Elemente der Analysis I

Wolf P. Barth

Nürnberg, Wintersemester 2006/07

Version vom 29. August 2006

Mathematisches Institut der Universität
Bismarckstr. 1 1/2, D 91054 Erlangen
e-mail: barth@mi.uni-erlangen.de

Inhaltsverzeichnis

0 Die reellen Zahlen

Als Literatur zur Vorlesung eignet sich am besten das Buch

O. Forster: Analysis 1. ro-ro-ro Vieweg

Es ist seit 1976 in mehreren Auflagen erschienen. Für das erste Semester gibt es einfach kein besseres Analysis-Buch. Ich werde mich, zumindest am Anfang ziemlich eng an dieses Buch anlehnen. Früher ging das manchmal so weit, dass ich kein eigenes Skriptum, sondern einfach dieses Buch als Vorlage mit in die Analysis-I-Vorlesung genommen habe. Das Buch ist ziemlich komprimiert geschrieben. Das ist natürlich praktisch, wenn man es statt eines Skriptums mit in die Vorlesung nehmen möchte. Studenten, besonders zu Beginn des Studiums klagen aber häufig darüber. Deswegen noch einige andere Bücher:

Barner, M., Flohr, F.: Analysis. De Gruyter Verlag

Blatter, C.: Analysis. Springer Verlag

Heuser, H.: Lehrbuch der Analysis. Teubner Verlag

Mangoldt, H.v., Knopp, K.: Einführung in die höhere Mathematik. Hirzel Verlag

Wenn ich eine Aufgabe aus einem dieser Bücher entnommen habe gebe ich das an. Allerdings tue ich das nicht, wenn das Buch auch Lösungen der Aufgaben enthält. Der Hinweis [NV] bei einer Aufgabe bedeutet, dass sie eine Klausuraufgabe im nicht-vertieften Staatsexamen war.

0.1 Einführung

Analysis ist ein anderer Name für *Differential- und Integralrechnung* oder *Infinitesimalrechnung.* Ich halte die Erfindung der Differential- und Integralrechnung für die wichtigste kulturelle Leistung des Abendlandes. Sie ermöglichte die Entwicklung der Ingenieurwissenschaften in Europa während der letzten zwei oder drei Jahrhunderte. Deren Konsequenz war wieder die Beherrschung der ganzen Welt durch europäische Staaten in der Zeit um 1900.

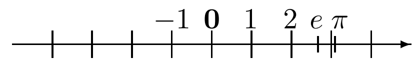
Die Differential- und Integralrechnung wurde von Isaac Newton (1643-1727) und Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) erfunden. Beide führten über die Priorität bei dieser Entdeckung einen erbitterten Streit. Leibniz sah diese Rechenart in Zusammenhang mit einer Philosophie über das unendlich („infinitesimal“) Kleine. (Die Notationen dx, df, df/dx, sowie auch das Integralzeichen stammen von ihm.) Newton sah sie von Anfang an in Zusammenhang mit Anwendungen in den Natur- und Ingenieurwissenschaften. Von ihm stammt die Bezeichnung $\dot{f}$ für die Ableitung.

Die griechische Mathematik kannte keine Differential- und Integralrechnung, obwohl in der Flächen- und Volumenberechnung des Archimedes (287?-212 v. Chr.) Ansätze dazu erkennbar sind. Die Griechen kannten den Begriff „*Funktion*“ nicht, ebensowenig wie die Technik des Grenzübergangs. Diese Technik entstand erst aus dem jahrhundertelangen Ringen der christlichen scholastischen Philosophie mit dem Unendlichen, bzw. unendlich Kleinen. (Wieviele Engel können auf einer Nadelspitze tanzen?)

Ungefähr zur gleichen Zeit wie in Europa wurde die Infinitesimalrechnung auch in Japan entdeckt. Zu Anwendungen kam es hier allerdings nicht.

Was Zahlen sind, ist schwer zu erklären, was die reellen Zahlen sind, noch schwerer. Deswegen wird das ja in der Schule auch nicht gemacht. In der Schule lernt man *den Umgang mit den Zahlen* und nicht, *was sie sind.* (Hierher kommen letztenendes auch die Schwierigkeiten bei der Einführung der komplexen Zahlen). Bis auf weiteres wollen wir uns die reellen Zahlen als Dezimalbrüche vorstellen, obwohl wir die Theorie der Dezimalbrüche auch erst später behandeln werden. Wir werden so ähnlich, wie in der Schule vorgehen, und die Eigenschaften der reellen Zahlen zusammenstellen. Was die reellen Zahlen sind, und dass es sie überhaupt gibt, das ist Stoff von Spezialvorlesungen (z.B. „Aufbau des Zahlsystems“).

Wir benutzen folgende Bezeichnungen für die verschiedenen Mengen von Zahlen:

$\mathbb{R}$	$=$	Menge der reellen Zahlen:	
$\mathbb{N}$	$=$	Menge der natürlichen Zahlen:	$\{1, 2, 3, ...\}$
$\mathbb{Z}$	$=$	Menge der ganzen Zahlen:	$\{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$
$\mathbb{Q}$	$=$	Menge der rationalen Zahlen:	$\{\frac{p}{q} :\ p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}$
$\mathbb{C}$	$=$	Menge der komplexen Zahlen:	$\{a + b \cdot i :\ a, b \in \mathbb{R}\}$

Was eine Menge ist, möchte ich hier nicht (und auch sonst nie) erklären. Das wissen Sie ja aus der Schule. Glücklicherweise! Denn innerhalb der Mathematik kann man diesen Grundbegriff der Mathematik nicht erklären.

0.2 Algebraische Rechenoperationen mit reellen Zahlen

Zwei reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ kann man

$$\begin{array}{ll} \text{addieren:} & x + y \in \mathbb{R} \\ \text{multiplizieren:} & x \cdot y \in \mathbb{R} \end{array}$$

Dabei gelten die Rechenregeln aus der Tabelle auf der nächsten Seite.
Viel genauer wollen wir uns diese wohlbekannten Rechenoperationen nicht anschauen. Z.T. deswegen, weil sie aus der Schule wohlbekannt sind, z.T. auch deswegen, weil ihre genauere Untersuchung in die Lineare Algebra gehört.

Wir benutzen die folgenden, auch wieder wohlbekannten Abkürzungen:

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=m}^{n} a_\mu &= a_m + a_{m+1} + ... + a_n \\ \prod_{\mu=m}^{n} a_\mu &= a_m \cdot a_{m+1} \cdot ... \cdot a_n \end{aligned}$$

Beispiele:

$$\sum_{\mu=1}^{6} \mu = \underbrace{1+2}+\underbrace{3+4}+\underbrace{5+6} = 3 + 7 + 11 = 21,$$

Assoziativität der Addition	$(x+y)+z = x+(y+z)$
Kommutativität der Addition	$x+y = y+x$
Existenz der Null	$x+0=0$
Existenz des Negativen $-x$	zu $x \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein $-x \in \mathbb{R}$ mit $x+(-x)=0$
Assoziativität der Multiplikation	$(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$
Kommutativität der Multiplikation	$x\cdot y = y\cdot x$
Existenz der Eins	$x \cdot 1 = x$
Existenz des Inversen $1/x$	zu $x \in \mathbb{R}, x \neq 0,$ gibt es genau ein $1/x \in \mathbb{R}$ mit $x\cdot(1/x)=1$
Distributivgesetz	$x\cdot(y+z) = x\cdot y + x \cdot z$

Rechenregeln für Addition und Multiplikation reeller Zahlen

$$\prod_{\mu=1}^{6} \mu = \underbrace{1\cdot 2}\cdot\underbrace{3\cdot 4}\cdot\underbrace{5\cdot 6} = 2\cdot 12\cdot 30 = 720.$$

Rechenregeln für das Summenzeichen:

1) Die leere Summe: Ist der obere Index n kleiner als der untere Index m, dann gibt es keinen Summationsindex μ größer als m und kleiner als n. Es gibt dann kein einziges a_μ das in der Summe addiert wird. Man setzt eine solche Summe ohne Summanden $=0$.

   Beispiel: $\sum_{\mu=10}^{5} \frac{1}{\mu} = 0.$

2) Zerlegen einer Summe: Ist l eine ganze Zahl zwischen m und n, so ist

$$\sum_{\mu=m}^{n} a_\mu = \sum_{\mu=m}^{l} a_\mu + \sum_{\mu=l+1}^{n} a_\mu.$$

3) Kommutativität: Falls $a_{\mu_1}, a_{\mu_2}, ..., a_{\mu_n}$ eine Umordnung der Zahlen $a_1, a_2, ..., a_n$ ist, dann gilt

$$\sum_{\mu=1}^{n} a_\mu = \sum_{i=1}^{n} a_{\mu_i}.$$

   Beispiel: Es sei $n=6,\ a_\mu = \mu$ und die Umordnung sei $\mu_i = 7-i$. Die Indixes μ_i, $i=1,...,6$ sind also $6,5,4,3,2,1$. Dann ist

$$\sum_{i=1}^{6} a_{\mu_i} = 6+5+4+3+2+1 = \sum_{\mu=1}^{6} a_\mu.$$

4) Doppelsummen: Summanden können auch mal zwei Indizes haben, etwa $a_{\mu,\nu} = 1/(\mu+\nu)$. Eine Summe

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{m,n} a_{\mu,\nu}$$

heißt Doppelsumme. Man rechnet sie aus, indem man zuerst über einen Index addiert, und dann über den anderen. Oder umgekehrt, erst über den anderen und dann über den einen. Beidemale kommt dasselbe heraus, in Formeln:

$$\sum_{\mu=1}^{m}\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu,\nu}\right) = \sum_{\nu=1}^{n}\left(\sum_{\mu=1}^{m} a_{\mu,\nu}\right) =: \sum_{\mu,\nu=1}^{m,n} a_{\mu,\nu}.$$

Beispiel: $\sum_{\mu,\nu=1}^{2,3} \frac{1}{\mu+\nu}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu=1}^{2}\left(\sum_{\nu=1}^{3}\frac{1}{\mu+\nu}\right) &= \sum_{\mu=1}^{2}\left(\frac{1}{\mu+1}+\frac{1}{\mu+2}+\frac{1}{\mu+3}\right)\\
&= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\\
&= \frac{13}{12}+\frac{47}{60} = \frac{112}{60} = \frac{28}{15}\\
\sum_{\nu=1}^{3}\left(\sum_{\mu=1}^{2}\frac{1}{\mu+\nu}\right) &= \sum_{\nu=1}^{3}\left(\frac{1}{\nu+1}+\frac{1}{\nu+2}\right)\\
&= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\\
&= \frac{5}{6}+\frac{7}{12}+\frac{9}{20} = \frac{112}{60}.
\end{aligned}$$

5) Indexverschiebung: $\sum_{\mu=m}^{n} a_\mu = \sum_{\mu=m+k}^{n+k} a_{\mu-k}$.

Beispiel: $\sum_{\mu=1}^{6} \mu = 1 + ... + 6 = \sum_{\mu=2}^{7}(\mu-1)$.

Für Produkte gelten ganz ähnlich Regeln, nur setzt man das leere Produkt = 1.

Potenzen: Für jede reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ und jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ definiert man die n-te Potenz von a durch

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n \text{ mal}} = \prod_{\nu=1}^{n} a.$$

Wenn $a \neq 0$ ist, kann man diese n-te Potenz auch für alle ganzen Zahlen $n \in \mathbb{Z}$ definieren durch

$$a^0 := 1$$

und für $n < 0$, $n \in \mathbb{Z}$

$$a^n := (1/a)^{-n} = \underbrace{\frac{1}{a} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{a}}_{-n \text{ mal}}.$$

Für diese n-te Potenz gelten die folgenden Rechenregeln:

$$\begin{aligned} i) &\quad a^m \cdot a^n = a^{m+n} \\ ii) &\quad (a^m)^n = a^{m \cdot n} \\ iii) &\quad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n, \end{aligned}$$

wobei immer auf $a \neq 0$, bzw. $b \neq 0$ zu achten ist, wenn a oder b in eine Potenz $n \leq 0$ erhoben werden soll.

Beweis. Da die Beweise für alle drei Regeln ziemlich gleich verlaufen (und auch gleich langweilig sind), beschränken wir uns auf die Regel $i)$: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. Probleme enstehen, weil wir Fallunterscheidung machen müssen, je nach dem ob m positiv, negativ oder $= 0$ ist, und ebenso für n. Das sind insgesamt $3 \times 3 = 9$ Fälle. Die wollen wir nicht alle durchgehen. Brauchen wir auch nicht! Denn wegen der Kommutativität der Addition ist $a^{m+n} = a^{n+m}$, und wegen der Kommutativität der Multiplikation gilt $a^m \cdot a^n = a^n \cdot a^m$. Wenn wir die Formel für (m, n) bewiesen haben, gilt sie automatisch auch für die Potenzen (n, m). Das führt zu Fallreduktion.

Schauen wir uns aber zunächst die Situation für $m = 0$ (und $a \neq 0$) an: Nach Definition ist für alle $n \in \mathbb{Z}$

$$a^m \cdot a^n = a^0 \cdot a^n = 1 \cdot a^n = a^n,$$

$$a^{m+n} = a^{0+n} = a^n.$$

Die Formel stimmt also wenn $m = 0$ (oder $n = 0$) ist.

Bis auf Vertauschen von m und n bleiben dann nur noch die folgenden drei Fälle:

$$m > 0,\, n > 0: \quad a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{m} \cdot \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n} = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{m+n} = a^{m+n}$$

$$m < 0,\, n < 0: \quad a^m \cdot a^n = \left(\frac{1}{a}\right)^{-m} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-m-n} = a^{m+n}$$
$$\text{(weil } -m \text{ und } -n > 0 \text{ sind)}$$

$$m < 0,\, n > 0: \quad a^m \cdot a^n = \left(\frac{1}{a}\right)^{-m} \cdot a^n = \begin{cases} a^{n-(-m)} = a^{m+n} & \text{für } n > (-m) \\ 1 & \text{für } n = -m \\ \left(\frac{1}{a}\right)^{-m-n} = a^{m+n} & \text{für } n < (-m) \end{cases}$$

Als Beispiel, und auch weil sie für die Theorie enorm wichtig ist, sehen wir uns die geometrische Summe an. Dazu seien $0 \neq a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ feste Zahlen. Die Summe

$$\sum_{\nu=0}^{n} a^\nu = 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n$$

heißt *geometrische Summe*. Für den Wert dieser Summe gibt es - falls $a \neq 1$ ist - eine geschlossene Formel:

$$\boxed{\sum_{\nu=0}^{n} a^\nu = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \qquad\qquad \text{(GEOMETRISCHE SUMME)}}$$

(Wenn $a = 1$ ist, sind im Bruch auf der rechten Seite Zähler und Nenner $= 0$. Damit ist die rechte Seite, und auch die Formel in diesem Fall sinnlos. Aber die geometrische Reihe für $a = 1$ ist völlig ohne Formel elementar auszuwerten:

$$\sum_{\nu=0}^{n} 1^\nu = \sum_{\nu=0}^{n} 1 = (n+1) \cdot 1 = n+1.)$$

Erster Beweis für diese Summenformel: Wegen $a \neq 1$ können wir die behauptete Gleichung mit $a - 1$ durchmultiplizieren, und auch wieder durch $a - 1 \neq 0$ durchdividieren. Deswegen ist die Behauptung äquivalent mit der Gleichung

$$(1-a) \cdot \sum_{\nu=0}^{n} a^\nu = 1 - a^{n+1}.$$

Das Produkt auf der linken Seite könne wir aber mit unseren Rechenregeln ausrechnen:

$$\begin{aligned}
(1-a) \cdot \sum_{\nu=0}^{n} a^\nu &= 1 \cdot \sum_{\nu=0}^{n} a^\nu - a \cdot \sum_{\nu=0}^{n} a^\nu \\
&= \sum_{\nu=0}^{n} a^\nu - \sum_{\nu=0}^{n} a^{\nu+1} \\
&= \sum_{\nu=0}^{n} a^\nu - \sum_{\nu=1}^{n+1} a^\nu \\
&= \left(1 + \sum_{\nu=1}^{n} a^\nu\right) - \left(\sum_{\nu=1}^{n} a^\nu + a^{n+1}\right) \\
&= 1 - a^{n+1}
\end{aligned}$$

Die Formel stimmt! $\square$

Zweiter Beweis (vollständige Induktion): Für $n = 1$ ist die Formel richtig:

$$\sum_{\nu=0}^{1} a^\nu = a^0 + a^1 = 1 + a = \frac{1-a^2}{1-a},$$

weil $1 - a^2 = (1-a)(1+a)$ ist. Wenn wir die Formel für $n = 1$ benutzen, können wir sie für $n = 2$ folgendermaßen beweisen:

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=0}^{2} a^\nu &= \sum_{\nu=0}^{1} a^\nu + a^2 \\
&= \frac{1-a^2}{1-a} + a^2 \\
&= \frac{1}{1-a} \cdot (1 - a^2 + (1-a) \cdot a^2) \\
&= \frac{1}{1-a} \cdot (1 - a^2 + a^2 - a^3) \\
&= \frac{1-a^3}{1-a}.
\end{aligned}$$

In der Tat! Für $n = 3$ ist die Formel auch richtig.

So können wir weitermachen. Angenommen, die Formel stimmt für n, dann beweisen wir sie für $n + 1$. Das geht folgendermaßen:

Annahme: $\sum_{\nu=0}^{n} a^\nu = \dfrac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$.

Behauptung: $\sum_{\nu=0}^{n+1} a^\nu = \dfrac{1 - a^{n+2}}{1 - a}$.

Schluss: Wir gehen genauso vor, wie beim Schluss von 1 auf 2.

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=0}^{n+1} a^\nu &= \sum_{\nu=0}^{n} a^\nu + a^{\nu+1} \\
&= \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} + a^{n+1} \\
&= \frac{1}{1 - a} \cdot (1 - a^{n+1} + (1 - a) \cdot a^{n+1}) \\
&= \frac{1}{1 - a} \cdot (1 - a^{n+1} + a^{n+1} - a^{n+2}) \\
&= \frac{1 - a^{n+2}}{1 - a}.
\end{aligned}$$

Die Summenformel stimmt schon wieder, oder besser, immer noch. □

Das ist sehr schön und eindrucksvoll. Weniger schön ist es, zu erklären, wie man auf so schöne und eindrucksvolle Beweise kommt. An sich ist das auch nicht meine Aufgabe. Ich habe Ihnen zu zeigen, wie Mathematik funktioniert. Wie man draufgekommen ist, dass sie so funktioniert, ist etwas ganz anderes. Das brauche ich Ihnen nicht zu zeigen. Es reicht doch, dass es funktioniert.

Hier sehen wir einen der Unterschiede zwischen Schule und Universität. Schüler werden an Ergebnisse hingeführt, Plausibilität spielt eine große Rolle. Das ist bei uns jetzt nicht mehr so. Wie Mathematiker auf etwas gekommen sind, ist keine mathematische Frage, sondern historisch oder didaktisch von Interesse.

Weil die Beweismethoden aus beiden verwendeten Beweisen in der Mathematik häufiger vorkommen, möchte ich sie hier noch etwas beleuchten. Der erste Beweis der Formel

$$(1 - a) \cdot \sum_{\nu=0}^{n} a^\nu = 1 - a^{n+1}$$

ging rechnerisch durch Wegkürzen. Die Summe auf der linken Seite der Gleichung können wir auch schreiben:

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=0}^{n} (1 - a) \cdot a^\nu &= \sum_{\nu=0}^{n} (a^\nu - a^{\nu+1}) \\
&= \underbrace{(1 - a)}_{\nu=0} + \underbrace{(a - a^2)}_{\nu=1} + \underbrace{(a^2 - a^3)}_{\nu=2} + \ldots + \underbrace{(a^n - a^{n+1})}_{\nu=n} \\
&= 1 - a^{n+1}.
\end{aligned}$$

In dieser Summe kürzt sich $-a^{\nu+1}$ aus dem ν-ten Summanden mit $a^{\nu+1}$ aus dem $(\nu+1)$-ten Summanden weg. Eine solche Summe nennt man *Teleskop-Summe.*

Viel wichtiger ist das zweite Beweisverfahren. Es heißt *vollständige Induktion.* Es wird fast immer verwendet, wenn eine Aussage $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ bewiesen werden soll. Bei uns war es die Aussage

$$A(n): \qquad \sum_{\nu=0}^{n} a^{\nu} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}.$$

Das Beweisverfahren der vollständigen Induktion gliedert sich in drei Schritte:

VOLLSTÄNDIGE INDUKTION

1. *Induktionsanfang:* Man beweist $A(1)$ (oder, manchmal auch $A(0)$).

2. *Induktionsannahme:* Man nimmt an, die Aussage $A(n)$ sei richtig.

3. *Induktionsschluss:* Man beweist, dass $A(n+1)$ aus $A(n)$ folgt.

Die wesentliche Arbeit steckt natürlich meist im Induktionsschluss.

Warum funktioniert das Beweisprinzip der vollständigen Induktion? Das kann man logisch noch etwas weiter untersuchen: Entweder ist $A(n)$ richtig für alle $n \in \mathbb{N}$. Das ist schön und wir sind fertig. Oder, es gibt ein $n_1 \in \mathbb{N}$ wofür $A(n_1)$ falsch ist. Dann gibt es auch ein kleinstes solches n_1, nennen wir es n_0. Wegen des Induktionsanfangs kann n_0 nicht $= 1$ sein, denn $A(1)$ ist ja richtig. Also ist auch $n_0 - 1 \in \mathbb{N}$. Die Aussage $A(n_0 - 1)$ ist richtig, weil n_0 ja die kleinste natürliche Zahl war, für die die Ausage falsch war. Nach dem Induktionsschluss folgt $A(n_0)$ aber aus $A(n_0 - 1)$. Widerspruch! Einen Widerspruch kann es in der Mathematik nicht geben, also kann $A(n_0)$ und damit $A(n_1)$ nicht falsch gewesen sein, es war also $A(n)$ richtig für alle $n \in \mathbb{N}$.

Das scheint alles ziemlich plausibel. An zwei Stellen kann man aber mit Kritik ansetzen:

1) Warum enthält jede Menge natürlicher Zahlen ein kleinstes Element n_0? Das ist zwar einleuchtend, aber stimmt das denn wirklich? Woher weiß ich, dass es stimmt? Letztenendes ist das eine Eigenschaft der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen, und muss dort untersucht werden, wo man die natürlichen Zahlen untersucht: in einer Spezialvorlesung.

2) Die Sache mit dem Widerspruch als Beweisverfahren ist nicht unumstritten. Man nennt das Verfahren auch den Satz vom ausgeschlossenen Dritten: Eine Aussage ist entweder wahr, oder falsch, eine dritte Möglichkeit ist ausgeschlossen! Aber dies ist eine Frage der verwendeten Logik. In der ersten Hälfte des letzten Jahrhunderts gab es darüber unter Mathematikern einen erbitterten Streit. Ich möchte in dieser Vorlesung so verfahren, dass ich Widerspruchsbeweise nur verwende, wenn sie unumgänglich sind.

Wir wollen noch eine wichtige algebraische Formel für reelle Zahlen beweisen.

Satz 0.1 (Binomische Formel) *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$(x+y)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

mit den Binomialkoeffizienten ($k = 0, ..., n$)

$$\binom{n}{k} := \prod_{\nu=1}^{k} \frac{n-\nu+1}{\nu} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot k}.$$

Der Binomialkoeffizient ist auch für $k = 0$ definiert. Dann ist er das leere Produkt ($\nu = 1, ..., 0$)

$$\binom{n}{0} = 1.$$

Auch im anderen Extremfall $k = n$ erhalten wir

$$\binom{n}{n} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n} = 1.$$

Für den Beweis der binomischen Formel benötigen wir die Rechenregel:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

Beweis der Rechenregel: Die linke Seite der zu beweisenden Gleichung ist

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+2)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot k-1} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot k}.$$

Hier klammern wir

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+2)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (k-1)}$$

aus und erhalten

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+2)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (k-1)} \cdot \left(1 + \frac{n-k+1}{k}\right) = \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+2)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (k-1)} \cdot \frac{n+1}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

Beweis der binomischen Formel: Wenn $y = 0$ ist, lautet die Formel $x^n = x^n$ und wir brauchen nichts zu zeigen. Wenn $y \neq 0$ ist, klammern wir aus

$$(x+y)^n = \left(y(\frac{x}{y} + 1)\right)^n = y^n \cdot (\frac{x}{y} + 1)^n,$$

und brauchen die Formel nur noch für $y = 1$ zu zeigen:

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Das spart etwas Schreibarbeit.

Diese Formel beweisen wir durch vollständige Induktion nach n. Der Induktionsanfang ($n = 1$) lautet

$$(x+1)^1 = \binom{1}{0} x^0 + \binom{1}{1} x^1$$

und ist richtig. Nun nehmen wir die Formel für n als gültig an und müssen $(x+1)^{n+1}$ berechnen:

$$\begin{aligned}
(x+1)^{n+1} &= (x+1)^n \cdot (x+1) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot (x+1) \quad \text{(Induktions-Annahme)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^{k+1} + x^k) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \\
&= \binom{n}{0} x^0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) x^k + \binom{n}{n} x^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0} x^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^k + \binom{n+1}{n+1} x^{n+1} \quad \text{(Rechenregel)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k.
\end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 0.1 *Zeigen Sie für alle natürlichen Zahlen n:*

a) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} \cdot n(n+1)$

b) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

c) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2(n+1)^2$

Aufgabe 0.2 *Zeigen Sie für alle natürlichen Zahlen n:*

a) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$

b) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{n}{3}(4n^2-1)$

c) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3 = n^2(2n^2-1)$

Aufgabe 0.3 *Zeigen Sie für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$:*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

Aufgabe 0.4 *Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ definiert man $n!$ (gesprochen n Fakultät) durch*

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k = \begin{cases} 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n & (n \geq 1) \\ 1 & (n = 0) \quad \textit{leeres Produkt} \end{cases}$$

Berechnen Sie $n!$ (nicht unbedingt mit der Hand) für $n \leq 10$.

Aufgabe 0.5 *Zeigen Sie*

$$\textbf{a)} \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}, \qquad \textbf{b)} \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Aufgabe 0.6 *Zeigen Sie*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Aufgabe 0.7 *Zeigen Sie*

$$\prod_{k=1}^{n-1} (1 + \frac{1}{k}) = n.$$

Aufgabe 0.8 *Zeigen Sie für alle $x \neq y \in \mathbb{R}$*

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}.$$

0.3 Anordnungseigenschaften der reellen Zahlen

Eine reelle Zahl x heißt *positiv*, in Zeichen $x > 0$, wenn sie im Zahlenstrahl rechts von der Null liegt, dort wo die natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ liegen. Wir wollen das jetzt hier nicht weiter präzisieren, sondern nur Eigenschaften dieser Beziehung „> 0“ zusammenstellen:

A.1 Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der folgenden drei Beziehungen („genau eine“ heißt, dass immer eine dieser drei Beziehungen gilt, dass sie sich aber gegenseitig ausschließen):

$$x > 0 \quad \text{oder} \quad x = 0 \quad \text{oder} \quad -x > 0.$$

A.2 Wenn $x > 0$ und $y > 0$ ist, dann ist auch $x + y > 0$.

A.3 Wenn $x > 0$ und $y > 0$ ist, dann ist auch $x \cdot y > 0$.

Mit dieser Beziehung > 0 kann man die *Anordnungsrelation* zwischen reellen Zahlen definieren. Sie wird jenachdem durch die Zeichen $<, \quad >, \quad \leq, \quad \geq$ ausgedrückt.

Definition 0.1

$$
\begin{array}{rlcll}
i) & x > y & :\iff & x - y > 0 & \\
ii) & x \geq y & :\iff & x - y > 0 & \textit{oder} \quad x = y \\
iii) & x < y & :\iff & y > x & \\
iv) & x \leq y & :\iff & y \geq x &
\end{array}
$$

Aus A.1 bis A.3 folgern wir für diese Anordnungsrelation:
1.) $x < 0 \iff -x > 0$.
Beweis: $x < 0$ bedeutet nach Definition iii) dass $0 > x$, und nach Definition i) bedeutet dies $-x = 0 - x > 0$.

2.) $x < y$ und $y < z \implies x < z$.
Beweis: Nach Definitionen iii) und i) bedeutet die Voraussetzung, dass die Differenzen $y - x$ und $z - y$ positiv sind. Mit A.2 folgt daraus, dass $z - x = (z - y) + (y - x) > 0$ ist. Das bedeutet aber $x < z$.

3.) $x < y \implies$ für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $a + x < a + y$.
Beweis: Nach Definition bedeutet die Voraussetzung, dass $y - x > 0$. Dann ist auch $(y+a) - (x+a) = y - x > 0$.

4.) $x < y$ und $x' < y' \implies x + x' < y + y'$.
Beweis: Die Voraussetzung bedeutet, dass die Differenzen $y - x$ und $y' - x' > 0$ sind. Mit A.2 folgt daraus, dass $(y + y') - (x + x') = (y - x) + (y' - x') > 0$ ist, also dass $y + y' > x + x'$ ist.

5.) $x < y$ und $a > 0 \implies ax < ay$.
Beweis: Vorausgesetzt ist $y - x > 0$. Mit A.3 folgt daraus $ay - ax = a \cdot (y - x) > 0$. Also gilt $ax < ay$.

6.) $0 \leq x < y$ und $0 \leq a < b \implies ax < by$.
Beweis: Falls $x = 0$ oder $a = 0$ ist, dann ist $ax = 0$ und mit A.3 folgt $ax = 0 < by$. Andernfalls sind x und a beide > 0. Mit Eigenschaft 5.) folgt daraus $ax < ay < by$.

7.) $x < y$ und $a < 0 \implies ax > ay$ (Multiplikation mit negativen Faktoren dreht Ungleichungen um!)
Beweis: Nach Voraussetzung gilt $y - x > 0$ und $-a > 0$. Mit A.3 folgt daraus $(-a) \cdot (y - x) = ax - ay > 0$. Das bedeutet $ax > ay$.

8.) $x \neq 0 \implies x^2 > 0$.
Beweis: Nach A.1 ist entweder $x > 0$, und nach A.3 dann $x^2 = x \cdot x > 0$. Oder es ist $x < 0$, d.h. $(-x) > 0$. Auch daraus folgt mit A.3, dass $x^2 = (-x) \cdot (-x) > 0$ ist.

9.) $x > 0 \implies 1/x > 0$ und $x < 0 \implies 1/x < 0$.
Beweis: Es ist $1/x = a \cdot x$ mit $a = (1/x)^2 > 0$ wegen 8.). Mit 5.) folgt daraus die Behauptung.

10.) $0 < x < y \quad \Longrightarrow \quad 1/y < 1/x$ (Stürzen dreht Ungleichungen zwischen positiven Zahlen um!)

Beweis: Es ist

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{xy} \cdot (y - x).$$

Hier ist $1/xy = (1/x) \cdot (1/y) > 0$ wegen A.3 und 9.). Weil nach Voraussetzung $y - x > 0$ ist, folgt daraus die Behauptung.

11.) $1 > 0$.
Beweis: Es ist $1 = 1^2$ und die Behauptung folgt aus 8.).

12.) $n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad n > 0$.
Beweis (Vollständige Induktion nach n): Der Induktionsanfang $1 > 0$ ist 11.)
Induktionsannahme: $n > 0$.
Induktionsschluss: Mit A.2 folgt aus $n > 0$ und $1 > 0$, dass auch $n + 1 > 0$.

Die Eigenschaften A.1, A.2 und A.3 nehmen wir als gegeben hin. Über ihre Gültigkeit wollen wir uns den Kopf nicht zerbrechen. Soetwas nennt man *Axiome*. Aber das sind noch nicht alle Axiome, die wir für die Analysis brauchen. Das nächste heißt *archimedisches Axiom*:

A.4 Zu jeder Zahl $x \in \mathbb{R}$ gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x$.

Hieraus ziehen wir noch zwei Folgerungen:

13.) Zu allen positven reellen Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ $x, y > 0$ gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot x > y$.
Beweis: Nach A.4 gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > y/x$. Mit 5.) folgt daraus $n \cdot x > (y/x) \cdot x = y$.

14.) Zu jeder reellen Zahl $\epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $1/n < \epsilon$.
Beweis: Nach A.4 gibt es eine natürliche Zahl n mit $n > 1/\epsilon$. Mit 5.) folgt daraus $\epsilon > 1/n$.

Die bisherigen Ergebnisse dieses Abschnitts sind ziemlich einleuchtend. Wir haben auf ihre Beweise nur deswegen Mühe verwendet, um zu sehen, dass sie alle logische Folgerungen aus einigen wenigen Axiomen sind. Das liegt bei den folgenden Aussagen etwas anders. Sie sind technisch etwas schwieriger zu beweisen, und wir werden sie in der einen oder anderen Form später immer wieder brauchen.

