Analytische Geometrie

Wolf P. Barth

Wintersemester 09/10

Version vom 5. Oktober 2009

Department Mathematik
Bismarckstr. 1 1/2, D - 91054 Erlangen
e-mail: barth@mi.uni-erlangen.de

Inhaltsverzeichnis

0 Einführung

In dieser Vorlesung werden wir uns mit den Vektorräumen $\mathbb{R}^n$ beschäftigen. Meistens wird allerdings $n = 2$ oder $= 3$ sein. Ein *Unterraum* wird nicht wie bisher ein linearer Unterraum oder Untervektorraum sein. Wir verstehen darunter einen *affinen Unterraum.* Der entsteht, indem man einen Untervektorraum $U \subset \mathbb{R}^n$ an einen Anfangsvektor $\mathbf{p}$ anheftet. Der affine Unterraum ist dann

$$A = \{\mathbf{p} + \mathbf{u} : \mathbf{u} \in U\}.$$

Der Untervektorraum U heißt *der zum affinen Raum A parallele Untervektorraum.*

Zwei affine Unterräume A_1 und A_2 heißen *parallel,* wenn die zugehörigen affinen Unterräume ineinander enthalten sind. So sind die Geraden $\mathbf{p} + \mathbb{R} \cdot \mathbf{v}$ und $\mathbf{q} + \mathbb{R} \cdot \mathbf{v}$ parallel, weil sie beide den ein-dimensionalen parallelen Untervektorraum $\mathbb{R} \cdot \mathbf{v}$ besitzen. Und die Gerade $\mathbf{p} + \mathbb{R} \cdot \mathbf{u}$ ist parallel zur Ebene $\mathbf{q} + \mathbb{R} \cdot \mathbf{v} + \mathbb{R} \cdot \mathbf{w}$, wenn $\mathbf{u}$ im Untervektorraum $\mathbb{R} \cdot \mathbf{v} + \mathbb{R} \cdot \mathbf{w}$ enthalten ist.

Für disjunkte, nicht parallele Unterräume gibt es den schönen Ausdruck windschief.

Definition 0.1 *Zwei Geraden im $\mathbb{R}^3$ heißen* windschief*, wenn sie nicht parallel sind, und sich auch nicht schneiden.*

Auch die Abbildungen, welche wir verwenden, werden nicht mehr linear sein. Sie sind dies nur noch bis auf eine Translation.

Definition 0.2 *Ist $A \in GL(n, \mathbb{R})$ eine invertierbare $n \times n$-Matrix und $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$, so heißt die Abbildung*

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{t} + A \cdot \mathbf{x},$$

eine affine Abbildung. *Ist A orthogonal, so heißt die Abbildung eine* Bewegung. *Manchmal nennt man auch Abbildungen $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{t} + A \cdot \mathbf{x}$ affin, wenn die Matrix A nicht invertierbar ist.*

Aufgabe 0.1 (Satz von Varignon) *Es seien $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ vier verschiedene Punkte. Zeigen Sie, dass die vier Mittelpunkte*

$$\mathbf{m}_1 := \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}),\ \mathbf{m}_2 := \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}),\ \mathbf{m}_3 := \frac{1}{2}(\mathbf{c} + \mathbf{d}),\ \mathbf{m}_4 := \frac{1}{2}(\mathbf{d} + \mathbf{a})$$

Ecken eines (eventuell entarteten) Parallelogramms sind. D.h., die Gerade $\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2$ ist parallel zur Geraden $\mathbf{m}_3\mathbf{m}_4$, die Gerade $\mathbf{m}_2\mathbf{m}_3$ parallel zur Geraden $\mathbf{m}_4\mathbf{m}_1$.

Aufgabe 0.2 *Auf zwei Geraden p und q im $\mathbb{R}^2$ seien je drei verschiedene Punkte P_1, P_2, P_3, bzw. Q_1, Q_2, Q_3 gegeben, von denen keiner auf beiden Geraden liegt. Zeigen Sie:*

$$(P_1Q_2 \parallel P_2Q_1) \text{ und } (P_2Q_3 \parallel P_3Q_2) \quad \Rightarrow \quad (P_1Q_3 \parallel P_3Q_1).$$

Aufgabe 0.3 *Im $\mathbb{R}^2$ seien die folgenden Vektoren gegeben:*

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) *Zeigen Sie, dass es eine affine Abbildung* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *gibt mit* $F(\mathbf{a}_i) = \mathbf{b}_i$ *für* $i = 1, 2, 3$.

b) *Was ist der Bildpunkt* $F(\mathbf{a})$ *des Punktes* $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$*?*

Aufgabe 0.4 *Im* $\mathbb{R}^2$ *seien die folgenden Vektoren gegeben:*

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) *Zeigen Sie, dass es eine affine Abbildung* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *gibt mit* $F(\mathbf{a}_i) = \mathbf{b}_i$ *für* $i = 1, 2, 3$.

b) *Was ist der Bildpunkt* $F(\mathbf{a})$ *des Punktes* $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1 \end{pmatrix}$*?*

Aufgabe 0.5 *Beweisen Sie, dass es genau eine affine Abbildung* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(\mathbf{v}) = A \cdot \mathbf{v} + \mathbf{t}$, *gibt mit*

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und bestimen Sie die (nicht notwendig reguläre) Matrix $A \in M_2(\mathbb{R})$*, sowie den Translationsvektor* $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 0.6 *Es seien* g *und* h *windschiefe Geraden im* $\mathbb{R}^3$*, sowie* G_1, G_2 *bzw.* H_1, H_2 *je zwei verschiedene Punkte auf* g *bzw.* h*. Zeigen Sie, dass dann auch die Geraden durch die Punkte* G_1 *und* H_1 *bzw.* G_2 *und* H_2 *zueinander windschief sind.*

Aufgabe 0.7 *Es sei* $H \subset \mathbb{R}^3$ *die Ebene durch die Punkte*

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

und $f : H \to \mathbb{R}^2$ *eine affine Abbildung mit*

$$f(\mathbf{p}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(\mathbf{p}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(\mathbf{p}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\mathbf{p} \in H$ *so, dass*

$$f(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 0.8 *Im* $\mathbb{R}^2$ *seien die Vektoren*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

sowie

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) *Gibt es eine lineare Abbildung* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *mit* $F(v_i) = w_i$ *für* $i = 1, 2, 3$*?*

b) *Bekanntlich heißt eine Abbildung* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *affin, wenn es eine reelle* 2×2*-Matrix* A *und einen Vektor* $b \in \mathbb{R}^2$ *gibt mit*

$$F(v) = A \cdot v + b$$

für alle $v \in \mathbb{R}^2$*. Gibt es eine affine Abbildung* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *mit* $F(v_i) = w_i$ *für* $i = 1, 2, 3$*? Bestimmen Sie gegebenenfalls die Matrix* A *und den Vektor* b*.*

1 Quadriken

In der Linearen Algebra beschäftigten wir uns mit linearen Funktionen

$$f(x_1, ..., x_n) = a_1x_1 + ... + a_nx_n.$$

Eine einzige derartige Funktion ist dabei ziemlich langweilig. Man kann mit ihr eine homogene Gleichung hinschreiben:

$$a_1x_1 + ... + a_nx_n = 0.$$

Die beschreibt eine *Hyperebene* $H \subset \mathbb{R}^n$ durch den Nullpunkt. Oder man kann eine inhomogene Gleichung

$$a_1x_1 + ... + a_nx_n = c, \quad c \neq 0$$

betrachten, die beschreibt eine Hyperebene nicht durch den Nullpunkt. Wichtig für die Schule ist der Fall $n = 2$ (Geradengleichung), weniger wichtig der Fall $n = 3$ (Ebenengleichung). Die Fälle $n \geq 4$ kommen in der Schule nicht vor. Bei uns lag in den beiden letzten Semestern das Hauptaugenmerk auch nicht auf der Untersuchung einer einzigen derartigen Gleichung, sondern in der Zusammenfassung mehrerer Gleichungen zu Gleichungssystemen oder linearen Abbildungen.

Hier wollen wir die nächst-komplizierten Gleichungen betrachten, wo nämlich die Variablen quadratisch vorkommen können:

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu,\nu}x_\mu x_\nu + \sum_{\mu=1}^{n} b_\mu x_\mu + c.$$

Die Nullstellenmenge

$$Q := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) = 0\}$$

einer derartigen Funktion heißt *Quadrik*. Die wichtigsten Beispiele (n=2) sind die Kegelschnitte

$$\begin{array}{ll} \text{Ellipse} & \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ \text{Hyperbel} & \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ \text{Parabel} & y = px^2. \end{array}$$

Die wurden in der Antike von den Griechen erfunden und ausgiebig untersucht.

1.1 Quadratische Formen

Zunächst wollen wir uns weniger mit Eigenschaften individueller Kegelschnitte, oder allgemeiner, Quadriken beschäftigen. Unser Hauptgesichtspunkt wird die Klassifikation dieser Objekte sein. Bevor wir dazu kommen, wollen wir erst quadratische Funktionen der Bauart

$$q(x_1, ..., x_n) = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu,\nu}x_\mu x_\nu$$

betrachten, wo kein linearer Anteil und keine Konstante vorkommt. Sowas nennt man eine *quadratische Form*. Mit der Matrix $A = (a_{\mu,\nu})$ kann man sie kompakt schreiben als

$$\mathbf{x}^t \cdot A \cdot \mathbf{x}.$$

Wegen

$$\mathbf{x}^t \cdot A^t \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}^t \cdot A \cdot \mathbf{x}$$

ist

$$\mathbf{x}^t \cdot A \cdot \mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}^t \cdot A \cdot \mathbf{x} + \mathbf{x}^t \cdot A^t \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{x}^t \cdot S \cdot \mathbf{x}$$

mit der *symmetrischen* Koeffizientenmatrix

$$S = \frac{1}{2}(A + A^t).$$

Wir betrachten deswegen gleich nur symmetrische Koeffizienten-Matrizen A. Damit schließen wir unmittelbar an die Hauptachsentransformation an.

Definition 1.1 *Die symmetrische Matrix S heißt* darstellende Matrix *der quadratischen Form $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t \cdot S \cdot \mathbf{x}$.*

Satz 1.1 *Die quadratische Form q bestimmt ihre darstellende Matrix S eindeutig.*

Beweis. Wir verwenden die *Polarisationsformel*

$$\begin{array}{rcl} q(\mathbf{x}+\mathbf{y}) & = & (\mathbf{x}+\mathbf{y})^t \cdot S \cdot (\mathbf{x}+\mathbf{y}) \\ & = & \mathbf{x}^t \cdot S \cdot \mathbf{x} + \mathbf{x}^t \cdot S \cdot \mathbf{y} + \mathbf{y}^t \cdot S \cdot \mathbf{x} + \mathbf{y}^t \cdot S \cdot \mathbf{y} \\ & = & q(\mathbf{x}) + q(\mathbf{y}) + 2 \cdot \mathbf{x}^t \cdot S \cdot \mathbf{y}. \end{array}$$

(Die letzte Gleichung folgt aus der Symmetrie von S mit $\mathbf{y}^t \cdot S \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}^t \cdot S \cdot \mathbf{y}$.) Damit sind die Einträge von S

$$s_{\mu,\nu} = \mathbf{e}_\mu^t \cdot S \cdot \mathbf{e}_\nu = \frac{1}{2}(q(\mathbf{e}_\mu + \mathbf{e}_\nu) - q(\mathbf{e}_\mu) - q(\mathbf{e}_\nu)$$

eindeutig bestimmt durch die Werte von q auf den Basisvektoren $\mathbf{e}_\mu$ und den Summen von zweien dieser Vektoren. □

Beispiel 1.1 *Gegeben sei die symmetrische reelle 2×2-Matrix*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Sie definiert die quadratische Form

$$q(\mathbf{x}) = (x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2.$$

Umgekehrt ist jede Funktion

$$q(\mathbf{x}) = \alpha x_1^2 + \beta x_1 x_2 + \gamma x_2^2$$

eine quadratische Form auf $\mathbb{R}^2$. *Die zugehörige Matrix ist*

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta/2 \\ \beta/2 & \gamma \end{pmatrix}.$$

Die Koeffizienten α, γ *bei den Quadraten* x_1^2 *und* x_2^2 *geben in der Matrix die Diagonaleinträge. Aber der Koeffizient* β *beim Mischterm* $x_1 x_2$ *muss in der Matrix halbiert werden. Das vergisst man oft.*

Beispiel 1.2 *Die symmetrische Form*

$$\sum_{k,l=1}^{n} x_k x_l = (\sum_k x_k) \cdot (\sum_l x_l)$$

hat die darstellende Matrix

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1 & ... & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

vom Rang 1.

Die symmetrische Form

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = (\mathbf{x}.\mathbf{x}) = \parallel \mathbf{x} \parallel^2$$

hat die darstellende Matrix

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_n$$

vom Rang n.

1.1.1 Koordinatentransformationen

Wichtigstes Ziel dieses Kapitels ist Vereinfachung der darstellenden Matrix S von q durch Koordinatentransformationen. Ist etwa

$$\mathbf{x} = T \cdot \mathbf{y}, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & ... & t_{1,n} \\ t_{2,1} & t_{2,2} & ... & t_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{n,1} & t_{n,2} & ... & t_{n,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

eine solche Transformation mit Transformationsmatrix T, so wird die darstellende Matrix in den y-Koordinaten

$$S' := T^t \cdot S \cdot T,$$

denn es ist

$$q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t \cdot S \cdot \mathbf{x} = (T \cdot \mathbf{y})^t \cdot S \cdot (T \cdot \mathbf{y}) = \mathbf{y}^t \cdot (T^t \cdot S \cdot T) \cdot \mathbf{y}.$$

Weil die Transformationsmatrix T invertierbar ist, gilt

$$Rang(T^t \cdot S \cdot T) = Rang(S).$$

Deswegen ist folgende Definition sinnvoll:

Definition 1.2 *Der* Rang *einer quadratischen Form q ist der Rang einer darstellenden Matrix S für q. Er ändert sich nicht bei Basistransformation.*

Für reelle symmetrische Matrizen haben wir gegen Ende des letzten Semesters den Satz von der Hauptachsen-Transformation bewiesen: Ist S symmetrisch, dann gibt es eine orthogonale Matrix T so, dass

$$D := T^{-1} \cdot S \cdot T$$

eine Diagonalmatrix ist. Weil T orthogonal ist, gilt

$$T^{-1} = T^t, \quad T^{-1} \cdot S \cdot T = T^t \cdot S \cdot T.$$

Daraus folgt

Satz 1.2 (Hauptachsentransformation für quadratische Formen) *Für jede quadratische Form auf dem $\mathbb{R}^n$ es eine Basis, in der sie eine darstellende Matrix in Diagonalform hat.*

Wenden wir die Hauptachsentransformation auf eine symmetrische reelle Matrix S an, so hat die resultierende Diagonalmatrix D auf ihrer Diagonale die Eigenwerte λ_i von S stehen. Mit nicht-orthogonalen Transformationen können wir diese Einträge noch weiter normieren. Dazu verwenden wir:

$$\text{Für } \lambda_i > 0 \text{ ist } \frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_i}} = 1, \qquad \text{für } \lambda_i < 0 \text{ ist } \frac{\lambda_i}{\sqrt{-\lambda_i}\sqrt{-\lambda_i}} = -1.$$

Haben wir die darstellende Matrix auf Diagonalform

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... \\ 0 & \lambda_2 & ... \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

gebracht, so können wir mit der Diagonalmatrix

$$T := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{|\lambda_1|} & 0 & ... \\ 0 & 1/\sqrt{|\lambda_2|} & ... \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

weiter transformieren um auf der Diagonale von $T^t \cdot D \cdot T$ die Werte ± 1 zu erhalten. Natürlich geht dies nur an den Stellen, wo der Eigenwert $\lambda_i \neq 0$ ist. Damit haben wir bewiesen:

Satz 1.3 *Zu einer quadratischen Form auf $\mathbb{R}^n$ gibt es eine Basis, in der die darstellende Matrix Diagonalform hat mit den Diagonaleinträgen*

$$\pm 1 \textit{ oder } 0.$$

Ist p die Anzahl der Einträge $= +1$ auf der Diagonale unserer Matrix, m die Anzahl der Einträge $= -1$ und z die Anzahl der Einträge $= 0$, so können wir diese zusammenfassen (nach Vertauschen von Basisvektoren) um die darstellende Matrix auf eine Form

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1}_p & & \\ & -\mathbb{1}_m & \\ & & 0_z \end{pmatrix}$$

zu bringen. Weil sich der Rang der darstellenden Matrix bei all diesen Transformationen nicht ändert, ist $p+m$ dieser Rang, nach wie vor. Es folgt: $z = n - Rang$, die Anzahl der Nullen auf der Diagonale, ist unabhängig von unserer Transformation immer gleich, egal wie wir die darstellende Matrix auch diagonalisieren. Für die Anzahl der $+1$ und -1-Einträge braucht dies a priori nicht der Fall zu sein, es gilt aber doch. Dazu erst ein Hilfssatz:

Satz 1.4 *Hat die quadratische Form q auf $\mathbb{R}^n$ eine darstellende Matrix wie oben, so p ist die maximale Dimension eines Untervektorraums $U \subset \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft:*

$$\mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in U \quad \Rightarrow \quad q(\mathbf{u}) > 0.$$

Beweis. Wir betrachten die Untervektorräume

$$U = span(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_p), \quad V = span(\mathbf{e}_{p+1}, ..., \mathbf{e}_n).$$

Für $\mathbf{u} = (x_1, ..., x_p, 0, ..., 0) \in U$ ist

$$q(\mathbf{u}) = \sum_{\nu=1}^{p} x_i^2 > 0,$$

falls $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. Und für $\mathbf{v} = (0, ..., 0, x_{p+1}, ..., x_n) \in V$ ist

$$q(\mathbf{v}) = -\sum_{\nu=p+1}^{p+m} x_\nu^2 \leq 0.$$

Damit haben wir einen p-dimensionalen Untervektorraum $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in U \Rightarrow q(\mathbf{u}) > 0$. Ist aber $U' \subset \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum mit Dimension $p' > p$, so folgt aus der Dimensionsformel

$$dim(U' \cap V) = dim(U') + dim(V) - dim(U' + V) \geq p' + (n-p) - n = p' - p > 0,$$

dass der Durchschnitt $U \cap V$ Vektoren $\mathbf{u}' \neq \mathbf{0}$ enthält. Für diese gilt $q(\mathbf{u}') \leq 0$ und $q(\mathbf{u}') > 0$, Widerspruch! □

Wir fassen zusammen:

Satz 1.5 (Sylvesterscher Trägheitssatz) *Die Anzahl p der Einträge $= +1$ und die Anzahl m der Einträge $= -1$ in unserer obigen Diagonalform hängt nur von der symmetrischen Bilinearform ab, und nicht von der Transformation, mit der wir diese Diagonalform herstellen.*

Definition 1.3 *Das Zahlenpaar (p, m) aus Satz 1.5 heißt* Trägheitsindex*, oder kurz* Index *der Bilinearform.*

Aufgabe 1.1 *Es seien* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^3$ *die Standard-Basis und*

$$\mathbf{a}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) *Es sei* Φ *die quadratische Form auf dem* $\mathbb{R}^3$ *mit* $\Phi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{i,j}$. *Bestimmen Sie die darstellende Matrix von* Φ *in der Basis* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$.
b) *Es bezeichne* Ψ *die quadratische Form auf dem* $\mathbb{R}^3$ *mit* $\Psi(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = \delta_{i,j}$. *Bestimmen Sie die darstellende Matrix von* Ψ *in der Standardbasis.*

Aufgabe 1.2 *Bezüglich der Standardbasis des* $\mathbb{R}^3$ *sei eine quadratische Form* b *durch die Matrix*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

definiert. Geben Sie eine Basis von $\mathbb{R}^3$ *an, bezüglich der* b *Diagonalform hat.*

1.1.2 Definitheit

Definition 1.4 *Die quadratischer Form* q *auf dem* $\mathbb{R}^n$ *heißt*

positiv definit	*wenn*	$q(\mathbf{x}) > 0$ *für alle* $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in V$,
positiv semi-definit	*wenn*	$q(\mathbf{x}) \geq 0$ *für alle* $\mathbf{x} \in V$,
negativ definit	*wenn*	$q(\mathbf{x}) < 0$ *für alle* $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in V$,
negativ semi-definit	*wenn*	$q(\mathbf{x}) \leq 0$ *für alle* $\mathbf{x} \in V$,
indefinit	*wenn*	*es in* V *Vektoren* $\mathbf{x}$ *und* $\mathbf{y}$ *gibt mit* $q(\mathbf{x}) > 0$ *und* $q(\mathbf{y}) < 0$.

Die Bezeichnungen 'positiv definit' usw. verwendet man auch für die (symmetrische) darstellende Matrix der quadratischen Form. Ebenso verwendet man die Bezeichnung Index $= (p, m)$ *für quadratische Formen und darstellende Matrizen gleichermaßen.*

Beispiel 1.3 *Auf dem* $\mathbb{R}^2$ *ist die quadratische Form*

$q(\mathbf{x})$		*darstellende Matrix*	*Index*
$x_1^2 + x_2^2$	*positiv definit*	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$(2, 0)$
x_1^2	*positiv semi-definit*	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$(1, 0)$
$-x_1^2 - x_2^2$	*negativ definit*	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$(0, 2)$
$-x_1^2$	*negativ semi-definit*	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$(0, 1)$
$x_1^2 - x_2^2$	*indefinit*	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$(1, 1)$

Die Frage, ob eine quadratische Form positiv definit ist, hat großes praktisches Interesse, wenn man in der Analysis lokale Extrema von Funktionen sucht. In der Differentialrechnung einer Veränderlichen beweist man:

- Hat die Funktion f in x ein lokales Extremum, so ist dort die Ableitung $f'(x) = 0$.
- Dieses Extremum ist ein lokales Maximum, wenn die zweite Ableitung $f''(x) < 0$ ist, und ein lokales Minimumn, wenn $f''(x) > 0$ ist.

Bei Funktionen $f(x_1, ..., x_n)$ von mehreren Veränderlichen hat man n erste Ableitungen, die partiellen Ableitungen $\partial f / \partial x_\nu$, und n^2 zweite partielle Ableitungen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_\mu \partial x_\nu}.$$

Die zweiten partiellen Ableitungen fasst man zusammen zur *Hesse-Matrix*

$$H := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \right)_{\mu,\nu=1,...,n}.$$

Diese Matrix H ist symmetrisch (muss man beweisen) und definiert eine quadratische Form, die Hesseform. Dann beweist man:

- Hat die Funktion $f(x_1, ..., x_n)$ in $\mathbf{x}$ ein lokales Extremum, so sind dort alle partiellen Ableitungen erster Ordnung
$$\frac{\partial f}{\partial x_\nu}(\mathbf{x}) = 0, \quad \nu = 1, ..., n.$$
- Dieses Extremum ist ein lokales Maximum, wenn dort die Hesse-Form
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_\mu \partial x_\nu}(\mathbf{x})$$
negativ definit ist, und ein lokales Minimum, wenn die Hesse-Form positiv definit ist.

Mit der Hauptachsen-Transformation kann man jede symmetrische reelle Matrix diagonalisieren. Nach der Transformation stehen auf der Diagonale die Eigenwerte λ_i der ursprünglichen Matrix. Die zugehörige quadratische Form schreibt sich in den neuen Koordinaten, nach der Hauptachsen-Transformation,

$$q(\mathbf{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + ... + \lambda_n x_n^2.$$

Damit folgt

Satz 1.6 (Eigenwert-Kriterium) *Die symmetrische $n \times n$-Matrix A habe die Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Dann ist A*

	wenn
positiv definit	*alle* $\lambda_i > 0$
positiv semi-definit	*alle* $\lambda_i \geq 0$
negativ definit	*alle* $\lambda_i < 0$
negativ semi-definit	*alle* $\lambda_i \leq 0$
indefinit	*es* $\lambda_i > 0$ *und* $\lambda_j < 0$ *gibt*

Das Problem mit diesem Kriterium ist, dass man die Eigenwerte kennen muss. Und die auszurechnen, das kann manchmal sehr aufwendig, und manchmal ganz einfach algebraisch unmöglich sein. Es gibt noch ein anderes Verfahren. Dazu analysieren wir mal die Situation in kleinen Dimensionen.

Gegeben sei die reelle 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten λ_1 und λ_2. Wir wissen

$$det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2.$$

Aus der Kenntnis der Determinante können wir folgende Schlüsse über die Eigenwerte ziehen:

- Ist $det(A) > 0$, so sind beide Eigenwerte $\neq 0$ und haben dasselbe Vorzeichen. Die Matrix ist definit (enweder positiv oder negativ).
- Ist $det(A) < 0$, so sind beide Eigenwerte $\neq 0$ und haben verschiedenes Vorzeichen. Die Matrix ist garantiert indefinit.

Jetzt müsssen wir nur noch klären, ob im Fall $det(A) > 0$ die Matrix positiv oder negativ definit ist. Aber, wenn A positiv definit ist, muss

$$a = (1, 0) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} > 0$$

sein. Analog muss $a < 0$ sein, wenn A negativ definit ist. Wir haben gefunden:

Für die symmetrische reelle 2×2-Matrix gilt:

$$\begin{array}{lcl} det(A) < 0 & \Leftrightarrow & A \text{ indefinit} \\ det(A) > 0 \text{ und } a > 0 & \Leftrightarrow & A \text{ positiv definit} \\ det(A) > 0 \text{ und } a < 0 & \Leftrightarrow & A \text{ negativ definit} \end{array}$$

Der Fall einer 3×3-Matrix A ist nicht ganz so einfach. Wir analysieren den Fall, dass

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

positiv definit ist. Alle Eigenwerte von A müssen positiv sein, und dann ist auch ihr Produkt

$$det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 > 0.$$

Wir bemerken, dass für alle Vektoren $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} = (x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3$ mit $x_3 = 0$

$$(x_1, x_2, 0) \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = (x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} > 0$$

ist. Die linke obere 2×2-Matrix
$$A_2 := \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$
ist damit positiv definit. Wir wissen

$$A_2 \text{ positiv definit} \quad \Leftrightarrow \quad a > 0 \text{ und } det(A_2) > 0.$$

Wenn A positiv definit ist, dann muss gelten

$$a > 0, \quad det(A_2) = ad - b^2 > 0, \quad det(A) > 0.$$

Diese drei Ungleichungen sind also *notwendig* dafür, dass A positiv definit ist. Aber sind sie auch *hinreichend* ?

Wegen $det(A) > 0$ gibt es zwei Fälle:

- Alle drei Eigenwerte von A sind positiv, und A ist positiv definit.
- Nur ein Eigenwert von A ist positiv, die beiden anderen negativ. Dann ist A indefinit.

Nehmen wir also an, für unsere 3×3-Matrix gelten die drei angegebenen Ungleichungen. Wir müssen den zweiten Fall ausschließen. Wir wissen, die linke obere 2×2-Teilmatrix A_2 ist positiv definit. Unsere zugehörige quadratische Form q erfüllt $q(\mathbf{x}) > 0$ für alle $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ aus dem Unterraum

$$U^+ := \mathbb{R} \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbb{R} \cdot \mathbf{e}_2,$$

der von den beiden ersten Basis-Vektoren aufgespannt wird. Könnte es sein, dass A zwei negative und nur einen positiven Eigenwert hat? Zu den beiden negativen Eigenwerten gehören zwei Eigenvektoren, die einen 2-dimensionalen Untervektorraum V^- aufspannen. Auf diesem ist q negativ definit. Aus der Dimensionsformel folgt
$$dim(U^+ \cap V^-) \geq 2 + 2 - 3 = 1.$$
Insbesondere ist $U^+ \cap V^-$ nicht der Nullraum. Aber auf diesem Durchschnitt ist q sowohl positiv wie negativ definit. Das geht nicht. Widerspruch! Die Matrix kann keine zwei negativen Eigenwerte haben, sie ist positiv definit!

Wenn man diese Diskussion verstanden hat, beweist man ganz schnell durch Induktion nach der Dimension n den

Satz 1.7 (Hurwitz-Kriterium) *Gegeben sei die reelle symmetrische $n \times n$-Matrix*

$$A = (a_{\mu,\nu})_{\mu,\nu=1,...,n}$$

mit ihren linken oberen $k \times k$-Untermatrizen

$$A_k = (a_{\mu,\nu})_{\mu,\nu=1,...,k}, \quad k = 1, ..., n.$$

Dann sind äquivalent:
i) A ist positiv definit.
ii) Alle Determinanten $det(A_k)$, $k = 1, ..., n$, sind > 0.

Der Induktions-Schluss geht ziemlich wörtlich so, wie unsere Diskussion des 3-dimensionalen Falls. Wir wollen diesen Beweis nicht durchführen.

Determinanten von Untermatrizen einer Matrix heißen *Minoren*. Die Minoren zu linken oberen Teilmatrizen heißen *Haupt-Minoren*. Deswegen heißt das soeben angegebene Kriterium auch *Haupt-Minoren-Kriterium*.

