (f_n + \epsilon),$$

also

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| \leq \epsilon(b-a).$$

Daraus folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

□

Die Definition des Riemann-Integrals mit Hilfe von Treppenfunktionen ist sicher nicht die historisch ursprüngliche. Denn zu Zeiten Riemanns gab es noch keine Treppenfunktionen. D.h., niemand dürfte damals diese Funktionen zur Kenntnis genommen haben. Ursprünglich hat man das Integral über *Riemannsche Näherungssummen* definiert. Das ist folgendes: Man wählt wie immer eine Zerlegung $a = t_0 < ... < t_n = b$ des Integrationsintervalls. In jedem Teilintervall $[t_{\nu-1}, t_\nu]$ wählt man eine Stützstelle x_ν. Die Riemannsche Näherungssumme zu dieser Zerlegung Z und zu dieser Wahl der Stützstellen x_ν ist

$$S_Z(x_1, ..., x_n) := \sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu) \cdot (t_\nu - t_{\nu-1}).$$

Für integrierbare Funktionen f gilt nun: Nimmt man viele Zerlegungen $Z_m, m \in \mathbb{N}$, her, deren *Feinheit*

$$\max_{\nu=1}^{n}(t_\nu - t_{\nu-1})$$

für $m \to \infty$ gegen 0 geht, so konvergieren diese Riemannschen Näherungssummen bei jeder Wahl der Stützstellen gegen $\int_a^b f(x)dx$.

Beispiel 4.4 $\int_1^a \frac{1}{x}dx,\ a > 1$. *Die Funktion $1/x$ ist auf dem Intervall $[1, a]$ stetig, also integrierbar. Wir zerlegen das Intervall $[1, a]$ nicht in gleichlange Teilintervalle, sondern durch die Zwischenpunkte*

$$t_\nu := a^{\frac{\nu}{n}},\ \nu = 0, ..., n.$$

Die Länge eines Teilintervalls ist

$$a^{\frac{\nu+1}{n}} - a^{\frac{\nu}{n}} = a^{\frac{\nu}{n}}(a^{\frac{1}{n}} - 1).$$

Wegen

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = a^0 = 1$$

geht die Feinheit dieser Zerlegung gegen 0 für $n \to \infty$. Wählen wir als Stützstellen die rechten Endpunkte der Intervalle, so wird die n-te Riemannsche Näherungssumme für $\int_1^a 1/x dx$

$$S_n = \sum_{\nu=1}^{n} a^{\frac{\nu}{n}}(a^{\frac{1}{n}} - 1) \cdot \frac{1}{a^{\frac{\nu}{n}}} = \sum_{\nu=1}^{n}(a^{\frac{1}{n}} - 1) = n \cdot (a^{\frac{1}{n}} - 1).$$

Und der Grenzwert wird

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot (a^{\frac{1}{n}} - 1) = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{u\to 0} \frac{a^u - 1}{u} \stackrel{l'H}{=} \lim_{u\to 0} \frac{a^u \cdot ln(a)}{1} = ln(a).$$

Wir haben ausgerechnet:

$$\int_1^a \frac{1}{x}dx = ln(a),$$

ganz ohne Stammfunktionen!

Aufgabe 4.1 *Berechnen Sie mit Hilfe Riemannscher Näherungssummen das Integral*

$$\int_0^a e^x dx \quad (a > 0).$$

Aufgabe 4.2 *Stellen Sie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{n!} x^n$$

als elementare Funktion dar.

Aufgabe 4.3 *Entwickeln Sie in eine Potenzreihe um* $x_0 = 0$

$$\mathbf{a)} \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad \mathbf{b} \int_0^x \frac{sin(t)}{t} dt,$$

sowie in eine Potenzreihe um $x_0 = 1$

$$\mathbf{c)} \int_1^x \frac{e^t}{t} dt.$$

4.3 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Historisch ist die Integralrechnung gleichzeitig mit der Differentialrechnung als deren Umkehroperation entstanden. Diesen Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration (eines ist die Umkehrung des anderen) nennt man heute Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI). Er ist natürlich das Standard-Hilfsmittel um Integrale in geschlossener Form hinzuschreiben. Aber er gilt nur unter der Voraussetzung, dass die zu integrierende Funktion stetig ist. Für theoretische oder numerische Zwecke integriert man oft Funktionen, welche diese Voraussetzung nicht erfüllen. Der HDI ist nicht anwendbar. Die Integration besitzt keine Differentiation als Umkehrabildung. Vom heutigen Standpunkt aus gibt es unter bestimmten Voraussetzungen einen Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration, aber man kann keineswegs die eine als Umkehroperation der anderen ansehen. Und man kann keineswegs das Integral als Umkehrung der Ableitung definieren.