Satz 0.2 (Nützliche Abschätzungen) a) (Bernoulli-Ungleichung) *Für jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$ und jede natürliche Zahl $1 \leq n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x.$$

b) *Für jede reelle Konstante $K \in \mathbb{R}$ und jede reelle Zahl $b > 1$ gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit*

$$b^n > K.$$

c) *Für jede reelle Konstante $\epsilon > 0$ und jede reelle Zahl b mit $0 < b < 1$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit*

$$b^n < \epsilon.$$

Beweis. a) Für $x = -1$ lautet die Bernoulli-Ungleichung

$$(1+x)^n = 0^n = 0 \geq 1 - n = 1 + n \cdot x$$

und ist richtig. Für $x > -1$ beweisen wir die Bernoulli-Ungleichung durch vollständige Induktion:
Induktionsanfang ($n = 1$): Es ist

$$(1+x)^1 = 1 + x \geq 1 + x = 1 + 1 \cdot x.$$

Induktionsannahme: Es sei $n \in \mathbb{N}$ und es gelte die Bernoulli-Ungleichung $(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$.
Induktionsschluss:

$$\begin{array}{rcll} (1+x)^{n+1} & = & (1+x) \cdot (1+x)^n & \\ & \geq & (1+x) \cdot (1+n \cdot x) & \text{(Induktionsannahme und 5.) mit } a = 1+x > 0) \\ & = & 1 + x + nx + nx^2 & \\ & = & 1 + (n+1) \cdot x + nx^2 & \\ & \geq & 1 + (n+1) \cdot x & \text{(wegen 8. und 12.)} \end{array}$$

b) Nach Voraussetzung ist $x := b - 1 > 0$. Wegen a) folgt daraus $b^n = (1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach 13.) gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot x > K$. Für dieses n ist also $b^n \geq 1 + K > K$.
c) Wegen 10.) ist $1/b > 1$. Nach b) gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $(1/b)^n > 1/\epsilon$. Mit 5.) folgt daraus

$$\epsilon = (\epsilon \cdot b^n) \cdot \frac{1}{b^n} > (\epsilon \cdot b^n) \cdot \frac{1}{\epsilon} = b^n.$$

□

Definition 0.2 *Für jede reelle Zahl x heißt*

$$|x| := \left\{ \begin{array}{r} x \\ 0 \\ -x \end{array} \right\} \textit{ falls } \left\{ \begin{array}{l} x > 0 \\ x = 0 \\ x < 0 \end{array} \right.$$

der Absolutbetrag *von x.*

Satz 0.3 (Eigenschaften des Absolutbetrags) a) *Es ist stets $|x| \geq 0$ und $|x| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.*
b) $|-x| = |x|$.
c) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.
d) *Falls $y \neq 0$, so ist $|x/y| = |x|/|y|$.*
e) *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung).*
f) *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ ist $|x + y| \geq ||x| - |y||$ (Minus - Dreiecksungleichung).*

Beweis. a) ist unmittelbar klar aus der Definition.
b) Nach Definition ist

$$|-x| = \left\{ \begin{array}{r} -x \\ 0 \\ -(-x) = x \end{array} \right\} \text{ falls } \left\{ \begin{array}{ll} -x > 0, & \text{d.h. } x < 0 \\ -x = 0, & \text{d.h. } x = 0 \\ -x < 0, & \text{d.h. } x > 0 \end{array} \right\} = |x|.$$

c) Nach Definition ist

$$|x|\cdot|y| = \left\{\begin{array}{r} xy \\ -xy \\ -xy \\ xy \end{array}\right\} \text{ falls } \left\{\begin{array}{l} x \geq 0 \text{ und } y \geq 0 \\ x \geq 0 \text{ und } y \leq 0 \\ x \leq 0 \text{ und } y \geq 0 \\ x \leq 0 \text{ und } y \leq 0 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{rll} xy & \text{falls} & xy \geq 0 \\ -xy & \text{falls} & xy \leq 0 \end{array}\right\} = |xy|.$$

d) Wir gehen aus von der Gleichung $x = \frac{x}{y}\cdot y$. Mit c) folgt daraus $|x| = |x/y|\cdot|y|$ und nach Division durch $|y|$ (das ja $\neq 0$ vorausgesetzt ist) die Behauptung $|x|/|y| = |x/y|$.

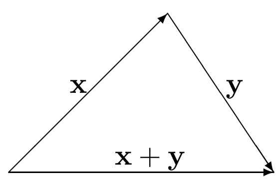
e) Aus $x \leq |x|$ und $y \leq |y|$ folgt mit 4.), dass $x+y \leq |x|+|y|$ ist. Ebenso folgt $-(x+y) = -x-y \leq |x|+|y|$ aus $-x \leq |x|$ und $-y \leq |y|$. Weil $|x+y|$ entweder $= x+y$ oder $= -(x+y)$ ist, ergibt sich $|x+y| \leq |x|+|y|$.

f) Wir setzen $u := x+y$ und $v := -y$. Dann folgt aus e)

$$|x| = |u+v| \leq |u|+|v| = |x+y|+|y|$$

und nach Subtraktion von $|y|$ auf beiden Seiten $|x|-|y| \leq |x+y|$. Nach Vertauschen von x und y sehen wir ebenso $|y|-|x| \leq |x+y|$. Weil $||x|-|y||$ entweder $= |x|-|y|$ oder $= -(|x|-|y|) = |y|-|x|$ ist, folgt schließlich $||x|-|y|| \leq |x+y|$. $\square$

Die Dreiecksungleichung heißt so, weil sie auch für Vektoren gilt:



Sie besagt dann: Die Summe $|\mathbf{x}|+|\mathbf{y}|$ der Längen zweier Dreiecksseiten $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ ist $\geq |\mathbf{x}+\mathbf{y}|$, der Länge der dritten Dreiecksseite $\mathbf{x}+\mathbf{y}$.

Aufgabe 0.9 a) *Es seien $a, b > 0$ reelle Zahlen mit $a < b$. Für welche $h \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\frac{a}{b} < \frac{a+h}{b+h}, \quad \textit{bzw.} \quad \frac{a}{b} > \frac{a+h}{b+h}?$$

b) *Es seien a, b, c, d reelle Zahlen mit*

$$b, d > 0 \quad \textit{und} \quad \frac{a}{b} < \frac{c}{d}.$$

Zeigen Sie:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

Aufgabe 0.10 *Zeigen Sie für $3 \neq n \in \mathbb{N}$*

$$n^2 \leq 2^n.$$

Aufgabe 0.11 (Forster) *Zeigen sie für* $4 \leq n \in \mathbb{N}$

$$2^n < n!.$$

Aufgabe 0.12 a) *Zeigen Sie für alle natürlichen Zahlen* $n \geq 1$ *und* $k \geq 2$

$$k^n > n.$$

b) *Zeigen Sie für alle natürlichen Zahlen* $n \geq 1$ *und* $k \geq 3$

$$k^n > n^2.$$

Aufgabe 0.13 *Zeigen Sie für alle reellen Zahlen* $x > 0$

$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

Aufgabe 0.14 *Zeigen Sie für jede natürlicheZahl* $1 \leq n \in \mathbb{N}$

$$\textbf{a)} \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!}, \qquad \textbf{b)} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 3.$$

Aufgabe 0.15 *Für welche reellen Zahlen* x *gilt*

$$|x| \leq 1 + \frac{x}{2}?$$

Aufgabe 0.16 *Es seien* $a > 0, r > 0$ *reelle Zahlen. Zeigen Sie dass die Menge*

$$\{x \in \mathbb{R} : |ax + b| < r\}$$

ein Intervall ist und bestimmen Sie dessen Grenzen.

Aufgabe 0.17 *Zeigen Sie für alle natürlichen Zahlen* $n \geq 1$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > 2.$$

0.4 Die Vollständigkeit der reellen Zahlen

Eine Menge K heißt ein

- *Körper*, wenn auf K Rechenoperationen „+“ und „·“ definiert sind, welche die Eigenschaften der Operationen „+“ und „·“ auf $\mathbb{R}$ aus Abschnitt 0.2 besitzen. Die Mengen $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ sind Körper. Die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ sind keine Körper.

- *angeordneter Körper*, wenn zusätzlich die Anordnungseigenschaften A.1, A.2 und A.3 aus 0.3 gelten. Die Körper $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$ sind angeordnet. Den Körper $\mathbb{C}$ kann man nicht anordnen, denn dann müssten alle Quadrate positiv sein, z.B. auch $-1 = i^2$. Das geht aber nicht.

- *archimedisch angeordneter Körper*, wenn zusätzlich A.4 aus 0.3 gilt. Diese Eigenschaft haben die Körper $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$.

Die Vollständigkeit ist eine Eigenschaft, die den Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen vom Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen unterscheidet. Zusammen mit den anderen Eigenschaften A.1 bis A.4 charakterisiert sie den Körper $\mathbb{R}$ sogar. Das wollen wir hier aber nicht beweisen.

Die Vollständigkeit der reellen Zahlen ist ein Axiom, das wir zu A.1 bis A.4 hinzunehmen. Man kann es auf verschieden äquivalente Weisen formulieren. Am einfachsten scheint mir an dieser Stelle die Formulierung als „Schnittaxiom“ .

Definition 0.3 *Ein* Schnitt *in den reellen Zahlen ist eine Zerlegung der Menge* $\mathbb{R}$ *in zwei nicht-leere Teilmengen, also* $\mathbb{R} = A \cup B$, *mit*

$$a \leq b \quad \textit{für alle} \quad a \in A \textit{ und } b \in B.$$

So ist z.B. die Zerlegung von $\mathbb{R}$ in negative und positive Zahlen ein Schnitt:

$$A := \{a \in \mathbb{R} : \ a \leq 0\}, \quad B := \{b \in \mathbb{R} : \ b \geq 0\}.$$

Aus der Eigenschaft 2.) des vorigen Abschnitts 0.2 mit $x = a,\ y = 0$ und $z = b$ folgt $a \leq b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$.

Das ist natürlich ein reichlich langweiliger Schnitt. Der folgende Schnitt ist interessanter:

Beispiel 0.1 *Es sei* $A = A_1 \cup A_2$ *mit*

$$A_1 := \{a \in \mathbb{R} : \ a \leq 0\}, \quad A_2 := \{a \in \mathbb{R} : \ a \geq 0 \textit{ und } a^2 \leq 2\}$$

und

$$B := \{b \in \mathbb{R} : \ b \geq 0 \textit{ und } b^2 \geq 2\}.$$

Behauptung: $\mathbb{R} = A \cup B$ *ist ein Schnitt.*

Beweis. 0) $A \neq \emptyset$ *wegen* $0 \in A_1 \subset A$ *und* $B \neq \emptyset$ *wegen* $3/2 \in B$.

1) $\mathbb{R} = A \cup B$: *Es ist* $\mathbb{R} = A_1 \cup A'$ *mit der Menge* $A' = \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq 0\}$ *der positiven Zahlen. Für eine positive Zahl* $x \in A'$ *gilt entweder* $x^2 \leq 2$ *oder* $x^2 \geq 2$ *(oder vielleicht beides, wenn* $x^2 = 2$*). Also ist* $A' = A_2 \cup B$. *Daraus folgt*

$$\mathbb{R} = A_1 \cup A' = A_1 \cup (A_2 \cup B) = (A_1 \cup A_2) \cup B = A \cup B.$$

2) Für alle $a \in A$ und $b \in B$ gilt $a \leq b$: Wenn $a \in A_1$ ist, dann ist $a \leq 0$ und natürlich $a \leq b$ für alle $b \in B$, weil diese Zahlen b positiv sind. Wir brauchen die Aussage also nur für alle $a \in A_2$ zu zeigen.

Sei also jetzt $a \in A_2$, d.h., $a \geq 0$ und $a^2 \leq 2$, sowie $b \in B$, d.h., $b \geq 0$ und $b^2 \geq 2$. Wenn $a \leq b$ ist, dann sind wir fertig. Andernfalls ist $a > b$. Wir verwenden Eigenschaft 6.) aus 0.2 für die Anordnungen $0 \leq b < a$ und $0 \leq b < a$. Nach Multiplikation folgt $b^2 < a^2$. Das ist ein Widerspruch zu $a^2 \leq 2$ und $b^2 \geq 2$. $\square$

Das Schnittaxiom lautet folgendermaßen:

A.5 Zu jedem Schnitt $\mathbb{R} = A \cup B$ gibt es eine reelle Zahl $s \in \mathbb{R}$ mit $a \leq s$ für alle $a \in A$ und $b \geq s$ für alle $b \in B$.

Diese Tatsache ist keineswegs offensichtlich. Wie gesagt, wir beweisen sie hier nicht, sondern nehmen sie als Axiom zu den Eigenschaften A.1 bis A.4 hinzu. Eine ganz typische Anwendung dieses Schnittaxioms ist folgende Aussage:

Beispiel 0.2 (Existenz der $\sqrt{2}$) *Es gibt eine positive reelle Zahl s mit $s^2 = 2$.*

Beweis. Wir benutzen den zuletzt angegebenen Schnitt $\mathbb{R} = A \cup B$ mit

$$A = \{a \in \mathbb{R} : \ a \leq 0\} \cup \{a \in \mathbb{R} : \ a \geq 0 \text{ und } a^2 \leq 2\}, \qquad B = \{b \in \mathbb{R} : \ b \geq 0 \text{ und } b^2 \geq 2\}.$$

Nach dem Schnittaxiom gibt es eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ mit $a \leq s$ für alle $a \in A$ und $s \leq b$ für alle $b \in B$. Wegen $0 \in A$ ist insbesondere $s \geq 0$ und wegen $3/2 \in B$ ist auch $s < 2$. Wir zeigen: $s^2 = 2$.

1) Angenommen, es wäre $s^2 > 2$, also $s^2 = 2 + d$ mit $d > 0$. Dann ist $a := s - d/8 < s$, gehört also nicht zu B, sondern zu A. Mit $s + a < 2s < 4$ berechnen wir

$$s^2 - a^2 = (s - a) \cdot (s + a) = \frac{d}{8} \cdot (s + a) < \frac{d}{2}.$$

Daraus folgt

$$a^2 > s^2 - \frac{d}{2} = (2 + d) - \frac{d}{2} = 2 + \frac{d}{2} > 2.$$

Dies steht im Widerspruch zu $a \in A$, also kann $s^2 > 2$ nicht gelten.

2) Angenommen, es wäre $s^2 < 2$, etwa $s^2 = 2 - d$ mit $d > 0$. Wir wählen $b := min\{2, s + d/8\}$. Wegen $s < 2$ ist $b > s$ und gehört zu B. Außerdem ist $b - s \leq d/8$ und $b + s < b + 2 \leq 4$. Damit berechnen wir

$$b^2 - s^2 = (b - s) \cdot (b + s) \leq \frac{d}{8} \cdot (b + s) \leq \frac{d}{2}.$$

Daraus folgt

$$b^2 < s^2 + \frac{d}{2} = (2 - d) + \frac{d}{2} = 2 - \frac{d}{2} < 2.$$

Dies steht jetzt im Widerspruch zu $b \in B$, also kann auch $s^2 < 2$ nicht gelten.

3) Weil aber nach A.1 entweder $s^2 - 2 > 0$, $s^2 - 2 < 0$ oder $s^2 - 2 = 0$ ist, haben wir $s^2 - 2 = 0$ bewiesen, d.h., $s^2 = 2$. $\square$

In der elementaren Zahlentheorie (oder schon auf der Schule) zeigt man, dass es keine rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$ mit $q^2 = 2$ geben kann. Also hat die Menge $\mathbb{Q}$ eine Art von Loch, in dem die reelle Zahl $\sqrt{2}$ liegt. (Natürlich hat $\mathbb{Q}$ nicht nur dieses eine Loch, sondern es gibt noch viele andere reelle Zahlen, die nicht in $\mathbb{Q}$ liegen.) Im Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen gibt es diese Löcher nicht. Das folgt aus dem Schnittaxiom. Man sagt, der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist *vollständig*.

Wir wollen uns noch schnell überlegen, dass die Zahl s im Schnittaxiom durch die Mengen A und B eindeutig bestimmt ist. Daraus folgt dann insbesondere, dass die Zahl $s \in \mathbb{R}$, $s \geq 0$, mit $s^2 = 2$ eindeutig bestimmt ist. Wir können dann mit Berechtigung diese eindeutig bestimmte Zahl zur Wurzel $\sqrt{2}$ erklären.

Nehmen wir also an, $\mathbb{R} = A \cup B$ sei ein Schnitt und es gelte sowohl

$$a \leq s_1 \text{ für alle } a \in A \text{ und } b \geq s_1 \text{ für alle } b \in B$$

als auch

$$a \leq s_2 \text{ für alle } a \in A \text{ und } b \geq s_2 \text{ für alle } b \in B.$$

Falls $s_1 \neq s_2$ sein sollte, nehmen wir o.B.d.A. an $s_1 < s_2$ und setzen $s := (s_1 + s_2)/2$. Dann ist

$$s = \frac{s_1}{2} + \frac{s_2}{2} > \frac{s_1}{2} + \frac{s_1}{2} = s_1,$$

also kann s nicht zu A gehören. Weil aber

$$s = \frac{s_1}{2} + \frac{s_2}{2} < \frac{s_2}{2} + \frac{s_2}{2} = s_2$$

ist, kann s auch nicht zu B gehören. Dies ist ein Widerspruch und die Annahme $s_1 < s_2$ war falsch. $\square$

Es ist übrigens unwesentlich, ob s zu A oder B oder zu beiden Mengen gehört. Darauf wird es nie ankommen.

Definition 0.4 *Es sei $A \subset \mathbb{R}$ eine nicht-leere Teilmenge.*

i) Eine Zahl $o \in \mathbb{R}$ heißt obere Schranke *von A, wenn für alle $a \in A$ gilt: $a \leq o$.*

ii) Eine Zahl $u \in \mathbb{R}$ heißt untere Schranke *von A, wenn für alle $a \in A$ gilt: $u \leq a$.*

iii) Die Menge A heißt nach oben beschränkt, *bzw.* nach unten beschränkt, *wenn es für A eine obere, bzw. untere Schranke gibt.*

iv) Die Menge A heißt beschränkt, wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist.

Beispiel 0.3 *Das abgeschlossene Intervall*

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

ist beschränkt. Eine obere Schranke ist z.B. die Zahl b, eine untere Schranke z.B. die Zahl a. Ebenso ist das offene Intervall

$$]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

beschränkt mit b als oberer und a als unterer Schranke.

Die Menge $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ ist nicht nach oben beschränkt, weil es nach dem Archimedischen Axiom keine Zahl $o \in \mathbb{R}$ gibt mit $n \leq o$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Definition 0.5 *Eine Zahl $o \in A$ heißt Maximum von A, wenn o eine obere Schranke von A ist. Eine Zahl $u \in A$ heißt Minimum von A, wenn u eine untere Schranke von A ist. In Zeichen:*

$$o = \max(A), \quad u := \min(A).$$

Beispiel 0.4 *Für das abgeschlossene Intervall $[a, b]$ ist*

$$b = \max([a, b]), \quad a = \min([a, b]).$$

Das offene Intervall $]a, b[$ dagegen besitzt weder ein Maximum noch ein Minimum. Wir zeigen, dass $]a, b[$ kein Maximum hat. (Für die Nicht-Existenz des Minimums geht der Beweis analog.)

Sei etwa $o \in]a, b[$ ein Maximum. Weil o zu $]a, b[$ gehört, ist $o < b$. Sei $x := (o + b)/2$. Es ist

$$o = \frac{o}{2} + \frac{o}{2} < x = \frac{o}{2} + \frac{b}{2} < \frac{b}{2} + \frac{b}{2} = b.$$

Daraus folgt

$$a < o < x < b,$$

und x gehört zu $]a, b[$. Und wegen $o < x$ kann o keine obere Schranke sein.

Beispiel 0.5 *Jede endliche Menge $A = \{a_1, ..., a_k\}$ besitzt ein Maximum*

$$o = \max_{i=1}^{k} a_i$$

und ein Minimum

$$u = \min_{i=1}^{k} a_i.$$

Satz 0.4 *Besitzt $A \subset \mathbb{R}$ ein Maximum $o \in \mathbb{R}$, so ist $o = \max(A)$ durch A eindeutig bestimmt. (Analog ist $\min(A)$ durch A eindeutig bestimmt.)*

Beweis. Sei sowohl o als auch o' ein Maximum für A. Wegen $o, o' \in A$ ist dann sowohl $o \leq o'$ als auch $o' \leq o$. Dann kann weder $o < o'$ sein, noch $o' < o$. Es muss $o = o'$ gelten. □

Zugegeben, das ist alles Haarspalterei. Aber leider ist es eine wesentliche und sehr lästige Komplikation. Die folgende Anwendung des Schnitt-Axioms repariert diese Komplikation zu einem gewissen Grad.

Satz 0.5 (vom Supremum) *Die Menge $A \subset \mathbb{R}$ sei nicht leer und nach oben beschränkt. Dann besitzt die Menge $B \subset \mathbb{R}$ der oberen Schranken von A ein Minimum.*

Beweis. Weil A nach oben beschränkt ist, ist B nicht leer. Wir definieren

$$A' := \{x \in \mathbb{R} : \text{ es gibt ein } a \in A \text{ mit } x \leq a\}.$$

Offensichtlich ist $A \subset A'$, und damit ist A' nicht leer. Wir zeigen, dass $\mathbb{R} = A' \cup B$ ein Schnitt ist:

$\mathbb{R} = A' \cup B$: Es sei $x \in \mathbb{R}$. Entweder ist $x \geq a$ für alle $a \in A$ und damit eine obere Schranke für A. Dann gehört x zu B. Andernfalls gibt es ein $a \in A$ mit $x < a$. Dann gehört x zu A'.

$a' \leq b$ für alle $a' \in A'$ und $b \in B$: Zu a' gibt es ein $a \in A$ mit $a' \leq a$. Weil b eine obere Schranke für A ist, gilt $a \leq b$. Es folgt:

$$a' \leq a \leq b \text{ und } a' \leq b.$$

Nach dem Schnitt-Axiom gibt es ein $s \in \mathbb{R}$ mit $a' \leq s$ für alle $a' \in A'$ und $s \leq b$ für alle $b \in B$. Wir zeigen

$$s = \min(B).$$

Wegen $A \subset A'$ gilt $a \leq s$ auch für alle $a \in A$. Damit ist $s \in B$ eine obere Schranke für A. Wegen $s \leq b$ für alle $b \in B$ ist s eine untere Schranke für B. □

Definition 0.6 *Wegen der Eindeutigkeit von* $\min(B)$ *ist die kleinste obere Schranke von* A*, die Zahl* $o = min(B)$ *durch* B *und dann durch* A *eindeutig bestimmt. Diese Zahl heißt das* Supremum *von* A*, in Zeichen*

$$o = \sup(A).$$

Analog heißt die größte untere Schranke u *von* A *das* Infimum *von* A

$$u = \inf(A).$$

Wir wissen also jetzt: Jede nach oben beschränkte Teilmenge A von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum, jede nach unten beschränkte Menge ein Infimum. Ist das Supremum ein Element der Menge A, so heißt es Maximum. Ist das Infimum ein Element der Menge A, so heißt es Minimum.

Aufgabe 0.18 *Entscheiden Sie, ob die folgenden Mengen reeller Zahlen nach oben bzw. nach unten beschränkt sind und bestimmen Sie im Fall der Existenz* sup, inf, max *bzw.* min *dieser Mengen:*

$$\textbf{a)}\ \mathbb{Z}, \quad \textbf{b)}\ \{z^2 : z \in \mathbb{Z}\}, \quad \textbf{c)}\ \{\frac{1}{x} : 0 < x \in \mathbb{R}\}, \quad \textbf{d)}\ [0, \infty[, \quad \textbf{e)}\ ]-\infty, 0[.$$

Aufgabe 0.19 *Für welche* $x \in \mathbb{R}$ *ist* $|1 - x^2| < 1$*?*

Aufgabe 0.20 *Zeigen Sie:*
a) *Jede nach oben beschränkte Menge ganzer Zahlen* $M \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ *besitzt ein Maximum.*
b) *Zu jedem* $x \in \mathbb{R}$ *existiert genau ein* $q \in \mathbb{Z}$ *mit*

$$q \leq x < q + 1.$$

(Diese Zahl q *heißt* größtes Ganzes $[x]$ unterhalb x*.)*

Aufgabe 0.21 *Es seien* $A, B \subset \mathbb{R}$ *nach oben beschränkte Mengen reeller Zahlen.*
a) *Zeigen Sie:* $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.
b) *Beweisen Sie oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel*

$$\sup(A \cap B) = \min(\sup(A), \sup(B)).$$

1 Konvergenz

Die allermeisten reellen Zahlen sind nicht rational. (Das werden wir noch präzisieren). Eine reelle Zahl, die nicht rational ist, kann man nicht explizit hinschreiben. Wenn man sie als Dezimalbruch hinschreibt, muss man irgend wann mit dem Schreiben aufhören. Dann hat man die Zahl aber nicht exakt, sondern nur näherungsweise hingeschrieben. Andere Arten, reelle Zahlen hinzuschreiben, wie etwa π, e, $\sqrt{2}$, $sin(10^o)$ sind rein symbolisch. Man weiß wie man damit rechnet, aber die exakten Werte hat man nicht in der Hand.

Deswegen ist es in der Analysis enorm wichtig, reelle Zahlen anzunähern. Man macht das mit konvergenten Folgen. Die Eigenschaften konvergenter Folgen sollen in diesem Kapitel 1 untersucht werden.

1.1 Folgen

Definition 1.1 *Eine* Folge reeller Zahlen *ist eine Abbildung der natürlichen Zahlen in die reellen Zahlen*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & a_n \end{array} \right.$$

Eine Folge ordnet also jeder natürlichen Zahl n eine reelle Zahl a_n zu. Meist schreibt man eine Folge als $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder als $(a_1, a_2, a_3, ...)$. Gelegentlich beginnt man mit dem Folgenindex n nicht bei 1 sondern bei einer anderen natürlichen Zahl, etwa bei 0. Eine solche Folge kann man $(a_n)_{n\geq 0}$ schreiben.

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ muss man unterscheiden von der Menge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Das sieht man am besten bei der konstanten Folge, definiert durch $a_n := a \in \mathbb{R}$ für alle n. Die Folge $(a_n) = (a, a, a, ...)$ ist unendlich lang, während die Menge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a\}$ nur das eine Element a enthält. Bei einer Folge ist die Reihenfolge ihrer Folgenglieder a_n wesentlich, bei einer Menge kommt es auf die Reihenfolge ihrer Elemente nicht an.

Beispiel 1.1 *Die* konstante *Folge: $a_n = a$ für alle n, also $(a_n) = (a, a, a, ...)$.*

Beispiel 1.2 *Die* harmonische *Folge: $a_n = 1/n$ für alle n, also $(a_n) = (1,\ 1/2,\ 1/3,\ ...)$.*

Beispiel 1.3 *Die* geometrische *Folge: $a_n := a^n$ für alle n, also $(a_n) = (a,\ a^2,\ a^3,\ ...)$.*

Beispiel 1.4 *Eine* alternierende *Folge: $a_n = (-1)^n$ für alle n, also $(a_n) = (-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ ...)$.*

Beispiel 1.5 *Die* alternierende harmonische *Folge: $a_n = (-1)^n/n$, also $(a_n) = (-1,\ 1/2,\ -1/3,\ 1/4,\ ...)$.*

Beispiel 1.6 *Folgen kann man auch* rekursiv *definieren. Zum Beispiel sei* $a_0 := 1$ *und für* $n \geq 1$ *werde definiert*

$$a_n := \frac{1}{2}(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}}).$$

Dann ist also $(a_n) = (1, 3/2, 17/12, ...)$.

Beispiel 1.7 *Folgen kann man gliedweise addieren. Seien etwa zwei Folgen* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gegeben, dann heißt die Folge* $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *die* Summenfolge *der beiden gegebenen Folgen.*

Beispiel 1.8 *Ebenso kann man die beiden Folgen gliedweise multiplizieren. Die Folge* $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *heißt die* Produktfolge.

Jetzt kommen wir zum ersten, ganz zentralen Begriff der Analysis, nämlich der Konvergenz. Er ist genauso wichtig wie später die Begriffe Ableitung und Integral.

Definition 1.2 *Es sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge reeller Zahlen. Die Folge* konvergiert gegen die reelle Zahl a, *wenn gilt:*

Für jede reelle Zahl $\epsilon > 0$

existiert eine natürliche Zahl $N(\epsilon)$ *so,*

dass für alle natürlichen Zahlen $n > N(\epsilon)$ *gilt:*

$$\boxed{|a_n - a| < \epsilon.}$$

(KONVERGENZ)

Das ist eine logisch ziemlich verschachtelte Definition. Vier Aussagen greifen ineinander. Man muss sie alle vier richtig, und dann auch noch in der richtigen Reihenfolge hinschreiben. Vielleicht gewinnt die Definition an Klarheit, wenn ich sie mit den logischen Symbolen $\forall$ und $\exists$ formuliere, die ich sonst so sehr hasse:

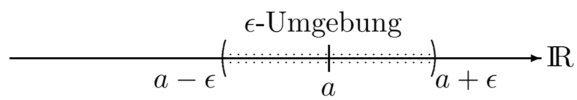
$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n > N(\epsilon): \quad |a_n - a| < \epsilon.$$

Und weil die Definition so wichtig ist, jetzt noch ein drittes Mal. Diesmal mit goldenen Worten: Die Folge (a_n) soll die Zahl a approximieren, also soll der Abstand $|a_n - a|$ klein, sehr klein, also echt klein sein. Wie klein? Kleiner als jedes noch so klein vorgegebene $\epsilon > 0$. Das geht doch gar nicht: wenn nicht $a_n = a$ ist, dann kann doch nicht $|a_n - a| < \epsilon$ mit $\epsilon := |a_n - a|/2$ sein. Na gut, machen wir Abstriche: Wir fordern $|a_n - a| < \epsilon$ nicht gleichzeitig für alle $\epsilon > 0$ und alle n, sondern bei einem festen $\epsilon > 0$ genügt es uns, wenn die Bedingung $|a_n - a| < \epsilon$ erfüllt ist für alle $n \in \mathbb{N}$ bis auf ein ganz paar (endlich viele) n am Anfang. Das größte dieser n sei $N(\epsilon)$. Dann sind wir mit $|a_n - a| < \epsilon$ für $n > N(\epsilon)$ auch schon zufrieden.

Und noch ein viertes Mal, diesmal geometrisch: Die Menge

$$\{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \epsilon\} = \{x \in \mathbb{R} : a - \epsilon < x < a + \epsilon\}$$

nennen wir eine ϵ-Umgebung von a. Dann lautet die Konvergenz-Bedingung: In jeder ϵ-Umgebung von a mit $\epsilon > 0$ liegen alle Folgenglieder, bis auf endlich viele (nämlich diejenigen (a_n) mit $n \leq N(\epsilon)$).



Die Konvergenzbedingung schreibt man auch kürzer, symbolisch so:

$$(a_n) \to a \qquad (n \to \infty).$$

Das soll also heißen: Wenn n gegen Unendlich geht, also alle natürlichen Zahlen durchläuft, dann gehen die Folgenglieder gegen a, die Folge konvergiert gegen a.

Definition 1.3 *Eine Folge (a_n), die nicht konvergiert, heißt* divergent.

Im Fall der Konvergenz einer Folge (a_n) ist die Zahl $a \in \mathbb{R}$, gegen welche die Folge konvergiert, durch die Folge eindeutig festgelegt. Oder anders ausgedrückt: Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen mit

$$(a_n) \to c_1 \quad \text{und} \quad (a_n) \to c_2 \qquad (n \to \infty).$$

Dann ist $c_1 = c_2$.

Beweis. Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es natürliche Zahlen $N_1(\epsilon)$ und $N_2(\epsilon)$ mit

$$\begin{aligned} |a_n - c_1| < \epsilon \quad & \text{für} \quad n > N_1(\epsilon), \\ |a_n - c_2| < \epsilon \quad & \text{für} \quad n > N_2(\epsilon). \end{aligned}$$

Mit einem Index $n > N_1(\epsilon)$ und $> N_2(\epsilon)$ folgt dann aus der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} |c_1 - c_2| &= |(c_1 - a_n) + (a_n - c_2)| \\ &\leq |c_1 - a_n| + |a_n - c_2| \\ &< \epsilon + \epsilon \\ &= 2\epsilon. \end{aligned}$$

Wir haben also $|c_1 - c_2| < 2\epsilon$ für jede noch so kleine positive reelle Zahl ϵ. Dann muss $|c_1 - c_2| = 0$ und $c_1 = c_2$ sein. $\square$

Weil die Zahl a, gegen welche eine konvergente Folge konvergiert, eindeutig festgelegt ist, kann man ihr einen Namen geben:

Definition 1.4 *Die Folge* (a_n) *reeller Zahlen sei konvergent mit* $(a_n) \to a$ *für* $n \to \infty$. *Dann heißt* a *der* Grenzwert *der Folge, in Zeichen*

$$\lim(a_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) = a.$$

Genauer bedeutet diese Gleichung $\quad \lim(a_n) = a \quad$ *zweierlei:*

1) *dass die Folge* (a_n) *konvergiert, und*
2) *dass ihr Grenzwert* $= a$ *ist.*

Als nächstes untersuchen wir die am Anfang dieses Abschnitts angegebenen Beispielfolgen auf Konvergenz.

Beispiel 1.1 *Die konstante Folge* (a_n) *mit* $a_n = a$ *konvergiert gegen* a*: In der Tat, für jedes* $\epsilon > 0$ *ist*

$$|a_n - a| = 0 < \epsilon$$

unabhängig von n*, oder anders ausgedrückt, für alle* $n > N(\epsilon) := 1$.

Beispiel 1.2 *Die harmonische Folge* $(a_n) = 1/n$ *konvergiert gegen* 0*: Sei* $\epsilon > 0$ *vorgegeben. Nach Folgerung 14 aus dem archimedischen Axiom A.4 in Abschnitt 0.3 gibt es eine natürliche Zahl* n *mit* $1/n < \epsilon$. *Dieses* n *nehmen wir als* $N(\epsilon)$ *und haben also* $1/N(\epsilon) < \epsilon$. *Für alle* $n > N(\epsilon)$ *ist dann*

$$|a_n - 0| = |\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N(\epsilon)} < \epsilon.$$

Also ist $(1/n) \to 0$ *nachgewiesen.*

Beispiel 1.3 *Bei der geometrischen Folge* $(a_n) = (a^n)$ *müssen wir Fallunterscheidungen machen, denn die Konvergenz hängt von der Zahl* a *ab. Das Ergebnis ist nämlich:*

$$\textit{Die Folge } (a^n)_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \begin{array}{l} \textit{konvergiert gegen } 0 \\ \textit{konvergiert gegen } 1 \\ \textit{divergiert} \end{array} \right\} \textit{ falls } \left\{ \begin{array}{l} |a| < 1 \\ a = 1 \\ a > 1 \textit{ oder } a \leq -1 \end{array} \right.$$

Beweis. 1. Fall: $|a| < 1$. *Sei* $\epsilon > 0$ *vorgegeben. Nach Satz 0.2 c) gibt es ein* $n \in N$ *mit* $|a|^n < \epsilon$. *Dieses* n *wählen wir als* $N(\epsilon)$. *Für all* $n \geq N(\epsilon)$ *ist dann*

$$|a|^n = |a|^{N(\epsilon)+(n-N(\epsilon))} = \underbrace{|a|^{N(\epsilon)}}_{<\epsilon} \cdot \underbrace{|a|^{n-N(\epsilon)}}_{\leq 1} < \epsilon.$$

Wegen $|a^n - 0| = |a^n|$ *bedeutet dies, dass die Folge gegen* 0 *konvergiert.*

2. Fall: $a = 1$. *Jetzt habe wir die konstante Folge aus Beispiel 1.1 mit* $a_n = 1$. *Sie konvergiert gegen* 1.

3. Fall: $a = -1$. *Die Folge* $a^n = (-1)^n$ *alterniert zwischen den Werten* 1 *(für gerades* n*) und* -1 *(für ungerades* n*). Weil sie zwischen diesen Werten hin und herspringt kann sie natürlich nicht* *konvergiern. Aber wir müssen das exakt machen. Dazu nehmen wir an, die Folge $(-1)^n$ möge gegen eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ konvergieren. Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es also ein $N(\epsilon)$ von dem an $|(-1)^n - c| < \epsilon$ ist. Für gerade $n > N(\epsilon)$ folgt daraus $|1 - c| < \epsilon$ und für ungerade n, dass $|-1-c| = |1+c| < \epsilon$ ist. Mit der Dreiecksungleichung finden wir*

$$2 = |1+1| = |(1-c) + (1+c)| \leq |1-c| + |1+c| < 2\epsilon.$$

Wenn wir z.B. $\epsilon < 1$ wählen, ist dies ein Widerspruch. Ein Grenzwert c kann also nicht existieren.