Das Kriterium in der angegebenen Form entscheidet nur über Positiv-Definitheit. Aber es ist leicht zu modifizieren für Negativ-Definitheit. Die Matrix A ist genau dann negativ-definit, wenn $-A$ positiv-definit ist. Und die Haupt-Minoren von A hängen ganz einfach mit den Hauptminoren von $-A$ zusammen:

$$(-A)_k = -A_k, \quad det((-A)_k) = (-1)^k \cdot det(A_k).$$

Daraus folgt

Satz 1.8 (Negatives Hurwitz-Kriterium) *Die symmetrische Matrix A ist genau dann negativ-definit, wenn für ihre Haupt-Minoren gilt*

$$det(A_1) < 0, \quad det(A_2) > 0, \quad det(A_3) < 0, \quad det(A_4) > 0, ...$$

Beispiel 1.4 *Gegeben sei die reelle symmetrische 3×3-Matrix*

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ t & 1 & t \\ 0 & t & 1 \end{pmatrix},$$

die von einem reellen Parameter t abhängt. Gesucht ist der Index von A_t. Dazu berechnen wir

$$det((A_t)_2) = 1 - t^2, \quad det(A_t) = 1 - 2t^2.$$

Daraus lesen wir ab:

$\lvert t\rvert$	$< \frac{1}{\sqrt{2}}$	$= \frac{1}{\sqrt{2}}$	$> \frac{1}{\sqrt{2}}$
$det(A_t)$	> 0	$= 0$	< 0

In jedem dieser drei Fälle gibt es aber mehrere Möglichkeiten:

$|t| < 1/\sqrt{2}$: *Der gesuchte Index kann $(3,0)$ sein (drei positive Eigenwerte) oder (1,2) (ein positiver Eigenwert, zwei negative). Aber es ist*

$$det((A_t)_2) = 1 - t^2 \geq 1 - 2t^2 = det(A_t).$$

Nach dem Hurwitz-Kriterium ist A_t positiv definit und der Index $= (3,0)$.

$|t| = 1/\sqrt{2}$: *Jetzt ist*

$$det((A_t)_2) = 1 - t^2 = \frac{1}{2} > 0.$$

Die linke obere 2×2-Matrix $(A_t)_2$ ist positiv definit. Die Matrix hat mindestens zwei positive Eigenwerte. Weil $det(A_t) = 0$ ist, muss der dritte Eigenwert $= 0$ sein. Der Index ist $(2,0)$.

$|t| > 1/\sqrt{2}$: *Wegen $det(A_t) < 0$ kann der Index $(0,3)$ sein (drei negative Eigenwerte) oder $(2,1)$ (zwei positive, ein negativer Eigenwert). Aber gleich der Eintrag $a_{1,1} = 1$ unserer Matrix ist positiv. Dann kann A nicht negativ definit sein. Somit ist der Index $= (2,1)$ für $|t| > 1$. Fassen wir zusammen:*

Begingung	$\lvert t\rvert < 1/\sqrt{2}$	$\lvert t\rvert = 1/\sqrt{2}$	$\lvert t\rvert > 1/\sqrt{2}$
Index	$(3,0)$	$(2,0)$	$(2,1)$

Das Hurwitz-Kriterium ist die einfachste Methode, wenn man eine quadratische Form auf Definitheit untersuchen will. Es hilft aber überhaupt nicht, wenn man eine Transformation braucht, mit der man die quadratische Form diagonalisieren kann. Wenn man eine orthogonale Transformation sucht, die dies leistet, hilft nichts anderes als die uns wohlbekannte, aber leider sehr rechen-intensive Hauptachsentransformation. Wenn es aber nicht darauf ankommt, ob die Transformation orthogonal ist, hilft ein viel weniger aufwendiges Verfahren: die alt-ehrwürdige *quadratische Ergänzung.*

Wir betrachten zunächst den zwei-dimensionalen Fall und geben uns eine quadratische Form

$$a \cdot x^2 + 2b \cdot xy + c \cdot y^2, \quad a \neq 0,$$

vor. Wir schreiben sie mit quadratischer Ergänzung

$$\begin{aligned} ax^2 + 2bxy + cy^2 &= a(x^2 + 2\frac{b}{a}xy) + cy^2 \\ &= a(x + \frac{b}{a}y)^2 - \frac{b^2}{a}y^2 + cy^2 \\ &= a(x + \frac{b}{a}y)^2 + \frac{ac - b^2}{a}y^2 \end{aligned}$$

Mit der Transformation

$$x' = x + \frac{b}{a}y$$

wird daraus

$$a \cdot (x')^2 + \frac{ac - b^2}{a} \cdot y^2.$$

Danach können wir die Definitheit der Form sehr einfach am Vorzeichen der Faktoren ablesen. So finden wir z.B.

a	$ac - b^2$	Signatur
> 0	> 0	$(2, 0)$
> 0	< 0	$(1, 1)$
< 0	> 0	$(0, 2)$
< 0	< 0	$(1, 1)$

Wegen

$$det \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = ac - b^2$$

ist das Ergebnis völlig im Einklang mit dem Hurwitz-Kriterium.

Der drei-dimensionale Fall geht im Prinzip genauso, ist nur etwas aufwendiger. Sei die quadratische Form

$$a \cdot x^2 + 2b \cdot xy + 2c \cdot xz + d \cdot y^2 + 2e \cdot yz + f \cdot z^2, \quad a \neq 0,$$

vorgegeben. Wir schreiben sie als

$$\begin{aligned} & a(x^2 + 2\frac{b}{a}xy + 2\frac{c}{a}xz) + dy^2 + 2eyz + fz^2 \\ = \; & a(x + \frac{b}{a}y + \frac{c}{a}z)^2 - a(\frac{b}{a}y + \frac{c}{a}z)^2 + dy^2 + 2eyz + fz^2 \\ = \; & a(x')^2 + (d - \frac{b^2}{a})y^2 + 2(e - \frac{bc}{a})yz + (f - \frac{c^2}{a})z^2. \end{aligned}$$

Hier haben wir

$$x' := x + \frac{b}{a}y + \frac{c}{a}z$$

gesetzt und den quadratischen Summand $a(x')^2$ abgespalten. Es bleibt noch eine quadratische Form in y und z zu transformieren, das geht aber wie im zwei-dimensionalen Fall, wir wollen das hier in der vollen Allgemeinheit nicht mehr tun. Statt dessen:

Beispiel 1.5 *Gegeben sei die quadratische Form*

$$3 \cdot x^2 - 4 \cdot xy - 6 \cdot xz + y^2 + 2 \cdot yz + 5 \cdot z^2.$$

Wir transformieren zunächst

$$\begin{aligned} 3x^2 - 4xy - 6xz &= 3(x^2 - \frac{4}{3}xy - 2xz) \\ &= 3(x - \frac{2}{3}y - z)^2 - 3(\frac{2}{3}y + z)^2 \\ &= 3(x')^2 - \frac{4}{3}y^2 - 4yz - 3z^2 \end{aligned}$$

Hier haben wir

$$x' := x - \frac{2}{3}y - z$$

gesetzt. Es bleibt noch die folgende quadratische Form in y und z zu transformieren:

$$\begin{aligned} & (-\frac{4}{3}y^2 - 4yz - 3z^2) + (y^2 + 2yz + 5z^2) \\ = \quad & -\frac{1}{3}y^2 - 2yz + 2z^2 \\ = \quad & -\frac{1}{3}(y^2 + 6yz) + 2z^2 \\ = \quad & -\frac{1}{3}(y + 3z)^3 + 3z^2 + 2z^2 \\ = \quad & -\frac{1}{3}(y')^2 + 5z^2 \end{aligned}$$

Mit der Transformation

$$x' := x - \frac{2}{3}y - z, \quad y' := y + 3z$$

haben wir die Gestalt

$$3 \cdot (x')^2 - \frac{1}{3} \cdot (y')^2 + 5z^2$$

bekommen. Aus den Vorzeichen der Koeffizienten lesen wir ab: Die quadratische Form hat die Signatur $(2, 1)$.

Das Ergebnis hätten wir auch durch Diskussion der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

dieser quadratischen Form sehen können: Die Determinante ist $det(A) = -5 < 0$. *Die linke obere* 2×2*-Matrix hat die Determinante* $-1 < 0$, *ist also indefinit. Dann kann die ganze Matrix A nicht negativ definit sein. Es bleibt nur die Möglichkeit, dass A die Signatur* $(2, 1)$ *hat.*

Aufgabe 1.3 **a)** *Finden Sie die symmetrischen Bilinearformen und deren darstellende Matrizen in der Standardbasis des* $\mathbb{R}^2$ *zu den quadratischen Formen*

$$q(x,y) = x^2, \quad x^2 - y^2, \quad 2xy, \quad (x+y)^2.$$

b) *Zeigen Sie: Die quadratische Form*

$$q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

gehört genau dann zu einer symmetrischen Bilinearform vom Rang 2*, wenn*

$$b^2 \neq ac.$$

Aufgabe 1.4 *Gegeben sei die quadratische Form*

$$4 \cdot xy + y^2.$$

a) *Bestimmen Sie die symmetrische* 2×2*-Matrix* A *zu dieser Form.*
b) *Bestimmen Sie die Signatur durch Ermittlung der Vorzeichen der Eigenwerte von* A*.*
c) *Bringen Sie die Form durch quadratische Ergänzung auf Diagonalform.*

Aufgabe 1.5 *Gegeben sei die quadratische Form*

$$x^2 - 4 \cdot xy - 4 \cdot y^2.$$

a) *Bestimmen Sie die symmetrische* 2×2*-Matrix* A *zu dieser Form.*
b) *Bestimmen Sie die Signatur durch Ermittlung der Vorzeichen der Eigenwerte von* A*.*
c) *Bringen Sie die Form durch quadratische Ergänzung auf Diagonalform.*

Aufgabe 1.6 *Gegeben sei die quadratische Form*

$$3 \cdot x^2 - 4 \cdot xy + 6 \cdot xz + 2 \cdot y^2 - 4 \cdot yz + 6 \cdot z^2.$$

a) *Ermitteln Sie die symmetrische* 3×3*-Matrix zu dieser Form und untersuchen Sie die Form auf Definitheit mit dem Hurwitz-Kriterium.*
b) *Diagonalisieren Sie die Form mit quadratischer Ergänzung.*

Aufgabe 1.7 *Gegeben sei die quadratische Form*

$$-x^2 - 2 \cdot xy + 2 \cdot xz - 3 \cdot y^2 + 6 \cdot yz - 6 \cdot z^2.$$

a) *Ermitteln Sie die symmetrische* 3×3*-Matrix zu dieser Form und untersuchen Sie die Form auf Definitheit mit dem Hurwitz-Kriterium.*
b) *Diagonalisieren Sie die Form mit quadratischer Ergänzung.*

Aufgabe 1.8 *Gegeben sei die Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte dieser Matrix und damit ihre Signatur.

Aufgabe 1.9 *Diagonalisieren Sie die Form*

$$xy + xz + yz$$

mittels quadratischer Ergänzung. (Hinweis: Mit der Transformation $x = u + v$, $y = u - v$ *wird* $xy = u^2 - v^2$*.)*

Aufgabe 1.10 *Berechnen Sie durch Induktion nach* n *die Determinante der reellen* $n \times n$*-Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ 0 & & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

b) *Zeigen Sie, dass* A *negativ definit ist.*

Aufgabe 1.11 *Zeigen Sie, dass die reelle* 4×4*-Matrix*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

positiv definit ist.

Aufgabe 1.12 *Für welche* $s \in \mathbb{R}$ *ist die reelle symmetrische Matrix*

$$A_s = \begin{pmatrix} 1+s & 1-s & -1 \\ 1-s & 5+s & -3 \\ -1 & -3 & 3-4s^2 \end{pmatrix}$$

positiv definit?

Aufgabe 1.13 *Gegeben seien die reellen* 4×4*-Matrizen*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}.$$

Wieviele negative Eigenwerte hat $S^t \cdot A \cdot S$*?*

Aufgabe 1.14 *Zeigen Sie, dass die Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

positiv definit ist.

1.2 Kegelschnitte

Ein Kegelschnitt C in der reellen Ebene $\mathbb{R}^2$ wird gegeben durch eine Gleichung

$$\underbrace{a \cdot x^2 + 2b \cdot xy + c \cdot y^2}_{quadratisch} + \underbrace{d \cdot x + e \cdot y}_{linear} + f = 0, \quad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}.$$

Die Art und die Gestalt dieses Kegelschnittes hängt dabei von allen sechs Konstanten $a, ..., f$ sehr wesentlich ab. Unser Hauptanliegen ist es hier, durch eine geeignete Transformation die Gleichung auf eine Form zu bringen, der man etwas ansehen kann (Normalform). Dabei verwenden wir zwei verschiedene Sorten von Transformationen des $\mathbb{R}^2$:

Affine Transformationen	$\mathbf{x} \mapsto T \cdot \mathbf{x} + \mathbf{t}$	$T \in GL(2, \mathbb{R})$, $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^2$
Bewegungen	$\mathbf{x} \mapsto U \cdot \mathbf{x} + \mathbf{t}$	$U \in GL(2, \mathbb{R})$ orthogonal , $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^2$

Bewegungen ändern nur die Lage des Kegelschnittes in der Ebene, Längen, Winkel und Gestalt bleiben erhalten. Solche Transformationen heißen in der Schule *Kongruenzen.* Bei den (allgemeineren) affinen Transformationen ändert sich vieles, aber manches für uns wesentliche bleibt doch erhalten. Vor allem sind affine Transformationen viel einfacher zu finden und zu handhaben.

1) Zuerst sehen wir uns den quadratischen Anteil

$$a \cdot x^2 + 2b \cdot xy + c \cdot y^2 = (x, y) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

an. Das ist eine quadratische Form

$$q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t \cdot A \cdot \mathbf{x}$$

mit der symmetrischen Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Durch eine geeignete lineare Transformation T können wir sie auf Diagonalform

$$D = T^t \cdot A \cdot T$$

bringen. Das tun wir und erhalten eine Gleichung (neue Koeffizienten a, c, d, e)

$$a \cdot x^2 + c \cdot y^2 + d \cdot x + e \cdot y + f = 0.$$

Der Mischterm $2b \cdot xy$ ist verschwunden.

2) Danach wollen wir den linearen Anteil loswerden. Wenn a und $c \neq 0$ sind geht das einfach durch quadratische Ergänzung:

$$ax^2 + dx = a(x^2 + \frac{d}{a}x) = a(x + \frac{d}{2a})^2 - \frac{d^2}{4a},$$

$$cy^2 + ey = c(y^2 + \frac{e}{c}y) = c(y + \frac{e}{2c})^2 - \frac{e^2}{4c}.$$

Mit der Transformation

$$x' = x + \frac{d}{2a}, \quad y' := y + \frac{e}{2c}$$

haben wir die Gleichung auf die Form

$$a \cdot (x')^2 + c \cdot (y')^2 + f - \frac{d^2}{4a} - \frac{e^2}{4c} = 0$$

gebracht.

3) Schließlich schaffen wir noch die Konstante auf die rechte Seite. Dazu setzen wir

$$f' := -f + \frac{d^2}{4a} + \frac{e^2}{4c}$$

und erhalten

$$a \cdot (x')^2 + c \cdot (y')^2 = f', \quad a, c \neq 0.$$

Diese Gleichung wollen wir jetzt diskutieren. Der dümmste anzunehmende Fall ist $f' = 0$. Das Dumme daran ist, dass man es nicht am Anfang, sondern erst nach den quadratischen Ergänzungen sieht, ob dieser Fall eintritt. Dann haben wir

$$a \cdot x^2 + c \cdot y^2 = 0.$$

Jetzt müssen wir die erste Fall-Unterscheidung machen:

- $a > 0$ und $c > 0$: Für $x \neq 0$ oder $y \neq 0$ ist immer $ax^2 > 0$ oder $cy^2 > 0$. Die Gleichung ist nur erfüllt für $x = y = 0$. Die einzige Lösung ist der Ursprung $\mathbf{0}$. Sowas ist ein *Entartungsfall.*
- $a < 0$ und $b < 0$: Das führt auf genau denselben Entartungsfall, nur mit anderem Vorzeichen.
- $a > 0$ und $b < 0$: Wir können schreiben

  $$a = \alpha^2, \quad c = -\beta^2$$

  um die Gleichung in die Form

  $$(\alpha \cdot x)^2 - (\beta \cdot y)^2 = (\alpha \cdot x + \beta \cdot y)(\alpha \cdot x - \beta \cdot y) = 0$$

  zu bringen. Die Gleichung beschreibt ein Paar sich schneidender Geraden mit den Gleichungen

  $$\alpha \cdot x \pm \beta \cdot y = 0.$$

  Auch nicht gerade das, was man sich unter einem Kegelschnitt vorstellt. Also, wieder ein Entartungsfall!
- $a < 0$ und $b > 0$: Das liefert, genau wie eben, wieder zwei sich schneidende Geraden.

Das sind alle Fälle, wo die Konstante f' auf der rechten Seite $= 0$ ist, nichts wie Entartungen. Jetzt nehmen wir also $f' \neq 0$ an, und dividieren die Gleichung sofort durch diese Konstante. Mit neuen Koeffizienten a, b wird daraus

$$a \cdot x^2 + b \cdot y^2 = 1.$$

Wieder müssen wir Fallunterscheidungen bezüglich der Vorzeichen von a und b machen:

- $a = 1/\alpha^2 > 0$, $b = 1/\beta^2 > 0$: Die Gleichung hat die Form
$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1.$$
Der dadurch beschriebene Kegelschnitt heißt (achsen-parallele) Ellipse.
- $a = 1/\alpha^2 > 0$, $b = -1/\beta^2 < 0$: Die Gleichung hat die Form
$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1,$$
Der dadurch beschriebene Kegelschnitt heißt (achsen-parallele) Hyperbel.
- $a = -1/\alpha^2 < 0$, $b = 1/\beta^2 > 0$: Bis auf Vertauschung von x und y ist dies derselbe Fall, wie eben, eine Hyperbel.
- $a = -1/\alpha^2 < 0$, $b = -1/\beta^2 < 0$: Die Gleichung wird
$$-\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1.$$
Das ist ein ganz besonders unschöner Entartungsfall: Die linke Seite ist immer ≤ 0, die rechte Seite echt positiv. Die Gleichung ist nie zu erfüllen und beschreibt die leere Menge.

Wir stellen fest: Bei all diesen Fällen kommt es entscheidend auf die Vorzeichen der Koeffizienten a und c an, und auf die Konstante f' auf der rechten Seite. Die Konstante f' können wir erst nach der Transformation anschauen. Anders ist es mit den Vorzeichen von a und c. Die werden nämlich durch die Signatur der ursprünglichen Matrix A gegeben, und sind von der Transformation unabhängig. Wir fassen das Resultat unserer Diskussion zusammen. Dabei gehen wir aus von einem Kegelschnitt mit einer Gleichung
$$\mathbf{x}^t \cdot A \cdot \mathbf{x} = c, \quad det(A) \neq 0.$$

Satz 1.9 *Nach Diagonalsisierung beschreibt obige Gleichung folgende Kegelschnitte:*

c	*Signatur von A*	*Kegelschnitt*
> 0	$(2,0)$	*Ellipse*
	$(1,1)$	*Hyperbel*
	$(0,2)$	$\emptyset$
$= 0$	$(2,0)$	*Nullpunkt* $\mathbf{0}$
	$(1,1)$	*zwei schneidende Geraden*
	$(0,2)$	*Nullpunkt* $\mathbf{0}$
< 0	$(2,0)$	$\emptyset$
	$(1,1)$	*Hyperbel*
	$(0,2)$	*Ellipse*

Dies waren allerdings erst die Fälle, wo die symmetrische Koeffizientenmatrix A zwei Eigenwerte $\neq 0$ hat, d.h., wo A invertierbar ist. Bleiben die Fälle mit $det(A) = 0$. Wir spielen alles nochmal durch:

1) Zuerst diagonalisieren wir A. Wir erhalten eine Diagonalmatrix vom Rang ≤ 1. Mindestens ein Diagonaleintrag ist $= 0$. Aber, wenn beide Diagonaleinträge $= 0$ sind, hatte schon vor der Transformation die Matrix A den Rang $= 0$. Wir hatten gar keine quadratische, sondern nur eine lineare

Gleichung, Stoff des ersten Semesters. Das schließen wir hier aus. Also haben wir genau einen Diagonaleintrag $\neq 0$. Nachdem wir eventuell x mit y vertauschen, können wir annehmen, dass es der Koeffizient bei x^2 ist. Unsere Gleichung sieht dann so aus:

$$a \cdot x^2 + d \cdot x + e \cdot y + f = 0.$$

Hier können wir noch durch a dividieren und erhalten (neue Konstanten d,e,f)

$$x^2 + d \cdot x + e \cdot y + f = 0.$$

2) Jetzt wollen wir die linearen Anteile beseitigen. Mit $x' = x + d/2$ geht das aber nur bei x, bei y können wir jetzt nichts machen. Die Gleichung wird (wir schreiben x statt x' und nehmen eine neue Konstante f)

$$x^2 + e \cdot y + f = 0.$$

3) Wir diskutieren die Fälle abhängig von den Konstanten e und f.

- $e \neq 0$: Wir können setzen $y' := y + f/e$ und die Gleichung auf die Form

  $$x^2 + ey' = 0$$

  bringen. Wenn wir wollen, können wir hier $p := -1/e$ setzen und erhalten (wieder schreiben wir y statt y')

  $$y = p \cdot x^2,$$

  eine (achsenparallele) Parabel.

- $e = 0$: Die Gleichung hat die langweilige Form

  $$x^2 + f = 0.$$

  In Abhängigkeit von f erhalten wir die leere Menge für $f > 0$, die Gerade $x = 0$ (doppelt zu zählen, weil sie in der Form $x^2 = 0$ vorliegt) für $f = 0$, und zwei parallele Geraden $x = \pm\sqrt{-f}$ für $f < 0$. Das sind lauter Entartungsfälle.

Wie schon oben gesagt, können wir unsere endgültigen Formen erreichen, indem wir affie Transformationen oder Bewegungen verwenden. Tun wir letzteres, so folgt

Satz 1.10 (Metrische Klassifikation der Kegelschnitte) *Jede Gleichung eines Kegelschnittes in der Ebene* $\mathbb{R}^2$ *lässt sich durch eine Bewegung (=Kongruenzabbildung) auf eine der folgenden Normalformen transformieren:*

	Kegelschnitt	Gleichung
Nicht-entartete Kegelschnitte	*Ellipse:*	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
	Hyperbel:	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
	Parabel:	$y=px^2$
Entartete Kegelschnitte	$\emptyset$:	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$
		$x^2=-a^2$
	Punkt:	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$
	Geradenpaar:	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$
	Parallelenpaar:	$y^2=a^2$
	Doppelgerade:	$y^2=0$

Das ist ein schöner Satz. Das Unschöne daran sind nur die vielen Entartungsfälle. Und das Unschönste ist, dass man vor der Transformation nicht weiß, ob ein Entartungsfall rauskommt.

Beispiel 1.6 *Wir suchen die metrische Normalform des Kegelschnittes mit der Gleichung*

$$11x^2+10\sqrt{3}xy+y^2+22x+10\sqrt{3}y+27=0.$$

Die Matrix zur quadratischen Form

$$11x^2+10\sqrt{3}xy+y^2$$

ist

$$A=\begin{pmatrix} 11 & 5\sqrt{3} \\ 5\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Auf diese Matrix wenden wir die Hauptachsentransformation an. Dazu brauchen wir das charakteristische Polynom

$$\chi_A(\lambda)=(11-\lambda)(1-\lambda)-75=\lambda^2-12\lambda-64$$

und die Eigenwerte

$$\lambda_{1,2}=6\pm\sqrt{36+64}=6\pm 10=16,-4.$$

Zugehörige Eigenvektoren sieht man der Matrix an:

$$\lambda_1=16: \quad \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_2=-4: \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Nachdem wir diese Eigenvektoren normieren, können wir transformieren

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\sqrt{3}\xi+\eta) \\ \frac{1}{2}(\xi-\sqrt{3}\eta) \end{pmatrix}.$$

Damit bekommen wir die Kegelschnittgleichung in den neuen Koordinaten ξ und η

$$\begin{aligned}
\frac{11}{4}(\sqrt{3}\xi+\eta)^2+\frac{10\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}\xi+\eta)(\xi-\sqrt{3}\eta)+\frac{1}{4}(\xi-\sqrt{3}\eta)^2 \\
+11(\sqrt{3}\xi+\eta)+5\sqrt{3}(\xi-\sqrt{3}\eta)+27 &= \\
\left(\frac{33}{4}+\frac{30}{4}+\frac{1}{4}\right)\xi^2+\left(\frac{11\sqrt{3}}{2}-\frac{15\sqrt{3}}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\xi\eta+\left(\frac{11}{4}-\frac{30}{4}+\frac{3}{4}\right)\eta^2 \\
+16\sqrt{3}\xi-4\eta+27 &= \\
16\xi^2-4\eta^2+16\sqrt{3}\xi-4\eta+27 &= 0
\end{aligned}$$

Jetzt ist die Zeit gekommen, um mit quadratischen Ergänzungen die linearen Anteile weg zu transformieren:

$$16(\xi^2+\sqrt{3}\xi)-4(\eta^2+\eta)+27=16\left(\xi+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-4\left(\eta+\frac{1}{2}\right)^2+16=0.$$

Wenn wir jetzt noch translatieren

$$\xi' := \xi+\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \eta' := \eta+\frac{1}{2},$$

finden wir die Hyperbelgleichung

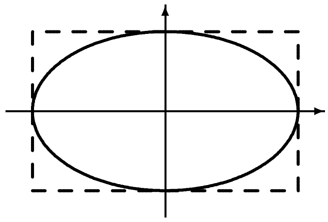
$$(\xi')^2-\frac{(\eta')^2}{2^2}=-1.$$

Beispiel 1.7 *Jetzt wollen wir die Kegelschnitt-Gleichung aus dem letzten Beispiel nochmal transformieren, aber nicht mit einer Bewegung (Kongruenzabbildung), sondern affin, mit quadratischer Ergänzung. Wir schreiben*

$$\begin{aligned}
11x^2+10\sqrt{3}xy+y^2+22x+10\sqrt{3}y+27 &= \\
11\cdot\left(x^2+\frac{10\sqrt{3}}{11}xy+2x\right)+y^2+10\sqrt{3}y+27 &= \\
11\cdot\left(x+\frac{5\sqrt{3}}{11}y+1\right)^2-\frac{75}{11}y^2-10\sqrt{3}y-11+y^2+10\sqrt{3}y+27 &= \\
11(x')^2-\frac{64}{11}y^2+16 &= 0,
\end{aligned}$$

eine Hyperbelgleichung. Die Koeffizienten sind ziemlich anders herausgekommen, aber es ist eine Hyperbel geblieben. Nun entscheiden Sie selbst, welche Transformation schneller geht!

Bei einer Bewegung ändern sich die gestaltlichen Verhältnisse der Kegelschnitte nicht. Das habe ich sicher schon ein paar mal erwähnt. Aber was meine ich damit? Dazu muss ich die nicht-entarteten Kegelschnitte einmal - achsenparallel - zeichnen:

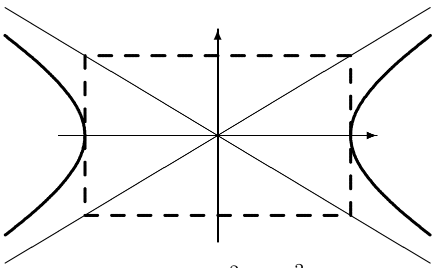


Ellipse $\quad \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$

Die achsenparallele Ellipse ist spiegelsymmetrisch zu den Koordinatenachsen. Diese heißen deswegen *Hauptachsen* der Ellipse. Die Abschnitte, die sie darauf ausschneidet, heißen *Hauptachsenabschnitte*. Bei einer Ellipse mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

sind diese Abschnitte $= a$ auf der x-Achse und $= b$ auf der y-Achse.



Hyperbel $\quad \frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$

Auch die Hyperbel ist spiegelsymmetrisch zu den Koordinatenachsen, und diese heißen auch wieder Hauptachsen. Aber nur auf einer dieser Achsen schneidet die Hyperbel einen Hauptachsenabschnitt aus. (In unserem Fall auf der x-Achse.) Trotzdem hat der andere Hauptachsenabschnitt auch eine geometrische Bedeutung. Sind a und b die Hauptachsenabschnitte, so heißen die beiden Geraden durch den Ursprung mit den Steigungen $\pm b/a$ die *Asymptoten* der Hyperbel. An diese Geraden nähert sich die Hyperbel nämlich asymptotisch an. Denn wegen

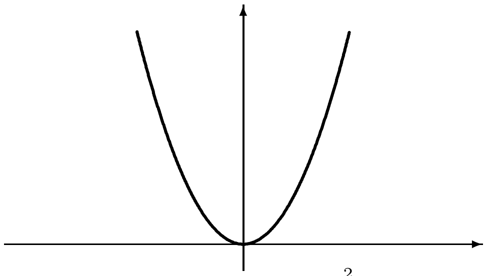
$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{b}{a}x + \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \right) = \infty$$

folgt z.B. aus

$$\left(\frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \right) \cdot \underbrace{\left(\frac{b}{a}x + \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \right)}_{\to\infty} = \frac{b^2}{a^2}x^2 - \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) = b^2$$

dass

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \right) = 0.$$



Parabel $\quad y = \frac{x^2}{2}$

Die Parabel ist nur zu einer Koordinatenachse spiegelsymmetrisch. Das unterscheidet sie von Ellipse und Hyperbel. Insbesondere sind Ellipse und Hyperbel punktsymmetrisch zum Schnittpunkt beider Koordinatenachsen. Die Parabel dagegen hat keine Punktsymmetrie.