Das wesentliche Hilfsmittel zum Beweis des HDI ist

Satz 4.9 (Mittelwertsatz der Integralrechnung) *Die Funktion f sei stetig auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$. Dann gibt es einen Zwischenpunkt $\xi \in [a, b]$ mit*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi) \cdot (b - a).$$

Bweis. Sei

$$m := \min_{x \in [a,b]} f(x) \quad \text{und} \quad M := \max_{x \in [a,b]} f(x).$$

Dann ist also $m \leq f \leq M$ auf $[a, b]$ und aus Satz 4.8 b) folgt

$$m \cdot (b - a) = \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx = M \cdot (b - a)$$

oder

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M.$$

Nach dem Zwischenwertsatz für die stetige Funktion f wird jeder Wert zwischen m und M als Funktionswert angenommen. Es gibt also ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx,$$

und das war die Behauptung. □

Manchmal wird dieser Mittelwertsatz auch in einer allgemeineren Form formuliert:

Satz 4.10 *Die Funktionen f und g seien stetig auf dem Intervall $[a, b]$ mit $g(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Dann gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

Satz 4.9 ist in dieser Aussage als Spezialfall $g(x) \equiv 1$ enthalten. Ich weiß noch nicht, ob ich den Mittelwertsatz in der allgemeinen Form 4.10 brauchen werde, und möchte ihn vorsichtshalber nur in der angegebenen speziellen Form beweisen.

Weil der Mittelwertsatz nur für stetige Funktionen gilt (z.B. nicht für Treppenfunktionen), kann man den HDI eben auch nur für stetige Funktionen beweisen.

Satz 4.11 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung) *Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei stetig. Dann ist die Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definiert durch*

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt$$

auf dem Intervall (a, b) differenzierbar mit Ableitung

$$\frac{dF}{dx} = f.$$

(Kurz formuliert: Die Ableitung des Integrals nach seiner oberen Grenze ist die integrierte Funktion.)

Beweis. Wir berechnen ganz einfach den Differentialquotienten der Funktion F. Der Differenzenquotient ist

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt$$

wegen der Additivität des Integrals, Satz 4.8 c). Jetzt benutzen wir den Mittelwertsatz der Integralrechnung für die stetige Funktion f auf dem Intervall $[x, x+h]$:

$$\int_x^{x+h} f(t)dt = f(\xi) \cdot h$$

mit einem $\xi \in [x, x+h]$. Wenn $h \to 0$ geht, dann geht $\xi \to x$ und der Differentialquotient ist

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} f(\xi) = \lim_{\xi \to x} f(\xi) = f(x)$$

wegen der Stetigkeit von f in x. $\square$

Dieser Beweis ist kurz und übersichtlich. Allerdings habe ich gemogelt. Im Beweis habe ich das Intervall $[x, x + h]$ betrachtet und damit automatisch $h > 0$ angenommen. Ich habe also nur den rechtsseitigen Grenzwert

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

ausgerechnet. Was passiert, wenn $h < 0$ ist? Dann ist

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = -\int_{x+h}^x f(t)dt.$$

Um den Beweis zu reparieren, müssen wir also auch das Integral $\int_a^b f(x)dx$ definieren, wenn $b < a$ ist. Und zwar müssen wir dann

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

setzen. Mit dieser Vereinbarung gilt die Additivität des Integrals

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

unabhängig davon, ob die Grenzen rechts oder links voneinander liegen, unabhängig davon ob c zwischen a und b liegt oder nicht. Mit dieser Vereinbarung gilt der Mittelwertsatz auch für $b < a$, und der Beweis des HDI funktioniert. Damit das auch noch gilt, wenn Endpunkte zusammenfallen, muss man

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

setzen, (oder sehen, dass das Riemann-Integral über Intervalle der Länge $= 0$ den Wert 0 ergibt).

Nachdem dies vereinbart ist, hätte man im Beweis des HDI auch jede Funktion

$$F_0(x) := \int_{x_0}^x f(t)dt = \int_{x_0}^a f(t)dt + F(t), \quad x_0 \in [a, b]$$

statt $F(t)$ nehmen können. F_0 unterscheidet sich von F nur um die Konstante $\int_{x_0}^a f(t)dt = -\int_a^{x_0} f(t)dt$ und hat deswegen dieselbe Ableitung f. Eine Funktion der Form

$$\int_{x_0}^x f(t)dt, \quad x_0 \in [a, b],$$

nennt man in der Schule *Integralfunktion* zur Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Den HDI kann man dann so formulieren:

Ist f stetig, so ist die Ableitung jeder Integralfunktion von f wieder die Funktion f.

Definition 4.6 *Eine Funktion $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ heißt* Stammfunktion *der Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, wenn F differenzierbar mit Ableitung*

$$F' \equiv f$$

ist.

Satz 4.12 (Stammfunktionen) *Die Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ sei gegeben.*

a) Wenn F_1 eine Stammfunktion zu f ist, dann auch $F_2 := F_1 + C$ für jede Konstante $C \in \mathbb{R}$.

b) Wenn F_1 und F_2 zwei Stammfunktionen zu $f|(a, b)$ sind, dann ist $F_2 = F_1 + C$, $C \in \mathbb{R}$, d.h., die Funktion $F_1 - F_2$ ist konstant.

c) Ist f stetig, so existieren Stammfunktionen zu f.

