Elemente der Linearen Algebra I

Wolf P. Barth

Wintersemester 08/09

Version vom 11. August 2008

Department Mathematik der Universität
Bismarckstr. 1 1/2, D - 91054 Erlangen
e-mail: barth@mi.uni-erlangen.de

Inhaltsverzeichnis

0 Einführung

Im Mathematikstudium gibt es zwei Anfängervorlesungen, auf denen das gesamte weitere Studium aufbaut: Die Analysis und die Lineare Algebra. Die Analysis ist historisch mit dem Aufbau der Infinitesimalrechnung gewachsen, Analysis gibt es seit mindestens 300 Jahren. Anders ist es mit der Linearen Algebra. Um 1900 herum gab es diesen Begriff noch nicht. Die Lineare Algebra entstand zu Beginn des letzten Jahrhunderts durch Zusammentragen von Methoden und Ergebnissen aus verschiedenen Teilen der Mathematik, die alle eines gemeinsam hatten: Linearität.

Strukturelle Gesichtspunkte spielen hier eine größere Rolle, als in der Analysis. Weil sie diese Gesichtspunkte nicht von der Schule her kennen, bereitet die Vorlesung 'Lineare Algebra' den Studierenden häufig größere Probleme als die Vorlesung 'Analysis'. Andererseits ist die Lineare Algebra, gerade wegen der darin behandelten Strukturen, die Grundlage für alle weiteren Veranstaltungen des Mathematik-Studiums. Seit der Umstellung des nicht-vertieften Lehramtsstudiums auf das Bachelor-System wird im ersten Semester nur noch die Vorlesung 'Lineare Algebra' angeboten. Die Vorlesung 'Analysis' kommt dann im zweiten Semester hinzu.

Im deutschen Sprachraum gibt es derzeit kein Lehrbuch zur Linearen Algebra, das ich für Studium und Prüfungsvorbereitung wirklich empfehlen kann. Dennoch möchte ich hier einige Lehrbücher angeben, an deren Stoffauswahl und Darstellung ich mich in dieser Vorlesung auch gelegentlich orientieren werde.

Artin, M.: Algebra, Birkhäuser Verlag

Fischer, G.: Lineare Algebra, Vieweg Verlag

Koecher, M.: Lineare Algebra und analytische Geometrie, Springer Verlag

Die Darstellung im erstgenannten Buch gefällt mir noch am besten, doch geht der Inhalt weit über den Stoff des nichtvertieften Studiums hinaus.

Vor genau 14 Jahren, im Wintersemester 94/95 habe ich diese Vorlesung schon einmal gehalten. Weil ich von keinem Lehrbuch hierfür besonders begeistert war (und bin), habe ich damals den Hörern ein Skriptum an die Hand gegeben. Das wurde in einem Copy-Shop ausgelegt und von den Studenten kopiert. Jetzt ist dieses Verfahren nicht mehr Stand der Technik. Alle Interessierten können sich jetzt das Skriptum von meiner Home-Page (die es damals noch nicht gab) herunterladen. Ich verwende diesmal wieder genau dasselbe Skriptum. Geändert habe ich die Rechtschreibung: Manche scharfen ß-e sind durch Doppel-ss-e ersetzt. Und außerdem habe ich Aufgaben eingefügt, aus denen ich die zu bearbeitenden Übungsaufgaben auswählen möchte. Soweit möglich verwende ich hierfür Original-Aufgaben aus den schriftlichen Klausuren für das Staatsexamen.

1 Der Zahlenraum $\mathbb{R}^n$

1.1 Lineare Gleichungssysteme

Lineare Gleichungssysteme sind die einzige Art von Gleichungen in der Mathematik, welche wirklich exakt lösbar sind. Wir beginnen mit einem Beispiel, wie es schon aus der Antike überliefert ist.

Beispiel 1.1 *In einem Käfig seien Hasen und Hühner. Die Anzahl der Köpfe sei insgesamt 4, die Anzahl der Beine sei insgesamt 10. Frage: Wieviele Hasen und wieviele Hühner sind es?*

Lösung: Es sei x die Anzahl der Hasen und y die Anzahl der Hühner. Dann gilt also

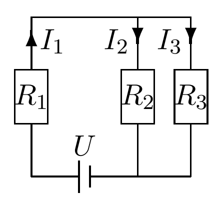
$$\begin{aligned} x+y &= 4 \\ 4x+2y &= 10. \end{aligned}$$

Dies ist ein System aus zwei linearen *Gleichungen in zwei Unbekannten x und y. Wir können aus der ersten Gleichung $x = 4 - y$ eliminieren und in die zweite einsetzen:*

$$\begin{aligned} 4(4-y)+2y &= 10 \\ 16-2y &= 10 \\ -2y &= -6 \\ y &= 3 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Antwort: Es sind drei Hühner und ein Hase.

Beispiel 1.2 *Gegeben sei ein elektrisches Netzwerk der Form, wie sie nebenstehend skizziert ist. Dabei seien die Spannung U und die Widerstände R_1, R_2, R_3 gegeben. Die Ströme I_1, I_2 und I_3 seien gesucht.*



Lösung: Nach den sogenannten Kirchhoffschen Gesetzen der Physik hat man die Gleichungen $I_1 = I_2 + I_3$, sowie $R_2 I_2 = R_3 I_3$ und $R_1 I_1 + R_2 I_2 = U$. Wir schreiben sie als ein System aus drei linearen Gleichungen in den drei Unbekannten I_1, I_2 und I_3 :

$$\begin{array}{rcrcrcl} I_1 & - & I_2 & - & I_3 & = & 0 \\ & & R_2 I_2 & - & R_3 I_3 & = & 0 \\ R_1 I_1 & + & R_2 I_2 & & & = & U \end{array}$$

Wir können hier etwa $I_1 = I_2 + I_3$ eliminieren, um folgendes System aus zwei linearen Gleichungen in den Unbekannten I_2 und I_3 zu erhalten:

$$\begin{array}{rcrcl} R_2 I_2 & - & R_3 I_3 & = & 0 \\ (R_1+R_2) I_2 & + & R_1 I_3 & = & U \end{array}$$

Hier eliminieren wir $I_2 = \frac{R_3}{R_2} I_3$ (hoffentlich ist $R_2 \neq 0$!) und erhalten schließlich die Gleichung

$$\begin{aligned}(R_1+R_2)\frac{R_3}{R_2}I_3+R_1I_3 &= U\\ (R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3)I_3 &= R_2U\\ I_3 &= \frac{R_2U}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}\end{aligned}$$

Aus den Eliminationsgleichungen für I_2 und I_1 erhalten wir

$$I_2=\frac{R_3U}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3},\qquad I_1=\frac{(R_2+R_3)U}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}.$$

Nach diesen Beispielen diskutieren wir jetzt den Allgemeinfall, wobei wir besonders darauf achten wollen, welche Spezialfälle und Ausnahmen auftreten können:

Eine *lineare Gleichung* ist eine Gleichung der Art

$$a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n=b,$$

wo $a_1,a_2,...,a_n,b$ gegebene reelle Zahlen sind, und die reellen Zahlen $x_1,x_2,...,x_n$ unbekannt sind. Wir müssen leider verschiedene Fälle unterscheiden:

A: *Nicht alle Koeffizienten $a_1,...,a_n$ sind 0.* Dann sei etwa $a_m, 1\le m\le n$, der erste von 0 verschiedene Koeffizient. Die Gleichung sieht so aus:

$$0\cdot x_1+...+0\cdot x_{m-1}+a_m\cdot x_m+a_{m+1}\cdot x_{m+1}+...+a_n\cdot x_n=b.$$

Wir können also $x_1,...,x_{m-1}$ beliebig wählen, auf die Gültigkeit der Gleichung hat dies keinen Einfluss. Ebenso können wir $x_{m+1},...,x_n$ beliebig wählen. Anschließend setzen wir

$$x_m:=(b-a_{m+1}x_{m+1}-...-a_nx_n)/a_m.$$

Damit haben wir für jede Wahl der $x_1,...,x_{m-1},x_{m+1},...,x_n$ die Gleichung gelöst. Dies ist auf diese Weise nur möglich, weil $a_m\neq 0$.

B1: *Alle Koeffizienten $a_1,...,a_n$ sind 0, aber es ist $b\neq 0$.* Das Gleichungssystem hat dann die merkwüdige Form

$$0\cdot x_1+...+0\cdot x_n=b.$$

Egal, wie man auch die Unbekannten $x_1,...,x_n$ wählt, diese Gleichung ist nie zu erfüllen. Sie ist *unlösbar.*

B2: *Alle Koeffizienten $a_1,...,a_n$ sind 0 und auch $b=0$.* In diesem reichlich uninteressanten Fall ist die Gleichung stets erfüllt, sie stellt keinerlei Bedingungen an die Unbekannten.

Ein *lineares Gleichungssystem* ist ein System

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & ... & + & a_{1,n}x_n & = & b_1\\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & ... & + & a_{2,n}x_n & = & b_2\\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots\\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & ... & + & a_{m,n}x_n & = & b_m\end{array}$$

aus mehreren linearen Gleichungen. Jedes derartige System kann man mit dem Eliminationsverfahren behandeln, so, wie wir es an den obigen einfachen Beispielen gesehen haben. Wir beschreiben diese Elimination jetzt in einer etwas formaleren Weise, um die Übersicht nicht zu verlieren.

Wenn alle Koeffizienten $a_{1,1}, ..., a_{m,1}$ in der ersten Spalte 0 sind, stellt das System keine Bedingung an die Unbekannte x_1. Diese ist völlig frei wählbar und auf die erste Spalte des Systems kommt es nicht an. Ist aber einer der Koeffizienten $a_{1,1}, ..., a_{m,1}$ aus der ersten Spalte $\neq 0$, so sei etwa $a_{p,1}$ davon der erste. Wir *vertauschen* die erste und die $p-$te Zeile. Dabei ändern sich die Lösungen des Systems nicht. Aber danach haben wir $a_{1,1} \neq 0$. Deswegen können wir die erste Zeile *durch* $a_{1,1}$ *dividieren* und wieder ändern sich die Lösungen nicht. Dann sieht die erste Zeile so aus:

$$x_1 + \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}} x_2 + ... + \frac{a_{1,n}}{a_{1,1}} = \frac{b}{a_{1,1}}.$$

Wir eliminieren nun x_1, allerdings ohne die Eliminationsgleichung explizit hinzuschreiben, aus den restlichen Gleichungen, indem wir von der zweiten, ..., m-ten Zeile $a_{2,1}$ mal, ..., $a_{m,1}$ mal die erste Zeile *subtrahieren*. Da wir dies, wenn wir wollen, auch wieder rückgängig machen können, ändern sich auch hier die Lösungen nicht, und unser Gleichungssystem nimmt die Form

$$\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & + & a'_{1,2}x_2 & + & ... & + & a'_{1,n}x_n & = & b'_1 \\
 & & a'_{2,2}x_2 & + & ... & + & a'_{2,n}x_n & = & b'_2 \\
 & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & a'_{m,2}x_2 & + & ... & + & a'_{m,n}x_n & = & b'_m
\end{array}$$

an, mit neuen Koeffizienten $a'_{1,2}, ..., a'_{m,n}$ und neuen Konstanten $b'_1, ..., b'_m$. Jetzt kommt es nur noch darauf an, die letzten $m - 1$ Gleichungen aufzulösen. Gelingt dies, so setzen wir deren Lösungen $x_2, ..., x_n$ in die erste Gleichung ein und berechnen daraus x_1.

Indem wir dieses Verfahren sukzessive wiederholen, können wir das Gleichungssystem lösen, außer wir gelangen irgend wann zu einer unlösbaren linearen Gleichung (Fall B1 von oben).

Wegen seiner prinzipiellen Wichtigkeit müssen wir das Eliminationsverfahren noch etwas weiter formalisieren. Dazu vereinbaren wir folgenden Sprachgebrauch („Definitionen “):

Die *Koeffizientenmatrix* des Gleichungssystems ist das rechteckige Zahlenschema

$$\begin{pmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & ... & a_{1,n} \\
a_{2,1} & a_{2,2} & ... & a_{2,n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m,1} & a_{m,2} & ... & a_{m,n}
\end{pmatrix}.$$

Wenn wir hieran die rechten Seiten der Gleichungen anfügen

$$\begin{pmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & ... & a_{1,n} & b_1 \\
a_{2,1} & a_{2,2} & ... & a_{2,n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{m,1} & a_{m,2} & ... & a_{m,n} & b_m
\end{pmatrix},$$

so nennen wir dies *erweiterte Koeffizientenmatrix.*

Diese Zahlenschemata, Matrizen genannt, haben momentan für uns keine Bedeutung an sich. Sie haben nur mit einem System linearer Gleichung eine Berechtigung zu existieren und untersucht zu werden. Aber sie beschreiben das zugehörige Gleichungssystem vollständig. Kennt man die erweiterte Koeffizientenmatrix, so kennt man auch das Gleichungssystem.

Die Veränderungen, welche wir am Gleichungssystem vornahmen, ohne seine Lösungen zu ändern, nennen wir *elementare Zeilenumformungen.* Sie beziehen sich nur auf die Koeffizienten des Systems, und können an der Koeffizientenmatrix beschrieben werden. Es gibt drei Sorten davon:

Typ I: Vertauschen zweier Zeilen,
Typ II: Multiplikation einer Zeile mit einer Konstanten $c \neq 0$,
Typ III: Addition des c–fachen einer Zeile, $c \in \mathbb{R}$ beliebig, zu einer *anderen.*

Mit diesen drei Sorten elementarer Zeilenumformungen können wir, links beginnend, eine Spalte nach der anderen leerfegen:

- Sind alle Koeffizienten in der Spalte $= 0$, so ändern wir nichts, sondern wenden uns sogleich der nächsten Spalte zu.
- Sind Koeffizienten in der Spalte $\neq 0$, davon der erste etwa in der p–ten Zeile, so vertauschen wir diese p–te Zeile mit der ersten (Umformung vom Typ I). Anschließend multiplizieren wir die erste Zeile mit dem Kehrwert dieses Koeffizienten durch (Typ II), um zu erreichen, dass in dieser ersten Zeile der erste Koeffizient 1 ist. Schließlich addieren wir ein geeignetes Vielfaches der ersten Zeile zu jeder der folgenden Zeilen (Typ III), um dort den Koeffizienten aus der ersten Spalte zu beseitigen.
- Haben wir erreicht, dass der erste Koeffizient einer Spalte 1 und alle weiteren 0 sind, lassen wir die erste Zeile beiseite und wenden uns der nächsten Spalte zu.

Beispiel 1.3

gegeben: $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

vertauschen erste und zweite Zeile: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

multiplizieren beide Zeilen mit $\frac{1}{2}$: $\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Beispiel 1.4

gegeben: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

zweite Zeile minus zweimal erste: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Multiplikation der zweiten Zeile mit -1: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Wir fassen das Resultat unserer Matrizen-Manipulationen zusammen:

Satz 1.1 (Zeilenstufenform) *Jede Matrix lässt sich durch elementare Zeilenumformungen in eine Zeilenstufenform*

$$\begin{pmatrix} \overbrace{0\ldots0}^{n_0} & 1 & \overbrace{*\ldots*}^{n_1} & * & \ldots & * & \overbrace{*\ldots*}^{n_r} \\ . & 0 & 0\ldots0 & 1 & \ldots & * & *\ldots* \\ . & . & . & 0 & . & 1 & *\ldots* \\ . & . & . & . & . & 0 & 0\ldots0 \\ 0\ldots0 & 0 & 0\ldots0 & 0 & 0\ldots0 & 0 & 0\ldots0 \end{pmatrix}$$

bringen. Dabei können die Stufenlängen $n_0, n_1, ..., n_r$ eventuell 0 sein, und r, die Anzahl der Stufen kann mit der Gesamtzahl aller Zeilen übereinstimmen, sodass also keine Nullzeilen am unteren Ende der Matrix auftreten.

Da sich bei elementaren Umformungen der Koeffizientenmatrix die Lösungen eines linearen Gleichungssystems nicht ändern, können wir diese Lösungen auch bestimmen, nachdem wir die erweiterte Koeffizientenmatrix in Zeilenstufenform vorliegen haben. Ob das System lösbar ist oder nicht, lesen wir an der letzten Stufe ab:

$$
\begin{array}{c|c}
\text{lösbar} & \text{unlösbar} \\
\hline
\left(\begin{array}{ccccc|c}
0...0 & 1*** & * & ... & **** & * \\
 & 0..0 & 1 & ... & .... & . \\
 & & 0 & ... & **** & * \\
 & & & ... & 1*** & * \\
 & & & & 0..0 & 0
\end{array}\right)
&
\left(\begin{array}{ccccc|c}
0...0 & 1*** & * & ... & **** & * \\
 & 0..0 & 1 & ... & & . \\
 & & 0 & ... & & . \\
 & & & & 1*** & * \\
 & & & & 0..0 & 1
\end{array}\right)
\end{array}
$$

In der Tat, die letzte Gleichung des rechten Systems lautet $0 \cdot x_n = 1$ und ist unlösbar. Und wenn eine Gleichung unlösbar ist, dann ist das ganze System auch nicht lösbar.

Wenn das System in Zeilenstufenform vorliegt, dann kann man die Unbekannten, die nicht zu einer Stufe gehören, beliebig vorgeben. Die Unbekannten, welche in einer Spalte mit Stufe stehen, können, in der letzten Zeile beginnend, einzeln berechnet werden, worauf sie in die vorhergehenden Zeilen eingesetzt werden müssen.

Dies Lösungsverfahren, mit dem jedes System von linearen Gleichungen behandelt werden kann, heißt *Gaußsches Eliminationsverfahren* oder *Gauß-Algorithmus.* Seine Bedeutung, vor allem in der Angewandten Mathematik, ist immens.

Wir schreiben lineare Gleichungssysteme noch etwas formaler, unter Verwendung des Summenzeichens, das wir bisher vermieden haben:

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu,\nu} \cdot x_\nu = b_\mu, \quad \mu = 1, ..., m.$$

Der Index μ ist der *Zeilenindex*, er kennzeichnet die Zeile des Systems. In der μ–ten Zeile steht die Gleichung

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu,\nu} x_\nu = b_\mu,$$

oder ausgeschrieben

$$a_{\mu,1}x_1 + a_{\mu,2}x_2 + ... + a_{\mu,n}x_n = b_\mu.$$

Der zweite Index, ν, ist der Summationsindex. Er läuft von 1 bis n, der Anzahl der Unbekannten.

Wir beschließen diesen ersten Abschnitt mit einigen allgemeinen Tatsachen. Dabei nennen wir ein Gleichungssystem *homogen*, wenn alle Zahlen $b_1, ..., b_m$ auf seiner rechten Seite 0 sind. Andernfalls nennen wir das Gleichungssystem *inhomogen.* Ein homogenes Gleichungssystem hat immer die uninteressante *triviale Lösung* $x_1 = ... = x_n = 0$.

Satz 1.2 (Mehr Unbekannte als Gleichungen) *Das* **homogene** *lineare Gleichungssystem*

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu,\nu} \cdot x_\nu = 0, \quad \mu = 1, ..., m$$

habe n Unbekannte und $m < n$ Zeilen. Dann können in den Lösungen $(x_1, ..., x_n)$ mindestens $n - m$ Unbekannte frei gewählt werden.

Beweis. Die Anzahl der Stufen in einer Matrix mit n Spalten und m Zeilen ist höchstens m. Somit gibt es mindestens $n-m$ Spalten, in denen keine Stufe steht, und in denen die Unbekannte beliebig gewählt werden kann. □

Beispiel 1.5 *Wir betrachten das System*

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

mit drei Unbekannten und zwei Gleichungen. In der zweiten Zeile können wir $x_3 = t$ *beliebig wählen. Dann folgt aus der Gleichung* $x_2 = -t$*. Und aus der ersten Gleichung sehen wir* $x_1 = -x_2 = t$*. Jede Lösung des Systems hat also die Form*

$$(x_1, x_2, x_3) = (t, -t, t).$$

Die Anzahl der freien Unbekannten (nur die Unbekannte $x_3 = t$*) ist in diesem Fall*

$$\begin{array}{clcc} & \textit{Anzahl der Unbekannten:} & & 3 \\ - & \textit{Anzahl der Gleichungen:} & - & 2 \\ = & \textit{Anzahl der Parameter:} & = & 1 \end{array}$$

Satz 1.3 *Ist eine* **spezielle Lösung** $(y_1, ..., y_n)$ *des* **inhomogenen** *Systems*

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu,\nu} \cdot x_\nu = b_\mu, \quad \mu = 1, ..., m$$

bekannt, so erhält man daraus **alle Lösungen** *des* **inhomogenen** *Systems durch Addition* **aller Lösungen** *des* **homogenen** *Systems.*

Beweis. Nach Annahme ist für $\mu = 1, ..., m$

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu,\nu} \cdot y_\nu = b_\mu.$$

Deswegen haben wir

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu,\nu} \cdot x_\nu = b_\mu \quad \text{genau dann, wenn} \quad \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu,\nu} \cdot (x_\nu - y_\nu) = 0,$$

das heißt, wenn $(x_1 - y_1, ..., x_n - y_n)$ eine Lösung des homogenen Systems ist. □

Die im Beweis verwendete Formulierung „... genau dann, wenn ... “benutzen Mathematiker sehr gerne. Sie steht zwischen zwei äquivalenten Aussagen, gilt eine davon, so auch die andere. Unter Verwendung eines schönen Symbols, des *Folgepfeils* $\Rightarrow$, kann man diese Beziehung zwischen mathematischen Aussagen A und B (was ist denn das, Aussagen?) (???), so visualisieren:

$$\begin{array}{cc} \text{Wenn } A\text{, dann } B & A \Rightarrow B \\ \text{Wenn } B\text{, dann } A & A \Leftarrow B \\ A \text{ genau dann, wenn } B & A \Leftrightarrow B \end{array}$$

Verwechslung der logischen Schlussrichtungen ist einer der typischsten Fehler mathematischer Anfänger. Deswegen sind „... genau dann, wenn ... “- Aussagen besonders hilfreich. Diese Verwechslung der Schlussrichtungen ist hier ja folgenlos.

Aufgabe 1.1 *Wenn fünf Ochsen und zwei Schafe acht Taels Gold kosten, sowie zwei Ochsen und acht Schafe auch acht Taels, was ist dann der Preis eines Tieres? (Chiu-chang Suan-chu, $\sim$ 300 n.Chr.)*

Aufgabe 1.2 *Auf einem Markt gibt es Hühner zu kaufen. Ein Hahn kostet drei Geldstücke, eine Henne zwei, und Küken kann man drei für ein Geldstück haben. Wie muss man es einrichten, um für 100 Geldstücke 100 Hühner zu bekommen? (Hinweise: Es gibt mehrere Lösungen, alle sind zu bestimmen. Als Anzahlen von Hühnern sind dabei nur ganze Zahlen ≥ 0 zugelassen.)*

Aufgabe 1.3 *Bestimmen Sie alle Lösungen des linearen Gleichungssystems*

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & & + & x_3 & & & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & & & - & x_4 & = & 0 \end{array}$$

Aufgabe 1.4 *Bestimmen Sie alle Lösungen des linearen Gleichungssystems*

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & & + & x_3 & & & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & & & + & 2x_4 & = & 1 \end{array}$$

Aufgabe 1.5 *Bestimmen Sie $t \in \mathbb{R}$ so, dass das folgende System*

$$\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & + & 3x_2 & + & tx_3 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & tx_2 & + & 3x_3 & = & 2 \end{array}$$

keine Lösung, bzw. mehr als eine Lösung, bzw. genau eine Lösung hat.

Aufgabe 1.6 *Untersuchen Sie, ob die beiden folgenden Gleichungssysteme eine von Null verschiedene Lösung haben:*

$$a) \quad \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \end{array} \qquad b) \quad \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \end{array}$$

Aufgabe 1.7 *Bringen Sie die folgenden Matrizen durch elementare Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.8 *Geben Sie alle möglichen Zeilenstufenformen einer Matrix mit zwei Zeilen und drei Spalten an.*

Aufgabe 1.9 *Man bestimme alle $\lambda \in \mathbb{R}$, für die das lineare Gleichungssystem*

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & & & = & 1 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 6x_3 & = & 5 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ & & 5x_2 & + & 2x_3 & = & \lambda \end{array}$$

lösbar ist.

Aufgabe 1.10 *Gegeben sei das lineare Gleichungssystem*

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & + & ax_3 & + & x_4 & & & = & 0 \\ x_1 & & & & & + & ax_4 & - & ax_5 & = & 1 \\ & & 2x_2 & + & x_3 & & & + & 2x_5 & = & 2 \end{array}$$

a) Man bestimme die Lösungsmenge des Gleichungssystems für $a = 1$.
b) Gibt es ein $a \in \mathbb{R}$, für welches das Gleichungssystem keine Lösung hat?
c) Gibt es ein $a \in \mathbb{R}$, für welches das Gleichungssystem genau eine Lösung hat?

Aufgabe 1.11 *Man bestimme die Lösungsgesamtheit (im $\mathbb{R}^5$) des Gleichungssystems*

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 1+\lambda \\ x_1 & & & + & \lambda x_3 & & & + & x_5 & = & 2 \end{array}$$

in Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 1.12 *Gegeben sei die reelle 4×4-Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie einen Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$ derart, dass das lineare Gleichungssystem

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4,$$

keine Lösung besitzt.
b) Gibt es einen Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$ derart, dass das lineare Gleichungssystem aus a) genau eine Lösung besitzt? (Begründung!)
c) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem aus a) für

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1.2 Vektorrechnung im $\mathbb{R}^n$

Unter einem *Vektor* verstehen wir in diesem ganzen ersten Kapitel ein n–tupel

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

reeller Zahlen $x_1, ..., x_n$. Es ist üblich, sich Vektoren als derartige Spaltenvektoren vorzustellen, während es schreibtechnisch besser wäre, Zeilenvektoren

$$\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$$

zu benützen. Vorläufig spielt die Unterscheidung von Zeilen- und Spaltenvektoren keine Rolle und deswegen werden wir Vektoren als Zeilenvektoren schreiben.

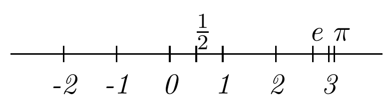
Das n-tupel $(x_1, ..., x_n)$ ist etwas anderes als die Menge $\{x_1, ..., x_n\}$. Bei einem n-tupel kommt es auf die *Reihenfolge* der Einträge an, bei einer Menge kommt es nicht auf die Reihenfolge ihrer Elemente an.

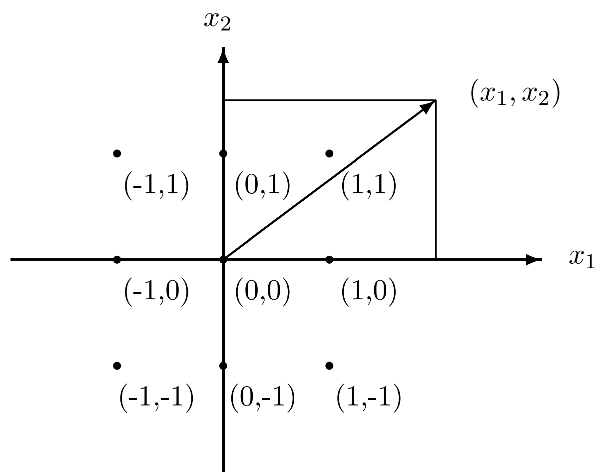
Der *n-dimensionale Zahlenraum* ist die Menge

$$\mathbb{R}^n := \{\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) : \, x_1 \in \mathbb{R}, ..., x_n \in \mathbb{R}\}$$

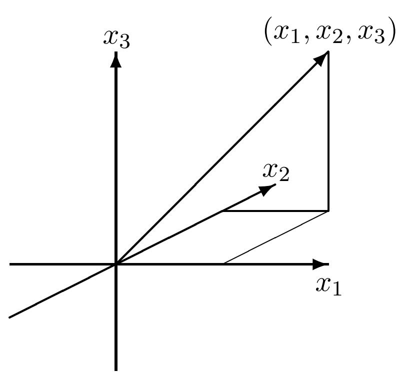
aller dieser Vektoren.