Definition 1.5 *Es sei $q(x,y) = 0$ die Gleichung eines Kegelschnitts. Ein Punkt $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ heißt* Mittelpunkt *des Kegelschnitts, wenn sich die Gleichung bei der Punktspiegelung*

$$S_{\mathbf{p}} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{p} - (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 2\mathbf{p} - \mathbf{x}$$

an $\mathbf{p}$ *nicht ändert. Ein Kegelschnitt, der einen Mittelpunkt besitzt, heißt* Mittelpunktskegelschnitt*.*

Ellipse und Hyperbel sind Mittelpunktskegelschnitte, die Parabel ist keiner.

Bei einer Bewegung gehen die Hauptachsen eines Kegelschnittes auf die Hauptachsen des Bildkegelschnittes. Bei einer affinen Transformation ist das i.A. nicht der Fall.

Beispiel 1.8 *Wir betrachten die achsenparallele Ellipse mit der Gleichung*

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

Auf der x-Achse hat sie den Hauptachsenabschnitt 2 und auf der y-Achse den Hauptachsenabschnitt 1. Als affine Transformation nehmen wir

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ y \end{pmatrix}.$$

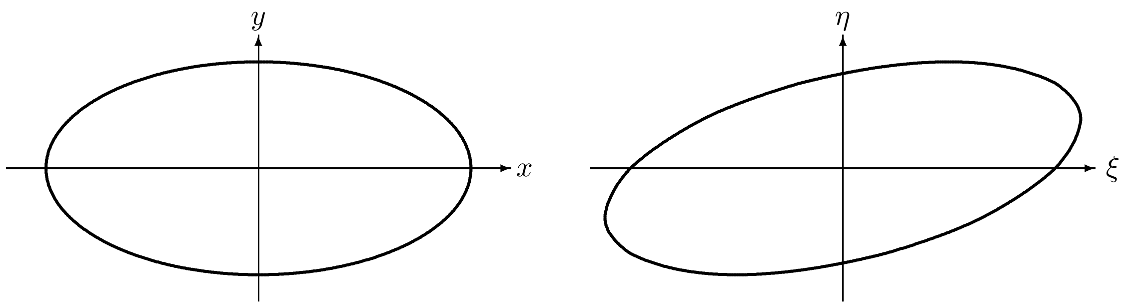
Das Bild der Ellipse in der ξ,η-Ebene ermitteln wir, indem wir

$$x = \xi - \eta, \quad y = \eta$$

in die ursprüngliche Gleichung einsetzen Das Ergebnis ist

$$\frac{1}{4}(\xi - \eta)^2 + \eta^2 = \frac{1}{4}\xi^2 - \frac{1}{2}\xi\eta + \frac{5}{4}\eta^2 = 1.$$

Gezeichnet sieht das so aus:



Jetzt rechnen wir die Hauptachsen und ihre Abschnitte für die Bild-Ellipse aus, so wie wir das gelernt haben. Zuerst stellen wir die Koeffizienten-Matrix auf:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

Deren charakteristisches Polynom ist

$$(\frac{1}{4}-\lambda)(\frac{5}{4}-\lambda)-\frac{1}{16}=\lambda^2-\frac{3}{2}\lambda+\frac{1}{4}$$

mit den Nullstellen

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{4}(3\pm\sqrt{5}).$$

Daraus kann man schon die Halbachsenabschnitte ausrechnen. Numerisch sind die etwa

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\simeq 0.874, \qquad \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\simeq 2.288.$$

Für die Halbachsen selbst braucht man die Eigenvektoren. Wie üblich findet man die senkrecht aufeinender stehenden Vektoren

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2+\sqrt{5} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 2-\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Keiner davon weist in die Richtung der ξ-Achse (Bild der x-Achse) oder der $\xi-\eta$-Winkelhalbierenden (Bild der y-Achse).

Aufgabe 1.15 *Gegeben seien im $\mathbb{R}^3$ der Punkt $P=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und die Gerade $G=\mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Durch Rotation von P um G entsteht ein Kreis und durch Projektion dieses Kreises in die x,y-Ebene eine Ellipse. Man bestimme ihre Gleichung und berechne die Richtungen und Längen ihrer Hauptachsen.*

Aufgabe 1.16 *Man zeige, dass durch*

$$6x^2+12xy+y^2+12x-18y=0$$

eine Hyperbel definiert ist und bestimme ihre Asymptoten.

Aufgabe 1.17 *Bestimmen Sie alle Kegelschnitte in* $\mathbb{R}^2$*, die die vier Ecken*

$$(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)$$

eines Quadrats enthalten. Welche Kegelschnittstypen treten auf?

Aufgabe 1.18 *Im euklidischen* $\mathbb{R}^2$ *seien die drei Quadriken*

$$\begin{array}{rclcl} q_1(x,y) & = & 2x^2+2xy+2y^2-1 & = & 0 \\ q_2(x,y) & = & x^2+xy+1 & = & 0 \\ q_3(x,y) & = & 3x^2+y^2-1 & = & 0 \end{array}$$

gegeben. Bestimmen Sie unter ihnen alle Paare, die zueinander metrisch äquivalent sind, und geben Sie gegebenenfalls eine Isometrie (Kongruenzabbildung) an, die die eine Qaudrik auf die andere abbildet.

Aufgabe 1.19 *Es sei* r *eine positive reelle Zahl und*

$$ax^2+bxy+cy^2=r$$

die Gleichung einer Ellipse in der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$*. Beweisen Sie, dass das Produkt der Hauptachsenabschnitte der Ellipse gleich*

$$\frac{2r}{\sqrt{4ac-b^2}}$$

ist.

Aufgabe 1.20 *Man zeige, dass durch die Gleichung*

$$14x^2-4xy+11y^2-28x+4y+13=0$$

im $\mathbb{R}^2$ *eine Ellipse beschrieben wird und bestimme deren Mittelpunkt, die Hauptachsen und die Längen der Achsenabschnitte.*

Aufgabe 1.21 *Man bestimme die metrische Normalform der Quadrik*

$$4(x^2+y^2)+2xy+x+y-\frac{9}{10}=0$$

sowie ihren Mittelpunkt, die Hauptachsen und die Länge der Achsenabschnitte.

Aufgabe 1.22 *Bestimmen Sie die metrische Normalform des Kegelschnittes*

$$\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 3x^2+8xy-3y^2+12x+6y-1=0\right\}.$$

Aufgabe 1.23 *In Abhängigkeit von einem Parameter* $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, *sei der Kegelschnitt*

$$C_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+2axy+y^2+2y+1=0\}$$

gegeben. Zeigen Sie: C_a *ist eine Ellipse für* $a^2<1$*, Parabel für* $a^2=1$*, und eine Hyperbel für* $a^2>1$.

Aufgabe 1.24 *In der reellen affinen Ebene sei eine Parabel gegeben, sowie eine Schar paralleler Geraden, welche die Parabel jeweils in zwei Punkten schneiden. (Dies heißt: Gegeben seien unendlich viele, zueinander parallele Geraden, welche die Parabel in genau zwei Punkten schneiden.) Zeigen Sie: Die Mittelpunkte der Strecken, welche von den jeweiligen Schnittpunkten auf diesen Geraden begrenzt werden, liegen wieder auf einer Geraden.*

Aufgabe 1.25 **a)** *Zeigen Sie, dass die beiden Quadriken*

$$\begin{aligned} Q_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 + 2xy + 2y^2 = 1\} \\ Q_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 + 2xy + 3y^2 = 1\} \end{aligned}$$

zueinander affin äquivalent sind.
b) *Bestimmen Sie eine affine Transformation im $\mathbb{R}^2$, die Q_1 auf Q_2 abbildet.*

Aufgabe 1.26 *Durch die Gleichung*

$$2x^2 + xy - 6y^2 + 4x + y + 2 = 0$$

wird eine Quadrik in der Ebene gegeben. Bestimmen Sie deren Mittelpunkt und zeigen Sie, dass die Quadrik ein Geradenpaar ist.

Aufgabe 1.27 *Man untersuche die ebenen Quadriken*

$$Q_1 : x^2 + 2xy + 3y^2 = 1, \quad Q_2 : x^2 + 4xy + 6y^2 = 1$$

auf metrische und affine Äquivalenz. (Hinweis: Die Normalformen müssen dazu nicht explizit bestimmt werden.)

Aufgabe 1.28 *Bestimmen Sie alle Parameter $s \in \mathbb{R}$, für welche die Gleichung*

$$(sx_1)^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 + s + 1 = 0$$

eine Hyperbel beschreibt. (Hinweis: Die Transformation der Gleichung in Normalform ist dazu nicht notwendig.)

1.3 Quadratische Flächen

Quadratische Flächen sind die Quadriken im drei-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$. Alles geht genauso wie bei den Kegelschnitten, nur haben wir eine Dimension mehr. In kompakter Matrix-Form kann man die Gleichung einer solchen Quadrik schreiben

$$\underbrace{\mathbf{x}^t \cdot A \cdot \mathbf{x}}_{quadratisch} + \underbrace{\mathbf{b}^t \cdot \mathbf{x}}_{linear} + k = 0$$

mit einer symmetrischen 3×3-Matrix A und einem Koeffizientenvektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$. Als erstes bringen wir die Matrix A durch eine Hauptachsentransformation auf Diagonalform. Sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Eigenwerte, so erhalten wir eine Gleichung der Form

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + b_1 x + b_2 y + b_3 z + k = 0.$$

Zu beachten ist, dass der lineare Anteil mit-transformiert werden muss.

Die wichtigste Fall-Unterscheidung ist die nach dem Rang von A. Dabei können wir wieder $Rang(A) = 0$ ausschließen, weil dies auf $A = 0$ und eine lineare Gleichung führen würde.

$\underline{Rang(A) = 3}$: Jetzt sind alle $\lambda_i \neq 0$ und wir können drei quadratische Ergänzungen vornehmen:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 x^2 + b_1 x &= \lambda_1(x^2 + \frac{b_1}{\lambda_1}x) = \lambda_1(x + \frac{b_1}{2\lambda_1})^2 - \frac{b_1^2}{4\lambda_1}, \\
\lambda_2 y^2 + b_2 y &= \lambda_2(y^2 + \frac{b_2}{\lambda_2}y) = \lambda_2(y + \frac{b_2}{2\lambda_2})^2 - \frac{b_2^2}{4\lambda_2}, \\
\lambda_3 z^2 + b_3 z &= \lambda_3(z^2 + \frac{b_3}{\lambda_3}z) = \lambda_3(z + \frac{b_3}{2\lambda_3})^2 - \frac{b_3^2}{4\lambda_3}.
\end{aligned}$$

Wenn wir für die neue Konstante

$$k - \frac{b_1^2}{4\lambda_1} - \frac{b_2^2}{4\lambda_2} - \frac{b_3^2}{4\lambda_3}$$

$-k$ schreiben, kommen wir zu einer Gleichung

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = k.$$

Wenn wir die Gleichung mit -1 durchmultiplizieren, ändern alle Koeffizienten ihr Vorzeichen, aber die Quadrik bleibt als Menge gleich. Deswegen können wir gleich $k \geq 0$ annehmen. Allerdings ändern die Eigenwerte dabei ihr Vorzeichen. Wenn $k > 0$ ist, können wir auch noch durch diese Konstante austeilen, um $k = 1$ zu erreichen. Weil die $\lambda_i \neq 0$ sind, können wir setzen

$$\lambda_1 = \pm\frac{1}{a^2}, \quad \lambda_2 = \pm\frac{1}{b^2}, \quad \lambda_3 = \pm\frac{1}{c^2}.$$

Die Vorzeichen sind hier die Vorzeichen der Eigenwerte. Deren Verteilung ist durch die Signatur der neuen Koeffizientenmatrix festgelegt. Dabei können wir noch die Koordinaten so vertauschen, dass die positiven Vorzeichen zuerst kommen. Dann gibt es folgende Fälle:

k	Signatur	Gleichung	Name
$=1$	$(3,0)$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	Ellipsoid
	$(2,1)$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	Einschaliges Hyperboloid
	$(1,2)$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	Zweischaliges Hyperboloid
	$(0,3)$	$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	$\emptyset$
$=0$	$(3,0)$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$	ein Punkt
	$(2,1)$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	Kegel

Die Fälle Signatur $= (1, 2)$ oder $= (0, 3)$ bei $k = 0$ sind nach Multiplikation mit -1 äquivalent zu den Fällen Signatur $= (2, 1)$ oder $= (3, 0)$. Wir brauchen sie nicht gesondert aufzuführen.

Die Namen in dieser Tabelle nehmen wir erst einmal so hin. Warum diese Quadriken so heißen, damit beschäftgien wir uns noch. Nächster Fall:

$\underline{Rang(A) = 2}$: Jetzt nehmen wir (nach Vertauschen der Koordinaten) an, dass $\lambda_3 = 0$ ist, währen λ_1 und $\lambda_2 \neq 0$ sind. In der ersten und zweiten Koordinate können wir wie oben eine quadratische Ergänzung durchführen, bei der dritten geht das aber nicht mehr. Wir kommen damit zu einer Gleichung der Form

$$\pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} + dz + k = 0.$$

Die wichtigste Frage ist hier, ob der Koeffizient $d = 0$ ist, oder nicht. Wenn nämlich $d = 0$ sein sollte, kommt die Koordinate z in der Gleichung nicht mehr vor. Wir haben nichts anderes als eine Kegelschnitt-Gleichung. Sie beschreibt in der x, y-Ebene einen Kegelschnitt. Und mit jedem Punkt dieses Kegelschnittes gehört auch die ganze Gerade parallel zur z-Achse durch diesen Punkt zu unserer Quadrik. Sowas nennt man einen *Zylinder*. Weil das wieder nur auf die Klasssifikation der Kegelschnitte hinausläuft, brauchen wir uns hier nicht damit zu beschäftigen.

Wir nehmen also $d \neq 0$ an. Dann können wir die Gleichung durch d austeilen und gleich $d = 1$ annehmen. Weiter können wir nach einer Translation $z \mapsto z - k$ in z-Richtung statt $z + k$ einfach z schreiben. Schließlich können wir die Gleichung mit -1 durchmultiplizieren, und den entstehenden Summanden $-z$ auf die andere Seite bringen. Zu diskutieren haben wir dann die Gleichung

$$z = \pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2}.$$

Wieder kommt es auf die Vorzeichen an, d.h., auf die Signatur unserer neuen Koeffizientenmatrix. Aber weil es ziemlich egal ist, ob wir z nach oben oder unten laufen lassen, brauchen wir nicht alle vier möglichen Fälle, sondern nur die beiden folgenden zu betrachten:

Signatur	Gleichung	Name
$(2, 0)$	$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$	Paraboloid
$(1, 1)$	$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$	Sattelfläche

$\underline{Rang(A) = 1}$: Wir haben eine Gleichung der Form

$$\lambda_1 x^2 + b_1 x + b_2 y + b_3 z + k = 0.$$

Wie üblich können wir b_1 mit einer quadratischen Ergänzung beseitigen. Bei b_2 und b_3 geht das aber nicht. Natürlich könnte $b_2 = b_3 = 0$ sein. Die Gleichung hängt dann nur von x ab und beschreibt, abhängig von den Vorzeichen, eine Ebene, zwei Ebenen, oder die leere Menge. Das sind lauter Entartungsfälle, die wir weglassen. Ist nicht $b_2 = b_3 = 0$, so können wir nach einer Drehung in der y, z-Ebene

$$by = b_2 y + b_3 z$$

setzen. Es entsteht die Gleichung

$$\lambda_1 x^2 + by + k = 0.$$

Weil die nur von zwei Variablen abhängt, bringt das wieder nichts wesentlich neues.

Alle Quadriken, die wir bei unseren Betrachtungen unter den Tisch fallen ließen, nennen wir entartet. Außerdem ist sicher die oben vorkommende leere Menge und der Punkt entartet. Der Kegel ist es eigentlich auch. Aber weil er so schön ist führen wir ihn bei den nicht entarteten Flächen mit auf (eine Art Ehrenmitglied). Dann haben wir bewiesen:

Satz 1.11 (Metrische Normalform der quadratischen Flächen) *Jede nicht-entartete quadratische Fläche lässt sich durch eine Bewegung in eine der folgen Formen bringen:*

Rang(A)	*Signatur*	*Gleichung*	*Name*
3	$(3,0)$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	*Ellipsoid*
	$(2,1)$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	*Einschaliges Hyperboloid*
	$(1,2)$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	*Zweischaliges Hyperboloid*
	$(2,1)$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	*Kegel*
2	$(2,0)$	$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$	*Paraboloid*
	$(1,1)$	$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$	*Sattelfläche*

Wenn es uns nicht auf die metrische Normalform ankommt, sondern wenn wir noch lineare Transformationen vornehmen können, die verschiedene Koordinaten mit verschiedenen Konstanten multiplizieren, können wir damit alle vorkommenden Konstanten auf 1 normieren

Satz 1.12 (Affine Normalform der quadratischen Flächen) *Jede nicht-entartete quadratische Fläche lässt sich durch eine affine Transformation in eine der folgen Formen bringen:*

Gleichung	*Name*
$x^2+y^2+z^2=1$	*Sphäre*
$x^2+y^2-z^2=1$	*Einschaliges Rotationshyperboloid*
$x^2-y^2-z^2=1$	*Zweischaliges Rotationshyperboloid*
$x^2+y^2-z^2=0$	*Rotationskegel*
$z=x^2+y^2$	*Rotationsparaboloid*
$z=x^2-y^2$	*Sattelfläche*

Spätestens jetzt ist es an der Zeit, die Namen dieser quadratischen Flächen zu erläutern. Klar ist (z.B. nach Pythagoras), dass die Gleichung

$$x^2+y^2+z^2=1$$

die Einheitskugel beschreibt, genauer die Oberfläche dieser Kugel. Eine Kugeloberfläche heißt auch *Sphäre*. Diese Sphäre entsteht z.B., wenn man einen Einheitskreis rotieren lässt. Weil das für die nächsten Fälle wichtig ist, möchte ich es etwas ausführlicher beschreiben.

Nehmen wir also etwa den Einheitskreis

$$x^2+z^2=1$$

in der (senkrechten) x, z-Ebene. Hier beschreibt z die Höhe über der (waagrechten) x, y-Ebene, und $|x|$ den Abstand von der z-Achse. Letzteres gilt für Punkte in der x, z-Ebene. Wenn wir nicht nur diese Punkte meinen, sondern beliebige Punkte $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, ist der Abstand von der z-Achse

$$\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Setzen wir in die Kreisgleichung nicht x^2 ein, sondern

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = x^2 + y^2,$$

so erhalten wir alle Punkte im $\mathbb{R}^3$, die von der z-Achse denselben Abstand haben, wie vorher der Punkt $(x, 0, z)$. Die Gleichung ist

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

der rotierte Einheitskreis, die Sphäre.

Dasselbe machen wir jetzt mit den anderen Gleichungen:

$x^2+y^2-z^2 = 1$: In der x, z-Ebene haben wir die Hyperbel-Gleichung $x^2-z^2 = 1$. Diese Hyperbel ist in Richtung der x-Achse geöffnet. Ersetzen wir x^2 durch $x^2 + y^2$, so lassen wir sie um die z-Achse rotieren. Es entsteht ein Rotationshyperboloid mit einer Schale.

$x^2-y^2-z^2 = 1$: In der x, z-Ebene haben wir wieder die Hyperbel $x^2-z^2 = 1$. Aber jetzt ersetzen wir z^2 durch y^2+z^2. Das bedeutet Rotation um die x-Achse. Es entsteht ein Rotationshyperboloid mit zwei Schalen.

$x^2+y^2-z^2 = 0$: In der x, z-Ebene haben wir jetzt keine Hyperbel mehr, sondern das Geradenpaar $x^2 = z^2$, d.h. $\pm x = z$. Wenn wir hier x^2 ersetzen durch $x^2 + y^2$, lassen wir die beiden Geraden um die z-Achse rotieren, und erhalten einen Rotationskegel.

$z = x^2 + y^2$: In der x, z-Ebene haben wir die Parabel $z = x^2$. Wieder ersetzen wir x^2 durch $x^2 + y^2$ und erhalten ein Rotationsparaboloid.

$z = x^2 - y^2$: Hier rotiert nix. Die Gleichung beschreibt einen Funktionsgraphen, der über der x-Achse wie eine Parabel nach oben geöffnet ist, und unter der y-Achse wie eine Parabel nach unten. Der Name Sattelfläche trifft diesen Sachverhalt einigermaßen anschaulich.

Damit haben wir die Gestalt der affinen Normalformen diskutiert. Die euklidischen Normalformen entstehen daraus, indem wir in Richtung der Koordinatenachsen mit (i.A.) verschiedenen Faktoren strecken. Aus der Sphäre $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ entsteht das Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

durch Streckung in x-Richtung mit dem Faktor a, in y-Richtung mit dem Faktor b und in z-Richtung mit dem Faktor c. Den anderen quadratischen Flächen ergeht es ähnlich.

Zum Schluss dieses Paragraphen möchte ich noch den Namen 'Kegelschnitt' erläutern. Die alten Griechen hatten keine Gleichungen für ihre geometrischen Objekte. Sie mussten sie anschaulich, mechanisch beschreiben. So stellten sie sich einen Kegel vor als entstanden durch Rotation einer Gerade um eine Rotationsachse. Ganz genau so, wie ich eben die Gerade $z = x$ um die z-Achse rotieren ließ, um den Kegel mit der Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ zu erzeugen. Irgend wann kam ein Typ namens Menächmus (sic!) auf die Idee, diesen Kegel mit einer Ebene zu schneiden und zu untersuchen, was dabei rauskommt. Es gibt verschiedene Möglichkeiten dafür.

Am einfachsten ist der Schnitt mit einer horizontalen Ebene $z = c$. Dabei entsteht, wie nicht anders zu erwarten, ein Kreis

$$x^2 + y^2 = c^2, \quad z = c,$$

vom Radius c in der Ebene $z = c$, wenig innovativ. Aber legen wir die Ebene mal etwas schräg:

$$z = a \cdot x + c, \quad a \neq 0.$$

Diese Gleichung bietet Anlass, die Koordinate z aus der Kegelgleichung zu eliminieren. Das geht so:

$$x^2 + y^2 = z^2 = (ax + c)^2 = a^2 \cdot x^2 + 2ac \cdot x + c^2.$$

Wir ordnen etwas um:

$$(1 - a^2) \cdot x^2 - 2ac \cdot x + y^2 = c^2.$$

Nur, was will uns dies schöne Gleichunge sagen? Anders ausgedrückt, was bedeutet es, wenn wir z mit der Ebenengleichung aus der Kegelgleichung eliminieren? Wir erhalten eine Gleichung in x und y, welche die Schnittkurve in der Ebene $z = ax + c$ beschreibt. Das ist genau die Projektion der Schnittkurve in die x, y-Ebene. Diese Projektion ist eine affine Abbildung, aber keine Kongruenzabbildung. Trotzdem sagt sie uns, welche Art von Kegelschnitt wir als Schnitt des Kegels mit der Ebene erhalten. Die Konstante c entscheidet darüber, ob die Ebene den Kegel in seiner Spitze schneidet, oder nicht. Der Koeffizient a gibt die Steigung der Ebene an. Für $a = \pm 1$ ist die Ebene um $\pm 45^0$ gegenüber der x, y-Ebene geneigt, für $|a| > 1$ um mehr als 45^0, bei $|a| < 1$ um weniger. Falls $c \neq 0$ ist, erhalten wir für

$\lvert a\rvert$	eine
< 1	Ellipse
$= 1$	Parabel
> 1	Hyperbel

Wie schon gesagt, ist der Kegelschnitt, den wir ausgerechnet haben, eine Projektion der Schnittkurve in die x, y-Ebene und nicht kongruent zu dieser Schnittkurve. Wenn man die Halbachsen des Kegel-Schnittes wirklich ausrechnen will, muss man wie in folgendem Beispiel vorgehen.

Beispiel 1.9 *Wir schneiden den Kegel mit der Ebene $z = 1 + 2x$. Wir wissen schon, dass dabei eine Hyperbel rauskommt. Aber was sind deren Hauptachsenabschnitte? Dazu verschaffen wir uns ein ON-System aus zwei Vektoren, welches die Ebene aufspannt. Das tun z.B. die Vektoren*

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Koordinaten in diesem System seien u und v. Dann hat jeder Punkt der Ebene die Koordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u/\sqrt{5} \\ v \\ 1 + 2u/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Die Gleichung der Schnittkurve wird

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2-z^2 &= \frac{u^2}{5}+v^2-(1+\frac{2u}{\sqrt{5}})^2\\
&= -\frac{3}{5}u^2-\frac{4}{\sqrt{5}}u+v^2-1\\
&= -\frac{3}{5}(u^2+\frac{4\sqrt{5}}{3}u)+v^2-1\\
&= -\frac{3}{5}(u+\frac{2\sqrt{5}}{3})^2+\frac{4}{3}+v^2-1\\
&= -\frac{3}{5}(u')^2+v^2+\frac{1}{3},\\
\frac{3}{5}(u')^2-v^2 &= \frac{1}{3}\\
\frac{9}{5}(u')^2-3v^2 &= 1.
\end{aligned}
$$

Die Hauptachsenabschnitte sind

$$\frac{\sqrt{5}}{3} \quad \textit{und} \quad \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Aufgabe 1.29 *Es sei H das durch die Gleichung $x^2+2y^2-3z^2=4$ gegebene einschalige Hyperboloid im euklidischen $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie alle Ebenen E des $\mathbb{R}^3$, die H in einem Kreis schneiden.*

Aufgabe 1.30 *Gegeben sei die Quadrik $Q \subset \mathbb{R}^3$ mit der Gleichung*

$$2x_1^2+2x_1x_2-x_2^2-2x_3^2.$$

Wir betrachten die Schnitte von Q mit den folgenden drei Ebenen:

$$E_1 : x_1 = 1, \quad E_2 : x_2 = 1, \quad E_3 : x_3 = 1.$$

Welche dieser Schnittkurven sind Ellipsen, welche Parabeln, welche Hyperbeln?

Aufgabe 1.31 **a)** *Bringen Sie die folgende Gleichung einer Quadrik im $\mathbb{R}^2$ auf Hauptachsenform:*

$$-x_1^2-x_2^2+4x_1x_2-2x_1+4x_2-2=0.$$

b) *Dieselbe Aufgabe ist zu lösen für die Quadrik im $\mathbb{R}^3$ gegeben durch*

$$-x_1^2-x_2^2+2x_3^2+8x_1x_2-4x_1x_3+4x_2x_3-6x_1+12x_2-6=0.$$

(Hinweis: $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ erzeugt eine Hauptachse. Benutzen Sie diese!)

c) *Was für ein Kegelschnitt ist der Schnitt der Quadrik aus b) mit der Ebene $x_3 = x_1 - x_2$?*

Aufgabe 1.32 *Eine Quadrik Q sei in einem (x_1, x_2, x_3)-Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ gegeben durch eine Gleichung*

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3 - 2x_2 - 6x_3 - 5 = 0.$$

Ermitteln Sie ein affines (y_1, y_2, y_3)-Koordinatensystem, in dem die Gleichung von Q in affiner Normalform ist. Geben Sie den Typ von Q an. Geben Sie den Ursprung und die drei Einheitspunkte des $\mathbf{y}$*-Koordinatensystems in* $\mathbf{x}$*-Koordinaten an.*

Aufgabe 1.33 *Gegeben seien die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^3$:*

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : (x+6)^2 + (y-7)^2 + (z-9)^2 = 91 \right\}$$

und

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 3x - 4y + 9 = 0. \right.$$

Bestimmen Sie eine der zu Hparallelen Ebenen des $\mathbb{R}^3$, die K in einem Kreis vom Radius $2\sqrt{14}$ schneiden und berechnen Sie den Mittelpunkt des Schnittkreises.

Aufgabe 1.34 *Gegeben sei die Quadrik*

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x^2 - 2xy + y^2 + z^2 - x - y - 1 = 0 \right\}.$$

a) *Bestimmen Sie die euklidische Normalform und den Typ von Q.*

b) *Zeigen Sie, dass die Gerade $g = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Symmetrieachse von Q ist.*

Aufgabe 1.35 *Im $\mathbb{R}^3$ sei die symmetrische Bilinearform β gegeben durch*

$$\beta(x, y) := x^t \cdot A \cdot y, \quad \textit{wobei} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

a) *Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenräume der Matrix A.*
b) *Bestimmen Sie die euklidische Normalform der Quadrik Q mit der Gleichung $\beta(x, x) = 20$. Wie lautet die geometrische Bezeichnung von Q? Zeigen Sie, dass Q eine Rotationsfläche ist und bestimmen Sie die Drehachse der Quadrik Q!*
c) *Wie lautet die geometrische Bezeichnung der Quadrik Q_0 mit der Gleichung $\beta(x, x) = 0$? Zeichnen Sie beide Quadriken Q und Q_0 in einer Skizze. Benutzen Sie dafür das Koordinatensystem, in dem beide Quadriken ihre Normalform haben.*

Aufgabe 1.36 *Für jedes $s \in \mathbb{R}$ ist durch*

$$Q_s : \quad 4x_1^2 + 2sx_1x_2 + 2x_2^2 + 2sx_2x_3 + 4x_3^2 = 1$$

eine Quadrik im $\mathbb{R}^3$ gegeben. Ermitteln Sie für jedes $s \in \mathbb{R}$ den affinen Typ von Q_s.