Beweis. a) $F_2 = (F_1 + C)' = F_1' = f$.

b) Nach Voraussetzung sind F_1 und F_2 differenzierbar mit

$$F_1' = f = F_2'.$$

Daraus folgt $(F_2-F_1)' = 0$ und nach 3.3.2, Anwendung 1) des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung ist $F_2 - F_1 = C$ konstant.

c) Sei $x_0 \in (a, b)$ fest. Dann ist die Integralfunktion

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

eine Stammfunktion. $\square$

Die Aussagen a) und b) sind Umkehrungen voneinander. a) ist trivial, weil die Ableitung einer Konstante $= 0$ ist. b) ist nicht trivial, weil der MWS der Differentialrechnung benutzt werden muss.

Stammfunktionen sind wichtig, weil man damit - wie jeder weiß - Integrale ausrechnet:

Satz 4.13 (Hauptsatz) *Die Funktion f sei stetig auf dem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und $F : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

für je zwei Punkte $a, b \in I$.

Beweis. Eine Stammfunktion ist

$$F_0(x) := \int_a^x f(t)dt.$$

Für diese Stammfunktion gilt

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

Ist F eine beliebige Stammfunktion, so ist

$$F = F_0 + C,\ C \in \mathbb{R},$$

nach Satz 4.12 b). Und auch für F gilt

$$F(b) - F(a) = [F_0(b) + C] - [F_0(a) + C] = F_0(b) - F_0(a).$$

$\square$

Für die Auswertung von Integralen haben Stammfunktionen eine enorme Bedeutung. In der Schule wird das Integrieren ja auch so eintrainiert:

INTEGRIEREN $=$ STAMMFUNKTION FINDEN $+$ ENDPUNKTE EINSETZEN.

Dabei haben sich zweckmäßige Bezeichnungen herausgebildet, z.B.

$$F(x)|_a^b := F(b) - F(a)$$

oder die Schreibweise

$$\int f(x)dx + c$$

(Integral ohne Grenzen). Sowas heißt 'unbestimmtes Integral'. Unbestimmte Integrale bilden einen wichtigen Teil aller Formelsammlungen. Aber was ein unbestimmtes Integral ist, bleibt etwas unbestimmt. Man meint wohl 'Stammfunktion' damit.

Zum Finden von Stammfunktionen gibt es Methoden und Tricks, die wir auch noch besprechen müssen. Aber Integrieren ist eben doch mehr als Stammfunktionen aufsuchen und Werte einsetzen:

- Manche Funktionen 'haben keine' Stammfunktion. So findet man in keiner Formelsammlung eine Stammfunktion für die stetige Funktion $f(x) = e^{(x^2)}$. Das ist kein Widerspruch zu Satz 4.12 c). Ich habe es nur etwas überspitzt fomuliert. Ich meine: Man kann die Stammfunktion nicht mit den Funktionen hinschreiben, die wir kennen. Wir kennen Polynome, die e-Funktion, die Winkelfunktionen, deren Umkehrungen, und alle Funktionen, die man daraus zusammensetzen kann. Solche Funktionen heißen 'elementare Funktionen'. Die Funktion $F(x) := \int_0^x e^{t^2} dt$ ist keine elementare Funktion in diesem Sinn. Auch nicht-elementare Funktionen haben innerhalb und außerhalb der Mathematik große Bedeutung.

- Das Einsetzen der Integrationsgrenzen in die Stammfunktion scheint der triviale Teil des Integrierens zu sein. Zumindest stellt es sich in der Schule so dar. Die Werte der elementaren Funktionen kann man ja auf genügend Dezimalen genau aus dem Taschenrechner holen. In Wirklichkeit steckt hier auch ein Problem, das in der Schule dank geeigneter Aufgaben keine Rolle spielt. In der Praxis, beim numerischen Auswerten von Integralen, geht man selten den Weg über Stammfunktionen, sondern integriert numerisch.

Auf jeden Fall auswendig kennen muss man die folgenden sieben Integrale:

$$
\begin{array}{|rcll|}
\hline
\displaystyle\int e^x dx & = & e^x & \\
\displaystyle\int \frac{1}{x} dx & = & ln|x| & (x \neq 0) \\
\displaystyle\int x^a dx & = & \dfrac{x^{a+1}}{a+1} & (x > 0, a \neq -1) \\
\int sin(x)dx & = & -cos(x) & \\
\int cos(x)dx & = & sin(x) & \\
\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} dx & = & arctg(x) & \\
\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx & = & arcsin(x) & (|x| < 1) \\
\hline
\end{array}
$$

Man ermittelt diese Integrale nicht durch irgend eine Rechenvorschrift. Nein, man leitet alle Funktionen ab, die man so kennt. Die Ausgangsfunktionen sind dann Integralfunktionen der abgeleiteten Funktionen (HDI). So kann man ziemlich lange Tabellen anlegen.

Auch Potenzreihen kann man im Prinzip integrieren: Sie konvergieren gleichmäßig im Inneren Ihres Konvergenz-Intervalls, und aus Satz 4.8 d) folgt

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Nur nützt dies nichts, wenn man eine Stammfunktion in geschlossener Form haben will. Es nützt dagegen sehr wohl, wenn man eine Potenzreihenentwicklung für die Stammfunktion haben will.