4. Fall: $|a| > 1$. Zu jeder Konstanten $K \in \mathbb{R}$ gibt es nach Satz 0.3 b) ein $n =: N_K \in \mathbb{N}$ mit $|a|^{N_K} > K$. Für alle $n \geq N_K$ gilt dann auch

$$|a|^n = |a|^{N_K + (n - N_K)} = \underbrace{|a|^{N_K}}_{> K} \cdot \underbrace{|a|^{n-N_K}}_{\geq 1} > K.$$

Die Absolutbeträge $|a^n| = |a|^n$ wachsen also über jede Grenze K. Dann kann die Folge natürlich nicht konvergieren, aber das müssen wir präzis machen.

Dazu nehmen wir an, die Folge a^n hätte einen Grenzwert $c \in \mathbb{R}$. Zu $\epsilon := 1$ gibt es dann ein $N(1)$ mit $|a^n - c| < 1$ für alle $n \geq N_1$. Wenn $n > N(1)$ und $> N_K$ ist, dann folgt aus der Minus-Dreiecksungleichung

$$|c| = |a^n + (c - a^n)| \geq ||a^n| - |c - a^n|| \geq \underbrace{|a|^n}_{> K} - \underbrace{|c - a^n|}_{< 1} > K - 1.$$

Das kann nicht gut gehen, z.B. führt die Wahl von $K := |c| + 1$ auf einen Widerspruch! □

Beispiel 1.4 *Die alternierende Folge $(a_n) = ((-1)^n)$ ist der Spezialfall $a = -1$ der geometrischen Folge. Wir haben soeben gesehen, dass sie divergiert.*

Beispiel 1.5 *Die alternierende harmonische Folge $(a_n) = ((-1)^n/n)$ hat dieselben Absolutbeträge*

$$|a_n| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

wie die harmonische Folge. Wegen

$$|a_n - 0| = |a_n| = \frac{1}{n} = \left|\frac{1}{n} - 0\right|$$

konvergiert also auch diese Folge gegen 0.

Beispiel 1.6 *Bei der rekursiv definierten Folge mit*

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$$

ist es schwieriger, nachzuweisen, dass sie konvergiert, weil wir zunächst keinen Grenzwert a haben, mit dem wir die Konvergenz testen könnten. Weiter unten werden wir uns gleich mit dem Problem beschäftigen, die Konvergenz einer Folge ohne explizite Kenntnis des Grenzwertes nachzuweisen. Im vorliegenden Fall behaupte ich ganz einfach

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \sqrt{2}.$$

Den Beweis der Behauptung führen wir in drei Schritten:

Schritt 1: Für alle $n \in \mathbb{N}$ *ist*

$$1 \leq a_n \leq 2.$$

Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang ($n = 0$*):* $a_0 = 1$, *die Aussage ist richtig für* $n = 0$.

Induktionsannahme: Es sei $1 \leq a_n \leq 2$.

Induktionsschluss: Wegen $a_n \leq 2$ *ist* $2/a_n \geq 1$ *und*

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(\underbrace{a_n}_{\geq 1} + \underbrace{\frac{2}{a_n}}_{\geq 1}) \geq 1.$$

Wegen $a_n \geq 1$ *ist* $2/a_n \leq 2$ *und*

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(\underbrace{a_n}_{\leq 2} + \underbrace{\frac{2}{a_n}}_{\leq 2}) \leq 2.$$

Schritt 2: Für alle $n \in \mathbb{N}$ *ist*

$$|a_n^2 - 2| \leq \frac{1}{4^n}.$$

Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang ($n = 0$*):*

$$|a_0^2 - 2| = |1 - 2| = 1 = \frac{1}{4^0}.$$

Die Aussage ist richtig für $n = 0$.

Induktionsannahme: Es gelte $|a_n^2 - 2| \leq 1/4^n$.

Induktionsschluss: Es ist

$$\begin{aligned}
|a_{n+1}^2 - 2| &= \left|\frac{1}{4}(a_n + \frac{2}{a_n})^2 - 2\right| \\
&= \left|\frac{1}{4}(a_n^2 + 4 + \frac{4}{a_n^2}) - 2\right| \\
&= \frac{1}{4}\left|a_n^2 + 4 + \frac{4}{a_n^2} - 8\right| \\
&= \frac{1}{4}\left|a_n^2 - 4 + \frac{4}{a_n^2}\right| \\
&= \frac{1}{4}\left(a_n - \frac{2}{a_n}\right)^2 \\
&= \underbrace{\frac{1}{4a_n^2}}_{\leq 1/4} \cdot (\underbrace{a_n^2 - 2}_{\leq 1/4^n})^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4^{2n}} \\
&\leq \frac{1}{4^{n+1}}
\end{aligned}
$$

Schritt 3: In Beispiel 3) haben wir gesehen, dass die Folge $1/4^n = (1/4)^n$ gegen Null konvergiert. Wegen der im zweiten Schritt bewiesenen Ungleichung gibt es also zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N(\epsilon)$ so, dass für alle $n > N(\epsilon)$ gilt

$$|a_n^2 - 2| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n < \epsilon.$$

Nun ist (wir verwenden, dass $\sqrt{2}$ existiert)

$$
\begin{aligned}
|a_n^2 - 2| &= |a_n - \sqrt{2}| \cdot |a_n + \sqrt{2}| \\
&< \epsilon \\
|a_n + \sqrt{2}| &= a_n + \sqrt{2} \\
&\geq 2 \\
|a_n - \sqrt{2}| &< \frac{\epsilon}{|a_n + \sqrt{2}|} \\
&< \frac{\epsilon}{2}
\end{aligned}
$$

Damit ist $\lim_{n\to\infty}(a_n) = \sqrt{2}$ nachgewiesen.

Beispiel 1.7 *Es sei $M \subset \mathbb{R}$ eine Menge mit $o = \sup(M)$. Wir wissen, dass o nicht zu M zu gehören braucht. Aber es gibt immer eine Folge von Punkten $x_n \in M$, die gegen o konvergiert.*

Beweis: Weil o die kleinste obere Schranke für M ist, ist $o - \frac{1}{n}$ keine obere Schranke für M mehr. Es gibt also eine Zahl $x_n \in M$ mit

$$x_n > o - \frac{1}{n}.$$

Wegen $x_n \leq o$ ist also

$$o - \frac{1}{n} < x_n < o \quad \textit{und} \quad |o - x_n| < \frac{1}{n}.$$

Die Folge x_n konvergiert gegen o. □

Bei der Diskussion von Beispiel 1.6 sahen wir, dass es nützlich wäre, eine Methode zum Beweis der Konvergenz für eine Folge zu haben, wofür die explizite Kenntnis des Grenzwerts nicht nötig ist. Die nächste Definition wird für die Formulierung dieses Kriteriums benötigt.

Definition 1.5 *Eine Folge (a_n) heißt* Cauchy-Folge, *wenn zu jedem $\epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$, ein $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so, dass für alle m und $n > N(\epsilon)$ gilt*

$$|a_m - a_n| < \epsilon.$$

Die Formulierung in dieser Definition ist wörtlich dieselbe, wie in der Definition der Konvergenz, nur ist der Abstand $|a_n - a|$ des Folgenglieds a_n vom Grenzwert a ersetzt durch den Abstand $|a_m - a_n|$ zweier Folgenglieder voneinander.

Satz 1.1 (Konvergenzkriterium von Cauchy) *Die Folge reeller Zahlen (a_n) konvergiert genau dann gegen eine reelle Zahl, wenn sie eine Cauchyfolge ist.*

Zum Beweis dieses Satzes müssen wir zwei Richtungen beweisen. Zunächst die einfache: *Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.*

Beweis. Es sei (a_n) eine konvergente Folge reeller Zahlen mit dem Grenzwert $a \in \mathbb{R}$. Zum Nachweis der Cauchy-Eigenschaft verwenden wir die Dreiecksungleichung in der Form

$$|a_m - a_n| = |(a_m - a) + (a - a_n)| \leq |a_m - a| + |a - a_n|.$$

Nach Voraussetzung gibt es zu jedem $\epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$ eine natürliche Zahl $N(\epsilon)$ so, dass für alle $n > N(\epsilon)$ gilt: $|a_n - a| < \epsilon$. Für alle $m, n > N(\epsilon/2)$ folgt

$$\begin{aligned} |a_m - a| &< \frac{\epsilon}{2} \\ |a_n - a| &< \frac{\epsilon}{2} \\ |a_m - a_n| &\leq |a_m - a| + |a_n - a| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Damit ist die Cauchy-Eigenschaft nachgewiesen.

Jetzt zur Umkehrung: *Jede Cauchy-Folge (a_n) reeller Zahlen besitzt einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$.*

Der Beweis dieser Richtung ist viel schwieriger als der Beweis für die Gegenrichtung, und zwar ganz einfach deswegen, weil wir die Existenz des Grenzwerts a nachweisen müssen, ohne die Folge (a_n) überhaupt zu kennen. Wir können a also nicht explizit angeben. Genau diesem Zweck, die Existenz einer reellen Zahl anzugeben, ohne sie zu kennen, dient das Schnitt-Axiom A.5. Tatsächlich ist die nun zu beweisende Aussage im Wesentlichen äquivalent mit dem Schnitt-Axiom.

Beweis der Aussage: Sei (a_n) eine Cauchy-Folge. Mit dieser Folge konstruieren wir nun einen Schnitt $\mathbb{R} = A \cup B$. Dazu sagen wir:

Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist *letztendlich kleiner als die Folge* (a_n) wenn eine natürliche Zahl $N(a) \in \mathbb{N}$ existiert, so, dass für alle $n > N(a)$ gilt: $a < a_n$.

Und eine Zahl $b \in \mathbb{R}$ ist *letztendlich größer als die Folge* (a_n) wenn eine natürliche Zahl $N(b)$ exisitiert, so, dass für alle $n > N(b)$ gilt: $b > a_n$.

Jetzt definieren wir die Mengen

$$A : \{a \in \mathbb{R} : a \text{ ist letztendlich kleiner als die Folge } (a_n)\},$$

$$B : \{b \in \mathbb{R} : b \text{ ist letztendlich größer als die Folge } (b_n)\},$$

Um zu sehen, dass A und B nicht leer sind, fixieren wir ein a_n mit $n > N(1)$. Für alle $m \geq n$ ist also $|a_m - a_n| < 1$ und damit $a := a_n - 1 < a_m$, d.h., $a \in A$, sowie $b := a_n + 1 > a_m$, d.h. $b \in B$.

Dass $a \leq b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$ gilt, folgt aus $a \leq a_n \leq b$ für $n > N(a)$ und $N(b)$. Jetzt möchten wir gerne $\mathbb{R} = A \cup B$ beweisen. Wenn das nicht so wäre, gäbe es eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ mit:

$c \notin A$, d.h., zu jeder natürlichen Zahl N gäbe es eine $m_1 > N$ mit $a_{m_1} < c$,

und $c \notin B$, d.h., zu jeder natürlichen Zahl N gäbe es ein $m_2 > N$ mit $a_{m_2} > c$.

Wenden wir dies auf $N = N(\epsilon/2)$ an, so sehen wir

$$|c - a_{m_1}| = c - a_{m_1} < a_{m_2} - a_{m_1} = |a_{m_2} - a_{m_1}| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Für alle $n \geq m_1$ folgt dann aus der Dreiecksungleichung

$$|c - a_n| = |(c - a_{m_1}) + (a_{m_1} - a_n)| \leq |c - a_{m_1}| + |a_{m_1} - a_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Das bedeutet aber: Die Folge (a_n) konvergiert gegen c.

Wenn $A \cup B \neq \mathbb{R}$ ist, dann haben wir die Konvergenz gezeigt. Wir können also jetzt $A \cup B = \mathbb{R}$ annehmen. Nach dem Schnittaxiom A.5 existiert dann ein $s \in \mathbb{R}$ mit $a \leq s$ für alle $a \in A$ und $s \leq b$ für alle $b \in B$. Jetzt wollen wir $s = \lim(a_n)$ zeigen. Dazu geben wir uns ein $\epsilon > 0$ vor.

Die Zahl $s - \epsilon$ gehört zu A, also ist sie letztendlich kleiner als die Folge (a_n). Es gibt ein N_1 von dem an alle $a_n > s - \epsilon$ sind. Weil $s + \epsilon$ zu B gehört, gibt es ein N_2, von dem an alle $a_n < s + \epsilon$ sind. Für $n > max(N_1, N_2)$ ist also

$$s - \epsilon < a_n < s + \epsilon,$$

oder

$$-\epsilon < a_n - s < \epsilon.$$

Das bedeutet $|a_n - s| < \epsilon$, und wir haben $s = \lim(a_n)$ gezeigt. □

Aufgabe 1.1 *Die Folgen (a_n) und (b_n) seien rekursiv definiert durch $a_0 = b_0 = a_1 = b_1 := 1$ und*

$$a_{n+1} := a_n + a_{n-1}, \quad \textit{bzw.} \quad b_{n+1} := \frac{1}{2}(b_n + b_{n-1})$$

für $n \geq 1$. Berechnen Sie a_n und b_n für $n \leq 10$.

Aufgabe 1.2 *Es sei $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$. Weiter sei $(a_n)_{n \geq 0}$ eine Folge mit*

$$|a_{n+1} - a_n| \leq q \cdot |a_n - a_{n-1}| \quad \textit{für} \quad n \geq 1.$$

Zeigen Sie:
a) $|a_{n+1} - a_n| \leq q^n |a_1 - a_0|$ *für* $n \geq 0$,
b) $|a_m - a_n| \leq \dfrac{q}{1-q} \cdot |a_{n+1} - a_n|$ *für* $m \geq n + 1$,
c) *die Folge (a_n) ist eine Cauchy-Folge.*

1.2 Rechnen mit konvergenten Folgen

Im vorhergehenden Abschnitt beschäftigten wir uns mehr mit den Begriffen und Definitionen, hier kommt es uns jetzt mehr auf das Rechnen an. Aber ohne Definitionen geht das auch nicht.

Definition 1.6 *Die Folge (a_n) heißt beschränkt, wenn eine Konstante $K \in \mathbb{R}$ existiert mit*

$$|a_n| < K \quad \textit{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Jede konvergente Folge ist beschränkt. Denn ist (a_n) eine Folge mit Grenzwert a, so ist

$$|a_n - a| < 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N},\ n > N(1).$$

Das bedeutet $a-1 < a_n < a+1$ und $|a_n| < max(|a-1|, |a+1|)$ für $n > N(1)$. Weiter sei M die größte unter den endlich vielen Zahlen $|a_1|$, $|a_2|$, ..., $|a_{N(1)}|$ und $K := max(M, N(1))$. Dann ist $|a_n| < K$ für alle n, gleichgültig ob $n \leq N(1)$ oder $n > N(1)$.

Die Umkehrung gilt nicht: Nicht jede beschränkte Folge ist konvergent. So ist z.B. die alternierende Folge $(-1)^n$ beschränkt (mit $K = 2$), aber, wie wir gesehen haben, divergiert sie.

Satz 1.2 (Algebraische Rechenoperationen und konvergente Folgen)) *Die beiden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien konvergent. Dann gilt:*
a) *Die Summenfolge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) + \lim_{n\to\infty}(b_n).$$

b) *Die Differenzenfolge $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) - \lim_{n\to\infty}(b_n).$$

c) *Die Produktfolge $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) \cdot \lim_{n\to\infty}(b_n).$$

d) *Wenn $b = \lim(b_n) \neq 0$ ist, dann konvergiert auch die Quotientenfolge $(a_n/b_n)_{n\geq n_0}$ mit*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n)/\lim_{n\to\infty}(b_n).$$

Beweis. Es sei $a := lim_{n\to\infty}(a_n)$ und $b := \lim_{n\to\infty}(b_n)$. Nach der Definition der Konvergenz gibt es dann zu jedem $\epsilon > 0$ Schranken $N_a(\epsilon)$ und $N_b(\epsilon)$ mit

$$|a_n - a| < \epsilon \text{ für } n > N_a(\epsilon) \quad \text{ und } \quad |b_n - b| < \epsilon \text{ für } n > N_b(\epsilon).$$

Für $n > N(\epsilon) := max(N_a(\epsilon), N_b(\epsilon))$ gelten dann beide Ungleichungen.

a) Für $n > N(\epsilon/2)$ ist

$$a + b - \epsilon = (a - \frac{\epsilon}{2}) + (b - \frac{\epsilon}{2}) < a_n + b_n < (a + \frac{\epsilon}{2}) + (b + \frac{\epsilon}{2}) < a + b + \epsilon.$$

Daraus folgt die Konvergenz der Folge $(a_n + b_n)$ gegen $a + b$.

b) Setzt man in c) die Folge (a_n) gleich der konstanten Folge mit Wert -1, so sieht man $\lim(-b_n) = -\lim(b_n)$. Wendet man jetzt a) auf die Folge $(-b_n)$ statt (b_n) an, so ergibt sich die Behauptung.

c) Weil konvergente Folgen beschränkt sind, gibt es eine Schranke $K \in \mathbb{R}$ mit $|a_n| < K$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit der Dreiecksungleichung folgt daraus

$$\begin{aligned}
|a_n \cdot b_n - a \cdot b| &= |a_n \cdot b_n - a_n \cdot b + a_n \cdot b - a \cdot b| \\
&= |a_n \cdot (b_n - b) + (a_n - a) \cdot b| \\
&\leq |a_n| \cdot |b_n - b| + |a_n - a| \cdot |b| \\
&\leq K \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a|
\end{aligned}$$

Für $n > N(\epsilon/2K)$ und $> N(\epsilon/2|b|)$ folgt daraus $|a_n \cdot b_n - a \cdot b| < \epsilon$.

d) Sei $b \neq 0$. Wegen c) genügt es

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{b_n}\right) = \frac{1}{b}$$

zu zeigen. Wegen $b \neq 0$ gibt es ein $N = N_b(|b|/2)$ so, dass für $n > N$ gilt $|b_n - b| < |b|/2$. Mit der Minus-Dreiecksungleichung folgt daraus

$$|b_n| = |b + (b_n - b)| \geq |b| - |b_n - b| \geq |b| - |b|/2 = |b|/2.$$

Insbesondere ist für diese n auch $b_n \neq 0$ und $1/b_n$ wohldefiniert. Weiter gilt für diese n

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{1}{|b_n| \cdot |b|} \cdot |b - b_n| \leq \frac{2}{b^2} \cdot |b - b_n|.$$

Ist jetzt n auch noch $> N(\epsilon \cdot b^2/2)$, dann gilt also $|1/b_n - 1/b| < \epsilon$. □

Beispiel 1.8 *Es ist*

$$\lim \frac{n+1}{n} = \lim(1 + \frac{1}{n}) = \lim(1) + \lim(1/n) = 1 + 0 = 1.$$

Beispiel 1.9 *Für $\gamma \neq 0$ und $n > -\delta/\gamma$ ist*

$$\lim \frac{\alpha \cdot n + \beta}{\gamma \cdot n + \delta} = \lim \frac{\alpha + \beta/n}{\gamma + \delta/n} = \frac{\alpha + \lim(\beta/n)}{\gamma + \lim(\delta/n)} = \frac{\alpha}{\gamma}.$$

Beispiel 1.10 *Die in Beispiel 1.8 verwendete Methode kann man immer anwenden, wenn die Folgenglieder a_n Quotienten zweier Polynome in n sind. Das Verfahren besteht darin, durch die höchste im Nenner vorkommende Potenz von n zu teilen und dann die Rechenregeln anzuwenden. Statt der allgemeinen theoretischen Formulierung zwei numerische Beispiele:*

$$\lim \frac{n+10}{n^2+1} = \lim \frac{\frac{1}{n} + \frac{10}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim \frac{1}{n} + \lim \frac{10}{n^2}}{1 + \lim \frac{1}{n^2}} = \frac{0+0}{1+0} = 0,$$

$$\lim \frac{2n^3+3}{3n^3+2} = \lim \frac{2 + \frac{3}{n^3}}{3 + \frac{2}{n^3}} = \frac{2 + \lim \frac{3}{n^3}}{3 + \lim \frac{2}{n^3}} = \frac{2}{3}.$$

Ist der Grad des Zählers größer als der Grad des Nenners, dann divergiert die Folge. Betrachten wir etwa $a_n = n^2/(n+10)$. Würde diese Folge konvergieren, etwa

$$\lim \frac{n^2}{n+10} = \lim \frac{n}{1 + \frac{10}{n}} = a \in \mathbb{R}$$

gelten, so könnten wir mit der gegen 1 konvergenten Folge $(1+10/n)$ durchmultiplizieren, und erhielten

$$\lim(n) = \lim(1 + \frac{10}{n}) \cdot \lim \frac{n}{1 + \frac{10}{n}} = 1 \cdot a = a.$$

Dies ist ein Widerspruch, denn die Folge $a_n = n$ ist nach dem archimedischen Axiom nicht beschränkt, also kann sie auch nicht konvergieren.

Eine Folge heißt *Nullfolge*, wenn sie gegen die Zahl 0 konvergiert. Die in den Beispielen des letzten Abschnitts diskutierten Folge $(1/n)$, $((-1)^n/n)$ und (a^n) für $|a| < 1$ etwa sind Nullfolgen. Wegen

$$||a_n| - 0| = |a_n| = |a_n - 0|$$

ist die Folge (a_n) Nullfolge, genau dann wenn es die Folge $(|a_n|)$ ist.

Mit Hilfe dieses Begriffs Nullfolge kann man die Konvergenz gegen einen Grenzwert a etwas umformulieren:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = a \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty}(a_n - a) = a - a = 0$$

ist. Die Folge (a_n) konvergiert genau dann gegen a, wenn $(a_n - a)$ eine Nullfolge ist.

Satz 1.3 (Ungleichungen und konvergente Folgen) *Die Folgen (a_n) und (b_n) seien konvergent. Gilt*

$$a_n \leq b_n$$

für alle n, dann gilt auch

$$\lim(a_n) \leq \lim(b_n).$$

Die entsprechende Aussage für das strikte $<$-Zeichen gilt nicht! Denn sei etwa (a_n) die konstante Folge mit $a_n = 0$ und (b_n) die harmonische Folge $b_n = 1/n$, so ist $a_n < b_n$ für alle n, aber

$$\lim(a_n) = 0 = \lim(b_n)$$

und nicht $\lim(a_n) < \lim(b_n)$.

Beweis des Satzes. Sei $a := \lim(a_n)$ und $b := \lim(b_n)$. Wenn $a \leq b$ ist, sind wir fertig. Andernfalls wäre $a > b$ und $\epsilon := (a - b)/2 > 0$. Wir wählen $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass für $n > N$ gilt

$$\begin{array}{lll} |a - a_n| < \epsilon, & \text{also} & a_n > a - \epsilon = \frac{a+b}{2} \quad \text{und} \\ |b - b_n| < \epsilon, & \text{also} & b_n < b + \epsilon = \frac{a+b}{2}. \end{array}$$

Es folgt

$$a_n > \frac{a+b}{2} > b_n$$

im Widerspruch zur Annahme $a_n < b_n$. $\square$

Beispiel 1.11 *Es ist*

$$\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} < 1$$

für alle n. Und $\lim(n-1)/n = 1$ ist schon ≤ 1, aber nicht < 1.

Eine Folge (a_n) positiver reeller Zahlen $a_n > 0$ kann eine Nullfolge sein, ohne dass die Folgenglieder a_n immer kleiner werden. Als Beispiel betrachten wir die Folge

$$a_n := \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{falls} \quad n = 2k+1 \text{ ungerade} \\[2ex] \dfrac{1}{2n} & \text{falls} \quad n = 2k \text{ gerade} \end{cases}$$

Ist $N(\epsilon)$ das $N(\epsilon)$ der harmonische Reihe, so gilt für $n > N(\epsilon)$

$$\frac{1}{2n} < \frac{1}{n} < \epsilon,$$

also stets $0 < a_n < \epsilon$ und die Folge ist eine Nullfolge. Wenn n gerade ist, dann ist

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} > \frac{1}{2n} = a_n,$$

(wegen $2n > n + 1$ für $n > 1$). Bei jedem zweiten n steigt die Folge also wieder, aber insgesamt fällt sie doch gegen 0.

Folgen, bei denen dieser soeben beschriebene Effekt nicht auftritt, sind besonders einfach und bekommen einen besonderen Namen:

Definition 1.7 *Die Folge (a_n) heißt*

	wenn für alle n
monoton steigend	$a_n \leq a_{n+1}$
monoton fallend	$a_n \geq a_{n+1}$
streng monoton steigend	$a_n < a_{n+1}$
streng monoton fallend	$a_n > a_{n+1}$.

Die Folge heißt monoton, wenn sie entweder monoton steigend oder monoton fallend ist, und sie heißt streng monoton, wenn sie entweder streng monoton steigend oder streng monoton fallend ist.

Satz 1.4 (Konvergenz monotoner Folgen) *Eine monotone Folge konvergiert genau dann, wenn sie beschränkt ist.*

Beweis. Wenn eine Folge konvergiert, ist sie nach der Bemerkung am Anfang dieses Paragraphen immer beschränkt. Wir müssen also zeigen: Jede beschränkte monotone Folge (a_n) konvergiert. Dazu nehmen wir an, die Folge sei monoton wachsend und nach oben beschränkt, etwa $a_n \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (Für monoton fallende Folgen geht der Beweis genauso.)

Wieder definieren wir uns einen Schnitt $\mathbb{R} = A \cup B$. Und zwar setzen wir

$$\begin{aligned} A &:= \{a \in \mathbb{R} : a \leq a_n \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\} \\ B &:= \{b \in \mathbb{R} : b > a_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

Aus $a \leq a_n < b$ folgt $a \leq b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$. Wenn ein $x \in \mathbb{R}$ nicht zu A gehört, dann ist also $x > a_n$ für alle n, und x gehört zu B. Es folgt $\mathbb{R} = A \cup B$. Weil $a_1 \leq a_2$ ist, gehört a_1 zu A und A ist nicht leer. Weil $K + 1$ zu B gehört, ist B nicht leer.

Es gibt also eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ mit $a \leq s \leq b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$. Natürlich wollen wir zeigen $\lim(a_n) = s$. Dazu geben wir uns $\epsilon > 0$ beliebig vor. Weil $s - \epsilon/2$ zu A gehört, gibt es ein N mit $a_N \geq s - \epsilon/2 > s - \epsilon$. Weil die Folge a_n monoton wächst, ist $a_n \geq a_N > s - \epsilon$ für alle $n > N$. Die Zahl $s + \epsilon$ gehört zu B, und deswegen ist $a_n < s + \epsilon$ für alle n. Insgesamt sehen wir

$$s - \epsilon < a_n < s + \epsilon \quad \text{für alle } n > N.$$

Das ist die behauptete Konvergenz. $\square$

Der Beweis dieses Satzes war *nicht konstruktiv*. Er liefert kein Verfahren, den Grenzwert numerisch zu berechnen. Dies liegt daran, dass wieder das Schnitt-Axiom benutzt wurde.

Es wäre schön, wenn überhaupt jede beschränkte Folge konvergieren würde, und nicht nur jede monotone beschränkte Folge. Leider ist dies nicht so (wenn auch Studenten in der mündlichen Prüfung es immer wieder behaupten). Ein Gegenbeispiel liefert die alternierende Folge $a_n = (-1)^n$. Sie ist beschränkt, etwa durch $|a_n| < 2$, aber konvergiert nicht.

Für beschränkte Folgen gibt es eine Konvergenzaussage in stark abgeschwächter Form (s. Satz 1.6). Dazu brauchen wir aber einen neuen Begriff.

Definition 1.8 *Es sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen. Eine* Teilfolge *(b_k) von (a_n) ist eine Folge mit den Gliedern $b_k = a_{n_k}$, wo*

$$(n_k) = (n_1, n_2, n_3, ...)$$

eine streng monoton steigende Folge natürliche Zahlen ist.

In der Definition sind die Indizes n_k also irgendwelche natürlichen Zahlen. Die $b_k = a_{n_k}$ sind also Zahlen, die in der Folge a_n vorkommen. Und weil die Indizes n_k streng monoton steigen,

$$n_1 < n_2 < n_3 < ...$$

stehen die Zahlen b_k in der Teilfolge genau in derselben Reihenfolge, in der sie in der Folge (a_n) vorkommen. Eine Teilfolge von (a_n) „ist ein Teil“ der Folge (a_n).

Betrachten wir als Beispiel die alternierende Folge (a_n) mit $a_n = (-1)^n$. Eine Teilfolge erhalten wir etwa, wenn wir $n_k = 2k$ setzen. Das ist die konstante Folge mit

$$b_k = (-1)^{2k} = \left((-1)^2\right)^k = 1^k = 1.$$

Eine andere Teilfolge entsteht aus $n_k = 2k + 1$. Dann ist

$$b_k = (-1)^{2k+1} = (-1)^{2k} \cdot (-1) = -1,$$

wieder eine konstante Folge. Aber die Folge $(-1)^n$ hat nicht nur konstante Teilfolgen. Nehmen wir etwa $n_k = 3k$, so wird

$$b_k = (-1)^{3k} = (-1)^{2k} \cdot (-1)^k = (-1)^k.$$

Satz 1.5 (Konvergenz der Teilfolgen) *Jede Teilfolge einer konvergenten Folge konvergiert, und zwar gegen denselben Grenzwert, wie die ursprüngliche Folge.*

Beweis. Es sei (a_n) eine konvergente Folge mit Grenzwert a und $b_k = a_{n_k}$ eine Teilfolge. Um deren Konvergenz zu zeigen, geben wir uns ein $\epsilon > 0$ vor. Weil die Folge (a_n) gegen a konvergiert, gibt es ein $N(\epsilon)$ mit $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n > N(\epsilon)$.

Die Indexfolge n_k steigt monoton. In ihr kommen die natürlichen Zahlen $n_k \in \mathbb{N}$ in ihrer richtigen Reihenfolge vor, nur manche sind halt weggelassen. Deswegen ist die k-te dieser Zahlen sicher nicht kleiner als k, die k-te der natürlichen Zahlen: $n_k \geq k$. Insbesondere ist für $k > N(\epsilon)$ auch $n_k \geq k > N(\epsilon)$. Daraus folgt $|b_k - a| < \epsilon$ für $k > N(\epsilon)$. Das heißt, auch die Teilfolge erfüllt die Konvergenzbedingung, und zwar mit genau demselben Grenzwert a. □

Satz 1.6 (Bolzano - Weierstraß) *Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Sei etwa (a_n) eine beschränkte Folge, also $|a_n| < K$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wieder beweisen wir die Aussage nicht konstruktiv, sondern konstruieren einen Schnitt und überlassen die eigentliche Arbeit dem Schnittaxion A.5.

Die Schnittmengen A und $B \subset \mathbb{R}$ definieren wir als

$$\begin{aligned} A &:= \{x \in \mathbb{R} : \text{ es gibt nur endlich viele } n \text{ mit } a_n < x\}, \\ B &:= \{x \in \mathbb{R} : \text{ es gibt unendlich viele } n \text{ mit } a_n < x\}. \end{aligned}$$

Weil kein $a_n < -K$ ist, gehört $-K$ zu A und A ist nicht leer. Weil alle unendlich vielen $a_n < K$ sind, gehört K zu B, und B ist nicht leer. Kein $a \in A$ kann $> b$ mit einem $b \in B$ sein, das ist klar. Und schließlich gehört jedes $x \in \mathbb{R}$ entweder zu A oder B. Damit ist $\mathbb{R} = A \cup B$ ein Schnitt, und es gibt ein $s \in \mathbb{R}$, das die Mengen A und B trennt. Wir konstruieren eine Teilfolge der Folge (a_n), die gegen s konvergiert.

Für jedes $\epsilon > 0$ gehört $s - \epsilon$ zu A und $s + \epsilon$ zu B. Es gibt also unendlich viele Folgenglieder $a_n < s + \epsilon$ und nur endlich viele $a_n < s - \epsilon$. Deswegen gehören unendlich viele Folgenglieder a_n zur ϵ-Umgebung $\{x \in \mathbb{R} : s - \epsilon < x < s + \epsilon\}$.

Jetzt konstruieren wir induktiv eine Teilfolge a_{n_k} mit

$$s - \frac{1}{k} < a_{n_k} < s + \frac{1}{k}.$$

Diese Folge konvergiert dann natürlich gegen s. Für $k = 1$ sei a_{n_1} irgend eines der unendlich vielen Folgenglieder a_n mit $s - 1 < a_n < s + 1$. Falls a_{n_k} schon definiert ist, so gibt es unendlich viele Folgenglieder a_n zwischen $s - 1/(k+1)$ und $s + 1/(k+1)$, auch unendlich viele mit $n > n_k$. Die Zahl $a_{n_{k+1}}$ sei eines davon. So können wir weitermachen, und eine ganze, unendliche Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ konstruieren. $\square$

Aufgabe 1.3 *Berechnen Sie*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}.$$

Aufgabe 1.4 (NV) *Die Folge (a_n) sei rekursiv definiert durch*

$$a_1 := 1, \quad a_{n+1} := \frac{1}{a_1 + 2a_2 + ... + na_n}.$$

Zeigen Sie:
a) *Diese Folge fällt streng monoton.*
b) $\lim(a_n) = 0$.