Beispiel 1.6 **($n = 1$)** *$\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ ist die Zahlengerade.*





Beispiel 1.7 (n=2) *Seit Descartes ist es üblich, nach Wahl eines Koordinatensystems, die Punkte der Ebene durch Zahlenpaare (x_1, x_2) zu parametrisieren. Umgekehrt gibt die Ebene eine Veranschaulichung des Raums $\mathbb{R}^2$ der Zahlenpaare (x_1, x_2). Man* identifiziert *den Zahlenraum $\mathbb{R}^2$ mit der Ebene.*



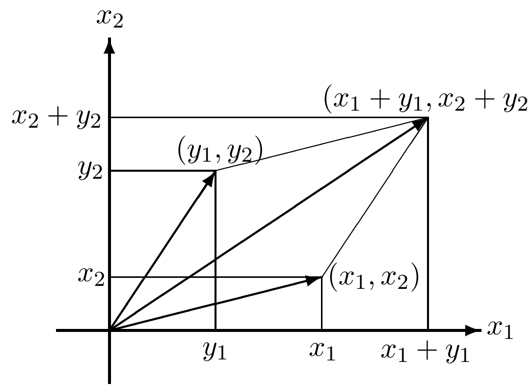
Beispiel 1.8 **($n = 3$)** *Ebenso, wie die Punkte der Ebene mit den Zahlenpaaren $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ identifiziert werden können, so können nach Wahl eines Koordinatensystems die Punkte des Anschauungsraums mit Zahlen-Tripeln $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ identifiziert werden.*

Beispiel 1.9 $(n=4)$ *Zu Beginn des 20. Jahrhunderts schlug A. Einstein den vierdimensionalen Zahlenraum $\mathbb{R}^4$ in seiner speziellen Relativitätstheorie als geometrisches Modell für den uns umgebenden Raum vor, wobei die Zeit als vierte Koordinate interpretiert wird. Erst wenige Jahre vorher war es in der Mathematik üblich geworden, geometrische Betrachtungen auch in mehr als drei Dimensionen durchzuführen. Die italienischen Geometer hatten diese Zahlenräume höherer Dimension, welche sie zunächst Hyperräume nannten, in die Mathematik eingeführt.*

Mit den Vektoren des Zahlenraums $\mathbb{R}^n$ kann man die folgenden beiden Rechenoperationen durchführen:

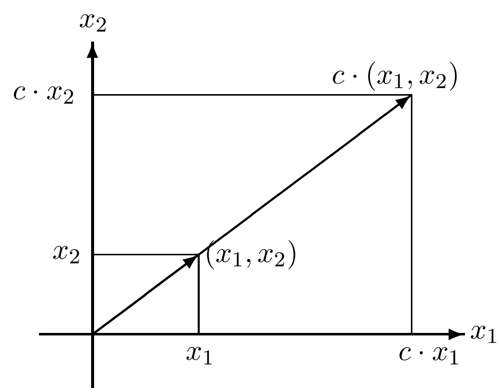
Addition:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{x} & = & (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{y} & = & (y_1,...,y_n) \in \mathbb{R}^n \\ \hline \mathbf{x}+\mathbf{y} & = & (x_1+y_1,...,x_n+y_n) \in \mathbb{R}^n \end{array}$$



Multiplikation:

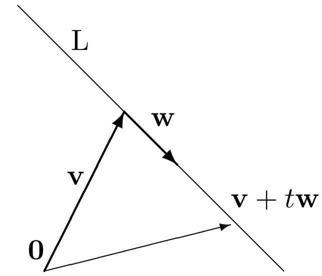
$$\begin{array}{rcl} c & \in & \mathbb{R} \\ \mathbf{x} & = & (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n \\ \hline c\cdot\mathbf{x} & = & (c\cdot x_1,...,c\cdot x_n) \in \mathbb{R}^n \end{array}$$



Beide Rechenoperationen sind komponentenweise nichts anderes, als das übliche Addieren und Multiplizieren reller Zahlen. Deswegen gelten hier auch die wohlbekannten Rechenregeln

$$\begin{array}{rcll} (\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z} & = & \mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z}), & \mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \quad \text{Assoziativität der Addition} \\ \mathbf{x}+\mathbf{y} & = & \mathbf{y}+\mathbf{x}, & \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \quad \text{Kommutativität der Addition} \\ c\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y}) & = & c\cdot\mathbf{x}+c\cdot\mathbf{y}, & c\in\mathbb{R}, \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \quad \text{Distributivität} \\ (b+c)\cdot\mathbf{x} & = & b\cdot\mathbf{x}+c\cdot\mathbf{x}, & b,c\in\mathbb{R}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad \text{Distributivität} \\ 1\cdot\mathbf{x} & = & \mathbf{x}, & \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \\ 0\cdot\mathbf{x} & = & \mathbf{0} := (0,...,0) & \end{array}$$

Viel mehr gibt es über das Rechnen mit Vektoren nicht zu sagen. Wir möchten aber an einem ganz einfachen Beispiel das Wesen der Linearen Algebra demonstrieren, das darin besteht, Algebra auf geometrische Sachverhalte anzuwenden, bzw. umgekehrt, intuitive Methoden aus der Geometrie für algebraische Anwendung zu abstrahieren. Als Beispiel diskutieren wir Geraden in der Ebene.



Eine *Gerade* L im Zahlenraum $\mathbb{R}^n$ wird gegeben durch einen Anfangsvektor $\mathbf{v}$ und einen Richtungsvektor $\mathbf{0} \neq \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$. Sie ist die Menge

$$L = \{\mathbf{v} + t\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \ : t \in \mathbb{R}\}.$$

Satz 1.4 *Die Gerade L stimmt mit einer Geraden $L' = \{\mathbf{v}' + s\mathbf{w}' \ : s \in \mathbb{R}\}$ genau dann überein, wenn $\mathbf{v}' \in L$ und $\mathbf{w}' = c \cdot \mathbf{w}$ mit $0 \neq c \in \mathbb{R}$.*

Beweis. „$\Rightarrow$“ Wenn die Mengen $L = \{\mathbf{v} + t\mathbf{w} \ : t \in \mathbb{R}\}$ und $L' = \{\mathbf{v}' + s\mathbf{w}' \ : s \in \mathbb{R}\}$ übereinstimmen, dann ist insbesondere $(s = 0)$ der Vektor $\mathbf{v}'$ ein Vektor auf L, also von der Form $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + t_0\mathbf{w}$. Ebenso ist $(s = 1)$ auch $\mathbf{v}' + \mathbf{w}' \in L$, also $\mathbf{v} + t_0\mathbf{w} + \mathbf{w}' = \mathbf{v}' + \mathbf{w}' = \mathbf{v} + t\mathbf{w}$. Daraus folgt $\mathbf{w}' = c\mathbf{w}$ mit $c = t - t_0$. Wegen $\mathbf{w}' \neq 0$ muss auch $c \neq 0$ sein.

„$\Leftarrow$“ Sei $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + t_0\mathbf{w} \in L$ und $\mathbf{w}' = c\mathbf{w}$. dann folgt

$$L' = \{\mathbf{v}' + s\mathbf{w}' \ : s \in \mathbb{R}\} = \{\mathbf{v} + (t_0 + sc)\mathbf{w} \ : s \in \mathbb{R}\} = \{\mathbf{v} + t\mathbf{w} \ : t \in \mathbb{R}\},$$

denn wegen $c \neq 0$ durchläuft mit s auch $t = t_0 + sc$ alle reellen Zahlen. $\square$

Satz 1.5 *Durch je zwei Vektoren $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ des $\mathbb{R}^n$ gibt es genau eine Gerade L.*

Beweis. Existenz: wir wählen $\mathbf{v} := \mathbf{x}$ und $\mathbf{w} := \mathbf{y} - \mathbf{x}$. Dann enthält die Gerade $L = \{\mathbf{v} + t\mathbf{w} \ : t \in \mathbb{R}\} = \{\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \ : t \in \mathbb{R}\}$ beide Vektoren $\mathbf{x}$ (für $t = 0$) und $\mathbf{y}$ (für $t = 1$).

Eindeutigkeit: Sei $L' = \{\mathbf{v}' + t\mathbf{w}' \ : t \in \mathbb{R}\}$ eine Gerade, welche die Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ enthält. Wegen Satz 1.4 können wir diese Gerade auch schreiben als $L' = \{\mathbf{x} + t\mathbf{w}' \ : t \in \mathbb{R}\}$. Da $\mathbf{y} = \mathbf{x} + t_0\mathbf{w}'$ mit $t_0 \neq 0$ (wegen $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$), ist der Richtungsvektor $\mathbf{w}' = \frac{1}{t_0}(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ ein Vielfaches des Richtungsvektors $\mathbf{y} - \mathbf{x}$ von L. Nach Satz 1.4 ist somit $L' = L$. $\square$

Die Gerade durch $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ lässt sich etwas anders schreiben:

$$L = \{\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \ : t \in \mathbb{R}\} = \{(1 - t)\mathbf{x} + t\mathbf{y} \ : t \in \mathbb{R}\} = \{s\mathbf{x} + t\mathbf{y} \ : s, t \in \mathbb{R}, s + t = 1\}$$

Die Gerade durch $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ ist nicht dasselbe, wie die *Strecke* $\overline{\mathbf{xy}}$ *zwischen* $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$:

$$\overline{\mathbf{xy}} = \{\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \ : t \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 1\} = \{s\mathbf{x} + t\mathbf{y} \ : 0 \leq s, t \in \mathbb{R}, s + t = 1\}.$$

Für $s = t = \frac{1}{2}$ erhält man den *Mittelpunkt* $\frac{1}{2}(\mathbf{x} + \mathbf{y})$ dieser Strecke.

Nach diesen einfachen Tatsachen, welche in jedem Zahlenraum $\mathbb{R}^n$ richtig sind, betrachten wir jetzt den Zusammenhang von Geraden im $\mathbb{R}^2$ mit linearen Gleichungen in zwei Unbekannten.

Satz 1.6 *Für eine Teilmenge $L \subset \mathbb{R}^2$ sind folgende Eigenschaften äquivalent:*
(i): L ist eine Gerade **durch den Nullpunkt** *($\mathbf{0} \in L$).*
(ii): L ist Lösungsmenge einer **homogenen** *linearen Gleichung*

$$a_1x_1 + a_2x_2 = 0,$$

mit Koeffizienten a_1, a_2, die nicht beide $= 0$ sind.

Beweis. „(i) $\Rightarrow$ (ii)“ Als Anfangsvektor für L nehmen wir den Nullvektor und beschreiben unsere Gerade als

$$L = \{t\mathbf{w} : t \in \mathbb{R}\} = \{(tw_1, tw_2) : t \in \mathbb{R}\}$$

mit Koeffizienten w_1, w_2, die nicht beide $= 0$ sind. Für unsere homogene Gleichung brauchen wir Koeffizienten a_1, a_2 mit der Eigenschaft $a_1w_1 + a_2w_2 = 0$. Die Zahlen

$$a_1 := w_2,\ a_2 := -w_1$$

bieten sich dafür an. Wir behaupten, dass L mit der Menge $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : w_2x_1 - w_1x_2 = 0\}$ übereinstimmt. Wegen $w_2 \cdot tw_1 - w_1 \cdot tw_2 = 0$ ist klar, dass L in dieser Menge enthalten ist. Umgekehrt ist diese Menge aber, wie wir im nächsten Beweisschritt sehen werden, eine Gerade. Da sie $\mathbf{0}$ und $\mathbf{w}$ enthält, stimmt sie nach Satz 1.5 mit L überein.

„(ii) $\Rightarrow$ (i)“ Falls $a_1 \neq 0$, so erfüllt $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ die Gleichung $a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ genau dann, wenn $x_1 = -\frac{a_2}{a_1}x_2$, das heißt, wenn $\mathbf{x} = x_2 \cdot (-\frac{a_2}{a_1}, 1)$ auf der Geraden durch $\mathbf{0}$ mit dem Richtungsvektor $\mathbf{w} = (-\frac{a_2}{a_1}, 1)$ liegt. Wenn aber $a_1 = 0$, so lautet die Gleichung $a_2x_2 = 0$. Da nun nach Voraussetzung $a_2 \neq 0$, ist dies äquivalent mit $x_2 = 0$. Diese Menge ist die Gerade durch den Nullpunkt mit Richtungsvektor $(1, 0)$. □

Satz 1.7 *Für eine Teilmenge $L \subset \mathbb{R}^2$ sind äquivalent:*
(i) L ist eine Gerade **nicht durch den Nullpunkt** *(nicht $\mathbf{0} \in L$).*
(ii) L ist Lösungsmenge einer **inhomogenen** *linearen Gleichung $a_1x_1 + a_2x_2 = b$, wobei $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$ und $b \neq 0$.*

Beweis. „(i) $\Rightarrow$ (ii)“ Wir schreiben $L = \{\mathbf{v} + t\mathbf{w} : t \in \mathbb{R}\}$ und betrachten die Gerade $L_0 := \{t\mathbf{w} : t \in \mathbb{R}\}$ durch den Nullpunkt mit demselben Richtungsvektor. Nach Satz 1.6 ist L_0 Lösungsmenge einer homogenen linearen Gleichung $a_1x_1 + a_2x_2 = 0$. Also ist

$$\begin{aligned} L &= \{\mathbf{v} + \mathbf{x} : \mathbf{x} \in L_0\} \\ &= \{\mathbf{v} + \mathbf{x} : a_1x_1 + a_2x_2 = 0\} \\ &= \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 : a_1y_1 + a_2y_2 = a_1v_1 + a_2v_2\}. \end{aligned}$$

Da L nicht durch den Nullpunkt geht, liegt $\mathbf{v}$ nicht auf L_0, und es ist $b := a_1v_1 + a_2v_2 \neq 0$.

„(ii) $\Rightarrow$ (i)“ Jetzt ist

$$L = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : a_1x_1 + a_2x_2 = b\} = \{\mathbf{v} + \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 : a_1y_1 + a_2y_2 = 0\}$$

wo $\mathbf{v}$ eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung $a_1v_1 + a_2v_2 = b$ ist (Satz 1.3). Nach Satz 1.6 beschreibt die homogene Gleichung $a_1y_1 + a_2y_2 = 0$ eine Gerade $L_0 = \{t\mathbf{w} : t \in \mathbb{R}\}$ durch den Nullpunkt. Somit ist $L = \{\mathbf{v} + t\mathbf{w} : t \in \mathbb{R}\}$ eine Gerade, die wegen $b \neq 0$ nicht durch den Nullpunkt geht. □

Wir sahen: die Lösungsmenge einer linearen Gleichung in zwei Unbekannten, deren Koeffizienten nicht beide 0 sind, ist eine Gerade im Zahlenraum $\mathbb{R}^2$. Die Lösungsmenge eines Systems von zwei derartigen linearen Gleichungen

$$\begin{array}{ll} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 = b_1 & \text{(Lösungsmenge } L_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 = b_2 & \text{(Lösungsmenge } L_2) \end{array}$$

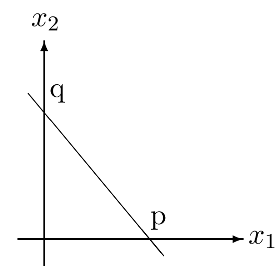
ist deswegen der Durchschnitt $L_1 \cap L_2$ der beiden Geraden. Für diesen Durchschnitt gibt es folgende Möglichkeiten:

1)	$L_1 = L_2$:		$L_1 \cap L_2$ ist die Gerade $L_1 = L_2$
2)	$L_1 \neq L_2$,	$L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$	$L_1 \cap L_2$ ist ein Punkt
3)	$L_1 \neq L_2$,	L_1 und L_2 parallel	$L_1 \cap L_2$ ist leer

Zu diesen drei Möglichkeiten gehören die folgenden drei Stufenformen der Koeffizientenmatrix:

$$\begin{array}{ll} 1) & \left(\begin{array}{cc|c} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ oder } \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ 2) & \left(\begin{array}{cc|c} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \end{array}\right) \\ 3) & \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{ oder } \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

Schließlich noch ein Wort zur Nomenklatur: Die Beschreibung $L = \{\mathbf{v} + t\mathbf{w} : t \in \mathbb{R}\} = \mathbf{v} + \mathbb{R}\mathbf{w}$ heißt *Parametrisierung* oder *explizite Beschreibung* der Geraden L. Die Beschreibung $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ heißt *implizit*. Wenn $c \neq 0$, so ist $ca_1x_1 + ca_2x_2 = cb$ eine implizite Beschreibung der gleichen Geraden (Zeilenumformung vom Typ II). Wählt man - im Falle $b \neq 0$ - zum Beispiel $c = \frac{1}{b}$, so erhält man die *Achsenabschnittsform*



$$\frac{1}{p}x_1 + \frac{1}{q}x_2 = 1.$$

Aufgabe 1.13 *Im $\mathbb{R}^2$ seien die folgenden vier Vektoren*

$$\mathbf{v}_1 = (1,1), \quad \mathbf{v}_2 = (3,-1), \quad \mathbf{w}_1 = (2,1), \quad \mathbf{w}_2 = (2,-1)$$

gegeben. Für $i, j = 1, 2$ sei $L_{i,j}$ die Gerade durch $\mathbf{v}_i$ mit Richtungsvektor $\mathbf{w}_j$. Bestimmen Sie die Schnittpunkte $\mathbf{p}_{i,j}$ der Geraden $L_{i,j}$ mit der x_1-Achse und die Schnittpunkte $q_{i,j}$ dieser Geraden mit der x_2-Achse. Geben Sie die Gleichungen der vier Geraden $L_{i,j}$ in Achsenabschnittsform an.

Aufgabe 1.14 *Zeigen Sie:*
a) Die drei Geraden im $\mathbb{R}^2$

$$L_1 := \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L_2 := \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

schneiden sich in einem Punkt.
b) Die drei Punkte

$$\begin{pmatrix} 10 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

liegen auf einer Geraden.

Aufgabe 1.15 *Untersuchen Sie, ob die Gerade*

$$L_1 := \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^3$ *die Gerade*

$$L_2 := \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 17 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \textit{bzw.} \quad L_3 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

schneidet und bestimmen Sie ggf. den Schnittpunkt.

Aufgabe 1.16 *Beweisen Sie, dass sich die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks in einem Punkt treffen.*

Aufgabe 1.17 *Vier Punkte* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$*, die nicht in einer Ebene liegen, bilden die Ecken eines Tetraeders. Dieses Tetraeder hat sechs Kanten, von denen sich je zwei gegenüberliegen (wie z.B. die Kanten* **ab** *und* **cd***). Beweisen Sie: Die drei Geraden, welche die Mitten gegenüberliegender Kanten verbinden, treffen sich in einem Punkt.*

1.3 Lineare Unterräume

Die Lösungsmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ eines *homogenen* linearen Gleichungssystems

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu,\nu} x_\nu = 0, \quad (\mu = 1, ..., m)$$

hat folgende Eigenschaft: Sind $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ aus U, d.h. $\sum_{\nu=1}^n a_{\mu,\nu} x_\nu = \sum_{\nu=1}^n a_{\mu,\nu} y_\nu = 0$ für $\mu = 1, ..., m$, und sind $s, t \in \mathbb{R}$, dann ist auch

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu,\nu} \cdot (s x_\nu + t y_\nu) = s \cdot \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu,\nu} x_\nu + t \cdot \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu,\nu} y_\nu = 0.$$

Es gilt also:

$$\boxed{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U,\ s, t \in \mathbb{R} \Rightarrow s\mathbf{x} + t\mathbf{y} \in U \qquad (LIN)}$$

Diese Eigenschaft (LIN) kann auch in zwei Teilen geschrieben werden:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \mathbf{x}, \mathbf{y} \in U & \Rightarrow & \mathbf{x} + \mathbf{y} \in U \\ \mathbf{x} \in U, c \in \mathbb{R} & \Rightarrow & c\mathbf{x} \in U \end{array} \qquad (LIN)}$$

Sie ist für die Lineare Algebra so wichtig, dass wir sie durch eine Definition hervorheben:

Definition 1.1 *Eine Teilmenge $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$ heißt* linearer Unterraum *oder* Unter-Vektorraum, *wenn sie die Eigenschaft (LIN) besitzt.*

Bevor wir weitere Beispiele geben, notieren wir, dass jeder lineare Unterraum U den Nullvektor enthält. Denn weil U nicht leer ist, enthält U mindestens einen Vektor $\mathbf{x}$, und dann auch den Nullvektor $\mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{x}$.

Beispiel 1.10 *Jede Gerade L durch den Nullpunkt ist ein linearer Unterraum: Sei $L = \mathbb{R} \cdot \mathbf{w}$. Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y} \in L$ schreiben sich dann $\mathbf{x} = s \cdot \mathbf{w}$ und $\mathbf{y} = t \cdot \mathbf{w}$. Folglich ist $\mathbf{x}+\mathbf{y} = (s+t) \cdot \mathbf{w} \in L$ und auch $c\mathbf{x} = cs \cdot \mathbf{w} \in L$.*

Beispiel 1.11 *Aus ganz trivialen Gründen sind der* Nullraum $\{\mathbf{0}\}$, *der nur den Nullvektor enthält, und der* Totalraum $\mathbb{R}^n$, *der alle Vektoren enthält, lineare Unterräume.*

Beispiel 1.12 *Sind U_1 und $U_2 \subset \mathbb{R}^n$ lineare Unterräume, so ist auch ihr Durchschnitt*

$$U_1 \cap U_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \in U_1 \text{ und } \mathbf{x} \in U_2\}$$

ein linearer Unterraum. In der Tat: Wegen $\mathbf{0} \in U_1$ und $\mathbf{0} \in U_2$ gehört $\mathbf{0}$ auch zu $U_1 \cap U_2$. Die Menge $U_1 \cap U_2$ ist deswegen nicht leer. Seien nun $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ Vektoren aus $U_1 \cap U_2$. Weil $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ dann zu U_1 gehören, und weil U_1 ein linearer Unterraum ist, gehört $s\mathbf{x} + t\mathbf{y}$ zu U_1 für alle $s, t \in \mathbb{R}$. Analog gehört der Vektor $s\mathbf{x} + t\mathbf{y}$ auch zu U_2. Also liegt, wie verlangt, jeder Vektor $s\mathbf{x} + t\mathbf{y}$ in $U_1 \cap U_2$.

Beispiel 1.13 *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige (endliche oder unendliche) aber nicht leere Teilmenge. Dann nennen wir*

$$span(A) := \{\sum_{\nu=1}^{k} c_\nu \mathbf{a}_\nu : k \in \mathbb{N}, c_\nu \in \mathbb{R}, \mathbf{a}_\nu \in A\}$$

den von A aufgespannten Unterraum. *Die Elemente in $span(A)$ sind die endlichen* Linearkombinationen $\sum_1^k c_\nu \mathbf{a}_\nu$ *von Elementen $\mathbf{a}_\nu \in A$.*

Behauptung: $span(A)$ ist der kleinste lineare Unterraum von $\mathbb{R}$, der die Menge A enthält, d.h.:

(i): $span(A)$ ist ein linearer Unterraum,

(ii): jeder lineare Unterraum $U \subset \mathbb{R}^n$, der A enthält, enthält auch $span(A)$.

Beweis von (i): Seien $\mathbf{x} = \sum_1^k c_\mu \mathbf{a}_\mu$ und $\mathbf{y} = \sum_1^l d_\nu \mathbf{a}'_\nu$ Elemente in $span(A)$. Dann ist auch $s\mathbf{x} + t\mathbf{y} = \sum_1^k sc_\mu \mathbf{a}_\mu + \sum_1^l td_\nu \mathbf{a}'_\nu$ eine endliche Linearkombination von Vektoren $\mathbf{a}_\mu, \mathbf{a}'_\nu \in A$ und gehört zu $span(A)$.

Beweis von (ii): Enthält der lineare Unterraum $U \subset \mathbb{R}^n$ die Menge A, so wegen wiederholter Anwendung von (LIN) auch jede endliche Linearkombination von Vektoren aus A, und damit die Menge $span(A)$. □

Wir betrachten Spezialfälle von derart aufgespannten linearen Unterräumen. Für endliche Mengen $A = \{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k\}$ von Vektoren verwenden wir dabei immer die Abkürzung

$$span(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k) := span(\{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k\}).$$

1) Mit $\mathbf{e}_\nu \in \mathbb{R}^n$ werden wir stets den Vektor bezeichnen, der an der ν-ten Stelle den Eintrag 1 enthält und sonst lauter Nullen:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{e}_\nu & = & (& 0,...,0, & 1, & 0,...,0 &) \\ & & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ & & & 1 & \nu & n & \end{array}$$

Für $k = 1, ..., n$ ist dann

$$\begin{aligned} span(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_k) &= \{\mathbf{x} = \sum_1^k c_\nu \mathbf{e}_\nu\} \\ &= \{\mathbf{x} = (c_1, ..., c_k, 0, ..., 0)\} \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_{k+1} = ... = x_n = 0\}. \end{aligned}$$

2) Seien $\mathbf{v} \neq \mathbf{w}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \neq \mathbf{w}$ Vektoren im $\mathbb{R}^n$, so, dass $\mathbf{v} \notin \mathbb{R} \cdot \mathbf{w}$, d.h., dass die Gerade durch $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ den Nullpunkt nicht enthält. Dann heißt $span(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ die von $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ aufgespannte *Ebene*. Diese Ebene enthält die Gerade durch $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$, aber außerdem noch alle Vielfachen $t\mathbf{x}$ von Vektoren $\mathbf{x}$ auf dieser Geraden.

3) Wenn U_1 und $U_2 \subset \mathbb{R}^n$ zwei lineare Unterräume sind, so bezeichnet man mit $U_1 + U_2$ den linearen Unterraum $span(U_1 \cup U_2)$.

Mit diesem Begriff des aufgespannten Unterraums können wir die Lösbarkeitsbedingung für ein lineares Gleichungssystem

$$\sum_{\nu=1}^n a_{\mu,\nu} x_\nu = b_\mu, \quad \mu = 1, ..., m$$

anders formulieren: Wir bezeichnen mit $\mathbf{a}_\nu$ die *Spaltenvektoren* der Koeffizientenmatrix und mit $\mathbf{b}$ den Vektor auf der rechten Seite des Gleichungssystems:

$$\mathbf{a}_\nu = \begin{pmatrix} a_{1,\nu} \\ \vdots \\ a_{m,\nu} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Mit diesen Vektoren kann man das Gleichungssystem in Vektorschreibweise

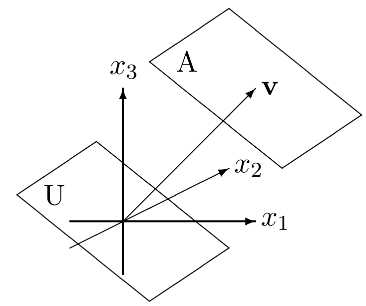
$$\sum_{\nu=1}^n x_\nu \mathbf{a}_\nu = \mathbf{b}$$

schreiben. Man sieht: *Das Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn die rechte Seite* $\mathbf{b}$ *eine Linearkombination der Spaltenvektoren* $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n$ *ist, d.h.,wenn*

$$\mathbf{b} \in span(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n).$$

Schließlich treffen wir noch eine Vereinbarung, die an dieser Stelle überperfektionistisch erscheinen mag: Wenn die Menge A leer ist, so vereinbaren wir $span(A)$ soll der Nullraum sein, d.h. der lineare Unterraum, welcher nur den Nullvektor enthält: $span\{\emptyset\} = \{\mathbf{0}\}$.