Beispiel 4.5 *Der Arcustangens ist eine Stammfunktion für*

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Deswegen ist

$$arctg(x) = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} + C = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + C.$$

Im Nullpunkt ist $arctg(0) = 0$ *und die Reihe ist dort auch* $= 0$, *also ist die Integrationskonstante* $C = 0$, *und wir haben die Taylorreihe des Arcustangens, konvergent für* $|x| < 1$.

Aber es gibt noch drei wesentliche Techniken für das Integrieren:

1) **Partielle Integration.** Ausgangspunkt ist die Produktregel der Differentiation

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Die schreiben wir

$$f'g = (fg)' - fg'$$

und integrieren

$$\boxed{\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx}$$

Diese Regel kann man manchmal sogar dann anwenden, wenn überhaupt kein Produkt dasteht:

$$\int ln(x)dx = \int 1 \cdot ln(x)dx = \int x' \cdot lnx = x \cdot ln(x) - \int x \cdot (ln(x))'dx = x \cdot ln(x) - x,$$

$$\int ln(x) = x \cdot (ln(x) - 1).$$

2) **Substitutionsformel.** Ausgangspunkt ist hier die Kettenregel der Differentiation

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = f(g(x)) \cdot g'(x),$$

also ist $F(g(x))$ eine Stammfunktion von $f(g(x)) \cdot g'(x)$. Daraus folgt

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)dx = F(g(x))|_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx.$$

Man sagt, man substituiert $x = \varphi(t)$ wenn man diese Gleichung in der Form

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.}$$

anwendet.

Auch hier ein Beispiel: Für $\varphi(t) = -t$ ist $\varphi'(t) = -1$ und

$$\int_0^1 e^{-x}dx = \int_0^{-1} e^t \cdot (-1)dt = -\int_0^{-1} e^t dt = \int_{-1}^0 e^t dt.$$

3) **Partialbruchzerlegung.** Jede rationale Funktion

$$\frac{p}{q}, \qquad \text{wo } p, q \text{ Polynome sind,}$$

kann man geschlossen integrieren. Dies geschieht in mehreren Schritten:

Schritt 1: Polynomdivision mit Rest. Man kann immer p durch q so dividieren, dass

$$p = f \cdot q + r,$$

wo f und r Polynome sind, und r einen kleineren Grad hat als q. Dann ist also

$$\frac{p}{q} = f + \frac{r}{q}.$$

Das Polynom f kann man elementar integrieren. Man braucht also nur noch rationale Funktionen p/q zu untersuchen, wo der Zähler p einen kleineren Grad hat, als der Nenner q.

Schritt 2: Faktorisierung des Nenners. Der Fundamentalsatz der Algebra lehrt, dass jedes Polynom $q(x) = x^n + ...$ vom Grad n ein Produkt aus n Linearfaktoren

$$q(x) = (x - a_1) \cdot ... \cdot (x - a_n)$$

ist. Leider gilt das nur im Komplexen. Bei einem reellen Polynom können deshalb auch komplexe Linearfaktoren auftreten. Die treten jedoch immer mit ihrem komplex-konjugierten Linearfaktor auf und führen zu quadratischen Faktoren

$$(x - (a + ib))(x - (a - ib)) = ((x - a) - ib)((x - a) + ib) = (x - a)^2 - (ib)^2 = (x - a)^2 + b^2$$

in der Zerlegung von q.

Schritt 3: Zerlegung in Partialbrüche. Eine rationale Funktion

$$\frac{p(x)}{(x - a_1) \cdot ... \cdot (x - a_n)}, \quad \text{Grad von } p < n$$

kann man immer als Summe

$$\frac{A_1}{x - a_1} + ... + \frac{A_n}{x - a_n}$$

schreiben, wenn die Linearfaktoren im Nenner alle verschieden sind. Praktisch geht man dabei folgendermaßen vor. Die Gleichung

$$\frac{p(x)}{(x - a_1) \cdot ... \cdot (x - a_n)} = \frac{A_1}{x - a_1} + ... + \frac{A_n}{x - a_n}$$

multipliziert man mit dem Nenner der linken Seite durch

$$p(x) = A_1 \prod_{\nu \neq 1} (x - a_\nu) + ... + A_n \prod_{\nu \neq n} (x - a_\nu)$$

und setzt in diese Gleichung die Nullstellen $a_1, ..., a_n$ der Reihe nach ein. So ermittelt man alle

$$A_k = \frac{p(a_k)}{\prod_{\nu \neq k} (a_k - a_\nu)}.$$

Dabei können leider Komplikationen auftreten:

a) Ein Linearfaktor $(x - a)$ kann mehrfach vorkommen. Enthält q den mehrfachen Faktor $(x - a_1)^k$, so muss man dafür in der Zerlegung k Summanden

$$\frac{A_{1,1}}{x - a_1} + \frac{A_{1,2}}{(x - a_1)^2} + ... + \frac{A_{1,k}}{(x - a_1)^k}$$

ansetzen.

b) Für einen quadratischen Faktor $(x-a)^2+b^2$ muss man einen Summanden

$$\frac{Bx+C}{(x-a)^2+b^2}$$

ansetzen, kommt derselbe quadratische Faktor k-fach vor, dann k Summanden dieser Bauart.

Einige Beispiele sollen die Methode illustrieren. (Ich habe möglichst einfache Beispiele ausgesucht.)