Aufgabe 1.5 *Die Folge a_n sei rekursiv definiert durch*

$$a_0 := 1, \quad a_{n+1} := \frac{1+a_n}{2+a_n}.$$

a) *Zeigen Sie für alle n durch vollständige Induktion*

$$a_n^2 + a_n > 1.$$

b) *Zeigen Sie dass die Folge monoton fällt und folgern Sie daraus, dass sie konvergiert.*
c) *Zeigen Sie, dass für den Grenzwert a der Folge gilt:*

$$a^2 + a - 1 = 0.$$

Aufgabe 1.6 *Die Folge (a_n) sei rekursiv definiert durch*

$$a_0 := 1, \quad a_{n+1} := 1 + \frac{1}{a_n}.$$

Zeigen Sie für alle n:
a) $1 \leq a_n \leq 2$,
b) $a_{n+1} \cdot a_n \geq 2$,
c) $|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|a_{n+1} - a_n|$.
Folgern Sie aus c) dass die Folge eine Cauchy-Folge ist. Zeigen Sie für den Grenzwert a die Gleichung

$$a^2 - a - 1 = 0.$$

1.3 Unendliche Reihen

Achilles und die Schildkröte: Wir können davon ausgehen, dass Achilles ziemlich schnell laufen konnte, also sagen wir $10m$ in der Sekunde, wenn er sich richtig anstrengte. Die Geschwindigkeit der Schidkröte dagegen ist schwer abzuschätzen. Nehmen wir an, sie bewegt sich mit $1cm$ pro Sekunde in Richtung der x–Achse, und Achilles schickt sich an, sie zu überholen. Der Vorsprung der Schildkröte ist nicht genau überliefert, sagen wir 10m. Auf jeden Fall hat er sie nach einer Sekunde. Beinah. Die Schildkröte ist ja jetzt $1cm$ weiter gekrochen. Diesen Zentimeter durcheilt Achilles in 10^{-3} Sekunden, nur ist die verdammte Schildkröte dann schon wieder $10^{-3}cm$ weiter. Und das geht immer so weiter. Im einzelnen passiert in jedem Schritt Folgendes:

Schritt	Zeit	Schildkröte	Achilles
0	$0s$	$10m$	$0m$
1	$1s$	$+10^{-2}m$	$10m$
2	$+10^{-3}s$	$+10^{-5}m$	$+10^{-2}m$
3	$+10^{-6}s$	$+10^{-8}m$	$+10^{-5}m$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$\sum_{\nu=0}^{n-1} 10^{-3\nu}s$	$10 \cdot \sum_{\nu=0}^{n} 10^{-3\nu}m$	$10 \cdot \sum_{\nu=0}^{n-1} 10^{-3\nu}m$

Es können beliebig viele Zeitschritte verstreichen, immer ist die Schildkröte dem Achilles voraus. Zwar nicht sehr viel, aber den griechischen Mathematikern ging es ums Prinzip. Damit hatten sie bewiesen, dass Achilles die Schildkröte nie einholen würde.

Sowas nannten sie ein Paradoxon. Das trägt nicht viel zum Glauben an die Anwendbarkeit der exakten Wissenschaften bei. Der Fehler der Griechen lag in der plausiblen Annahme, dass kein Mensch unendlich viele Summanden aufaddieren könnte. Das stimmt natürlich. Aber deswegen sind unendliche Summen trotzdem sinnvoll, wenn die Summanden nur schnell genug klein werden. Das machen wir jetzt präzis.

Definition 1.9 *Es sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge reeller Zahlen. Unter der* unendlichen Reihe

$$\sum_{\nu} a_\nu = \sum_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$$

versteht man zweierlei:

1) die Folge der Partialsummen

$$S_n := \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu.$$

Diese Partialsummen sind wohldefinierte endliche Summen reeller Zahlen.

2) den Grenzwert

$$S := \lim_{n\to\infty} S_n,$$

falls die Folge der Partialsummen konvergiert. In diesem Fall sagt man, die Reihe konvergiert gegen S *und schreibt*

$$S = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_n.$$

Beispiel 1.12 *die* geometrische Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a^\nu.$$

Die Partialsummen der geometrischen Reihe haben wir in 0.2 ausgerechnet. Es sind (für $a \neq 1$*) die Zahlen*

$$S_n = \sum_{\nu=0}^{n} a^\nu = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}.$$

Wenn $|a| < 1$ *ist, konvergiert die Folge* a^{n+1} *gegen* 0*, deswegen konvergiert für* $|a| < 1$ *die Folge der Partialsummen, und zwar gegen*

$$\boxed{\sum_{\nu=0}^{\infty} a^\nu = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \frac{1-\lim a^{n+1}}{1-a} = \frac{1}{1-a}.}$$

(GEOMETRISCHE REIHE FÜR $|a| < 1$)

Mit dieser Formel können wir den x-Wert ausrechnen, bis zu dem die Schildkröte nach unendlich vielen Schritten gekommen ist. Es sind

$$10 \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} 10^{-3\nu} = 10 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1000}} = 10 \cdot \frac{1000}{999} = 10,01001001...$$

Meter. Also ein klein wenig mehr als 10m. Dazu braucht sie

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} 10^{-3\nu} = \frac{1}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{1000}{999} = 1.001001001...$$

Sekunden. Und Achilles kommt in derselben Zeit genau zum selben Punkt, und überholt sie in diesem Moment.

Man kann übrigens jede Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ als unendliche (Teleskop-) Reihe

$$a_0 + \sum_{\nu=0}^{\infty} (a_{\nu+1} - a_\nu)$$

schreiben. Es ist also nur eine Frage der Schreibweise, ob man unendliche Reihen, oder unendliche Folgen benutzt. Die Schreibweise als Reihe ist aber meist wesentlich bequemer, weil man meist nicht die Partialsummen, sondern die einzelnen Summanden kontrollieren kann. Deswegen haben Reihen auch eine viel größere praktische Bedeutung als Folgen.

Kriterien für die Konvergenz unendlicher Reihen sind dabei sehr wichtig. Solche Kriterien bilden auch den weiteren Inhalt dieses Abschnitts. So folgt aus Satz 1.2 unmittelbar

Satz 1.7 (Algebraische Rechenregeln für unendliche Reihen) *Gegeben seien zwei konvergente Reihen*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu = a \quad \textit{und} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu = b,$$

sowie eine reelle Zahl c. Dann konvergieren die Reihen

	gegen
$\sum_{\nu=0}^{\infty} (a_\nu + b_\nu)$	$a + b$
$\sum_{\nu=0}^{\infty} (a_\nu - b_\nu)$	$a - b$
$\sum_{\nu=0}^{\infty} c \cdot a_\nu$	$c \cdot a$

Von großer theoretischer aber geringer praktischer Bedeutung ist die Umformulierung der Konvergenz von Cauchy-Folgen in die Sprache der Reihen: Die Partialsummen S_n der Reihe $\sum a_\nu$ bilden eine Cauchy-Folge, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N(\epsilon)$ existiert mit $|S_m - S_n| < \epsilon$ für $m, n > N(\epsilon)$. Falls $m > n$, ist

$$S_m - S_n = \sum_{\nu=1}^{m} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = \sum_{\nu=n+1}^{m} a_\nu.$$

Aus Satz 1.1 folgt daher unmittelbar

Satz 1.8 (Cauchysches Konvergenzkriterium für Reihen) *Die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ konvergiert genau dann, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N(\epsilon)$ existiert so, dass für alle $m > n > N(\epsilon)$ gilt*

$$\left| \sum_{\nu=n}^{m} a_\nu \right| < \epsilon.$$

Hieraus folgern wir:

Satz 1.9 (Notwendiges Konvergenzkriterium) *Wenn die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ konvergiert, dann gilt*

$$\lim_{m \to \infty} a_m = 0.$$

Beweis. Wenn die Reihe konvergiert, so folgt aus dem Cauchy-Kriterium für $n = m - 1$: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $N(\epsilon)$ so, dass für alle $m > N(\epsilon) + 1$ gilt $|S_m - S_{m-1}| = |a_m| < \epsilon$. also bilden die Summanden a_m eine Nullfolge. □

Dieses Kriterium heißt notwendiges Kriterium, weil es eben nicht hinreichend ist. D.h., die Summanden a_n können eine Nullfolge bilden, ohne dass die Reihe zu konvergieren braucht. Das klassische Beispiel dafür ist die

Beispiel 1.13 (Harmonische Reihe)

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Wegen $1/n \to 0$ erfüllt sie das Kriterium.

Behauptung: Die harmonische Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ...$$

konvergiert nicht.

Beweis. Wir schätzen die Summanden durch Zweier-Potenzen nach unten ab:

ν	$1/\nu \geq$
1	1
2	$1/2$
$3, 4$	$1/4$
$5, 6, 7, 8$	$1/8$
$9, ..., 16$	$1/16$
$\vdots$	$\vdots$
$2^k < \nu \leq 2^{k+1}$	$1/2^{k+1}$

Damit wird die Partialsumme S_n der harmonischen Reihe zum Index $n = 2^{k+1}$

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{\nu} &= 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + ... + (\frac{1}{2^k+1} + ... + \frac{1}{2^{k+1}}) \\
&\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + ... + \frac{2^k}{2^{k+1}} \\
&= 1 + (k+1) \cdot \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Für $k \to \infty$ wächst dieser Wert über alle Grenzen. Die Folge der Partialsummen ist also nicht beschränkt und divergiert. □

Auch das folgende Kriterium hat vor allem theoretischen Wert.

Satz 1.10 (Reihen mit positiven Summanden) *Es sei $\sum a_\nu$ eine Reihe ohne negative Summanden, d.h., $a_\nu \geq 0$ für alle ν. Eine solche Reihe konvergiert genau dann, wenn sie beschränkt ist.*

Beweis. Für die Partialsummen gilt

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n.$$

Die Folge der Partialsummen wächst also monoton. Die Behauptung folgt somit aus Satz 1.4 für die monoton wachsende Folge (S_n) der Partialsummen. □

Beispiel 1.14 *Als Beispiel betrachten wir die Reihe*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^k} \quad \textit{mit} \quad k \in \mathbb{N}, k \geq 2.$$

Bis auf die Potenz $k \geq 2$ im Nenner ist dies wieder die harmonische Reihe. Aber diese Potenz k macht einen entscheidenden Unterschied: Nach Satz 0.2 für $b = 2$ gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein p mit

$$n \leq 2^{p+1} - 1.$$

Damit können wir die Partialsumme S_n nach oben abschätzen:

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu^k} \\
&\leq \sum_{\nu=1}^{2^{p+1}-1} \frac{1}{\nu^k} \\
&= 1 + \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k}\right) + \left(\frac{1}{4^k} + \frac{1}{5^k} + \frac{1}{6^k} + \frac{1}{7^k}\right) + ... + \sum_{\nu=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{1}{\nu^k} \\
&\leq 1 + 2 \cdot \frac{1}{2^k} + 4 \cdot \frac{1}{4^k} + ... + 2^p \cdot \frac{1}{(2^p)^k} \\
&= \sum_{\mu=0}^{p} \frac{2^\mu}{(2^\mu)^k} \\
&= \sum_{\mu=0}^{p} \left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)^\mu .
\end{aligned}$$

Hier haben wir eine Partialsumme der geometrischen Reihe zu

$$a = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Wegen $k \geq 2$ ist $a < 1$, die geometrische Reihe konvergiert gegen

$$\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{k-1}}},$$

und die Partialsumme wird durch diesen Grenzwert, unabhängig von p, nach oben beschränkt. Damit ist Satz 1.4 anwendbar und liefert die Konvergenz der modifizierten harmonischen Reihe.

Die soeben verwendete Methode bestand darin, die Partialsummen der gegebenen Reihe $\sum 1/\nu^k$ durch eine andere, die bekannte geometrische Reihe, nach oben abzuschätzen. Diese Methode wird praktisch sehr oft mit Erfolg angewendet. Deswegen machen wir einen Satz daraus. Doch vorher noch eine Notation für die Reihe, mit der man abschätzt:

Definition 1.10 *Es sei $\sum a_\nu$ eine Reihe reeller Zahlen. Eine Reihe $\sum b_\nu$ heißt* Majorante *der gegebenen Reihe, wenn*

$$|a_\nu| \leq b_\nu \quad \text{für alle } \nu$$

gilt.

Satz 1.11 (Majorantenkriterium) *Die Reihe $\sum a_\nu$ besitze eine* <u>*konvergente*</u> *Majorante $\sum b_\nu$. Dann konvergiert die Reihe $\sum a_\nu$.*

Beweis. Wir wenden das Cauchy-Kriterium (notwendige Richtung) auf die konvergente Reihe $\sum b_\nu$ an: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es also eine Schranke $N(\epsilon)$ mit

$$\sum_{\nu=n}^{m} b_\nu < \epsilon$$

für alle $m > n > N(\epsilon)$. Aus der Dreiecksungleichung folgt für die Partialsummen S_n der Reihe $\sum a_\nu$

$$|S_m - S_{n-1}| = |\sum_{\nu=n}^{m} a_\nu| \leq \sum_{\nu=n}^{m} b_\nu < \epsilon,$$

falls $m > n > N(\epsilon) + 1$. Die Folge S_n der Partialsummen ist also eine Cauchy-Folge, und deswegen konvergiert die Reihe $\sum a_\nu$. $\square$

Das Majorantenkriterium wird am häufigsten in der folgenden Form angewendet:

Satz 1.12 (Quotientenkriterium) *Es sei $\sum_{\nu=0}^{\infty}$ eine Reihe mit $a_\nu \neq 0$ für alle ν. (Es reicht auch $a_\nu \neq 0$ für alle $\nu \geq N$.) Falls eine reelle Zahl*

$$q < 1$$

existiert mit

$$\left| \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} \right| \leq q$$

für alle ν (bzw. alle $\nu \geq N$), dann konvergiert $\sum a_\nu$.

Beweis. Es ist

$$\begin{array}{rcl}|a_1| & \leq & q \cdot |a_0| \\ |a_2| & \leq & q \cdot |a_1| \\ & \leq & q^2 \cdot |a_0| \\ & \vdots & \\ |a_n| & \leq & q \cdot |a_{n-1}| \\ & \leq & q^n \cdot |a_0|.\end{array}$$

(Diese Abschätzung müsste man eigentlich ausführlich mit vollständiger Induktion beweisen, aber es ist wohl klar, wie das geht.) Also ist die geometrische Reihe $|a_0| \cdot \sum q^\nu$ eine Majorante der gegebenen Reihe $\sum a_\nu$. Weil $q < 1$ vorausgesetzt ist, konvergiert diese Majorante. Die Behauptung folgt aus dem Majorantenkriterium. □

Beispiel 1.15 *Die geometrische Reihe $\sum a^\nu$. Hier ist*

$$\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = \frac{a^{\nu+1}}{a^\nu} = a.$$

Für $|a| < 1$ folgt also die Konvergenz der geometrischen Reihe. Auf diese Weise soll man aber die Konvergenz der geometrischen Reihe nicht beweisen. Denn zum Beweis des Quotientenkriteriums haben wir diese Konvergenz ganz wesentlich benutzt.

Beispiel 1.16 *Die e-Reihe*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!}.$$

Hier benutzen wir die Abkürzung

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = \left\{ \begin{array}{l} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \\ 1 \end{array} \right\} \text{ falls } \left\{ \begin{array}{l} n \geq 1 \\ n = 0 \end{array} \right.$$

Damit wird also

$$\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}.$$

Und dieser Quotient ist $\leq 1/2 =: q$ für $n \geq 1$. Die Reihe konvergiert also.

Beispiel 1.17 *Die divergente harmonische Reihe $\sum(1/\nu)$. Es ist*

$$\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = \frac{\nu}{\nu+1} \to 1 \quad (\nu \to \infty).$$

Es gibt keine Zahl $q < 1$ so, dass all diese Quotienten $\leq q$ sind, weil die Folge der Quotienten gegen 1 konvergiert. Das Quotientenkriterium greift hier also nicht. Das darf es natürlich auch nicht, weil die harmonische Reihe divergiert.

Beispiel 1.18 *Die konvergente, modifizierte harmonische Reihe* $\sum(1/\nu^2)$. *Auch hier ist*

$$\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^2 \to 1 \quad (\nu \to \infty),$$

und das Quotientenkriterium greift wieder nicht! Eigentlich könnte es ja greifen, weil die Reihe konvergiert. Aber das Quotientenkriterium ist nur hinreichend, *und* nicht notwendig.

Das folgende Kriterium ist aus irgend einem, mir unbegreiflichen Grund, das Lieblings-Konvergenzkriterium der Studenten. Wenn ich in einer mündlichen Prüfung nach einem Konvergenzkriterium für unendliche Reihen frage, nennen sie immer dieses als erstes. Was macht bloß seine Attraktivität aus?

Satz 1.13 (Leibnizkriterium) *Es sei* (a_ν) *eine Folge positiver Zahlen* $a_\nu \geq 0$, *die monoton fallend gegen* 0 *konvergiert:* $\lim(a_\nu) = 0$. *Dann konvergiert die* alternierende *Reihe*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu a_\nu.$$

Beweis. Wir haben es so eingerichtet, dass die Summanden für gerades ν immer positiv, und für ungerades ν immer negativ sind. Daraus folgt für die Partialsummen:

$$\begin{aligned} S_{2n+2} - S_{2n} &= a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0 \\ S_{2n+3} - S_{2n+1} &= -a_{2n+3} + a_{2n+2} \geq 0 \\ S_{2n+1} - S_{2n} &= -a_{2n+1} \leq 0 \end{aligned}$$

Also ist die Folge S_{2n} der Partialsummen zu geradem Index monoton fallend, die Folge S_{2n+1} der Partialsummen zu ungeradem Index monoton steigend, während immer $S_{2n+1} \leq S_{2n}$ ist. Daraus folgt

$$S_{2n+1} \leq S_{2n} \leq S_0, \qquad S_{2n+2} \geq S_{2n+1} \geq S_1.$$

Die monoton fallende Folge S_{2n} ist nach unten beschränkt, und die monoton steigende Folge S_{2n+1} nach oben. Deswegen konvergieren beide Folgen nach Satz 1.10. Sei etwa

$$S := \lim_{n\to\infty} S_{2n}, \qquad S' := \lim_{n\to\infty} S_{2n+1}.$$

Dann ist aber

$$S' - S = \lim_{n\to\infty}(S_{2n+1}) - \lim_{n\to\infty}(S_{2n}) = \lim_{n\to\infty}(S_{2n+1} - S_{2n}) = \lim_{n\to\infty}(-a_{2n+1}) = 0.$$

Beide Grenzwerte stimmen überein: $S = S'$. Wir zeigen, dass auch die ganze Reihe $\sum(-1)^\nu a_\nu$ gegen S konvergiert. Dazu geben wir uns wieder einmal ein $\epsilon > 0$ vor. Dann gibt es

$$\left.\begin{array}{c} N(\epsilon) \\ N'(\epsilon) \end{array}\right\} \text{ derart, dass für } \left\{\begin{array}{c} \nu > N(\epsilon) \\ \nu > N'(\epsilon) \end{array}\right\} \text{ gilt } \left\{\begin{array}{l} |S_{2n} - S| < \epsilon \\ |S_{2n+1} - S| < \epsilon \end{array}\right.$$

Falls $\nu \geq max(2N(\epsilon), 2N'(\epsilon) + 1)$, dann gilt also $|S_\nu - S| < \epsilon$. $\square$

Ein Beispiel für die Anwendbarkeit dieses Kriteriums ist die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu}.$$

Diese Reihe konvergiert also. Aber wogegen? Diese Frage beantwortet das Konvergenzkriterium nicht.

Wenn man sich immer schön an diese Regeln hält, kann man die meisten in der Praxis vorkommenden Probleme mit unendlichen Reihen behandeln. Aber es gibt zwei Dinge, die man dabei nicht tun darf. (Zunächst kommt man nicht darauf, dass sowas verboten ist, das muss einem erst gesagt werden!)

1) Keine Klammern Weglassen! Nehmen wir etwa $0 = (1-1)$ als Summanden in einer Reihe, und lassen dann die Klammern weg, so finden wir

$$0 = \sum_{\nu=1}^{\infty}(1-1) \neq 1-1+1-1+1-1 \pm ...,$$

denn die Reihe ohne Klammern divergiert. Ihre Partialsummen S_n sind abwechselnd 1 und 0, und diese Folge divergiert.

2) Summanden nicht umordnen! Betrachten wir als Beispiel die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \pm ... \quad ,$$

deren Konvergenz wir mit dem Leibnizkriterium soeben bewiesen haben. Man könnte auf die Idee kommen, die Summanden so umzuordnen, dass man erst alle Summanden mit positivem Vorzeichen aufaddiert:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... = \sum \frac{1}{2\nu} = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{\nu}.$$

Bis auf den Faktor 1/2 bekommt man die divergente harmonische Reihe. Addiert man auf diese Weise auf, so wachsen die Partialsummen unbeschränkt, die Reihe divergiert.

Zugegeben, das Beispiel ist etwas extrem, weil man gar nicht mehr dazu kommt, noch die negativen Summanden mit aufzuaddieren. Aber man erzielt denselben Effekt, wenn man die Reihe so umordnet, dass man viel mehr positive als negative Summanden mitnimmt.

Es gibt eine Methode, mit den Schwierigkeiten bei Umordnungen umzugehen. Ich möchte das Verfahren angeben, aber die Beweise weglassen.

Definition 1.11 *Eine Reihe* $\sum a_\nu$ *heißt* absolut konvergent*, wenn die Reihe* $\sum |a_\nu|$ *der Absolutbeträge konvergiert.*

Ist die Reihe $\sum |a_\nu|$ konvergent, so gilt die Cauchy-Eigenschaft:

$$\left| \sum_{n}^{m} |a_\nu| \right| = \sum_{n}^{m} |a_\nu| < \epsilon$$

für $m > n > N(\epsilon)$. Mit der Dreiecksungleichung folgt daraus

$$\left| \sum_{n}^{m} a_\nu \right| \leq \sum_{n}^{m} |a_\nu| < \epsilon.$$

Also ist nach Satz Satz 1.8 dann auch die Reihe $\sum a_\nu$ konvergent. Die Umkehrung gilt nicht: Nach dem Leibniz-Kriterium ist

$$\sum(-1)^\nu \frac{1}{\nu}$$

konvergent, aber die Reihe ist nicht absolut konvergent, weil die harmonische Reihe divergiert.

Satz 1.14 (Umordnungssatz) *Die Reihe $\sum a_\nu$ sei absolut konvergent. Dann konvergiert sie in jeder Umordnung gegen denselben Grenzwert.*

Ohne Beweis.

Das Problem der Umordnung, bzw, der Anordnung stellt sich bei Doppelreihen

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{\infty} a_{\mu,\nu} = \begin{array}{l} a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,3} + ... \\ a_{2,1} + a_{2,2} + a_{2,3} + ... \\ a_{3,1} + a_{3,2} + a_{3,3} + ... \\ +... \end{array}$$

Es gibt mindestens vier verschiedene naheliegende Arten, sie aufzuaddieren:

a) Zuerst die Spalten: $\sum_\nu (\sum_{\mu=1}^{\infty} a_{\mu,\nu})$

b) Zuerst die Zeilen: $\sum_\mu (\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\mu,\nu})$

c) Quadratweise: $\lim_{N\to\infty} \sum_{\mu,\nu=1}^{N} a_{\mu,\nu}$

d) Diagonal: $\sum_{N=1}^{\infty} \sum_{\mu+\nu=N} a_{\mu,\nu}$.

Dafür gilt

Satz 1.15 (Doppelreihensatz) *Wenn eine Doppelreihe in irgend einer Anordnung absolut konvergiert, dann konvergiert sie in jeder beliebigen Anordnung, und zwar immer gegen denselben Grenzwert.*

Wo können solche Doppelreihen auftreten? Wenn man unendliche Reihen multipliziert:

$$\left(\sum_{\mu=1}^{\infty} a_\mu\right) \cdot \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu\right) = \sum_{\mu,\nu=1}^{\infty} (a_\mu \cdot b_\nu).$$

Die Anordnung einer solchen Produkt-Doppelreihe als Diagonalreihe

$$\sum_{N=1}^{\infty} \left(\sum_{\mu=1}^{N-1} a_\mu \cdot b_{N-\mu}\right)$$

heißt *Cauchy-Produkt* der beiden multiplizierten Reihen.

Satz 1.16 (Cauchyscher Produktsatz) *Konvergieren die beiden Reihen*

$$\sum_\mu a_\mu = a, \qquad \sum_\nu b_\nu = b$$

<u>absolut</u>, dann konvergiert ihr Cauchy-Produkt gegen $a \cdot b$. (Die Produktreihe konvergiert auch in jeder beliebigen anderen Anordnung gegen $a \cdot b$.)

Beispiel 1.19 *Für $|x| < 1$ und $|y| < 1$ ist*

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} x^\mu y^\nu = \left(\sum_{\mu=0}^{\infty} x^\mu\right) \cdot \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu\right) = \frac{1}{(1-x)\cdot(1-y)}.$$

Insbesondere für $x = y$ bekommt man das Cauchy-Produkt

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} x^{\mu+\nu} = \sum_{N=0}^{\infty} \left(\sum_{\mu=0}^{N} x^N\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)x^\nu.$$

Aufgabe 1.7 *Zeigen Sie:*

$$\textbf{a)} \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1. \quad \textbf{b)} \ \sum_{j,k=2}^{\infty} \frac{1}{j^k} = 1.$$

Aufgabe 1.8 (NV) *Es sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge mit*

$$\lim 2^n a_n = 1.$$

Zeigen Sie die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Aufgabe 1.9 (NV) *Untersuchen sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:*

$$\textbf{a)} \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^{10}}, \quad \textbf{b)} \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+k^2}{1+k^4}.$$

Aufgabe 1.10 (NV) *Untersuchen Sie die folgenden Reihen sowohl auf Konvergenz als auch auf absolute Konvergenz:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{(k+1)(k+2)}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x}{x+k}.$$

1.4 Dezimalbrüche

Mit Brüchen hat man nicht in allen Hochkulturen auf dieselbe Weise gerechnet. Im alten Ägypten wurden Brüche als Summen von *Stammbrüchen* geschrieben. Stammbrüche sind Brüche $1/n,\ n \in \mathbb{N}$, mit dem Zähler $= 1$. In Babylonien wurden Brüche mit den Nennern $60,\quad 60^2 = 3600,\quad 60^3, ...$ verwendet. Ein endlicher Dezimalbruch ist eine Summe von Brüchen mit den Nennern $10,\quad 10^2 = 100,\quad 10^3, ...$ usw. Zum Beispiel

$$\begin{aligned} 0,5 &= \frac{5}{10}, \\ 0,25 &= \frac{25}{100} \\ &= \frac{2}{10} + \frac{5}{100}, \\ 1,111 &= 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} \end{aligned}$$

Die effiziente Art, einen Dezimalbruch als Folge von Ziffern zu schreiben, und deren Stellenwert durch das Komma anzugeben, war erst möglich, nachdem in Indien die Ziffer Null $= 0$ erfunden worden war. (Diese Erfindung der Null war wohl der bedeutendste Schritt in der Entwicklung der Mathematik.)

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit der Dezimalbruch-Darstellung der reellen Zahlen beschäftigen. Ein Dezimalbruch wird als Folge von Ziffern gescrieben, wobei ein Komma den Stellenwert der Ziffern angibt. Unter einer *Ziffer* c verstehen wir eine der zehn natürlichen Zahlen $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ oder 9. Ein endlicher Dezimalbruch

$$\pm c_{-s}c_{-s+1}...c_{-1}c_0, c_1c_2...c_r$$

ist eine komprimierte Schreibweise der rationalen Zahl

$$\begin{aligned} & \pm \left(c_{-s} \cdot 10^s + c_{-s+1} \cdot 10^{s-1} + ... + c_{-1} \cdot 10 + c_0 + c_1 \cdot 10^{-1} + c_2 \cdot 10^{-2} + ... + c_r \cdot 10^{-r} \right) \\ = & \pm \sum_{\nu=-s}^{r} c_\nu \cdot 10^{-\nu}. \end{aligned}$$

Nicht alle rationalen Zahlen kann man als endlichen Dezimalbruch schreiben. So ist z.B.

$$\frac{1}{3} = 0,3333333...$$

durch endliche Dezimalbrüche $0,3333...333$ nur annäherbar. Man wird deshalb automatisch auf unendliche Dezimalbrüche geführt. Ein unendlicher Dezimalbruch ist (bis auf das Vorzeichen) eine unendliche Reihe

$$c_{-s}c_{1-s}...c_{-1}c_0, c_1c_2c_3... = \sum_{\nu=-s}^{\infty} \frac{c_\nu}{10^\nu}.$$

Diese unendliche Reihe konvergiert:

Alle Ziffern c_ν sind ≥ 0, die Reihe enthält also nur positive Summanden. Wegen Satz 1.8 genügt es, zu zeigen, dass die Reihe nach oben beschränkt ist. Jede Ziffer c_ν ist andererseits ≤ 10, deswegen ist die Reihe

$$\sum_{\nu=-s}^{\infty} \frac{10}{10^\nu} = \sum_{\nu=-s}^{\infty} \frac{1}{10^{\nu-1}} = 10^{s+1} + ... + 10 + \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10} \right)^\nu$$

eine Majorante. Diese Majorante ist im Wesentlichen die geometrische Reihe zur Basis $a = 1/10$ und konvergiert.

Satz 1.17 (Existenz der Dezimalbruchentwicklung) *Jede Zahl $x \in \mathbb{R}$ lässt sich in einen (endlichen oder unendlichen) Dezimalbruch entwickeln.*

Beweis: Zunächst können wir o.B.d.A. $x \geq 0$ annehmen. Betrachten wir zunächst den Fall $x \geq 1$. Nach Satz 0.2 b) gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $10^n > x$. Dann ist $y := x/10^n < 1$. Wir werden gleich sehen, dass es für y eine Dezimalbruchentwicklung

$$y = 0, c_1 c_2 c_3 ...., \quad c_\nu \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$$

gibt. Deswegen hat dann x die Dezimalbruchentwicklung

$$x = 10^n \cdot y = c_1 c_2 ... c_n, c_{n+1} c_{n+2} ... \quad .$$

Sei also jetzt $0 \leq x < 1$. Wir konstruieren rekursiv eine Folge (c_ν) von Ziffern $c_\nu \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$ mit

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{c_\nu}{10^\nu} \leq x < \sum_{\nu=1}^{n} \frac{c_\nu}{10^\nu} + \frac{1}{10^n}.$$

Anfang: $\nu = 1$. Das halboffene Intervall $[0, 1[$ ist die disjunkte Vereinigung

$$\left[0, \frac{1}{10}\right[\cup \left[\frac{1}{10}, \frac{2}{10}\right[\cup \left[\frac{2}{10}, \frac{3}{10}\right[\cup ... \cup \left[\frac{9}{10}, 1\right[$$

der zehn halboffenen Intervalle $[c/10, (c+1)/10[$ mit $c \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$. Wegen $x \in [0, 1[$ gehört x zu genau einem dieser Intervalle, etwa zu $[c_1/10, (c_1+1)/10[$. Damit haben wir eine Ziffer c_1 gefunden, für die

$$\frac{c_1}{10} \leq x < \frac{c_1}{10} + \frac{1}{10}$$

gilt.

Schritt $n \to n+1$. Seien bereits Ziffern $c_1, ..., c_n$ konstruiert, derart, dass

$$a := \sum_{\nu=1}^{n} \frac{c_\nu}{10^\nu} \leq x < \sum_{\nu=1}^{n} \frac{c_\nu}{10^\nu} + \frac{1}{10^n} =: b$$

gilt. Also gehört x zum halboffenen Intervall $[a, b[$ der Länge $1/10^n$. Dieses Intervall teilen wir wieder in zehn gleichlange halboffene, disjunkte Teilintervalle

$$[a, b[= \left[a, a + \frac{1}{10^{n+1}}\right[\cup \left[a + \frac{1}{10^{n+1}}, a + \frac{2}{10^{n+1}}\right[\cup ... \cup \left[a + \frac{9}{10^{n+1}}, a + \frac{10}{10^{n+1}} = b\right[.$$

Die Zahl x liegt in genau einem dieser Intervalle, etwa in $[a + c_{n+1}/10^{n+1}, a + (c_{n+1}+1)/10^{n+1}[$. Damit haben wir eine Ziffer c_{n+1} gefunden, für die

$$\sum_{\nu=1}^{n+1} \frac{c_\nu}{10^\nu} = a + \frac{c_{n+1}}{10^{n+1}} \leq b < a + \frac{c_{n+1}+1}{10^{n+1}} = \sum_{\nu=1}^{n+1} \frac{c_\nu}{10^{n+1}} + \frac{1}{10^{n+1}}$$

gilt.

Mit diesen Ziffern c_ν bilden wir den Dezimalbruch $0,c_1c_2c_3...$. Wir müssen jetzt noch zeigen, dass dieser Dezimalbruch gegen x konvergiert. Für seine n-te Partialsumme gilt aber nach Konstruktion der Ziffern c_ν

$$0,c_1c_2...c_n \le x < 0,c_1c_2...c_n + \frac{1}{10^n}.$$

Daraus folgt

$$0 \le x - 0,c_1c_2...c_n < 10^{-n}$$

und

$$|x - 0,c_0c_1...c_n| < 10^{-n}.$$

Weil die Folge 10^{-n} eine Nullfolge ist, liefert dies die Behauptung. $\square$

Praktisch verfährt man bei der Dezimalbruch-Entwicklung einer konkreten Zahl genau so, wie im Beweis von Satz 1.17 angegeben. Nur lässt man die ganze Theorie weg, sondern konzentriert sich ganz darauf, aus den zehn halboffenen Intervallen stets das richtige auszuwählen. Darauf läuft der Divisionsalgorithmus aus der Schule hinaus. Als Beispiel entwickeln wir die Zahl 1/7 in einen Dezimalbruch:

$$\begin{array}{l}
1,0000000 \ : \ 7 = 0,1428571... \\
10 \\
\underline{\ \ 7} \\
\ \ 30 \\
\ \ \underline{28} \\
\ \ \ \ 20 \\
\ \ \ \ \underline{14} \\
\ \ \ \ \ \ 60 \\
\ \ \ \ \ \ \underline{56} \\
\ \ \ \ \ \ \ \ 40 \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \underline{35} \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 50 \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \underline{49} \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 10 \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 7
\end{array}$$

Die Dezimalbruchdarstellung hat einen kleinen Schönheitsfehler: sie ist nicht ganz eindeutig, denn

$$0,999... = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{9}{10^\nu} = 9 \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{10^\nu} = 9 \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}} - 1 \right) = 9 \cdot \left(\frac{10}{9} - 1 \right) = 1 = 1,000... \ .$$

Ein Dezimalbruch kann also mit einer Ziffer c_n abbrechen oder mit den Ziffern $c_n-1, 9, 9, 9, ...$ unendlich weitergehen. Beidemale stellt er dieselbe Zahl dar. Aber bis auf diese kleine Mehrdeutigkeit ist die Dezimalbruchdarstellung eindeutig.