Manchmal bezeichnet man auch Lösungsmengen inhomogener Gleichungssysteme als lineare Unterräume. Diese besitzen dann natürlich nicht die Eigenschaft (LIN). Wir werden solche Mengen *affine Unterräume* nennen. Nach Satz 1.3 entsteht jeder affine Unterraum A aus einem linearen Unterraum U, indem man zu einem Vektor $\mathbf{v} \in A$ alle Vektoren aus U addiert:



$$A = \{\mathbf{x} = \mathbf{v} + \mathbf{u} : \mathbf{u} \in U\} =: \mathbf{v} + U$$

Es gibt lineare Unterräume verschiedener Größe:

$\{\mathbf{0}\}$	Gerade	Ebene	...
0–dimensional	1–dimensional	2–dimensional	...

Diese Größe nennt man *Dimension* eines linearen Unterraums. Sie wird im übernächsten Abschnitt präzise definiert werden.

Aufgabe 1.18 *Es seien* $U_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, 3, ...$, *lineare Unterräume des* $\mathbb{R}^n$. *Zeigen Sie, dass auch*

$$\bigcap_i U_i \subset \mathbb{R}^n$$

ein linearer Unterraum ist.

Aufgabe 1.19 *Betrachten Sie die acht Mengen von Vektoren* $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ *definiert durch die Bedingungen*

1) $x_1 + x_2 = 0$,
2) $(x_1)^2 + (x_2)^2 = 0$,
3) $(x_1)^2 - (x_2)^2 = 0$,
4) $x_1 - x_2 = 1$,
5) $(x_1)^2 + (x_2)^2 = 1$,
6) Es gibt ein $t \in \mathbb{R}$ *mit* $x_1 = t$ *und* $x_2 = t^2$,
7) Es gibt ein $t \in \mathbb{R}$ *mit* $x_1 = t^3$ *und* $x_2 = t^3$,
8) $x_1 \in \mathbb{Z}$.

Welche dieser Mengen sind lineare Unterräume?

Aufgabe 1.20 *Liegt der Vektor* $(3, -1, 0, -1) \in \mathbb{R}^4$ *im Unterraum, der von den Vektoren* $(2, -1, 3, 2)$, $(-1, 1, 1, -3)$ *und* $(1, 1, 9, -5)$ *aufgespannt wird?*

Aufgabe 1.21 *Es seien* $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ *lineare Unterräume. Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:*
1) Für jedes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *gibt es eindeutig bestimmte Vektoren* $\mathbf{u}_1 \in U_1$ *und* $\mathbf{u}_2 \in U_2$ *mit* $\mathbf{x} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$.
2) $U_1 + U_2 = \mathbb{R}^n$ *und* $U_1 \cap U_2 = \{\mathbf{0}\}$.

Aufgabe 1.22 *Zeigen Sie für beliebige Teilmengen* $A, B \subset \mathbb{R}^n$

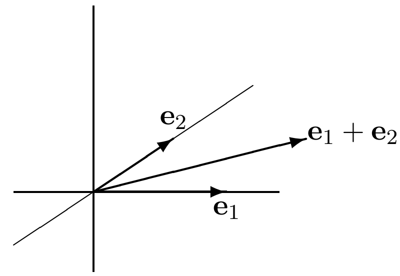
$$span(A \cup B) = span(A) + span(B).$$

1.4 Lineare (Un-) Abhängigkeit

Beispiel 1.14 *Die beiden Vektoren* $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$ *und* $\mathbf{e}_2 = (0,1,0) \in \mathbb{R}^3$ *spannen die Ebene* $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$ *auf. Dieselbe Ebene wird aber auch von den drei Vektoren*

$$\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = (1,1,0)$$

aufgespannt. Jeden dieser drei Vektoren könnte man weglassen, die restlichen beiden spannen diese Ebene immer noch auf. Wir sagen: Diese drei Vektoren sind linear abhängig.



Definition 1.2 *Eine Menge* $A \subset \mathbb{R}^n$ *heißt* linear abhängig, *wenn es eine echte Teilmenge* $A' \subset A$, $A' \neq A$ *gibt mit* $span(A') = span(A)$. *Sonst heißt* A linear unabhängig.

Wir stellen weitere, aufeinander aufbauende Beispiele zusammen, bis wir schließlich zu einem brauchbaren Test kommen, mit dem wir lineare (Un-) Abhängigkeit künftig testen.

Beispiel 1.15 *Die oben betrachtete Menge* $A = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\} \subset \mathbb{R}^3$ *ist linear abhängig, denn für* $A' = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} \subset A$ *gilt* $A' \neq A$ *und* $span(A') = span(A)$.

Beispiel 1.16 *Die Menge* $A = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ *enthält die folgenden echten Teilmengen:*
$A' = \{\mathbf{e}_1\}$ *mit* $span(\mathbf{e}_1) =$ *Gerade* $\mathbb{R} \cdot \mathbf{e}_1$,
$A' = \{\mathbf{e}_2\}$ *mit* $span(\mathbf{e}_2) =$ *Gerade* $\mathbb{R} \cdot \mathbf{e}_2$,
$A' = \emptyset$ *mit* $span(\emptyset) =$ *Nullraum.*
Für keine davon gilt $span(A') = span(A) =$ *Ebene* $\{x_3 = 0\}$. *Also ist die Menge* A *linear unabhängig.*

Beispiel 1.17 *Jede Menge, welche den Nullvektor enthält, ist linear abhängig, denn wenn* $\mathbf{0} \in A$ *und* $A' = A \setminus \{\mathbf{0}\}$, *dann ist* $A' \neq A$, *aber* $span(A') = span(A)$.

Beispiel 1.18 *Enthält* A *einen Vektor* $\mathbf{a}$ *mit* $\mathbf{a} \in span(A \setminus \{\mathbf{a}\})$, *dann ist* A *linear abhängig. Denn für* $A' := A \setminus \{\mathbf{a}\}$ *gilt* $A \neq A'$ *aber wegen* $\mathbf{a} = \sum_1^l d_j \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_j \in A'$

$$\begin{aligned} span(A) &= \{c_0 \mathbf{a} + \sum_1^k c_m \mathbf{b}_m : k \in \mathbb{N}, c_0, c_1, ..., c_k \in \mathbb{R}, \mathbf{b}_m \in A'\} \\ &= \{c_0 \sum_1^l d_j \mathbf{a}_j + \sum_1^k c_m \mathbf{b}_m : \mathbf{a}_j, \mathbf{b}_m \in A'\} \\ &\subset span(A'). \end{aligned}$$

Beispiel 1.19 *Wenn Vektoren* $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k \in A$ *existieren und Zahlen* $c_1, ..., c_k \in \mathbb{R}$ *mit*

$$\boxed{\sum_{m=1}^k c_m \mathbf{v}_m = \mathbf{0} \quad \text{aber} \quad (c_1, ..., c_k) \neq (0, ..., 0), \qquad (\text{nicht-triviale lineare Relation}),}$$

dann ist A linear abhängig. Denn weil nicht alle $c_m = 0$ sind, können wir nach Vertauschen der Indizes annehmen $c_1 \neq 0$ und dann schreiben

$$c_1\mathbf{v}_1 = -\sum_2^k c_m\mathbf{v}_m, \quad \mathbf{v}_1 = \sum_2^k -\frac{c_m}{c_1}\mathbf{v}_m \in A'$$

wo $A' := A \setminus \{\mathbf{v}_1\}$.

Diese Beispiele sollten zunächst den Sachverhalt der linearen Abhängigkeit anschaulich verdeutlichen. Das letzte Beispiel ist aber bereits kennzeichnend dafür, wie wir künftig lineare (Un-) Abhängigkeit überprüfen werden:

Satz 1.8 (Test auf lineare Abhängigkeit) *Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann linear abhängig, wenn es eine nichttriviale lineare Relation zwischen Vektoren aus A gibt.*

Satz 1.9 (Test auf lineare Unabhängigkeit) *Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann linear unabhängig, wenn sie folgende Eigenschaft besitzt:*

Sind $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$ endlich viele Vektoren in A und $c_1, ..., c_k$ Zahlen in $\mathbb{R}$ mit

$$\boxed{\sum_{m=1}^k c_m\mathbf{v}_m = \mathbf{0}}$$

dann ist $c_1 = ... = c_k = 0$.

Satz 1.9 ist nur eine Umformulierung von Satz 1.8. Deswegen genügt es, Satz 1.8 zu beweisen.

Beweis von Satz 1.8. „$\Leftarrow$ “ Diese Beweisrichtung wurde als Beispiel 1.19 angegeben.
„$\Rightarrow$ “ Sei A linear abhängig, d.h., es gebe eine Teilmenge $A' \subset A$ mit $span(A') = span(A)$ und $A' \neq A$. Dann gibt es also einen Vektor $\mathbf{v} \in A$, der nicht zu A' gehört. Wegen $\mathbf{v} \in A \subset span(A) = span(A')$ ist $\mathbf{v}$ eine Linearkombination $\mathbf{v} = \sum_1^k c_\nu\mathbf{v}_\nu$ von Vektoren $\mathbf{v}_\nu \in A'$. Dann ist

$$1 \cdot \mathbf{v} - \sum_1^k c_\nu\mathbf{v}_\nu = \mathbf{0}$$

eine nichttriviale (da der Koeffizient von $\mathbf{v}$ den Wert $1 \neq 0$ hat) lineare Relation zwischen Vektoren aus A. □

Noch zwei weitere Beispiele:

Beispiel 1.20 *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge, die mehr als n Vektoren enthält. Dann ist A linear abhängig.*

Beweis. A enthält mindestens $n+1$ Vektoren $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{n+1}$. Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} c_1 \cdot v_{1,1} & + & ... & + & c_{n+1} \cdot v_{n+1,1} & = & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ c_1 \cdot v_{1,n} & + & ... & + & c_{n+1} \cdot v_{n+1,n} & = & 0 \end{array}$$

aus n Gleichungen in den $n+1$ Unbekannten $c_1, ..., c_{n+1}$ hat nach Satz 1.2 eine Lösung $(c_1, ..., c_{n+1}) \neq (0, ..., 0)$. Damit haben wir eine nichttriviale lineare Relation zwischen den Vektoren $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{n+1}$. Nach Satz 1.8 ist A linear abhängig. □

Beispiel 1.21 *Es seien*

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{v}_1 & = & (0,..0, \ 1,** \quad .... \quad ...) \\ \mathbf{v}_2 & = & (0,... \quad ....0, \ 1,** \quad ...) \\ & & \\ \mathbf{v}_r & = & (0,... \quad ..... \quad ...0, \ 1,**) \end{array}$$

die Zeilenvektoren aus einer Matrix in Zeilenstufenform. Diese Vektoren sind linear unabhängig.

Beweis. Der Vektor $\mathbf{v}_k$ *habe seinen ersten Eintrag* $\neq 0$ *in der* n_k*–ten Spalte,* $k = 1, ..., r$*. Da die Matrix Zeilenstufenform hat, ist*

$$1 \leq n_1 < n_2 < ... < n_r \leq n.$$

Wir testen auf lineare Unabhängigkeit: sei eine Linearkombination $\sum_1^r c_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ *gegeben. Da nur der erste Vektor* $\mathbf{v}_1$ *in der* n_1*–ten Spalte einen Eintrag* $\neq 0$ *besitzt, folgt hieraus* $c_1 = 0$*. Von den übrigen Vektoren hat nur* $\mathbf{v}_2$ *einen Eintrag* $\neq 0$ *in der* n_2*–ten Spalte, was* $c_2 = 0$ *zur Folge hat, usw...* □

Gelegentlich haben wir es nicht mit einer *Menge* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ...\}$ von Vektoren zu tun, sondern mit einer *Folge* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ...$, in der etwa Vektoren auch mehrmals vorkommen können. Eine solche (endliche oder unendliche) Folge werden wir auch *System* von Vektoren nennen. Die Spaltenvektoren einer Matrix sind z.B. so ein System. Der Test auf lineare Unabhängigkeit für ein System ist:

$$\sum_1^k c_\nu \mathbf{v}_\nu = \mathbf{0} \quad \Rightarrow c_1 = ... = c_k = 0 \quad ?$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Ein System, in dem derselbe Vektor mehrmals vorkommt, ist stets linear abhängig.

Aufgabe 1.23 *Sind die vier Vektoren*

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_4 = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^4$ *linear abhängig oder linear unabhängig?*

Aufgabe 1.24 *Im* $\mathbb{R}^3$ *seien die Vektoren*

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Welche der folgenden Mengen sind linear unabhängig?
a) $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$*, b)* $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$*, c)* $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$.

Aufgabe 1.25 *Welche der folgenden vier Tripel von Vektoren im* $\mathbb{R}^3$ *sind linear unabhängig, welche sind linear abhängig?*
a) $(1,1,1)$, $(1,1,0)$, $(1,0,0)$*;*
b) $(1,1,1)$, $(1,2,1)$, $(0,2,0)$*;*
c) $(1,1,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,-1)$*;*
d) $(1,2,3)$, $(4,5,6)$, $(7,8,9)$.

Aufgabe 1.26 *Aus den Zeilenvektoren der Matrix*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 0 \\ 9 & 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

lassen sich 15 verschiedene, nichtleere Mengen von Vektoren bilden. Welche dieser 15 Mengen sind linear abhängig?

Aufgabe 1.27 *Auch aus den Spaltenvektoren der Matrix in der vorhergehenden Aufgabe lassen sich 15 verschiedene, nichtleere Mengen von Vektoren bilden. Welche dieser 15 Mengen sind linear abhängig?*

1.5 Basis und Dimension

Wir beginnen gleich mit einer ganz zentralen Definition der linearen Algebra.

Definition 1.3 *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *ein linearer Unterraum. Eine* Basis *von* U *ist ein System* $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_r$ *von Vektoren aus* U *mit*

(i) $U = span(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_r)$,

(ii) $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_r$ *sind linear unabhängig.*

Die Zahl r *heißt* Länge der Basis.

Beispiel 1.22 *Für eine Gerade* $\mathbb{R} \cdot \mathbf{v}$ *bildet der Vektor* $\mathbf{v}$ *eine Basis.*

Eine Basis für eine Ebene $\mathbb{R} \cdot \mathbf{v} + \mathbb{R} \cdot \mathbf{w}$ *bilden die Vektoren* $\mathbf{v}$ *und* $\mathbf{w}$.

Die Vektoren $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$, *bilden eine Basis des* $\mathbb{R}^n$. *Wir nennen sie die* Standardbasis, *die Vektoren nennen wir* Koordinatenvektoren.

Der Nullvektorraum $\{\mathbf{0}\}$ *hat die leere Menge* $\emptyset$ *als Basis.*

Satz 1.10 (Basis-Satz) *Jeder lineare Unterraum* $U \subset \mathbb{R}^n$ *hat eine Basis.*

Dies ist ein Spezialfall ($V = \{\mathbf{0}\}$) des folgenden Satzes 1.11, sodass wir nur diesen Satz 1.11 zu beweisen brauchen.

Satz 1.11 (Basis-Ergänzungs-Satz) *Es seien* $V \subset U \subset \mathbb{R}^n$ *lineare Unterräume und* $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_r$ *sei eine Basis von* V. *Dann gibt es Vektoren* $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_s \in U$ *so, dass* $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_r, \mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_s$ *eine Basis von* U *bilden.*

Beweis. Wenn $U = V$ ist, dann ist nichts zu beweisen ($s = 0$). Wenn $U \neq V$ ist, dann existiert ein $\mathbf{u} \in U$, das nicht $\in V$ ist. Wir behaupten, das System $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_r, \mathbf{u}$ ist linear unabhängig und verwenden zum Beweis dieser Behauptung den Test aus Satz 1.9. Sei also

$$\sum_1^r c_\nu \mathbf{v}_\nu + c\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

eine lineare Relation. Dann muss $c = 0$ gelten, denn sonst würde $\mathbf{u} = -\frac{1}{c}\sum c_\nu \mathbf{v}_\nu$ zu V gehören. Weil nun $c = 0$ ist, lautet die lineare Relation nur noch

$$\sum_1^r c_\nu \mathbf{v}_\nu = \mathbf{0}.$$

Da $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_r$ eine Basis von V bilden, sind sie linear unabhängig. Deswegen folgt jetzt auch $c_1 = ... = c_r = 0$ und $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_r, \mathbf{u}$ sind linear unabhängig.

Wir setzen $\mathbf{u}_1 := \mathbf{u}$ und $U_1 := span(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_r, \mathbf{u}_1)$. Dann bilden die Vektoren $\mathbf{v}_1 ..., \mathbf{v}_r, \mathbf{u}_1$ eine Basis von U_1. (Sie sind ja linear unabhängig und spannen U_1 auf.) Wenn $U_1 = U$ ist, dann sind wir fertig. Andernfalls wiederholen wir diese Konstruktion immer wieder. So erhalten wir für alle $k \geq 1$ Untervektorräume $U_k \subset U$ mit einer Basis $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_r, \mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k$. Spätestens wenn $r+k = n+1$ ist, können die $n+1$ Vektoren $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_r, \mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k$ nicht mehr linear unabhängig sein (obiges Beispiel 1.20). Es muss also vorher schon einmal ein $k = s$ gegeben haben mit $U_s = U$. □

Satz 1.12 (Basis-Auswahl-Satz) *Sei $U = span(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k) \subset \mathbb{R}^n$ ein linearer Unterraum. Dann gibt es unter den Vektoren $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$ eine Basis $\mathbf{v}_{i_1}, ..., \mathbf{v}_{i_r}$ für U.*

Beweis. Wenn $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$ linear unabhängig sind, dann bilden sie eine Basis von U und wir sind fertig. Andernfalls gibt es unter ihnen einen Vektor $\mathbf{v}_j$ der eine Linearkombination $\sum_{i\neq j} c_i \mathbf{v}_i$ der anderen Vektoren ist. Dann wird U auch schon von den $k-1$ Vektoren $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{j-1}, \mathbf{v}_{j+1}, ..., \mathbf{v}_k$ aufgespannt. Wir lassen diesen Vektor $\mathbf{v}_j$ einfach weg. Spätestens nachdem wir diesen Schritt $k-1$–mal wiederholt haben, gelangen wir zu einem linear unabhängigen Teilsystem der $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$, welches U aufspannt. □

Satz 1.13 (Invarianz der Basis-Länge) *Die Länge einer Basis für einen linearen Unterraum $U \subset \mathbb{R}^n$ hängt nur von U ab und nicht von der gewählten Basis.*

Beweis. Seien $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_r$ und $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_s$ zwei Basen für U. Wir haben $s \leq r$ zu zeigen. (Weil die Voraussetzung symmetrisch in r und s ist, folgt dann auch $r \leq s$ und damit $r = s$.) Da $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_r$ den Unterraum U aufspannen, ist jedes $\mathbf{u}_\sigma, 1 \leq \sigma \leq s$, eine Linearkombination $\mathbf{u}_\sigma = \sum_{\nu=1}^r c_{\sigma,\nu} \mathbf{v}_\nu$. Das lineare Gleichungssystem (vertauschte Indizes!)

$$\sum_{\sigma=1}^s c_{\sigma,\nu} x_\sigma = 0, \qquad (\nu = 1, ..., r)$$

hat s Unbekannte und r Zeilen. Wenn $s > r$ sein sollte, so gibt es eine Lösung $(x_1, ..., x_s) \neq (0, ..., 0)$ für dieses Gleichungssystem (Satz 1.2). Es folgt

$$\sum_{\sigma=1}^s x_\sigma \mathbf{u}_\sigma = \sum_{\sigma=1}^s x_\sigma (\sum_{\nu=1}^r c_{\sigma,\nu} \mathbf{v}_\nu) = \sum_{\nu=1}^r (\sum_{\sigma=1}^s x_\sigma c_{\sigma,\nu}) \mathbf{v}_\nu = \sum_{\nu=1}^r 0 \cdot \mathbf{v}_\nu = \mathbf{0}.$$

Also sind $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_s$ linear abhängig. Weil sie eine Basis sind, ist dies unmöglich und es muss $s \leq r$ gewesen sein. □

Die Sätze 1.10 und 1.13 ermöglichen folgende Definition:

Definition 1.4 *Die* Dimension *eines linearen Unterraums $U \subset \mathbb{R}^n$ - in Zeichen $dim(U)$ - ist die Länge einer Basis von U.*

Beispiel 1.23 *Da $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$ eine Basis bilden ist $dim(\mathbb{R}^n) = n$.*

Beispiel 1.24 *Der* Zeilenrang *einer $(m \times n)$-Matrix ist die Dimension des von ihren Zeilenvektoren im $\mathbb{R}^n$ aufgespannten linearen Unterraums. Dieser Zeilenrang ändert sich nicht bei elementaren Zeilenumformungen. Bei Umformungen vom Typ I und II ist dies klar. Bei Typ III sieht man es wie folgt ein:*

Die Zeilenvektoren seien $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_m$ und $\mathbf{v}'_k := \mathbf{v}_k + c \cdot \mathbf{v}_l, k \neq l$, sei eine derartige Zeilenumformung. Sei $U := span(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_m) \subset \mathbb{R}^n$ und $U' := span(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}'_k, \mathbf{v}_{k+1}, ..., \mathbf{v}_m)$. Wegen $\mathbf{v}'_k \in U$ ist $U' \subset U$. Wegen $\mathbf{v}_k = \mathbf{v}'_k - c \cdot \mathbf{v}_l$ ist auch $U \subset U'$.

Folglich ändert sich der Zeilenrang auch nicht, wenn wir eine Matrix durch elementare Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform bringen. Bei einer Matrix in Zeilenstufenform ist der Zeilenrang gerade die Anzahl der Stufen. Wir könnten den Zeilenrang einer Matrix also auch definieren als die Anzahl der Zeilen $\neq 0$ in ihrer Zeilenstufenform.

Beispiel 1.25 *Natürlich kann man analog den* Spaltenrang einer Matrix *als die Dimension des Vektorraums definieren, der von den Spaltenvektoren der Matrix aufgespannt wird.*

Satz 1.14 (Dimensionsformeln) *(i) Es seien $U_1 \subset U_2 \subset \mathbb{R}^n$ lineare Unterräume. Dann gilt $dim(U_1) \leq dim(U_2)$ und $dim(U_1) = dim(U_2)$ nur dann, wenn $U_1 = U_2$.*

(ii) Für je zwei lineare Unterräume $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$dim(U_1 \cap U_2) + dim(U_1 + U_2) = dim(U_1) + dim(U_2).$$

Beweis. (i): Ist $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_r$ eine Basis von U_1, so kann man sie nach dem Basis–Ergänzungssatz zu einer Basis $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1}, ..., \mathbf{v}_{r+s}$ ergänzen. Es folgt $dim(U_1) = r \leq r + s = dim(U_2)$ und $dim(U_1) = dim(U_2)$ nur dann, wenn $s = 0$, d.h. $U_1 = U_2$.

(ii): Sei $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_d$ eine Basis von $U_1 \cap U_2$. Wir ergänzen sie zu einer Basis $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_d, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_r$ von U_1 und einer Basis $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_d, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_s$ von U_2. Wir testen das System $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_d, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_r, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_s$ auf lineare Unabhängigkeit: sei etwa die lineare Relation

$$\underbrace{a_1\mathbf{u}_1 + ... + a_d\mathbf{u}_d + b_1\mathbf{v}_1 + ... + b_r\mathbf{v}_r}_{\in U_1} + \underbrace{c_1\mathbf{w}_1 + ... + c_s\mathbf{w}_s}_{\in U_2} = \mathbf{0}$$

zwischen diesen Vektoren vorgelegt. Dann ist

$$c_1\mathbf{w}_1 + ... + c_s\mathbf{w}_s = -(a_1\mathbf{u}_1 + ... + a_d\mathbf{u}_d + b_1\mathbf{v}_1 + ... + b_r\mathbf{v}_r) \in (U_1 \cap U_2),$$

also

$$c_1\mathbf{w}_1 + ... + c_s\mathbf{w}_s = \alpha_1\mathbf{u}_1 + ... + \alpha_d\mathbf{u}_d \text{ mit } \alpha_1, ..., \alpha_d \in \mathbb{R}.$$

Da aber $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_d, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_s$ linear unabhängig waren, folgt hieraus $c_1 = ... = c_s = 0$. Ganz analog folgt $b_1 = ... = b_r = 0$, sodass die lineare Relation schließlich $a_1\mathbf{u}_1 + ... + a_d\mathbf{u}_d = 0$ lautet. Hieraus folgt dann schließlich noch $a_1 = ... = a_d = 0$.

Da $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_d, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_r, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_s$ den Unterraum $U_1 + U_2$ aufspannen, haben wir bewiesen, dass sie eine Basis von $U_1 + U_2$ bilden. Somit ist

$$\begin{array}{ll} dim(U_1) = d + r & dim(U_2) = d + s \\ dim(U_1 \cap U_2) = d & dim(U_1 + U_2) = d + r + s \\ dim(U_1) + dim(U_2) = 2d + r + s & dim(U_1 \cap U_2) + dim(U_1 + U_2) = 2d + r + s. \end{array}$$

Damit ist Formel (ii) bewiesen □

Wir wenden unseren Dimensionsbegriff jetzt noch auf lineare Gleichungssysteme an:

Satz 1.15 *Es sei ein homogenes lineares Gleichungssystem*

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu,\nu} x_\nu = 0, \qquad (\mu = 1, ..., m)$$

mit n Unbekannten vorgelegt. Für die Zahlen

$$\begin{array}{lcl} d & := & \textit{Dimension des Lösungsraums} \\ r & := & \textit{Zeilenrang der Koeffizientenmatrix} \end{array}$$

gilt dann die Beziehung

$$\boxed{d + r = n}$$

Beweis. Bei elementaren Zeilenumformungen der Koeffizientenmatrix ändern sich weder d noch r. Wir können daher o.B.d.A. annehmen, die Koeffizientenmatrix habe Zeilenstufenform. Die Zahl der Stufen ist dann r. Es gibt also $n - r$ Spalten ohne Stufe in der Koeffizientenmatrix. An diesen $n - r$ Stellen können die Unbekannten beliebig gewählt werden, die anderen r werden daraus dann berechnet. Eine Basis für den Lösungsraum erhalten wir, wenn wir in jeder dieser $n - r$ Spalten eine 1, in den anderen eine 0 vorgeben. Deswegen hat der Lösungsraum die Dimension $n - r$. □

Satz 1.16 (Genau so viele Gleichungen wie Unbekannte) *Für ein lineares Gleichungssystem*

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu,\nu} x_\nu = b_\nu, \qquad (\mu = 1, ..., n)$$

sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) Bei **jeder** *Wahl der $b_1, ..., b_n$ auf der rechten Seite ist das Gleichungssystem lösbar.*

(ii) Bei **jeder** *Wahl der $b_1, ..., b_n$ auf der rechten Seite gibt es eine* **einzige** *Lösung des Systems.*

(iii) Das zugehörige homogene System

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu,\nu} x_\nu = 0, \qquad (\mu = 1, ..., n)$$

hat nur die Null-Lösung $x_1 = ... = x_n = 0$.