Aufgabe 1.37 *Bestimmen Sie den affinen Typ der Qaudrik*

$$3x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_3 = 1.$$

Aufgabe 1.38 *Bestimmen Sie die euklidische Normalform der Quadrik*

$$Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ 2xy - 2xy + 2yz + x + 2y + z = 0\}.$$

Aufgabe 1.39 *Für $s \in \mathbb{R}$ betrachte man die Quadrik*

$$Q_s = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ (1 + s)x^2 + y^2 + (1 + s)z^2 + (2 - 2s)xz + 4sx - 4sz = 1 - 4s\}.$$

a) *Bestimmen Sie einen Mittelpunkt von Q.*
b) *Führen Sie im Mittelpunktssystem die Hauptachsentransformation durch und bestimmen Sie den affinen Typ von Q_s in Abhängigkeit vom Parameter s.*

Aufgabe 1.40 *Im euklidischen $\mathbb{R}^3$ sei die Quadrik Q mit der Gleichung*

$$5x^2 + 16y^2 + 5z^2 - 6xz - 8x - 8z = 0$$

gegeben. Zeigen Sie, dass Q ein Ellipsoid ist und bestimmen Sie seinen Mittelpunkt, seine Hauptachsen und die Halbachsenabschnitte.

Aufgabe 1.41 *In Abhängigkeit von $r \in \mathbb{R}$ seien die beiden reellen Matrizen*

$$B_r = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & r \end{pmatrix}, \quad C_r = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & r & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & r \end{pmatrix}$$

gegeben.
a) *Beweisen Sie: Für* $\begin{cases} r < -1 \\ r > -1 \end{cases}$ *ist die Matrix B_r* $\begin{cases} \text{negativ definit} \\ \text{indefinit} \end{cases}$ *Hinweis: Versuchen Sie hier und im Folgenden nicht, Eigenwerte explizit zu berechnen.*
b) *Bestimmen Sie die Menge*

$$M := \{r \in \mathbb{R} :\ C_r \text{ ist invertierbar}\}.$$

c) *Zeigen Sie: Für $r < -1$ hat C_r mindestens zwei negative Eigenwerte und für $r > -1$ hat C_r mindestens einen positven und einen negativen Eigenwert.*
d) *Bestimmen Sie für $r \in M_r$, $r \neq -1$, die Vorzeichen aller drei Eigenwerte von C_r. Entscheiden Sie, welchen affinen Typ die Quadrik*

$$Q_r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ -x^2 + r(y^2 + z^2) + 2xy + 2\sqrt{2}yz = 1\}, \quad r \in M_r,\ r \neq -1,$$

hat.

Aufgabe 1.42 **a)** *Bestimmen Sie für jeweils festes $a \in \mathbb{R}$ die euklidische Normalform und den Typ der Quadrik*

$$Q_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ (x - y)^2 + a^2z^2 - 2az = 0\}.$$

b) *Welche Mittelpunkte (Symmetriezentren) besitzt Q_a $(a \neq 0)$?*
c) *Welche der Quadriken Q_a, $a \neq 0$, sind Drehflächen (Rotationsflächen)?*

Aufgabe 1.43 *Im euklidischen* $\mathbb{R}^3$ *werde das einschalige Hyperboloid mit der Gleichung*

$$x^2 + 2y^2 - z^2 = 1$$

betrachtet.
a) *Für welche* $m \in \mathbb{R}$ *schneidet die Ebene mit der Gleichung*

$$z = mx + y$$

das Hyperboloid in einer Ellipse.
b) *Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis der Ebene mit der Gleichung* $z = \frac{1}{2}x + y$ *und geben Sie die Gleichung der Schnittellipse des Hyperboloids mit dieser Ebene in dem Koordinatensystem an, das durch diese Basis definiert wird.*

Aufgabe 1.44 *Bestimmen Sie in Abhängigkeit von* $c \in \mathbb{R}$ *den affinen Typ der Quadrik*

$$Q_c := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + 2cy^2 + c^2z^2 + 2cxz - cx - z = 0\}.$$

Aufgabe 1.45 *Es sei* $W \subset \mathbb{R}^3$ *der Würfel, der von den kanonischen Basisvektoren aufgespannt wird.*
a) *Zeigen Sie, dass die Quadrik mit der Gleichung*

$$2xy - 2xz + 2yz - 2y = 0$$

den Punkt M *als Mittelpunkt hat.*
b) *Verschieben Sie die Koordinaten so, dass* M *der Ursprung des neuen Koordinatensystems wird. Führen Sie im neuen Koordinatensystem die Hauptachsentransformation für die obige Quadrik durch und bestimmen Sie den Typ dieser Quadrik!*
c) *Zeigen Sie, dass die Quadrik eine Rotationsfläche ist, deren Rotationsachse zwei Ecken des Würfels enthält!*

Aufgabe 1.46 *Es sei* $a \in \mathbb{R}$ *ein Parameter. Für Vektoren* $x = (x_1, x_2, x_3)$ *und* $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ *sei die symmetrische Bilinearform* $s : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *gegeben durch*

$$s(x, y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + a \cdot (x_1y_3 + x_3y_1).$$

a) *Für welche Werte von* a *ist* s *positiv definit?*
b) *Bestimmen Sie in Abhängigkeit von* $a \in \mathbb{R}$ *die metrische Normalform der Quadrik*

$$Q_a := \{x \in \mathbb{R}^3 : \; s(x, x) = 1\}$$

und für $a \geq 0$, $a \in \mathbb{R}$ *auch deren Typ.*
c) *Welche der Quadriken* Q_a, $a \geq 0$, *sind Rotationsflächen?*

2 Euklidische Geometrie der Ebene

Was ich hier behandele, ist meistens schon irgendwo vorgekommen. Ich möchte das Material aber hier so zusammenstellen dass geometrische Gesichtspunkte stärker im Vordergrund stehen als algebraische.

Für uns ist die Ebene die reelle Ebene $\mathbb{R}^2$. Die hat einen Nullpunkt $\mathbf{0} = (0,0)$. Gelegentlich unterscheidet man zwischen Punkten der Ebene und Vektoren. Ein Punkt $P(x,y)$ wird dann durch seinen Ortsvektor $\mathbf{p} = (x,y)$ gegeben. Ich möchte diese Unterscheidung nicht machen. Ein Punkt $P(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist (wie schon in der Linearen Algebra) dasselbe wie der Vektor $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

2.1 Punkte und Geraden

Die Ebene $\mathbb{R}^2$ ist bevölkert von Punkten und Geraden. Beide Arten von Objekten haben ein Janus-Gesicht. Einen Punkt $\mathbf{p} = (x,y)$ kann man durch seine beiden Koordinaten x, y festlegen oder durch die Gleichungen zweier Geraden, welche sich in diesem Punkt schneiden. Ebenso kann man eine Gerade durch eine Gleichung der Art

$$l(\mathbf{x}) = a \cdot x + b \cdot y + c = 0$$

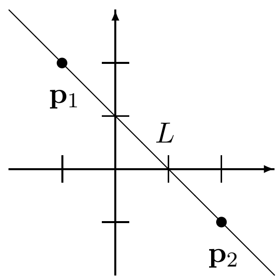
geben, oder durch zwei Punkte $\mathbf{p}_1 \neq \mathbf{p}_2$ welche die Gerade aufspannen. Der Übergang von der einen Beschreibung zur anderen führt uns gleich auf unsere ersten beiden Probleme.

Problem 1: Gerade durch zwei Punkte

Es seien $\mathbf{p}_1 = (x_1, y_1)$ und $\mathbf{p}_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ zwei verschiedene Punkte. Durch diese beiden Punkte geht genau eine Gerade L. Wir können einen der beiden Punkte, etwa $\mathbf{p}_1$ als Anfangspunkt von L wählen und $\mathbf{v} := \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 \neq \mathbf{0}$ als deren Richtungsvektor. Damit können wir die Gerade beschreiben als Punktmenge

$$L = \{\mathbf{x} = \mathbf{p}_1 + t \cdot (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \in \mathbb{R}^2 : \quad t \in \mathbb{R}\}.$$

Obwohl hier ein Gleichheitszeichen vorkommt, nennt man diese Beschreibung von L normalerweise nicht 'Geradengleichung' sondern 'Parametrisierung' der Geraden. Dabei ist $t \in \mathbb{R}$ der Parameter.



Beispiel 2.1 *Es sei* $\mathbf{p}_1 = (-1, 2)$ *und* $\mathbf{p}_2 = (2, -1)$. *Der Richtungsvektor ist*

$$\mathbf{v} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = (3, -3)$$

und

$$L = \{\mathbf{p}_1 + t \cdot \mathbf{v} = (-1 + t \cdot 3, 2 + t \cdot (-3)), \quad t \in \mathbb{R}\}.$$

Wer dies will, kann die Punkte auf der Geraden auch als Spaltenvektoren

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 3t \\ 2 - 3t \end{pmatrix}$$

schreiben.

Die Verbindungsgerade zweier Punkte $\mathbf{p}_1 \neq \mathbf{p}_2$ ist durch ihre Parametrisierung leicht anzugeben. Wir werden aber sehr schnell auf Probleme stoßen, bei denen wir die Gleichung der Verbindungsgerade L brauchen. In unserem Beispiel sieht man sofort

$$x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = 1.$$

Deswegen hat L die Gleichung

$$x + y = 1.$$

Dies ist eine (inhomogene) lineare Gleichung. Jede Gerade wird durch eine derartige Gleichung

$$a \cdot x + b \cdot y = c$$

beschrieben. Allerdings ist es etwas mühsamer diese Gleichung aufzustellen, als die Parametrisierung hinzuschreiben.

Seien also zwei Punkte

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Wir setzen die Gleichung der Geraden durch beide Punkte an in der Form $ax + by = c$ mit unbestimmten (= unbekannten) Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{R}$. Beide Punkte müssen diese Gleichung erfüllen. Das führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccc} x_1 \cdot a & + & y_1 \cdot b & = & c \\ x_2 \cdot a & + & y_2 \cdot b & = & c \end{array}$$

Das ist erstens etwas ungewohnt (gegeben sind x_1, y_1, x_2, y_2, gesucht sind a, b, c) und zweitens unangenehm: Mehr Unbekannte als Gleichungen. Eine können wir frei wählen, etwa $c = 1$, wenn $c \neq 0$ ist. (Der Fall $c = 0$ muss gesondert betrachtet werden.) Dann haben wir also das System

$$\begin{array}{ccccc} x_1 \cdot a & + & y_1 \cdot b & = & 1 \\ x_2 \cdot a & + & y_2 \cdot b & = & 1 \end{array}$$

zu lösen. Am systematischsten löst man es mit der Cramerschen Regel aus dem ersten Semester:

$$d := det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1,$$

$$a := \frac{1}{d} det \begin{pmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_2 \end{pmatrix} = \frac{y_2 - y_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1}, \quad b := \frac{1}{d} det \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 y_2 - x_2 y_1}.$$

Damit nimmt unsere Gleichung $ax + by = 1$ die scheußliche Form

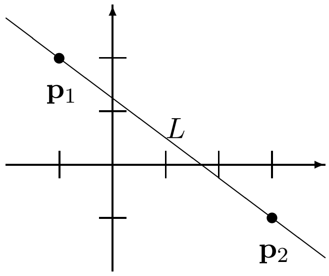
$$\frac{y_2 - y_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1} \cdot x + \frac{x_1 - x_2}{x_1 y_2 - x_2 y_1} \cdot y = 1$$

an. Etwas besser sieht es aus, wenn wir mit dem Nenner erweitern:

$$(y_2 - y_1) \cdot x + (x_1 - x_2) \cdot y = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

Beispiel 2.2 *Die Punkte seien*

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$



Es ist $d = 1 - 6 = -5$ *und*

$$y_2 - y_1 = -1 - 2 = -3, \quad x_1 - x_2 = -1 - 3 = -4.$$

Unsere Gleichung wird

$$-3 \cdot x - 4 \cdot y = -5.$$

Etwas besser sieht die natürlich aus, wenn wir das Vorzeichen umdrehen:

$$3 \cdot x + 4 \cdot y = 5.$$

Dieses Verfahren funktioniert allerdings nur, wenn die Determinante

$$d = x_1 y_2 - x_2 y_1 \neq 0$$

ist. Ist aber doch $d = 0$, dann sind die beiden Vektoren $\mathbf{p}_1 = (x_1, y_1)$ und $\mathbf{p}_2 = (x_2, y_2)$ linear abhängig. Sie liegen auf einer Gerade durch den Nullpunkt, und diese ist leicht zu finden. Bemerkenswert ist jedoch: Die oben angegebene Geradengleichung in der Form

$$(y_2 - y_1) \cdot x + (x_1 - x_2) \cdot y = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

bleibt richtig (mit 0 auf der rechten Seite), obwohl die Herleitung falsch wird.

Ist eine Gerade gegeben durch ihre Gleichung $ax + by = c$, so hat der Koeffizientenvektor $\mathbf{n} = (a, b)$ eine geometrische Bedeutung für die Gerade. Sind etwa $\mathbf{p}_1 = (x_1, y_1) \neq \mathbf{p}_2 = (x_2, y_2)$ zwei Punkte auf der Geraden, so ist

$$\mathbf{v} := \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$

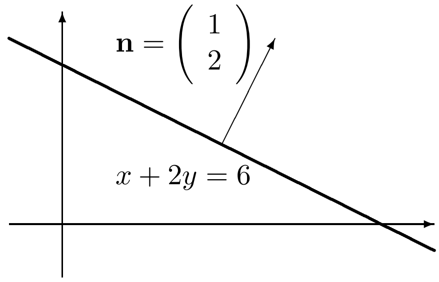
ein Richtungsvektor für die Gerade. Und setzen wir beide Punkte in die Geradengleichung ein

$$\begin{aligned} a \cdot x_1 + b \cdot y_1 &= c, \\ a \cdot x_2 + b \cdot y_2 &= c, \end{aligned}$$

so finden wir durch Subtraktion

$$a \cdot (x_2 - x_1) + b \cdot (y_2 - y_1) = 0, \quad \mathbf{n} \perp \mathbf{v}.$$

Der Vektor $\mathbf{n}$ steht senkrecht auf $\mathbf{v}$, dem Richtungsvektor der Gerade. Man sagt, $\mathbf{n}$ ist ein *Normalenvektor* der Gerade.



Problem 2: Schnittpunkt zweier Geraden

Gegeben sind zwei Geraden L_1, $L_2 \subset \mathbb{R}^2$ und gesucht ist ihre Schnittmenge. Bekanntlich gibt es dummerweise verschiedene Fälle:

L_1 und L_2 nicht parallel	ein Schnittpunkt
L_1 und L_2 parallel, verschieden	kein Schnittpunkt
$L_1 = L_2$	Schnittgerade

Sind L_1 und L_2 gegeben durch Gleichungen

$$L_1 : \, a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = c_1, \quad L_2 : \, a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = c_2,$$

So ist die Ermittlung der Schnittmenge äquivalent zur Lösung des (i.a. inhomogenen) linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{ccccc} a_1 \cdot x & + & b_1 \cdot y & = & c_1 \\ a_2 \cdot x & + & b_2 \cdot y & = & c_2 \end{array}$$

Wieder verwenden wir die Cramersche Regel. Mit

$$d := det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

finden wir die Koordinaten des Schnittpunkts

$$x = \frac{1}{d} det \begin{pmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix} = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad y = \frac{1}{d} det \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix} = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Dies geht so natürlich nur, wenn $d \neq 0$ ist, d.h., wenn die Koeffizientenmatrix des Gleichungssytems den vollen Rang $= 2$ hat. Ist $d = 0$, so sind die Normalenvektoren $\mathbf{n}_1 = (a_1, b_1)$ und $\mathbf{n}_2 = (a_2, b_2)$ linear abhängig. Die Geraden haben linear abhängige Richtungsvektoren und sind parallel. Jetzt gibt es die beiden Fälle:

$$Rang \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2.$$

Das System ist unlösbar und $L_1 \cap L_2 = \emptyset$. Beide Geraden sind parallel und verschieden.

$$Rang \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 1.$$

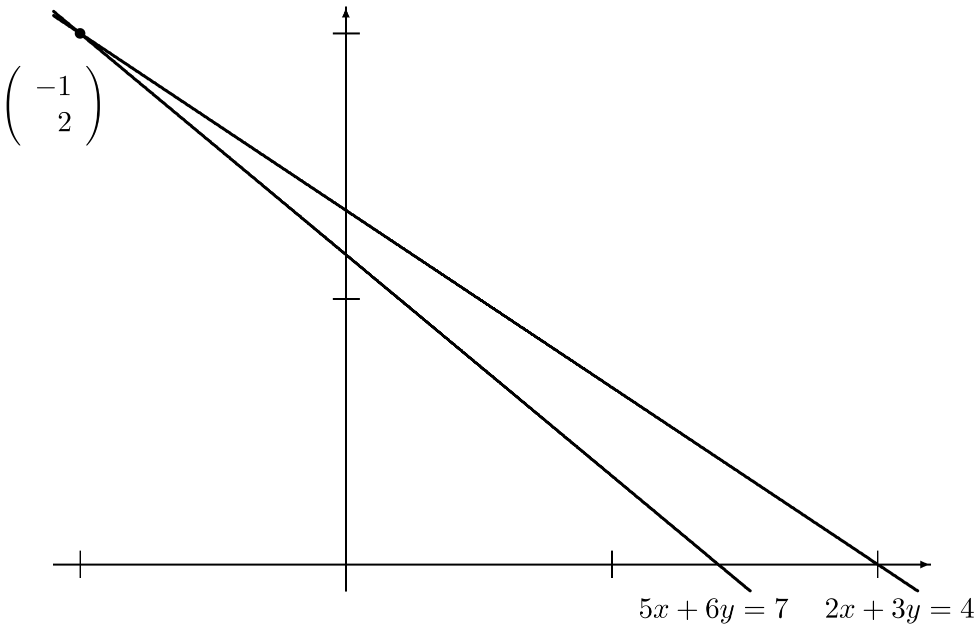
Das System ist lösbar, mit einer Lösungsmenge der Dimension 1, und $L_1 = L_2$.

Beispiel 2.3 *Wir betrachten die Geraden mit den Gleichungen*

$$\begin{aligned} 2 \cdot x + 3 \cdot y &= 4 \\ 5 \cdot x + 6 \cdot y &= 7 \end{aligned}$$

Hier ist die Koeffizientendeterminante $d = 2 \cdot 6 - 5 \cdot 3 = -3 \neq 0$. *Es gibt genau einen Schnittpunkt. Seine Koordinaten ermitteln wir mit der Cramerschen Regel zu*

$$x = \frac{1}{d} det \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} = -1, \quad y = \frac{1}{d} det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = 2.$$



Etwas aufwendiger, prinzipiell aber genauso geht die Ermittlung des Schnittpunkts, wenn die Geraden in Parameterform

$$L_1 : \mathbf{p}_1 + t \cdot \mathbf{v}_1, \quad L_2 : \mathbf{p}_2 + t \cdot \mathbf{v}_2, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

gegeben sind. Ein Punkt auf beiden Geraden gehört zu Parametern s, t, welche die Bedingung

$$\mathbf{p}_1 + s \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{p}_2 + t \cdot \mathbf{v}_2$$

erfüllen. Für s und t ist dies das lineare Gleichungssytem

$$s \cdot \mathbf{v}_1 - t \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1.$$

Die Koeffizientendeterminante ist $d := -det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$. Hier ist $d \neq 0$, wenn die Richtungsvektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ linear unabhängig sind. Beide Geraden sind nicht parallel, es gibt genau einen Schnittpunkt.

Ist aber $d = 0$, so sind beide Geraden parallel und es gibt wieder die beiden Fälle $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ oder $L_1 \cap L_2 = L_1 = L_2$.

Manche Formen von Geradengleichungen haben besondere Namen.

Betrachten wir etwa die Gerade durch $\mathbf{p}_1 = (x_1, y_1)$ und $\mathbf{p}_2 = (x_2, y_2)$ in der oben angegebenen Form

$$(y_2 - y_1) \cdot x + (x_1 - x_2) \cdot y = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

Hier ist $x_1 - x_2 \neq 0$, falls die Gerade nicht parallel zur y-Achse verläuft. In diesem Fall können wir durch $x_1 - x_2$ austeilen und die Gleichung auf die Form

$$y = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot x + \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2}$$

bringen. Das ist die *Funktionsgleichung der Gerade* mit der Steigung

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

und dem Achsenabschnitt

$$\frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2}$$

auf der y-Achse.

Geht die Gerade nicht durch den Null-Punkt, so hat ihre Gleichung eine Form

$$a \cdot x + b \cdot y = c$$

mit $c \neq 0$. In diesem Fall können wir durch c teilen und die Gleichung auf die *Achsenabschnittsform*

$$p \cdot x + q \cdot y = 1$$

bringen. Hier ist $1/p$ der Abschnitt auf der x-Achse und $1/q$ der Abschnitt auf der y-Achse. Auch die Fälle $p = 0$ oder $q = 0$ kann man hier einordnen. Dann ist der Abschnitt auf der x-Achse $= \infty$, die Gerade ist parallel zur x-Achse, oder der Abschnitt auf der y-Achse ist $= \infty$, die Gerade ist parallel zur y-Achse.

Aufgabe 2.1 *Es seien $L \subset \mathbb{R}^2$ die Gerade durch die Punkte $(-1, 3)$ und $(5, -2)$, sowie M die Gerade durch die Punkte $(-2, -2)$ und $(1, 6)$. Berechnen Sie den Schnittpunkt von L und M.*

Aufgabe 2.2 *Zeigen Sie, dass die drei Geraden im $\mathbb{R}^2$ mit den Gleichungen*

$$x + 2y - 1 = 0, \quad 3x + y + 2 = 0, \quad -x + 3y - 4 = 0$$

durch einen Punkt gehen und berechnen Sie diesen Punkt.

2.2 Abstand

Der Abstand zweier Punkte $\mathbf{p}_1 = (x_1, y_1)$ und $\mathbf{p}_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ ist

$$\| \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 \| = \sqrt{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 . \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Das wissen wir schon. Wieder gehen wir problemorientiert vor.

Problem 1: Punkte mit gleichem Abstand zu $\mathbf{p}_1$ und $\mathbf{p}_2$

Ein Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ hat den gleichen Abstand zu $\mathbf{p}_1$ und $\mathbf{p}_2$, wenn

$$\| \mathbf{x} - \mathbf{p}_1 \| = \| \mathbf{x} - \mathbf{p}_2 \| .$$

Weil Abstände positiv sind, ist diese Gleichung äquivalent zur quadrierten Gleichung

$$\| \mathbf{x} - \mathbf{p}_1 \|^2 = \| \mathbf{x} - \mathbf{p}_2 \|^2,$$

die wir weiter umformen:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x} - \mathbf{p}_1 . \mathbf{x} - \mathbf{p}_1) &= (\mathbf{x} - \mathbf{p}_2 . \mathbf{x} - \mathbf{p}_2) \\
\| \mathbf{x} \|^2 - 2(\mathbf{x} . \mathbf{p}_1) + \| \mathbf{p}_1 \|^2 &= \| \mathbf{x} \|^2 - 2(\mathbf{x} . \mathbf{p}_2) + \| \mathbf{p}_2 \|^2 \\
2(\mathbf{x} . \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) &= \| \mathbf{p}_2 \|^2 - \| \mathbf{p}_1 \|^2 \\
(\mathbf{x} . \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) &= \frac{1}{2}(\| \mathbf{p}_2 \|^2 - \| \mathbf{p}_1 \|^2)
\end{aligned}$$

Dies ist die Gleichung einer Geraden $M(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ mit Normalenvektor $\mathbf{v} := \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$. Die steht also senkrecht auf der Verbindungslinie von $\mathbf{p}_1$ mit $\mathbf{p}_2$. Sie heißt *Mittelsenkrechte* zu den beiden Punkten $\mathbf{p}_1$ und $\mathbf{p}_2$.

Beispiel 2.4 *Wir betrachten*

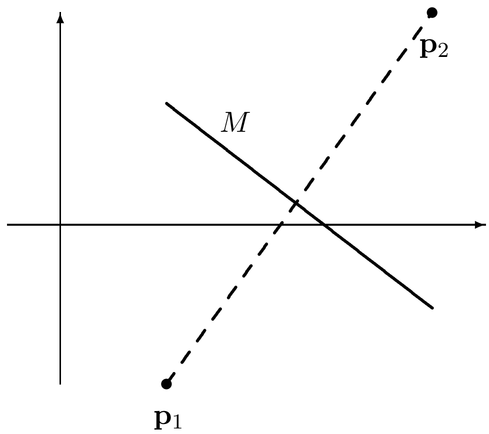
$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

mit

$$\| \mathbf{p}_1 \|^2 = 13, \quad \| \mathbf{p}_2 \|^2 = 65, \quad \mathbf{v} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Die Mittelsenkrechte hat also die Gleichung

$$5 \cdot x + 7 \cdot y = \frac{65 - 13}{2} = 26.$$



Die Verbindungsgerade von $\mathbf{p}_1$ mit $\mathbf{p}_2$ hat die Parametrisierung

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}_1 + t \cdot (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Weil sie auf M senkrecht steht, schneiden sich beide Geraden. Den Schnittpunkt ermitteln wir, indem wir die angegebene Parametrisierung in die Gleichung von M einsetzen:

$$\begin{aligned}
(\,\mathbf{p}_1 + t(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \,.\, \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1\,) &= \frac{1}{2}(\parallel \mathbf{p}_2 \parallel^2 - \parallel \mathbf{p}_1 \parallel^2) \\
t \cdot \parallel \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 \parallel^2 &= \frac{1}{2}(\parallel \mathbf{p}_2 \parallel^2 - \parallel \mathbf{p}_1 \parallel^2) + \parallel \mathbf{p}_1 \parallel^2 - (\mathbf{p}_1 . \mathbf{p}_2) \\
&= \frac{1}{2}(\parallel \mathbf{p}_2 \parallel^2 + \parallel \mathbf{p}_1 \parallel^2 - 2(\mathbf{p}_1 . \mathbf{p}_2)) \\
&= \frac{1}{2} \parallel \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 \parallel^2, \\
t &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Der Schnittpunkt gehört zum Parameter $t = 1/2$, er ist

$$\mathbf{m} := \mathbf{p}_1 + \frac{1}{2}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2),$$

der *Mittelpunkt* der Strecke $\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2$, ganz so wie es sein muss.

Wenn wir drei Punkte $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ haben, die nicht auf einer Gerade liegen, dann sind die Mittelsenkrechten $M(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ und $M(\mathbf{a}, \mathbf{c})$ nicht parallel, schneiden sich also in einem Punkt. Dieser Punkt hat denselben Abstand von den drei Punkten $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$. Also geht auch die Mittelsenkrechte $M(\mathbf{b}, \mathbf{c})$ durch diesen Schnittpunkt. Das weiß man schon aus der Schule: *Die drei Mittelsenkrechten an einem Dreieck schneiden sich in einem Punkt, dem Umkreismittelpunkt des Dreiecks.* Das ist klar. Etwas komplizierter ist es schon, diesen Punkt auszurechnen. Dazu:

Beispiel 2.5 *Gegeben seien die drei Punkte*

$$\mathbf{a} = (1, 2), \quad \mathbf{b} = (5, 1), \quad \mathbf{c} = (4, 6).$$

Dann haben wir

$$\parallel \mathbf{a} \parallel^2 = 5, \quad \parallel \mathbf{b} \parallel^2 = 26, \quad \parallel \mathbf{c} \parallel^2 = 52, \qquad \mathbf{b} - \mathbf{a} = (4, -1), \quad \mathbf{c} - \mathbf{a} = (3, 4).$$

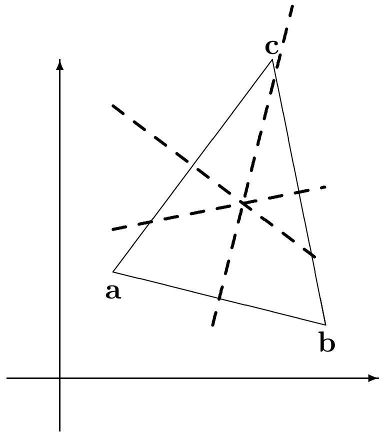
Mit unserer Formel bekommen wir die Mittelsenkrechten

$$M(\mathbf{a}, \mathbf{b}) : \, 4x_1 - x_2 = \frac{21}{2}, \quad M(\mathbf{a}, \mathbf{c}) : \, 3x_1 + 4x_2 = \frac{47}{2}.$$

Dieses Gleichungssystem lösen wir, wie wir es gelernt haben, und erhalten als den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten

$$\mathbf{m} = \left(\frac{131}{38}, \frac{125}{38} \right).$$

Das sind scheußliche Werte, aber optisch haut es einigermaßen hin:



Der Umkreis eines Dreiecks geht durch die drei Ecken. Das kann man auch so formulieren: Durch drei Punkte, die nicht auf einer Gerade liegen, geht immer genau ein Kreis. Dessen Mittelpunkt bestimmt man so, wie wir das eben gemacht haben. Und dann kann man auch seinen Radius R ausrechnen. In unserem Beispiel wird

$$R^2 = \| \mathbf{m} - \mathbf{a} \|^2 = \| (\frac{93}{38}, \frac{49}{38}) \|^2 = \frac{11050}{38^2}.$$

Numerisch kommt da etwa $R = 2.766$ raus. Zumindest die Größenordnung passt schon.