Satz 1.18 (Eindeutigkeit der Dezimalbruchdarstellung) *Es seien*

$$c_{-s}c_{-s+1}...c_{-1}c_0, c_1c_2... = c'_{-s}c'_{-s+1}...c'_{-1}c'_0, c'_1c'_2...$$

zwei verschiedene Dezimalbruchdarstellungen derselben reellen Zahl. Dann gibt es einen Index n mit:

$c_\nu = c_{\nu'}$ für $\nu = -s, ..., n-1$;

$c_n = c'_n + 1$;

$c_\nu = 0$ für alle $\nu > n$;

$c'_\nu = 9$ für alle $\nu > n$.

(Oder umgekehrt: c_ν und c'_ν vertauscht.)

Beweis. Es sei n der erste Index mit $c_n \neq c'_n$. In beiden Dezimalbrüchen stimmt also die Entwicklung bis zu diesem Index überein. Nachdem wir bei beiden die Entwicklung bis zum Index $n-1$ abziehen, können wir also o.B.d.A. annehmen, dieser erste Index ist $n = -s$. Weiter multiplizieren wir beide Dezimalbrüche mit 10^{-n} und können danach o.B.d.A. annehmen, dieser erste Index ist $n = 0$. Wir haben also

$$c_0, c_1 c_2 ... = c'_0, c'_1 c'_2 ...$$

mit $c_0 \neq c'_0$. Nach Vertauschen der beiden Dezimalbrüche können wir o.B.d.A. annehmen $c'_0 < c_1$, und nach Subtraktion der Zahl c'_0 auf beiden Seiten, dass $c'_0 = 0$ ist. Der Dezimalbruch auf der rechten Seite ist dann

$$0, c'_1 c'_2 c'_3 ... \leq 0,999... = 1,$$

und er ist echt < 1, wenn auch nur eine einzige der Ziffern $c_\nu < 9$ ist. Der Dezimalbruch links ist

$$c_0, c_1 c_2 c_3 \geq 1,000... = 1,$$

und er ist echt > 1, wenn $c_0 > 1$ ist, oder wenn auch nur eine einzige der Ziffern $c_\nu > 0$ ist. Beide Dezimalbrüche können nur dann dieselbe reelle Zahl darstellen, wenn ihr gemeinsamer Wert $= 1$ ist, und

$$c_0 = 1, \quad c_\nu = 0, \quad c'_\nu = 9 \quad (1 \leq \nu \in \mathbb{N})$$

gilt. □

Definition 1.12 *Ein Dezimalbruch heißt* periodisch*, wenn es eine Stelle gibt, von der an sich die Ziffernkombinationen immer wiederholen. Präzise formuliert: Es gibt einen Index n und p Ziffern $b_1, b_2, ..., b_p$ mit*

$$c_{n+k\cdot p+\nu} = b_\nu \text{ für } \nu = 1, ..., p \text{ und } k = 0, 1, 2, ... \ .$$

Einen solchen periodischen Dezimalbruch schreibt man auch

$$...c_0, c_1 ... c_n \underline{b_1 b_2 ... b_p} \ .$$

Bei unserer Dezimalbruchentwicklung der Zahl $1/7$ ergab sich ein solcher periodischer Dezimalbruch: Ich habe mit dem Dividieren aufgehört, als das zweite Mal die Ziffer 1 erschien. Dies geschah auf der siebten Stelle nach dem Komma, und zwar deswegen, weil wir 10 durch 7 teilen mussten: $10 : 7 = 1$ Rest 3. Genau dasselbe passierte schon an der ersten Stelle nach dem Komma. Deswegen geht der Dezimalbruch an der siebten Stelle nach dem Komma genauso weiter wie an der ersten Stelle, er ist periodisch:

$$\frac{1}{7} = 0,142857142857... = 0,\underline{142857}.$$

Satz 1.19 (Periodische Dezimalbrüche) *Jeder periodische Dezimalbruch stellt eine rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}$ dar.*

Beweis. Nachdem wir den Anfang des periodischen Dezimalbruchs weglassen und dann mit einer geeigneten Zehnerpotenz durchmultiplizieren, können wir o.b.d.A. annehmen, der periodische Dezimalbruch habe die Form

$$0,\underline{b_1 b_2 ... b_p} \ .$$

Mit der rationalen Zahl

$$b := 0, b_1 b_2 ... b_p = \sum_{\nu=1}^{p} \frac{b_\nu}{10^\nu}$$

können wir ihn als

$$b \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{10^{p \cdot \nu}} = b \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10^p}\right)^\nu = \frac{b}{1 - \frac{1}{10^p}}$$

schreiben. Das ist eine rationale Zahl. □

Beispiel 1.20 *Betrachten wir etwa*

$$0,7272\underline{72}.$$

Dieser Dezimalbruch ist

$$0,72 \cdot \left(1 + \frac{1}{100} + \left(\frac{1}{100}\right)^2 + ...\right) = 0,72 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{72}{100 - 1} = \frac{72}{99} = \frac{8}{11}.$$

Von Satz 1.19 gilt auch die Umkehrung:

Satz 1.20 (Dezimalbruch-Darstellung rationaler Zahlen) *Die Dezimalbruch-Entwicklung einer rationalen Zahl ist entweder endlich, oder periodisch.*

Beweis. Es genügt, die Aussage nur für positive rationale Zahlen $r/q > 0,\ r, q \in \mathbb{N}$ zu beweisen. Den ganzzahligen Teil c des Dezimalbruchs erhalten wir duch Division mit Rest:

$$r = c \cdot q + r_1,\ c, r_1 \in \mathbb{N},\ r_1 < q.$$

Die erste Ziffer c_1 hinter dem Komma entsteht durch Division mit Rest aus $10 \cdot r_1$:

$$10 \cdot r_1 = c_1 \cdot q + r_2,\ c_1, r_2 \in \mathbb{N},\ r_2 < q.$$

Dann dividieren wir $10 \cdot r_2$ mit Rest durch q

$$10 \cdot r_2 = c_2 \cdot q + r_3,\ c_2, r_3 \in \mathbb{N},\ r_3 < q$$

und erhalten daraus die zweite Ziffer c_2 hinter dem Komma. Diesen Schritt wiederholen wir immer wieder: Wenn c_n aus $10 \cdot r_n$ durch Division mit Rest r_{n+1} entstanden ist, dividieren wir $10 \cdot r_{n+1}$ und finden die Ziffer c_{n+1} aus $10 \cdot r_{n+1} = c_{n+1} \cdot q + r_{n+2}$.

Entweder ergibt sich irgend wann ein Rest $r_n = 0$. Dann bricht das Verfahren ab, und der Dezimalbruch für r/p ist endlich. Oder wir erhalten eine unendliche Folge $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Resten. Diese Reste sind unendlich viele natürliche Zahlen r_n mit $1 \leq r_n < q$. Davon gibt es nur $q - 1$ verschiedene.

Also muss irgend wann ein Rest auftreten, der schon mal da war: $r_{n+p} = r_n$. Von dieser Stelle $n+p$ an läuft die Konstruktion der Ziffern c_ν genauso weiter, wie sie nach der Stelle n gelaufen ist:

$$c_{n+p+1} = c_n,\ c_{n+p+2} = c_{n+2},\ \dots\ .$$

Der Dezimalbruch ist periodisch mit der Periode $c_{n+1}c_{n+2}...c_{n+p}$. $\square$

Einige besonders schöne periodische Dezimalbrüche, die mir aufgefallen sind, enthält folgende Tabelle:

$$\boxed{\begin{array}{rcl}
1/7 & = & 0.\underline{142857} \\
1/11 & = & 0.0\underline{9} \\
1/13 & = & 0.\underline{0769232} \\
1/17 & = & 0.\underline{0588235294117647} \\
1/19 & = & 0.\underline{052631578947368421} \\
1/23 & = & 0.\underline{0434782608695652173913} \\
1/29 & = & 0.\underline{0344827586206896551724137931} \\
1/31 & = & 0.\underline{032258064516129}
\end{array}}$$

Aufgabe 1.11 *Es seien* $i_1, i_2, i_3 = 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$ *Ziffern.*
a) *Zeigen Sie:* $0,\underline{i_1} = 0,i_1i_1i_1... = \frac{1}{9}\cdot i_1$.
b) *Zeigen Sie:* $0,\underline{i_1i_2} = 0,i_1i_2i_1i_2 = \frac{1}{99}\cdot(10i_1+i_2)$.
c) *Stellen Sie den periodischen Dezimalbruch* $0,\underline{i_1i_2i_3}$ *als gewöhnlichen Bruch dar.*

Aufgabe 1.12 *Stellen Sie den Dezimalbruch*

$$0,\underline{02439}$$

als gewöhnlichen, geürzten Bruch dar.

2 Funktionen und Stetigkeit

Der Begriff der Funktion ist der zweite für die Analysis grundlegende Begriff. Ebenso wie der Begriff des Grenzwerts war er den Mathematikern der Antike nicht bekannt. Erfunden wurde das Wort 'Funktion' von J. Bernoulli (1667-1748) im Jahre 1718. L. Euler (1707-1783) verwendet die (wie damals üblich lateinische) Formulierung 'functio continua'. Damit meint er einen 'analytischen Ausdruck, der keiner weiteren Erläuterung bedarf'. Man hat also damals angenommen, dass man eine Funktion immer irgendwie vernünftig hinschreiben kann. Das änderte L. Dirichlet (1805-1859), von dem der moderne Funktions- und Abbildungsbegriff stammt.

2.1 Funktionen

Definition 2.1 *Es sei M eine Menge. Eine* Funktion *auf M ist eine Abbildung $f : M \to \mathbb{R}$. Die Menge M heißt* Definitionsbereich *von f.*

Manchmal nennt man Funktionen, wie ich sie eben definiert habe, auch *reellwertige* Funktionen, um sie besser von anderen Sorten von Abbildungen, etwa Abbildungen $f : M \to \mathbb{C}$ zu unterscheiden.

In diesem Semester werden wir fast ausschließlich Funktionen betrachten deren Definitionsbereich M auch wieder in $\mathbb{R}$ enthalten ist. Wenn eine solche Funktion nicht gar zu schlimm ist kann man ihren Verlauf graphisch darstellen. Dazu zeichnet man die Menge

$$\Gamma_f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \in M, \, y = f(x)\}$$

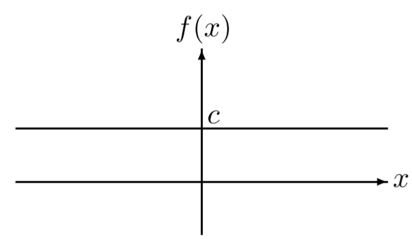
in der Ebene $\mathbb{R}^2$. Diese Menge Γ_f heißt auch der *Graph* der Funktion f.

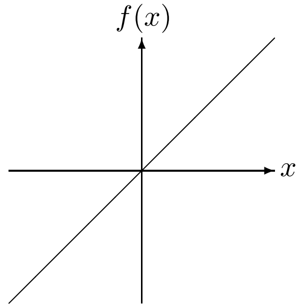
Wir betrachten einige Beispiele:

Beispiel 2.1 *Zu jeder reellen Zahl $c \in \mathbb{R}$ gibt es die konstante Funktion mit Wert c, definiert durch*

$$f(x) := c$$

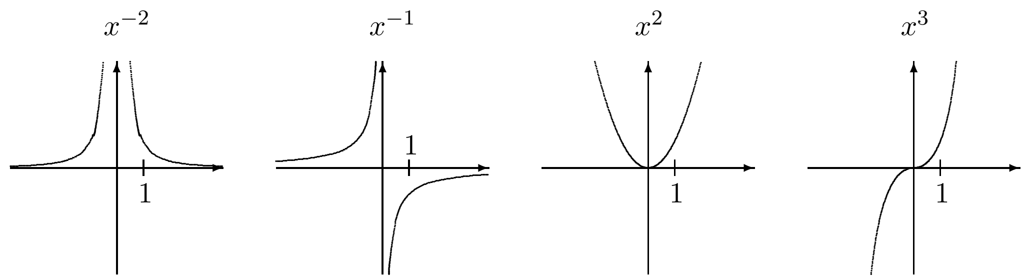
für alle $x \in \mathbb{R}$. Diese Funktion ist die allereinfachste Funktion. Ihr Definitionsbereich ist ganz $\mathbb{R}$.





Beispiel 2.2 *Die Funktion $f(x) := x$ ordnet jeder Zahl x sie selbst als Wert zu. Der Definitionsbereich ist auch wieder ganz $\mathbb{R}$.*

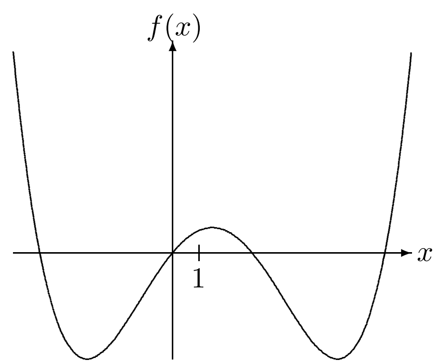
Beispiel 2.3 *Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ ist die Potenzfunktion $f(x) := x^n$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Wenn n negativ ist so ist der Definitionsbereich der Potenzfunktion nur $\mathbb{R}^* := \{x \in \mathbb{R} : \; x \neq 0\}$. Die Funktion x^1 ist die soeben betrachtete Funktion $f(x) = x$, die Funktion x^0 ist in diesem Zusammenhang die konstante Funktion $f(x) = 1$.*



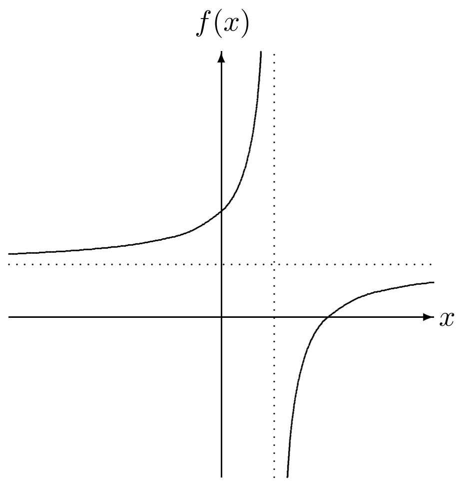
Beispiel 2.4 *Linearkombinationen der Potenzfunktionen zu positiven Exponenten heißen* Polynome. *Ein Polynom vom Grad n ist also eine Funktion*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

mit reellen Zahlen a_n, a_{n-1}, $... a_2$, a_1, a_0 als Koeffizienten. Mit der Vereinbarung $x^0 := 1$ können wir es auch in der Kurzform $\sum a_\nu x^\nu$ schreiben.



$$\begin{aligned} f(x) &= 0{,}01x^4 - 0{,}6x^3 - 0{,}31x^2 + 1{,}2x \\ &= 0{,}01(x+5)x(x-3)(x-8) \end{aligned}$$



$f(x) = (x-2)/(x-1)$

Beispiel 2.5 *Quotienten $f(x) = p(x)/q(x)$ zweier Polynome p und q heißen* rationale Funktionen. *Das Polynom q im Nenner darf dabei natürlich nicht das Nullpolynom $p(x) \equiv 0$ sein. Der Definitionsbereich dieser Funktionen ist $\mathbb{R}$ ohne die Nullstellen des Nenner-Polynoms q. Speziell, wenn die Polynome p und q einen Grad ≤ 1 haben, dann heißt die Funktion*

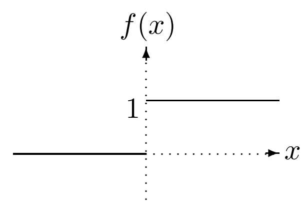
$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

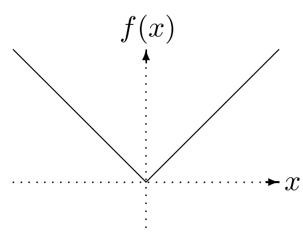
gebrochen lineare *Funktion.*

Die bisher betrachteten Funktionen sind in einem gewissen Sinn sehr natürlich. Um sie hinzuschreiben braucht man nicht mehr als ein Symbol 'x' für die Variable und die algebraischen Rechnungsarten: Addition und Multiplikation, letztere etwas variiert als Potenz oder Division. Das ist bei den jetzt noch folgenden Funktionen anders. Sie sind 'vom Menschen gemachte', künstliche Funktionen.

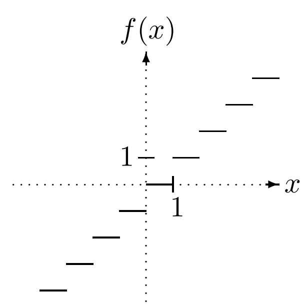
Beispiel 2.6 *Die Heavysidesche Sprungfunktion:*

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \textit{falls } x < 0 \\ 1 & \textit{falls } x \geq 0. \end{cases}$$





Beispiel 2.7 *Die Absolutbetrag-Funktion $f(x) := |x|$.*



Beispiel 2.8 *Die Größtes-Ganzes-Funktion*

$$f(x) = [x] := n \in \mathbb{Z} \textit{ mit } x - 1 < n \leq x.$$

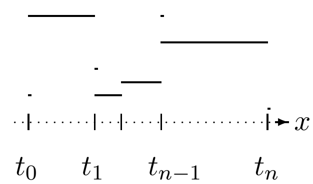
Beispiel 2.9 *Eine Funktion f definiert auf dem Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ heißt* Treppenfunktion*, wenn eine Zerlegung*

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = b$$

des Intervalls $[a,b]$ in Teilintervalle $[t_\nu, t_{\nu+1}]$ existiert, derart, dass die Funktion f auf den offenen Zerlegungsintervallen konstant ist:

$$f(x) = c_\nu \in \mathbb{R} \text{ für } x \in (t_\nu, t_{\nu+1}),\ \nu = 0, ..., n-1.$$

(Die Werte von f in den Zwischenpunkten t_ν der Zerlegung sind unwichtig.)



Beispiel 2.10 *Die folgende Funktion springt so oft zwischen den Werten* 0 *und* 1 *hin und her, dass man kein sinnvolles Bild ihres Graphen zeichnen kann:*

$$f(x) := \begin{cases} 1 \text{ für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ für } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Beispiel 2.11 *Schließlich sei noch daran erinnert, dass eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dasselbe ist wie die Funktion $f : n \mapsto a_n$ mit Definitionsbereich $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$.*

Nachdem wir jetzt einige typische Beispiele von Funktionen beieinander haben, stellen wir die wichtigsten Rechenoperationen zusammen, die man auf Funktionen anwenden kann. Das ergibt so eine Art 'Kleines Einmaleins' für Funktionen:

1) Funktionen kann man einschränken. Ist $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ und $M \subset D$ eine Teilmenge, so nennt man

$$f|M : \begin{cases} M \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$$

die *Einschränkung* von f auf M. Der Definitionsbereich von $f|M$ ist M. So sind beispielsweise

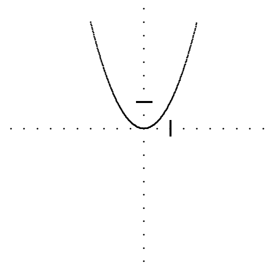
$$f|[0,\infty[= x, \qquad f|] - \infty, 0] = -x$$

Einschränkungen des Absolutbetrags $f(x) := |x|$.

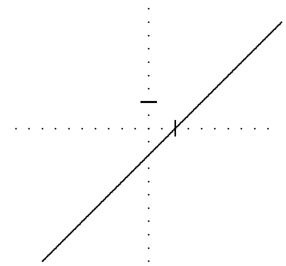
2) Die algebraischen Rechenoperationen für reelle Zahlen vererben sich auf Funktionen, indem man diese Rechenoperationen auf die *Funktionswerte* anwendet. Sind f und g zwei Funktionen mit demselben Definitionsbereich, so erhält man auf diese Weise die Funktionen

	definiert durch		
$f+g$	$(f+g)(x)$	$:=$	$f(x)+g(x)$
$f-g$	$(f-g)(x)$	$:=$	$f(x)-g(x)$
$f \cdot g$	$(f \cdot g)(x)$	$:=$	$f(x) \cdot g(x)$
f/g	$(f/g)(x)$	$:=$	$f(x)/g(x)$

Die Funktion f/g ist natürlich nur dort definiert, wo $g(x) \neq 0$. Betrachten wir etwa als Beispiel

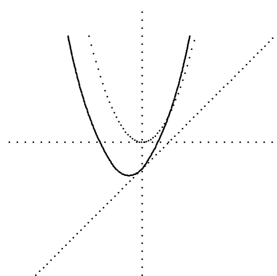


$f(x) = x^2$

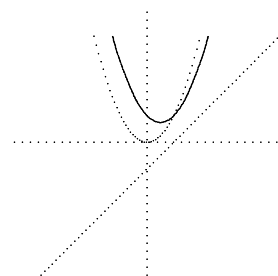


$g(x) = x - 1$

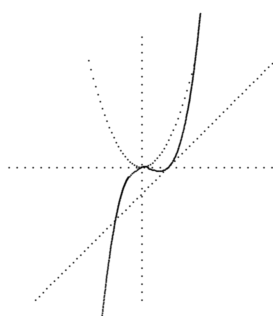
so erhalten wir als verknüpfte Funktionen



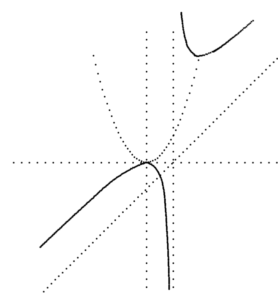
$(f + g)(x) = x^2 + x - 1$



$(f - g)(x) = x^2 - x + 1$



$(f \cdot g)(x) = x^3 - x^2$

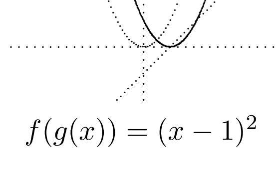


$(f/g)(x) = x^2/(x - 1)$

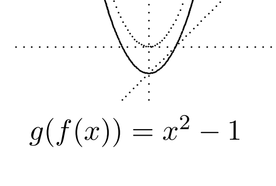
3) Wenn die Werte $g(x)$ der Funktion g im Definitionsbereich der Funktion f liegen, kann man f und g hintereinanderschalten und erhält als zusammengesetzte Funktion

$$f \circ g \quad \text{definiert durch} \quad (f \circ g)(x) := f(g(x)).$$

Weil die Definitionsbereiche von $f(x) = x^2$ und $g(x) = x - 1$ beide ganz $\mathbb{R}$ sind, kann man so z.B. die Funktionen $(f \circ g)(x) = (x - 1)^2$ und $(g \circ f)(x) = x^2 - 1$ erzeugen.



$f(g(x)) = (x - 1)^2$



$g(f(x)) = x^2 - 1$

Definition 2.2 *Es sei f eine Funktion mit dem Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ und dem Wertebereich $W := f(D) = \{f(x) : x \in D\}$. Eine Funktion $g : W \to D$ heißt* Umkehrfunktion *von f, wenn*

$$g \circ f = id_D : D \to D, \text{ d.h., wenn } g(f(x)) = x \text{ für alle } x \in D$$

gilt.

Die Bedingung $g(f(x)) = x$ kann man auch so formulieren: Falls $f(x) = y$ ist, dann ist $x = g(y)$. Damit kann man Umkehrfunktionen oft direkt ermitteln.

Beispiel 2.12 *Wir betrachten die gebrochen-lineare Funktion*

$$f(x) = \frac{x-1}{x-2}.$$

Aus $y = (x-1)/(x-2)$ folgt

$$\begin{aligned} y \cdot (x-2) &= x-1 \\ y \cdot x - x &= 2y-1 \\ (y-1) \cdot x &= 2y-1 \\ x &= \frac{2y-1}{y-1} \end{aligned}$$

Also ist

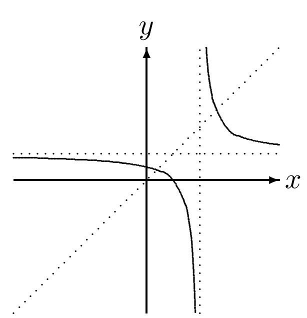
$$g(y) = \frac{2y-1}{y-1}$$

die Umkehrfunktion.

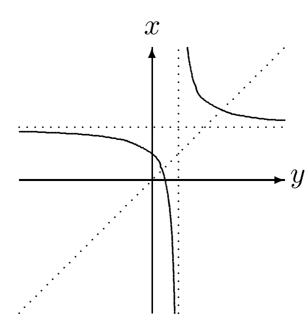
Der Definitionsbereich D von f ist $\mathbb{R}$ ohne die Zahl 2. Der Wertebereich W ist $\mathbb{R}$ ohne die Zahl 1. Das folgt aus unserer Rechnung: Zu jedem $y \neq 1$ gibt es ein $x = g(y) = (2y-1)/(y-1)$ mit

$$f(g(y)) = \frac{g(y)-1}{g(y)-2} = \frac{\frac{2y-1}{y-1} - 1}{\frac{2y-1}{y-1} - 2} = \frac{2y-1-(y-1)}{2y-1-2(y-1)} = y.$$

Der Graph der Umkehrfunktion entsteht aus dem Graphen der Funktion, indem man an der Winkelhalbierenden des ersten und dritten Quadranten spiegelt:



$f(x) = (x-1)/(x-2)$



$g(y) = (2y-1)/(y-1)$

Satz 2.1 (Umkehrfunktion) a) *Die Funktion $f : D \to W$ besitzt genau dann eine Umkehrfunktion, wenn sie den Definitionsbereich D bijektiv auf den Wertebereich W abbildet.*
b) *Ist $g : W \to D$ eine Umkehrfunktion zu f, dann ist f eine Umkehrfunktion zu g.*
c) *Die Umkehrfunktion ist, falls sie existiert, durch die Funktion f eindeutig bestimmt.*

Beweis. a) Nach Definition des Wertebereichs W ist $f : D \to W$ surjektiv, zu jedem $y \in W$ gibt es ein $x \in D$ mit $y = f(x)$. Wenn f injektiv ist, ist dieses $x \in D$ durch y eindeutig bestimmt, und wir können die Funktion g durch $g(y) = x$ definieren.

Besitzt f eine Umkehrfunktion so muss f injektiv sein: Sei $f(x_1) = f(x_2) =: y$. Nach Definition der Umkehrfunktion gilt $g(y) = x_i$ für $i = 1$ und 2. Also folgt $x_1 = g(y) = x_2$.

b) Sei $y = f(x) \in W$. Dann ist

$$f[g(y)] = f[g(f(x))] = f[x] = y.$$

c) Wenn f bijektiv ist, ist das Urbild x jeder Zahl $y \in W$ eindeutig bestimmt, und dadurch ist g mit $g(y) = x$ eindeutig festgelegt. $\square$

Die Umkehrfunktion zu einer Funktion f bezeichnet man meist mit f^{-1}. Man muss dabei allerdings darauf achten, diese Umkehrfunktion nicht mit dem Kehrwert $1/f$ der Funktion f zu verwechseln. In konkreten Fällen schreibt man auch nicht f^{-1}, sondern gibt der Umkehrfunktion einen eigenen, individuellen Namen. So schreibt man z.B. $\sqrt{y}$ für die Umkehrfunktion von $y = x^2$ und $arcsin(y)$ für die Umkehrfunktion von $y = sin(x)$. Diese Funktionen $\sqrt{y}$, $sin(x)$, $arcsin(y)$ haben wir aber noch nicht eingeführt. Wir wollen erst noch einige allgemeine Eigenschaften von Funktionen untersuchen.

Aufgabe 2.1 *Gegeben sei die rationale Funktion*

$$f(x) = \frac{x+1}{x}.$$

a) *Bestimmen Sie den Definitions- und den Werte-Bereich von f.*
b) *Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $g(y)$ zu f sowie deren Definitions- und Werte-Bereich.*
c) *Bestimmen Sie $f \circ f$ und $f \circ f \circ f$.*
d) *Zeigen Sie*

$$f^{(k)}(x) := \underbrace{f \circ f \circ ... \circ f}_{k}(x) = \frac{a_k x + b_k}{c_k x + d_k}$$

mit

$$a_{k+1} = a_k + c_k, \quad b_{k+1} = b_k + d_k, \quad c_{k+1} = a_k, \quad d_{k+1} = b_k.$$

2.2 Funktionenfolgen, Potenzreihen

Genauso wie Folgen (a_n) von reellen Zahlen kann man auch Folgen (f_n) von Funktionen betrachten. Manchmal hängt das Folgenglied ja von einem Parameter ab und kann als Funktion dieses Parameters aufgefasst werden. So war das z.B. bei der geometrischen Folge $(a_n) = (a^n)$ in 1.1. Wenn wir den Parameter a durch die Variable x ersetzen, haben wir eine Funktionenfolge vor uns, nämlich die Folge

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } f_n(x) = x^n$$

der Potenzfunktionen.

Wenn wir eine Funktionenfolge (f_n) betrachten, wollen wir immer voraussetzen, dass alle Funktionen der Folge denselben Definitionsbereich D besitzen, dass wir es also mit Funktionen

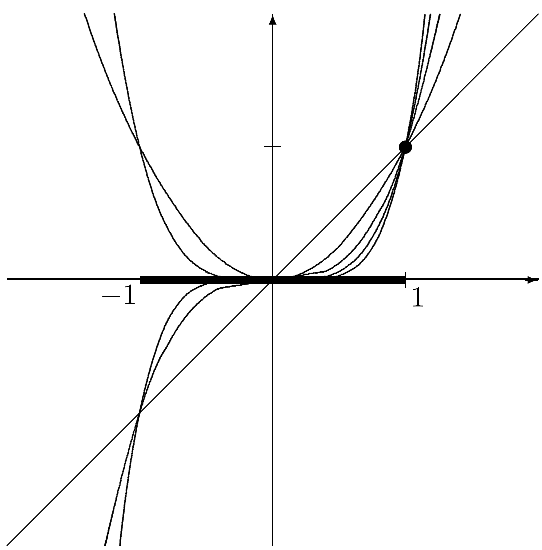
$$f_n : D \to \mathbb{R}, \quad n = 1, 2, 3, ..$$

zu tun haben. Für die Potenzfunktionen f_n mit $f_n(x) = x^n$ ist dieser Definitionsbereich $\mathbb{R}$.

Auch Funktionenfolgen können konvergieren:

Definition 2.3 *Eine Folge von Funktionen* $f_n : D \to \mathbb{R}$ konvergiert, *wenn für alle* $x \in D$ *die Folge* $f_n(x)$ *der Funktionswerte konvergiert. Diese Konvergenz kann dann natürlich vom Punkt* x *abhängen. Man sagt deswegen auch, die Funktionenfolge* f_n *konvergiert* punktweise.

Beispiel 2.13 *Aus der Diskussion der geometrischen Folge in 1.1 wissen wir: Die Folge* x^n *konvergiert für* $-1 < x \leq 1$ *und sonst divergiert sie. Die Folge der Potenzfunktionen* x^n *konvergiert also nicht auf dem ganzen Definitionsbereich* $\mathbb{R}$, *sondern nur auf dem Intervall* $]-1, 1]$.

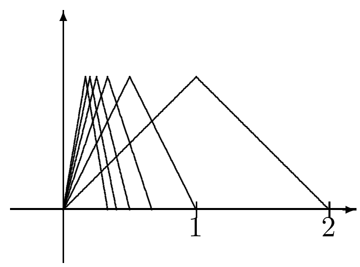


Beispiel 2.14 *Wir definieren Funktionen* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *durch die zusammengesetzte Vorschrift*

$$f_n(x) := \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ n \cdot x \\ 2 - n \cdot x \\ 0 \end{array} \right\} \textit{falls} \left\{ \begin{array}{l} x \leq 0 \\ 0 < x \leq 1/n \\ 1/n < x \leq 2/n \\ 2/n < x \end{array} \right.$$

Der Graph dieser Funktionen ist aus Geradenstücken zusammengesetzt, so dass über dem x-Intervall $[0, 2/n]$ ein Dreieck mit der Spitze $(x, y) = (1/n, 1)$ entsteht.

Die Folge dieser Funktionen konvergiert punktweise, und zwar für alle x gegen 0. In der Tat: Entweder ist $x \leq 0$ und $f_n(x) = 0$ für alle n. Dann ist $f_n(x)$ die konstante Folge mit Grenzwert 0. Oder es ist $x > 0$. Für $n > 2/x$ ist dann $2/n < x$, also liegt x nicht mehr im Intervall $[0, 2/n]$, wo die Funktionen $\neq 0$ sind. Für $n > 2/x$ haben wir also wieder die konstante Folge $f_n(x) = 0$ mit Grenzwert 0.



Wenn die Funktionenfolge f_n auf ihrem Definitionsbereich D punktweise konvergiert, so definieren die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ eine Grenzfunktion

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n \quad \text{mit} \quad (\lim_{n\to\infty} f_n)(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Bei der Folge der Potenzen $f_n(x) = x^n$ hat diese Grenzfunktion $f = \lim f_n$ den Definitionsbereich $]-1, 1]$ und ist

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ falls } x < 1 \\ 1 \text{ falls } x = 1 \end{cases}$$

Bei der zuletzt definierten Funktionenfolge ist die Grenzfunktion die Nullfunktion $f \equiv 0$, definiert auf ganz $\mathbb{R}$.

Genauso, wie man unendliche Reihen reeller Zahlen definiert, kann man auch unendliche Reihen reeller Funktionen definieren. Ist die Funktionenfolge f_n auf dem Bereich $D \subset \mathbb{R}$ definiert, so setzt man

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n := \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu.$$

Die Grenzfunktion $\sum f_n$ existiert natürlich nur dort, wo die Reihe $\sum f_n(x)$ konvergiert.

In 1.3 haben wir die geometrische Reihe $\sum a^n$ diskutiert. Wenn wir den Parameter $a \in \mathbb{R}$ als Variable auffassen, erhalten wir die unendliche Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \text{ konvergent auf }]-1, 1[$$

.

Definition 2.4 *Eine Reihe der Form*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

heißt Potenzreihe. *Die Zahlen* $c_n \in \mathbb{R}$ *heißen ihre* Koeffizienten. *Allgemeiner nennt man eine Reihe der Form*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt a.

Die einfachste nichttriviale, und zugleich die wichtigste Potenzreihe ist die geometrische Reihe $\sum x^n$. Potenzreihen brauchen ja nicht für alle $x \in \mathbb{R}$ zu konvergieren, obwohl ihre Partialsummen alle den Definitionsbereich $\mathbb{R}$ haben. Deswegen ist es wichtig, den Konvergenzbereich einer Potenzreihe zu ermitteln, d.h., die Menge der $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihe konvergiert. (Der Konvergenzbereich der geometrischen Reihe ist das offene Intervall $]-1,1[$). Und in den allermeisten Fällen wird der Konvergenzbeweis für eine Potenzreihe durch Vergleich mit der geometrischen Reihe geführt. Das geschieht z.B. auch im Beweis des folgenden Satzes.