(iv) Der Spaltenrang der Koeffizientenmatrix ist n.

(v) Der Zeilenrang der Koeffizientenmatrix ist n.

Beweis. Eigenschaft (i) ist damit äquivalent, dass die Spaltenvektoren der Koeffizientenmatrix den ganzen Vektorraum $\mathbb{R}^n$ aufspannen. Dies ist damit äquivalent, dass die Koeffizientenmatrix den Spaltenrang n besitzt (iv). Wegen Satz 1.14 (i) ist dies damit äquivalent, dass Spaltenvektoren linear unabhängig sind. Eigenschaft (iii) ist aber nichts anderes als der Test auf lineare Unabhängigkeit für die Spaltenvektoren.

Eigenschaft (ii) ist äquivalent mit (i) und (iii) zusammen. Wegen Satz 1.15 ist (iii) äquivalent mit (v). □

Auch für affine Unterräume $A = \mathbf{a} + U \subset \mathbb{R}^n$, wo $U \subset \mathbb{R}^n$ ein linearer Unterraum ist, ist die Dimension definiert. Man setzt $dim(A) := dim(U)$.

Aufgabe 1.28 *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein k-dimensionaler Untervektorraum. Zeigen Sie, dass für jede Teilmenge $M \subset U$ die folgenden Eigenschaften äquivalent sind:*
1) M ist eine Basis von U,
2) M ist linear unabhängig und besteht aus k Vektoren,
3) M spannt U auf und besteht aus k Vektoren.

Aufgabe 1.29 *Berechnen Sie den Zeilenrang der Matrizen*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 10 \\ 3 & 6 & 10 & 15 \\ 6 & 10 & 15 & 21 \\ 10 & 15 & 21 & 28 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 10 \\ 3 & 6 & 10 & 1 \\ 6 & 10 & 1 & 3 \\ 10 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 1.30 *Es seien*

$$\begin{aligned} U &:= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 2x_2 = x_3 + 2x_4\}, \\ V &:= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_2 + x_3 + x_4\}. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie Basen von $U, V, U \cap V$ und $U + V$.

Aufgabe 1.31 *Gegeben sei die reelle 4×4-Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Basis für den Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems mit Koeffizientenmatrix A.

Aufgabe 1.32 *Es sei U der von $(1,2,3)$ und $(4,5,6)$, sowie V der von $(2,1,2)$ und $(1,2,0)$ aufgespannte Unterraum des $\mathbb{R}^3$. Man bestimme eine Basis von $U \cap V$.*

Aufgabe 1.33 *Es seien $U, V, W \subset \mathbb{R}^n$ lineare Unterräume. Beweisen oder widerlegen Sie die Formeln*

$$\begin{aligned} dim(U \cap (V + W)) &= dim(U \cap V) + dim(U \cap W) - dim(U \cap V \cap W), \\ dim(U + V + W) &= dim(U + V) + dim(U + W) - dim(U + (V \cap W)). \end{aligned}$$

Aufgabe 1.34 *Im $\mathbb{R}^4$ seien die Unterräume*

$$U_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad U_2 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Man berechne eine Basis von $U_1 \cap U_2$.

Aufgabe 1.35 *Im $\mathbb{R}^4$ seien die folgenden Punktmengen gegeben:*

$$\begin{aligned} E_1 &= \{\mathbf{x}: x_1+x_2+x_3+x_4 = x_1+2x_2+3x_3+4x_4 = 0\}, \\ E_2 &= \{\mathbf{x}: 5x_1+8x_2+11x_3+14x_4 = 2x_1+5x_2+8x_3+11x_4 = 0\}. \end{aligned}$$

Man zeige:
a) E_1 und E_2 sind zweidimensionale Unterräume des $\mathbb{R}^4$;
b) $E_1 = E_2$.

Aufgabe 1.36 *Gegeben seien die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ und der Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ durch*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 8 \\ -1 & 3 & \alpha-3 & -12 \\ 2 & \alpha & 6 & \alpha^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hierbei ist $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4.$$

a) Geben Sie für $\alpha = -3$ die Lösungsmenge des Gleichungssystems an.
b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist das Gleichungssystem lösbar? Bestimmen Sie für diese α die Dimension des Lösungsraums.

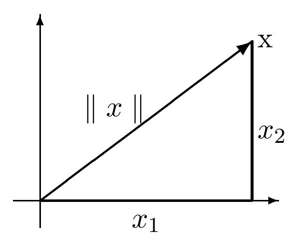
1.6 Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$

Wir erinnern uns zunächst an den elementargeometrischen Begriff der Länge in $n = 1, 2$ und 3 Dimensionen:
n=1: Für $x \in \mathbb{R}$ ist $|x| := \sqrt{x^2}$ der *Betrag* der Zahl x.

n=2: Die Länge eines Vektors $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ist

$$\| \mathbf{x} \| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

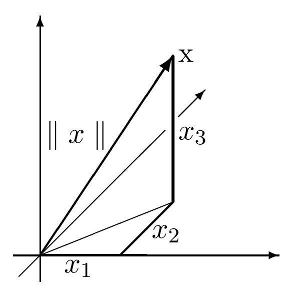
Dies ist der Inhalt des elementargeometrischen Satzes von Pythagoras.



n=3: Die Länge eines Vektors $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2$ ist

$$\| \mathbf{x} \| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Dies ergibt sich nach zweimaligem Anwenden des Pythagoras.



Es liegt nahe, wie dieser Längenbegriff auf Vektoren in beliebiger Dimension zu verallgemeinern ist:

Definition 1.5 *Sei* $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. *Dann heißt*

$$\| \mathbf{x} \| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$$

die Länge *oder die* Norm *von* $\mathbf{x}$.

Auch für den quadratischen Ausdruck unter der Wurzel führen wir eine eigene Notation ein:

Definition 1.6 *Seien* $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ *und* $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_n)$ *Vektoren im Zahlenraum* $\mathbb{R}^n$. *Dann heißt*

$$(\mathbf{x}.\mathbf{y}) := \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \cdot y_\nu$$

das Skalarprodukt *von* $\mathbf{x}$ *mit* $\mathbf{y}$.

Mit dieser Definition des Skalarprodukts gilt also

$$\| \mathbf{x} \| = \sqrt{(\mathbf{x}.\mathbf{x})}.$$

Das Skalarprodukt $(\mathbf{x}.\mathbf{y})$ und die Norm $\| \mathbf{x} \| = \sqrt{(\mathbf{x}.\mathbf{x})}$ haben folgende Eigenschaften:

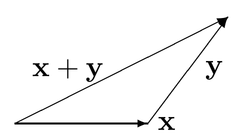
i) Es ist stets $\| \mathbf{x} \| \geq 0$ und $\| \mathbf{x} \| = 0$ nur dann, wenn $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Für $c \in \mathbb{R}$ ist $\| c\mathbf{x} \| = |c| \cdot \| \mathbf{x} \|$.

ii) *Bi–Linearität:* $\begin{cases} ((c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2).\mathbf{y}) = c_1(\mathbf{x}_1.\mathbf{y}) + c_2(\mathbf{x}_2.\mathbf{y}) & (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, c_1, c_2 \in \mathbb{R}) \\ (\mathbf{x}.(c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2)) = c_1(\mathbf{x}.\mathbf{y}_1) + c_2(\mathbf{x}.\mathbf{y}_2) & (\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbb{R}^n, c_1, c_2 \in \mathbb{R}) \end{cases}$

iii) *Symmetrie:* $(\mathbf{x}.\mathbf{y}) = (\mathbf{y}.\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n)$.

iv) *Cauchy–Schwarz–Ungleichung:* $|(\mathbf{x}.\mathbf{y})| \leq \| \mathbf{x} \| \cdot \| \mathbf{y} \|$ (C.S.U.)

v) Dreiecksungleichung: $\| \mathbf{x} + \mathbf{y} \| \leq \| \mathbf{x} \| + \| \mathbf{y} \|$.



Die Eigenschaften i) bis iii) sind unmittelbar einsichtig.
Beweis der Cauchy–Schwarz–Ungleichung: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ ist

$$0 \leq \| a\mathbf{x} - b\mathbf{y} \|^2 = (a\mathbf{x} - b\mathbf{y} \,.\, a\mathbf{x} - b\mathbf{y}) = a^2 \| \mathbf{x} \|^2 - 2ab(\mathbf{x}.\mathbf{y}) + b^2 \| \mathbf{y} \|^2,$$

oder, äquivalent damit

$$2ab(\mathbf{x}.\mathbf{y}) \leq a^2 \| \mathbf{x} \|^2 + b^2 \| \mathbf{y} \|^2 .$$

Setzen wir z.B. $a = \| \mathbf{y} \|$ und $b = \| \mathbf{x} \|$, so erhalten wir

$$2 \| \mathbf{x} \| \cdot \| \mathbf{y} \| \cdot (\mathbf{x}.\mathbf{y}) \leq 2 \cdot \| \mathbf{x} \|^2 \cdot \| \mathbf{y} \|^2 .$$

Da die Behauptung für $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ oder $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ richtig ist, können wir o.B.d.A. $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \neq \mathbf{y}$ annehmen. Dann dürfen wir in der letzten Gleichung kürzen und erhalten

$$(\mathbf{x}.\mathbf{y}) \leq \| \mathbf{x} \| \cdot \| \mathbf{y} \| .$$

Für $-\mathbf{x}$ statt $\mathbf{x}$ gilt dieselbe Ungleichung, sodass also auch

$$-(\mathbf{x}.\mathbf{y}) = (-\mathbf{x}.\mathbf{y}) \leq \| \mathbf{x} \| \cdot \| \mathbf{y} \|$$

gilt. Daraus folgt schließlich

$$|(\mathbf{x}.\mathbf{y})| = max\{(\mathbf{x}.\mathbf{y}),\ -(\mathbf{x}.\mathbf{y})\} \leq \parallel \mathbf{x} \parallel \cdot \parallel \mathbf{y} \parallel .$$

Beweis der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} \parallel \mathbf{x}+\mathbf{y} \parallel^2 &= (\mathbf{x}+\mathbf{y}.\mathbf{x}+\mathbf{y}) \\ &= \parallel \mathbf{x} \parallel^2 + 2(\mathbf{x}.\mathbf{y}) + \parallel \mathbf{y} \parallel^2 \\ &\leq \parallel \mathbf{x} \parallel^2 + 2 \parallel \mathbf{x} \parallel \cdot \parallel \mathbf{y} \parallel + \parallel \mathbf{y} \parallel^2 \\ &= (\parallel \mathbf{x} \parallel + \parallel \mathbf{y} \parallel)^2. \end{aligned}$$

Damit haben wir die Dreiecksungleichung in quadrierter Form bewiesen. Wir müssen auf beiden Seiten noch die Wurzel ziehen. Dabei bleibt die Ungleichung erhalten, weil die Quadratwurzel eine monoton wachsende Funktion ist. □

Nicht nur die Norm eines Vektors, auch das Skalarprodukt zweier Vektoren hat eine geometrische Bedeutung. Dazu betrachten wir zwei Einheitsvektoren (= Vektoren der Länge 1) im $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (cos(\alpha), sin(\alpha)) \\ \mathbf{y} &= (cos(\beta), sin(\beta)) \\ (\mathbf{x}.\mathbf{y}) &= cos(\alpha)cos(\beta) + sin(\alpha)sin(\beta) \\ &= cos(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

Aus dem Additionstheorem für die *cos*-Funktion folgt also, dass das Skalarprodukt $(\mathbf{x}.\mathbf{y})$ zweier Einheitsvektoren der Cosinus des Winkels zwischen beiden Vektoren ist. Für zwei beliebige Vektoren $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \neq \mathbf{y}$ definieren wir zunächst die Einheitsvektoren

$$\hat{\mathbf{x}} := \frac{1}{\parallel \mathbf{x} \parallel}\mathbf{x}, \qquad \hat{\mathbf{y}} := \frac{1}{\parallel \mathbf{y} \parallel}\mathbf{y}$$

und erhalten dann für den Cosinus des Winkels zwischen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$

$$(\hat{\mathbf{x}}.\hat{\mathbf{y}}) = \frac{(\mathbf{x}.\mathbf{y})}{\parallel \mathbf{x} \parallel \cdot \parallel \mathbf{y} \parallel}.$$

Dies nehmen wir zum Anlass für die entsprechende Definition im $\mathbb{R}^n$:

Definition 1.7 *Seien* $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \neq \mathbf{y}$ *Vektoren im* $\mathbb{R}^n$. *Aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt*

$$-1 \leq \frac{(\mathbf{x}.\mathbf{y})}{\parallel \mathbf{x} \parallel \cdot \parallel \mathbf{y} \parallel} \leq 1.$$

Da die Cosinus-Funktion das Intervall $[0, \pi]$ *bijektiv auf das Intervall* $[-1, 1]$ *abbildet, gibt es genau einen Winkel* $\alpha \in \mathbb{R}$ *mit*

$$cos(\alpha) = \frac{(\mathbf{x}.\mathbf{y})}{\parallel \mathbf{x} \parallel \cdot \parallel \mathbf{y} \parallel}, \qquad 0 \leq \alpha \leq \pi.$$

Wir nennen diesen Winkel α *den* Winkel zwischen den Vektoren $\mathbf{x}$ *und* $\mathbf{y}$. *(Dieser Winkel hat kein Vorzeichen! Er hängt nicht von der Reihenfolge der Vektoren* $\mathbf{x}$ *und* $\mathbf{y}$ *ab.)*

Hier haben wir ziemlich großzügigen Gebrauch von den Eigenschaften der Cosinus-Funktion aus Analysis I gemacht. Die Beziehung zwischen Skalarprodukt und Cosinus des Zwischenwinkels ist für Verständnis und Anwendungen von großer Bedeutung. Im weiteren Aufbau der Linearen Algebra werden wir für Systematik und für Beweise keinen Gebrauch von dieser Tatsache machen, sondern nur, um den Bezug zur Anschauung aufrecht zu erhalten. In diesem Sinn dürfte unsere Anleihe bei der Vorlesung Analysis erlaubt sein.

Definition 1.8 *Zwei Vektoren* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *heißen* orthogonal *oder* senkrecht aufeinander*, in Zeichen* $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$*, wenn sie den Winkel* $\frac{\pi}{2}$ *einschließen, also wenn* $(\mathbf{x}.\mathbf{y}) = 0$ *ist. (Hier ist auch* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *oder* $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ *zugelassen.)*

Satz 1.17 ((n-dimensionaler Pythagoras) *Es seien* $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_r \in \mathbb{R}^n$ *Vektoren, die paarweise aufeinander senkrecht stehen:*

$$(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_l) = 0 \text{ für alle } k \neq l.$$

Dann gilt

$$\| \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + ... + \mathbf{v}_r \|^2 = \| \mathbf{v}_1 \|^2 + \| \mathbf{v}_2 \|^2 + ... + \| \mathbf{v}_r \|^2 .$$

Beweis. Aus der Voraussetzung folgt, dass die linke Seite gleich

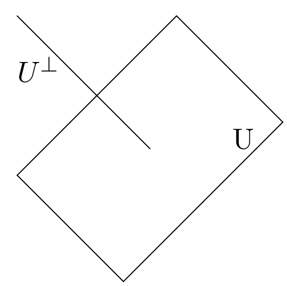
$$(\mathbf{v}_1 + ... + \mathbf{v}_r \,.\, \mathbf{v}_1 + ... + \mathbf{v}_r) = \sum_{k,l=1}^{r} (\mathbf{v}_k.\mathbf{v}_l) = \sum_{k=1}^{r} (\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k)$$

ist. □

Definition 1.9 *Ist* $A \subset \mathbb{R}^n$ *eine beliebige Menge, so sei*

$$A^\perp := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : (\mathbf{x}.\mathbf{a}) = 0 \text{ für alle } \mathbf{a} \in A\}$$

die Menge der Vektoren $\mathbf{x}$*, die auf allen Vektoren aus* A *senkrecht stehen. Ist insbesondere* $A = U \subset \mathbb{R}^n$ *ein linearer Unterraum, so nennen wir* $U^\perp$ *das* orthogonale Komplement *zu* U *in* $\mathbb{R}^n$.



Beispiel 1.26 *Sei* A *eine Gerade im* $\mathbb{R}^2$*, etwa*

$$L = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0\}.$$

Diese Gerade wird aufgespannt vom Vektor $\mathbf{b} = (-a_2, a_1)$*. Auf dem Vektor* $\mathbf{b}$ *steht der Vektor* $\mathbf{a} := (a_1, a_2)$ *senkrecht.* $\mathbf{a}$ *steht dann auch auf allen Vektoren* $t \cdot \mathbf{b} \in L$ *senkrecht und es folgt, dass* $L^\perp$ *die von* $\mathbf{a}$ *aufgespannte Gerade ist.*

Beispiel 1.27 *Sei* $A = \{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m\}$ *eine endliche Menge. Dann ist also*

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in A^\perp \quad &\Leftrightarrow \quad (\mathbf{a}_1.\mathbf{x}) = ... = (\mathbf{a}_m.\mathbf{x}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \sum_{\nu=1}^{n} a_{1,\nu} x_\nu = ... = \sum_{\nu=1}^{n} a_{m,\nu} x_\nu = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu,\nu} x_\nu = 0 \qquad \text{für} \qquad \mu = 1, ..., m \end{aligned}$$

Die Vektoren $\mathbf{x} \in \{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m\}^\perp$ *sind also genau die Lösungen des linearen Gleichungssystems, dessen Koeffizientenmatrix aus den Zeilenvektoren* $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m$ *zusammengesetzt ist. Satz 1.13 zeigt in dieser Situation:* $dim\{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m\}^\perp = n - dim\, span(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m)$.

Beispiel 1.28 *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *ein linearer Unterraum mit Basis* $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_m$*. Dann ist*

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} \in U^\perp \quad &\Leftrightarrow \quad (\mathbf{x}.\mathbf{u}) = 0 \text{ für alle } \mathbf{u} \in U \\
&\Leftrightarrow \quad (\mathbf{x}. \sum_{k=1}^m c_k \mathbf{u}_k) = \sum_{k=1}^m c_k (\mathbf{x}.\mathbf{u}_k) = 0 \qquad \text{für alle} \qquad c_1, ..., c_m \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \quad (\mathbf{x}.\mathbf{u}_k) = 0 \qquad \text{für alle} \qquad k = 1, ..., m \\
&\Leftrightarrow \quad \mathbf{x} \in \{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_m\}^\perp
\end{aligned}$$

Der Unterraum $U^\perp$ *hat also die Dimension* $n - m$.

Satz 1.18 *Für jeden linearen Unterraum* $U \subset \mathbb{R}^n$ *gilt*
(i) $(U^\perp)^\perp = U$,
(ii) $U \cap U^\perp = \{\mathbf{0}\}$,
(iii) $U + U^\perp = \mathbb{R}^n$.

Beweis. (i): Da $\mathbf{x} \perp \mathbf{u}$ genau dann gilt, wenn $\mathbf{u} \perp \mathbf{x}$, ist $U \subset (U^\perp)^\perp$. Nach obigem Beispiel 1.28 haben wir aber $dim(U^\perp)^\perp = n - (n - dimU) = dimU$. Nun folgt $U = (U^\perp)^\perp$ aus Satz 1.14 (i).

(ii): Wenn $\mathbf{x} \in U$ und $\mathbf{x} \in U^\perp$, dann ist $(\mathbf{x}.\mathbf{x}) = 0$ und daraus folgt $\mathbf{x} = 0$.

(iii): Sei $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_m$ eine Basis für U und $\mathbf{u}_{m+1}, ..., \mathbf{u}_n$ eine Basis für $U^\perp$. (Hier benützen wir die Information $dimU^\perp = n - dimU$.) Wir testen die Vektoren $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_{m+1}, ..., \mathbf{u}_n$ auf lineare Unabhängigkeit:

$$\underbrace{c_1\mathbf{u}_1 + ... + c_m\mathbf{u}_m}_{\in U} + \underbrace{c_{m+1}\mathbf{u}_{m+1} + ... + c_n\mathbf{u}_n}_{\in U^\perp} = \mathbf{0}.$$

Wegen (ii) ist also

$$\sum_{\nu=1}^m c_\nu \mathbf{u}_\nu = \sum_{\nu=m+1}^n c_\nu \mathbf{u}_\nu = \mathbf{0},$$

und da die Vektoren $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_m$, bzw. $\mathbf{u}_{m+1}, ..., \mathbf{u}_n$ linear unabhängig sind, folgt $c_1 = ... = c_m = 0$ und $c_{m+1} = ... = c_n = 0$. Nach Satz 1.14 (i) erzeugen $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_{m+1}, ..., \mathbf{u}_n$ also den ganzen Zahlenraum $\mathbb{R}^n$. □

Ein Korollar aus diesem Satz ist die Tatsache, dass jeder lineare Unterraum $U \subset \mathbb{R}^n$ der Lösungsraum eines geeigneten homogenen linearen Gleichungssystems ist:

Satz 1.19 *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *ein linearer Unterraum der Dimension d. Dann gibt es ein lineares Gleichungssystem*

$$\sum_{\nu=1}^n a_{\mu,\nu} x_\nu = 0, \qquad \mu = 1, ..., n - d,$$

dessen Lösungsraum gerade der Unterraum U *ist.*

Beweis. Als Zeilenvektoren der Koeffizientenmatrix wählen wir eine Basis $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_{n-d}$ des orthogonalen Komplements $U^\perp$. Die Behauptung folgt dann aus Beispiel 1.28 und Satz 1.18 (i). □

Satz 1.20 (Schmidtsche Orthonormalisierung) *Jeder Unterraum* $U \subset \mathbb{R}^n$ *besitzt eine* Orthonormalbasis, *d.h. eine Basis* $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_m$, *für die gilt:*

$$\left\{ \begin{array}{lll} (\mathbf{u}_k.\mathbf{u}_l) = 0 & \textit{für } k \neq l & \textit{(Orthogonalität)} \\ \parallel \mathbf{u}_k \parallel = 1 & \textit{für } k = 1, ..., m & \textit{(Normalität)} \end{array} \right.$$

Beweis. Wir gehen von einer beliebigen Basis $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_m$ des Unterraums U aus. Als erstes normalisieren wir $\mathbf{v}_1$:

$$\mathbf{u}_1 := \frac{1}{\parallel \mathbf{v}_1 \parallel} \mathbf{v}_1.$$

Dann ersetzen wir $\mathbf{v}_2$ durch

$$\mathbf{u}_2' := \mathbf{v}_2 - (\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2)\mathbf{u}_1,$$

denn dann haben wir

$$(\mathbf{u}_1.\mathbf{u}_2') = (\mathbf{u}_1.\mathbf{v}_2) - (\mathbf{u}_1.\mathbf{v}_2)(\mathbf{u}_1.\mathbf{u}_1) = 0$$

erreicht. Als nächstes normieren wir $\mathbf{u}_2'$:

$$\mathbf{u}_2 := \frac{1}{\parallel \mathbf{u}_2' \parallel} \mathbf{u}_2'.$$

Dieses Verfahren können wir mit jedem der Vektoren $\mathbf{v}_k$ wiederholen: Haben wir für ein $k \leq m$ schon erreicht, dass

$$\left\{ \begin{array}{lll} (\mathbf{u}_j.\mathbf{u}_l) = 0 & \text{für} & j \neq l = 1, ..., k, \\ \parallel \mathbf{u}_j \parallel = 1 & \text{für} & j = 1, ..., k, \end{array} \right.$$

wobei $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k \in U$ Linearkombinationen der Vektoren $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$ sind, so definieren wir

$$\mathbf{u}_{k+1}' := \mathbf{v}_{k+1} - (\mathbf{u}_1.\mathbf{v}_{k+1})\mathbf{u}_1 - ... - (\mathbf{u}_k.\mathbf{v}_{k+1})\mathbf{u}_k \quad \in U.$$

Da die Vektoren $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{k+1}$ linear unabhängig sind, ist $\mathbf{v}_{k+1}$ keine Linearkombination der $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$, und deswegen ist $\mathbf{u}_{k+1}' \neq \mathbf{0}$. Da die Vektoren $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k$ schon orthonormal sind, berechnen wir für jedes $j = 1, ..., k$:

$$\begin{array}{rcl} (\mathbf{u}_{k+1}'.\mathbf{u}_j) & = & (\mathbf{v}_{k+1}.\mathbf{u}_j) - (\mathbf{u}_1.\mathbf{v}_{k+1})(\mathbf{u}_1.\mathbf{u}_j) - ... - (\mathbf{u}_k.\mathbf{v}_{k+1})(\mathbf{u}_k.\mathbf{u}_j) \\ & = & (\mathbf{v}_{k+1}.\mathbf{u}_j) - (\mathbf{u}_j.\mathbf{v}_{k+1})(\mathbf{u}_j.\mathbf{u}_j) \\ & = & 0. \end{array}$$

Wir brauchen $\mathbf{u}_{k+1}'$ nur noch zu normalisieren und haben dann orthonormale Vektoren $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_{k+1} \in U$ konstruiert. Nach endlich vielen derartigen Schritten haben wir eine Orthonormalbasis für U.

$\square$

Eine Orthonormalbasis hat enorme Vorteile gegenüber Basen, die nicht orthonormal sind: Will man Vektoren $\mathbf{x} \in U$ in einer Basis $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_m \in U$ *entwickeln*, d.h. als Linearkombination

$$\mathbf{x} = \sum_1^m c_\mu \mathbf{u}_\mu$$

tatsächlich hinschreiben, so besteht die Bestimmung der *Entwicklungskoeffizienten* c_μ in der Aufgabe, ein lineares Gleichungssystem (mit den c_μ als Unbekannten) zu lösen. Ist das System $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_m$ aber eine Orthonormalbasis, dann gilt

$$(\mathbf{u}_k.\mathbf{x}) = (\mathbf{u}_k. \sum_1^m c_\mu \mathbf{u}_\mu) = \sum_1^m c_\mu (\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_\mu) = c_k(\mathbf{u}_k.\mathbf{u}_k) = c_k.$$

Die *Entwicklungskoeffizienten* c_k des Vektors $\mathbf{x} \in U$ in einer *Orthonormalbasis* sind also einfach die *Skalarprodukte*

$$c_k = (\mathbf{u}_k.\mathbf{x})$$

mit den Basisvektoren. Man kann sie auch auffassen als Länge der Projektion des Vektors $\mathbf{x}$ in die Richtung der entsprechenden Baisvektoren.

Satz 1.21 (Orthogonalprojektion) *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein linearer Unterraum. Zu jedem Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ gibt es dann genau einen Vektor $P(\mathbf{x}) \in U$, derart, dass*

$$\mathbf{x} - P(\mathbf{x}) \quad \perp \quad U.$$

Beweis. Nach Satz 1.18 (iii) wissen wir $\mathbb{R}^n = U + U^\perp$. Jeder Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ist deswegen eine Summe $\mathbf{x} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ von Vektoren $\mathbf{u}_1 \in U$ und $\mathbf{u}_2 \in U^\perp$. Hätten wir zwei derartige Darstellungen für $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1' + \mathbf{u}_2' \text{ mit } \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1' \in U, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2' \in U^\perp,$$

so könnten wir $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_1' = \mathbf{u}_2' - \mathbf{u}_2 \in U \cap U^\perp$ folgern. Da nach Satz 1.18 (ii) aber $U \cap U^\perp = \{\mathbf{0}\}$ ist, hätten wir $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1'$ und $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2'$. Das heißt, die Darstellung $\mathbf{x} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ mit $\mathbf{u}_1 \in U$ und $\mathbf{u}_2 \in U^\perp$ ist nur auf eine Weise möglich.