Es gibt noch eine sehr elegante Art, den Kreis durch drei Punkte hinzuschreiben. Für praktische Rechnungen ist die aber auch nicht einfacher.

Satz 2.1 *Der Kreis durch drei Punkte* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$*, die nicht auf einer Gerade liegen, hat die Gleichung*

$$det \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 & a_1^2 + a_2^2 & b_1^2 + b_2^2 & c_1^2 + c_2^2 \\ x_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Das bedeutet folgendes: Wenn man die Determinante entwickelt, erhält man eine Funktion in den Koordinaten x_1 und x_2. Und die ist $= 0$ genau für die Punkte $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ auf dem Kreis.

Beweis des Satzes. Entwickelt man die Determinante nach ihrer ersten Spalte, so bekommt man eine Kegelschnittgleichung ohne x_1x_2-Term, aber mit demselben Koeffizienten bei x_1^2 und x_2^2. Falls kein Entartungsfall vorliegt (Punkt oder leere Menge), ist dies eine Kreisgleichung. Aber, wenn wir in der Determinante $\mathbf{x} = \mathbf{a}, \mathbf{b}$ oder $\mathbf{c}$ einsetzen, hat sie zwei gleich Spalten und damit den Wert $= 0$. Ein Entartungsfall kann also nicht vorliegen. Wir haben eine Kreisgleichung, und in allen drei Punkten ist sie $= 0$. □

Beispiel 2.6 *Schauen wir uns das mal in unserem obigen Zahlenbeispiel an. Die Determinante wird*

$$det \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 & 5 & 26 & 52 \\ x_1 & 1 & 5 & 4 \\ x_2 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 19x_1^2 + 19x_2^2 - 131x_1 - 125x_2 + 286.$$

(Diese Determinante habe ich mit MAPLE ausgerechnet.) Dividieren wir hier durch 19 und bringen das Ding auf Normalform:

$$\left(x_1 - \frac{131}{38}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{125}{38}\right)^2 + \frac{286}{19} - \frac{131^2}{38^2} - \frac{125^2}{38^2} = 0.$$

Der Mittelpunkt stimmt. Und der Radius im Quadrat wird

$$R^2 = \frac{1}{38^2}(131^2 + 125^2 - 286 \cdot 76) = \frac{1}{38^2}(17161 + 15625 - 21736) = \frac{11050}{38^2}.$$

Toll, wie exakt das wieder rauskommt.

Problem 2: Abstand von Punkt und Gerade

Wir betrachten eine Gerade L in Parameterform $\mathbf{x} = \mathbf{u} + t \cdot \mathbf{v}$ (Anfangsvektor $\mathbf{u} \in L$, Richtungsvektor $\mathbf{v}$) und berechnen den Abstand eines festen Punktes $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ zu einem beliebigen Punkt $\mathbf{x} \in L$. Einfacher ist es, das Abstandsquadrat zu bestimmen:

$$\| \mathbf{p} - (\mathbf{u} + t\mathbf{v}) \|^2 = \| \mathbf{p} - \mathbf{u} \|^2 - 2(\mathbf{p} - \mathbf{u} \,.\, t\mathbf{v}) + t^2 \| \mathbf{v} \|^2 .$$

Das sieht unübersichtlich aus, gelinde gesagt. Man sieht nichts. Aber: Wenn zufällig $(\mathbf{p} - \mathbf{u}) \perp \mathbf{v}$ wäre, dann wäre der Klammerausdruck $= 0$ und

$$\| \mathbf{p} - (\mathbf{u} + t\mathbf{v}) \|^2 = \| \mathbf{p} - \mathbf{u} \|^2 + t^2 \| \mathbf{v} \|^2 .$$

Für alle Vektoren $\mathbf{x} = \mathbf{u} + t\mathbf{v} \neq \mathbf{u}$ ist $t \neq 0$, sowie $t^2 \| \mathbf{v} \|^2 > 0$ und

$$\| \mathbf{p} - \mathbf{x} \|^2 > \| \mathbf{p} - \mathbf{u} \|^2, \quad \| \mathbf{p} - \mathbf{x} \| > \| \mathbf{p} - \mathbf{u} \| .$$

Von allen Punkten $\mathbf{x} \in L$ hat $\mathbf{u}$ den kleinsten Abstand zu $\mathbf{p}$, wenn $(\mathbf{p} - \mathbf{u}.\mathbf{v}) = 0$. In diesem Fall steht die Gerade durch $\mathbf{p}$ und $\mathbf{u}$ senkrecht auf L. $\mathbf{u}$ muss der Schnittpunkt sein von L mit der Geraden durch $\mathbf{p}$, die senkrecht auf L steht.

Definition 2.1 *Gegeben seien eine Gerade $L \subset \mathbb{R}^2$ und ein Punkt $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$.*
Das Lot *von $\mathbf{p}$ auf L ist die Gerade durch $\mathbf{p}$ senkrecht zu L.*
Der Lotfußpunkt *von $\mathbf{p}$ zu L ist der Schnittpunkt $\mathbf{u}$ von L mit dem Lot von $\mathbf{p}$ auf L.*
Der Abstand *$d(\mathbf{p}, L)$ zwischen $\mathbf{p}$ und L ist der Abstand zwischen $\mathbf{p}$ und seinem Lotfußpunkt $\mathbf{u} \in L$.*

Jetzt wissen wir, was der Abstand eines Punktes von einer Geraden ist, allerdings nur theoretisch. Wir müssen ihn auch ausrechnen. Dabei kommt es darauf an, wie die Gerade gegeben ist.

Problem 2a: Gerade durch Gleichung gegeben

Betrachten wir etwa die Gerade

$$L: \; a \cdot x + b \cdot y = c.$$

Dann ist auch sofort ein Normalenvektor $\mathbf{n} = (a, b)$ auf L gegeben. Und das Lot von $\mathbf{p}$ auf L ist die Gerade $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t \cdot \mathbf{n}$, $t \in \mathbb{R}$, in parametrisierter Form. Der Lotfußpunkt ist der Schnitt dieses Lotes mit der Geraden L, d.h., derjenige Punkt

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t \cdot \mathbf{u} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 + ta \\ p_2 + tb \end{pmatrix},$$

der die Geradengleichung von L erfüllt. Diese Bedingung lautet

$$a(p_1 + ta) + b(p_2 + tb) = ap_1 + bp_2 + t(a^2 + b^2) = c$$

und liefert den Parameter

$$t = \frac{1}{a^2 + b^2}(c - ap_1 - bp_2).$$

Mit diesem Parameter finden wir den Abstand

$$d(\mathbf{p}, L) = \| t \cdot \mathbf{n} \| = |t| \, \| \mathbf{n} \| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot |c - ap_1 - bp_2|.$$

Besser merken kann man sich diese Formel, wenn man die zur Geradengleichung gehörige Funktion

$$l(x, y) := a \cdot x + b \cdot y - c$$

benutzt (L ist die Menge $l(x, y) = 0$). Es ist

$$|l(\mathbf{p})| = |l(p_1, p_2)| = |ap_1 + bp_2 - c| = |c - ap_1 - bp_2|$$

und

$$d(\mathbf{p}, l) = \frac{|l(\mathbf{p})|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Zu beachten ist, dass es auf dem Lot durch $\mathbf{p}$ zwei Punkte gibt, die von L denselben Abstand haben. Sie unterscheiden sich durch das Vorzeichen von $l(\mathbf{p})$. Dieses Vorzeichen entscheidet, auf welcher Seite von L der Punkt liegt.

Gelegentlich normiert man die Geradengleichung noch und geht über zur Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(a \cdot x + b \cdot y - c) = 0.$$

Anders ausgedrückt: Man multipliziert die Gleichung

$$a \cdot x + b \cdot y = c$$

so hin, dass $a^2 + b^2 = 1$ ist. Wenn $c \neq 0$ ist, kann man noch das Vorzeichen der Gleichung so justieren, dass $c > 0$. Dann heißt die Form

$$a \cdot x + b \cdot y = c, \quad a^2 + b^2 = 1, \, c > 0$$

die *Hessesche Normalform* der Geradengleichung. Der Abstand

$$d(\mathbf{p}, L) = |a \cdot p_1 + b \cdot p_2 - c|$$

ist dann besonders leicht auszurechnen.

Die beiden Seiten der Gerade, auf denen $\mathbf{p}$ liegen kann, unterscheiden sich um das Vorzeichen der Funktion $l(\mathbf{x}) = ax + by - c$. Wegen $c > 0$ liegt der Nullpunkt auf der Seite mit dem negativen Vorzeichen. Also gilt:

$\mathbf{p}$ auf der Seite des Nullpunkts von L	$\Leftrightarrow$	$l(\mathbf{p}) < 0$
$\mathbf{p}$ auf der dem Nullpunkt abgewandten Seite	$\Leftrightarrow$	$l(\mathbf{p}) > 0$

Problem 2b: Gerade durch Parametrisierung gegeben

Betrachten wir etwa die Gerade

$$L: \quad \mathbf{x} = \mathbf{a} + t \cdot \mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dabei ist der Richtungsvektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \neq \mathbf{0}$. Dreht man $\mathbf{v}$ in Uhrzeigerrichtung um 90^o, so erhält man den Normalenvektor

$$\mathbf{n} = \mathbf{v}^\perp = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}.$$

Den Lotfußpunkt zum Punkt $\mathbf{p}$ erhält man jetzt aus der Gleichung

$$\mathbf{p} + s \cdot \mathbf{n} = \mathbf{a} + t \cdot \mathbf{v}.$$

Das ist ein inhomogenes lineares Gleichungssystem für die Unbekannten $s, t \in \mathbb{R}$. Löst man es wie, üblich, so erhält man den Abstand

$$d(\mathbf{p}, L) = |s| \parallel \mathbf{n} \parallel .$$

Aber mit folgendem Trick geht es schneller:

Wir bilden auf beiden Seiten der Gleichung das Skalarprodukt mit $\mathbf{n}$. Wegen $(\mathbf{n}.\mathbf{v}) = 0$ finden wir

$$\begin{aligned} (\mathbf{p}.\mathbf{n}) + s \cdot \parallel \mathbf{n} \parallel^2 &= (\mathbf{a}.\mathbf{n}), \\ s &= \frac{1}{\parallel \mathbf{n} \parallel}^2 \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{p}.\mathbf{n}). \end{aligned}$$

Damit erhält man den Abstand

$$d(\mathbf{p}, L) = |s| \cdot \parallel \mathbf{n} \parallel = |(\mathbf{a} - \mathbf{p}.\mathbf{n})| \cdot \frac{1}{\parallel \mathbf{n} \parallel}.$$

Man kann diesen Abstand (bis auf das Vorzeichen) deuten als Skalarprodukt des (schiefen) Differenzvektors $\mathbf{a} - \mathbf{p}$ mit dem normierten Normalenvektor

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{n}}{\parallel \mathbf{n} \parallel} = \frac{1}{v_1^2 + v_2^2} \cdot \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}.$$

Man muss nicht unbedingt den Normalenvektor $\mathbf{n}$ benutzen. Den Parameter t des Lotfußpunktes $\mathbf{a} + t \cdot \mathbf{v}$ kann man aus der Bedingung

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} + t\mathbf{v} - \mathbf{p} \,.\, \mathbf{v}) &= 0 \\ t \cdot \parallel \mathbf{v} \parallel^2 + (\mathbf{a} - \mathbf{p}.\mathbf{v}) = 0 \end{aligned}$$

als

$$t = \frac{1}{\parallel \mathbf{v} \parallel^2} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{a} \,.\, \mathbf{v})$$

berechnen. Damit erhalten wir

$$d(\mathbf{p}, L) = \parallel \mathbf{a} + \frac{1}{\parallel \mathbf{v} \parallel^2} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{a} \,.\, \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} - \mathbf{p} \parallel .$$

Genauso wie $\mathbf{x}$ denselben Abstand von zwei Punkten haben kann, kann der Punkt $\mathbf{x}$ auch den gleichen Abstand von zwei Geraden haben. Die Bedingung dafür ist am einfachsten auszuwerten, wenn beide Geraden durch ihre Gleichungen

$$\begin{array}{ll} L_1: & l_1(\mathbf{x}) = a_1 \cdot x + b_1 \cdot y - c_1 = 0 \\ L_2: & l_2(\mathbf{x}) = a_2 \cdot x + b_2 \cdot y - c_2 = 0 \end{array}$$

gegeben sind. Dann ist

$$d(\mathbf{x}, L_1) = d(\mathbf{x}, L_2) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|l_1(\mathbf{x})|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{|l_2(\mathbf{x})|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}},$$

also

$$\frac{1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \cdot (a_1 x + b_1 y - c_1) = \pm \frac{1}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \cdot (a_2 x + b_2 y - c_2).$$

Anders geschrieben sind dies die Gleichungen

$$\sqrt{a_2^2 + b_2^2} \cdot (a_1 x + b_1 y - c_1) - \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot (a_2 x + b_2 y - c_2) = 0,$$

$$\sqrt{a_2^2 + b_2^2} \cdot (a_1 x + b_1 y - c_1) + \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot (a_2 x + b_2 y - c_2) = 0$$

zweier Geraden. Sie heißen die *Winkelhalbierenden* zu den beiden Geraden L_1 und L_2.

Beispiel 2.7 *Gegeben seien die beiden Geraden*

$$L_1: 3 \cdot x + 4 \cdot y = 1, \quad L_2: 5 \cdot x + 12 \cdot y = 1.$$

Das ist so hingetrickst, dass

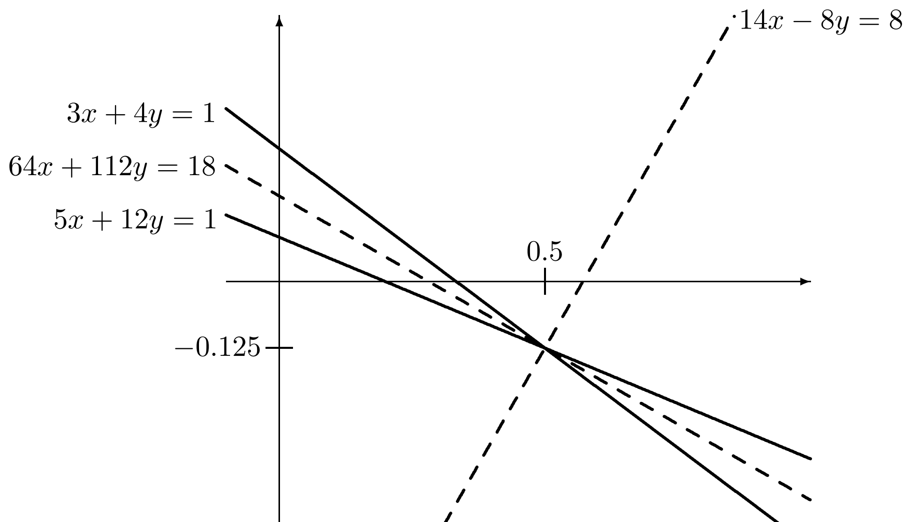
$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \sqrt{9 + 16} = 5, \quad \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = \sqrt{25 + 144} = 13.$$

Damit haben die beiden Winkelhalbierenden die Gleichungen

$$13 \cdot (3 \cdot x + 4 \cdot y - 1) = \pm 5 \cdot (5 \cdot x + 12 \cdot y - 1),$$

bzw.

$$14 \cdot x - 8 \cdot y = 8 \quad \textit{und} \quad 64 \cdot x + 112 \cdot y = 18.$$



Die Winkelhalbierenden kann man auch in Parameterform bestimmen: Seien die beiden Geraden (Schnittpunkt $\mathbf{p}$) in Parameterform

$$L_1 : \mathbf{p} + s \cdot \mathbf{v}_1, \quad L_2 : \mathbf{p} + t \cdot \mathbf{v}_2, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

gegeben. Nachdem man $\mathbf{v}_1$ durch $\parallel \mathbf{v}_2 \parallel \cdot \mathbf{v}_1$ ersetzt und $\mathbf{v}_2$ durch $\parallel \mathbf{v}_1 \parallel \mathbf{v}_2$, kann man annehmen, dass beide Richtungsvektoren die gleiche Länge haben. Jede der beiden Winkelhalbierenden definiert eine Spiegelung, welche die beiden Geraden L_1 und L_2 vertauscht. Der Richtungsvektor $\mathbf{v}_1$ von L_1 wird dabei in einen Richtungsvektor gleicher Länge für L_2 gespiegelt. Das Bild von $\mathbf{v}_1$ ist also $\pm\mathbf{v}_2$. Deswegen ist

$$\mathbf{w}_1 := \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \quad \text{oder} \quad \mathbf{w}_2 := \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$$

ein Vektor, der je unter einer der Spiegelungen fest bleibt, d.h., auf der jeweiligen Spiegelungsgeraden = Winkelhalbierenden liegt. Die beiden Winkelhalbierenden sind in Parameterform

$$W_1 : \mathbf{p} + s \cdot \mathbf{w}_1, \quad W_2 : \mathbf{p} + t \cdot \mathbf{w}_2, \quad s, t, \in \mathbb{R}.$$

Nun seien drei paarweise nicht parallele Geraden L_1, L_2, L_3 gegeben. Ist $W_{1,2}$ eine Winkelhalbierende, die von L_1 und L_2 denselben Abstand hat, und $W_{1,3}$ eine Winkelhalbierende mit demselben Abstand von L_1 und L_3, so hat $\mathbf{w} := W_{1,2} \cap W_{1,3}$ denselben Abstand von L_2 und L_3, liegt also auf einer Winkelhalbierenden $W_{2,3}$ zu den Geraden L_2 und L_3. In der Schule drückt man das so aus: *Die drei Winkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.* Dabei versteht man unter Winkelhalbierender die ins Innere des Dreicks weisende Winkelhalbierende. Der Schnittpunkt dieser Winkelhalbierenden ist der *Inkreismittelpunkt* $\mathbf{w}$ des Dreiecks. Wir wollen jezt die Komplikationen beiseite lassen, die durch die anderen Winkelhalbierenden entstehen (und auf die *Ankreismittelpunkte* führen), und eine Formel für den Inkreismittelpunkt herleiten.

Dazu geben wir uns ein Dreieck mit den Ecken $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vor. Als erstes wollen wir die Winkelhalbierende $W_{\mathbf{a}}$ suchen, die von $\mathbf{a}$ aus ins Innere des Dreiecks weist. Richtungsvektoren der Seiten $\mathbf{ab}$ und $\mathbf{ac}$ sind die Vektoren $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ und $\mathbf{c} - \mathbf{a}$. Wir bringen sie auf gleiche Länge, indem wir sie durch

$$\parallel \mathbf{c} - \mathbf{a} \parallel \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \quad \text{und} \quad \parallel \mathbf{b} - \mathbf{a} \parallel \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a})$$

ersetzen. Dann bekommen wir für $W_{\mathbf{a}}$ die Parameterdarstellung

$$W_{\mathbf{a}} : \quad \mathbf{a} + s \cdot (\parallel \mathbf{c} - \mathbf{a} \parallel \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) + \parallel \mathbf{b} - \mathbf{a} \parallel \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a})), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Wir wollen $W_{\mathbf{a}}$ mit $W_{\mathbf{b}}$ schneiden. Aus Symmetriegründen formen wir die Parameterdarstellung etwas um in

$$W_{\mathbf{a}} : \quad (1 - s \cdot (\parallel \mathbf{b} - \mathbf{a} \parallel + \parallel \mathbf{c} - \mathbf{a} \parallel)) \cdot \mathbf{a} + s \parallel \mathbf{c} - \mathbf{a} \parallel \cdot \mathbf{b} + s \parallel \mathbf{b} - \mathbf{a} \parallel \cdot \mathbf{c}.$$

Eine Parameterdarstellung für $W_{\mathbf{b}}$ bekommen wir daraus, indem wir einfach in der Formel $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ vertauschen (und einen neuen Parameter $t \in \mathbb{R}$ ins Spiel bringen).

$$W_{\mathbf{b}} : \quad t \parallel \mathbf{c} - \mathbf{b} \parallel \cdot \mathbf{a} + (1 - t \cdot (\parallel \mathbf{a} - \mathbf{b} \parallel + \parallel \mathbf{c} - \mathbf{b} \parallel)) \cdot \mathbf{b} + t \parallel \mathbf{a} - \mathbf{b} \parallel \cdot \mathbf{c}.$$

Diese beiden Darstellungen müssen wir gleich setzen. Wenn wir da systematisch vorgehen, kommen wir in große Schwierigkeiten. Aber wir probieren einfach, die Parameter s und t so hinzukriegen, dass sie die gleiche Linearkombination der Ecken $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ergeben. Den Koeffizienten von $\mathbf{c}$ können wir gleich machen, wenn wir $t = s$ setzen. Wenn der Koeffizient auch bei $\mathbf{a}$ gleich sein soll, muss

$$\begin{aligned} 1 - s \cdot (\| \mathbf{b} - \mathbf{a} \| + \| \mathbf{c} - \mathbf{a} \|) &= s \cdot \| \mathbf{c} - \mathbf{b} \| \\ s \cdot (\| \mathbf{b} - \mathbf{a} \| + \| \mathbf{c} - \mathbf{a} \| + \| \mathbf{c} - \mathbf{b} \|) &= 1 \end{aligned}$$

gelten. Und Koeffizientenvergleich bei $\mathbf{b}$ führt auf genau dieselbe Bedingung. Das sieht unübersichtlich aus, ist es aber nicht. Denn in der Klammer steht die Summe der Längen aller drei Seiten des Dreiecks. Das ist der Dreiecksumfang. Wenn wir den mit u abkürzen, finden wir

$$s = t = \frac{1}{u}.$$

Um den Inkreismittelpunkt zu erhalten, müssen wir diesen Wert für s etwa in die Parameterdarstellung von $W_{\mathbf{a}}$ einsetzen. Dafür überlegen wir uns

$$1 - \frac{1}{u}(\| \mathbf{b} - \mathbf{a} \| + \| \mathbf{c} - \mathbf{a} \|) = \frac{1}{u}(u - \| \mathbf{b} - \mathbf{a} \| + \| \mathbf{c} - \mathbf{a} \|) = \frac{1}{u} \| \mathbf{b} - \mathbf{c} \| .$$

Dann bekommen wir den Inkreismittelpunkt in der Form

$$\mathbf{w} = \frac{1}{u} \cdot (\| \mathbf{c} - \mathbf{b} \| \mathbf{a} + \| \mathbf{a} - \mathbf{c} \| \mathbf{b} + \| \mathbf{b} - \mathbf{a} \| \mathbf{c}).$$

Diese Formel ist wunderschön symmetrisch. Praktisch ist sie aber nutzlos, weil die Längen der Dreiecksseiten gefährliche Wurzelausdrücke in den Koordinaten der Ecken sind. Um die Formel auszuwerten, muss das Dreieck sehr einfach gebaut sein. Das einfachste Beispiel, das mir eingefallen ist, ist

Beispiel 2.8 *Wir betrachten das Dreieck mit den Ecken*

$$\mathbf{a} = (0,0), \quad \mathbf{b} = (8,0), \quad \mathbf{c} = (4,3).$$

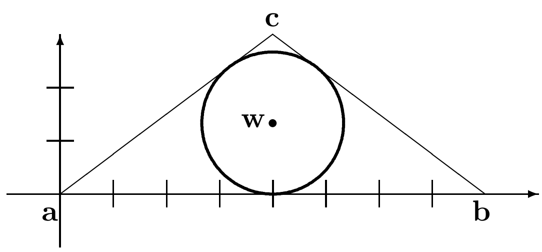
Dann ist

$$\| \mathbf{b} - \mathbf{a} \| - 8, \quad \| \mathbf{c} - \mathbf{b} \| = \| \mathbf{a} - \mathbf{c} \| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

Es folgt $u = 18$ *und*

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \frac{1}{18}(5 \cdot (0,0) + 5 \cdot (8,0) + 8 \cdot (4,3)) \\ &= \frac{1}{18}(72, 24) \\ &= (4, \frac{4}{3}). \end{aligned}$$

Graphisch haut das hin:



Aufgabe 2.3 *Gegeben sei die Gerade* $M \subset \mathbb{R}^2$ *in Achsenabschnittsform*

$$M: \quad \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1,$$

wo wir der Einfachheit halber

$$p > 0 \quad \textit{und} \quad q > 0$$

annehmen.
a) *Bestimmen Sie den Abstand* $d(\mathbf{0}, M)$ *des Nullpunkts von dieser Geraden. Interpretieren Sie das Ergebnis für* $q \to \infty$.
b) *Bestimmen Sie von* $\mathbf{0}$ *aus die Lotgerade* L *auf* M *und den Lotfußpunkt* $\mathbf{m} \in M$. *Verifizieren Sie* $\| \mathbf{0} - \mathbf{m} \| = d(\mathbf{0}, M)$.

Aufgabe 2.4 *Im* R^2 *seien die beiden Geraden*

$$L: \, 3x + 4y + 5 = 0, \quad M: \, 4x - 3y + 5 = 0$$

gegeben.
a) *Bestimmen Sie die beiden Winkelhalbierenden zu diesen Geraden.*
b) *Zeigen Sie, dass die Menge*

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2: \, d(\mathbf{x}, L) = 2d(\mathbf{x}, M)\}$$

aus zwei Geraden besteht und bestimmen Sie die Gleichungen dieser beiden Geraden.

Aufgabe 2.5 *Durch Vorgabe von drei reellen Zahlen* $b > 0$, $c > 0$ *und* $\alpha \in]0, \pi[$ *sei in der euklidischen Ebene* $\mathbb{R}^2$ *ein Dreieck* $\Delta = \Delta ABC$ *mit den Ecken* $A = (0,0)$, $B = (c, 0)$ *und* $C = (b \cdot cos\alpha, b \cdot sin\alpha)$ *gegeben.*
a) *Man drücke die Seitenlängen* $\overline{AB}, \overline{AC}$ *und* $a = \overline{BC}$ *sowie den Flächeninhalt* F *von* Δ *durch* b, c *und* α *aus.*
b) *Man ermittle den Umkreis* k_1 *von* Δ *durch Angabe seiner Gleichung, seines Mittelpunkts* M_1 *und den Umkreisradius* R. *Man bestätige die Beziehung*

$$R = \frac{abc}{4F}.$$

c) *Man ermittle den Mittelpunkt* M_2 *und den Radius* r *des Inkreises von* Δ. *Man bestätige die Beziehung*

$$r = \frac{2F}{a + b + c}.$$

2.3 Kegelschnitte und Abstand

Hier möchte ich die klassischen Charakterisierungen der nicht-entarteten Kegelschnitte (Parabel, Ellipse, Hyperbel) durch Abstands-Bedingungen besprechen.

Satz 2.2 *Gegeben seien eine Gerade $D \subset \mathbb{R}^2$ und ein Punkt $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{f} \notin D$. Die Menge der Punkte $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, welche von $\mathbf{f}$ und D den gleichen Abstand haben, ist eine Parabel.*

Beweis. Die Aussage ändert sich nicht, wenn wir die Koordinaten durch eine Bewegung so ändern, dass die Gerade D parallel zur x-Achse wird, und der Punkt $\mathbf{f}$ auf der positiven y-Achse liegt. Weil ich möchte, dass der Ursprung zu der durch den Satz beschriebenen Menge gehört, wähle ich

$$D: \, y = -a, \quad \mathbf{f} = (0, a), \quad a > 0.$$

Für einen Punkt $\mathbf{x} = (x, y)$ ist

$$d(\mathbf{x}, D) = |y + a|, \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{f}) = \sqrt{x^2 + (y - a)^2}.$$

Weil $x^2 + (y - a)^2$ immer positiv ist, gilt

$$d(\mathbf{x}, D) = d(\mathbf{x}, \mathbf{f})$$

genau dann, wenn die quadrierte Gleichung erfüllt ist:

$$\begin{array}{rcl} (y + a)^2 & = & x^2 + (y - a)^2 \\ y^2 + 2ay + a^2 & = & x^2 + y^2 - 2ay + a^2 \\ x^2 & = & 4ay \end{array}$$

Das ist die Gleichung einer Parabel in Normalform. □

Jede Parabelgleichung $y = px^2$ in Normalform erhält man so, wenn man $a = 1/4p$ setzt. Also bekommt man jede beliebige Parabel durch die im Satz angegebene Weise mit geeignetem Punkt $\mathbf{f}$ und geeigneter Gerade D. Ich habe die Bezeichnungen für den Punkt und die Gerade so gewählt wegen folgender Definition.

Definition 2.2 *Die Gerade D heißt* Leitlinie = Direktrix *der Parabel, der Punkt* $\mathbf{f}$ *heißt* Brennpunkt = Focus.