Satz 2.2 (Lemma von Abel) *Die Potenzreihe* $\sum c_n x^n$ *konvergiere im Punkt* x_0. *Dann konvergiert sie auch in allen Punkten* x *des offenen Intervalls* $]-|x_0|, |x_0|[$.

Beweis. Weil die Reihe nach Voraussetzung in x_0 konvergiert, müssen ihre Summanden $c_n x_0^n$ nach Satz 1.9 eine Nullfolge bilden. Insbesondere sind sie beschränkt: Es gibt ein $C \in \mathbb{R}$ mit $|c_n x_0^n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < |x_0|$ ist dann also

$$|c_n x^n| = \left| c_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0} \right)^n \right| \leq C \cdot q^n$$

mit $q := |x/x_0| < 1$. Die Konvergenz der Reihe $\sum c_n x^n$ folgt dann aus dem Majorantenkriterium mit der geometrischen Reihe $\sum C \cdot q^n = C \cdot \sum q^n$ als Majorante. $\square$

Dieses Lemma von Abel hat eine einschneidende Konsequenz für Konvergenzbereiche von Potenzreihen:

Satz 2.3 (Konvergenzintervalle) *Der Konvergenzbereich*

$$D = \{x \in \mathbb{R} : \sum c_n x^n \text{ konvergiert}\}$$

einer um den Nullpunkt entwickelten Potenzreihe ist

- *entweder nur der Nullpunkt* $x = 0$,
- *oder ein Intervall symmetrisch zum Nullpunkt, also ein Intervall der Form* $[-r, r]$, $[-r, r[$, $]-r, r]$ *oder* $]-r, r[$ *mit* $0 < r \in \mathbb{R}$,
- *oder die ganze reelle Achse.*

Beweis. Der Konvergenzbereich D ist nie leer, weil die Reihe mindestens für $x = 0$ ja konvergiert. Wenn der Konvergenzbereich $D \subset \mathbb{R}$ nicht beschränkt ist, so gibt es für jedes $N \in \mathbb{N}$ ein x_0, in dem die Reihe konvergiert, mit $|x_0| > N$. Nach dem Lemma von Abel konvergiert sie dann auf jedem Intervall $[-N, N]$ mit $N \in \mathbb{N}$. Die Vereinigung all dieser Intervalle ist die ganze reelle Achse $\mathbb{R}$.

Falls der Konvergenzbereich D beschränkt ist, so sei $x_s := \sup(D)$ und $x_i := \inf(D)$. (Diese Zahlen existieren nach Satz 0.5.) Wegen $0 \in D$ ist $x_s \geq 0$ und $x_i \leq 0$. Aus dem Lemma von Abel folgt die Konvergenz der Potenzreihe auf den Intervallen $]-x_s, x_s[$ und $]x_i, -x_i[$. Wegen der Defintion von Supremum und Infimum muss dann $x_i \leq -x_s$ und $-x_i \leq x_s$ gelten, also ist $x_i = -x_s$. Wir setzen $r := x_s$. Je nachdem ob die Potenzreihe in den Endpunkten des Intervalls $[-r, r]$ auch noch konvergiert, ist D eines der vier oben angegebenen Intervalle. □

Das Lemma von Abel gilt natürlich nicht nur für Potenzreihen $\sum c_n x^n$, die um den Nullpunkt entwickelt sind, sondern auch für Potenzreihen $\sum c_n (x-a)^n$ mit einem beliebigen Entwicklungspunkt $a \in \mathbb{R}$: Konvergiert eine solche Reihe in einem Punkt $x_0 \neq a$, dann auch in allen Punkten x mit $|x-a| < |x_0 - a|$. Der Konvergenzbereich ist dann ein Intervall mit dem Entwicklungspunkt a als Mittelpunkt.

Definition 2.5 *Die Zahl r im soeben bewiesenen Korollar heißt* Konvergenzradius *der Potenzreihe.*

Beispiel 2.15 *Konvergenzbereich der Exponentialreihe*

$$exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

bestimmen. (Diese wichtige Funktion werden wir uns später noch sehr genau ansehen.) Bei Potenzreihen funktioniert meist das Quotientenkriterium am besten: Die Summanden sind hier $a_n = x^n/n!$ und der Quotient zweier aufeinanderfolgender Summanden ist (falls $x \neq 0$)

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot x^n}\right| = \left|\frac{x}{n+1}\right| = \frac{|x|}{n+1}.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n+1 > 2|x|$ ist der Quotient also $< q := 1/2$ und somit konvergiert die Reihe. Sie konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$, der Konvergenzbereich ist also ganz $\mathbb{R}$.

Potenzreihen kann man addieren und subtrahieren, wie man eben konvergente Reihen addiert und subtrahiert:

$$\sum a_n x^n \pm \sum b_n x^n = \sum (a_n \pm b_n) x^n.$$

Natürlich muss man auf den Konvergenzbereich achten! Weil Summanden, die bei der Konvergenz stören, sich gegenseitig wegheben können, kann der neue Konvergenzradius größer werden. Aber er ist auf jeden Fall nicht kleiner als der kleinere der Konvergenzradien der beiden addierten (subtrahierten) Reihen.

Auch multplizieren kann man Potenzreihen in einigermaßen übersichtlicher Form. Dazu ist das Cauchy-Produkt ideal.

Beispiel 2.16 *Schauen wir uns als Beispiel das Quadrat der geometrischen Reihe an:*

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)^2 &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} x^l\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} x^k x^{n-k}\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} x^n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot x^n.
\end{aligned}
$$

Es ist wieder eine Potenzreihe herausgekommen.

Aber dazu ist einiges zu sagen: Damit wir das Cauchy-Produkt anwenden können, müssen die beiden multiplizierten Reihen absolut konvergieren. Im Beweis des Lemmas von Abel stehen aber überall Absolutstriche. In Wirklichkeit haben wir dort bewiesen, dass *Potenzreihen im Inneren ihres Konvergenzintervalls absolut* konvergieren. Das Cauchy-Produkt von Potenzreihen ist also erlaubt. Damit ist dann auch die Produktreihe $\sum(n+1)\cdot x^n$ auf dem Intervall $]-1,1[$ konvergent. Kann man die Konvergenz dieser Reihe auch direkt sehen? Dies beantwortet der folgende Satz:

Satz 2.4 (Modifizierte Potenzreihen) *Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ konvergiere auf dem Intervall $]-r,r[$ mit $r>0$. Dann konvergieren auf diesem Intervall auch die modifizierten Reihen*

$$\sum(n-1)\cdot c_n x^n,\ \sum n\cdot c_n x^n, \sum(n+1)\cdot c_n x^n, \quad \textit{und} \quad \sum c_n x^{n-1},\ \sum c_n x^{n+1}.$$

Beweis. Wir orientieren uns am Beweis des Lemmas von Abel: Dazu wählen wir eine Punkt x_0 mit $0<x_0<r$ im Innern des Konvergenzintervalls und zeigen die Konvergenzaussagen auf dem Intervall $]-x_0,x_0[$. Weil wir das für jedes $x_0<r$ machen können, folgt die Behauptung dann auf dem ganzen Intervall $]-r,r[$.

Nach Voraussetzung gibt es also ein C mit $|c_n x_0^n|<C$ für alle n. Daraus folgt z.B.

$$|n\cdot c_n x^n| = n\cdot|c_n x_0^n|\cdot\left|\frac{x}{x_0}\right|^n \le nCq^n$$

mit $q:=x/x_0<1$. Eine Majorante der Reihe $\sum n\cdot c_n x^n$ ist also die Reihe $C\cdot\sum nq^n$. Auf diese Reihe wollen wir das Quotientenkriterium anwenden und berechnen

$$\frac{(n+1)q^{n+1}}{nq^n} = \frac{n+1}{n}q^n \to q \quad (n\to\infty).$$

Wählen wir jetzt eine Zahl p zwischen q und 1, etwa $p:=(q+1)/2<1$, so gilt ab einem gewissen N

$$\frac{(n+1)q^{n+1}}{nq^n} < p,$$

und die Majorante konvergiert nach dem Quotientenkriterium.

Ganz genauso geht es auch bei den beiden Reihen $\sum(n-1)\cdot c_n x^n$ und $\sum(n+1)\cdot c_n x^n$. Betrachten wir nun $\sum c_n x^{n-1}$:

$$|c_n x^{n-1}| = |c_n x_0^n|\cdot\frac{1}{x_0}\cdot\left|\frac{x}{x_0}\right|^{n-1} \le \frac{C}{x_0}\cdot q^{n-1}.$$

Bis auf den Faktor C/x_0 haben wir als Majorante die konvergente geometrische Reihe $\sum q^n$. Bei der Reihe $\sum c_n x^{n+1}$ tritt $C\cdot x_0$ als Faktor auf. $\square$

Aufgabe 2.2 (NV) *Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Reihen:*

$$\textbf{a)}\ \sum \frac{(-1)^k}{x^k} \ \textit{wobei}\ x \neq 0, \quad \textbf{b)}\ \sum \frac{x^n}{1+x^{2n}}, \quad \textbf{c)} \sum \frac{n^2}{2^n} x^n?$$

Aufgabe 2.3 (NV) *Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Reihen und stellen Sie die Werte dieser Reihen in ihrem Konvergenzbereich als rationale Funktionen dar:*

$$\textbf{a)}\ \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)x^n, \quad \textbf{b)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Aufgabe 2.4 *Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}.$$

Aufgabe 2.5 *Bestimmen Sie die Konvergenzradien der Potenzreihen*

$$\textbf{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad \textbf{b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1}, \quad \textbf{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

2.3 Stetigkeit von Funktionen

Es sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir betrachten die Funktion f in der Nähe eines festen Punktes $x_0 \in D$ ihres Definitionsbereichs. Wir wollen den Wert $f(x_0)$ vergleichen mit den Werten $f(x)$ der Funktion in Punkten $x \in D$ 'nahe bei' x_0. Die Formulierung 'der Punkt x liegt nahe bei x_0' ist natürlich mathematisch sinnlos. Aber wenn wir den Punkt x in einer Folge gegen x_0 konvergieren lassen, wird Sinn daraus. Wir betrachten also Folgen (x_n) reeller Zahlen $x_n \in D$ mit $x_n \neq x_0$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Beispiel 2.17 *Wir betrachten die Heavysidesche Sprungfunktion*

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ \textit{für}\ x < 0 \\ 1 \ \textit{für}\ x \geq 0 \end{cases}$$

im Punkt $x_0 = 0$. Die Folge $(x_n) = (1/n)_{n=1,2,3,\ldots}$ konvergiert gegen $x_0 = 0$ und es ist

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 = f(0) \qquad \textit{(konstante Folge)}$$

weil $x_n > 0$ für alle n. Die Folge $(y_n) = (-1/n)$ konvergiert auch gegen $x_0 = 0$, aber von links: $y_n < 0$ für alle n. Deswegen ist

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 \neq f(0) \qquad \textit{(konstante Folge).}$$

Definition 2.6 *Es sei $x_0 \in D$ ein Punkt derart, dass es mindestens eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Punkten $x_n \in D$, $x_n \neq x_0$, gibt mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Die Zahl $c \in \mathbb{R}$ heißt* Grenzwert von f für $x \to x_0$*, in Zeichen*

$$c = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D \\ x \neq x_0}} f(x),$$

wenn $c = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ für jede *Folge (x_n) von Punkten $x_n \in D$, die gegen x_0 konvergiert.*

Um unsere Notation nicht zu überfrachten, lassen wir das meiste von dem, was unter dem Grenzwertzeichen steht, in Zukunft weg, und schreiben einfacher

$$c = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

Beispiel 2.18 *Die Heavysidesche Sprungfunktion f hat für $x \to 0$ keinen Grenzwert! Denn Falls $\lim_{x\to 0} f(x) = c$ existieren würde, dann wäre $c = \lim f(x_n)$ für jede Nullfolge (x_n). Insbesondere würde für die beiden soeben diskutierten Folgen $(x_n) = (1/n)$ und $(y_n) = (-1/n)$ gelten:*

$$1 = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = c = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = 0,$$

Widerspruch!

Beispiel 2.19 *Sei jetzt $f(x) = c$ eine konstante Funktion, ohne Heavysideschen Sprung. Dann ist für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ und alle Folgen $(x_n) \to x_0$*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c = f(x_0).$$

Der Grenzwert von f für $x \to x_0$ existiert in allen Punkten $x_0 \in \mathbb{R}$.

Beispiel 2.20 *Sei als nächstes $f(x) = x$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. Für jede Folge (x_n) mit $\lim(x_n) = x_0$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 = f(x_0).$$

Auch hier existiert der Grenzwert von f für $x \to x_0$ in allen Punkten $x_0 \in \mathbb{R}$.

Beispiel 2.21 *Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen, und sei $x_0 \in D$ mit $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ und $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$. Aus den Grenzwertrechenregeln für Folgen (Satz 1.2) folgt*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) &= a \pm b \\
\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) &= a \cdot b \\
\lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) &= \frac{a}{b}, \text{ falls } g(x) \neq 0 \text{ auf } D.
\end{aligned}$$

Beispiel 2.22 *Behauptung: Für jedes Polynom $p(x)$ und alle $x_0 \in \mathbb{R}$ existiert der Grenzwert von p für $x \to x_0$ und*

$$\lim_{x\to x_0} p(x) = p(x_0).$$

Beweis. Die Behauptung ist richtig für das konstante Polynom $p(x) = c$ und für das Polynom $p(x) = x$. Aus diesen beiden Polynomen kann man jedes Polynom durch endlich viele Multiplikationen und endlich viele Additionen aufbauen. Wendet man Beispiel 2.21 auf diese Additionen und Multiplikationen an, so ergibt sich die Behauptung.

Beispiel 2.23 *Genauso folgt aus Beispiel 2.21: Für jede rationale Funktion* $f(x) = p(x)/q(x)$ *und jede Zahl* $x_0 \in \mathbb{R}$ *mit* $q(x_0) \neq 0$ *existiert* $\lim_{x \to x_0} f(x)$ *und stimmt mit dem Funktionswert* $f(x_0)$ *überein.*

Definition 2.7 *Eine Funktion* $f : D \to \mathbb{R}$ *heißt* stetig *in einem Punkt* $x_0 \in D$*, wenn* $\lim_{x \to x_0} f(x)$ *existiert und mit dem Funktionswert* $f(x_0)$ *übereinstimmt:*

$$\lim_{x \to x_0, x \in D} = f(x) = f(x_0).$$

In den Beispielen 2.17-2.21 haben wir gesehen: Die Heavysidesche Sprungfunktion ist nicht stetig (also unstetig) im Nullpunkt. Polynome sind überall stetig. Rationale Funktionen sind überall stetig, wo sie definiert sind.

Beispiel 2.24 *Zur Abschreckung noch ein ganz besonders hässliches Gegenbeispiel: Die Dirichletfunktion*

$$f(x) := \begin{cases} 1 \text{ für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ für } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Jede irrationale Zahl $x_0 \notin \mathbb{Q}$ *kann man durch endliche Dezimalbrüche* x_n*, also durch eine Folge rationaler Zahlen* $x_n \in \mathbb{Q}$ *approximieren. Für eine solche Folge ist*

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} 1 = 1 \neq 0 = f(x_0).$$

Deswegen ist f *in allen irrationalen Zahlen* x_0 *unstetig. Aber* f *ist auch in allen rationalen Zahlen* x_0 *unstetig. Dazu benützen wir, dass die Zahl* $\sqrt{2}$ *keine rationale Zahl ist. Dann sind auch alle Zahlen* $\sqrt{2}/n$ *irrational, ebenso wie die Zahlen* $x_n := x_0 + \sqrt{2}/n$*. Diese Folge* (x_n) *konvergiert aber gegen* x_0 *und wir sehen*

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} 0 = 0 \neq 1 = f(x_0).$$

Die Dirichletfunktion ist also überall definiert, aber nirgends stetig.

Dass die zuletzt besprochene Funktion eine richtige Funktion sein soll, dass hätte man bis zur Mitte des 19. Jahrhunderts nicht gegelaubt: Zu einer anständigen Funktion gehörte eine anständige Art, sie hinzuschreiben, oder sie zu erzeugen. Dirichlet war der erste, der sich die Freiheit nahm, auch Funktionen zu behandeln, die sich ein Mensch nicht mehr vorstellen kann. Wirklich vorstellen kann man sich ja seine Funktion beim besten Willen nicht.

Halten wir fest: Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist stetig in einem Punkt $x_0 \in D$, wenn für jede gegen x_0 konvergente Folge von Punkten $x_n \in D$ gilt: $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$. Etwas komprimiert können wir das so schreiben:

$$f(\lim(x_n)) = \lim(f(x_n)).$$

In dieser Form ist das eine *Vertauschungsregel*: man kann Grenzübergang und Funktionsvorschrift vertauschen. Ob man zuerst zum Grenzwert x_0 übergeht, und dann dort den Funktionswert $f(x_0) = f(\lim x_n)$ nimmt, oder ob man zuerst die Funktionswerte $f(x_n)$ nimmt, und mit ihnen zum Grenzwert $\lim f(x_n)$ übergeht, beidemale kommt dasselbe heraus.

Definition 2.8 *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt* stetig schlechthin *(oder stetig auf ihrem ganzen Definitionsbereich, oder einfach stetig auf D), wenn sie in allen Punkten $x_0 \in D$ stetig ist.*

Satz 2.5 (Stetigkeit und algebraische Rechenoperationen) *Die Funktionen $f, g : D \to \mathbb{R}$ seien stetig. Dann sind auch die Funktionen $f \pm g$ und $f \cdot g$ stetig. Die Funktion f/g ist stetig, wo $g(x) \neq 0$ ist.*

Der Beweis ergibt sich sofort aus den Grenzwertrechenregeln in Beispiel 2.21 von oben.

Insbesondere sind Polynome auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und rationale Funktionen dort, wo sie definiert sind.

Satz 2.6 (Stetigkeit verknüpfter Funktionen) *Es sei $g : D \to \mathbb{R}$ stetig, und die Funktion f sei stetig auf dem Wertebereich $W \subset \mathbb{R}$ von g. Dann ist $f \circ g : D \to \mathbb{R}$ stetig.*

Beweis. Wir fixieren einen Punkt $x_0 \in D$. Für jede Folge (x_n) von Punkten $x_n \in D$ mit $\lim(x_n) = x_0$ gilt $\lim g(x_n) = g(x_0)$ wegen der Stetigkeit von g in x_0. Außerdem gilt $\lim f(g(x_n)) = f(\lim g(x_n)) = f(g(x_0))$ wegen der Stetigkeit von f in $g(x_0)$. $\square$

Satz 2.7 ($\epsilon - \delta$-Stetigkeit) *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig in $x_0 \in D$, wenn sie die folgende Eigenschaft hat:*

Zu jedem $\epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$, existiert ein $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, mit:

$$x \in D \text{ und } |x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Man kann diese Eigenschaft auch die $\epsilon - \delta$-Stetigkeit im Punkt x_0 nennen, und die Eigenschaft, die wir bisher als Stetigkeit angesehen haben die Folgen-Stetigkeit im Punkt x_0. Beide Eigenschaften sind äquivalent. Warum soll man dann ihre Äquivalenz beweisen? Manchmal ist es eben vorteilhafter, mit der einen zu arbeiten, manchmal mit der anderen.

Beweis. $\epsilon - \delta$-Stetigkeit $\Longrightarrow$ Folgenstetigkeit: Die Funktion f habe die $\epsilon - \delta$-Eigenschaft im Punkt x_0 ihres Definitionsbereichs. Sei (x_n) eine Folge von Punkten $x_n \in D$ mit $\lim(x_n) = x_0$. Wir müssen $\lim(f(x_n)) = f(x_0)$ zeigen.

Sei dazu $\epsilon > 0$ vorgegeben. Nach Voraussetzung gibt es eine $\delta > 0$ mit $|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0) < \epsilon$. Wegen $(x_n) \to x_0$ gibt es ein $N(\delta) \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n > N(\delta)$ gilt: $|x_n - x_0| < \delta$. Für diese $n > N(\delta)$ ist dann wegen der $\epsilon - \delta$-Eigenschaft

$$|f(x_n) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Damit ist $\lim(f(x_n)) = f(x_0)$ nachgewiesen.

Sei jetzt umgekehrt die Folgenstetigkeit in x_0 vorausgesetzt und die $\epsilon - \delta$-Eigenschaft zu zeigen. Das geht leider nur mit einem Widerspruchsbeweis. Nehmen wir also an, die $\epsilon - \delta$-Eigenschaft gelte (gälte?) nicht. Was bedeutet das? Das bedeutet, es gilt nicht

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D : \quad |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Das logische Gegenteil dieser logischen Aussage ist aber

$$\exists \epsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in D : \quad |x - x_0| < \delta \text{ und } |f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon.$$

Wir nehmen also an, dieses Gegenteil gelte.

In diesem logischen Gegenteil kommen alle $\delta > 0$ vor. Nehmen wir z.B. $\delta = 1/n$. Dann gibt es also ein $x_n \in D$ mit $|x_n - x_0| < \delta = 1/n$ und $|f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon$. Weil $(1/n)$ eine Nullfolge ist, konvergiert die Folge dieser x_n gegen x_0. Nach Voraussetzung konvergiert dann die Folge $f(x_n)$ gegen $f(x_0)$. Es gibt also ein $N = N(\epsilon)$ mit $|f(x_n) - f(x_0| < \epsilon$ für alle $n > N$. Das steht aber im Widerspruch zu der Eigenschaft $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \epsilon$, die alle Folgenglieder nach Konstruktion besitzen. Widerspruch! $\square$

Als Anwendung der $\epsilon - \delta$-Stetigkeit beweisen wir eine Hilfsaussage, die wir gelegentlich in Beweisen brauchen:

Satz 2.8 (Lemma) *Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sei stetig und $x_0 \in D$ ein Punkt mit $f(x_0) > 0$. Dann gibt es eine δ-Umgebung von x_0 auf der auch $f(x) > 0$ gilt.*

Beweis. Wir setzen $\epsilon := f(x_0)/2$ in der $\epsilon - \delta$-Eigenschaft. Dann gibt es also ein $\delta > 0$ mit

$$x \in D,\ |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2}.$$

Insbesondere ist also

$$-(f(x) - f(x_0)) = f(x_0) - f(x) < \frac{f(x_0)}{2} \quad \text{und} \quad f(x) > f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2} > 0.$$

$\square$

Genauso beweist man $f(x) < 0$ für $f(x_0) < 0$ und beides zusammen ergibt $f(x) \neq 0$ für $f(x_0) \neq 0$.

2.4 Eigenschaften stetiger Funktionen

2.4.1 Stetigkeit und Konvergenz von Funktionenfolgen

In 2.2 haben wir sehr ausführlich die Folge (x^n) der Potenzfunktionen auf Konvergenz untersucht. Sie konvergiert auf dem halboffenen Intervall $]-1, 1]$, und zwar gegen die Funktion f definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 0 \text{ für } -1 < x < 1 \\ 1 \text{ für } x = 1. \end{cases}$$

Diese Grenzfunktion ist im Punkt $x = 1$ unstetig:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 0 \neq 1 = f(1).$$

Die Grenzfunktion einer konvergenten Folge von stetigen Funktionen kann also unstetig sein!

Nun liegt hier die Unstetigkeitsstelle am Rande des Konvergenzbereichs, und man könnte meinen, das sei der Grund für die Unstetigkeit. Aber das ist nicht so! Wir betrachten als weiteres Beispiel die Funktionenfolge (f_n) auf dem Intervall $[0, \infty[$ definiert durch

$$f_n(x) := \frac{x^n}{1 + x^n}.$$

Wir wissen

- $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$ für $0 \le x < 1$. Mit den Grenzwertrechenregeln folgt daraus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^n} = \frac{\lim_{n\to\infty} x^n}{1+\lim_{n\to\infty} x^n} = \frac{0}{1+0} = 0$$

  für $0 \le x < 1$.

- Für $x = 1$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 1$ und wir finden hier

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^n} = \frac{\lim_{n\to\infty} x^n}{1+\lim_{n\to\infty} x^n} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

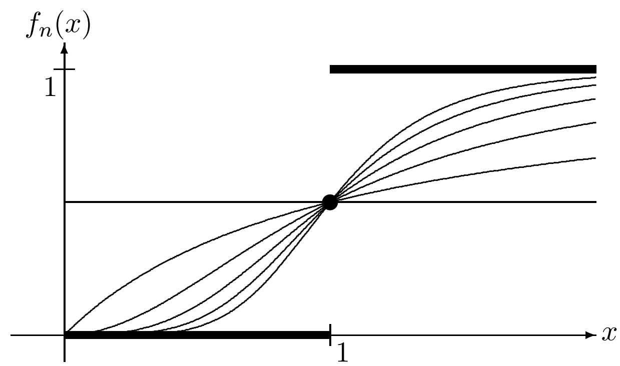
- Wenn $x > 1$ ist, dann ist $1/x < 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty}(1/x^n) = 0$. Mit einem kleinen Trick erhalten wir jetzt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1/x^n+1} = \frac{1}{\lim(1/x_n)+1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert also auf dem ganzen Intervall $[0,\infty[$, und zwar gegen die Grenzfunktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \le x < 1 \\ 1/2 & \text{für } x = 1 \\ 1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

Im Inneren des Konvergenzbereichs, bei $x = 1$ hat diese Funktion eine richtige, schöne Unstetigkeitsstelle.



Dass Grenzfunktionen von Folgen stetiger Funktionen möglicherweise unstetig sind, ist ein ernstes Problem für die Analysis: Wir werden nämlich wichtige Funktionen durch Potenzreihen definieren, und brauchen die Stetigkeit dieser durch Potenzreihen dargestellten Funktionen. Das beweisen wir mit einem etwas schärferen Konvergenzbegriff:

Definition 2.9 *Die Folge (f_n) von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$* konvergiert *auf D* gleichmäßig *gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, wenn gilt: Zu jedem $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$ gibt es ein $N(\epsilon)$ derart, dass für alle $n > N(\epsilon)$ und alle $x \in D$ gilt $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.*

Was ist der Unterschied zwischen dieser gleichmäßigen Konvergenz, und der, die wir in 2.2 eingeführt, und dort punktweise Konvergenz genannt haben? Das sieht man am besten, wenn man beide Definitionen mit den logischen Symbolen formuliert, und die entsprechenden Teile der Definitionen untereinander schreibt:

$$\begin{array}{lllllll} \text{pktw. Konv.:} & \forall x \in D & \forall \epsilon > 0 & \exists N(\epsilon) & \forall n > N(\epsilon) & & |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \\ \text{glm. Konv.:} & & \forall \epsilon > 0 & \exists N(\epsilon) & \forall n > N(\epsilon) & \forall x \in D & |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \end{array}$$

Bei der punktweisen Konvergenz kann das $N(\epsilon)$ auch noch vom x abhängen, man könnte $N(\epsilon, x)$ schreiben, bei der gleichmäßigen Konvergenz ist $N(\epsilon)$ unabhängig von x, für alle $x \in D$ dasselbe.

Mit dieser gleichmäßigen Konvergenz kann man die Stetigkeit der Grenzfunktion beweisen:

Satz 2.9 (Stetigkeit der Grenzfunktion) *Die Folge (f_n) stetiger Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$ konvergiere auf D gleichmäßig gegen die Grenzfunktion $f : D \to \mathbb{R}$. Dann ist f auf D stetig.*

Beweis. Wir zeigen für jeden Punkt $x_0 \in D$ die $\epsilon - \delta$-Eigenschaft der Funktion f. Dazu geben wir ein $\epsilon > 0$ beliebig vor. Nach Definition der gleichmäßigen Konvergenz gibt es ein $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ so, dass für $n > N(\epsilon)$ und alle $x \in D$ gilt $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon/3$. Ein solches f_n mit $n > N(\epsilon)$ halten wir fest. Weil f_n in x_0 stetig ist, gibt es ein δ mit $x \in D,\ |x - x_0| < \delta \implies |f_n(x) - f_n(x_0)| < \epsilon/3$. Für diese x ist dann auch

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |(f(x) - f_n(x)) + (f_n(x) - f_n(x_0)) + (f_n(x_0) - f(x_0))| \\ &\leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{<\epsilon/3} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(x_0)|}_{<\epsilon/3} + \underbrace{|f_n(x_0) - f(x_0)|}_{<\epsilon/3} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

Damit ist die $\epsilon - \delta$-Eigenschaft für die Grenzfunktion f im Punkt x_0 nachgewiesen. □

Satz 2.10 (Stetigkeit von Potenzreihenfunktionen) *Eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergiere auf dem Intervall $]-r, r[$ gegen die Funktion f. Dann ist $f : D \to \mathbb{R}$ stetig.*

Beweis. Wir zeigen, dass die Partialsummen $\sum_{\nu=0}^{n}$ der Potenzreihe auf jedem Teilintervall $]-p, p[$ mit $0 < p < r$ gleichmäßig gegen f konvergieren. Dann ist also $f|]-p, p[$ stetig. Jeder Punkt $x_0 \in]-r, r[$ liegt aber in einem solchen Intervall $]-p, p[$. (Man nehme etwa $p := (|x_0| + r)/2$.) Also ist f in jedem Punkt $x_0 \in]-r, r[$ stetig.

Der Nachweis der gleichmäßigen Konvergenz ist aber beim Beweis des Lemmas von Abel schon erbracht worden. Wiederholen wir diesen Beweis. Zuerst schieben wir noch ein q mit $p < q < r$ zwischen p und r ein. Weil $q < r$ gewählt ist, konvergiert die Potenzreihe in q und die Folge ihrer Summanden ist beschränkt: Es gibt ein $C \in \mathbb{R}$ mit $|a_n q^n| < C$ für alle n. Für $|x| < p$ folgt dann

$$|a_n x^n| = |a_n q^n| \cdot \left|\frac{x}{q}\right|^n < C \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^n.$$

Also ist die konvergente geometrische Reihe $\sum (p/q)^n$ unabhängig von x, für alle $x \in (-p, p)$ eine Majorante der Potenzreihe.

Ist $\epsilon > 0$ vorgegeben, so gibt es für diese Majorante ein $N = N(\epsilon/C)$ mit

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} \left(\frac{p}{q}\right)^{\nu} < \frac{\epsilon}{C},$$

falls $n > N$. Deswegen ist dann auch für alle $|x| < p$ und $n > N$

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n} a_n x^n - \sum_{\nu=0}^{\infty} a_n x^n\right| = \left|\sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_n x^n\right| \leq \sum_{\nu=n+1}^{\infty} |a_n x^n| \leq C \cdot \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \left(\frac{p}{q}\right)^n < C \cdot \frac{\epsilon}{C} = \epsilon.$$

Die Folge der Partialsummen konvergiert auf $]-p, p[$ gleichmäßig. □

Satz 2.11 (Eindeutigkeit der Potenzreihendarstellung) *Die beiden Potenzreihen $\sum a_n x^n$ und $\sum b_n x^n$ mögen auf einem Intervall $]-r, r[,\ r > 0$ gegen dieselbe Funktion f konvergieren. Dann stimmen ihre Koeffizienten überein:*

$$a_n = b_n \text{ für alle } n.$$

Beweis (vollständige Induktion nach n).

Induktionsanfang $n = 0$: Setzen wir in die Potenzreihe $\sum a_n x^n$ den Entwicklungspunkt $x = 0$ ein, so sind für $\nu \geq 1$ alle Potenzen $x^\nu = 0$, alle Summanden $a_\nu x^\nu$ mit $\nu \geq 1$ fallen weg. Es folgt

$$f(0) = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu\right)(0) = a_0.$$

Ebenso folgt $b_0 = f(0)$ und wir sehen $a_0 = b_0$.

Indunktionsannahme: $a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ \ldots,\ a_n = b_n$.

Induktionsschluss. Es sei g das Polynom $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu x^\nu$. Dieses Polynom ist der Anfang beider Potenzreihen bis zur Potenz n. Der Reihenrest ist dann

$$\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu\right) - g(x) = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu x^\nu.$$

Dieser Reihenrest konvergiert gegen die Funktion $f(x) - g(x)$. Gegen dieselbe Funktion konvergiert der Reihenrest der zweiten Potenzreihe. Wir haben also

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu x^\nu = f(x) - g(x) = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} b_\nu x^\nu.$$

Daraus folgt

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n+1+\nu} x^\nu = \frac{1}{x^{n+1}} \cdot \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu x^\nu = \frac{f(x) - g(x)}{x^{n+1}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{n+1+\nu} x^\nu.$$

Leider folgt dies nur für diejenigen x, wo $(f(x) - g(x))/x^{n+1}$ definiert ist, d.h. also nur für $x \neq 0$. Macht nichts! Denn weil die Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n+1+\nu} x^\nu$ außerhalb des Nullpunkts konvergiert, muss sie eine in der Nähe des Nullpunkts stetige Funktion darstellen (Satz 2.10). Die beiden Potenzreihen

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n+1+\nu} x^\nu \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{n+1+\nu} x^\nu$$

stellen also im Nullpunkt stetige Funktionen dar, die außerhalb des Nullpunkts übereinstimmen. Dann müssen auch ihre Werte im Nullpunkt übereinstimmen. Dies sind aber die Koeffizienten a_{n+1} und b_{n+1}. □

2.4.2 Der Zwischenwertsatz

Satz 2.12 (Zwischenwertsatz, erste Version) *Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei stetig mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann gibt es ein $p \in (a, b)$ mit $f(p) = 0$.*

Beweis (Intervall-Halbierung): Wir betrachten den Mittelpunkt $m := (a+b)/2$ des Intervalls $[a, b]$. Es gibt drei Möglichkeiten:

1) Falls $f(m) = 0$ ist, sind wir fertig;

2) Falls $f(m) > 0$ ist, setzen wir $a_1 := a$, $b_1 := m$ und haben ein Intervall $[a_1, b_1] \subset [a, b]$ der Länge $(b - a)/2$ und $f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$.

3) Falls $f(m) < 0$ ist, setzen wir $a_1 := m$, $b_1 := b$ und haben ein Intervall $[a_1, b_1]$ mit genau denselben Eigenschaften wie in 2).

Diese Konstruktion wiederholen wir immer wieder. Entweder bricht die die Konstruktion mit einem Mittelpunkt m ab, wo $f(m) = 0$ ist. Oder wir bekommen zwei unendliche Folgen $(a_n) < (b_n) \in [a, b]$ mit:

i) $b_n - a_n = (b - a)/2^n$,

ii) $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$,

iii) $[a_m, b_m] \subset [a_n, b_n]$ für alle $m \geq n$.