Wir setzen $P(\mathbf{x}) := \mathbf{u}_1$ und haben

$$((P(\mathbf{x}) - \mathbf{x}).\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}_2.\mathbf{u}) = 0 \text{ für alle } \mathbf{u} \in U.$$

Da die Darstellung $\mathbf{x} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ eindeutig ist, gibt es zu $\mathbf{x}$ nur einen derartigen Vektor $P(\mathbf{x})$. $\square$

Aufgabe 1.37 *Es sei $U \subset \mathbb{R}^5$ der von den Vektoren $(1,2,0,2,1)$ und $(1,1,1,1,1)$ aufgespannte Unterraum. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U und von $U^\perp$.*

Aufgabe 1.38 *a) Beweisen Sie, dass sich die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks in einem Punkt schneiden.*
b) Beweisen Sie, dass sich die drei Höhen eines Dreiecks in einem Punkt schneiden.

Aufgabe 1.39 *Ein Dreieck mit den Ecken $\mathbf{0}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ heißt gleichseitig, wenn*

$$\| \mathbf{a} \| = \| \mathbf{b} \| = \| \mathbf{b} - \mathbf{a} \| .$$

Folgern Sie aus dieser Eigenschaft für den Cosinus des Winkels zwischen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$

$$cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 1.40 *Es seien $L_1 : \mathbf{v}_1 + \mathbb{R}\mathbf{w}_1$ und $L_2 : \mathbf{v}_2 + \mathbb{R}\mathbf{w}_2$ zwei Geraden im $\mathbb{R}^n$ mit linear unabhängigen Richtungsvektoren $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$. Zeigen Sie: Auf L_1 existiert genau ein Punkt $\mathbf{x}_1$ und auf L_2 genau ein Punkt $\mathbf{x}_2$ so, dass $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ auf $\mathbf{w}_1$ und $\mathbf{w}_2$ senkrecht steht. ($\| \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \|$ heißt Abstand der Geraden L_1 und L_2.)*

Aufgabe 1.41 *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein linearer Unterraum und P die Orthogonalprojektion auf U. Zeigen Sie für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u} \in U$*

$$\| \mathbf{x} - P(\mathbf{x}) \| \leq \| \mathbf{x} - \mathbf{u} \| .$$

Aufgabe 1.42 *Es sei $V \subset \mathbb{R}^3$ der von den Vektoren*

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aufgespannte lineare Unterraum.
a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ für V.
b) Ergänzen Sie $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ zu einer Orthonormalbasis $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ des $\mathbb{R}^3$.
c) Bestimmen Sie die Orthogonalprojektion $P(\mathbf{x}) \in V$ des Vektors

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 1.43 *a) Ergänzen Sie die beiden Vektoren*

$$\mathbf{v}_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \textit{und} \quad \mathbf{v}_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

zu einer Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^4$.
b) Es sei $E \subset \mathbb{R}^4$ die von $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ aufgespannte Ebene. Bestimmen Sie für jeden Vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ die Orthogonalprojektion $\mathbf{x}' \in E$, d.h., den Vektor $\mathbf{x}' \in E$ mit $(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \perp E$.

Aufgabe 1.44 *Im $\mathbb{R}^4$ seien die aufeinander senkrecht stehenden Vektoren $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3, 4)$ und $\mathbf{v}_2 = (4, 1, -2, 0)$ gegeben. Man ergänze $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ zu einer Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^4$.*

Aufgabe 1.45 *Man bestimme im $\mathbb{R}^4$ den Winkel zwischen den Vektoren*

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 1.46 *Im $\mathbb{R}^3$ seien E_1 und E_2 zwei 2-dimensionale Untervektorräume, die sich in einer Geraden A schneiden. Der Schnittwinkel $\varphi = \angle(E_1, E_2)$ von E_1 mit E_2 sei wie folgt definiert: Man wähle Vektoren $\mathbf{v}_i \in E_i \, (i = 1, 2)$ der Länge 1, die senkrecht auf A stehen. Man darf annehmen, dass $(\mathbf{v}_1.\mathbf{v}_2) \geq 0$ (andernfalls ersetze man $\mathbf{v}_2$ durch $-\mathbf{v}_2$). Dann ist*

$$cos(\varphi) = (\mathbf{v}_1.\mathbf{v}_2).$$

Sei

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 2z = 0\}, \\ E_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - 3z = 0\}. \end{aligned}$$

Man berechne den Cosinus des Schnittwinkels von E_1 und E_2.

Aufgabe 1.47 *Im $\mathbb{R}^4$ seien die Vektoren*

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

gegeben. Man bestimme ein Gleichungssystem, dessen Lösungsgesamtheit $\mathbb{R}\mathbf{v}_1 + \mathbb{R}\mathbf{v}_2 + \mathbb{R}\mathbf{v}_3$ ist.

Aufgabe 1.48 *Im euklidischen* $\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \,|\, x,y,z \in \mathbb{R}\}$ *seien drei Punkte* A, B *und* C *gegeben, so dass die drei Vektoren* $\mathbf{a} = OA$, $\mathbf{b} = OB$, *und* $\mathbf{c} = OC$ *linear unabhängig sind. Es werde das vom Ursprung und von diesen drei Vektoren aufgespannte Tetraeder betrachtet.*
a) Bestimmen Sie die Gleichung einer Ebene, die senkrecht auf der Kante [OA] des Tetraeders steht und den Mittelpunkt der Kante [BC] enthält.
b) Es gibt insgesamt sechs Ebenen, die jeweils senkrecht auf einer Tetraederkante stehen und den Mittelpunkt der jeweiligen Gegenkante enthalten. Zeigen Sie, dass sich diese sechs Ebenen in einem Punkt schneiden.

Aufgabe 1.49 *Im* $\mathbb{R}^3$ *sei das Tetraeder mit den Ecken*

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

gegeben. $F \subset \mathbb{R}^3$ *sei die Seitenebene dieses Tetraeders durch die Ecken* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ *und* $\mathbf{c}$.
a) Bestimmen Sie für F *eine Gleichung in der Form* $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$ *mit* $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.
b) Berechnen Sie einen Vektor $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$, *der auf* F *senkrecht steht.*
c) Es sei $u \in \mathbb{R}$ *ein Parameter. Ermitteln Sie den Abstand des Punktes*

$$\mathbf{p}_u = \begin{pmatrix} u \\ u \\ u \end{pmatrix}$$

von F.
d) Bestimmen Sie die Inkugel des obigen Tetraeders durch Angabe von Mittelpunkt und Radius.

2 Matrizen und Determinanten

Wir betrachten hier Abbildungen $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Eine derartige Abbildung ordnet jedem Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ einen Bildvektor $\Phi(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$ zu. Der mathematische Begriff der Abbildung hängt mit dem Wort „Abildung“ der Umgangssprache zusammen: Hier ist eine Abbildung ein (zweidimensionales) Stück Papier, auf dem jeder Punkt des Anschauungsraumes seinen Platz hat, bzw. jeder Punkt aus einem gewissen Teil des Anschauungsraumes. Dieser Teil des dreidimensionalen Raumes ist auf das zweidimensionale Papier abgebildet worden.

Eine Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt

- *injektiv*, falls gilt: $\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{y}) \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$,
- *surjektiv*, falls gilt: Zu jedem $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ gibt es ein $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{y} = \Phi(\mathbf{x})$,
- *bijektiv*, falls sie injektiv und surjektiv ist, d.h., falls es zu jedem $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ genau ein $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ gibt mit $\mathbf{y} = \Phi(\mathbf{x})$. In diesem Fall ist die umgekehrte Zuordnung $\mathbf{y} \mapsto \mathbf{x}$ auch eine Abbildung Φ^{-1}. Es ist $\Phi^{-1}(\Phi(\mathbf{x})) = \Phi^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{x}$. Aber es gilt auch $\Phi(\Phi^{-1}(\mathbf{y})) = \Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Die Abbildung Φ^{-1} heißt die *Umkehrabbildung* zu Φ.

Die Abbildung $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}$, die jeden Vektor auf sich selber abbildet, heißt die Identität $id : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Zwei Abbildungen Φ_1 und Φ_2 kann man hintereinanderschalten: $\Phi_2 \circ \Phi_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist die Abbildung

$$\mathbf{x} \mapsto \Phi_1(\mathbf{x}) \mapsto \Phi_2(\Phi_1(\mathbf{x})).$$

Wenn $\Phi_2 = \Phi_1^{-1}$, dann gilt also

$$\Phi_2 \circ \Phi_1 = \Phi_1 \circ \Phi_2 = id.$$

Aufgabe 2.1 *a) Es sei $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Abbildung $x \mapsto 2 \cdot x$. Zeigen Sie, dass Φ bijektiv ist und geben Sie die Umkehrabbildung Φ^{-1} an.*

b) Es sei $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Abbildung $x \mapsto 0 \cdot x$. Zeigen sie, dass Φ weder injektiv noch surjektiv ist.

Aufgabe 2.2 *Es sei $\mathbb{N}$ die Menge $\{0, 1, 2, 3, ...\}$ der natürlichen Zahlen und $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Abbildung $x \mapsto 2 \cdot x$. Entscheiden Sie, ob φ injektiv, bzw. surjektiv ist.*

Aufgabe 2.3 *Es sei $M = \{1, 2, 3\}$. Die Abbildungen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : M \to M$ seien wie folgt definiert:*

$$\varphi_1 : \begin{cases} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 1 \end{cases} \qquad \varphi_2 : \begin{cases} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 1 \end{cases} \qquad \varphi_3 : \begin{cases} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 3 \end{cases}$$

Entscheiden Sie, welche dieser Abbildungen bijektiv sind und geben Sie in diesen Fällen die Umkehrabbildung φ^{-1} an.

Aufgabe 2.4 *Beweisen oder widerlegen Sie: Für alle Mengen A, B, C und Abbildungen $f : A \to B, g : B \to C$ gilt:*

a) Sind f und g injektiv, so auch $g \circ f$.
b) Sind f und g surjektiv, so auch $g \circ f$.
c) Ist f injektiv und g surjektiv, so ist $g \circ f$ bijektiv.
d) Ist $g \circ f$ bijektiv, so ist g surjektiv und f injektiv.
e) Ist $g \circ f$ bijektiv, so ist g injektiv und f surjektiv.

2.1 Bewegungen im $\mathbb{R}^n$

Definition 2.1 *Eine* Bewegung *im* $\mathbb{R}^n$ *ist eine Abbildung*

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x} \mapsto \Phi(\mathbf{x}) \end{cases},$$

die den Abstand erhält, d.h. mit der Eigenschaft

$$\| \Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{y}) \| = \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \| .$$

Wenn man einen *starren Körper* bewegt, ändern sich die Abstände von Punkten in seinem Inneren nicht. Einen nicht-starren Körper (z.B. einen Knetgummi) dagegen kann man defomieren, d.h. so bewegen, dass sich die Abstände von Punkten in seinem Inneren ändern. Bei einer Bewegung des $\mathbb{R}^n$ im eben definierten Sinn stellt man sich vor, den ganzen $\mathbb{R}^n$ so zu bewegen wie einen starren Körper.

Beispiel 2.1 *Die* Translation *um einen festen Vektor* $\mathbf{a}$

$$T : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{a}.$$

ist eine Bewegung wegen

$$\| T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{y}) \| = \| \mathbf{x} + \mathbf{a} - (\mathbf{y} + \mathbf{a}) \| = \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \| .$$

Beispiel 2.2 *Die Punktspiegelung*

$$\Phi : \mathbf{x} \mapsto -\mathbf{x}$$

ist eine Bewegung, weil

$$\| \Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{y}) \| = \| -\mathbf{x} + \mathbf{y} \| = \| -1 \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \| = |-1| \cdot \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \| = \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \| .$$

Beispiel 2.3 *Eine* Hyperebene $\mathbf{a}^\perp$ *ist die Lösungsmenge einer einzigen linearen Gleichung* $(\mathbf{a}.\mathbf{x}) = 0$:

$$\mathbf{a}^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : (\mathbf{a}.\mathbf{x}) = 0\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \sum_1^n a_\nu x_\nu = 0\}.$$

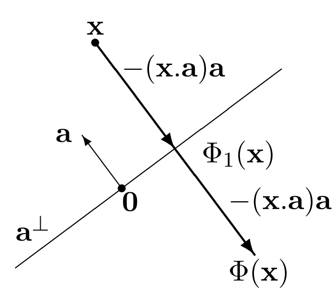
Dabei können wir $\mathbf{a}$ *als normiert annehmen:* $\| \mathbf{a} \| = 1$. *In diesem Fall hat die Abbildung*

$$\Phi_1 : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} - (\mathbf{x}.\mathbf{a})\mathbf{a}$$

die Eigenschaften

$$\Phi_1(\mathbf{x}) \in \mathbf{a}^\perp, \quad (\Phi_1(\mathbf{x}) - \mathbf{x}) \perp \mathbf{a}^\perp,$$

d.h. Φ_1 *ist die Orthogonalprojektion auf* $\mathbf{a}^\perp$. *Diese ist natürlich keine Bewegung, aber wenn wir von* $\mathbf{x}$ *nicht nur einmal* $(\mathbf{x}.\mathbf{a})\mathbf{a}$ *abziehen, sondern zweimal, dann erhalten wir die* Spiegelung an der Hyperebene $\mathbf{a}^\perp$:



$$\Phi : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} - 2(\mathbf{x}.\mathbf{a})\mathbf{a},$$

und diese Abbildung ist eine Bewegung:

$$\| \Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{y}) \| = \| \mathbf{x} - 2(\mathbf{x}.\mathbf{a})\mathbf{a} - \mathbf{y} + 2(\mathbf{y}.\mathbf{a})\mathbf{a} \| = \| \mathbf{x} - \mathbf{y} - 2(\mathbf{x} - \mathbf{y}.\mathbf{a})\mathbf{a} \| = \| \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \| .$$

Es genügt also, zu zeigen $\| \Phi(\mathbf{x}) \| = \| \mathbf{x} \|$. *Aber dies folgt aus*

$$\| \Phi(\mathbf{x}) \|^2 = (\mathbf{x} - 2(\mathbf{x}.\mathbf{a})\mathbf{a} \,.\, \mathbf{x} - 2(\mathbf{x}.\mathbf{a})\mathbf{a}) = \| \mathbf{x} \|^2 - 4(\mathbf{x}.\mathbf{a})(\mathbf{a}.\mathbf{x}) + 4(\mathbf{x}.\mathbf{a})^2 = \| \mathbf{x} \|^2 .$$

Beispiel 2.4 *Sind* Φ_1 *und* Φ_2 *Bewegungen, so ist auch* $\Phi_1 \circ \Phi_2$ *eine Bewegung, denn*

$$\| \Phi_1(\Phi_2(\mathbf{x})) - \Phi_1(\Phi_2(\mathbf{y})) \| = \| \Phi_2(\mathbf{x}) - \Phi_2(\mathbf{y}) \| = \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \| .$$

Sei Φ eine beliebige Bewegung im $\mathbb{R}^n$ und $\mathbf{a} := \Phi(\mathbf{0}) \in \mathbb{R}^n$. Sei T die Translation $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} - \mathbf{a}$. Dann ist auch $T \circ \Phi$ eine Bewegung (Beispiele 1 und 4), und hat die Eigenschaft

$$(T \circ \Phi)(\mathbf{0}) = T(\Phi(\mathbf{0})) = T(\mathbf{a}) = \mathbf{a} - \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Zu jeder Bewegung Φ gibt es also eine Translation T mit $(T \circ \Phi)(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Definition 2.2 *Eine Bewegung im* $\mathbb{R}^n$*, die den Nullvektor fest lässt, heißt* orthogonale Transformation.

Satz 2.1 *Jede Bewegung* Φ *im* $\mathbb{R}^n$ *ist ein Produkt* $\Phi = T \circ \Psi$ *einer Translation* T *mit einer orthogonalen Transformation* Ψ.

Beweis. Sei die Bewegung Φ gegeben. Ist T irgend eine Translation, so ist $\Psi := T^{-1}\Phi$ orthogonal genau dann, wenn $\Psi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, d.h. $T(\mathbf{0}) = \Phi(\mathbf{0})$. Wir definieren also ganz einfach $T : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \Phi(\mathbf{0})$. Dann ist $\Psi := T^{-1} \circ \Phi$ eine orthogonale Transformation mit $\Phi = T \circ \Psi$. □

Orthogonale Transformationen Φ haben folgende Eigenschaften:

- $\Phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ (nach Definition),
- $\| \Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{y}) \| = \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|$ (nach Definition einer Bewegung),
- $\| \Phi(\mathbf{x}) \| = \| \mathbf{x} \|$ (vorige Eigenschaft mit $\mathbf{y} = 0$).

Satz 2.2 *Eine orthogonale Transformation erhält das Skalarprodukt zweier Vektoren, d.h. für alle* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *gilt*

$$(\Phi(\mathbf{x}).\Phi(\mathbf{y})) = (\mathbf{x}.\mathbf{y}).$$

Beweis. Es ist

$$\| \Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{y}) \|^2 = (\Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{y}).\Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{y})) = \| \Phi(\mathbf{x}) \|^2 + \| \Phi(\mathbf{y}) \|^2 - 2(\Phi(\mathbf{x}).\Phi(\mathbf{y})).$$

Mit $\| \Phi(\mathbf{x}) \| = \| \mathbf{x} \|$, $\| \Phi(\mathbf{y}) \| = \| \mathbf{y} \|$ und $\| \Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{y}) \| = \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|$ folgt

$$\begin{aligned} (\Phi(\mathbf{x}).\Phi(\mathbf{y})) &= -\frac{1}{2}(\| \Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{y}) \|^2 - \| \Phi(\mathbf{x}) \|^2 - \| \Phi(\mathbf{y}) \|^2) \\ &= -\frac{1}{2}(\| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|^2 - \| \mathbf{x} \|^2 - \| \mathbf{y} \|^2) \\ &= (\mathbf{x}.\mathbf{y}) \end{aligned}$$

$\square$

Wir haben Bewegungen und damit orthogonale Abbildungen durch die Eigenschaft der *Längentreue* definiert. Satz 2.2 sagt, aus der Längentreue folgt die *Winkeltreue*.

Die Bilder der Vektoren $\mathbf{u}_\nu$ einer Orthonormalbasis (kurz O-N-Basis) $\mathbf{v}_1 := \Phi(\mathbf{u}_1), ..., \mathbf{v}_n := \Phi(\mathbf{u}_n)$ unter einer orthogonalen Transformation Φ haben wegen Satz 2.2 dieselben Skalarprodukte

$$\| \mathbf{v}_k \|^2 = \| \mathbf{u}_k \|^2 = 1, \quad (\mathbf{v}_k.\mathbf{v}_l) = (\mathbf{u}_k.\mathbf{u}_l) = 0 \text{ für } k \neq l.$$

Daraus folgt, dass die Vektoren $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ linear unabhängig sind: Denn wenn wir testen

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{v}_k = 0, \quad c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}^n,$$

so folgt für $l = 1, ..., n$ dass

$$0 = (\mathbf{v}_l. \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{v}_k) = c_l(\mathbf{v}_l.\mathbf{v}_l) = c_l.$$

Also ist das Bild der O-N-Basis $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k$ *wieder eine O-N-Basis.*

Das Bild $\Phi(\mathbf{x})$ eines Vektors $\mathbf{x} = \sum_1^n c_\nu \mathbf{u}_\nu$ ist $\Phi(\mathbf{x}) = \sum_1^n d_\nu \mathbf{v}_\nu$ mit

$$d_\nu = (\Phi(\mathbf{x}).\mathbf{v}_\nu) = (\Phi(\mathbf{x}).\Phi(\mathbf{u}_\nu)) = (\mathbf{x}.\mathbf{u}_\nu) = c_\nu.$$

Für eine orthogonale Abbildung Φ gilt also:

$$\boxed{\Phi(\sum_1^n c_\nu \mathbf{u}_\nu) = \sum_1^n c_\nu \Phi(\mathbf{u}_\nu)}$$

Insbesondere folgt hieraus

$$\boxed{\begin{array}{lll} \Phi(c \cdot \mathbf{x}) = c \cdot \Phi(\mathbf{x}) & \text{für } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R} & \text{(Homogenität)} \\ \Phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{x}) + \Phi(\mathbf{y}) & \text{für } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n & \text{(Additivität)} \end{array}} \quad \text{(LINEARITÄT).}$$

Diese Eigenschaft der *Linearität einer Abbildung* hat der Linearen Algebra ihren Namen gegeben. Die fundamentalen Beziehungen in der Linearen Algebra werden durch lineare Abbildungen vermittelt. Deswegen halten wir diese Eigenschaft - nicht nur für orthogonale - Abbildungen als Definition fest.

Definition 2.3 *Eine Abbildung* $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *(hier kann durchaus* $m \neq n$ *sein) heißt* linear*, wenn*

$$F(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2) = c_1 F(\mathbf{x}_1) + c_2 F(\mathbf{x}_2) \textit{ für alle } c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n.$$

Satz 2.3 *Eine Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist orthogonal genau dann, wenn sie folgende beiden Eigenschaften hat:*
(i) Φ ist linear.
(ii) Es gibt eine O-N-Basis $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n \in \mathbb{R}^n$, deren Bild $\Phi(\mathbf{u}_1), ..., \Phi(\mathbf{u}_n)$ wieder eine O-N-Basis ist.

Beweis. „$\Rightarrow$ “ Nach Satz 2.2 bildet eine orthogonale Abbildung jede (nicht nur eine einzige) O-N-Basis auf eine O-N-Basis ab. Und dass die Linearität eine Konsequenz der Orthogonolität ist, haben wir soeben gesehen.

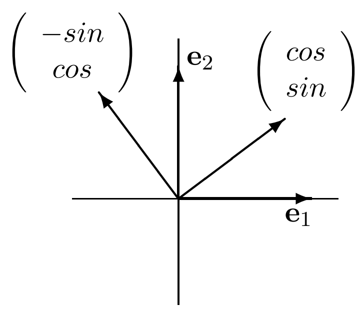
„$\Leftarrow$“ Aus der Linearität folgt $\| \Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{y}) \| = \| \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \|$ für alle Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Es genügt deswegen $\| \Phi(\mathbf{x}) \| = \| \mathbf{x} \|$ für jeden Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ zu zeigen. Wir schreiben den Vektor $\mathbf{x}$ in unserer O-N-Basis als $\mathbf{x} = \sum_1^n c_\nu \mathbf{u}_\nu$. Aus der Linearität folgt $\Phi(\mathbf{x}) = \sum_1^n c_\nu \Phi(\mathbf{u}_\nu)$. Und da sowohl die $\mathbf{u}_\nu$ als auch ihre Bilder $\Phi(\mathbf{u}_\nu)$ eine O-N-Basis bilden, ist nach Pythagoras

$$\| \Phi(\mathbf{x}) \|^2 = \sum_1^n c_\nu^2 = \| \mathbf{x} \|^2 .$$

$\square$

Beispiel 2.5 *Rotation im $\mathbb{R}^2$ um einen Winkel φ.*
Rotiert man die beiden Vektoren $\mathbf{e}_1 = (1,0)$ und $\mathbf{e}_2 = (0,1)$ der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ um einen Winkel φ, so erhält man die O-N-Basis

$$\Phi(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} cos(\varphi) \\ sin(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \Phi(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} -sin(\varphi) \\ cos(\varphi) \end{pmatrix}$$



des $\mathbb{R}^2$. Es gibt deswegen eine lineare (und dann auch orthogonale) Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, welche diese Drehung der Basisvektoren bewirkt, nämlich

$$\Phi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 cos(\varphi) - x_2 sin(\varphi) \\ x_1 sin(\varphi) + x_2 cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Die Orthogonalität dieser linearen Abbildung ist leicht direkt nachzurechen:

$$\begin{array}{rcl} (x_1 cos(\varphi) - x_2 sin(\varphi))^2 + (x_1 sin(\varphi) + x_2 cos(\varphi))^2 & = & \\ x_1^2 cos(\varphi)^2 + x_2^2 sin(\varphi)^2 + x_1^2 sin(\varphi)^2 + x_2^2 cos(\varphi)^2 & = & x_1^2 + x_2^2. \end{array}$$

Aufgabe 2.5 $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *sei eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:*
a) Φ ist genau dann injektiv, wenn gilt: Sind Vektoren $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_r \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig, so sind auch die Bildvektoren $\Phi(\mathbf{v}_1), ..., \Phi(\mathbf{v}_r) \in \mathbb{R}^p$ linear unabhängig.
b) Φ ist genau dann surjektiv, wenn gilt: Spannen die Vektoren $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_r$ den Raum $\mathbb{R}^n$ auf, so spannen ihre Bilder $\Phi(\mathbf{v}_1), ..., \Phi(\mathbf{v}_r)$ den Raum $\mathbb{R}^p$ auf.

Aufgabe 2.6 *Es seien $U, W \subset \mathbb{R}^n$ Untervektorräume und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine orthogonale Abbildung mit $f(U) = W$. Beweisen Sie, dass f das orthogonale Komplement von U auf das orthogonale Komplement von W abbildet.*

Aufgabe 2.7 *Im $\mathbb{R}^2$ mit den Koordinaten x, y seien φ_1 die Spiegelung an der Geraden $x = 1$ und φ_2 die Spiegelung an der Geraden $y = 1$. Bestimmen Sie das Bild des Vektors (x, y) unter der Abbildung*

$$a)\, \varphi_1, \quad b)\, \varphi_2, \quad c)\, \varphi_1 \circ \varphi_2, \quad d)\, \varphi_2 \circ \varphi_1.$$

Aufgabe 2.8 *Es seien $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ zwei Vektoren der Länge 1 und*

$$\Phi_1 : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} - 2(\mathbf{x}.\mathbf{a})\mathbf{a}, \quad \Phi_2 : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} - 2(\mathbf{x}.\mathbf{b})\mathbf{b}$$

die Spiegelungen an den Geraden senkrecht auf $\mathbf{a}$, bzw. $\mathbf{b}$.
a) Zeigen Sie:

$$\Phi_2 \circ \Phi_1 : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} - 2(\mathbf{x}.\mathbf{a})\mathbf{a} - 2(\mathbf{x}.\mathbf{b})\mathbf{b} + 4(\mathbf{x}.\mathbf{a})(\mathbf{a}.\mathbf{b})\mathbf{b}.$$

b) Berechnen Sie $\Phi_1 \circ \Phi_2$.
c) Zeigen Sie: Es ist $\Phi_2 \circ \Phi_1 = \Phi_1 \circ \Phi_2$ genau dann, wenn entweder $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ oder $\mathbf{a} = \pm\mathbf{b}$.

Aufgabe 2.9 *Es seien $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ ein Vektor der Länge 1 und $r, s \in \mathbb{R}$. Weiter seien L_1 die Gerade $(\mathbf{x}.\mathbf{a}) = r$ sowie L_2 die Gerade $(\mathbf{x}.\mathbf{a}) = s$. Zeigen Sie:*
a) Die Spiegelung S_1 an der Geraden L_1 ist $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} - 2(\mathbf{x}.\mathbf{a})\mathbf{a} + 2r\mathbf{a}$.
b) Ist S_2 die Spiegelung an der Geraden L_2, so ist $S_2 \circ S_1$ die Translation $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + 2(s - r)\mathbf{a}$.