Der nächste Satz bringt eine Abstands-Charakterisierung für die Ellipse. Vorher erinnern wir an die Dreiecksungleichung: Gegeben zwei verschiedene Punkte $\mathbf{f}_1$ und $\mathbf{f}_2$, so ist für jeden Punkt $\mathbf{x}$, nicht auf der Verbindungsstrecke $\mathbf{f}_1\mathbf{f}_2$

$$d := d(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) < d(\mathbf{f}_1, \mathbf{x}) + d(\mathbf{x}, \mathbf{f}_2).$$

Satz 2.3 *Gegeben seien zwei verschiedene Punkte $\mathbf{f}_1$ und $\mathbf{f}_2 \in \mathbb{R}^2$ mit dem Abstand*

$$d = \parallel \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2 \parallel .$$

Ist $s \in \mathbb{R}$, $s > d$, so ist die Menge der Punkte $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ mit fester Abstandssumme

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{f}_1) + d(\mathbf{x}, \mathbf{f}_2) = s$$

zu den beiden gegebenen Punkten eine Ellipse.

Beweis. Wieder normieren wir durch eine Bewegung die gegebenen Punkte, und zwar zu

$$\mathbf{f}_1 = (f, 0), \quad \mathbf{f}_2 = (-f, 0) \quad \text{mit} \quad f > 0.$$

Dann haben wir

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}, \mathbf{f}_1) &= \sqrt{(x-f)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + f^2 - 2xf}, \\ d(\mathbf{x}, \mathbf{f}_2) &= \sqrt{(x+f)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + f^2 + 2xf}, \\ d(\mathbf{x}, \mathbf{f}_1)^2 &+ d(\mathbf{x}, \mathbf{f}_2)^2 = 2(x^2 + y^2 + f^2), \\ d(\mathbf{x}, \mathbf{f}_1) \cdot d(\mathbf{x}, \mathbf{f}_2) &= \sqrt{(x^2 + y^2 + f^2)^2 - 4x^2 f^2}. \end{aligned}$$

Weil beide Seiten der Gleichung $d(\mathbf{x}, \mathbf{f}_1) + d(\mathbf{x}, \mathbf{f}_2) = s$ positiv sind, ist diese Gleichung äquivalent zur quadrierten Gleichung

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}, \mathbf{f}_1)^2 + d(\mathbf{x}, \mathbf{f}_2)^2 + 2d(\mathbf{x}, \mathbf{f}_1)d(\mathbf{x}, \mathbf{f}_2) &= s^2 \\ 2(x^2 + y^2 + f^2) + 2\sqrt{(x^2 + y^2 + f^2)^2 - 4x^2 f^2} &= s^2 \\ 2\sqrt{(x^2 + y^2 + f^2)^2 - 4x^2 f^2} &= s^2 - 2(x^2 + y^2 + f^2). \end{aligned}$$

Insbesondere ist die rechte Seite positiv, und die Gleichung ist wieder äquivalent zur quadrierten Gleichung

$$\begin{aligned} 4 \cdot (x^2 + y^2 + f^2)^2 - 16x^2 f^2 &= s^4 - 4(x^2 + y^2 + f^2)s^2 + 4 \cdot (x^2 + y^2 + f^2)^2 \\ 4s^2(x^2 + y^2 + f^2) - 16x^2 f^2 &= s^4 \\ 4(s^2 - 4f^2)x^2 + 4s^2 y^2 &= s^4 - 4s^2 f^2 \\ &= s^2(s^2 - 4f^2). \end{aligned}$$

Nachdem wir durch die rechte Seite kürzen erhalten wir die Ellipsengleichung

$$4\frac{x^2}{s^2} + 4\frac{y^2}{s^2 - 4f^2} = 1$$

in Normalform. □

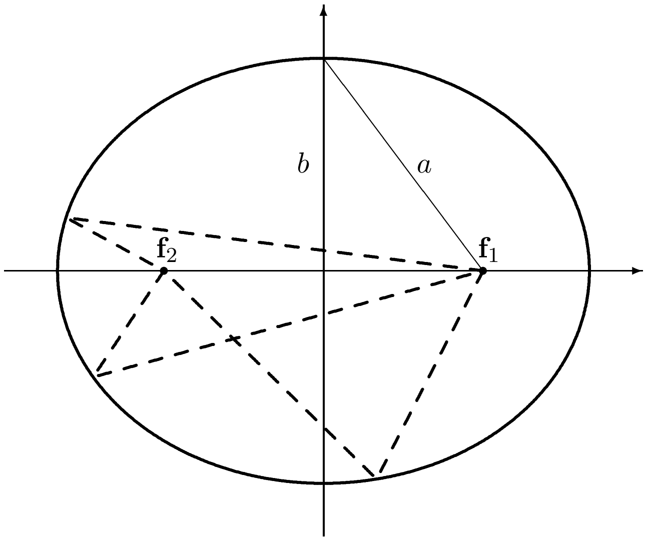
Für die erhaltene Ellipse ist der Achsenabschnitt auf der x-Achse

$$a = \frac{s}{2}$$

und für den Abschnitt auf der y-Achse gilt

$$b^2 = \frac{s^2 - 4f^2}{4} = a^2 - f^2, \quad f^2 = a^2 - b^2.$$

Die beiden Punkte $\mathbf{f}_{1,2} = (\pm f, 0)$ heißen *Brennpunkte* (=Foci) der Ellipse.



Der nächste Satz gibt eine Abstands-Charakterisierung der Hyperbel. Statt Abstandssumme, wie bei der Ellipse, muss man hier die Abstandsdifferenz $s := |d(\mathbf{x}, \mathbf{f}_1) - d(\mathbf{x}, \mathbf{f}_2)|$ nehmen. Wir erinnern an die Dreiecksungleichung in folgender Form:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{f}_1) < d(\mathbf{x}, \mathbf{f}_2) + d(\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_1), \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{f}_1) - d(\mathbf{x}, \mathbf{f}_2) < d(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2),$$

oder, etwas allgemeiner,

$$s := |d(\mathbf{x}, \mathbf{f}_1) - d(\mathbf{x}, \mathbf{f}_2)| < d := d(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2),$$

Satz 2.4 *Gegeben seien zwei verschiedene Punkte $\mathbf{f}_1$ und $\mathbf{f}_2 \in \mathbb{R}^2$ mit dem Abstand*

$$d = \| \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2 \| .$$

Ist $s \in \mathbb{R}$, $0 < s < d$, so ist die Menge der Punkte $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ mit fester Abstandsdifferenz

$$|d(\mathbf{x}, \mathbf{f}_1) - d(\mathbf{x}, \mathbf{f}_2)| = s$$

eine Hyperbel.

Beweis. Jetzt müssen wir ausgehen von der Gleichung

$$|d(\mathbf{x}, \mathbf{f}_1) - d(\mathbf{x}, \mathbf{f}_2)| = s.$$

Sie unterscheidet sich um ein Vorzeichen von der entsprechenden Gleichung bei der Ellipse. Nach dem ersten Quadrieren bekommen wir (Vorzeichen beachten!)

$$-2d(\mathbf{x}, \mathbf{f}_1) \cdot d(\mathbf{x}, \mathbf{f}_2) = s^2 - d(\mathbf{x}, \mathbf{f}_1)^2 - d(\mathbf{x}, \mathbf{f}_2)^2 = s^2 - 2(x^2 + y^2 + f^2).$$

Nach dem zweiten Quadrieren fällt allerdings das Vorzeichen weg. Wir bekommen dieselbe Gleichung wie bei der Ellipse. Der Unterschied besteht darin, dass jetzt

$$s < 2f, \quad s^2 - 4f^2 < 0.$$

Die Gleichung, welche eben noch eine Ellipse beschrieb, definiert jetzt eine in Richtung der x-Achse geöffnete Hyperbel. $\square$

Das Vorzeichen schlägt durch bei der Berechnung der Halbachsen. Wie bei der Ellipse wird

$$a = \frac{s}{2},$$

aber wegen des Vorzeichens bekommen wir

$$b^2 = \frac{1}{4}(4f^2 - s^2) = f^2 - a^2, \quad f^2 = a^2 + b^2.$$

Aufgabe 2.6 *Im $\mathbb{R}^2$ sei eine Gerade G gegeben durch die Gleichung*

$$3x + 4y + 12 = 0.$$

Sei K die Menge aller Punkte des $\mathbb{R}^2$, die von G und vom Nullpunkt gleichen Abstand haben.
a) *Man bestimme eine Gleichung und zeichne eine Skizze von K.*
b) *Man zeige, dass K ein Kegelschnitt ist und bestimme dessen Typ.*
c) *Man berechne die Schnittpunkte von K mit der x-Achse und Gleichungen für die Tangenten an K in diesen Punkten.*
d) *Man gebe eine orthogonale Abbildung Φ des $\mathbb{R}^2$ an, für die $\Phi(K)$ symmetrisch zur x-Achse liegt.*

Aufgabe 2.7 *Gegeben seien zwei ebene, sich von außen berührende Kreise C bzw, C' mit den Radien p bzw. q.*
a) *Zeigen Sie, dass die Mittelpunkte aller Kreise, welche C und C' jeweils von außen berühren, auf einer Hyperbel liegen, deren Brennpunkte die Mittelpunkte von C und C' sind.*
b) *Bestimmen Sie die Hauptachsen dieser Hyperbel.*
c) *Geben Sie eine Konstruktion ihrer Asymptoten mit Hilfe von Zirkel und Lineal.*

Aufgabe 2.8 *$E \subset \mathbb{R}^2$ sei der geometrische Ort aller Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, deren Abstand von der Geraden $L : x = 3$ doppelt so groß ist, wie von der Kreislinie*

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}.$$

Zeigen Sie: E besteht aus zwei Ellipsen. Bestimmen Sie deren Mittelpunkte und die Längen ihrer Halbachsen.

Aufgabe 2.9 *Im $\mathbb{R}^2$ seien gegeben der Punkt $\mathbf{p} = (0, 1)$ und die Gerade $L : y = 0$. Für $c \in \mathbb{R}$ sei*

$$M_c := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : d(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = c \cdot d(\mathbf{x}, L)\}.$$

Zeigen Sie: Für $0 < c < 1$ ist M_c eine Ellipse und für $c > 1$ ist M_c eine Hyperbel.

2.4 Bewegungen der Ebene

Ziel dieses Abschnittes ist die Klassifikation aller Bewegungen in der Ebene $\mathbb{R}^2$. Wir erinnern uns: Eine Bewegung $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist eine Abbildung

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{t} + A \cdot \mathbf{x}$$

zusammengesetzt aus einer orthogonalen Abbildung

$$\mathbf{x} \mapsto A \cdot \mathbf{x}, \quad A \text{ orthogonal},$$

und einer Translation

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{t} + \mathbf{x}.$$

Dabei heißt die Matrix A orthogonal, wenn

$$A \cdot A^t = \mathbb{1}_2.$$

Als erstes klassifizieren wir die orthogonalen 2×2-Matrizen.

Satz 2.5 *Eine orthogonale* 2×2*-Matrix ist*

- *entweder von der Form*
$$\begin{pmatrix} cos(\varphi) & -sin(\varphi) \\ sin(\varphi) & cos(\varphi) \end{pmatrix}$$
und beschreibt eine Drehung gegen den Uhrzeigersinn um den Winkel φ*,*
- *oder von der Form*
$$\begin{pmatrix} cos(\varphi) & sin(\varphi) \\ sin(\varphi) & -cos(\varphi) \end{pmatrix}$$
und beschreibt die Spiegelung an einer Geraden, welche mit der positiven x*-Achse den Winkel* $\varphi/2$ *einschließt.*

Beweis. Wir schreiben

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}$$

ist A orthogonal genau dann, wenn

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1, \quad ac + bd = 0.$$

Wegen $a^2 + b^2 = 1$ gibt es einen Winkel $\varphi \in \mathbb{R}$ mit

$$a = cos(\varphi), \quad b = -sin(\varphi).$$

Das Vorzeichen bei $sin(\varphi)$ ist dabei Geschmackssache. Es ändert sich, wenn wir von φ zu $-\varphi$ übergehen.

Die Bedingung $ac + bd = 0$ bedeutet, dass der Vektor (c, d) auf dem Vektor (a, b) senkrecht steht. Alle diese Vektoren haben die Form

$$(c, d) = t \cdot (-b, a) \quad \text{mit} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Mit $c^2 + d^2 = 1$ folgt aber nun

$$t^2 \cdot (a^2 + b^2) = t^2 = 1, \quad \text{d.h.} \quad t = \pm 1.$$

Es gibt die beiden Fälle $t = 1$ und $t = -1$. Für $t = 1$ bekommen wir die wohlbekannte Drehmatrix

$$\begin{pmatrix} cos(\varphi) & -sin(\varphi) \\ sin(\varphi) & cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Es bleibt der Fall $t = -1$ und

$$A = \begin{pmatrix} cos(\varphi) & -sin(\varphi) \\ -sin(\varphi) & -cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

zu diskutieren. Wegen der vielen irritierenden Minus-Zeichen ersetzen wir φ durch $-\varphi$ und betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} cos(\varphi) & sin(\varphi) \\ sin(\varphi) & -cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Es fällt auf, dass sie nicht nur orthogonal, sondern auch noch symmetrisch ist. Sie hat also zwei reelle Eigenwerte. Um sie zu bestimmen berechnen wir das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= (cos(\varphi) - \lambda)(-cos(\varphi) - \lambda) - sin^2(\varphi) \\ &= \lambda^2 - cos^2(\varphi) - sin^2(\varphi) \\ &= \lambda^2 - 1. \end{aligned}$$

Die beiden Eigenwerte sind also $\lambda_{1,2} = \pm 1$. Seien $\mathbf{v}_{1,2}$ zugehörige Eigenvektoren. Alle Vektoren auf der Gerade $L = \mathbb{R} \cdot \mathbf{v}_1$ werden bei der Multiplikation mit A auf sich abgebildet. Wegen der Hauptachsen-Transformation wissen wir, dass $\mathbf{v}_2$ auf L senkrecht steht. Und $A \cdot \mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_2$ zeigt, dass unsere Abbildung die Spiegelung an der Geraden L ist.

Es bleibt, die Richtung von L zu bestimmen. Dazu brauchen wir einen Eigenvektor $\mathbf{v}_1$ explizit. Diese Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ liegen im Kern der Matrix

$$A - \mathbb{1}_2 = \begin{pmatrix} cos(\varphi) - 1 & sin(\varphi) \\ sin(\varphi) & -cos(\varphi) - 1 \end{pmatrix}.$$

Einer davon ist z.B.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} sin(\varphi) \\ 1 - cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Man sieht nix, garnix. Aber wir wollen ja den halben Winkel $\varphi/2$ ins Spiel bringen. Das geht mit den Additionstheoremen der Winkelfunktionen:

$$sin(\varphi) = sin(\frac{\varphi}{2} + \frac{\varphi}{2}) = 2 \cdot sin(\frac{\varphi}{2}) \cdot cos(\frac{\varphi}{2}),$$

$$1-cos(\varphi) = sin^2(\frac{\varphi}{2})+cos^2(\frac{\varphi}{2})-cos(\frac{\varphi}{2}+\frac{\varphi}{2}) = sin^2(\frac{\varphi}{2})+cos^2(\frac{\varphi}{2})-(cos^2(\frac{\varphi}{2})-sin^2(\frac{\varphi}{2})) = 2\cdot sin^2(\frac{\varphi}{2}).$$

Wir finden

$$\mathbf{v}_1 = 2sin(\frac{\varphi}{2}) \cdot \begin{pmatrix} cos(\frac{\varphi}{2}) \\ sin(\frac{\varphi}{2}) \end{pmatrix}.$$

Zumindest für $sin(\varphi/2) \neq 0$ hat L den Richtungsvektor

$$\begin{pmatrix} cos(\frac{\varphi}{2}) \\ sin(\frac{\varphi}{2}) \end{pmatrix}$$

und schließt mit der positiven x-Achse den Winkel $\varphi/2$ ein. Es bleibt der Fall $sin(\varphi/2) = 0$, d.h., $\varphi = 0$ und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

die Matrix beschreibt die Spiegelung an der x-Achse. □

Ich möchte hier nicht ganz genau sagen, was eine Orientierung der Ebene $\mathbb{R}^2$ ist, nur so viel: Eine Basis $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ definiert die positive Orientierung, wenn $\mathbf{v}_2$ - entgegen dem Uhrzeigersinn - nach $\mathbf{v}_1$ kommt. Die kanonische Basis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ definiert die positive Orientierung, während $\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2$ das nicht tut. Dann ist einsichtig: Eine Drehung erhält die Orientierung, während eine Geradenspiegelung die Orientierung umkehrt. Im ersten Fall hat die beschreibende Matrix die Determinante $= 1$, im zweiten Fall $= -1$.

Definition 2.3 *Die Bewegung*

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{t} + A \cdot \mathbf{x}$$

heißt orientierungserhaltend, *wenn* $det(A) = 1$ *und* orientierungsumkehrend, *wenn* $det(A) = -1$.

Wir werden beweisen, dass Bewegungen durch ihr Verhalten bezüglich Orientierung und durch ihre Fixpunktmenge klassifiziert werden. Dazu:

Definition 2.4 *Es sei* $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *eine Bewegung. Ein Punkt* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ *heißt* Fixpunkt *von* Φ, *wenn*

$$\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}.$$

Beispiel 2.9 *Wir betrachten die Bewegung* $\Phi : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{t} + A \cdot \mathbf{x}$ *mit*

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Für einen Vektor $\mathbf{x} = (x, y)^t$ *ist das Bild*

$$\Phi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{pmatrix}.$$

Und $\mathbf{x}$ *ist ein Fixpunkt, wenn*

$$\begin{array}{rcl} \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1 & = & x \\ \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y & = & y \end{array}$$

bzw.

$$\begin{array}{rcl} (\frac{\sqrt{2}}{2} - 1)x - \frac{\sqrt{2}}{2}y & = & -1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}x + (\frac{\sqrt{2}}{2} - 1)y & = & 0 \end{array}$$

Wir lösen das System, anders als wir es gelernt haben, indem wir aus der zweiten Zeile

$$x = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot (1 - \frac{\sqrt{2}}{2})y = (\sqrt{2} - 1)y$$

eliminieren. Dann wird die erste Zeile

$$(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1)(\sqrt{2} - 1) - \frac{\sqrt{2}}{2}y = (2 - 2\sqrt{2})y = -1.$$

Wir finden

$$y = \frac{-1}{2(1 - \sqrt{2})} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}, \quad x = \frac{1}{2}.$$

Jetzt müssen wir uns allerdings um die Ermittlung von Fixpunkten in der allgemeinen Situation kümmern. Wir betrachten die Bewegung

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{t} + A \cdot \mathbf{x}.$$

Ein Vektor $\mathbf{x}$ ist Fixpunkt, wenn

$$\mathbf{t} + A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}, \quad \text{bzw.} \quad (A - \mathbb{1}_2) \cdot \mathbf{x} = -\mathbf{t}.$$

Es kommt stark auf den Rang der Matrix $A - \mathbb{1}_2$ an. Der ist maximal, $= 2$, falls nicht A den Eigenwert 1 besitzt. Dann gibt es genau einen Fixpunkt $\mathbf{p}$. Für jeden Vektor $\mathbf{x} = \mathbf{p} + (\mathbf{x} - \mathbf{p})$ ist

$$\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{t} + A \cdot (\mathbf{p} + (\mathbf{x} - \mathbf{p})) = \mathbf{t} + A \cdot \mathbf{p} + A \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = \mathbf{p} + A \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}).$$

Der Eigenwert 1 kann aber in zwei verschiedenen Situationen auftreten:

- Entweder ist Φ orientierungserhaltend und $A = \mathbb{1}_2$. Falls $\mathbf{t} = \mathbf{0}$ ist, ist Φ die Identität, alle Punkte sind Fixpunkte. Falls $\mathbf{t} \neq \mathbf{0}$ ist, ist $\Phi : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{t} + \mathbf{x}$ eine echte Translation, es gibt keinen Fixpunkt.
- Oder Φ ist nicht orientierungserhaltend. Dann beschreibt die Matrix A eine Geradenspiegelung. Wir ändern die Koordinaten (aber nicht unser Problem) so, dass

  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

  wird. Dann hat

  $$A - \mathbb{1}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

den Rang 1. Die Gleichung $(A - 1\!\!1_2) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{t}$ ist genau dann lösbar, wenn $\mathbf{t} = (0, t_2)$ senkrecht auf der x-Achse, der Spiegelungsgeraden, steht. Die Abbildung ist dann

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ t_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ t_2 - y \end{pmatrix}.$$

Es handelt sich um eine Spiegelung an der Geraden $y = t_2/2$. Alle Punkte auf dieser Spiegelungsgeraden sind Fixpunkte.

- Wenn im vorhergehenden Fall aber

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad t_1 \neq 0$$

ist, dann ist die Gleichung $(A - 1\!\!1_2)\mathbf{x} = \mathbf{t}$ unlösbar, es gibt keinen einzigen Fixpunkt. Die Abbildung kann man dann schreiben

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} t_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ t_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}}.$$

Der unterklammerte Teil ist eine Spiegelung an einer Geraden parallel zur x-Achse. Nach dieser Spiegelung wird noch eine Translation in Richtung der Spiegelungsgerade ausgeführt. Sowas heißt *Gleitspiegelung.*

Satz 2.6 *Bewegungen der Ebene werden durch ihr Orientierungsverhalten und ihre Fixpunktmenge wie folgt klassifiziert:*

orientierungs-	*Fixpunktmenge*	*Bewegung*
erhaltend	$\emptyset$	*Translation*
	Punkt	*Drehung*
	$\mathbb{R}^2$	*Identität*
umkehrend	$\emptyset$	*Gleitspiegelung*
	Gerade	*Spiegelung*

Die Hintereinanderschaltung zweier Bewegungen

$$\Phi_1 : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{t}_1 + A_1 \cdot \mathbf{x}, \quad \Phi_2 : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{t}_2 + A_2 \cdot \mathbf{x}$$

ist die Bewegung

$$\Phi_2 \circ \Phi_1 : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{t}_2 + A_2 \cdot \Phi_1(\mathbf{x}) = \mathbf{t}_2 + A_2 \cdot (\mathbf{t}_1 + A_1 \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{t}_2 + A_2 \cdot \mathbf{t}_1 + A_2 \cdot A_1 \cdot \mathbf{x}.$$

Der entstehende Translationsvektor ist etwas dubios. Aber die Matrix der Produktabbildung ist die Produktmatrix. Damit folgt aus dem Determinantenmultiplikationssatz:

- Das Produkt zweier orientierungserhaltenden Bewegungen ist wieder orientierungserhaltend,
- das Produkt einer orientierungserhaltenden mit einer orientierungsumkehrenden Bewegung ist orientierungsumkehrend,

- das Produkt zweier orientierungsumkehrenden Bewegungen ist orientierungserhaltend.

Dies kann noch etwas spezifiziert werden:

Satz 2.7 *Es seien*

$$\Phi_1 : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{t}_1 + A_1 \cdot \mathbf{x}, \quad \Phi_2 : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{t}_2 + A_2 \cdot \mathbf{x}$$

zwei orientierungserhaltende Bewegungen. Dann ist die Zusammensetzung $\Phi_2 \circ \Phi_1$ *eine*

Drehung	*falls nicht* $A_2 \cdot A_1 = 1\!\!1_2$
Translation oder die Identität	*falls* $A_2 \cdot A_1 = 1\!\!1_2$

Satz 2.8 *Es seien* S_1, S_2 *zwei Spiegelungen an den Geraden* $L_1, L_2 \subset \mathbb{R}^2$*. Deren Hintereinderschaltung* $S_2 \circ S_2$

ist	*wenn*
die Identität	$L_1 = L_2$
eine Translation	$L_1 \neq L_2$ *aber* $L_1 \parallel L_2$
eine Rotation	L_1 *und* L_2 *nicht parallel*

Beweis. Wenn $L_1 = L_2$ ist, dann ist $S_1 = S_2$ und $S_2 \circ S_1 = S_1^2$ ist die Identität.
Wenn L_1 und L_2 parallel aber verschieden sind, wählen wir die Koordinaten so, dass

$$L_1 : \, y = a_1, \quad L_2 : \, y = a_2$$

parallel zur x-Achse sind. In diesen Koordinaten sind die Spiegelungen

$$S_1 : (x, y) \mapsto (x, 2a_1 - y), \quad S_2 : (x, y) \mapsto (x, 2a_2 - y).$$

Und das Produkt $S_2 \circ S_1$ wird

$$(x, y) \mapsto (x, 2a_2 - (2a_1 - y)) = (x, 2(a_2 - a_1) + y).$$

Das ist die Translation in Richtung der y-Achse um eine Strecke gleich dem doppelten Abstand der Geraden.

Wenn L_1 und L_2 nicht parallel sind, schneiden sie sich in einem Punkt $\mathbf{p}$. Dieser Punkt bleibt unter beiden Spiegelungen fest, und ist Fixpunkt von $S_2 \circ S_1$. Weil kein anderer Punkt auf einer der beiden Geraden Fixpunkt von $S_2 \circ S_1$ ist, hat $S_2 \circ S_1$ nur diesen einzigen Fixpunkt $\mathbf{p}$. Es ist eine Rotation um diesen Punkt $\mathbf{p}$. □

Aufgabe 2.10 *Es sei* e_1, e_2 *die Standardbasis des* $\mathbb{R}^3$*, d.h.,*

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie alle Bewegungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *an, für die gilt*

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3 Euklidische Geometrie im Raum

Unter 'Raum' verstehen wir hier den drei-dimensionalen $\mathbb{R}^3$.

3.1 Das Kreuzprodukt

Definition 3.1 *Es seien*

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^3$$

zwei Vektoren. Dann heißt der Vektor

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} := \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^3$$

das Kreuzprodukt *der beiden Vektoren* **a** *und* **b**.

Das Resultat des Kreuz-Produktes ist also ein Vektor. Deshalb heißt $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ auch *Vektorprodukt*, im Gegensatz zum Skalarprodukt zweier Vektoren, dessen Resultat ein Skalar ist. (Das macht die Bezeichnung Skalarprodukt überhaupt erst verständlich.)

Der Kreuzprodukt-Vektor hat als Komponenten die Unterdeterminanten der 3×2-Matrix

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix},$$

und zwar

in Zeile	die Derminante aus Zeilen
1	2 und 3
2	1 und 3 (Vorzeichen!)
3	1 und 2

Wenn ich ein Kreuz-Produkt ausrechnen muss, schreibe ich mir immer die ersten Einträge der beteiligten Vektoren nochmal unter die Vektoren.