Aus iii) und i) folgt $|a_m - a_n| < (b-a)/2^n$. Die Folge (a_n) ist also eine Cauchy-Folge und konvergiert gegen ein $p \in \mathbb{R}$ (Satz 1.1). Wegen $a \leq a_n < b$ ist auch $a \leq p \leq b$ (Satz 1.3) und der Grenzwert p gehört zum Intervall $[a, b]$. Wegen i) ist $(b_n - a_n)$ eine Nullfolge und p ist auch der Grenzwert der Folge (b_n). Wegen der Stetigkeit von f ist

$$f(p) = \lim f(a_n) = \lim f(b_n).$$

Weil $f(a_n) < 0$ ist für alle n, muss $f(p) \leq 0$ sein (Satz 1.3). Ebenso folgt $f(p) \geq 0$, weil $f(b_n) > 0$ ist für alle n. Dann kann nur $f(p) = 0$ sein. □

Satz 2.13 (Polynome ungeraden Grades) *Jedes Polynom*

$$a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + ... + a_1x + a_0$$

ungeraden Grades besitzt mindestens eine Nullstelle.

Beweis. O.B.d.A. sei der höchste Koeffizient $a_{2n+1} > 0$, sonst betrachten wir das Polynom $-f$.

Wir zeigen $f(x) > 0$ für sehr große $x > 0$ und $f(x) < 0$ für sehr große negative x. Dann folgt die Existenz einer Nullstelle von f aus dem Zwischenwertsatz.

Für $x > 0$ betrachten wir die Funktion

$$\frac{f(x)}{x^{2n+1}} = a_{2n+1} + \frac{a_{2n}}{x} + ... + \frac{a_1}{x^{2n}} + \frac{a_0}{x^{2n+1}} = a_{2n+1} + g(x)$$

mit

$$g(x) = \frac{f(x)}{x^{2n+1}} - a_{2n+1} = \frac{a_{2n}}{x} + ... + \frac{a_1}{x^{2n}} + \frac{a_0}{x^{2n+1}}.$$

Falls $x > K > 1$, ist

$$|g(x)| \quad = \quad \left| \frac{a_{2n}}{x} + ... + \frac{a_1}{x^{2n}} + \frac{a_0}{x^{2n+1}} \right|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left|\frac{a_{2n}}{x}\right| + ... + \left|\frac{a_1}{x^{2n}}\right| + \left|\frac{a_0}{x^{2n+1}}\right| \\
&\leq \left|\frac{a_{2n}}{K}\right| + ... + \left|\frac{a_1}{K}\right| + \left|\frac{a_0}{K}\right| \\
&\leq \frac{2n+1}{K} max\{|a_{2n}|, ..., |a_1|, |a_0|\}
\end{aligned}
$$

Wenn wir K genügend groß wählen, ist also für $x > K$

$$
\begin{aligned}
|g(x)| &< \frac{a_{2n+1}}{2} \\
a_{2n+1} + g(x) &\geq a_{2n+1} - |g(x)| \\
&> \frac{a_{2n+1}}{2} \\
f(x) &= x^{2n+1} \cdot (a_{2n+1} + g(x)) \\
&> 0.
\end{aligned}
$$

Für große negative x geht die Abschätzung $f(x) < 0$ ganz analog, weil die ungerade Potenz x^{2n+1} für $x < 0$ negativ ist. □

Satz 2.14 (Zwischenwertsatz, allgemeine Version) *Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei stetig. Ist $c \in \mathbb{R}$ ein Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$, dann existiert ein $p \in [a, b]$ mit $f(p) = c$.*

Beweis. Ist etwa $f(a) < c < f(b)$, dann betrachten wir die Funktion $g := f - c$. Sie ist stetig auf $[a, b]$ mit $g(a) < 0$ und $g(b) > 0$. Also gibt es ein $p \in [a, b]$ mit $g(p) = 0$. Das heißt aber $f(p) = c$. □

2.4.3 Der Satz vom Maximum

Wir erinnern uns zunächst an das Maximum einer Menge $M \subset \mathbb{R}$, definiert in Def 0.5. Das ist eine Zahl $m \in M$ mit $x \leq m$ für alle $x \in M$. Eine Menge, die nach oben nicht beschränkt ist, hat kein Maximum. Selbst, wenn die Menge M nach oben beschränkt ist, braucht ihr Maximum nicht zu M zu gehören. Dann heißt es ja auch nicht Maximum, sondern Supremum.

Wir untersuchen dies jetzt für die Wertemenge $W \subset \mathbb{R}$ einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$.

Definition 2.10 *Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Zahl $m \in \mathbb{R}$ heißt* **Maximum** *der Funktion, wenn sie das Maximum der Wertemenge $W := f(D)$ von f ist. D.h. also:*

1) Alle Funktionswerte $f(x)$, $x \in D$, sind $\leq m$.

2) Die Zahl m gehört zur Wertemenge W, es gibt ein $p \in D$ mit $f(p) = m$.

Eine Funktion braucht kein Maximum zu haben. Dazu einige Beispiele:

Beispiel 2.25 *Die Funktion $f(x) = x$ auf $\mathbb{R}$ hat kein Maximum, weil sie nicht nach oben beschränkt ist.*

Beispiel 2.26 *Die Funktion $f(x) = x$ auf dem Definitionsintervall $]0, 1[$ ist zwar beschränkt, ihre Wertemenge ist wieder das offene Intervall $W =]0, 1[$. Dieses Intervall W hat zwar das Supremum 1, aber das gehört nicht zu W und ist kein Maximum.*

Beispiel 2.27 *Die Funktion $f(x) = 1/x$ auf dem Intervall $]0, \infty[$ ist (in der Nähe von $x = 0$) unbeschränkt, und hat deswegen kein Maximum.*

Beispiel 2.28 *Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch*

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{x} \text{ für } x \neq 0 \\ 0 \text{ für } x = 0 \end{cases}$$

ist in der Nähe von $x = 0$ unbeschränkt, obwohl sie dort überall definiert ist. Sie hat auch kein Maximum.

Satz 2.15 (Existenz des Maximums) *Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei stetig auf dem abgeschlossenen, endlichen Intervall $[a, b]$. Dann ist diese Funktion beschränkt und nimmt ihr Maximum und ihr Minimum an. D.h., es gibt Zahlen $p, q \in [a, b]$ mit*

$$\begin{aligned} f(p) &= sup\{f(x) : x \in [a, b]\} \\ f(q) &= inf\{f(x) : x \in [a, b]\} \end{aligned}$$

Beweis. Wir beweisen nur die Existenz des Maximums. Die Existenz des Minimums beweist man analog.

Es sei $W \subset \mathbb{R}$ die Wertemenge $f([a, b])$ der Funktion f. Wenn diese Menge nicht nach oben beschränkt ist, gibt es zu jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ ein $f(x) > n$. Wir wählen ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) > n$ aus, und nennen es x_n. Dann haben wir eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Punkten $x_n \in [a, b]$. Diese Folge ist beschränkt, weil das Intervall $[a, b]$ beschränkt ist, und hat nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge. Wir ersetzen die Folge (x_n) durch diese konvergente Teilfolge und haben $(x_n) \to p$ mit $f(x_n) > n$. Weil alle $x_n \leq b$ und $\geq a$ sind, ist auch $a \leq p \leq b$, d.h., $p \in [a, b]$. Aus der Stetigkeit von f folgt jetzt

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \to \infty} x_n) = f(p).$$

Das ist ein Widerspruch zu $f(x_n) > n$. Also ist die Wertemenge beschränkt.

Sei jetzt $m \in \mathbb{R}$ das Supremum der Wertemenge W. Dann gibt es eine Folge $w_n = f(x_n) \in W$, die gegen m konvergiert (s. Beispiel 1.7). Wieder können wir nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß die Folge durch eine konvergente Teilfolge ersetzen. Damit haben wir also eine Folge $(x_n) \to p \in [a, b]$ mit $f(x_n) \to m = sup(W)$. Wieder folgt $f(p) = m = sup(W)$ aus der Stetigkeit von f. □

Die Sätze 2.14 und 2.15 kann man in einem Satz zusammenfassen.

Satz 2.16 (Korollar zu den Sätzen 2.14 und 2.15) *Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes und beschränktes Intervall. Ist die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so ist ihre Wertemenge $W = f([a, b]) \subset \mathbb{R}$ wieder ein abgeschlossenes und beschränktes Intervall.*

Beweis. Nach Satz 2.15 gibt es Punkte p und q im Intervall $[a, b]$ mit $f(p) = \max(W)$ und $f(q) = \min(W)$. Damit liegt W im abgeschlossenen, beschränkten Intervall $[f(q), f(p)]$. Nach dem Zwischenwertsatz 2.14 gibt es zu jedem $c \in [f(q), f(p)]$ ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = c$. Deswegen gilt auch umgekehrt $[f(q), f(p)] \subset W$ und die Wertemenge W ist das Intervall $[f(q), f(p)]$. □

2.4.4 Umkehrfunktionen

Besonders wichtig ist der Fall, dass die Funktion f im eben bewiesenen Korollar ihr Definitionsintervall bijektiv auf das Bildintervall W abbildet. Dazu muss $f : [a, b] \to W$ nur noch injektiv sein, denn surjektiv ist f nach Definition der Wertemenge ja ohnehin schon. Eine besonders einfache Eigenschaft, die dies gewährleistet, ist die 'strenge Monotonie' der Funktion f.

Definition 2.11 *Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt*

- streng monoton steigend*, wenn*

$$x_1, x_2 \in D,\ x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2),$$

- streng monoton fallend*, wenn*

$$x_1, x_2 \in D,\ x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) > f(x_2),$$

Wenn in dieser Definition $\leq$, bzw. $\geq$ anstatt $<$, bzw. $>$ steht, so nennt man die Funktion f immer noch monoton, aber nicht mehr streng monoton.

Beispiel 2.29 *Die Potenzfunktionen x^n, $n = 1, 2, ..$ auf $]0, \infty[$ sind streng monoton steigend.*
Beweis durch Induktion nach n. Für $n = 1$ ist die Behauptung klar. Sei $x_1^n < x_2^n$ für $x_1 < x_2$ schon bewiesen, dann multiplizieren wir diese Ungleichung $x_1^n < x_2^n$ mit $0 < x_1 < x_2$ und erhalten $x_1^{n+1} < x_2^{n+1}$.

Beispiel 2.30 *Die Funktionen $1/x^n$, $n = 1, 2, ..$ sind streng monoton fallend auf der Halbachse $]0, \infty[$. Das liegt daran, dass sich beim Stürzen Ungleichungen umdrehen.*

Satz 2.17 (Stetigkeit und Umkehrfunktion) *Die Funktion $f : [a, b] \to [u, v]$ sei stetig und streng monoton mit Bildintervall $[u, v]$. Dann ist $f : [a, b] \to [u, v]$ bijektiv und die Umkehrfunktionen $f^{-1} : [u, v] \to [a, b]$ ist wieder stetig.*

Beweis. Dass f bijektiv ist, haben wir soeben bemerkt. Um zu sehen, dass $f^{-1} : [u, v] \to [a, b]$ wieder stetig ist, fixieren wir einen Punkt $y_0 \in [u, v]$ und lassen eine Folge von Punkten $y_n \in [u, v]$ gegen y_0 konvergieren. Wir müssen zeigen, dass die Folge $f^{-1}(y_n)$ gegen $f^{-1}(y_0)$ konvergiert. Wenn dies nicht so wäre, dann gäbe es ein $\epsilon > 0$ und unendlich viele n mit $|f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)| > \epsilon$. Diese y_n bilden wieder eine Folge und die zugehörigen Punkte $f^{-1}(y_n)$ bilden eine unendliche Folge im abgeschlossenen und beschränkten Intervall $[a, b]$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt sie eine konvergente Teilfolge $(f^{-1}(y_{n_i}))_{i \in \mathbb{N}}$. Sei etwa $x_0 := \lim_{i \to \infty} f^{-1}(y_{n_i})$. Aus $|f^{-1}(y_{n_i}) - f^{-1}(y_0)| > \epsilon$ folgt

$$|x_0 - f^{-1}(y_0)| = \lim_{i \to \infty} \left| f^{-1}(y_{n_i}) - f^{-1}(y_0) \right| \geq \epsilon.$$

Weil aber f im Punkt x_0 stetig ist, folgt

$$f(x_0) = f(\lim_{i \to \infty} f^{-1}(y_{n_i}) = \lim_{i \to \infty} f(f^{-1}(y_{n_i}))) = \lim_{i \to \infty} y_{n_i} = \lim_{n \to \infty} y_n = y_0.$$

Dann ist $f^{-1}(y_0) = x_0$, Widerspruch! $\square$

Satz 2.17 kann man auf die Potenzfunktionen x^n, $1 \leq n \in \mathbb{N}$ anwenden: Sie sind stetig und streng monoton wachsend und bilden das Intervall $[0, k]$ mit $k \in \mathbb{N}$ auf das Intervall $[0, k^n]$ ab. Nach Satz 2.17 gibte es eine stetige Umkehrfunktion, die man n-te Wurzelfunktion, in Zeichen $\sqrt[n]{x}$ oder $x^{1/n}$ nennt. Lässt man $k \in \mathbb{N}$ laufen, und bildet die Vereinigung $[0, \infty[$ aller Intervalle $[0, k]$, so ist die Vereinigung der Bildintervalle auch wieder die reelle Halbachse $[0, \infty[$. Deswegen sind diese Funktionen $\sqrt[n]{x}$ definiert und stetig auf der ganzen Halbachse.

Ich habe mir bisher keine große Mühe gegeben, diese Funktionen $\sqrt[n]{x}$, speziell die Quadratwurzel $\sqrt{x}$ für $x \geq 0$ zu definieren, weil die Existenz dieser Funktionen so einfach aus dem Zwischenwertsatz folgt.

2.4.5 Approximation durch Treppenfunktionen

Wir wollen jetzt folgenden Satz beweisen:

Satz 2.18 (Approximation durch Treppenfunktionen) *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Treppenfunktion $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit*

$$|f(x) - \varphi(x)| < \epsilon \textit{ für alle } x \in [a, b].$$

Wir sagen, die Treppenfunktion φ approximiert die stetige Funktion f. An sich ist eine Treppenfunktion ja viel unstetiger als eine stetige Funktion. Warum soll man eine schöne stetige Funktion durch hässliche unstetige Treppenfunktionen approximieren? Wir brauchen das halt später beim Integrieren.

Beweis von Satz 2.18. Wir benutzen die $\epsilon - \delta$-Eigenschaft von f: Zu jedem $x_0 \in [a, b]$ und jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta = \delta(x_0, \epsilon)$ mit: $x \in [a, b],\ |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Als erstes zeigen wir, dass wir das $\delta(\epsilon)$ unabhängig von $x_0 \in [a, b]$ finden können. Es gibt also zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta(\epsilon) > 0$ mit: $x, x_0 \in [a, b],\ |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Statt x_0 schreiben wir dann y, es ist ja in der Aussage nicht mehr festgehalten.

Wenn die Behauptung falsch wäre, gäbe es also ein $\epsilon > 0$ und zu jedem $\delta = 1/n$ Punkte $x_n, y_n \in [a, b]$ mit $|x_n - y_n| < 1/n$ und $|f(x_n) - f(y_n)| > \epsilon$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt die Folge (x_n) eine konvergente Teilfolge. Dann können wir auch gleich $(x_n) \to c \in [a, b]$ annehmen. Wegen

$$|y_n - c| \leq |y_n - x_n| + |x_n - c|$$

konvergiert auch die Folge y_n gegen c. Aus der Stetigkeit von f in c folgt

$$\lim_{n\to\infty} (f(x_n) - f(y_n)) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) - \lim_{n\to\infty} f(y_n) = c - c = 0,$$

ein Widerspruch zu $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$ für alle n. Damit ist unsere erste Aussage bewiesen.

Jetzt geben wir uns ein $\epsilon > 0$ vor. Dann gibt es nach dem soeben Bewiesenen ein $\delta > 0$ mit $x, y \in [a, b],\ |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$. Das Intervall $[a, b]$ zerlegen wir in n Teilintervalle der Länge $(b - a)/n$ durch Zwischenpunkte

$$t_\nu := a + \frac{\nu}{n}(b - a), \quad \nu = 0, ..., n.$$

Insbesondere ist $t_0 = a$ und $t_n = b$. Dabei wählen wir $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass $(b - a)/n < \delta$. Für alle x im Teilintervall $[t_\nu, t_{\nu+1})$ ist dann

$$x - t_\nu < \frac{b - a}{n} < \delta \quad \text{und} \quad |f(x) - f(t_\nu)| < \epsilon.$$

Wir setzen nun $c_\nu := f(t_\nu)$ für $\nu = 0, ..., n-1$ und definieren die Treppenfunktion φ durch

$$\varphi(x)|[t_\nu, t_{\nu+1}) := c_\nu, \quad (\nu = 0, ..., n-1) \text{ und } \varphi(b) := f(b).$$

Dann ist $|f(x) - \varphi(x)| < \epsilon$ auf jedem Teilintervall der Zerlegung, und damit für alle $x \in [a, b]$. $\square$

Aufgabe 2.6 *Bestimmen Sie die folgenden uneigentlichen Grenzwerte (Definition 2.12):*

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x}, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1+x},$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x^2}, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1+x^2},$

c) $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$

2.5 Die Exponentialfunktion und ihre Verwandten

In 2.2 haben wir als Beispiel für eine Potenzreihe die Exponentialreihe

$$exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + ...$$

betrachtet, und mit dem Quotientenkriterium gezeigt, dass sie für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert. Durch diese Reihe wird die *Exponentialfunktion exp* : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert. Weil sie durch eine konvergente Potenzreihe dargestellt wird, ist sie auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

Die wichtigste Eigenschaft der Exponentialfunktion ist ihre Funktionalgleichung.

Satz 2.19 (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion) *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

$$exp(x+y) = exp(x) \cdot \exp(y).$$

Beweis. Wir multiplizieren die Reihen für $exp(x)$ und $exp(y)$ unter Benutzung des Cauchy-Produkts, und verwenden unterwegs die binomische Formel:

$$\begin{aligned}
exp(x) \cdot exp(y) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{x^\nu}{\nu!} \cdot \frac{y^{n-\nu}}{(n-\nu)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{x^\nu y^{n-\nu}}{\nu!(n-\nu)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{k} x^\nu y^{n-\nu} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} \\
&= \exp(x+y).
\end{aligned}$$

$\square$

Der Wert $exp(0)$ der Exponentialfunktion ist der nullte Koeffizient $a_0 = 1$ der Exponentialreihe. Der Wert der Exponentialfunktion im Punkt $x = 1$ ist die Eulersche Zahl

$$e := exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Wendet man die Funktionalgleichung mit $y = -x$ an, so folgt daraus.

$$exp(x) \cdot exp(-x) = exp(x - x) = exp(0) = 1.$$

Das heißt also: Alle Funktionswerte $exp(x)$ sind $\neq 0$ und

$$\frac{1}{exp(x)} = exp(-x).$$

Weil die Exponentialfunktion keine Nullstelle hat, und im Nullpunkt den positiven Wert 1 besitzt, kann sie nach dem Zwischenwertsatz keine negativen Werte annehmen:

$$exp(x) > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Manchmal schreibt man die Exponentialfunktion $exp(x)$ auch e^x. Dabei müssen wir im Moment daran denken, dass wir die 'allgemeine Exponentialfunktion' a^x noch nicht für alle $x \in \mathbb{R}$, sondern nur für ganze Zahlen $x = n$ definiert haben. Wir wollen aber sicher sein, dass wir mit e^n keine zwei verschiedenen Zahlen bezeichnen, und überlegen uns als nächstes:

$$exp(n) = e^n \text{ für alle ganzen Zahlen } n \in \mathbb{Z}.$$

Beweis. Für $n = 0$ ist die Gleichung richtig:

$$exp(0) = 1 = e^0.$$

Für $n = 1$ gilt sie nach Definition der Zahl e. Und für positive n folgt sie mit vollständiger Induktion aus der Funktionalgleichung:

$$exp(n + 1) = exp(n) \cdot exp(1) = e^n \cdot e = e^{n+1}.$$

Für negative n schließlich ist

$$exp(n) = \frac{1}{exp(-n)} = \frac{1}{e^{-n}} = e^n.$$

Fassen wir unsere Formeln noch einmal übersichtlich zusammen:

$$\boxed{\begin{array}{c} exp(0) = 1, \quad exp(1) = e \\ exp(x + y) = exp(x) \cdot exp(y) \\ exp(-x) = \frac{1}{exp(x)} \\ exp(x) > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \\ exp(n) = e^n \text{ für alle } n \in \mathbb{Z} \end{array}}$$

Satz 2.20 *Die Exponentialfunktion ist streng monoton wachsend und bildet die reelle Achse* $\mathbb{R}$ *bijektiv auf die reelle Halbachse* $\mathbb{R}_{>0} :=]0, \infty[$ *ab. Sie hat deswegen eine stetige Umkehrfunktion* $ln : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$

.

Beweis. Für $h > 0$ ist

$$exp(h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} = 1 + h + \frac{h^2}{2} + ... > 1 + h > 1.$$

Für $x < y \in \mathbb{R}$ folgt deswegen aus der Funktionalgleichung mit $h := y - x$

$$exp(y) = exp(x + h) = exp(x) \cdot exp(h) > exp(x),$$

also ist die Exponentialfunktion streng monoton wachsend.

Jezt müssen wir noch zeigen, dass ihre Wertemenge die ganze Halbachse $\mathbb{R}_{>0}$ ist. Das folgt aber aus der soeben bewiesenen Abschätzung $exp(x) > 1 + x$ für positive x: Für jede reelle Zahl $x > 0$ ist $exp(x) > x$. Deswegen gibt es zu jeder noch so großen Schranke $K \in \mathbb{R}$ ein $x \in \mathbb{R}$ mit $exp(x) > K$, zum Beispiel $x = K$. Wenn $x \in \mathbb{R}_{>0}$ über alle Schranken wächst, dann durchläuft $exp(x)$ alle reellen Zahlen > 1. Und wenn $x < 0$ alle negativen Zahlen durchläuft, dann durchläuft $exp(x) = 1/exp(-x)$ alle reellen Zahlen $x > 0$ mit $x < 1$. □

Die zuletzt verwendeten Argumente kann man etwas kürzer und übersichtlicher gestalten, wenn man die Definition des Grenzwerts etwas erweitert.

Definition 2.12 (Uneigentliche Grenzwerte) *Es sei f eine reellwertige Funktion. Wir sagen*

$\lim_{x\to\infty} f(x) = c$, *wenn* *es ein K gibt, so dass f auf $[K, \infty[$ definiert ist und für alle $\epsilon > 0$ ein $L \in \mathbb{R}$ existiert mit $|f(x) - c| < \epsilon$ für alle $x > L$.*

$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$, *wenn* *es ein $h > 0$ gibt, so dass f definiert ist auf einem Intervall $]x_0, x_0 + h[$ oder $]x_0 - h, x_0[$ und zu jeder Schranke $K \in \mathbb{R}$ ein $\delta > 0$ existiert mit $f(x) > K$ für $|x - x_0| < \delta$.*

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, *wenn* *es ein a gibt, so dass f auf $[a, \infty[$ definiert ist und zu jeder Schranke $K \in \mathbb{R}$ ein $L \in \mathbb{R}$ existiert mit $f(x) > K$ für alle $x > L$.*

Analog definiert man auch uneigentliche Grenzwerte mit dem Symbol $-\infty$. Ich möchte ausdrücklich betonen, dass ∞ und $-\infty$ Symbole sind, die wir gelegentlich in festumrissener Bedeutung verwenden, aber, dass diese Symbole keine Zahlen sind!

Wenn wir diese Symbole verwenden, können wir die Abschätzungen aus dem letzten Beweis auch so formulieren:

$$\lim_{x\to\infty} exp(x) = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} exp(x) = 0.$$

Diese Abschätzungen kann man noch stark verschärfen:

Satz 2.21 (Exponentielles Wachstum) *Für $x \to \infty$ wächst die Exponentialfunktion schneller als jede Potenz $x^n, n \in \mathbb{N}$, von x und $exp(-x)$ geht schneller gegen 0 als jede negative Potenz $1/x^n, n \in \mathbb{N}$, von x. Diese Abschätzungen kann man auch so formulieren*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{exp(x)}{x^n} = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} x^n \cdot exp(-x) = 0 \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Für jedes $x > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ ist

$$exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + ... > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Damit ist

$$\lim_{x\to\infty} \frac{exp(x)}{x^n} \geq \lim_{x\to\infty} \frac{x^{n+1}}{x^n \cdot (n+1)!} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{(n+1)!} = \infty.$$

Und

$$\lim_{x\to\infty} x^n \cdot exp(-x) = \left(\lim_{x\to\infty} \frac{exp(x)}{x^n}\right)^{-1} = 0.$$

□

Wie oben schon erwähnt ist der *natürliche Logarithmus*

$$ln(x) = exp^{-1}(x)$$

die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion. Er ist eine bijektive Abbildung

$$ln : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}.$$

Für negative $x \in \mathbb{R}$ ist $ln(x)$ nicht definiert, auch nicht für $x = 0$! Aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion folgt die Funktionalgleichung

$$ln(x \cdot y) = ln(x) + ln(y)$$

des Logarithmus.

Beweis. Wegen $x, y > 0$ gibt es $u, v \in \mathbb{R}$ mit $x = exp(u), y = exp(v)$. Damit wird

$$ln(x \cdot y) = ln(exp(u) \cdot exp(v)) = ln(exp(u + v)) = u + v = ln(x) + ln(y).$$

Diese Funktionalgleichung des Logarithmus, genauer des Logarithmus zur Basis 10, den wir gleich definieren werden, wurde Jahrhunderte hindurch zum numerischen Multiplizieren verwendet. Durch den Logarithmus wird ja die Multiplikation in eine Addition verwandelt, die mit der Hand viel leichter und schneller durchzuführen ist. Um Zahlen zu logarithmieren und zu delogarithmieren waren die Zahlen und ihre Logarithmen in Büchern, sogenannten Logarithmentafeln, zusammengestellt. Ich musste im Gymnasium noch lernen, damit umzugehen. Das habe ich gehasst, weil die Logarithmentafeln so furchtbar langweilig zu lesen waren.

Genau dasselbe Prinzip wurde beim sogenannten Rechenschieber verwendet. Das war ein mechanisches Gerät, in dem ein Leistchen hin und hergeschoben wurde. Auch dieses Gerät habe ich gehasst, weil das Leistchen so haargenau eingestellt werden musste. Entweder ging das nicht, weil es klemmte, oder wenn es leicht ging hat es sich auch leicht wieder verschoben, bevor die Rechnung zuende war. Meinen einzigen Vierer in einer Rechenschulaufgabe habe ich diesem teuflischen Gerät zu verdanken.

Aus den Abschätzungen in Satz 2.21 für die Exponentialfunktion erhalten wir folgende Abschätzungen für den natürlichen Logarithmus:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ln(x)}{x} = 0, \quad \lim_{x\to 0} x \cdot ln(x) = 0$$

Beweis. Wir setzen $x = exp(u)$ und haben

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ln(x)}{x} = \lim_{u\to\infty} \frac{ln(exp(u))}{exp(u)} = \lim_{u\to\infty} \frac{u}{exp(u)} = 0.$$

Ebenso folgt

$$\lim_{x\to 0} x \cdot ln(x) = \lim_{u\to -\infty} exp(u) \cdot ln(exp(u)) = \lim_{u\to\infty} exp(-u) \cdot (-u) = 0.$$ □

Mit dem natürlichen Logarithmus kann man *für alle positiven Zahlen* $a > 0$ die *allgemeine Exponentialfunktion*

$$a^x := exp(x \cdot ln(a)) \qquad (a > 0, x \in \mathbb{R})$$

definieren. Insbesondere ist

$$\begin{aligned} a^0 &= exp(0) = 1, \\ a^1 &= exp(ln(a)) = a, \\ e^x &= exp(x \cdot ln(e)) = exp(x). \end{aligned}$$

Aus den Funktionalgleichungen der Exponentialfunktion und des Logarithmus erhalten wir für diese Funktion die Funktionalgleichungen

$$\begin{aligned} a^{x+y} &= exp((x+y) \cdot ln(a)) = exp(x \cdot ln(a)) \cdot exp(y \cdot \ln(a)) = a^x \cdot a^y, \\ (a \cdot b)^x &= exp(x \cdot ln(ab)) = exp(x \cdot (ln(a) + ln(b))) = a^x \cdot b^x. \end{aligned}$$

Für ganze Zahlen $n \in \mathbb{Z}$ haben wir jetzt a^n auf zwei Weisen definiert: einmal hier und einmal in 0.2. Beide Definitionen stimmen aber überein. Das beweist man genauso wie für den Spezialfall $a = e$.

Die allgemeine Exponentialfunktion gibt eine Möglichkeit, die n-te Wurzel anders zu schreiben: Es ist

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n},$$

denn $\left(a^{1/n}\right)^n = a^{1/n \cdot n} = a$.

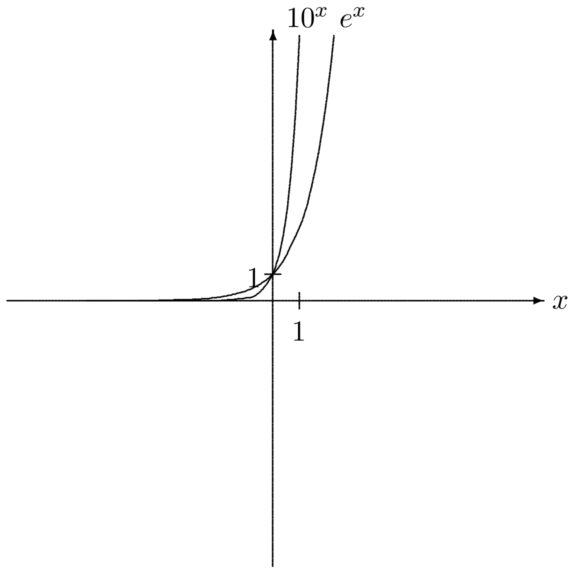
Die *allgemeine Logarithmusfunktion zur Basis* $a > 0$ ist definiert durch

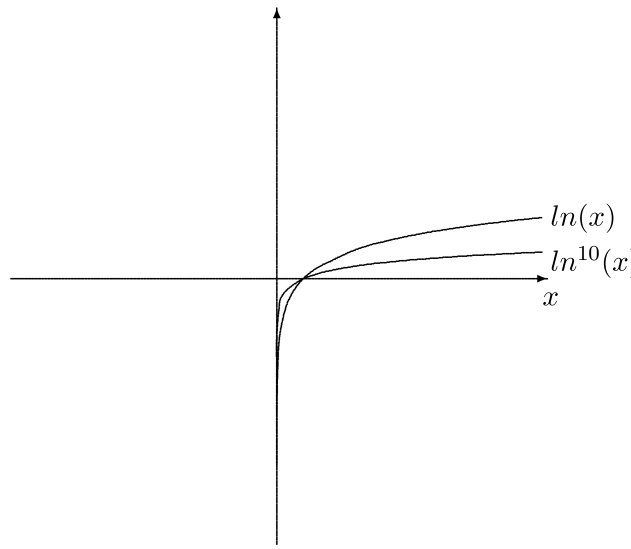
$$log^a(x) := \frac{ln(x)}{ln(a)}.$$

Damit wird

$$a^{log^a(x)} = exp\left(log^a(x) \cdot ln(a)\right) = exp(\frac{ln(x)}{ln(a)} \cdot ln(a)) = exp(ln(x)) = x.$$

Die Funktion $log^a(x)$ ist also die Umkehrfunktion zu a^x.





Grenzwertberechnungen, in denen die allgemeine Exponentialfunktion oder die allgemeine Logarithmusfunktion vorkommen, kann man häufig mit Erfolg auf Grenzwerte für exp und ln zurückspielen. Ein schönes Beispiel dafür ist

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Beweis. Wir schreiben

$$\sqrt[n]{n} = n^{1/n} = exp\left(\frac{1}{n} \cdot ln(n)\right).$$

Den Grenzwert

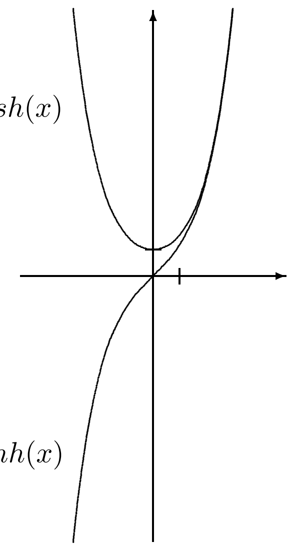
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot ln(n) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot ln(x) = 0$$

kennen wir. Weil die Exponentialfunktion im Nullpunkt stetig ist, folgt

$$\lim_{n\to\infty} exp\left(\frac{1}{n} \cdot ln(n)\right) = exp\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot ln(n)\right) = exp(0) = 1.$$

Die Exponentialfunktion hat aber noch zwei etwas exotischere Verwandte: den *Hyperbel-Sinus* $sinh(x)$ und den *Hyperbel-Cosinus* $cosh(x)$, definiert durch

$$sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$



Diese beiden Funktionen haben die Eigenschaften

a) $sinh(0) = \frac{1-1}{2} = 0$.
b) $sinh(-x) = (e^{-x} - e^x)/2 = -sinh(x)$.
c) $cosh(0) = \frac{1+1}{2} = 1$.
d) $cosh(-x) = (e^{-x} + e^x)/2 = cosh(x)$.

Diese vier Formeln gelten genauso für die Winkelfunktionen sin und cos, die wir im nächsten Abschnitt definieren und untersuchen werden. Die folgende Formel ist eine etwas andere Version der Funktionalgleichung $sin(x)^2 + cos(x)^2 = 1$.

e) $cosh(x)^2 - sinh(x)^2 = \frac{1}{4}\Big(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - (e^x - 2 + e^{-2x})\Big) = 1.$

f) $\lim_{x\to\infty} sinh(x) = \lim_{x\to\infty} e^x/2 - \lim_{x\to\infty} e^{-x}/2 = \infty.$

g) $\lim_{x\to-\infty} sinh(x) = -\lim_{x\to\infty} sinh(x) = -\infty.$

g) $\lim_{x\to\infty} cosh(x) = \lim_{x\to\infty} e^x/2 + \lim_{x\to\infty} e^{-x}/2 = \infty = \lim_{x\to-\infty} cosh(x).$

Aufgabe 2.7 *Zeigen Sie:*

$$sinh(x+y) = sinh(x)cosh(y) + cosh(x)sinh(y),$$

$$cosh(x+y) = cosh(x)cosh(y) + sinh(x)sinh(y).$$

Aufgabe 2.8 *Zeigen Sie*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

(Hinweis: Aufgabe 2.4)

2.6 Die Winkelfunktionen

Die Winkelfunktionen Sinus und Cosinus definieren wir genauso wie die Exponentialfunktion durch eine Potenzreihe, und zwar als

$$\sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Genau wie bei der Exponentialreihe müssen wir uns als erstes von der Konvergenz dieser Reihen überzeugen. Und das machen wir auch wieder genauso wie bei der Exponentialreihe: mit dem Quotientenkriterium.