Aufgabe 2.10 *Es sei $V \subset \mathbb{R}^3$ der von den Vektoren*

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

aufgespannte lineare Unterraum.
a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ für V.
b) Ergänzen Sie $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ zu einer Orthonormalbasis $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ des $\mathbb{R}^3$.
c) Bestimmen Sie das Bild $S(\mathbf{x})$ des Vektors

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

unter der Spiegelung an V.

2.2 Lineare Abbildungen und Matrizen

Bei der Beschreibung der Rotationsabbildung im letzten Abschnitt haben wir von folgendem Prinzip Gebrauch gemacht: Ist $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung, und sind $\mathbf{v}_1 = \Phi(\mathbf{e}_1), ..., \mathbf{v}_n = \Phi(\mathbf{e}_n)$, die Bilder der Basis-Vektoren $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$, bekannt, so ist das Bild eines jeden Vektors $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) = \sum_1^n x_\nu \mathbf{e}_\nu$ bereits festgelegt durch

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(\sum_1^n x_\nu \mathbf{e}_\nu) = \sum_1^n x_\nu \Phi(\mathbf{e}_\nu) = \sum_1^n x_\nu \mathbf{v}_\nu.$$

Umgekehrt kann man Vektoren $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^m$ beliebig vorgeben, durch diese Formel wird dann eine lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definiert mit $\Phi(\mathbf{e}_1) = \mathbf{v}_1, ..., \Phi(\mathbf{e}_n) = \mathbf{v}_n$. Daraus folgt

Satz 2.4 (Prinzip der linearen Ausdehnung) *Zu jeder Wahl von Vektoren $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^m$ gibt es eine lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, welche die Vektoren $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ der Standardbasis auf diese Vektoren $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ abbildet. Diese lineare Abbildung ist durch die Vektoren $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ eindeutig festgelegt.*

Wir schreiben nun die Vektoren $\Phi(\mathbf{e}_\nu) = \mathbf{v}_\nu$ als Spaltenvektoren

$$\mathbf{v}_\nu = \begin{pmatrix} v_{1,\nu} \\ \vdots \\ v_{m,\nu} \end{pmatrix}$$

und fügen sie zu einer Matrix

$$(v_{\mu,\nu})_{\mu=1,...,m,\nu=1,...,n} = m \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} v_{1,1} & . & . & . & v_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{m,1} & . & . & . & v_{m,n} \end{pmatrix}}_{n} \right.$$

mit m Zeilen und n Spalten zusammen. Aus dieser Matrix $(v_{\mu,\nu})$ erhält man das Bild $\Phi(\mathbf{x})$ eines Vektors $\mathbf{x} = (x_\nu)$ durch

$$\Phi(\mathbf{x}) = (\sum_1^n v_{\mu,\nu} x_\nu)_{\mu=1,...,m}.$$

Dies ist genau dieselbe Formel wie für ein lineares Gleichungssystem. Natürlich ist das kein Zufall, denn auch ein lineares Gleichungssystem kann man als lineare Abbildung auffassen: Ist $(a_{\mu,\nu})$ die Koeffizientenmatrix des Systems, so ist die Abbildung

$$\Phi \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ (x_\nu) \mapsto \sum_1^n a_{\mu,\nu} x_\nu \end{array} \right.$$

linear und das Lösen der linearen Gleichung

$$\sum_1^n a_{\mu,\nu} x_\nu = b_\mu$$

besteht in der Aufgabe, für den Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ alle Vektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ zu finden, welche unter Φ auf $\mathbf{b}$ abgebildet werden.

Beispiel 2.6 *Die Identität*

$$id : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}$$

bildet jeden Vektor auf sich selbst ab, also auch die Standardbasis auf die Standardbasis. Ihre Matrix ist die Einheitsmatrix

$$\mathbb{1}_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & . \\ . & 0 & . & . & & . \\ . & & . & . & . & . \\ . & & & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{\mu,\nu})_{\mu,\nu=1,...,n}.$$

Bei dieser Gelegenheit führen wir folgende Konvention ein: Die Zahl

$$\delta_{\mu,\nu} := \begin{cases} 0 \text{ wenn } \mu \neq \nu \\ 1 \text{ wenn } \mu = \nu \end{cases}$$

heißt Kronecker-Delta*.*

Beispiel 2.7 *Es sei $c \in \mathbb{R}$. Die Streckung*

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x} \mapsto c \cdot \mathbf{x} \end{cases}$$

bildet jeden Vektor $\mathbf{e}_\nu$ auf $c \cdot \mathbf{e}_\nu$ ab. Ihre Matrix ist deswegen

$$\begin{pmatrix} c & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & c & 0 & & & . \\ . & 0 & c & . & & . \\ . & & . & . & . & . \\ . & & & . & c & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & c \end{pmatrix} = (c \cdot \delta_{\mu,\nu})_{\mu,\nu=1,\ldots,n}.$$

Spezialfälle hiervon sind die Identität ($c = 1$), die Punktspiegelung *am Nullpunkt ($c = -1$) und die* Nullabbildung *($c = 0$).*

Beispiel 2.8 *Für jeden Einheitsvektor $\mathbf{a}, \parallel \mathbf{a} \parallel = 1$, haben wir gesehen, dass die Spiegelung an der Hyperebene $\mathbf{a}^\perp$ durch $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} - 2(\mathbf{x}.\mathbf{a})\mathbf{a}$ gegeben wird. Dabei wird der Vektor $\mathbf{e}_\nu$ auf*

$$\mathbf{e}_\nu - 2(\mathbf{e}_\nu.\mathbf{a})\mathbf{a} = \mathbf{e}_\nu - 2a_\nu\mathbf{a} = (\delta_{\mu,\nu} - 2a_\nu a_\mu)_{\mu=1,\ldots,n}$$

abgebildet. Die zugehörige Matrix hat also die Einträge $\delta_{\mu,\nu} - 2a_\mu a_\nu$.

Beispiel 2.9 *Die Matrix zu einer Rotation in der Ebene um den Winkel ϕ ist eine* Drehmatrix

$$\begin{pmatrix} cos(\phi) & -sin(\phi) \\ sin(\phi) & cos(\phi) \end{pmatrix}.$$

Dies erhält man aus der Form für die Bilder der Einheitsvektoren $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$, die wir am Ende des letzten Paragraphen angegeben haben.

Beispiel 2.10 *Auch eine reine Vertauschung (Permutation) von Basisvektoren definiert eine lineare Abbildung. So gehört z.B. zu der Vertauschung $\mathbf{e}_1 \leftrightarrow \mathbf{e}_2$ die Matrix*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & & . \\ . & & . & . & . & . \\ . & & & . & 1 & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 2.11 *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein m-dimensionaler Unterraum, der von einer O-N-Basis $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_m$ aufgespannt wird. Die Orthogonalprojektion (vgl. (1.5)) Φ auf diesen Unterraum bildet jeden Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ auf den Vektor $\Phi(\mathbf{x}) = \sum_1^m c_\mu \mathbf{v}_\mu$ ab, für den*

$$((\Phi(\mathbf{x}) - \mathbf{x}).\mathbf{v}_\mu) = 0 \textit{ für alle } \mu, \textit{ d.h. } (\Phi(\mathbf{x}).\mathbf{v}_\mu) = (\mathbf{x}.\mathbf{v}_\mu), \textit{ also } c_\mu = (\mathbf{x}.\mathbf{v}_\mu)$$

gilt. Die Orthogonalprojektion ist also die lineare Abbildung $\mathbf{x} \mapsto \sum_1^m (\mathbf{x}.\mathbf{v}_\mu)\mathbf{v}_\mu$. Sie bildet $\mathbf{e}_\nu$ auf $\sum_{\mu=1}^m v_{\mu,\nu}\mathbf{v}_\mu$ ab und ihre Matrix ist

$$\left(\sum_{\mu=1}^m v_{\mu,k} v_{\mu,l} \right)_{k,l=1,...,n}.$$

Sind $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $\Psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ linear, so ist auch $\Psi \circ \Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ linear, denn

$$(\Psi \circ \Phi)(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) = \Psi(\Phi(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2)) = \Psi(c_1\Phi(\mathbf{v}_1) + c_2\Phi(\mathbf{v}_2)) = c_1\Psi\Phi(\mathbf{v}_1) + c_2\Psi\Phi(\mathbf{v}_2).$$

Was ist die zu $\Psi \circ \Phi$ gehörige Matrix? Dazu sei

$\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n,$	Standardbasis des $\mathbb{R}^n$	$\Phi(\mathbf{e}_\nu i) = \sum_{\mu=1}^m a_{\mu,\nu}\mathbf{f}_\mu,$	$(a_{\mu,\nu})$ die Matrix für Φ,
$\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m$	Standardbasis des $\mathbb{R}^m$,	$\Psi(\mathbf{f}_\mu) = \sum_{\lambda=1}^l b_{\lambda,\mu}\mathbf{g}_\lambda,$	$(b_{\lambda,\mu})$ die Matrix für Ψ,
$\mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_l$	Standardbasis des $\mathbb{R}^l$.		

Wir berechnen die Bilder der Basisvektoren $\mathbf{e}_\nu$

$$(\Psi \circ \Phi)(\mathbf{e}_\nu) = \Psi(\sum_{\mu=1}^m a_{\mu,\nu}\mathbf{f}_\mu) = \sum_{\lambda=1}^l b_{\lambda,\mu} \sum_{mu=1}^m a_{\mu,\nu}\mathbf{g}_\lambda = \sum_{\lambda=1}^l c_{\lambda,\nu}\mathbf{g}_\lambda$$

mit der Matrix

$$\boxed{(c_{\lambda,\nu})_{\lambda,\nu} = (\sum_{\mu=1}^m b_{\lambda,\mu}a_{\mu,\nu})_{\lambda,\nu}.}$$

Schließlich formulieren wir noch

Satz 2.5 (Bildsatz) *Ist $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear und $U \subset \mathbb{R}^n$ ein linearer Unterraum, so ist das Bild von U*

$$\Phi(U) = \{\Phi(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^m : \mathbf{u} \in U\}$$

ein linearer Unterraum im $\mathbb{R}^m$, und für seine Dimension gilt $\dim \Phi(U) \leq \dim U$.

Beweis. Sind $\mathbf{v}_1 = \Phi(\mathbf{u}_1)$ und $\mathbf{v}_2 = \Phi(\mathbf{u}_2)$ zwei Vektoren aus $\Phi(U)$, so gehört auch $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = \Phi(c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2)$ zum Bildraum $\Phi(U)$. Ist $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k$ eine Basis von U, so spannen die Vektoren $\Phi(\mathbf{u}_1), ..., \Phi(\mathbf{u}_k) \in \mathbb{R}^m$ den linearen Unterraum auf. Nach dem Basisauswahlsatz (Satz 1.12) ist deswegen $dim\Phi(U) \leq dim(U)$. $\square$

Aufgabe 2.11 *Es sei $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die lineare Abbildung, welche durch*

$$\mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3,\ \ldots,\ \mathbf{e}_{n-1} \mapsto \mathbf{e}_{n-1} - \mathbf{e}_n,\ \mathbf{e}_n \mapsto \mathbf{e}_n - \mathbf{e}_1$$

definiert wird.
a) Geben Sie die Matrix für Φ an.
b) Geben Sie eine Basis für den Unterraum $\Phi(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^n$ an.

Aufgabe 2.12 *Geben Sie die $n \times n$-Matrizen an, die zu den folgenden linearen Abbildungen $\Phi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \, (i = 1, ..., 4)$ gehören:*
a) Φ_1 ist die Spiegelung an der Hyperebene $\mathbf{a}^\perp$, wo $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $\| \mathbf{a} \| = 1$ gegeben ist.
b) Φ_2 ist die Orthogonalprojektion auf einen p-dimensionalen linearen Unterraum U, der durch eine Orthonormalbasis $\mathbf{u}_1 = (u_{1,1}, ..., u_{1,n}), ..., \mathbf{u}_p = (u_{p,1}, ..., u_{p,n})$ aufgespannt wird.
c) $\Phi_3 = \Phi_1 \circ \Phi_1$.
d) $\Phi_4 = \Phi_2 \circ \Phi_2$.

Aufgabe 2.13 *Es sei $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, die durch die Matrix*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird. Zeigen Sie: $\Phi \circ \Phi = id$.

Aufgabe 2.14 *Im $\mathbb{R}^2$ seien die vier Punkte*

$$\mathbf{v}_1 = (1, 1), \quad \mathbf{v}_2 = (1, -1), \quad \mathbf{v}_3 = (-1, -1), \quad \mathbf{v}_4 = (-1, 1)$$

gegeben. Man bestimme zwei lineare Abbildungen $\varphi, \psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, welche die $\mathbf{v}_i$ permutieren und außerdem die Bedingungen

$$\varphi^2, \psi \neq id, \quad \varphi\psi = \psi\varphi^{-1}$$

erfüllen.

Aufgabe 2.15 *Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die es eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gibt mit $f(\mathbf{a}_i) = \mathbf{b}_i$ für $i = 1, 2, 3, 4$, wobei*

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_4 = \begin{pmatrix} \alpha \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2.3 Matrizenrechnung

Wir bezeichnen mit

$$M(m \times n) = \{(a_{\mu,\nu})_{\mu=1,...,m,\nu=1,...,n} : a_{\mu,\nu} \in \mathbb{R}\}$$

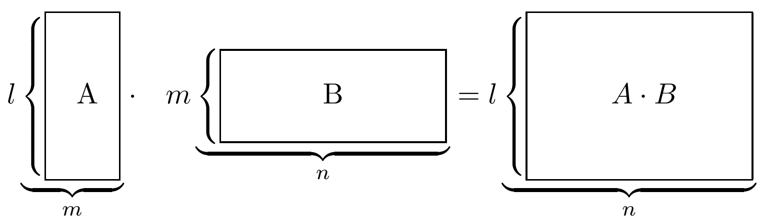
den Raum der reellen $m \times n$-Matrizen. Eine $m \times n$-Matrix ist ein $m \cdot n$-tupel von reellen Zahlen also ein Vektor im $\mathbb{R}^{m \cdot n}$. Auch für Matrizen haben wir die *Vektorrechenoperationen*:

1) Addition:
$$\begin{array}{rcl} A & = & (a_{\mu,\nu}) \\ B & = & (b_{\mu,\nu}) \\ \hline A+B & = & (a_{\mu,\nu} + b_{\mu,\nu}) \end{array}$$

2) Skalarmultiplikation:
$$\begin{array}{rcl} A & = & (a_{\mu,\nu}) \\ c & \in & \mathbb{R} \\ \hline c \cdot A & = & (c \cdot a_{\mu,\nu}) \end{array}$$

Diese Operationen haben genau dieselben Eigenschaften wie die entsprecheneden Operationen auf Vektoren. Neu ist aber die *Matrizen-Multiplikation:*

3) Matrizenmultiplikation:
$$\begin{array}{rcl} A & = & (a_{\lambda,\mu}) \in M(l \times m) \\ B & = & (b_{\mu,\nu}) \in M(m \times n) \\ \hline A \cdot B & = & (\sum_{\mu=1}^{m} a_{\lambda,\mu} b_{\mu,\nu}) \in M(l \times n) \end{array}$$



Das Matrizenprodukt $A \cdot B$ ist nur definiert, wenn die Matrix A genau so viele Spalten wie B Zeilen hat!

Beispiele für Matrizenmultiplikation:

Beispiel 2.12 *Das Skalarprodukt* $(\mathbf{a}.\mathbf{b})$ *zweier Vektoren* $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_n)$ *und* $\mathbf{b} = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$ *können wir als Matrizenprodukt auffassen. Dazu müssen wir die beiden Vektoren folgendermaßen als Matrizen auffassen:*

$$\begin{array}{rclcll} \mathbf{a} & = & (a_1, ..., a_n) & = & A \in M(1 \times n) & \textit{Zeilenvektor} \\ \mathbf{b} & = & \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} & = & B \in M(n \times 1) & \textit{Spaltenvektor} \end{array}$$

Dann ist

$$A \cdot B = (a_1, ..., a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = (\mathbf{a}.\mathbf{b}).$$

Beispiel 2.13 *Eine Matrix $A = (a_{\mu,\nu}) \in M(m \times n)$ mit n Spalten kann man von rechts mit einem Spaltenvektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ multiplizieren:*

$$A \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & . & . & . & a_{1,n} \\ a_{2,1} & . & . & . & a_{2,n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m,1} & . & . & . & a_{m,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\sum_1^n a_{\mu,\nu} \cdot x_\nu)_{\mu=1,\ldots,m}$$

Das Resultat ist ein Spaltenvektor mit m Zeilen. Dieses Produkt haben wir bereits kennen gelernt: Die linke Seite eines linearen Gleichungssystems hat diese Form $A \cdot \mathbf{x}$, und eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ wird durch $\mathbf{x} \mapsto A \cdot \mathbf{x}$ gegeben.

Beispiel 2.14 *Ist $\mathbb{1}_m$ die $m \times m$-Einheitsmatrix und $A \in M(m \times n)$, so ist*

$$\mathbb{1}_m \cdot A = (\delta_{\lambda,\mu}) \cdot (a_{\mu,\nu}) = (\sum_{\mu=1}^m \delta_{\lambda,\mu} \cdot a_{\mu,\nu}) = (a_{\lambda,\nu}) = A.$$

Ebenso ist

$$A \cdot \mathbb{1}_n = A.$$

Beispiel 2.15 *Sind $A(\alpha)$ und $A(\beta)$ die Drehmatrizen*

$$\begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} cos(\beta) & -sin(\beta) \\ sin(\beta) & cos(\beta) \end{pmatrix},$$

so ist das Produkt

$$\begin{aligned} A(\alpha) \cdot A(\beta) &= \begin{pmatrix} cos(\alpha)cos(\beta) - sin(\alpha)sin(\beta) & -cos(\alpha)sin(\beta) - sin(\alpha)cos(\beta) \\ sin(\alpha)cos(\beta) + cos(\alpha)sin(\beta) & -sin(\alpha)sin(\beta) + cos(\alpha)cos(\beta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} cos(\alpha+\beta) & -sin(\alpha+\beta) \\ sin(\alpha+\beta) & cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

die Drehmatrix zum Winkel $\alpha + \beta$. Dieses Ergebnis ist eine direkte Konsequenz der Additionstheoreme für die Winkelfunktionen.

Beispiel 2.16 *Sei*

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 1 & 0 & 0 & . & & & . \\ 0 & 0 & 1 & . & & & . \\ . & . & . & 1 & . & & . \\ . & & & . & . & . & . \\ . & & & & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(m \times m).$$

Dann ist für jede $m \times n$–Matrix A

$$E \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 1 & 0 & 0 & . & & & . \\ 0 & 0 & 1 & . & & & . \\ . & . & . & 1 & . & & . \\ . & & & . & . & . & . \\ . & & & & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & . & . & . & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & . & . & . & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & . & . & . & a_{3,n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m,1} & a_{m,2} & . & . & . & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & . & . & . & a_{2,n} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & . & . & . & a_{1,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & . & . & . & a_{3,n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m,1} & a_{m,2} & . & . & . & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

*Das heißt, Linksmultiplikation von E an A vertauscht in A die erste mit der zweiten Zeile. Allgemeiner können alle drei Arten elementarer Zeilenumformungen durch Linksmultiplikation mit den folgenden Matrizen (*Elementarmatrizen*) erreicht werden:*
Vertauschen zweier Zeilen (Elementarmatrix vom Typ I):

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & . & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & 0 & . & . & . & 1 & & & \\ & & & . & 1 & & & . & & & \\ & & & . & & . & & . & & & \\ & & & . & & & 1 & . & & & \\ & & & 1 & . & . & . & 0 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & . & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplikation einer Zeile mit $c \in \mathbb{R}$ (Elementarmatrix vom Typ II):

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & . & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & c & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & . & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Addieren des c-fachen einer Zeile zu einer anderen (Elementarmatrix vom Typ III):

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & . & & & & & \\ & & 1 & . & c & & \\ & & & . & . & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & . & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Für die Matrizenmultiplikation gelten folgende Rechenregeln:

$$\text{Assoziativität:} \qquad (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

Beweis. Wir berechnen

$$(AB)C = (\sum_\mu(\sum_\lambda a_{\kappa,\lambda}b_{\lambda,\mu})c_{\mu,\nu})_{\kappa,\nu} = (\sum_{\mu,\lambda} a_{\kappa,\lambda}b_{\lambda,\mu}c_{\mu,\nu})_{\kappa,\nu} = (\sum_\lambda a_{\kappa,\lambda}(\sum_\mu b_{\lambda,\mu}c_{\mu,\nu}))_{\kappa,\nu} = A(BC).$$

Distributivität:

$$\begin{aligned} &(A_1 + A_2) \cdot B = A_1 \cdot B + A_2 \cdot B \\ &A \cdot (B_1 + B_2) = A \cdot B_1 + A \cdot B_2 \\ &(c \cdot A) \cdot B = A \cdot (c \cdot B) = c \cdot A \cdot B \text{ für } c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Der Beweis hierfür ist ähnlich tiefsinnig wie für die Assoziativität.

Ein ganz entscheidender Unterschied zur Multiplikation reeller Zahlen besteht darin, dass die Matrizenmultiplikation *nicht kommutativ* ist.

$$\boxed{\text{Im Allgemeinen ist} \quad A \cdot B \neq B \cdot A.}$$

Wir berechnen dafür als Beispiel

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_1 & a \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b + ab_2 \\ 0 & a_2b_2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} b_1 & b \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b_1a_1 & b_1a + ba_2 \\ 0 & b_2a_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Im allgemeinen (z.B. wenn $a = b = 1$ und $a_1 + b_2 \neq a_2 + b_1$) unterscheiden sich die beiden Dreiecksmatrizen durch ihren Eintrag rechts oben.

Nachdem wir nun die formalen Eigenschaften der Matrizenmultiplikation zusammengestellt haben, erinnern wir daran, dass diese Matrizenmultiplikation dem Hintereinanderausführen linearer Abbildungen entspricht: Sind $\Phi : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$ und $\Psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ linear mit Matrizen $A \in M(m \times l)$ und $B \in M(n \times m)$, so gehört zur linearen Abbildung $\Psi \circ \Phi$ die Matrix $B \cdot A$ (s. Ende des letzten Abschnitts 2.2).

Wir wollen nun die Matrix zur Umkehrabbildung Φ^{-1} bestimmen, wenn diese existiert. Dazu sei $\Phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ linear und bijektiv. Die Umkehrabbildung

$$\Phi^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ \mathbf{y} \mapsto \mathbf{x} \text{ falls } \Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{y} \end{cases}$$

existiert dann und ist linear, denn

$$\mathbf{y}_1 = \Phi(\mathbf{x}_1), \quad \mathbf{y}_2 = \Phi(\mathbf{x}_2) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y} := \Phi(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2) = c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2$$

impliziert

$$\Phi^{-1}(\mathbf{y}) = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 = c_1\Phi^{-1}(\mathbf{y}_1) + c_2\Phi^{-1}(\mathbf{y}_2).$$

Aus dem Bildsatz (Satz 2.5) folgt deswegen $n \leq m$ und $m \leq n$, also $m = n$. Eine bijektive lineare Abbildung exisitiert also nur zwischen Zahlenräumen $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ gleicher Dimension $m = n$.

Sei nun $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear und invertierbar mit zugehöriger Matrix A. Die zu Φ^{-1} gehörige Matrix sei B. Da $\Phi^{-1} \circ \Phi = \Phi \circ \Phi^{-1} = id$, und da dem Hintereinanderausführen linearer Abbildungen die Matrizenmultiplikation entspricht, folgern wir

$$A \cdot B = B \cdot A = \mathbb{1}_n.$$

Definition 2.4 *Eine Matrix $A \in M(n \times n)$ heißt* invertierbar, *wenn es eine Matrix $B \in M(n \times n)$ gibt mit $AB = BA = \mathbb{1}_n$.*

Natürlich braucht für die Invertierbarkeit nur $A \cdot B = \mathbb{1}$ oder $B \cdot A = \mathbb{1}$ zu gelten, denn in beiden Fällen folgt, dass die lineare Abbildung mit Matrix B die Umkehrabbildung zur Abbildung mit Matrix A ist.

Die Matrix B mit dieser Eigenschaft ist durch A eindeutig bestimmt, denn aus $AB_1 = AB_2 = \mathbb{1}_n$ und $B_1 A = \mathbb{1}_n$ folgt

$$B_1 = B_1(AB_1) = B_1(AB_2) = \mathbb{1}_n B_2 = B_2.$$

Wir nennen B die *inverse Matrix* zu A, $\quad B := A^{-1}$.

Beispiel 2.17 *Die Inversen der Elementarmatrizen sind:*

$$\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \cdot & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & & & \\
 & & & \cdot & 1 & & & \cdot & & & \\
 & & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & & \\
 & & & \cdot & & & 1 & \cdot & & & \\
 & & & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \cdot & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \cdot & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & & & \\
 & & & \cdot & 1 & & & \cdot & & & \\
 & & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & & \\
 & & & \cdot & \cdot & & 1 & \cdot & & & \\
 & & & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \cdot & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \cdot & & & & & \\
 & & 1 & & & & \\
 & & & c & & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & \cdot & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \cdot & & & & & \\
 & & 1 & & & & \\
 & & & 1/c & & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & \cdot & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \cdot & & & & & \\
 & & 1 & \cdot & c & & \\
 & & & \cdot & \cdot & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & \cdot & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \cdot & & & & & \\
 & & 1 & \cdot & -c & & \\
 & & & \cdot & \cdot & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & \cdot & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix}.$$

Satz 2.6 (Quadratische Matrizen) *Die Matrix $A \in M(n \times n)$ gehöre zur linearen Abbildung Φ, d.h.*

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x} \mapsto A \cdot \mathbf{x} \end{cases}$$

Dann sind äquivalent:

1) Φ ist bijektiv,

1') A ist invertierbar,

2) Φ ist injektiv,

2') das homogene lineare Gleichungssystem $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ hat nur die triviale Lösung $\mathbf{x} = \mathbf{0}$,

3) Φ ist surjektiv,

3') das inhomogene lineare Gleichungssystem $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ hat für jede Wahl der rechten Seite $\mathbf{b}$ eine Lösung $\mathbf{x}$,

4) die Matrix A ist durch elementare Zeilenumformungen auf **Dreiecksform**

$$\begin{pmatrix} 1 & * & . & . & . & * \\ 0 & 1 & * & & & . \\ . & . & . & . & & . \\ . & & . & . & . & . \\ . & & & . & . & * \\ 0 & . & . & . & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

zu bringen.

Beweis. Die Implikationen „1) $\Leftrightarrow$ 1')" und „1) $\Leftrightarrow$ 2) + 3)" sind klar.

„2) $\Leftrightarrow$ 2')" Die Injektivität von Φ bedeutet, dass aus $\Phi(\mathbf{x}_1) = \Phi(\mathbf{x}_2)$ folgt $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$. Wegen der Linearität von Φ ist $\Phi(\mathbf{x}_1) = \Phi(\mathbf{x}_2)$ äquivalent mit $\Phi(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = 0$. Somit können wir die Injektivität *linearer Abbildungen* kürzer so charakterisieren: aus $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ folgt $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Da $\Phi(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$, ist dies äquivalent mit: Aus $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ folgt $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, d.h. das homogene Gleichungssystem $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ hat nur die Lösung $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

„3) $\Leftrightarrow$ 3')" Wegen $\Phi(x) = A \cdot \mathbf{x}$ ist 3') tatsächlich nur eine einfache Umformulierung der Surjektivität.