Beispiel 3.1 *Wir berechnen*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

mit dem Schema

$$\begin{array}{cc|rcrl} 1 & 4 & 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 & = & -3 & \textit{(Zeilen 2 und 3)} \\ 2 & 5 & 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6 & = & 6 & \textit{(Zeilen 3 und 4)} \\ 3 & 6 & 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 & = & -3 & \textit{(Zeilen 1 und 2)} \\ \hline 1 & 4 & & & & \end{array}$$

Ich möchte erst die wichtigsten formalen Eigenschaften des Kreuzproduktes zusammenstellen und dann Anwendungen behandeln. Ausgangspunkt ist folgende Formel:

Satz 3.1 *Für je drei Vektoren* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ *gilt*

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b} \,.\, \mathbf{x}) = det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x}).$$

Beweis. Das Skalarprodukt $(\mathbf{a} \times \mathbf{b} \,.\mathbf{x})$ ist

$$(a_2b_3 - a_3b_2) \cdot x_1 + (a_3b_1 - a_1b_3) \cdot x_2 + (a_1b_2 - a_2b_1) \cdot x_3.$$

Das ist aber gerade die Entwicklung der 3×3-Determinante

$$det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x}) = det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & x_1 \\ a_2 & b_2 & x_2 \\ a_3 & b_3 & x_3 \end{pmatrix}$$

nach der dritten Spalte. $\square$

Diese Formel ist deswegen wichtig, weil die Skalarprodukte $(\mathbf{a} \times \mathbf{b} \,.\, \mathbf{x})$ des Kreuzproduktes mit allen Vektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ dieses Kreuzprodukt festlegen. Das folgt aus

Lemma 3.1 *Gilt für zwei Vektoren* $\mathbf{u}$ *und* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ *und alle* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$

$$(\mathbf{u}.\mathbf{x}) = (\mathbf{v}.\mathbf{x}),$$

dann ist $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

Beweis. Die Voraussetzung können wir auch schreiben

$$(\mathbf{u} - \mathbf{v} \,.\, \mathbf{x}) = 0 \quad \text{für alle} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Wählen wir hier insbesondere $\mathbf{x} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$, so folgt

$$(\mathbf{u} - \mathbf{v} \,.\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \parallel \mathbf{u} - \mathbf{v} \parallel^2 = 0$$

und $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{0}$. $\square$

Satz 3.2 (Rechenregeln für das Kreuzprodukt) *Es gilt*

1) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
2) $(\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2) \times \mathbf{b} = \alpha_1(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}) + \alpha_2(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b})$
   $\mathbf{a} \times (\beta_1\mathbf{b}_1 + \beta_2\mathbf{b}_2) = \beta_1(\mathbf{a} \times \mathbf{b}_1) + \beta_2(\mathbf{a} \times \mathbf{b}_2)$
3) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a}, \mathbf{b}$ *linear abhängig*
4) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a}.\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b}.\mathbf{c})\mathbf{a}$
5) $((\mathbf{a} \times \mathbf{b}).(\mathbf{u} \times \mathbf{v})) = (\mathbf{a}.\mathbf{u})(\mathbf{b}.\mathbf{v}) - (\mathbf{a}.\mathbf{v})(\mathbf{b}.\mathbf{u})$
5') $\parallel \mathbf{a} \times \mathbf{b} \parallel^2 = \parallel \mathbf{a} \parallel^2 \parallel \mathbf{b} \parallel^2 - (\mathbf{a}.\mathbf{b})^2$
6) $\parallel \mathbf{a} \times \mathbf{b} \parallel = \parallel \mathbf{a} \parallel \cdot \parallel \mathbf{b} \parallel \cdot |sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})|$

Beweis. 1) Es ist

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}\, .\mathbf{x}) = det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x}) = -det(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{x}) = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}\, .\, \mathbf{x}).$$

2) Die Determinante $det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x})$ ist linear in Bezug auf ihre ersten beiden Spalten, deswegen ist $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ auch linear in Bezug auf seine beiden Faktoren.
3) $\Leftarrow$: Sind $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ linear abhängig, so ist

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}\, .\mathbf{x}) = det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x}) = 0$$

für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

$\Rightarrow$: Es sei $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ und damit $det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x}) = 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Wären $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ linear unabhängig, so könnten wir sie durch einen Vektor $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$ ergänzen. Mit diesem Vektor $\mathbf{c}$ wäre $det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \neq 0$, Widerspruch!
4) Diese Aussage ist am unangenehmsten nachzurechnen. Ich tue es nur für die erste Komponente:

$$\begin{aligned} (\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c})_1 &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_2 \cdot c_3 - (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_3 \cdot c_2 \\ &= (a_3 b_1 - a_1 b_3) \cdot c_3 - (a_1 b_2 - a_2 b_1) \cdot c_2 \\ &= (a_2 c_2 + a_3 c_3) \cdot b_1 - (b_2 c_2 + b_3 c_3) \cdot a_1 \\ &= (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) \cdot b_1 - (b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3) \cdot a_1 \\ &= (\mathbf{a.c}) b_1 - (\mathbf{b.c}) a_1 \end{aligned}$$

5) Mit der Determinantenformel und Rechenregel 4) ist

$$\begin{aligned} (\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\, .\, (\mathbf{u} \times \mathbf{v})\,) &= det(\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\,, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ &= det(\mathbf{v},\ (\mathbf{a} \times \mathbf{b}),\ \mathbf{u}) \\ &= (\,(\mathbf{v} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}))\, .\, \mathbf{u}) \\ &= -(\,((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{v})\, .\, \mathbf{u}) \\ &= -((\mathbf{a.v})\mathbf{b} - (\mathbf{b.v})\mathbf{a})\, .\mathbf{u}) \\ &= (\mathbf{a.u})(\mathbf{b.v}) - (\mathbf{a.v})(\mathbf{b.u}) \end{aligned}$$

Die Formel 5') ist ein Spezialfall dieser Formel 5).
6) Mit $\mathbf{u} = \mathbf{a}$ und $\mathbf{v} = \mathbf{b}$ erhalten wir aus Rechenregel 5)

$$\begin{aligned} \parallel \mathbf{a} \times \mathbf{b} \parallel^2 &= (\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\, .\, (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\,) \\ &= (\mathbf{a.a})(\mathbf{b.b}) - (\mathbf{a.b})^2 \\ &= \parallel \mathbf{a} \parallel^2 \cdot \parallel \mathbf{b} \parallel^2 \cdot \left(1 - (\frac{(\mathbf{a.b})}{\parallel \mathbf{a} \parallel \cdot \parallel \mathbf{b} \parallel})^2\right) \\ &= \parallel \mathbf{a} \parallel^2 \cdot \parallel \mathbf{b} \parallel^2 \cdot (1 - cos^2(\mathbf{a}, \mathbf{b})) \\ &= \parallel \mathbf{a} \parallel^2 \cdot \parallel \mathbf{b} \parallel^2 \cdot sin^2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \end{aligned}$$

□

Die Rechenregeln 4),5),6) sind schwer zu merken und stehen leider auch nicht in den zugelassenen Formelsammlungen. Wenn sie bei der Bearbeitung einer Staatsexamensaufgabe notwendig sind, werden sie dort in der Regel angegeben. Für uns am wichtigsten ist:

Satz 3.3 *a) Der Kreuzproduktvektor* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *steht senkrecht auf den beiden Vektoren* $\mathbf{a}$ *und* $\mathbf{b}$.

b) Wenn $\mathbf{a}$ *und* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ *linear unabhängig sind, wenn sie also eine Ebene* $E = \mathbb{R} \cdot \mathbf{a} + \mathbb{R} \cdot \mathbf{b} \subset \mathbb{R}^3$ *aufspannen, so spannt* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *das orthogonale Komplement* $E^\perp$ *auf.*

Beweis a) Mit der Determinantenformel ist

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}.\mathbf{a}) = det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}) = 0$$

und ebenso

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}.\mathbf{b}) = det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b}) = 0.$$

b) Sind $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ linear unabhängig, so ist $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ nach Rechenregel 3) □

Eine sehr häufige und wichtige Anwendung des Kreuzprodukts besteht in der Lösung eines linearen Gleichungssystems mit zwei Gleichungen und drei Unbekannten. Man soll dies in Zusammenhang mit dem wesentlich einfacheren Problem sehen, eine homogene Gleichung

$$a \cdot x_1 + b \cdot x_2 = 0$$

in zwei Unbekannten zu lösen. Man schreibt eine Lösung

$$(x_1, x_2) = (b, -a)$$

einfach hin. Das ist leicht zu merken: Koeffizienten vertauschen und ein Vorzeichen ändern. Falls nicht $a = b = 0$ ist (uninteressant), spannt $(x_1, x_2) = (b, -a)$ den Lösungsraum auf.

Jetzt betrachten wir ein homogenes System

$$\begin{array}{ccccccc} a_1x_1 & + & a_2x_2 & + & a_3x_3 & = & 0 \\ b_1x_1 & + & b_2x_2 & + & b_3x_3 & = & 0 \end{array}$$

mit zwei Gleichungen und drei Unbekannten. Ein Lösungsvektor ist das Kreuzprodukt

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} \times \mathbf{b},$$

wo $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ und $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ die beiden Zeilen-Koeffizientenvektoren des Systems sind. In der Tat, die beiden Gleichungen können wir als Skalarprodukt-Bedingungen

$$(\mathbf{a}.\mathbf{x}) = 0, \quad (\mathbf{b}.\mathbf{x}) = 0$$

schreiben. Jeder Vektor, der auf $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ senkrecht steht ist ein Lösungsvektor. Und aus dem letzten Satz wissen wir

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b} \,.\, \mathbf{a}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b} \,.\, \mathbf{b}) = 0.$$

Weiter ist $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, der Kreuzprodukt-Vektor spannt also den Lösungsraum auf, falls nicht die beiden Zeilen des System linear abhängig waren. In diesem Sonderfall könnten wir aber eine Gleichung weglassen und haben gar kein System aus zwei Gleichungen mehr.

Beispiel 3.2 *Gegeben sei das System*

$$\begin{array}{ccccccc} 11x_1 & + & 13x_2 & + & 17x_3 & = & 0 \\ 19x_1 & + & 23x_2 & + & 29x_3 & = & 0 \end{array}$$

Einen Lösungsvektor ermitteln wir nach dem Schema

$$\begin{array}{cc|ccccc} 11 & 19 & 13 \cdot 29 - 17 \cdot 23 & = & 377 - 391 & = & -14 \\ 13 & 23 & 17 \cdot 19 - 11 \cdot 29 & = & 323 - 319 & = & 4 \\ 17 & 29 & 11 \cdot 23 - 13 \cdot 19 & = & 253 - 247 & = & 6 \\ \hline 11 & 19 & & & & & \end{array}$$

als Kreuzprodukt

$$\begin{pmatrix} 11 \\ 13 \\ 17 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 19 \\ 23 \\ 29 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3.1 **a)** *Es seien* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ *zueinander senkrechte Vektoren im euklidischen* $\mathbb{R}^3$ *mit* $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. *Man zeige, dass die Punktmenge*

$$\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \,|\, \mathbf{a} \times \mathbf{v} = \mathbf{b}\}$$

eine Gerade ist.
b) *Man zeige, dass sich jede Gerade im euklidischen* $\mathbb{R}^3$ *in der angegebenen Form mit geeigneten Vektoren* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ *schreiben lässt.*

Aufgabe 3.2 *Auf dem mit dem Vektorprodukt versehenen* $\mathbb{R}^3$ *betrachte man die linearen Abbildungen*

$$f(x) = a \times x \quad \textit{und} \quad g(x) = x \times a \quad \textit{mit} \quad a = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) *Man stelle fest, für welche* $u \in \mathbb{R}^3$ *die Gleichung*

$$f(x) = u$$

lösbar ist.
b) *Für die Vektoren*

$$b = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \textit{bzw.} \quad b' = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

bestimme man alle Lösungen $x \in \mathbb{R}^3$ *der Gleichung* $g(x) = b$ *bzw.* $g(x) = b'$.
c) *Man zeige* $f \cdot g = g \cdot f$ *und* $(f \cdot g)^2 = f \cdot g$.

Aufgabe 3.3 *Für zwei Vektoren* $v, w \in \mathbb{R}^3$ *seien das Skalarprodukt* $< v, w >= v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3$ *und das Vektorprodukt*

$$v \times w = \begin{pmatrix} v_2w_3 - v_3w_2 \\ v_3w_1 - v_1w_3 \\ v_1w_2 - v_2w_1 \end{pmatrix}$$

wie üblich definiert. Die Formel

$$< x, v \times w >= det(x, v, w)$$

werde als bekannt vorausgesetzt.
a) *Im* $\mathbb{R}^3$ *sei die Gerade* $L = \{u \in \mathbb{R}^3 : u = a + sv,\ s \in \mathbb{R}\}$ *mit Richtungsvektor* $v \neq 0$ *gegeben. Zeigen Sie: Für alle Vektoren* $u \in L$ *ist der Vektor* $x := u \times v$ *derselbe.*
b) *Nun sei eine weitere Gerade* $M = \{u \in \mathbb{R}^3 : u = b + tw,\ t \in \mathbb{R}\}$ *gegeben und es werde* $y := b \times w$ *gesetzt. Zeigen Sie:*

$$L \cap M \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad < v, y > + < w, x >= 0.$$

3.2 Punkte, Geraden und Ebenen

Im Raum gibt es Punkte, Geraden und Ebenen. Die kann man wieder auf verschiedene Weisen beschreiben: als von Punkten aufgespannt, oder durch Gleichungen, d.h., als Schnitt von Ebenen. Das führt zu einer ganzen Reihe von Möglichkeiten, die ich in einer kleinen Tabelle zusammenfassen möchte:

Fall	Objekt	aufgespannt durch	Schnitt von
1	Punkt	1 Punkt (Koordinaten)	
2			3 Ebenen
3			Ebene und Gerade
4	Gerade	2 Punkte	
5			2 Ebenen
6	Ebene	3 Punkte	
7		Punkt und Gerade	
8			1 Ebene (Gleichung)

Bei jedem Objekt ist der Übergang von einer Beschreibung zu einer anderen entweder offensichtlich oder führt auf ein lineares Gleichungssystem, das man lösen kann, wie man es gelernt hat.

Ist ein Punkt gegeben als Schnitt $E_1 \cap E_2 \cap E_3$ von drei Ebenen mit Gleichungen

$$\begin{array}{rcccccccc} E_1: & a_1x & + & b_1y & + & c_1z & = & d_1 \\ E_2: & a_2x & + & b_2y & + & c_2z & = & d_2 \\ E_3: & a_3x & + & b_3y & + & c_3z & = & d_3 \end{array}$$

so findet man die Koordinaten des Punktes, indem man das System dieser drei Gleichungen löst. Ist der Punkt gegeben als Schnitt $E \cap L$ einer Ebene E mit einer Geraden L, so gibt es zwei Möglichkeiten:

Die Gerade L ihrerseits kann durch zwei Gleichungen gegeben sein, dies führt auf den soeben angegebenen Fall.

Oder die Gerade ist gegeben in Parameterform

$$L: \mathbf{p} + t \cdot \mathbf{q}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

In diesem Fall wäre es sehr ungeschickt, erst zwei Gleichungen für die Gerade zu suchen und dann das System der insgesamt drei Gleichungen zu lösen. Besser setzt man die Parametrisierung von L in die Gleichung der Ebene E ein. Hat E etwa die Gleichung

$$f(\mathbf{x}) = a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z - d,$$

so erhält man damit

$$\begin{array}{rcl} f(\mathbf{p} + t \cdot \mathbf{q}) & = & a(p_1 + tq_1) + b(p_2 + tq_2) + c(p_3 + tq_3) - d \\ & = & (ap_1 + bp_2 + cp_3 - d) + t \cdot (aq_1 + bq_2 + cq_3) \end{array}$$

Der Parameter t des Schnittpunktes bestimmt sich aus der Gleichung

$$f(\mathbf{p} + t \cdot \mathbf{q}) = 0$$

zu

$$t := -\frac{ap_1 + bp_2 + cp_3 - d}{aq_1 + bq_2 + cq_3}.$$

Ich möchte hier nicht all die Fälle durchgehen, wo man ein lineares Gleichungssystem lösen muss, sondern nur die Situationen behandeln, wo man schneller zum Ziel kommen kann.

Problem 1: Gleichung der Verbindungsebene dreier Punkte

Es seien etwa die drei Punkte

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^3$$

gegeben. Gesucht ist eine Gleichung für die Ebene, welche diese drei Punkte aufspannen. Wir betrachten die beiden Differenz-Vektoren

$$\mathbf{q} - \mathbf{p} \quad \text{und} \quad \mathbf{r} - \mathbf{p}.$$

Dies sind Richtungsvektoren der beiden Geraden

$$\mathbf{p} + \mathbb{R} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{p}) \quad \text{und} \quad \mathbf{p} + \mathbb{R} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{p})$$

durch $\mathbf{p}$ in der Ebenen E. Wenn die beiden Differenzvektoren linear abhängig sind, bekommen wir so keine zwei verschiedenen Geraden, beide Geraden stimmen überein. Die drei Punkte spannen keine Ebene auf, sondern nur eine Gerade. Diesen Fall lassen wir beiseite und nehmen an, dass die beiden Differenzvektoren linear unabhängig sind. Dann ist ihr Kreuzprodukt

$$\mathbf{n} := (\mathbf{q} - \mathbf{p}) \times (\mathbf{r} - \mathbf{p}) \neq \mathbf{0}.$$

Der Vektor $\mathbf{n}$ steht senkrecht auf den beiden obigen Geraden und damit auf der Ebene E. Dann hat E eine Gleichung

$$(\mathbf{n}.\mathbf{x}) = d$$

mit einer noch unbekannten Zahl $d \in \mathbb{R}$. Diese Zahl können wir aber ausrechnen, indem wir einen der drei gegebenen Punkte, etwa $\mathbf{p}$, in die Gleichung einsetzen, und erhalten

$$d = (\mathbf{n}.\mathbf{p}) = ((\mathbf{q} - \mathbf{p}) \times (\mathbf{r} - \mathbf{p}).\mathbf{p}) = det(\mathbf{q} - \mathbf{p}, \mathbf{r} - \mathbf{p}, \mathbf{p}) = det(\mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{p}).$$

Beispiel 3.3 *Die Ebene E enthalte die Punkte*

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Die Differenzvektoren

$$\mathbf{q} - \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} - \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sind linear unabhängig. Ihr Kreuzprodukt

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ist ein Normalenvektor für die Ebene. Einfacher ist es, den Vektor

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zu verwenden. Damit hat die Ebene eine Gleichung

$$(\mathbf{n}.\mathbf{x}) = x - 2y + z = d.$$

Die Konstante d ermitteln wir als (Zufall!)

$$(\mathbf{n}.\mathbf{p}) = 0,$$

und die Ebene hat die Gleichung

$$x - 2y + z = 0.$$

Weil wir einen der drei Punkte, nämlich $\mathbf{p}$ als Anfangspunkt ausgewählt haben, sehen unsere Formeln sehr unsymmetrisch aus. Sie sind es aber nicht: Es ist

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} &= (\mathbf{q}-\mathbf{p}) \times (\mathbf{r}-\mathbf{p}) \\
&= \mathbf{q}\times\mathbf{r} - \mathbf{q}\times\mathbf{p} - \mathbf{p}\times\mathbf{r} + \mathbf{p}\times\mathbf{p} \\
&= \mathbf{p}\times\mathbf{q} + \mathbf{q}\times\mathbf{r} + \mathbf{r}\times\mathbf{p}, \\
d &= (\mathbf{n}.\mathbf{p}) \\
&= (\mathbf{p}\times\mathbf{q}\,.\mathbf{p}) + (\mathbf{q}\times\mathbf{r}\,.\mathbf{p}) + (\mathbf{r}\times\mathbf{p}\,.\mathbf{p}) \\
&= (\mathbf{q}\times\mathbf{r}\,.\mathbf{p}) \\
&= det(\mathbf{q},\mathbf{r},\mathbf{p}) \\
&= det(\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r}).
\end{aligned}$$

Verwenden wir diese Werte, so erhalten wir die Ebenengleichung in der symmetrischen Form

$$det(\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{x}) + det(\mathbf{q},\mathbf{r},\mathbf{x}) + det(\mathbf{r},\mathbf{p},\mathbf{x}) = det(\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r}).$$

Diese Gleichung macht richtig Spaß. Insbesondere ist es sehr leicht, nachzuprüfen dass die drei Punkte $\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r}$ diese Gleichung erfüllen.

Problem 2: Gleichung der Verbindungsebene einer Geraden und eines Punktes

Gegeben sei ein Punkt $\mathbf{p}$ und eine Gerade L, und gesucht werde eine Gleichung ihrer Verbindungsebene. Falls die Gerade in Parameterform $\mathbf{q} + \mathbb{R}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{q})$ vorliegt, so handelt es sich um das soeben betrachtete Problem. Sei also die Gerade gegeben durch zwei Gleichungen

$$\begin{aligned}
f_1(\mathbf{x}) &= a_1x + b_1y + c_1z - d_1 = 0, \\
f_2(\mathbf{x}) &= a_2x + b_2y + c_2z - d_2 = 0.
\end{aligned}$$

Jede Gleichung der Form

$$k_1 \cdot f_1(\mathbf{x}) + k_2 \cdot f_2(\mathbf{x}) = 0, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R},$$

verschwindet auf L, weil dort $f_1(\mathbf{x}) = f_2(\mathbf{x}) = 0$ gilt. Damit ist $k_1 f_1(\mathbf{x}) + k_2 f_2(\mathbf{x}) = 0$ die Gleichung einer Ebene durch L. Das einzige, was passieren kann, ist, dass die Gleichung eventuell identisch verschwindet. Natürlich müssen wir $(k_1, k_2) \neq (0, 0)$ wählen. Sei o.B.d.A. $k_1 \neq 0$. Wenn dann

$$k_1 f_1(\mathbf{x}) + k_2 f_2(\mathbf{x}) \equiv 0$$

identisch verschwinden würde, so wäre

$$f_1(\mathbf{x}) = -\frac{k_2}{k_1} \cdot f_2(\mathbf{x})$$

gleich 0 auf der ganzen Ebene $f_2(\mathbf{x}) = 0$. Die beiden Gleichungen würden keine Gerade beschreiben, sondern dieselbe Ebene. Diesen Fall schließen wir natürlich aus.

Wir müssen jetzt k_1 und k_2 nur noch so bestimmen, dass

$$k_1 f_1(\mathbf{p}) + k_2 f_2(\mathbf{p}) = 0$$

ist. Das ist aber ganz einfach:

$$k_1 := f_2(\mathbf{p}) \quad \text{und} \quad k_2 := -f_1(\mathbf{p}).$$

Weil $\mathbf{p}$ nicht auf der Geraden L liegen soll, ist auch

$$(k_1, k_2) = (f_2(\mathbf{p}), -f_1(\mathbf{p})) \neq (0, 0).$$

Damit ist

$$f_2(\mathbf{p}) \cdot f_1(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{p}) \cdot f_2(\mathbf{x}) = 0$$

eine Gleichung für die Verbindungsebene von $\mathbf{p}$ und L.

Beispiel 3.4 *Wir wählen* $\mathbf{p} = (-3, 4, 2)$ *und* L *gegeben durch*

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} f_1(\mathbf{x}) & = & 7x & + & 8y & + & 9z & = & 2, \\ f_2(\mathbf{x}) & = & 2x & + & 7y & + & 8z & = & 9. \end{array}$$

Der Punkt $(0, 1/4, 0)$ *erfüllt die erste Gleichung, aber nicht die zweite. Deswegen beschreiben beide Gleichungen nicht dieselbe Ebene, sondern tatsächlich eine Gerade. Es ist*

$$f_1(\mathbf{p}) = 29, \quad f_2(\mathbf{p}) = 38.$$

Damit wird die Gleichung unserer Verbindungsebene

$$\begin{aligned} 38 f_1(\mathbf{x}) - 29 f_2(\mathbf{x}) &= 38 \cdot (7x + 8y + 9z - 2) - 29 \cdot (2x + 7y + 8z - 9) \\ &= (266 - 58)x + (304 - 203)y + (342 - 232)z - (76 - 261) \\ &= 208x + 101y + 110z + 185 \\ &= 0, \end{aligned}$$

bzw.

$$208 \cdot x + 101 \cdot y + 110 \cdot z = -185.$$

Aufgabe 3.4 *Sei E die Ebene im $\mathbb{R}^3$ durch die Punkte*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Man gebe eine lineare Gleichung an, deren Lösungsmenge E ist.

Aufgabe 3.5 *Zeigen Sie, dass es genau eine Ebene H im $\mathbb{R}^3$ gibt, welche die Geraden*

$$\begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

enthält, und bestimmen Sie eine lineare Gleichung mit der Lösungsmenge H.

Aufgabe 3.6 *Für jedes $c \in \mathbb{R}$ sei eine Gerade g_c in $\mathbb{R}^3$ definiert durch*

$$g_c = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - cy = 2 \textit{ und } 3x + 5z = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie die $c \in \mathbb{R}$, für die die Gerade

$$h = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \, 3x + 2y + 3z = \frac{6}{5} \textit{ und } y - z = \frac{3}{5} \right\}$$

die Gerade g_c schneidet, und die $c \in \mathbb{R}$, für die h zu g_c parallel ist.

Aufgabe 3.7 *Es seien $s, t \in \mathbb{R}$ mit $(s,t) \neq (0,0)$ und*

$$G(s,t) := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,|\, \begin{array}{rcl} -sx_1 + tx_2 + tx_3 & = & s \\ tx_1 + sx_2 - sx_3 & = & t \end{array} \right\}.$$

a) *Zeigen Sie: Für jedes Paar $(s,t) \neq (0,0)$ ist $G(s,t)$ eine Gerade im $\mathbb{R}^3$. Welche Wertepaare liefern dieselbe Gerade?*
b) *Für welche Paare (s,t) ist die Gerade $G(s,t)$ parallel zur Ebene $E : \, x_2 = 0$?*
c) *Ermitteln Sie den Schnittpunkt der Geraden $G(s,t)$ mit der Ebene E, falls er existiert.*
d) *Zeigen Sie: Alle in c) ermittelten Schnittpunkte liegen auf einer Hyperbel.*
e) *Zeigen Sie: zwei verschiedene Geraden $G(s,t)$ und $G(s',t')$ sind windschief.*

Aufgabe 3.8 *Im R^3 seien die beiden Geraden*

$$L_1 := \{(2,0,1)^t + s \cdot (1,2,0)^t : \, s \in \mathbb{R}\}$$
$$L_2 := \{(x,y,z)^t \in \mathbb{R}^3 : \, x + y - 1 = y + z - 1 = 0\}$$

und der Punkt

$$P := (-1,-1,-1)^t$$

gegeben.
a) *Schneiden sich die beiden Geraden L_1 und L_2 oder sind sie windschief?*
b) *Für $i = 1$ und 2 sei E_i die von P und L_i aufgespannte Ebene. Geben Sie für $i = 1$ und 2 eine lineare Gleichung an, deren Nullstellenmenge die Ebene E_i ist.*
c) *Geben Sie eine Gerade durch P an, welche L_1 und L_2 schneidet.*

Aufgabe 3.9 *Man bestimme alle Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$, für welche die Geraden*

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad G_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 2\alpha \\ 3\alpha \end{pmatrix}$$

sich schneiden, bzw. zueinander parallel sind, bzw. zueinander windschief sind.

3.3 Abstand

Der Abstand zweier Punkte $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ und $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$ berechnet sich genauso wie im $\mathbb{R}^2$

$$d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{\sum (p_i - q_i)^2} = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + (p_3 - q_3)^2},$$

nur ist die Rechnung jetzt ein klein wenig aufwendiger.

Problem 1: Abstand eines Punktes von einer Ebene

Problem 1a): Ebene gegeben durch Gleichung

Ist die Ebene E durch eine Gleichung

$$a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$$

gegeben, so hat man sofort einen Normalenvektor

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Das *Lot* von einem Punkt $\mathbf{p}$ auf die Ebene ist die Gerade

$$L: \quad \mathbf{p} + \mathbb{R} \cdot \mathbf{n}.$$

Der *Lotfußpunkt* $\mathbf{u}$ ist genau wie früher der Schnittpunkt von E mit L. Wir berechnen ihn, indem wir

$$\mathbf{p} + t\mathbf{n} = \begin{pmatrix} p_1 + ta \\ p_2 + tb \\ p_3 + tc \end{pmatrix} \in L$$

in die Ebenengleichung einsetzen:

$$\begin{aligned} a(p_1+ta)+b(p_2+tb)+c(p_3+tc) &= d \\ ap_1+bp_2+cp_3-d+t\cdot(a^2+b^2+c^2) &= 0 \\ t &= -\frac{ap_1+bp_2+cp_3-d}{a^2+b^2+c^2} \end{aligned}$$

Damit wird, ganz analog zum zwei-dimensionalen Fall, der Abstand

$$d(\mathbf{p},E)=|t|\cdot\parallel\mathbf{n}\parallel=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\cdot|ap_1+bp_2+cp_3-d|.$$

Problem 1b): Ebene in Parameterform

Etwas unübersichtlicher wird die Rechnung, wenn E nicht durch eine Gleichung, sondern in Parameterform

$$E: \quad \mathbf{q}+\mathbb{R}\cdot\mathbf{v}+\mathbb{R}\cdot\mathbf{w}$$

gegeben ist. Hier sind $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ zwei linear unabhängige Richtungsvektoren für die Ebene. Mit dem Normalenvektor $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$ erhalten wir die Ebenengleichung

$$(\mathbf{v}\times\mathbf{w}.\mathbf{x})=(\mathbf{q}.\mathbf{x}).$$

Die Lotgerade durch $\mathbf{p}$ parametrisieren wir durch $\mathbf{p}+s\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{w}$, $s\in\mathbb{R}$. Wenn wir dies in die Ebenengleichung einsetzen, erhalten wir für den Lotfußpunkt folgende Bedingung an s:

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}\times\mathbf{w}.\mathbf{p}+s\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{w}) &= (\mathbf{v}\times\mathbf{w}.\mathbf{q}) \\ s\cdot\parallel\mathbf{v}\times\mathbf{w}\parallel^2 &= (\mathbf{v}\times\mathbf{w}.\mathbf{q}-\mathbf{p}) \end{aligned}$$

Daraus erhält man für den Abstand

$$d(\mathbf{p},E)=|s|\cdot\parallel\mathbf{v}\times\mathbf{w}\parallel=\frac{1}{\parallel\mathbf{v}\times\mathbf{w}\parallel}|(\mathbf{v}\times\mathbf{w}.\mathbf{q}-\mathbf{p})|.$$

Auch dies kann man wieder deuten als Skalarprodukt des Verbindungsvektors $\mathbf{q}-\mathbf{p}$ mit einem Normalen-Einheitsvektor.

Es gibt auch noch eine andere geometrische Interpretation dieser Formel: Das Produkt

$$|(\mathbf{v}\times\mathbf{w}.\mathbf{q}-\mathbf{p})|=|det(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{q}-\mathbf{p})|$$

ist das Volumen des Spats, der von den Vektoren $\mathbf{v},\mathbf{w}$ und $\mathbf{p}-\mathbf{q}$ aufgespannt wird. Die Höhe dieses Spats über der von $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ aufgespannten Ebene ist genau der gesuchte Abstand. Unsere Formel gibt diese Höhe als Quotient des Spatvolumens durch die Fläche $\parallel\mathbf{v}\times\mathbf{w}\parallel$ des Parallelogramms, das die Grundfläche des Spats ist.

Beispiel 3.5 *Wir nehmen mal als Punkt* $\mathbf{p}=\mathbf{0}$ *den Ursprung und berechnen seinen Abstand von der Ebene*

$$E: \quad 2\cdot x+2\cdot y-z=1.$$

Hier ist

$$a^2+b^2+c^2=9, \quad ap_1+bp_2+cp_2-d=-1,$$

also

$$d(\mathbf{p}, E) = \frac{1}{3}|-1| = \frac{1}{3}.$$

Wenn wir die Ebene parametrisieren wollen, brauchen wir erst mal einen Anfangsvektor

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und Richtungsvektoren

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \| \mathbf{v} \times \mathbf{w} \| = 3$$

und

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{w}.\mathbf{q} - \mathbf{0}) = -1.$$

Damit wird

$$d(\mathbf{p}, E) = \frac{1}{3}|-1| = \frac{1}{3}.$$

Es stimmt.