Konvergenz der Sinus-Reihe: Für $x \neq 0$ ist der Quotient zweier aufeinanderfolgender Summanden

$$\left| \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{x^{2n+1}} \right| = \left| \frac{x^2}{(2n+3)(2n+2)} \right| < \frac{x^2}{4n^2}.$$

Für $n > |x|$ ist dieser Quotient $< 1/4 =: q$, wo deutlich $q < 1$. Damit konvergiert die Sinus-Reihe für alle reellen x und stellt eine stetige Funktion $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dar.

Konvergenz der Cosinus-Reihe: Hier ist der betreffende Quotient

$$\left| \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{x^{2n}} \right| = \left| \frac{x^2}{(2n+2)(2n+1)} \right| < \frac{x^2}{4n^2},$$

und von hier an geht der Konvergenzbeweis genauso weiter, wie bei der Sinus-Reihe. Also konvergiert auch die Cosinus-Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ und stellt eine stetige Funktion $cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dar.

Für *positive* $x \in \mathbb{R}$ sind beide Potenzreihen alternierend. Es liegt genau die Situation aus Satz 1.13 (Leibnizkriterium) vor. Wir hätten die Konvergenz also auch mit dem Leibnizkriterium beweisen können. Für negative $x \in \mathbb{R}$ hätte dies allerdings nicht funktioniert. Wir benutzen die Beweismethode des Leibnizkriteriums aber jetzt für einige Abschätzungen, die wir später brauchen.

Satz 2.22 (Abschätzung der Winkelfunktionen) *Für* $0 < x \leq 2$ *ist*

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos(x) < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \qquad \textit{und} \qquad x - \frac{x^3}{6} < \sin(x) < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

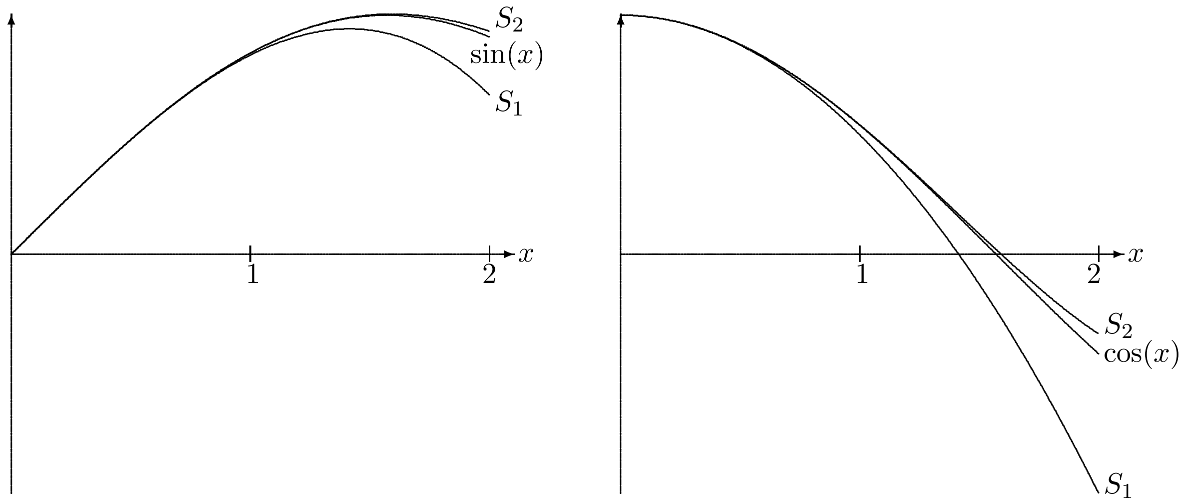
Beweis. Wenn wir eine Reihe $\sum(-1)^n a_n$ mit streng monoton fallenden $a_n > 0$ haben, dann ist nach dem Beweis von Satz 1.13 die Folge der Partialsummen S_{2n} zu geraden Indizes streng monoton fallend, und die Folge der Partialsummen S_{2n+1} zu ungeraden Indizes streng monoton steigend, und der Wert der Reihe liegt zwischen diesen Partialsummen. Nach den soeben durchgeführten Abschätzungen gilt dies für die Sinus- und die Cosinus-Reihe, sobald $0 < x \leq 2n$. Auf dem Intervall $]0, 2[$ ist das also ab $n = 1$ der Fall. Für den Cosinus folgt daraus

$$1 - \frac{x^2}{2} = S_1 < \cos(x) < S_2 = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24},$$

und für den Sinus

$$x - \frac{x^3}{6} = S_1 < \sin(x) < S_2 = 1 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

□



Aus der Schule kennen Sie viele Eigenschaften der Winkelfunktionen, insbesondere ihren Graphen und die Periodizität

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x), \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x).$$

Diese Periodizität ist in der Schule vollkommen klar, braucht dort nicht bewiesen zu werden, weil die Winkelfunktionen dort Funktionen eines Winkels x sind, und der geht halt nach $2\pi = 360^o$ neu los. Bei uns ist das jetzt aus zwei Gründen anders:

1) Winkel gehören nicht in die Analysis, sondern in die Geometrie, und werden deswegen irgendwann in der Vorlesung Elemente der Linearen Algebra definiert. Aber Sie werden sich dann wahrscheinlich ziemlich darüber wundern, wie das geschieht.

2) Das Argument x von $\sin(x)$ und $\cos(x)$ ist bei uns, wenn es ein Winkel ist, immer ein Winkel im Bogenmaß, das heißt die Länge eines Kreisbogens. Was die Länge eines Kreisbogens ist, kann nur mit Hilfe von Integralen exakt definiert werden, und kommt erst später.

Wir können hier also nicht an die Intuition apellieren, die Sie von der Schule her mit Sinus und Cosinus verbinden, sondern müssen die benötigten Eigenschaften der Winkelfunktionen beweisen.

1) Der Sinus ist eine *ungerade* Funktion, der Cosinus ist *gerade*. D.h.

$$\sin(-x) = -\sin(x), \quad \cos(-x) = \cos(x).$$

Beweis. In der Sinus-Reihe kommen nur ungerade Potenzen x^{2n+1} von x vor. Für diese ist $(-x)^{2n+1} = -\left(x^{2n+1}\right)$. Daraus folgt

$$\sin(-x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(-x)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} -(-1)^n x^{2n+1} = -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1} = -sin(x).$$

Der Beweis für die Cosinusreihe geht genauso. In dieser Reihe kommen halt nur gerade Potenzen x^{2n} vor, für die $(-x)^{2n} = x^{2n}$ gilt. Und deswegen ist der Cosinus eine gerade Funktion.

2) Die Werte im Nullpunkt sind die Koeffizienten bei x^0, und zwar

$$\sin(0) = 0, \quad \cos(0) = 1.$$

3) Die Cosinus-Funktion erfüllt die Funktionalgleichung

$$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y).$$

Diese Funktionalgleichung heißt auch *Additionstheorem*, und für den Sinus gibt es auch eines. Das Additionstheorem für den Sinus wollen wir aber nicht gesondert herleiten, es folgt später automatisch. Das Additionstheorem für den Cosinus beweisen wir ganz ähnlich, wie die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion:

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}
\cos(x+y) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(x+y)^{2n}}{(2n)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \sum_{\mu=0}^{2n} x^\mu y^{2n-\mu} \binom{2n}{\mu} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \sum_{\mu=0}^{2n} \frac{x^\mu}{\mu!} \cdot \frac{y^{2n-\mu}}{(2n-\mu)!} \\
&= \sum_{\substack{\mu,\nu=0 \\ \mu+\nu \text{ gerade}}}^{\infty} (-1)^{(\mu+\nu)/2} \frac{x^\mu}{\mu!} \cdot \frac{y^\nu}{\nu!}, \\
\cos(x)\cos(y) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l \frac{y^{2l}}{(2l)!}\right) \\
&= \sum_{\substack{\mu,\nu=0 \\ \mu,\nu \text{ gerade}}}^{\infty} (-1)^{(\mu+\nu)/2} \frac{x^\mu}{\mu!} \cdot \frac{y^\nu}{\nu!}, \\
\sin(x)\sin(y) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l \frac{y^{2l+1}}{(2l+1)!}\right) \\
&= \sum_{\substack{\mu,\nu=1 \\ \mu,\nu \text{ ungerade}}}^{\infty} (-1)^{(\mu+\nu)/2-1} \frac{x^\mu}{\mu!} \cdot \frac{y^\nu}{\nu!} \\
&= - \sum_{\substack{\mu,\nu=1 \\ \mu,\nu \text{ ungerade}}}^{\infty} (-1)^{(\mu+\nu)/2} \frac{x^\mu}{\mu!} \cdot \frac{y^\nu}{\nu!}
\end{aligned}$$

Die Summe $\mu + \nu$ der Indizes ist gerade, wenn entweder beide Indizes gerade, oder beide Indizes ungerade sind. Deswegen ist die Reihe für $\cos(x+y)$ die Differenz der von uns ausgerechneten Reihen für die Produkte $\cos(x)\cos(y)$ und $\sin(x)\sin(y)$. $\square$

4) Die beiden Winkelfunktionen sind verknüpft durch

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$

Dies ist der Spezialfall

$$1 = \cos(0) = \cos(x - x) = \cos(x)\cos(-x) - \sin(x)\sin(-x)$$

des Additionstheorems für den Cosinus.

5) Im Intervall $[0, 2]$ besitzt der Cosinus genau eine Nullstelle x_0. Für diese Nullstelle des Cosinus ist $\sin(x_0) = 1$.

Beweis. a) Jetzt benutzen wir die Abschätzung aus dem oben bewiesenen Lemma. Auf dem Intervall $[0, 2]$ ist

$$\cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

Insbesondere folgt

$$\cos(2) \leq 1 - \frac{4}{2} + \frac{16}{24} = 1 - 2 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}.$$

Weil $\cos(0) = 1 > 0$ und $\cos(2) < 0$ ist, muss es nach dem Zwischenwertsatz (mindestens) eine Nullstelle $x_0 \in (0, 2)$ des Cosinus im Intervall $[1, 2]$ geben.

b) Für den Sinus haben wir auf dem Intervall $[0, 2]$ die Abschätzung

$$\sin(x) \geq x - \frac{x^3}{6} = \frac{x}{6}(6 - x^2).$$

Wegen $x^2 \leq 4 < 6$ ist $\sin(x) > 0$ für alle $x \in (0, 2]$. Wegen $\cos(x_0) = 0$ muss $\sin(x_0) = \pm 1$ sein, und weil auf dem Intervall $]0, 2]$ gilt $\sin(x) > 0$, folgt $\sin(x_0) = 1$.

c) Wir zeigen jetzt noch, dass der Cosinus auf dem Intervall $[0, 2]$ streng monoton fällt, dann kann er dort keine zwei verschiedenen Nullstellen besitzen, und wir haben die Aussage bewiesen. Dazu müssen wir für $x < y \in [0, 2]$ zwei Funktionswerte $\cos(x)$ und $cos(y)$ vergleichen. Wir setzen

$$x = u + v, \quad y = u - v$$

mit

$$u := \frac{x + y}{2} \in (0, 2), \quad v := \frac{y - x}{2} \quad \in (0, 2),$$

falls $x > y$. Dann erhalten wir aus dem Additionstheorem des Cosinus

$$\begin{aligned} \cos(y) - \cos(x) &= [\cos(u)\cos(-v) - \sin(u)\sin(-v)] - [\cos(u)\cos(v) - \sin(u)\sin(v)] \\ &= 2\sin(u)\sin(v) \\ &> 0 \end{aligned}$$

wegen b). Damit ist die Behauptung bewiesen. □

6) Jetzt definieren wir die Zahl π als

$$\pi := 2 \cdot x_0$$

mit der Nullstelle $x_0 \in]0, 2[$ des Cosinus aus 5). Anders ausgedrückt:

$$x_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Es ist also

$$\cos(\frac{\pi}{2}) = 0, \quad \sin(\frac{\pi}{2}) = 1.$$

7) Aus dem Additionstheorem des Cosinus folgern wir

$$\begin{aligned}
\cos(\frac{\pi}{2} - x) &= \cos(\frac{\pi}{2})\cos(-x) - \sin(\frac{\pi}{2})\sin(-x) \\
&= 0 \cdot cos(x) + 1 \cdot \sin(x) \\
&= \sin(x), \\
\sin(\frac{\pi}{2} - x) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - x)\right) \\
&= \cos(x), \\
\sin(x+y) &= \cos(\frac{\pi}{2} - (x+y)) \\
&= \cos((\frac{\pi}{2} - x) - y) \\
&= \cos(\frac{\pi}{2} - x) cos(-y) - \sin(\frac{\pi}{2} - x)\sin(-y) \\
&= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y).
\end{aligned}$$

Die zuletzt bewiesene Gleichung ist das *Additionstheorem des Sinus*.

8) Mit den Additionstheoremen rechnen wir jetzt schrittweise aus, was passiert, wenn wir zum Argument x des Sinus und des Cosinus Vielfache von $\pi/2$ addieren:

$$\begin{aligned}
\cos(\tfrac{\pi}{2}) &= 0 & \sin(\tfrac{\pi}{2}) &= 1 \\
\cos(x + \tfrac{\pi}{2}) &= \cos(x) \cdot 0 - \sin(x) \cdot 1 & \sin(x + \tfrac{\pi}{2}) &= \sin(x) \cdot 0 + \cos(x) \cdot 1 \\
&= -\sin(x) & &= \cos(x) \\
\cos(\pi) &= -\sin(\tfrac{\pi}{2}) & \sin(\pi) &= \cos(\tfrac{\pi}{2}) \\
&= -1 & &= 0 \\
\cos(x+\pi) &= \cos(x) \cdot (-1) - \sin(x) \cdot 0 & \sin(x+\pi) &= \sin(x) \cdot (-1) + \cos(x) \cdot 0 \\
&= -\cos(x) & &= -\sin(x) \\
\cos(x+2\pi) &= -\cos(x+\pi) & \sin(x+2\pi) &= -\sin(x+\pi) \\
&= \cos(x) & &= \sin(x)
\end{aligned}$$

Die zuletzt bewiesenen Gleichungen

$$\cos(x+2\pi) = cos(x), \quad \sin(x+2\pi) = \sin(x)$$

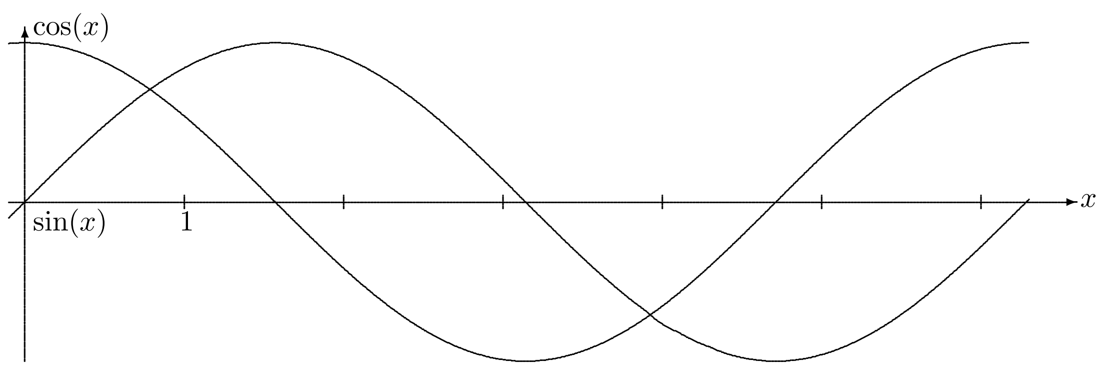
heißen die *Periodizität* der Winkelfunktionen: Nach der Periode 2π nehmen die Winkelfunktionen wieder dieselben Werte an.

9) Der Sinus hat die Nullstellen 0 und π. Wegen seiner Periodizität verschwindet er in allen Punkten $n \cdot \pi$ mit $n \in \mathbb{Z}$. Andere Nullstellen hat er nicht. Denn ist x_0 eine Nullstelle des Sinus, dann gibt es eine ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \cdot \pi \leq x_0 < (n+1) \cdot \pi$. Dann ist $x_1 := x_0 - n \cdot \pi$ eine Nullstelle des Sinus im Intervall $[0, \pi]$. Wegen $\sin(x) > 0$ für $0 < x \leq 2$ kann x_1 nicht im Intervall $]0, 2]$ liegen, wegen $\sin(\pi - x) = -\sin(x)$ auch nicht im Intervall $[\pi - 2, \pi)$. Nun ist $\pi/2 < 2$, also $\pi < 4$ und deswegen kann x_1 nicht im Intervall $]0, \pi[=]0, 2[\cup]\pi - 2, \pi[$ liegen. Es folgt $x_1 = 0$ und $x_0 = n \cdot \pi$.

Der Cosinus hat die Nullstellen $\pi/2$ und $3\pi/2$ und wegen der Periodizität alle Zahlen $\pi/2 + n \cdot \pi$ mit $n \in \mathbb{Z}$. Wegen $\cos(\pi/2 + x) = -\sin(x)$ hat er nur diese Nullstellen.

Nun haben wir eine ganze Reihe von Eigenschaften der Winkelfunktionen hergeleitet. Die Reihenfolge, in der wir das taten, war von der mathematischen Logik diktiert, und nicht von Übersichtlichkeit. Deswegen stellen wir diese Eigenschaften noch einmal übersichtlich zusammen:

Symmetrie:	$\sin(-x) = -\sin(x), \quad \cos(-x) = \cos(x)$
Verwandtschaft:	$\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
Verknüpfung:	$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
Additionstheoreme:	$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$ $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
Periodizität:	$\sin(x + 2\pi) = \sin(x), \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$
Spezielle Werte:	$\sin(0) = 0, \quad \sin(\frac{\pi}{2}) = 1, \quad \sin(\pi) = 0, \quad \sin(\frac{3\pi}{2}) = -1$ $\cos(0) = 1, \quad \cos(\frac{\pi}{2}) = 0, \quad cos(\pi) = -1, \quad \cos(\frac{3\pi}{2}) = 0.$



Nahe Verwandte der Winkelfunktionen Sinus und Cosinus sind die Winkelfunktionen Tangens und Cotangens

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \qquad \cot(x) := \frac{1}{\tan(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Aus den entsprechenden Eigenschaften von Sinus und Cosinus ergibt sich für den Tangens

Symmetrie:	$\tan(-x) = -\tan(x), \quad \cot(-x) = -cot(x)$
Verwandtschaft:	$\cot(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \tan(x) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
	$\cot(x) = \dfrac{1}{\tan(x)}$
Additionstheoreme:	$\tan(x+y) = \dfrac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$
	$\cot(x+y) = \dfrac{\cot(x)\cot(y) - 1}{\cot(x) + \cot(y)}$
Periodizität:	$\tan(x+\pi) = \tan(x), \quad \cot(x+\pi) = \cot(x)$
Spezielle Werte:	$\tan(0) = 0 \quad \tan(\frac{\pi}{4}) = 1 \quad \tan(\frac{\pi}{2}) = \infty$ $\cot(0) = \infty \quad \cot(\frac{\pi}{4}) = 1 \quad \cot(\frac{\pi}{2}) = 0$

Beweise. Wegen $\sin(-x) = -\sin(x)$ und $\cos(-x) = \cos(x)$ ist

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$$

und genau so für den Cotangens. Ebenso einfach sieht man

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - x)}{\cos(\frac{\pi}{2} - x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \cot(x)$$

und $\cot(\pi/2 - x) = \tan(\pi/2 - (\pi/2 - x)) = \tan(x)$.

Aus den Additionstheoremen für Sinus und Cosinus erhalten wir

$$\begin{aligned}
\tan(x+y) &= \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} \\
&= \frac{\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)} \\
&= \frac{(\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y))/\cos(x)\cos(y)}{(\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y))/\cos(x)\cos(y)} \\
&= \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)},
\end{aligned}$$

das Additionstheorem für den Tangens. Das Additionstheorem für den Cotangens kann man genauso herleiten, oder indem man in das Tangens-Additionstheorem überall $\tan = 1/\cot$ einsetzt.

Die Periodizität des Tangens mit der Periode π (der halben Periode des Sinus und Cosinus!) erhält man sofort aus $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$ und $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$.

Die Nullstellen des Tangens sind genau die Nullstellen des Sinus, also die Punkte $n \cdot \pi$ mit $n \in \mathbb{Z}$. Und in den Nullstellen des Cosinus ist der Tangens nicht definiert, 'er geht gegen unendlich'. Aber

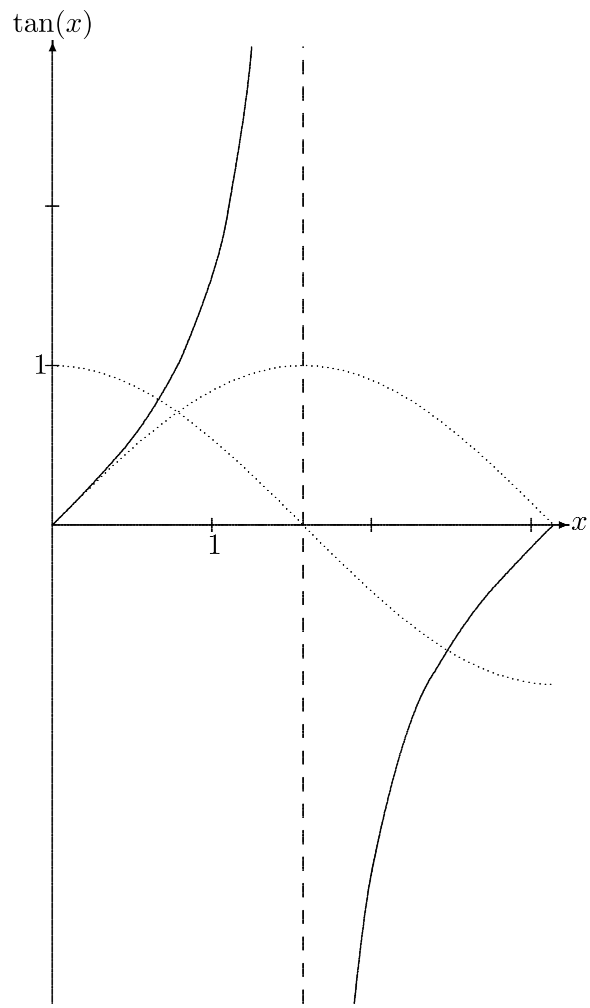
Vorsicht: Es ist

$$\lim_{\substack{x \to \pi/2 \\ x < \pi}} \tan(x) = \infty, \qquad \lim_{\substack{x \to \pi \\ x > \pi/2}} \tan(x) = -\infty.$$

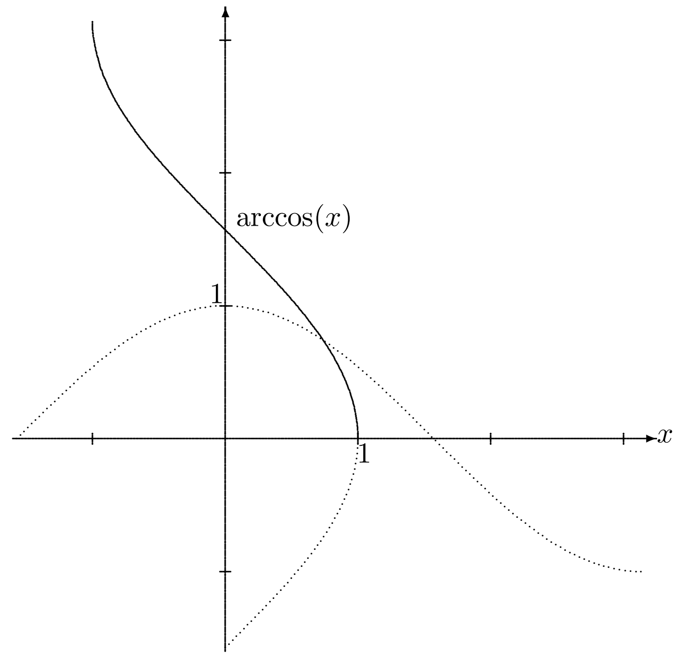
Ich habe diesen Sachverhalt in die Tabelle etwas vereinfachend als $\tan(\pi/2) = \infty$ geschrieben. Im Punkt $\pi/4$ schließlich ist

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\tan(\pi/4)}.$$

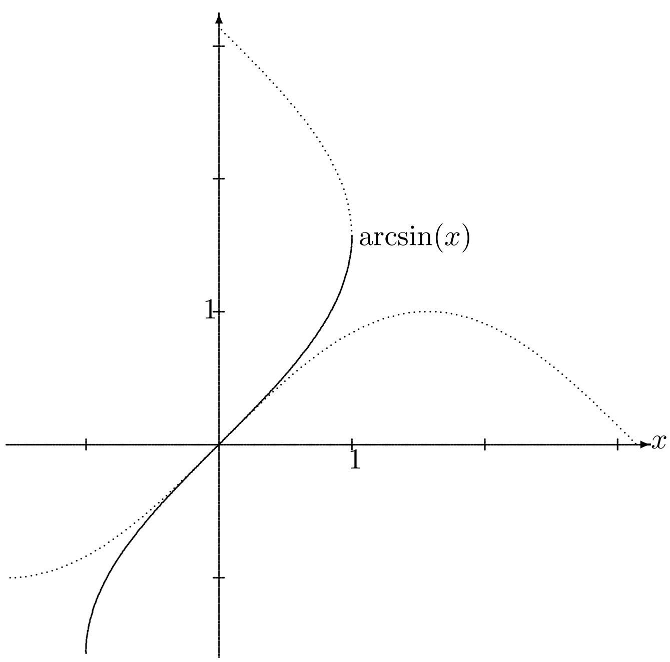
Daraus folgt $\tan(\pi/4) = \pm 1$, aber weil auf dem Intervall $(0, \pi/2)$ der Cosinus und der Sinus positiv sind, muss $\tan(\pi/4) = 1$ sein $\square$



Auf Intervallen, wo die Winkelfunktionen streng monoton sind, besitzen sie Umkehrfunktionen. Das gilt z.B. auf den folgenden Intervallen:



Auf dem Intervall $[0, \pi]$ *ist der Cosinus streng monoton fallend.*
Beweis. Bei der Suche nach der Nullstelle $\pi/2$ des Cosinus haben wir oben gesehen, dass diese Funktion auf dem Intervall $[0, 2]$ streng monoton fällt. Wir brauchen uns also nur noch den Abschnitt $[2, \pi]$ anzusehen. Es genügt, zu zeigen, dass $\cos(\pi - x)$ auf $[0, \pi - 2]$ streng monoton steigt. Das folgt aber aus $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$. $\square$



Auf dem Intervall $[-\pi/2, \pi/2]$ *steigt der Sinus streng monoton.*
Wir müssen die strenge Monotonie von

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos(x)$$

auf dem Intervall $[0, \pi]$ zeigen. Wir haben aber gerade gesehen, dass der Cosinus dort streng monoton fällt. Deswegen ist $-\cos(x)$ hier streng monoton wachsend. $\square$

Auf dem Intervall $(-\pi/2, \pi/2)$ *steigt der Tangens streng monoton.*
Beweis. Seien $x < y$ zwei Punkte aus $[0, \pi/2)$. Wegen $\sin(x) < \sin(y)$ und $\cos(x) > \cos(y)$ ist

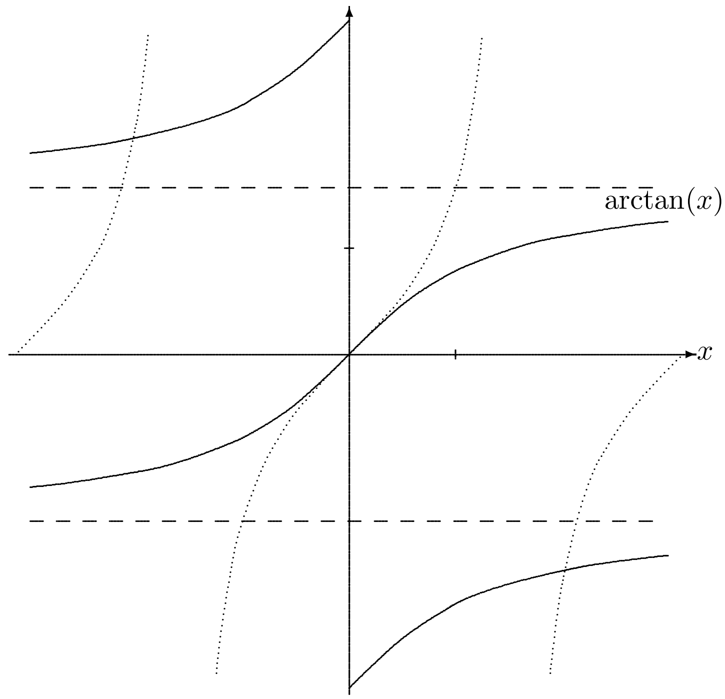
$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} < \frac{\sin(y)}{\cos(y)} = \tan(y).$$

Das liefert die Behauptung auf dem Intervall $[0, \pi/2)$. Wenn $-\pi/2 < x < 0 < y < \pi/2$ ist, dann ist $\sin(x) < 0 < \sin(y)$ und auch in diesem Fall ist die Behauptung richtig. Sei schließlich $-\pi/2 < x <$

$y \leq 0$. Dann ist $-x > -y$, $\sin(-x) > \sin(-y)$ und

$$\sin(x) = -\sin(-x) < -\sin(-y) = \sin(y).$$

Auch in diesem Fall stimmt die strenge Monotonie.



Damit haben also diese drei Funktionen auf den angegebenen Intervallen Umkehrfunktionen. Sie heißen *Arcus-Funktionen*:

Winkelfunktion	Umkehrfunktion
$\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$	$\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$
$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$	$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$
$\tan : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}$	$\arctan : \mathbb{R} \to [-\pi/2, \pi/2]$

Die Graphen der Arcus-Funktionen erhält man aus den Graphen der entsprechenden Winkelfunktionen, indem man auf bekannte Weise an der Winkelhalbierenden des ersten und dritten Quadranten spiegelt. Natürlich kann man den Graphen der ganzen Winkelfunktion auf ganz $\mathbb{R}$ spiegeln, nicht nur den der auf das angegebene Intervall eingeschränkten Funktion. Man findet dann Kurven, die sich die y-Achse entlang schlängeln, aber keine Funktionsgraphen. Man sieht aber, dass man die Winkelfunktionen auch auf anderen als den angegebenen Intervallen umkehren könnte, etwa den Sinus auf dem Intervall $[\pi/2, 3\pi/2]$. Diese Umkehrfunktionen unterscheiden sich von den oben definierten Umkehrfunktionen durch Konstanten und/oder Vorzeichen. Um sie besonders auszuzeichnen, nennt man die oben definierten Umkehrfunktionen manchmal die *Hauptwerte* der Arcusfunktionen.

Aufgabe 2.9 *Zeigen Sie für $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$*

$$sin(\alpha + \beta + \gamma) \quad = \quad sin(\alpha)cos(\beta)cos(\gamma) + cos(\alpha)sin(\beta)cos(\gamma) +$$

$$
\begin{aligned}
&& +cos(\alpha)cos(\beta)sin(\gamma) - sin(\alpha)sin(\beta)sin(\gamma),\\
cos(\alpha+\beta+\gamma) &=& cos(\alpha)cos(\beta)cos(\gamma) - sin(\alpha)sin(\beta)cos(\gamma) -\\
&& -sin(\alpha)cos(\beta)sin(\gamma) - cos(\alpha)sin(\beta)sin(\gamma).
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2.10 *Zeigen Sie für* $\alpha \in \mathbb{R}$

$$
\begin{array}{lrcl}
\textbf{a)} & sin(2\alpha) & = & 2sin(\alpha)cos(\alpha)\\
& cos(2\alpha) & = & 2cos^2(\alpha) - 1,\\
\textbf{b)} & sin(3\alpha) & = & 3sin(\alpha) - 4sin^3(\alpha),\\
& cos(3\alpha) & = & 4cos^3(\alpha) - 3cos(\alpha),\\
\textbf{c)} & sin(4\alpha) & = & 4sin(\alpha)cos(\alpha)(1 - 2sin^2(\alpha))\\
& cos(4\alpha) & = & 8cos^4(\alpha) - 8cos^2(\alpha) + 1.
\end{array}
$$

Aufgabe 2.11 *Zeigen Sie für* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$sin(\alpha) + sin(\beta) = 2sin(\frac{\alpha+\beta}{2})cos(\frac{\alpha-\beta}{2}), \quad cos(\alpha) + cos(\beta) = 2cos(\frac{\alpha+\beta}{2})cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$

Aufgabe 2.12 *Beweisen Sie die Summenformeln*

a) $\frac{1}{2} + cos(x) + cos(2x) + ... + cos(nx) = \frac{sin(\frac{2n+1}{2}x}{2sin(\frac{x}{2})},$

b) $sin(x) + sin(2x) + ... + sin(nx) = \frac{sin(\frac{n}{2}x)sin(\frac{n+1}{2}x)}{sin(\frac{x}{2})},$

c) $sin(\frac{1}{2}x) + sin(\frac{3}{2}x) + ... + sin(\frac{2n-1}{2}x) = \frac{1 - cos(nx)}{2sin(\frac{x}{2})} = \frac{sin^2(\frac{n}{2}x)}{sin(\frac{x}{2})}.$

Aufgabe 2.13 *Zeigen Sie*

$$\lim_{x \to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1.$$

Aufgabe 2.14 *Zeigen Sie für* $|x| < \frac{\pi}{2}$

$$tan(x) = \frac{sin(x)}{\sqrt{1 - sin^2(x)}}, \quad sin(x) = \frac{tan(x)}{\sqrt{1 + tan^2(x)}}.$$

Aufgabe 2.15 *Zeigen Sie*

a) $cos(arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$ *für* $|x| \le 1,$

b) $tan(arcsin(x)) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ *für* $|x| \le 1,$

c) $sin(arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ *für* $x \in \mathbb{R}.$

Index