„2') $\Rightarrow$ 4)" Die Matrix A werde durch elementare Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform gebracht. Wenn diese Stufenform weniger als n Stufen enthielte, gäbe es darin Spalten ohne Stufe. In diesen Spalten könnte die Unbekannte beliebig gewählt werden, es gäbe dazu stets eine Lösung des homogenene Gleichungssystems $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$. Insbesondere hätte das homogene System eine Lösung $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Dies widerspricht der Eigenschaft 2'), die Anzahl der Stufen muss also n sein und die Zeilenstufenform ist eine Dreiecksform.

„3') $\Rightarrow$ 4)" Die Matrix A werde in Zeilenstufenform Z gebracht. Wenn Z weniger als n Stufen enthielte, wäre das Gleichungssystem $Z \cdot \mathbf{x} = \mathbf{e}_n$ unlösbar. Machte man die elementaren Zeilenumformungen wieder rückgängig, so erhielte man aus Z die Matrix A zurück und aus $\mathbf{e}_n$ einen Vektor $\mathbf{b}$, für den das Gleichungssystem $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ unlösbar ist. Dies wäre ein Widerspruch zu 3'). Somit ist die Zeilenstufenform eine Dreiecksform.

„4) $\Rightarrow$ 2')" Nach Voraussetzung können wir jetzt A durch elementare Zeilenumformungen auf die Dreiecksform D bringen. Das Gleichungssystem $D \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ hat nur die Null-Lösung. Seine Lösungen sind aber die gleichen, wie die des Systems $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$. das beweist 2').

„4) $\Rightarrow$ 3')" Sei eine rechte Seite $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ beliebig vorgegeben. Wir wenden elementare Zeilenumformungen auf die *erweiterte* Koeffizientenmatrix $(A, \mathbf{b})$ an, mit denen wir A auf Dreiecksform bringen und die Lösungen des inhomogenen Gleichungssystems nicht ändern. Hat aber die Koeffizientenmatrix Dreiecksform, so ist das Gleichungssystem bei beliebiger Wahl der rechten Seite lösbar. Daraus folgt 3'). □

Beispiel 2.18 *Wann ist eine 2×2–Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

invertierbar? Nach Satz 2.6 ist dies genau dann der Fall, wenn wir A auf eine Stufenform

$$\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bringen können. Falls $a \neq 0$ ist, dividieren wir erst die erste Zeile durch a und subtrahieren dann c-mal die neue erste Zeile von der zweiten. Wir erhalten die Stufenform

$$\begin{pmatrix} 1 & b/a \\ 0 & d - bc/a \end{pmatrix}.$$

In diesem Fall ist

$$\boxed{a \cdot d - b \cdot c \neq 0}$$

die Bedingung dafür, dass A invertierbar ist. Falls $a = 0$ und $c \neq 0$ ist, vertauschen wir erste und zweite Zeile und kommen zur selben Bedingung. Wenn aber $a = c = 0$ ist, ist die Dreiecksform nie zu erreichen. Es folgt: Unsere Bedingung $ad - bc \neq 0$ ist notwendig und hinreichend dafür, dass A invertierbar ist.

Wenn A invertierbar ist, so wollen wir A^{-1} auch ermitteln. Wieder wenden wir elementare Zeilenumformungen an, und zwar in einer Form, die man auch für größere Matrizen durchaus zur praktischen Bestimmung von A^{-1} heranzieht. (Wir diskutieren nur den Fall $a \neq 0$.):

Elementarmatrix	umgeformtes A	umgeformte Einheitsmatrix
	$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & b/a \\ c & d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & b/a \\ 0 & d - bc/a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ -c/a & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a/(ad - bc) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & b/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ -c/(ad - bc) & a/(ad - bc) \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & -b/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} d/(ad - bc) & -b/(ad - bc) \\ -c/(ad - bc) & a/(ad - bc) \end{pmatrix}$

Hier haben wir in der dritten Spalte dieselben elementaren Zeilenumformungen auf die Einheitsmatrix angewendet, wie auf die Matrix A. Am Schluss der dritten Spalte ergibt sich das Produkt der Elementarmatrizen, welche man von links an die Matrix A heranmultiplizieren muss, um A in die Einheitsmatrix zu überführen. Dies Produkt ist deswegen die inverse Matrix

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Satz 2.7 *Für jede $m \times n$-Matrix gilt*

$$\textit{Zeilenrang von } A = \textit{ Spaltenrang von } A.$$

Beweis. Ist A eine Matrix in Zeilenstufenform mit r Zeilen $\neq \mathbf{0}$, so sind, wie wir schon gesehen haben, die r Zeilenvektoren linear unabhängig. Diese Zeilenvektoren spannen also einen linearen Unterraum der Dimension r im $\mathbb{R}^n$ auf, der Zeilenrang ist r.

Die Spaltenvektoren liegen alle im linearen Unterraum $\mathbb{R}^r$, der von den ersten r Koordinatenvekto-ren im $\mathbb{R}^m$ aufgespannt wird. Der Spaltenrang ist also höchstens r. Nun enthält die Matrix genauso viele Stufen wie Zeilen, nämlich r. Auch die r Spaltenvektoren, in denen diese Stufen stehen sind linear unabhängig. Damit ist der Spaltenrang mindestens r, und insgesamt ergibt sich der Spaltenrang als r.

Weiter ändert sich der Zeilenrang nicht bei elementaren Zeilenumformungen. Es bleibt also zu zeigen, dass sich bei elementaren Zeilenumformungen auch der Spaltenrang nicht ändert: Nun wissen wir, dass jede elementare Zeilenumformung in der Matrix A bewirkt werden kann als Links-Multiplikation $E \cdot A$ mit einer Elementarmatrix E. Die Spaltenvektoren $E \cdot \mathbf{a}_1, ..., E \cdot \mathbf{a}_n$ von $E \cdot A$ sind die Bilder der Spaltenvektoren $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n$ aus A unter der linearen Abbildung $\mathbf{x} \mapsto E \cdot \mathbf{x}$. Der von ihnen aufgespannte Unterraum des $\mathbb{R}^m$ ist das Bild von $span(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n)$ unter dieser linearen Abbildung. Nach dem Bildsatz (Satz 2.5) ist $dim(span(E \cdot \mathbf{a}_1, ..., E \cdot \mathbf{a}_n)) \leq dim(span(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n))$. Bei einer elementaren Zeilenumformung wird der Spaltenrang also nicht größer. Da wir dies auch auf die inverse Transformation anwenden können, bleibt der Spaltenrang tatsächlich gleich. □

Definition 2.5 *Die Zahl Spaltenrang(A) = Zeilenrang(A) heißt* Rang der Matrix *A.*

Wir formulieren Satz 2.7 um, nachdem wir den Begriff der transponierten Matrix einführen: Sei dazu

$$A = (a_{\mu,\nu}) \in M(m \times n)$$

eine $m \times n$-Matrix. Dann heißt die $n \times m$-Matrix

$$A^t = (b_{\nu,\mu}) \in M(n \times m) \text{ mit } b_{\nu,\mu} = a_{\mu,\nu}$$

die *transponierte Matrix* zu A.

Satz 2.8 *Der Rang einer Matrix stimmt mit dem Rang ihrer transponierten Matrix überein:*

$$Rang(A) \quad = \quad Rang(A^t).$$

Aufgabe 2.16 *Berechnen Sie die Produkte $A \cdot B$ und $B \cdot A$ für die Matrizen*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2.17 *Berechnen Sie die Produkte $A \cdot B$ und $B \cdot A$ für die Matrizen*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2.18 *Es sei*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A \cdot A^2$, ..., $A^n = A \cdot A^{n-1}$ *für* $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2.19 *Es sei*

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie N^2, N^3 *und* N^4.

Aufgabe 2.20 *Bestimmen Sie die Inversen der Matrizen*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2.21 *Bestimmen Sie die Inversen der Matrizen*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2.22 *Gegeben seien die Matrizen*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Man zeige, dass es zu jedem $\lambda \in \mathbb{R}$ *einen vom Nullvektor verschiedenen Vektor* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ *gibt mit*

$$A\mathbf{v} = \lambda B\mathbf{v}.$$

2.4 Permutationen und Permutationsmatrizen

Definition 2.6 *Eine* Permutation von n Elementen, *z.B. der Zahlen* $1, 2, ..., n$, *ist eine bijektive Abbildung*

$$\sigma : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}.$$

Eine solche Permutation schreiben wir auch

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & n \\ \sigma(1) & . & . & . & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Die Menge aller Permutationen von n *Elementen bezeichnen wir mit* Σ_n. *Jedes* $\sigma \in \Sigma_n$ *ist eine bijektive Abbildung und besitzt daher eine Umkehrabbildung* $\sigma^{-1} \in \Sigma_n$.

Beispiel 2.19

$n=1$: $\Sigma_1 = \{id\}$,

$$n=2: \quad \Sigma_2 = \left\{ id, \quad \sigma_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$n=3: \quad \Sigma_3 = \left\{ \begin{array}{c} id,\ \sigma_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ \sigma_{1,3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ \sigma_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \right\}.$$

Hier haben wir die Bezeichnung $\sigma_{k,l}$ für die *Vertauschung*

$$\begin{pmatrix} 1 & \ldots & k & \ldots & l & \ldots & n \\ 1 & \ldots & l & \ldots & k & \ldots & n \end{pmatrix}$$

der Zahlen k und l benutzt.

Mit je zwei Permutationen $\sigma, \tau \in \Sigma_n$ gehört auch die Hintereinanderschaltung (oder, wie man meist sagt, das Produkt)

$$\sigma \circ \tau : \nu \mapsto \sigma(\tau(\nu))$$

wieder zu Σ_n. Es ist zu beachten, dass

$$(\sigma \circ \tau)^{-1} = \tau^{-1} \circ \sigma^{-1},$$

denn es ist

$$(\tau^{-1} \circ \sigma^{-1}) \circ (\sigma \circ \tau)(\nu) = \tau^{-1}(\sigma^{-1} \circ \sigma(\tau(\nu))) = \tau^{-1}\tau(\nu) = \nu.$$

Beispiel 2.20 *Wir betrachten das Produkt $\sigma_{1,2} \circ \sigma_{2,3}$ in Σ_3. Dieses Produkt bildet die Zahlen $1, 2, 3$ folgendermaßen ab:*

	$\sigma_{2,3}$		$\sigma_{1,2}$	
1	$\mapsto$	1	$\mapsto$	2
2	$\mapsto$	3	$\mapsto$	3
3	$\mapsto$	2	$\mapsto$	1

Das Produkt bildet die Zahlen $1, 2, 3$ genauso ab, wie die Permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

also ist

$$\sigma_{1,2} \circ \sigma_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ihr Inverses ist

$$(\sigma_{1,2} \circ \sigma_{2,3})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Und, in der Tat, wegen

$$\sigma_{1,2}^{-1} = \sigma_{1,2}, \quad \sigma_{2,3}^{-1} = \sigma_{2,3}$$

haben wir

$$\begin{array}{ccccc} & \sigma_{1,2}^{-1} & | & \sigma_{2,3}^{-1} & \\ \hline 1 & \mapsto & 2 & \mapsto & 3 \\ 2 & \mapsto & 1 & \mapsto & 1 \\ 3 & \mapsto & 3 & \mapsto & 2. \end{array}$$

Satz 2.9 *Die Menge Σ_n der Permutationen von n Zahlen enthält*

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$$

Elemente. Für fest gewähltes $\sigma \in \Sigma_n$ ist die Abbildung

$$\Sigma_n \ni \tau \mapsto \tau \circ \sigma \in \Sigma_n$$

bijektiv.

Beweis. Die Anzahlformel wird durch vollständige Induktion gezeigt: Die Anzahl der Elemente in Σ_1 ist $1 = 1!$ (Induktionsanfang). Nehmen wir nun $n \geq 2$ an und dass Σ_{n-1} aus $(n-1)!$ Elementen bestünde. Daraus schließen wir die Behauptung für Σ_n : Jede Permutation $\sigma \in \Sigma_n$ ist aber bestimmt durch ihren Wert $s := \sigma(n)$ (dafür gibt es n Möglichkeiten) und eine bijektive Abbildung $\{1, ..., n-1\} \to \{1, ..., n\} \setminus s$. Solche Abbildungen gibt es genauso viele, wie Σ_{n-1} Elemente enthält, nach Induktionsannahme also $(n-1)!$. Deswegen enthält die Menge Σ_n insgesamt

$$n \cdot (n-1)! = n!$$

Elemente.

Die angegebene Abbildung $\tau \mapsto \tau \circ \sigma$ ist bijektiv, weil $\tau \mapsto \tau \circ \sigma^{-1}$ deren Umkehrabbildung ist. □

Jede Permutation $\sigma \in \Sigma_n$ bestimmt eine Permutationsmatrix

$$E_\sigma = \left(\mathbf{e}_{\sigma(1)}, \mathbf{e}_{\sigma(2)}, ..., \mathbf{e}_{\sigma(n)} \right).$$

In der k–ten Spalte von E_σ steht der Spaltenvektor $\mathbf{e}_{\sigma(k)}$. Also beschreibt diese Permutationsmatrix die lineare Abbildung

$$\mathbf{e}_k \mapsto \mathbf{e}_{\sigma(k)}.$$

Die Permutationsmatrix E_σ ist aus der Einheitsmatrix durch Vertauschen von Spalten entstanden, deswegen steht in jeder Zeile und in jeder Spalte dieser Matrix genau eine Eins. Zum Beispiel haben wir

$$\begin{array}{ll} \sigma = \sigma_{1,2} & E_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ . & . & . & ... & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} \\ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ 2 & 3 & 4 & ... & 1 \end{pmatrix} & E_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Die Permutationsmatrix $E_{\sigma_{k,l}}$ zur Vertauschung $\sigma_{k,l}$ entsteht aus der Einheitsmatrix $\mathbb{1}$ durch Vertauschen der k-ten mit der l-ten Spalte. Dasselbe Resultat erhalten wir aber, wenn wir in der Einheitsmatrix die k-te mit der l-ten Zeile vertauschen. Unsere Matrix ist genau die Elementarmatrix zur Vertauschnug von k-ter und l-ter Zeile.

Zur Permutationsmatrix $E_{\sigma\circ\tau}$ gehört die lineare Abbildung

$$\mathbf{e}_k \mapsto \mathbf{e}_{(\sigma\circ\tau)(k)} = \mathbf{e}_{\sigma(\tau(k))} = E_\sigma \cdot \mathbf{e}_{\tau(k)} = E_\sigma \cdot E_\tau \cdot \mathbf{e}_k,$$

d.h. es ist

$$E_{\sigma\circ\tau} = E_\sigma \cdot E_\tau.$$

Insbesondere ist die Matrix $E_{\sigma_{k,l}} \cdot E_\sigma$, die aus E_σ durch Vertauschen der k–ten mit der l–ten Spalte hervorgeht, gerade $E_{\sigma_{k,l}\circ\sigma}$.

Jede Permutationsmatrix E_σ kann durch elementare *Zeilenumformungen vom Typ I (Zeilenvertauschungen)* in Zeilenstufenform gebracht werden. Dabei ändert sich die Zahl n der Matrixeinträge $=1$ nicht. Die Zeilenstufenform von E ist deswegen die Einheitsmatrix $\mathbb{1}$. Daraus folgt:

$$E_{\sigma_{k_1,l_1}} \cdot ... \cdot E_{\sigma_{k_r,l_r}} \cdot E_\sigma = \mathbb{1},$$

$$E_\sigma = E^{-1}_{\sigma_{k_r,l_r}} \cdot ... \cdot E^{-1}_{\sigma_{k_1,l_1}} \cdot \mathbb{1} = E_{\sigma_{k_r,l_r}} \cdot ... \cdot E_{\sigma_{k_1,l_1}}.$$

Jede Permutationsmatrix E_σ ist ein Produkt $E_{k_1,l_1} \cdot ... \cdot E_{k_m,l_m}$ von Elementarmatrizen $E_{k,l} = E_{\sigma_{k,l}}$, die zu Vertauschungen gehören. Jede Permutation σ ist ein Produkt $\sigma_{k_1,l_1} \circ ... \circ \sigma_{k_m,l_m}$ von Vertauschungen.

Unser nächstes Ziel ist die Konstruktion der sogenannten *Signum–Funktion.*

Satz 2.10 (Existenz des Signums) *Es gibt eine Abbildung sign : $\Sigma_n \to \{\pm 1\}$ mit den Eigenschaften*
a) $sign(\sigma_{k,l}) = -1$ für jede Vertauschung $\sigma_{k,l}$.
b) $sign(\sigma \circ \tau) = sign(\sigma) \cdot sign(\tau)$ für alle $\sigma, \tau \in \Sigma_n$.

Beweis. Nur für diesen Beweis führen wir folgende Bezeichnung ein: Ein *Fehlstand* in der Permutation $\sigma \in \Sigma_n$ ist ein Paar (i, j), $1 \leq i < j \leq n$, mit $\sigma(i) > \sigma(j)$. Eine Vertauschung $\sigma_{k,l}$ zum Beispiel hat die Bilder

$$(\sigma(1), ..., \sigma(n)) = (1, ..., k-1, l, \underbrace{k+1, ..., l-1}_{l-k-1}, k, l+1, ..., n).$$

Sie hat damit $2(l-k-1)+1 = 2(l-k)-1$ Fehlstände.

Wir definieren die Signum–Funktion durch

$$sign(\sigma) := (-1)^f, \quad f = \text{Anzahl der Fehlstände in } \sigma.$$

Beweis von a). Die Anzahl der Fehlstände in $\sigma_{k,l}$ ist, wie wir soeben bemerkt haben, ungerade.

Beweis von b). Wir wissen dass jede Permutation σ ein Produkt von Vertauschungen $\prod \sigma_{k_\mu,l_\mu}$ ist. Wenn wir b) für den Fall beweisen können, dass $\sigma = \sigma_{k,l}$ eine Vertauschung ist, folgt deshalb

$$sign(\sigma\circ\tau) = sign(\sigma_{k_1,l_1}\circ...\circ\sigma_{k_m,l_m}\circ\tau) = sign(\sigma_{k_1,l_1})\cdot...\cdot sign(\sigma_{k_m,l_m})\cdot sign(\tau) = sign(\sigma)\cdot sign(\tau)$$

ganz allgemein. Somit genügt es, die Behauptung nur für $\sigma = \sigma_{k,l}$ zu beweisen.

Wenn $l > k+1$, dann ist

$$\sigma_{k,l} = \underbrace{\sigma_{k,k+1}\sigma_{k+1,k+2}...\sigma_{l-2,l-1}\sigma_{l-1,l}\sigma_{l-1,l-2}...\sigma_{k+1,k+2}\sigma_{k,k+1}}_{\text{ungerade}}.$$

Deswegen genügt es, die Behauptung für Vertauschungen $\sigma_{k,k+1}$ zu beweisen. Wir zählen die Fehlstände von $\sigma_{k,k+1} \circ \tau$:

- Wenn $\tau^{-1}(k) < \tau^{-1}(k+1)$, dann ist $(\tau^{-1}(k), \tau^{-1}(k+1))$ kein Fehlstand von τ, wohl aber von $\sigma_{k,k+1} \circ \tau$.

- Wenn $\tau^{-1}(k) > \tau^{-1}(k+1)$, dann ist $(\tau^{-1}(k), \tau^{-1}(k+1))$ ein Fehlstand von τ, aber nicht von $\sigma_{k,k+1} \circ \tau$.

Alle anderen Fehlstände von τ und $\sigma_{k,k+1} \circ \tau$ stimmen überein. Die Anzahlen der Fehlstände von τ und $\sigma_{k,k+1} \circ \tau$ unterscheiden sich also um ± 1. Es folgt

$$sign(\sigma_{k,k+1} \circ \tau) = -sign(\tau),$$

und damit ist die Behauptung bewiesen. □

In Σ_3 beispielsweise gibt es die drei Vertauschungen $\sigma_{1,2}, \sigma_{1,3}$ und $\sigma_{2,3}$ mit $signum = -1$ und die drei Permutationen

σ	Anzahl der Vertauschungen	$signum$
id	0	$+1$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_{1,3} \circ \sigma_{1,2}$	2	$+1$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \sigma_{1,2} \circ \sigma_{1,3}$	2	$+1$

mit $signum = +1$.

Aufgabe 2.23 *Gegeben seien die Permutationen*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie $\sigma \circ \tau$ und $\tau \circ \sigma$.
b) Bestimmen Sie die zu σ und τ gehörenden Permutationsmatrizen E_σ und E_τ.
c) Schreiben Sie σ und τ als Produkt von Vertauschungen und bestimmen Sie $sign(\sigma)$ und $sign(\tau)$.

Aufgabe 2.24 *Bestimmen Sie das Signum der Permutation*

$$\rho := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2.25 *Bestimmen Sie das Signum der folgenden beiden Permutationen*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2.26 *In Σ_5 seien die Permutationen*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie
a) die Permutationen $\sigma \circ \tau$ und $\tau \circ \sigma$,
b) sign$(\sigma \circ \tau)$ und sign$(\tau \circ \sigma)$.

Aufgabe 2.27 *Zeigen Sie: Die Permutation $\sigma \in \Sigma_n$ mit*

$$\sigma : 1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto \ldots \mapsto n-1 \mapsto n \mapsto 1$$

hat das Signum sign$(\sigma) = (-1)^{n+1}$.

Aufgabe 2.28 *Zeigen Sie:*
a) sign$(\sigma^{-1}) =$ sign(σ);
b) sign$(\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}) =$ sign(τ).

Aufgabe 2.29 *Zeigen Sie für $\sigma \in \Sigma_n$*

$$sign(\sigma) = \prod_{i<j} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}.$$

2.5 Die Determinante einer $(n \times n)$–Matrix

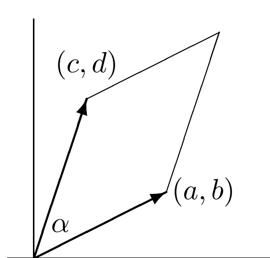
Wir betrachten eine $n \times n$–Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & . & . & . & a_{1,n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n,1} & . & . & . & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

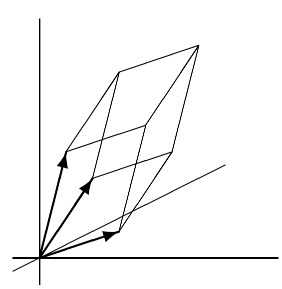
mit den Zeilenvektoren $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^n$. Diese Zeilenvektoren spannen einen *Spat*, bzw. ein *Parallelotop*

$$P(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} = \sum_1^n c_k \mathbf{a}_k, \quad c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}, 0 \le c_k \le 1\}$$

auf.



$n = 2, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$



$n = 3$

Wir möchten das *Volumen* $vol(A)$ dieses Spats berechnen. Der Fall $n = 2$ ist aus der Elementargeometrie bekannt: Die Fläche des Parallelogramms ist das Produkt der Seitenlängen mal $sin(\alpha)$:

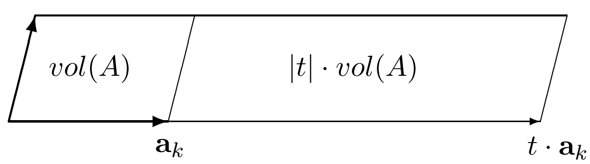
$$
\begin{aligned}
vol\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \| (a,b) \| \cdot \| (c,d) \| \cdot sin(\alpha) \\
&= \| (a,b) \| \cdot \| (c,d) \| \cdot \sqrt{1 - cos^2(\alpha)} \\
&= \| (a,b) \| \cdot \| (c,d) \| \cdot \sqrt{1 - \frac{(\,(a,b)\,.\,(c,d)\,)^2}{\| (a,b) \|^2 \cdot \| (c,d) \|^2}} \\
&= \sqrt{\| (a,b) \|^2 \cdot \| (c,d) \|^2 - (\,(a,b)\,.\,(c,d)\,)^2} \\
&= \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2) - (ac+bd)^2} \\
&= \sqrt{a^2d^2 + b^2c^2 - 2 \cdot abcd} \\
&= \sqrt{(ad-bc)^2} \\
&= |ad - bc|
\end{aligned}
$$

Es ist ziemlich einsichtig, dass das Volumen $vol(A)$ des Spats $P(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n)$ folgende Eigenschaften haben sollte:

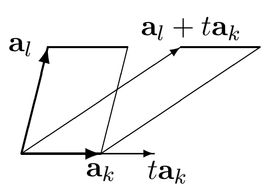
(I) Beim Vertauschen zweier Zeilen in der Matrix A ändert sich das Volumen $vol(A)$ nicht.

(II) Streckt man einen Zeilenvektor mit einem Faktor $t \in \mathbb{R}$, so ändert sich $vol(A)$ mit dem Faktor $|t|$, d.h. in Formeln

$$vol(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_{k-1}, t \cdot \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1}, ..., \mathbf{a}_n) = |t| \cdot vol(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n) \text{ für } t \in \mathbb{R}.$$



(III) $vol(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k, ..., \mathbf{a}_l + t\mathbf{a}_k, ..., \mathbf{a}_n) = vol(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k, ..., \mathbf{a}_l, ..., \mathbf{a}_n)$ für alle $1 \leq k \neq l \leq n$ und $t \in \mathbb{R}$.



(0) Für die Einheitsmatrix $\mathbb{1}$ ist

$$vol(\mathbb{1}) = 1.$$

Die Eigenschaften (I)-(III) beschreiben die Änderung des Volumens von $P(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n)$, wenn man die Vektoren elementaren Zeilentransformationen vom Typ (I)-(III) unterwirft. Wir wollen hier nicht weiter über die formulierten Eigenschaften des Volumens spekulieren, sondern eine Funktion

$$det : M(n \times n) \to \mathbb{R},$$

die *Determinante* der Matrix A, konstruieren, deren Absolutbetrag das Volumen $vol(A)$ ist: $vol(A) = |det(A)|$. Von der Funktion det verlangen wir die folgenden Eigenschaften, die natürlich bis auf das Vorzeichen mit den Eigenschaften von vol übereinstimmen:

(I) Vertauscht man in der Matrix $A \in M(n \times n)$ zwei Zeilen, so ändert sich das Vorzeichen von $det(A)$.

(II) $det(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_{k-1}, t \cdot \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1}, ..., \mathbf{a}_n) = t \cdot det(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(III) $det(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k, ..., \mathbf{a}_l + t\mathbf{a}_k, ..., \mathbf{a}_n) = det(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k, ..., \mathbf{a}_l, ..., \mathbf{a}_n)$ für alle $1 \leq k \neq l \leq n$ und $t \in \mathbb{R}$.