Problem 2: Abstand eines Punktes von einer Geraden

Problem 2a) Gerade in Parameterform

Ist die Gerade in Parameterform

$$L: \quad \mathbf{a} + \mathbb{R} \cdot \mathbf{v}$$

gegeben, so geht die Rechnung genau wie in der Ebene. Wir müssen den Lotfußpunkt $\mathbf{u} = \mathbf{a} + t \cdot \mathbf{v}$ so bestimmen, dass $(\mathbf{p} - \mathbf{u}) \perp \mathbf{v}$. Das heißt, es muss gelten

$$(\mathbf{p} - \mathbf{u}.\mathbf{v}) = (\mathbf{p} - \mathbf{a}.\mathbf{v}) - t \cdot (\mathbf{v}.\mathbf{v}) = 0,$$

also

$$t = \frac{1}{\| \mathbf{v} \|^2} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{a}.\mathbf{v}), \quad \mathbf{u} = \mathbf{a} + \frac{1}{\| \mathbf{v} \|^2}(\mathbf{p} - \mathbf{a}.\mathbf{v})\mathbf{v}.$$

Der Abstand wird

$$\begin{aligned} d(\mathbf{p}, L) &= \| \mathbf{p} - \mathbf{u} \| \\ &= \| (\mathbf{p} - \mathbf{a}) - \frac{1}{\| \mathbf{v} \|^2} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{a}.\mathbf{v})\mathbf{v} \| \\ &= \frac{1}{\| \mathbf{v} \|^2} \| (\mathbf{v}.\mathbf{v})(\mathbf{p} - \mathbf{a}) - (\mathbf{p} - \mathbf{a}.\mathbf{v})\mathbf{v} \| \end{aligned}$$

Mit Formel 4) aus Satz 3.2 sehen wir

$$(\mathbf{v}.\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{a}) - (\mathbf{p} - \mathbf{a}.\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{v} \times (\mathbf{p} - \mathbf{q})) \times \mathbf{v}.$$

Damit wird

$$d(\mathbf{p}, L) = \frac{1}{\| \mathbf{v} \|^2} \| (\mathbf{v} \times (\mathbf{p} - \mathbf{a})) \times \mathbf{v} \| = \frac{1}{\| \mathbf{v} \|^2} \| \mathbf{v} \times (\mathbf{p} - \mathbf{a}) \| \cdot \| \mathbf{v} \| \cdot |sin(\mathbf{v} \times (\mathbf{p} - \mathbf{a}), \mathbf{v})|.$$

Weil der Vektor $\mathbf{v}$ senkrecht auf $\mathbf{v} \times (\mathbf{p} - \mathbf{a})$ steht, ist der Sinus des Zwischenwinkels $= 1$, und der Abstand wird

$$d(\mathbf{p}, L) = \frac{1}{\| \mathbf{v} \|} \cdot \| \mathbf{v} \times (\mathbf{p} - \mathbf{a}) \| .$$

Problem 2b) Gerade gegeben durch zwei Gleichungen

Wir betrachten die Gerade L gegeben durch die zwei Gleichungen

$$f_1(\mathbf{x}) = a_1 x + b_1 y + c_1 z - d_1 = 0 = (\mathbf{n}_1.\mathbf{x}) - d_1,$$

$$f_2(\mathbf{x}) = a_2 x + b_2 y + c_2 z - d_2 = 0 = (\mathbf{n}_2.\mathbf{x}) - d_2.$$

Dann haben wir sofort die zwei Normalenvektoren

$$\mathbf{n}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Jetzt haben wir eine *Lotebene*, die Ebene durch $\mathbf{p}$ senkrecht auf L, parametrisiert durch

$$\mathbf{p} + s_1 \cdot \mathbf{n}_1 + s_2 \cdot \mathbf{n}_2.$$

Wir müssen die Bedingung auswerten, dass $\mathbf{u} = \mathbf{p} + s_1\mathbf{n}_1 + s_2\mathbf{n}_2$ auf L liegt. Das liefert die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} (\mathbf{p} + s_1\mathbf{n}_1 + s_2\mathbf{n}_2 \,.\, \mathbf{n}_1) &= d_1 \\ (\mathbf{p} + s_1\mathbf{n}_1 + s_2\mathbf{n}_2 \,.\, \mathbf{n}_2) &= d_2 \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \| \mathbf{n}_1 \|^2 \cdot s_1 + (\mathbf{n}_1.\mathbf{n}_2) \cdot s_2 &= d_1 - (\mathbf{p}.\mathbf{n}_1) \\ (\mathbf{n}_1.\mathbf{n}_2) \cdot s_1 + \| \mathbf{n}_2 \|^2 \cdot S_2 &= d_2 - (\mathbf{p}.\mathbf{n}_2) \end{aligned}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem für s_1 und s_2 mit Koeffizientenmatrix

$$N := \begin{pmatrix} \| \mathbf{n}_1 \|^2 & (\mathbf{n}_1.\mathbf{n}_2) \\ (\mathbf{n}_1.\mathbf{n}_2) & \| \mathbf{n}_2 \|^2 \end{pmatrix}.$$

Weil $\mathbf{n}_1$ und $\mathbf{n}_2$ linear unabhängig sind, ist

$$det(N) = \| \mathbf{n}_1 \|^2 \cdot \| \mathbf{n}_2 \|^2 - (\mathbf{n}_1.\mathbf{n}_2)^2 = \| \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 \|^2 \neq 0.$$

Die Matrix N ist invertierbar mit der Inversen

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} \| \mathbf{n}_2 \|^2 & -(\mathbf{n}_1.\mathbf{n}_2) \\ -(\mathbf{n}_1.\mathbf{n}_2) & \| \mathbf{n}_1 \|^2 \end{pmatrix}.$$

Mit dieser Inversen kann man die gesuchten Parameter als

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = N^{-1} \cdot \begin{pmatrix} d_1 - (\mathbf{p}.\mathbf{n}_1) \\ d_2 - (\mathbf{p}.\mathbf{n}_2) \end{pmatrix}$$

darstellen. Damit kann man das Abstandsquadrat als

$$d(\mathbf{p}, L)^2 = \| s_1\mathbf{n}_1 + s_2\mathbf{n}_2 \|^2 = (s_1, s_2) \cdot N \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$$

schreiben. Setzt man hier s_1 und s_2 ein, kürzt sich ein Produkt $N \cdot N^{-1}$ heraus und wir finden

$$\begin{aligned}
& d(\mathbf{p}, L)^2 \\
= \;& (d_1 - (\mathbf{p}.\mathbf{n}_1)\,,\, d_2 - (\mathbf{p}.\mathbf{n}_2)) \cdot N^{-1} \cdot \begin{pmatrix} d_1 - (\mathbf{p}.\mathbf{n}_1) \\ d_2 - (\mathbf{p}.\mathbf{n}_2 \end{pmatrix} \\
= \;& \frac{1}{\| \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 \|^2} \cdot \Big((d_1 - (\mathbf{p}.\mathbf{n}_1))^2 \| \mathbf{n}_2 \|^2 - 2(d_1 - (\mathbf{p}.\mathbf{n}_1)(d_2 - (\mathbf{p}.\mathbf{n}_2)(\mathbf{n}_1.\mathbf{n}_2) + (d_2 - (\mathbf{p}.\mathbf{n}_2))^2 \| \mathbf{n}_1 \|^2 \Big) \\
= \;& \frac{1}{\| \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 \|^2} \cdot \| (d_1 - (\mathbf{p}.\mathbf{n}_1))\mathbf{n}_2 - (d_2 - (\mathbf{p}.\mathbf{n}_2))\mathbf{n}_1 \|^2 .
\end{aligned}$$

Der Abstand selbst ist

$$d(\mathbf{p}, L) = \frac{1}{\| \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 \|} \cdot \| (d_1 - (\mathbf{p}.\mathbf{n}_1))\mathbf{n}_2 - (d_2 - (\mathbf{p}.\mathbf{n}_2))\mathbf{n}_1 \| .$$

Beispiel 3.6 *Als Vektor und Gerade nehmen wir*

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad L : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Als erstes normieren wir den Richungsvektor der Gerade zu

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Damit haben wir

$$\mathbf{p} - \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{p} - \mathbf{q}.\mathbf{v}) = -\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Unsere Abstandsformel liefert

$$d(\mathbf{p}, L)^2 = 13 - \frac{9}{2} = \frac{17}{2}$$

und der Abstand ist

$$d(\mathbf{p}, L) = \sqrt{\frac{17}{2}}.$$

Um dieselbe Gerade durch Gleichungen zu beschreiben, können wir z.B. nehmen

$$x + z = 2 \quad \textit{und} \quad y = 1.$$

Als orthonormierte Normalenvektoren haben wir dann

$$\mathbf{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen

$$(\mathbf{p}.\mathbf{n}_1) = \frac{5}{\sqrt{2}}, \quad (\mathbf{p}.\mathbf{n}_2) = 3,$$

$$d_1 - (\mathbf{p}.\mathbf{n}_1) = \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{2}} = -\frac{3}{\sqrt{2}}, \quad d_2 - (\mathbf{p}.\mathbf{n}_2) = 1 - 3 = -2,$$

$$d(\mathbf{p}, L) = \sqrt{(-\frac{3}{\sqrt{2}})^2 + (-2)^2} = \sqrt{\frac{9}{2} + 4} = \sqrt{\frac{17}{2}}.$$

Es stimmt schon wieder!

Problem 3: Abstand zweier Geraden

Es seien $M, N \subset \mathbb{R}^3$ zwei Geraden. Ihr Abstand ist

$$d(M, N) := min\{d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \quad \mathbf{x} \in M, \mathbf{y} \in N\}.$$

Diese Definition des Abstands zweier Geraden leuchtet ein. Die Frage ist nur, wie man $d(M, N)$ berechnet. Wir wollen nur den Fall behandeln, dass

$$M : \mathbf{p} + \mathbb{R} \cdot \mathbf{v}, \quad N : \mathbf{q} + \mathbb{R} \cdot \mathbf{w}$$

in Parameterform gegeben sind.

Zuerst eine Vorüberlegung: Angenommen, wir kennen zwei Punkte $\mathbf{m} \in M$, $\mathbf{n} \in N$ derart, dass $\mathbf{m} - \mathbf{n}$ senkrecht auf M und auf N steht. Die Gerade durch $\mathbf{m}$ und $\mathbf{n}$ ist ein gemeinsames Lot auf M und N. Dann ist also

$$(\mathbf{m} - \mathbf{n}\,.\mathbf{v}) = (\mathbf{m} - \mathbf{n}\,.\mathbf{w}) = 0.$$

Statt $\mathbf{p} \in M$ und $\mathbf{q} \in N$ können wir auch $\mathbf{m} \in M$ und $\mathbf{n} \in N$ als Anfangspunkte dieser Geraden nehmen und alle Punkte $\mathbf{x} \in M$, $\mathbf{y} \in N$ schreiben

$$\mathbf{x} = \mathbf{m} + s \cdot \mathbf{v}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{n} + t \cdot \mathbf{w}.$$

Das Abstandsquadrat zwischen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ ist

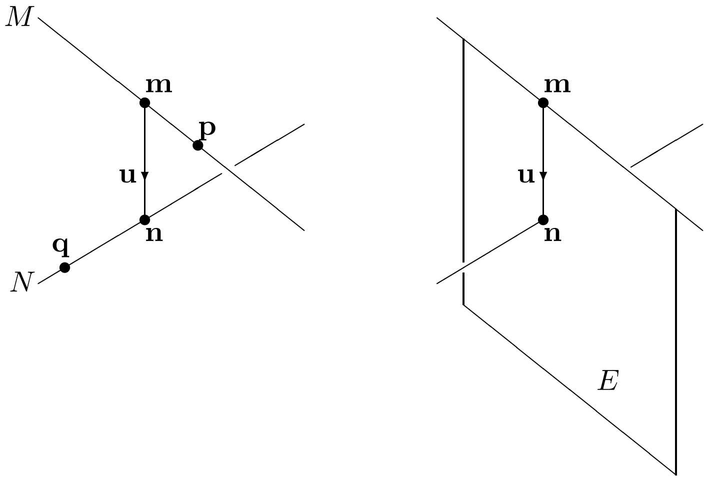
$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 &= \| (\mathbf{m} + s \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{n} + t \cdot \mathbf{w}) \|^2 \\ &= \| (\mathbf{m} - \mathbf{n}) + (s \cdot \mathbf{v} - t \cdot \mathbf{w}) \|^2 \\ &= \| \mathbf{m} - \mathbf{n} \|^2 + \| s \cdot \mathbf{v} - t \cdot \mathbf{w} \|^2 \end{aligned}$$

wegen $(\mathbf{m}-\mathbf{n}\,.\,s\mathbf{v}-t\mathbf{w})=0$. Hier ist $\| s\mathbf{v}-t\mathbf{w} \|^2 > 0$, falls nicht

$$s\cdot\mathbf{v}-t\cdot\mathbf{w}=\mathbf{0}.$$

Das kann leicht passieren, wenn $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ linear abhängig sind, was aber bedeutet: M und N sind parallel. Das ist wieder ein Sonderfall, den wir beiseite lassen. Wenn also M und N nicht parallel sind, sind die Richtungsvektoren $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ linear unabhängig, und es ist stets $\| s\mathbf{v}-t\mathbf{w} \|^2 > 0$ für $\mathbf{x}\neq\mathbf{m},\mathbf{y}\neq\mathbf{n}$. Der minimale Abstand zweier Punkte aus M und N ist damit

$$d(M,N)=\| \mathbf{m}-\mathbf{n} \| .$$



Es bleiben zwei Fragen:
1) Existieren $\mathbf{m}\in M$ und $\mathbf{n}\in N$ wie oben, also mit

$$(\mathbf{m}-\mathbf{n}) \quad \perp \mathbf{v} \text{ und } \perp \mathbf{w}?$$

Ein Vektor $\mathbf{u}:=\mathbf{v}\times\mathbf{w}\perp\mathbf{v},\mathbf{w}$ ist leicht zu finden. Die Richtung des gemeinsamen Lotes auf M und N liegt damit schon mal fest. Wir betrachten die Ebene E durch M mit Richtungsvektoren $\mathbf{v}$ und $\mathbf{u}$. Weil

$$\mathbf{v},\mathbf{w} \text{ und } \mathbf{u}=\mathbf{v}\times\mathbf{w}$$

linear unabhängig sind, gibt es einen Schnittpunkt

$$\mathbf{n}\in N\cap E.$$

Die Gerade

$$L:\ \mathbf{n}+\mathbb{R}\cdot\mathbf{u}$$

durch diesen Schnittpunkt liegt in E, hat einen Richtungsvektor $\mathbf{u}$ linear unabhängig zum Richtungsvektor $\mathbf{v}$ von $M\subset E$ und schneidet deswegen die Gerade M. Dieser Schnittpunkt sei $\mathbf{m}\in L\cap M$. Damit haben wir zwei Punkte $\mathbf{m}\in M$ und $\mathbf{n}\in N$ mit

$$\mathbf{m}-\mathbf{n}\parallel\mathbf{u}\perp\mathbf{v},\mathbf{w}.$$

Punkte $\mathbf{m}$ und $\mathbf{m}$, wie wir sie brauchen, existieren also.

2) Wie können wir den Abstand $\parallel \mathbf{m}-\mathbf{n} \parallel = d(M,N)$ tatsächlich berechnen? Nach Definition ist

$$\parallel \mathbf{m}-\mathbf{n} \parallel = \left| \left(\mathbf{m}-\mathbf{n} \,.\, \frac{\mathbf{u}}{\parallel \mathbf{u} \parallel} \right) \right| = \frac{1}{\parallel \mathbf{v}\times\mathbf{w} \parallel} |(\mathbf{m}-\mathbf{n} \,.\mathbf{v}\times\mathbf{w})|.$$

Hier helfen die wunderbaren Eigenschaften des Kreuzprodukts: Wegen $(\mathbf{v}.\mathbf{v}\times\mathbf{w})=0$ ist für alle $s\in\mathbb{R}$

$$(\mathbf{m}+s\cdot\mathbf{v}\,.\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = (\mathbf{m}.\mathbf{v}\times\mathbf{w}),$$

d.h.

$$(\mathbf{m}\,.\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = (\mathbf{x}\,.\mathbf{v}\times\mathbf{w})$$

für alle $\mathbf{x}\in M$. Ebenso ist

$$(\mathbf{n}\,.\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = (\mathbf{y}\,.\mathbf{v}\times\mathbf{w})$$

für alle $\mathbf{y}\in N$. Hier können wir insbesondere die Anfangspunkte $\mathbf{x}=\mathbf{p}$ und $\mathbf{y}=\mathbf{q}$ nehmen und finden

$$(\mathbf{m}-\mathbf{n}\,.\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = (\mathbf{m}.\mathbf{v}\times\mathbf{w}) - (\mathbf{n}.\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = (\mathbf{p}.\mathbf{v}\times\mathbf{w}) - (\mathbf{q}.\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = (\mathbf{p}-\mathbf{q}\,.\mathbf{v}-\mathbf{w}).$$

Wir haben bewiesen: Der Abstand zweier nicht-paralleler Geraden

$$M:\ \mathbf{p}+\mathbb{R}\cdot\mathbf{v},\quad N:\ \mathbf{q}+\mathbb{R}\cdot\mathbf{w}$$

ist

$$d(M,N) = \frac{1}{\parallel \mathbf{v}\times\mathbf{w} \parallel}\cdot|(\mathbf{p}-\mathbf{q}\,.\,\mathbf{v}\times\mathbf{w})|.$$

Wenn man daran denkt, dass das Kreuzprodukt $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$ auf beiden Geraden senkrecht steht, ist diese Formel gar nicht so schwer zu behalten.

Beispiel 3.7 *Wir betrachten die Geraden*

$$M:\ \begin{pmatrix}7\\6\\5\end{pmatrix}+\mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix},\quad N:\ \begin{pmatrix}8\\7\\6\end{pmatrix}+\mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}.$$

Hier ist

$$\mathbf{p}-\mathbf{q} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix},\quad \mathbf{v}\times\mathbf{w} = \begin{pmatrix}6\\-12\\6\end{pmatrix},$$

also

$$\frac{1}{\parallel \mathbf{v}\times\mathbf{w} \parallel}\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{w} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

und

$$d(M,N) = \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\left|\left(\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right)\right| = 0.$$

Nanu? Was ist hier los? $d(M,N)=0$ bedeutet, dass die Geraden M und N sich schneiden. Das kommt vor.

Damit haben wir auch ein sehr schönes, wenig arbeitsaufwendiges Kriterium dafür, wann sich zwei Geraden im $\mathbb{R}^3$ schneiden: Die beiden, nicht parallelen, Geraden

$$M:\ \mathbf{p}+\mathbb{R}\cdot\mathbf{v}\quad \text{und} N:\ \mathbf{q}+\mathbb{R}\cdot\mathbf{w}\subset\mathbb{R}^3$$

schneiden sich genau dann, wenn

$$(\mathbf{p}-\mathbf{q}\,.\,\mathbf{v}\times\mathbf{w})=0.$$

Aufgabe 3.10 *Gegeben sei im $\mathbb{R}^3$ die Ebene*

$$E:\quad \frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1,\quad \mathit{mit}\ p,q,r>0.$$

Bestimmen Sie den Abstand des Nullpunkts von dieser Ebene. Interpretieren Sie das Ergebnis für $r\to\infty$.

Aufgabe 3.11 *Im $\mathbb{R}^3$ sei $M=M_\varphi$ die Gerade durch die Punkte*

$$\mathbf{p}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\quad \mathit{und}\quad \mathbf{p}'=\begin{pmatrix}cos(\varphi)\\sin(\varphi)\\0\end{pmatrix},$$

(d.h., eine Mantellinie des Kreiskegels mit $\mathbf{p}$ *als Spitze über dem Einheitskreis in der x,y-Ebene). Weiter sei $N\subset\mathbb{R}^3$ die x-Achse. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von φ*

a) *den Abstand $d(M_\varphi,N)$,*

b) *die Gleichung einer Ebene E durch N senkrecht auf M_φ,*

c) *Punkte $\mathbf{m}\in M_\varphi$ und $\mathbf{n}\in N$ mit*

$$(\mathbf{m}-\mathbf{n})\quad\perp\quad M_\varphi,N.$$

d) *Verifizieren Sie*

$$d(M_\varphi,N)=\parallel\mathbf{m}-\mathbf{n}\parallel.$$

Aufgabe 3.12 *Es sei*

$$H=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\ :\ 2x+y+2z=3\right\}.$$

Geben Sie ein lineares Gleichungssystem an, dessen Lösungsmenge eine zu H parallele Gerade ist, die von H den Abstand 1 hat.

Aufgabe 3.13 *Gegeben seien die Ebene E und der Punkt P im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$:*

$$E=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix}+\mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Bildpunkt $f(P)$ von P bei der Spiegelung f an der Ebene E.

Formelsammlung

n		
2	Gerade L	$d(\mathbf{p}, L)$
	$ax + by = c$ $\mathbf{a} + \mathbb{R} \cdot \mathbf{v}$	$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \lvert ap_1 + bp_2 - c \rvert$ $\frac{1}{\lVert \mathbf{v} \rVert} \lvert(\mathbf{a} - \mathbf{p}.\mathbf{v}^{\perp})\rvert$
3	Ebene E	$d(\mathbf{p}, E)$
	$ax + by + cz = d$ $a + \mathbb{R} \cdot \mathbf{v} + \mathbb{R} \cdot \mathbf{w}$	$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \lvert ap_1 + bp_2 + cp_3 - d \rvert$ $\frac{1}{\lVert \mathbf{v} \times \mathbf{w} \rVert} \lvert det(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{p} - \mathbf{a})\rvert$
	Gerade L	$d(\mathbf{p}, L)$
	$\mathbf{a} + \mathbb{R} \cdot \mathbf{v}$ $(\mathbf{n}_1.\mathbf{x}) = d_1,\ (\mathbf{n}_2.\mathbf{x}) = d_2$	$\lVert \mathbf{p} - \mathbf{a} - \frac{1}{\lVert \mathbf{v} \rVert^2}(\mathbf{p} - \mathbf{a}.\mathbf{v})\mathbf{v} \rVert =$ $= \frac{1}{\lVert \mathbf{v} \rVert} \lVert \mathbf{v} \times (\mathbf{p} - \mathbf{a}) \rVert$ $\frac{1}{\lVert \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 \rVert} \lVert (d_1 - (\mathbf{p}.\mathbf{n}_1))\mathbf{n}_2 - (d_2 - (\mathbf{p}.\mathbf{n}_2))\mathbf{n}_1 \rVert$
	Geraden L, M	$d(L, M)$
	$\mathbf{p} + \mathbb{R} \cdot \mathbf{v}, \quad \mathbf{q} + \mathbb{R} \cdot \mathbf{w}$	$\frac{1}{\lVert \mathbf{v} \times \mathbf{w} \rVert} \lvert(\mathbf{p} - \mathbf{q} \,.\, \mathbf{v} \times \mathbf{w})\rvert$

Aufgabe 3.14 *Sei H_1 die Ebene im euklidischen $\mathbb{R}^3$ durch die Punkte*

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie
a) *den Spiegelpunkt des Nullpunkts bezüglich H_1,*
b) *eine Gleichung für die zu H_1 parallele Ebene H_2, welche von H_1 den Abstand 6 hat und nicht auf der gleichen Seite von H_1 liegt, wie der Nullpunkt,*
c) *eine Gleichung für die Kugel, welche H_1 im Punkt $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ berührt, und deren Mittelpunkt auf H_2 liegt.*

Aufgabe 3.15 *Im euklidischen $\mathbb{R}^3$ seien die Geraden*

$$g_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \lambda \in \mathbb{R} \right\}, \quad g_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \\ \mu \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

gegeben. Bestimmen Sie $p_1 \in g_1$ und $p_2 \in g_2$ mit

$$\| p_1 - p_2 \| = \inf_{x \in g_1, y \in g_2} \| x - y \| .$$

Aufgabe 3.16 *Gegeben seien im $\mathbb{R}^3$ die Punkte*

$$p = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Sei ferner G die Verbindungsgerade der Punkte q, r, und sei H die zu G senkrechte Ebene durch den Punkt p.
a) *Man bestimme den Fußpunkt des Lotes von p auf G.*
b) *Man bestimme den Abstand des Nullpunkts von H.*

Aufgabe 3.17 **a)** *Man beweise, dass im $\mathbb{R}^3$ die Teilmenge*

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + z = x + 2y + 2z = 4 \right\}$$

eine Gerade ist.
b) *Man bestimme einen normierten Richtungsvektor von G.*
c) *Man zeige, dass G und die z-Achse Z windschief sind.*
d) *Für einen beliebigen Punkt $R_a = (0, 0, a)^t$ auf Z sei H_a die Ebene, die G und R_a enthält. Man gebe eine Gleichung von H_a an.*
e) *Sei E_a die Ebene, die R_a enthält und auf G senkrecht steht. Man gebe eine Gleichung von E_a an.*
f) *Man berechne den Schnittpunkt S_a von G und E_a.*
g) *Man berechne den Abstand von R_a und S_a. Welches ist der minimale Wert für diesen Abstand und für welches a wird dieses Minimum angenommen?*

Aufgabe 3.18 *Im* $\mathbb{R}^3$ *seien die beiden Geraden*

$$L = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

gegeben.
a) *Bestimmen Sie einen Vektor* $v \in \mathbb{R}^3$, $v \neq 0$, *der auf beiden Geraden senkrecht steht.*
b) *Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene* E *durch* L *parallel zu* M *und eine Gleichung der Ebene* F *durch* M *parallel zu* L.
c) *Bestimmen Sie den Abstand der beiden Geraden* L *und* M.

Aufgabe 3.19 *Im euklidischen* $\mathbb{R}^3$ *seien die beiden Geraden*

$$g_1 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.
a) *Ermitteln Sie die Abstände des Punktes* $P = (p_1, p_2, p_3)^t \in \mathbb{R}^3$ *von den Geraden* g_1 *und* g_2.
b) *Zeigen Sie, dass die Menge aller Punkte* P, *die von* g_1 *und* g_2 *den gleichen Abstand haben, durch die Gleichung*

$$p_1 p_3 - 2(p_2 - 1) = 0$$

beschrieben wird.
c) *Bringen Sie die in b) ermittelte Gleichung auf Normalform und geben Sie den Typ dieser Quadrik an.*

Aufgabe 3.20 *Gegeben seien die Punkte*

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 16 \end{pmatrix}$$

im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$.
a) *Begründen Sie, dass es genau eine Ebene* E *durch die Punkte* p_1, p_2 *und* p_3 *gibt.*
b) *Berechnen Sie den Abstand von* p_4 *zu dieser Ebene* E.
c) *Berechnen Sie das Bild von* p_4 *unter der Spiegelung an* E.

Aufgabe 3.21 *Betrachtet werde die Ebene* $E \subset \mathbb{R}^3$ *durch den Punkt* $x_0 := (5, 1, 30)^t$, *die auf dem Vektor* $c = (3, 4, 5)^t$ *senkrecht steht. Geben Sie* E *in der Hesseschen Normalform an und bestimmen Sie den Abstand des Punktes* $p := (1, 1, 1)^t$ *von* E.

Aufgabe 3.22 *im euklidischen* $\mathbb{R}^3$ *sei die Ebene*

$$E : \; 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 20$$

gegeben. Finden Sie zwei zueinander windschiefe Geraden G_1 *und* $G_2 \subset \mathbb{R}^3$ *mit dem Abstand 5, welche die Bedingungen*

$$G_1 \subset E, \quad G_2 \cap E = \emptyset$$

erfëllen.

Aufgabe 3.23 *Im euklidischen* $\mathbb{R}^3$ *seien eine Gerade* g *und ein Punkt* p *gegeben durch*

$$g = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) *Bestimmen Sie den Fußpunkt des Lotes von* p *auf die Gerade* g *und berechnen Sie den Abstand dex Punktes* p *von der Geraden.*
b) *Bestimmen Sie einen Normalenvektor und eine Gleichung der Ebene, die* p *und* g *enthält.*

Aufgabe 3.24 *Gegeben seien im euklidischen* $\mathbb{R}^3$ *die Schnittgerade* G *der Ebenen*

$$x_1 + x_2 + 2x_3 - 1 = 0 \quad \textit{und} \quad x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

sowie die x_3*-Achse* H.
a) *Bestimmen Sie diejenige Gerade* L *des* $\mathbb{R}^3$ *durch den Nullpunkt, deren Richtungsvektor senkrecht zu den Richtungsvektoren von* G *und* H *ist.*
b) *Bestimmen Sie die Endpunkte* $p_0 \in G$ *und* $q_0 \in H$ *der kürzesten Verbindungsstrecke zwischen Punkten* $p \in G$ *und* $q \in H$.

Aufgabe 3.25 *Bestimmen Sie den Abstand der beiden Geraden*

$$g_1 : x_1 = x_2, x_3 = 1 \quad \textit{und} \quad g_2 : x_1 = x_3, x_2 = -x_1$$

im euklidischen $\mathbb{R}^3$.