Beispiel 4.6 *Der Bruch*

$$\frac{1}{x\cdot(x^2-1)}$$

hat eine Zerlegung

$$\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{A_3}{x+1}.$$

Die Koeffizienten A_ν bestimmen sich aus der mit dem Nenner durchmultiplizierten Gleichung

$$1=A_1\cdot(x^2-1)+A_2\cdot x(x+1)+A_3\cdot x(x-1)$$

folgendermaßen

$$\begin{array}{rclcl} x=0 & \Longrightarrow & 1=A_1\cdot(-1) & \Longrightarrow & A_1=-1 \\ x=1 & \Longrightarrow & 1=A_2\cdot 2 & \Longrightarrow & A_2=1/2 \\ x=-1 & \Longrightarrow & 1=A_3\cdot 2 & \Longrightarrow & A_3=1/2 \end{array}$$

Wir finden

$$\frac{1}{x(x^2-1)}=\frac{-1}{x}+\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{2(x+1)}.$$

(Nach so einer Rechnung muss man immer die Probe machen!)

Beispiel 4.7 *Der Bruch*

$$\frac{1}{x\cdot(x^2+1)}$$

muss eine Zerlegung

$$\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

zulassen. Die durchmultiplizierte Gleichung ist

$$1=A\cdot(x^2+1)+(Bx+C)\cdot x.$$

Hierin setzen wir $x=0$ und finden $A=1$. Koeffizientenvergleich liefert dann $B=-1, C=0$, also

$$\frac{1}{x\cdot(x^2+1)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}.$$

Beispiel 4.8 *Der Bruch*

$$\frac{x+1}{(x-1)^2}$$

muss eine Zerlegung

$$\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}$$

zulassen. Die durchmultiplizierte Gleichung ist

$$x + 1 = A_1 \cdot (x - 1) + A_2.$$

Wir setzen $x = 1$, finden $A_2 = 2$ und dann $A_1 = 1$, also

$$\frac{x+1}{(x-1)^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}.$$

So zerlegt man jede rationale Funktion p/q in Summanden der folgenden Form:

Summand	Integral
Polynom	elementar
$\frac{1}{x-a}$	$ln\|x-a\|$
$\frac{1}{(x-a)^k}$, $k > 1$	$\frac{1}{1-k}\frac{1}{(x-a)^{k-1}}$
$\frac{1}{(x-a)^2+b^2}$	$\frac{1}{b}arctg(\frac{x-a}{b})$
$\frac{x-a}{(x-a)^2+b^2}$	$\frac{1}{2}ln((x-a)^2+b^2)$
$\frac{x-a}{((x-a)^2+b^2)^k}$, $k > 1$	$\frac{-1}{2(k-1)} \cdot \frac{1}{((x-a)^2+b^2)^{k-1}}$
$\frac{1}{((x-a)^2+b^2)^k}$, $k > 1$	??

Bis auf den allerletzten Typ sind die zu integrieren wie angegeben. Kümmern wir uns um ihn. Aber transformieren wir vorher $(x-a)/b =: u$

$$\frac{1}{((x-a)^2+b^2)^k} = \frac{1}{b^{2k}}\frac{1}{(u^2+1)^k}$$

und setzen gleich wieder $u = x$.

Nachdem man eine Zeitlang rumprobiert, kommt man schließlich auf die Idee, die Funktion $x/(x^2+1)^{k-1}$ zu differenzieren:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\frac{x}{(x^2+1)^{k-1}} &= \frac{(x^2+1)^{k-1} - x \cdot (k-1)(x^2+1)^{k-2} \cdot 2x}{(x^2+1)^{2k-2}} \\
&= \frac{x^2+1-2(k-1)x^2}{(x^2+1)^k} \\
&= (3-2k)\frac{x^2+1}{(x^2+1)^k} + \frac{2k-2}{(x^2+1)^k} \\
\int \frac{dx}{(x^2+1)^k} &= \frac{1}{2(k-1)}\frac{x}{(x^2+1)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2(k-1)}\int \frac{dx}{(x^2+1)^{k-1}}
\end{aligned}$$

Mit dieser Formel kann man das Integral rekursiv abbauen.

Aufgabe 4.4 *Bestimmen Sie eine Stammfunktion für*

$$\textbf{a)} ln(x), x > 0, \quad \textbf{b)} arctan(x), \quad \textbf{c)} sin^2(x), \quad \textbf{d)} e^{-x}cos(x), \quad \textbf{e)} tan(x).$$

Aufgabe 4.5 *Bestimmen Sie eine Stammfunktion für* $\sqrt{1+x^2}$ *durch die Substitution* $x = sinh(t)$.