(0) (Normierung) Für die Einheitsmatrix $\mathbb{1}$ gilt

$$det(\mathbb{1}) = 1.$$

Beispiel 2.21 *Die Funktion*

$$det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := ad - bc$$

hat die Eigenschaften (0),(I),(II),(III). Hiervon sind (0), (I), und (II) unmittelbar einsichtig. Zum Beweis von (III) betrachten wir nur den Fall $k = 1$ und $l = 2$. In diesem Fall ist

$$det \begin{pmatrix} a & b \\ c + ta & d + tb \end{pmatrix} = a(d + tb) - b(c + ta) = ad - bc + t(ab - ba) = det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Satz 2.11 (Eindeutigkeit der Determinante) *Wenn eine Funktion $det : M(n \times n) \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften (0) bis (III) existiert, dann ist sie durch diese Eigenschaften eindeutig festgelegt.*

Beweis. Wir wissen, dass man A durch elementare Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform bringen kann, bzw. umgekehrt, dass A durch elementare Zeilenumformungen aus einer Matrix Z in Zeilenstufenform hervorgeht. Da die Eigenschaften (I),(II),(III) genau festlegen, wie sich die Determinante bei einer elementaren Zeilenumformung ändert, genügt es, die Eindeutigkeit für Matrizen Z in Zeilenstufenform zu beweisen. Dazu unterscheiden wir die Fälle:

$Rang(A) < n$. In diesem Fall ist der letzte Zeilenvektor $\mathbf{z}_n$ in Z ein Nullvektor. Dann ist $0 \cdot \mathbf{z}_n = \mathbf{z}_n$, und aus (II) folgt

$$det(Z) = det(\mathbf{z}_1, ..., \mathbf{z}_n) = det(\mathbf{z}_1, ..., \mathbf{z}_{n-1}, 0 \cdot \mathbf{z}_n) = 0 \cdot det(\mathbf{z}_1, ..., \mathbf{z}_n) = 0.$$

$Rang(A) = n$. Nun ist Z eine Dreiecksmatrix und der letzte Zeilenvektor ist $\mathbf{z}_n = \mathbf{e}_n$. Durch Addition geeigneter Vielfacher dieses Vektors zu den vorhergehenden Zeilen (Umformung vom

Typ (III)) können wir erreichen, dass der letzte Eintrag in den ersten $n-1$ Zeilen 0 ist. Jetzt ist der vorletzte Zeilenvektor $\mathbf{z}_{n-1} = \mathbf{e}_{n-1}$, und durch elementare Zeilenumformungen vom Typ III können wir erreichen, dass auch der vorletzte Eintrag in den ersten $n-2$ Zeilen 0 ist. Mit endlich vielen elementaren Zeilenumformungen vom Typ III, können wir also Z in die Einheitsmatrix $\mathbb{1}$ überführen. Aus Eigenschaft (III) und (0) folgt

$$det(Z) = det(\mathbb{1}) = 1.$$

□

Ein ganz anderes Problem ist es, nachzuweisen, dass eine Funktion *det* mit den Eigenschaften (0),...,(III) tatsächlich existiert. Im Wesentlichen läuft dies auf die Existenz des Signums (Satz 2.10) hinaus, denn wenn eine Determinantenfunktion $det(A)$ mit den Eigenschaften (0) und (I) existiert, dann gilt für jede Permutationsmatrix E_σ

$$det(E_\sigma) = sign(\sigma).$$

Beweis: Wir schreiben $\sigma = \sigma_{i_1,j_1} \circ ... \circ \sigma_{i_k,j_k}$ als Produkt von Vertauschungen. Dann ist

$$E_\sigma = E_{\sigma i_1,j_1} \cdot ... \cdot E_{\sigma_{i_k,j_k}}$$

und entsteht aus der Einheitsmatrix durch k-maliges Vertauschen von Zeilen.

Dies ist ein Zusammenhang zwischen Determinante und *signum*-Funktion. Wir benützen die *signum*-Funktion nun für unsere Definition der Determinante:

Definition 2.7 *Es sei* $A = (a_{k,l})_{k,l=1,...,n} \in M(n \times n)$ *eine* $n \times n$*-Matrix. Die Zahl*

$$\boxed{det(A) := \sum_{\sigma \in \Sigma_n} sign(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot ... \cdot a_{n,\sigma(n)}}$$

heißt Determinante der Matrix A. *(Diese Formel für die Determinante stammt von Leibniz und ist nach ihm benannt.)*

Dass diese Determinante tatsächlich die Eigenschaften (0),...,(III) besitzt, weisen wir im nächsten Abschnitt nach. Zuerst einige einfache Beispiele, die zeigen sollen, was diese Formel bedeutet.

Beispiel 2.22 *Im Fall* $n = 1$ *ist* $det(a) = a$.

Beispiel 2.23 *Für* $n = 2$ *ist*

$$det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = \underbrace{sign(id) \cdot a_{1,1}a_{2,2}}_{\sigma=id} + \underbrace{sign(\sigma_{1,2})a_{1,2}a_{2,1}}_{\sigma=\sigma_{1,2}} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}.$$

Wenn wir die Matrix $\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *schreiben, dann wird*

$$\boxed{det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.}$$

Beispiel 2.24 *Für $n = 3$ haben wir*

$$
\begin{aligned}
det\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} &= a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} && \sigma = id \\
&+ a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} && \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_{1,2} \circ \sigma_{1,3} \\
&+ a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} && \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \sigma_{1,3} \circ \sigma_{1,2} \\
&- a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} && \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \sigma_{2,3} \\
&- a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} && \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \sigma_{1,2} \\
&- a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} && \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_{1,3}
\end{aligned}
.
$$

Dies ist die klassische „Regel von Sarrus“ :

$$
\begin{array}{ccc|cc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,1} & a_{3,2} \end{array}
\quad - \quad
\begin{array}{ccc|cc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,1} & a_{3,2} \end{array}
$$

Aufgabe 2.30 *Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen*

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad und \quad \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 14 & 15 & 14 \\ 13 & 12 & 11 \end{pmatrix}.
$$

Aufgabe 2.31 *Es seien*

$$
A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \quad und \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}.
$$

Berechnen Sie

$$
det(A), \quad det(B), \quad det(A \cdot B), \quad det(A) \cdot det(B).
$$

Aufgabe 2.32 *Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen*

$$
M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad und \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}.
$$

2.6 Eigenschaften der Determinante

Wir wollen jetzt einige wichtige Eigenschaften der Determinante angeben. Insbesondere suchen wir nach praktischen Möglichkeiten, die Determinante einer gegebenen Matrix zu berechnen, da die Leibnizsche Formel hierfür bei großen n ungeeignet ist.

Satz 2.12 (Fundamentaleigenschaften der Determinante) *Die Funktion* $det : M(n \times n) \to \mathbb{R}, \quad A \mapsto det(A)$, *hat folgende Eigenschaften:*

1) Linearität in Bezug auf jede Zeile:

$$det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{k-1} \\ s\mathbf{a}_k + t\mathbf{a}'_k \\ \mathbf{a}_{k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = s \cdot det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{k-1} \\ \mathbf{a}_k \\ \mathbf{a}_{k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} + t \cdot det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{k-1} \\ \mathbf{a}'_k \\ \mathbf{a}_{k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix}.$$

2) Schiefsymmetrie in Bezug auf je zwei Zeilen:

$$det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{k-1} \\ \mathbf{a}_k \\ \mathbf{a}_{k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{l-1} \\ \mathbf{a}_l \\ \mathbf{a}_{l+1} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = -det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{k-1} \\ \mathbf{a}_l \\ \mathbf{a}_{k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{l-1} \\ \mathbf{a}_k \\ \mathbf{a}_{l+1} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

3) Normierung: $det(\mathbb{1}_n) = 1$.

Beweis. 1) Wir werten die Determinante auf der linken Seite der Gleichung mit der Leibnizformel aus:

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{\sigma\in\Sigma_n} sign(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot (s \cdot a_{k,\sigma(k)} + t \cdot a'_{k,\sigma(k)}) \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma(n)} = \\
&s \cdot \textstyle\sum_{\sigma\in\Sigma_n} sign(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{k,\sigma(k)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma(n)} + \\
&t \cdot \textstyle\sum_{\sigma\in\Sigma_n} sign(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a'_{k,\sigma(k)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma(n)}.
\end{aligned}$$

2) Wieder mit der Leibnizformel und mit Satz 2.9 ist die Determinante auf der rechten Seite der Gleichung

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{\sigma\in\Sigma_n} sign(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{l,\sigma(k)} \cdot \ldots \cdot a_{k,\sigma(l)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma(n)} = \\
&\textstyle\sum_{\sigma\in\Sigma_n} sign(\sigma) \cdot a_{1,\sigma\sigma_{k,l}(1)} \cdot \ldots \cdot a_{l,\sigma\sigma_{k,l}(l)} \cdot \ldots \cdot a_{k,\sigma\sigma_{k,l}(k)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma\sigma_{k,l}(n)} = \\
-&\textstyle\sum_{\sigma\in\Sigma_n} sign(\sigma\sigma_{k,l}) \cdot a_{1,\sigma\sigma_{k,l}(1)} \cdot \ldots \cdot a_{l,\sigma\sigma_{k,l}(l)} \cdot \ldots \cdot a_{k,\sigma\sigma_{k,l}(k)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma\sigma_{k,l}(n)} = \\
-&\textstyle\sum_{\tau=\sigma\sigma_{k,l}\in\Sigma_n} sign(\tau) \cdot a_{1,\tau(1)} \cdot \ldots \cdot a_{l,\tau(l)} \cdot \ldots \cdot a_{k,\tau(k)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\tau(n)}.
\end{aligned}$$

3) Es ist $det(\mathbb{1}_n) = \sum_\sigma sign(\sigma) \cdot \delta_{1,\sigma(1)} \cdot ... \cdot \delta_{n,\sigma(n)}$, und der Summand ist nur dann $\neq 0$, wenn alle Kronecker-Deltas $= 1$ sind, d.h. wenn $k = \sigma(k)$ für alle $k = 1, ..., n$. Also bleibt nur der Summand für $\sigma = id$ übrig, und die Determinante wird $= 1$. □

Satz 2.13 (Korollar 1 zu Satz 2.12) *Hat die $n \times n$-Matrix A zwei gleiche Zeilen, so ist $det(A) = 0$.*

Beweis. Sind die Zeilenvektoren $\mathbf{a}_k$ und $\mathbf{a}_l$ gleich, so ändert sich A und damit $det(A)$ nicht, wenn wir beide Zeilen vertauschen. Andererseits ändert sich dabei wegen der Schiefsymmetrie das Vorzeichen von $det(A)$. Es folgt:

$$det(A) = -det(A), \qquad 2 \cdot det(A) = 0, \qquad det(A) = \frac{1}{2}(2 \cdot det(A)) = 0.$$

(Hier brauchen wir zum ersten Mal wirklich eine andere reelle Zahl als 0 und 1, nämlich $\frac{1}{2}$. Gäbe es diese Zahl nicht, wäre das Argument unrichtig.) □

Satz 2.14 (Korollar 2 zu Satz 2.12) *Die mit der Leibnizformel definierte Determinante hat die Eigenschaften (0),(I),(II),(III) aus Abschnitt 2.5.*

Beweis. Normierung (0) und Schiefsymmetrie beim Vertauschen von Zeilen (I) sind die Eigenschaften 3) und 2) von Satz ???. Eigenschaft (II) ist Teil der Linearität der Determinante und Eigenschaft (III) folgt aus der Linearität mit Hilfe von Korollar 1. □

Satz 2.15 (Weitere Eigenschaften der Determinante) *a) $det(A) = 0 \Leftrightarrow Rang(A) < n$*
b) $A, B \in M(n \times n) \Rightarrow det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$ (Determinanten-Multiplikations-Satz)
c) $det(A^t) = det(A)$.

Beweis. a) „$\Leftarrow$“ Wenn $Rang(A) < n$ ist, dann sind die Zeilenvektoren $\mathbf{a}_k$ von A linear abhängig. Es besteht also eine Gleichung $\sum_1^n c_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}$, wo nicht alle Koeffizienten $c_k = 0$ sind. Ist etwa $c_l \neq 0$, so folgt daraus

$$c_l = -\sum_{k \neq l} \frac{c_k}{c_l} \mathbf{a}_k.$$

Mit Korollar 1 erhalten wir für die Determinante

$$det(A) = det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{l-1} \\ -\sum_{k \neq l} \frac{c_k}{c_l} \mathbf{a}_k \\ \mathbf{a}_{l+1} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = -\sum_{k \neq l} \frac{c_k}{c_l} det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{l-1} \\ \mathbf{a}_k \\ \mathbf{a}_{l+1} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = 0.$$

b) Wir beweisen die Aussage zunächst für den Fall, dass $A = E$ eine Elementarmatrix ist.

Eine Elementarmatrix E vom Typ (I) entsteht aus der Einheitsmatrix durch Vertauschen zweier Zeilen. Also ist $det(E) = -det(\mathbb{1}) = -1$. Die Matrix $E \cdot B$ entsteht aus B ebenfalls durch Vertauschen zweier Zeilen. Und deswegen ist $det(E \cdot B) = -det(B) = det(E) \cdot det(B)$.

Eine Elementarmatrix E vom Typ (II) multipliziert in B eine Zeile mit einem Faktor $c \in \mathbb{R}$. Für E gilt $det(E) = c$ und wegen der Linearität der Determinante ist $det(E \cdot B) = c \cdot det(B)$.

Eine Elementarmatrix E vom Typ (III) entsteht aus der Einheitsmatrix indem man eine Vielfaches einer Zeile zu einer anderen addiert. Wegen Eigenschaft (III) der Determinante ist also $det(E) = 1$. Da weiter $det(E \cdot B) = det(B)$ ist, folgt die Behauptung auch in diesem Fall.

Wenn $Rang(A) < n$ ist, sind die Zeilen von A linear abhängig und es gibt einen Zeilenvektor $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ mit $\mathbf{x} \cdot A = \mathbf{0}$. Dann ist auch $\mathbf{x} \cdot (A \cdot B) = \mathbf{0}$ und $Rang(A \cdot B) < n$. Mit a) „$\Leftarrow$" folgt $det(B) \cdot det(A) = det(A) = 0$ und $det(A \cdot B) = 0$.

Wenn $Rang(A) = n$ ist, gibt es Elementarmatrizen $E_1, ..., E_k$ so, dass $A = E_1 \cdot ... \cdot E_k$. Es folgt

$$det(A \cdot B) = det(E_1 \cdot ... \cdot E_k \cdot B) = det(E_1) \cdot ... \cdot det(E_k) \cdot det(B) = det(A) \cdot det(B).$$

a) „$\Rightarrow$" Wir schreiben A als Produkt von Elementarmatrizen E_μ und einer Matrix Z in Zeilenstufenform:

$$A = E_1 \cdot ... \cdot E_m \cdot Z.$$

Da die Determinanten der Elementarmatrizen $\neq 0$ sind, folgt aus b) dass $det(Z) = det(A) = 0$. Dann kann Z keine vollständige Dreiecksform haben; die letzte Zeile in Z muss der Nullvektor sein. Es folgt $Rang(A) = Rang(Z) < n$.

c) Mit der Leibnizformel und $sign(\sigma) = sign(\sigma^{-1})$ ist

$$\begin{aligned} det(A^t) &= \sum_{\sigma \in \Sigma_n} sign(\sigma) \cdot a_{\sigma(1),1} \cdot ... \cdot a_{\sigma(n),n} \\ &= \sum_{\sigma \in \Sigma_n} sign(\sigma) \cdot a_{1,\sigma^{-1}(1)} \cdot ... \cdot a_{n,\sigma^{-1}(n)} \\ &= \sum_{\tau = \sigma^{-1} \in \Sigma_n} sign(\tau) \cdot a_{1,\tau(1)} \cdot ... \cdot a_{n,\tau(n)} \\ &= det(A) \end{aligned}$$

Eigenschaft c) bedeutet insbesondere, dass alles, was für die Zeilen einer Determinante gilt, auch für Spalten stimmt. Insbesondere ist also $det(A)$ auch linear in Bezug auf jede Spalte und ändert beim Vertauschen zweier Spalten das Vorzeichen.

Wir benötigen noch zwei häufig anwendbare Methoden zur Berechnung von Determinanten, die wir aber nicht extra als Satz formulieren möchten.

Kästchenregel. Die $n \times n$–Matrix A habe *Kästchenform*

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & * \\ \hline 0 & A_2 \end{array} \right),$$

wo A_1 eine $r \times r$–Matrix und A_2 eine $(n-r) \times (n-r)$–Matrix ist. Das heißt also, das linke untere $(n-r) \times r$–Nullkästchen reicht bis zur Diagonale der Matrix. Dann sind in der Leibnizformel

$$det(A) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} sign(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot ... \cdot a_{r,\sigma(r)} \cdot a_{r+1,\sigma(r+1)} \cdot ... \cdot a_{n,\sigma(n)}$$

alle Produkte $a_{1,\sigma(1)} \cdot ... \cdot a_{r,\sigma(r)}$ =0, wo die Permutation σ eine Zahl $k, r+1 \leq k \leq n$ auf eine Zahl $\sigma(k) \leq r$ abbildet. Die Summe ist also nur über solche Permutationen zu erstrecken, welche die Teilmengen

$$\{1, ..., r\} \text{ und } \{r+1, ..., n\}$$

in sich abbilden. Diese Permutationen bestehen also aus zwei Permutationen

$$\sigma_1 : \{1, ..., r\} \to \{1, ..., r\} \in \Sigma_r, \quad \sigma_2 : \{r+1, ..., n\} \to \{r+1, ..., n\} \in \Sigma_{n-r}.$$

Schreiben wir dies in die Leibnizformel, dann wird

$$\begin{aligned} det(A) &= \sum_{\sigma_1 \in \Sigma_r, \sigma_2 \in \Sigma_{n-r}} sign(\sigma_1 \sigma_2) \cdot (a_{1,\sigma_1(1)} \cdot ... \cdot a_{r,\sigma_1(r)}) \cdot (a_{r+1,\sigma_2(r+1)} \cdot ... \cdot a_{n,\sigma(n)}) \\ &= (\sum_{\sigma_1 \in \Sigma_r} sign(\sigma_1) \cdot a_{1,\sigma_1(1)} \cdot ... \cdot a_{r,\sigma_1(r)}) \cdot (\sum_{\sigma_2 \in \Sigma_{n-r}} sign(\sigma_2) \cdot a_{r+1,\sigma_2(r+1)} \cdot ... \cdot a_{n,\sigma_2(n)}) \\ &= det(A_1) \cdot det(A_2). \end{aligned}$$

Entwicklung nach Spalten oder Zeilen. Wir schreiben den ersten Zeilenvektor $\mathbf{a}_1$ unserer Matrix A als

$$(a_{1,1}, ..., a_{1,k}, ..., a_{1,n}) = (a_{1,1}, 0, ..., 0) + ... + (0, ..., 0, a_{1,k}, 0, ..., 0) + ... + (0, ..., 0, a_{1,n})$$

und wenden die Linearität der Determinante auf die erste Zeile an:

$$\begin{aligned} det(A) &= det \left(\begin{array}{c|ccc} a_{1,1} & 0 & ... & 0 \\ \hline \vdots & & A_{1,1} & \end{array} \right) \\ &\vdots \\ &+ det \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 0 & ... & 0 & a_{1,k} & 0 & ... & 0 \\ \hline & A'_{1,k} & & \vdots & & A''_{1,k} & \end{array} \right) \\ &\vdots \\ &+ det \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & ... & 0 & a_{1,n} \\ \hline & A_{1,n} & & \vdots \end{array} \right). \end{aligned}$$

Hier bezeichnen wir mit $A_{k,l}$ die *Streichungsmatrix* von A zur Stelle (k, l), d.h. die $(n-1) \times (n-1)$–Matrix, welche aus der $n \times n$–Matrix A entsteht, indem man die k–te Zeile und die l–te Spalte streicht. Die erste Determinante auf der rechten Seite hat Kästchenform und berechnet sich zu

$$det \left(\begin{array}{c|c} a_{1,1} & 0 \\ \hline * & A_{1,1} \end{array} \right) = a_{1,1} \cdot det(A_{1,1}).$$

Die anderen Matrizen können auch auf diese Kästchenform gebracht werden. Und zwar müssen wir dazu die k–te Spalte mit der $(k-1)$–ten Spalte vertauschen, dann mit der $(k-2)$–ten usw. Insgesamt ergeben sich dabei $k-1$ Änderungen des Vorzeichens.

$$det \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & a_{1,k} & 0 \\ \hline A^l_{1,k} & . & A^r_{1,k} \end{array} \right) = (-1)^{1+k} det \left(\begin{array}{c|c} a_{1,k} & 0 \\ . & A_{1,k} \end{array} \right) = (-1)^{1+k} a_{1,k} \cdot det(A_{1,k}).$$

Damit haben wir die *Entwicklung von $det(A)$ nach der ersten Zeile:*

$$det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} \cdot a_{1,k} \cdot det(A_{1,k}).$$

Ebenso kann man nach einer anderen (etwa der l–ten) Zeile entwickeln, wenn man diese erst durch $l-1$ Vertauschungen nach oben bringt. Und genauso, wie man nach einer Zeile entwickeln kann, kann man die Determinante nach einer Spalte entwickeln.

Entwicklung nach der l–ten Zeile: $det(A) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+l} \cdot a_{l,k} \cdot det(A_{l,k})$
Entwicklung nach der k–ten Spalte: $det(A) = \sum_{l=1}^{n}(-1)^{k+l} \cdot a_{l,k} \cdot det(A_{l,k})$

Adjunkten und die Inverse Matrix. Die Streichungsdeterminanten $det(A_{l,k})$ kann man zu einer $n \times n$-Matrix zusammenfassen. Transponiert und mit Vorzeichen versehen heißen diese Determinanten die *Adjunkten* von A, und die Matrix

$$A^{adj} = ((-1)^{l+k} det(A_{l,k}))^t$$

heißt die Matrix der Adjunkten. Diese Matrix wurde transponiert, damit das Produkt

$$A \cdot A^{adj} = (a_{\mu,\nu})_{\mu:\text{Zeile},\nu:\text{Spalte}} \cdot ((-1)^{k+l} det(A_{k,l}))_{l:\text{Zeile},k:\text{Spalte}} = (\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu,\nu}(-1)^{k+\nu} det(A_{k,\nu}))_{\mu,k}$$

leicht auszurechnen ist: Die Entwicklung nach Zeilen hat zur Folge, dass alle Diagonaleinträge

$$(A \cdot A^{adj})_{l,l} = \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{l+\nu} \cdot a_{l,\nu} \cdot det(A_{l,\nu}) = det(A)$$

sind. Und die Nicht-Diagonaleinträge ($l_1 \neq l_2$)

$$\sum_{nu=1}^{n} (-1)^{\nu+l_2} a_{l_1,\nu} det(A_{l_2,\nu})$$

kann man interpretieren als Entwicklung nach der l_2-ten Zeile für die Determinante derjenigen Matrix, welche aus A entsteht, indem die l_2-te Zeile durch die l_1-te Zeile ersetzt worden ist. Diese Matrix hat zwei gleiche Zeilen, ihre Determinante ist $= 0$, und

$$(A \cdot A^{adj})_{l_1,l_2} = det(A) \cdot \delta_{l_1,l_2}.$$

Damit haben wir das Matrixprodukt

$$\boxed{A \cdot A^{adj} = det(A) \cdot \mathbb{1}_n}$$

berechnet. Wenn $det(A) \neq 0$ ist, erhalten wir daraus die Formel

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{det(A)} A^{adj}}$$

für die inverse Matrix A^{-1}.

Beispiel 2.25 *Für eine* 2×2*-Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ist die Matrix der Streichungsdeterminanten

$$(det(A_{k,l})) = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$$

und die adjungierte Matrix (Vorzeichen und Transponieren)

$$A^{adj} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Cramersche Regel. Bei Benutzung der Matrizenmultiplikation kann ein lineares Gleichungssystem mit Koeffizientenmatrix A auch

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

geschrieben werden. Ist die Matrix A quadratisch (d.h. eine $n \times n$–Matrix), und ist A invertierbar, so kann man das Gleichungssystem ganz einfach so

$$\mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

lösen. Leider ist dies aber keine Zauberformel, sondern zeigt nur, dass es genauso schwer ist, die inverse Matrix zu berechnen, wie das Gleichungssystem zu lösen. Trotzdem wollen wir unsere Formel für A^{-1} hierauf anwenden.

Die Lösung wird also

$$\mathbf{x} = \frac{1}{det(A)} \cdot A^{adj} \cdot \mathbf{b}.$$

Die k–te Komponente des Vektors $\mathbf{x}$ ist dann

$$x_k = \frac{1}{det(A)} \cdot \sum_{l=1}^{n} (A^{adj})_{k,l} \cdot b_l = \frac{1}{det(A)} \cdot \sum_{l=1}^{n} (-1)^{k+l} \cdot det(A_{l,k}) \cdot b_l.$$

Die Summe kann interpretiert werden als die Entwicklung der modifizierten Koeffizientenmatrix

$$A^{(k)} := \begin{pmatrix} a_{1,1} & . & . & . & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & . & . & . & a_{1,n} \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ a_{n,1} & . & . & . & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & . & . & . & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

wo in A die k–te Spalte durch die rechte Seite $\mathbf{b}$ ersetzt worden ist. Mit dieser Matrix $A^{(k)}$ erhält man also die Lösung $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ in der Form

$$\boxed{x_k = \frac{det(A^{(k)})}{det(A)}.}$$

Dies ist die *Cramersche Regel* zum Lösen linearer Gleichungssysteme mit *quadratischer und invertierbarer* Koeffizientenmatrix.

Aufgabe 2.33 *Berechnen Sie die Determinante der Matrix*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2.34 *Für $A \in M(n \times n)$ zeige man*

$$det(A) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists B \in M(n \times n) \setminus \{0\} \text{ mit } AB = 0.$$

Aufgabe 2.35 *Berechnen Sie*

$$det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 3 & 7 & 9 & 2 \\ 2 & 5 & 12 & -9 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2.36 *Es seien* $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$. *Beweisen Sie*

$$det \begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ a_1 & a_2 & ... & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & ... & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & ... & a_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

(„Vandermondesche Determinante“)

Aufgabe 2.37 *Es seien* $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}$. *Berechnen Sie*

$$det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ b_1 & a_1 & a_1 & ... & a_1 \\ b_1 & b_2 & a_2 & ... & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 & ... & b_n & a_n \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2.38 *Es seien* $a, b, c \in \mathbb{R}$. *Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen*

$$\begin{pmatrix} bc & a^2 & a^2 \\ b^2 & ac & b^2 \\ c^2 & c^2 & ab \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} bc & ab & ac \\ ab & ac & bc \\ ac & bc & ab \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & ac & b^2 & bc \\ ab & b^2 & ac & bc \\ b^2 & bc & bc & c^2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2.39 *Es seien* $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$. *Berechnen Sie*

$$det \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_1 & 0 & y_3 & -y_2 \\ -x_2 & -y_3 & 0 & y_1 \\ -x_3 & y_2 & -y_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2.40 *In* $\mathbb{R}^n$ *seien die* k *Vektoren* $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k$ *gegeben. Sei* $A = (a_{ij})_{i,j=1,...,k}$ *die Matrix mit* $a_{ij} = (\mathbf{x}_i . \mathbf{x}_j)$. *Beweisen Sie: Genau dann sind die Vektoren* $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k$ *linear unabhängig, wenn* $det(A) \neq 0$ *ist.*

Aufgabe 2.41 *Sei* A *eine reelle* $n \times n$*-Matrix, deren Koeffizienten außerhalb der Diagonale alle* 1 *sind und deren Diagonalkoeffizienten alle Null sind. Man zeige* $det(A) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)$.

Aufgabe 2.42 *Sei $n > 1$. Unter den n^2 Elementen a_{ik} einer n-reihigen quadratischen Matrix A seien genau $n+1$ Elemente gleich 1, die übrigen seien gleich Null.*
a) Zeigen Sie: $det(A) \in \{0, 1, -1\}$.
b) Geben Sie für $n = 3$ jeweils ein Beispiel an. Welcher der drei Fälle tritt für $n = 2$ nicht ein?

Aufgabe 2.43 *Für reelle Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ berechne man die Determinante*

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 & ... & -\lambda_n \\ -\lambda_1 & 1-\lambda_2 & -\lambda_3 & ... & -\lambda_n \\ -\lambda_1 & -\lambda_2 & 1-\lambda_3 & ... & -\lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 & ... & 1-\lambda_n \end{vmatrix}.$$