Aufgabe 4.6 *Berechnen Sie für* $m, n \in \mathbb{N}$ *die folgenden Integrale*

$$\textbf{a)} \int_0^{2\pi} sin(mx)sin(nx)dx, \quad \textbf{b)} \int_0^{2\pi} sin(mx)cos(nx)dx, \quad \textbf{c)} \int_0^{2\pi} cos(mx)cos(nx)dx.$$

Aufgabe 4.7 *Beweisen Sie mit partieller Integration für die Legendre-Polynome (vgl. Aufg. 3.26)*

$$\textbf{a)} \int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x) = 0 \textit{ falls } m \neq n, \quad \textbf{b)} \int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}.$$

Aufgabe 4.8 **a)** *Benutzen Sie die Gleichung*

$$1 + x^4 = (1 + \sqrt{2}x + x^2)(1 - \sqrt{2}x + x^2)$$

um eine Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{ax+b}{1+\sqrt{2}x+x^2} + \frac{dx+c}{1-\sqrt{2}+x^2}$$

herzuleiten.

b) *Bestimmen Sie eine Stammfunktion für*

$$f(x) := \frac{1}{1+x^4}.$$

c) *Zeigen Sie:*

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Aufgabe 4.9 *Zeigen Sie*

$$\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}ln(2).$$

4.4 Flächenberechnung, uneigentliche Integrale

Das Integral $\int_a^b f(x)dx$ ist die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse, positiv gezählt, wenn $f > 0$ ist, und negativ gezählt, wenn $f < 0$. Bei Treppenfunktionen ist diese Fläche aus Rechtecken zusammengesetzt, und das Integral genau als die Fläche dieser Rechtecke definiert. Bei anderen Funktionen nehmen wir das Integral als Definition für die Fläche unter dem Funktionsgraphen.

Beispiel 4.9 *Die einfachste, nicht rechteckige Fläche ist ein Dreieck. Die Dreiecksfläche kan man als Summe der Flächen zweier rechtwinkliger Dreiecke schreiben (Höhe!), und ein rechtwinkliges Dreieck wird durch die Koordinatenachsen und den Graph einer linearen Funktion $f(x) = ax + b$ gebildet. Betrachten wir den Fall*

$$f(x) = 1 - x/a, \quad a > 0.$$

Das Dreieck hat dann die Ecken

$$(0,0),\ (0,1),\ (a,0).$$

Seine Fläche ist

$$\int_0^a \left(1 - \frac{x}{a}\right) dx = \left(x - \frac{x^2}{2a}\right) |_0^a = a - \frac{a^2}{2a} = \frac{a}{2}.$$

Das ist $1/2$ *mal Grundseite* a *mal Höhe* 1.

Alle geradlinig begrenzten Flächen kann man aus Dreiecksflächen zusammensetzen.

Die wichtigste krummlinig begrenzte Fläche ist die Kreisfläche. Die Kreisgleichung

$$x^2 + y^2 = r^2$$

nach y aufgelöst ist

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}.$$

Die Kreisfläche ist also die Fläche zwischen den beiden Zweigen der Wurzel $\sqrt{r^2 - x^2}$, $|x| \le r$. Deswegen ist die Fläche des Kreises vom Radius r

$$F_r = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}dx.$$

Diese Fläche wollen wir erst einmal normieren, indem wir $x = r \cdot u$ setzen. Mit der Substitutionsformel wird

$$F_r = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{r^2 - r^2u^2} \cdot rdu = 2r^2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - u^2}du = r^2 \cdot F_1,$$

wo F_1 die Fläche des Einheitskreises ist. Um die Fläche des Einheitskreises zu berechnen, müssen wir das Integral

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}$$

auswerten. Das ist der klassische Fall der Substitution

$$x = sin(t),\ -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

Mit der Substitutionsformel finden wir

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{1-sin^2(t)}\cdot\frac{dsin(t)}{dt}dt\\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}cos(t)\cdot cos(t)dt\\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}cos^2(t)dt\end{aligned}$$

Schon wieder so ein Integral, das wir nicht auswerten können. Aber es gibt Methoden dafür. Z.B.

1) die geniale: Es ist $cos^2(t)+sin^2(t)=1$ und

$$\begin{aligned}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}sin^2(t) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}cos^2\left(\frac{\pi}{2}-t\right)dt\\ &= \int_{\pi}^{0}cos^2(u)(-1)du\\ &= \int_{0}^{\pi}cos^2(u)du\\ &= \int_{0}^{\pi/2}cos^2(u)du+\int_{-\pi/2}^{0}cos^2(u+\pi/2)du\\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}cos^2(t)dt.\end{aligned}$$

Also ist

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}cos^2(t)dt=\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}1dt=\frac{\pi}{2}.$$

Somit ist die Fläche des halben Einheitskreises $\pi/2$ und die Fläche des ganzen Einheitskreises $F_1=\pi$.

2) Die MusterschülerInnen-Methode: Man weiß die Formel (Additionstheorem des Cosinus)

$$cos(2t)=cos^2(t)-sin^2(t)=2cos^2(t)-1,\quad cos^2(t)=\frac{1}{2}(cos(2t)+1)$$

auswendig, oder weiß, wo sie in der Formelsammlung steht. Mit dieser Formel ist

$$\begin{aligned}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}cos^2(t)dt &= \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(cos(2t)+1)dt\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}sin(2t)+t\right)|_{-\pi/2}^{\pi/2}\\ &= \frac{1}{2}\left(sin(\pi)-sin(-\pi)+\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})\right)\\ &= \frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

dasselbe Ergebnis.

3) Die Kraftburschen-Methode: Wir lassen unsere Muskeln spielen und integrieren partiell, einfach so:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}cos(t)\cdot cos(t)dt = sin(t)\cdot cos(t)|_{-\pi/2}^{\pi/2}-\int_{-\pi/2}^{\pi/2}sin(t)cos'(t)dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} sin^2(t)dt \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - cos^2(t)dt \\
2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} cos^2(t)dt &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dt \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

Wieder dasselbe Ergebnis.

Integrale über unendlich lange Intervalle haben wir nicht definiert. Aber manchmal sind die trotzdem endlich. Betrachten wir das

Beispiel 4.10

$$\int_1^\infty x^k dx := \lim_{u\to\infty} \int_1^u x^k dx.$$

Eine Stammfunktion für x^k ist

$$\frac{1}{k+1}x^{k+1} \text{ falls } k \neq 1, \quad ln(x) \text{ falls } k = -1.$$

Der Grenzwert ist

$$\begin{aligned}
k > -1: \quad & \lim_{u\to\infty} \frac{1}{k+1}\left(u^{k+1} - 1\right) &= \infty \\
k = -1: \quad & \lim_{u\to\infty} ln(u) &= \infty \\
k < -1: \quad & \lim_{u\to\infty} \frac{1}{k+1}\left(u^{k+1} - 1\right) = \frac{-1}{k+1}
\end{aligned}$$

So ist z.B. ($k = -2$)

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = 1.$$

Auch Integrale über unbeschränkte Funktionen haben wir nicht definiert. Manchmal sind aber auch die endlich. Betrachten wir

Beispiel 4.11

$$\int_0^1 x^k dx = \lim_{u\to 0} \int_u^1 x^k dx.$$

(Falls $k \geq 0$ ist die Funktion x^k auf $[0,1]$ beschränkt, stetig und integrierbar, also ist nur der Fall $k < 1$ interessant.) Der Grenzwert ist

$$\begin{aligned}
k > -1: \quad & \lim_{u\to 0} \frac{1}{k+1}\left(1 - u^{k+1}\right) &= \frac{1}{k+1} \\
k = -1: \quad & \lim_{u\to 0}(1 - ln(u)) &= \infty \\
k < -1: \quad & \lim_{u\to 0} \frac{1}{k+1}\left(1 - u^{k+1}\right) &= \infty
\end{aligned}$$

Beispielsweise ist ($k = -1/2$)

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} = 2.$$

Ein Integral, wo eine Grenze (oder beide) unendlich ist (sind), oder wo die Funktion am Rand des Integrationsintervalls (oder im Inneren) gegen ∞ geht, nennt man *uneigentliches Integral.* Man muss es als Grenzwert auffassen, so wie wir das eben gemacht haben. Statt allgemeiner Definitionen betrachten wir noch einige Beispiele.

Beispiel 4.12 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}$ *Eine Stammfunktion ist $arctg(x)$, das uneigentliche Integral ist*

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx &= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2} dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \\
&= \lim_{u \to -\infty} (arctg(0) - arctg(u)) + \lim_{u \to \infty} (arctg(u) - arctg(0)) \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \\
&= \pi
\end{aligned}$$

Ein eigenartiges Ergebnis: Was hat denn die transzendente Zahl π mit der bodenständigen Funktion $1/(1+x^2)$ zu tun?

Beispiel 4.13 $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ *Eine Stammfunktion ist $arcsin(x)$, das uneigentliche Integral wird*

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \lim_{u \to -1} \int_{u}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + \lim_{u \to 1} \int_{0}^{u} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= \lim_{u \to -1} (arcsin(0) - arcsin(u)) + \lim_{u \to 1} (arcsin(u) - arcsin(0)) \\
&= -(-\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2} \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

Schon wieder!

Beispiel 4.14 *Das uneigentliche Integral*

$$\int_0^{\infty} cos(x) dx = \lim_{u \to \infty} sin(x)|_1^u = \lim_{u \to \infty} sin(u)$$

existiert nicht.

Häufig existieren uneigentliche Integrale, ohne dass man sie elementar ausrechnen kann. Dafür gibt es

Satz 4.14 (Integral-Vergleichskriterium) *Für die Funktionen $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ gelte*

$$|f(x)| \leq g(x), \quad a \leq x < \infty.$$

Wenn $\int_a^\infty g(x)dx$ existiert, dann auch

$$\int_a^\infty f(x)dx \text{ und } \int_a^\infty |f(x)|dx.$$

Ein analoges Vergleichskriterium gibt es auch für uneigentliche Integrale, wo der Integrand gegen unendlich geht.

Beweis. Die Funktion

$$F(u) := \int_a^u |f(x)|dx$$

ist wegen $|f(x)| \geq 0$ monoton wachsend. Wegen

$$F(u) \leq \int_a^u g(x)dx \leq \int_a^\infty g(x)dx$$

ist die Funktion nach oben beschränkt. Dann existiert

$$\int_a^\infty |f(x)|dx = \lim_{u\to\infty} F(u) = sup\{F(u) : \; u \geq a\}.$$

Wir müssen noch zeigen: Wenn $\int_a^\infty |f(x)|dx$ existiert, dann auch $\int_a^\infty f(x)dx$. Wir spalten f in seinen positiven und negativen Anteil auf:

$$f = f^+ + f^- \text{ mit } \begin{cases} f^+(x) := max(f(x), 0) \geq 0 \\ f^-(x) := min(f(x), 0) \leq 0 \end{cases}$$

Weil f als stetig vorausgesetzt ist (ohne das extra anzugeben) sind auch die Funktionen f^+ und f^- stetig, und damit über jedes endliche abgeschlossene Intervall Riemann-integrierbar. Die Integrale

$$\int_a^\infty f^+(x)dx \leq \int_a^\infty |f(x)|dx, \quad \int_a^\infty f^-(x)dx \geq -\int_a^\infty |f(x)|dx$$

existieren. Dann konvergiert auch das uneigentliche Integral

$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^\infty f^+(x)dx + \int_a^\infty f^-(x)dx.$$

□

Beispiel 4.15 $\int_1^\infty sin(x)/xdx$ *konvergiert: Mit partieller Integration sehen wir*

$$\int_1^u \frac{sin(x)}{x}dx = \frac{-cos(x)}{x}|_1^u - \int_1^u \frac{cos(x)}{x^2}dx.$$

Weil

$$\lim_{u\to\infty} \frac{cos(x)}{x} = 0,$$

und nach dem Vergleichskriterium

$$\int_1^\infty \frac{|cos(x)|}{x^2}dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = 1,$$

konvergiert das Integral.

Beispiel 4.16 *Das Integral*

$$\int_1^\infty x \cdot sin(x^3)dx$$

konvergiert auch, unfassbar, weil sowohl die Integrationsgrenze als auch die Funktion unendlich wird.

Beweis. Wir substituieren $x^3 = y$

$$\int_1^u x \cdot sin(x^3)dx = \int_1^{\sqrt[3]{u}} \sqrt[3]{y} \cdot sin(y)\frac{dy}{3\sqrt[3]{y}^2} = \frac{1}{3}\int_1^{u'} \frac{1}{\sqrt[3]{y}} sin(y)dy.$$

Mit partieller Integration wird daraus

$$\frac{1}{3}\left[-y^{-1/3}cos(y)|_1^{u'} - \int_1^{u'} \frac{1}{3} y^{-4/3}cos(y)dy\right].$$

Wegen

$$\lim_{u\to\infty} \frac{cos(u)}{\sqrt[3]{u}} = 0$$

und

$$\int_1^\infty y^{-4/3}|cos(y)|dy \le \int_1^\infty y^{-4/3}dy < \infty$$

konvergiert dieses uneigentliche Integral tatsächlich. □

Uneigentliche Integrale hängen auch mit unendlichen Reihen zusammen:

Satz 4.15 (Reihen-Vergleichskriterium) *Die Funktion* $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ *sei positiv* ($f(x) \ge 0$ *für alle* x) *und monoton fallend. Dann gilt:*

$$\sum_1^\infty f(n) \text{ konvergiert} \quad \Longleftrightarrow \quad \int_1^\infty f(x)dx \text{ konvergiert.}$$

Beweis. Auf jedem Teilintervall $[n, n+1]$, $n \in \mathbb{N}$, ist

$$f(n) \ge f(x) \ge f(n+1),$$

$$f(n) \ge \int_n^{n+1} f(x)dx \ge f(n+1).$$

Daraus folgt für jedes $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{N-1} f(n) \ge \int_1^N f(x)dx \ge \sum_{n=2}^{N} f(n),$$

und damit die Behauptung. □

Beispiel 4.17 *Wir wissen, dass das uneigentliche Integral*

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^s}dx = \frac{1}{s-1}$$

für $s > 1$ konvergiert. Daraus folgt, dass die unendliche Reihe

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$$

für $s > 1$ konvergiert. Für $s = 1$ ist dies die divergente harmonische Reihe. Für $s = 2$ kennen wir die Konvergenz aus Paragraph 1.3. Die Funktion $\zeta(s)$, $s > 1$, ist die geheimnisumwitterte Riemannsche Zeta-Funktion.

Aufgabe 4.10 *Es seien $a, b > 0$. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Ellipse*

$$E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}.$$

Aufgabe 4.11 *Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ sei*

$$f_n : [0,\infty[\to \mathbb{R}, \quad f_n(x) := \frac{x}{n^2}e^{-\frac{x}{n}}.$$

Zeigen Sie:
a) *Die Folge f_n konvergiert auf $[0,\infty[$ gleichmäßig gegen 0.*
b) *Für jedes $n \geq 1$ ist*

$$\int_0^\infty f_n(x)dx = 1.$$

Aufgabe 4.12 *Berechnen Sie $\int_0^\infty \frac{1}{cosh(x)}dx$.*

Aufgabe 4.13 *Berechnen Sie*

$$\int_0^\infty e^{-x}cos(x)dx \quad und \quad \int_0^\infty e^{-x}sin(x)dx.$$

Aufgabe 4.14 *Berechnen Sie für $n \in \mathbb{N}$*

$$\int_{-\infty}^\infty x^n e^{-x^2}dx$$

unter Verwendung von (ohne Beweis)

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

Index