Elemente der Linearen Algebra II

Wolf P. Barth

Sommersemester 09

Version vom 13. Mai 2009

Department Mathematik der Universität
Bismarckstr. 1 1/2, D - 91054 Erlangen
e-mail: barth@mi.uni-erlangen.de

Inhaltsverzeichnis

3 Vektorräume

In diesem Kapitel werden wir die bisher entwickelte Theorie (lineare Gleichungssysteme, lineare Unterräume, Matrizen, Determinanten) auf eine möglichst allgemeine Grundlage stellen. Der Bezug zur geometrischen Vorstellung (=Realisierung im $\mathbb{R}^n$), der für das erste Verstehen wohl unerlässlich ist, wird dabei allerdings leider verloren gehen.

Diese Vorgehensweise hat den Vorteil, dass die logische Struktur der Theorie deutlicher hervortritt. Außerdem gibt es Anwendungen, auch außerhalb der Mathematik (z.B. in Physik oder Informatik), bei denen die bisher entwickelten Methoden nicht ausreichen.

3.1 Gruppen

Die grundlegende Rechenstruktur der Mathematik ist die Struktur einer *Gruppe*.

Definition 3.1 *Eine* Gruppe *ist eine (nichtleere) Menge G zusammen mit einer Verknüpfungsoperation*

$$G \times G \to G, \qquad (g,h) \mapsto g \cdot h,$$

welche folgende Eigenschaften hat:

Assoziativität: *Für alle Elemente $g, h, k \in G$ ist*

$$(g \cdot h) \cdot k = g \cdot (h \cdot k).$$

Existenz der Eins: *Es gibt ein Element $e \in G$ mit*

$$e \cdot g = g \quad \textit{für alle } g \in G.$$

Existenz des Inversen: *Zu jedem Element $g \in G$ gibt es ein $g^{-1} \in G$ mit*

$$g^{-1} \cdot g = e.$$

Die Gruppe heißt kommutativ *oder* abelsch*, wenn zusätzlich gilt*

$$g \cdot h = h \cdot g \quad \textit{für alle Elemente } g, h \in G.$$

Bevor wir aus diesen Eigenschaften Konsequenzen ziehen, beschreiben wir erst Beispiele von Gruppen, die wir schon kennen.

Beispiel 3.1 *Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen mit der Addition $'+'$ als Verknüpfung ist eine abelsche Gruppe. Es ist $e = 0$ und $g^{-1} = -g$. Diese Gruppe enthält die* Untergruppen $(\mathbb{Q}, +)$ *der rationalen und $(\mathbb{Z}, +)$ der ganzen Zahlen.*

Die in obiger Definition für die Struktur einer Gruppe geforderten Rechenregeln sind so wohlbekannt, dass wir nicht auf sie einzugehen brauchen. Alle drei Gruppen sind kommutativ.

Beispiel 3.2 *Der Zahlenraum* $\mathbb{R}^n$ *mit der Addition* $'+'$ *als Verknüpfung ist ebenfalls eine kommutative Gruppe. Es ist* $e = \mathbf{0}$ *der Nullvektor und* $\mathbf{x}^{-1} = -\mathbf{x}$.

Beispiel 3.3 *Die Menge* $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *der rellen Zahlen* $\neq 0$ *ist eine kommutative Gruppe mit der Multiplikation* $'\cdot'$ *als Verknüpfung. Dabei ist* $e = 1$ *und* $g^{-1} = 1/g$.

Beispiel 3.4 *Mit* $\mathbb{Z}_n$ *bezeichnen wir die endliche Menge* $\{0, 1, ..., n-1\}$. *Die Addition modulo* n

$$g + h := \left\{ \begin{array}{c} g+h \\ g+h-n \end{array} \right\} \text{ wenn } \left\{ \begin{array}{l} g+h \leq n-1 \\ g+h \geq n \end{array} \right.$$

definiert auf dieser Menge eine Verknüpfung, welche sie zu einer abelschen Gruppe macht. Es ist $e = 0$ *und*

$$g^{-1} = \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{wenn } g = 0 \\ n-g & \text{wenn } g > 0 \end{array} \right. .$$

Die Rechenregeln für die Gruppenstruktur folgen aus den entsprechenden Regeln für die Gruppe $\mathbb{Z}$, *denn die Addition in* $\mathbb{Z}_n$ *ist ja wirklich nichts anderes, als die übliche Additon ganzer Zahlen modulo* n. *Etwa für* $n = 5$ *ist die Verknüpfungstabelle*

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Beispiel 3.5 *Die* symmetrische Gruppe Σ_n *ist die Menge aller Permutationen der Zahlen* $1, ..., n$ *mit der Hintereinanderschaltung* $\sigma \cdot \tau = \sigma \circ \tau$ *als Verknüpfung. Es ist* $e = id$ *und* σ^{-1} *die Umkehrpermutation. Diese Gruppe ist für* $n \geq 3$ *nicht abelsch, da z.B.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 3.6 *Die Menge aller* invertierbaren $n \times n$*–Matrizen mit der Matrizenmultiplikation als Verknüpfung bildet eine Gruppe. Dass diese Matrizen-Multiplikation assoziativ ist, d.h.,* $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$, *das haben wir im letzten Semester in Abschnitt 2.3 angemerkt. Das Einselement ist* $e = \mathbb{1}_n$, *das Inverse ist die inverse Matrix.*

Diese Gruppe heißt allgemeine lineare Gruppe $GL(n, \mathbb{R})$. *Für* $n = 1$ *ist dies die abelsche Gruppe* $\mathbb{R}^*$, *für* $n \geq 2$ *ist* $GL(n, \mathbb{R})$ *nicht abelsch.*

Bevor wir das nächste Beipiel betrachten, überzeugen wir uns schnell von der Äquivalenz folgender Aussagen für eine $n \times n$-Matrix $A = (\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n)$:

i) Die Spalten $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n$ bilden eine ON-Basis des $\mathbb{R}^n$;

ii) es gilt $A^t \cdot A = \mathbb{1}$;

iii) die lineare Abbildung zur Matrix A ist orthogonal.

Beweis: Die Zeilenvektoren von A^t sind genau die Spaltenvektoren von A. Die Bedingung $A^t \cdot A = \mathbb{1}_n$ ist deshalb genau die ON-Bedingung $(\mathbf{a}_i.\mathbf{a}_j) = \delta_{i,j}$. Dies zeigt die Äquivalenz von i) und ii).

Die Spaltenvektoren sind die Bildvektoren der Standardbasis $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ des $\mathbb{R}^n$. Wenn die lineare Abbildung zur Matrix A orthogonal ist, dann müssen also die Spaltenvektoren $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n$ eine ON-Basis des $\mathbb{R}^n$ bilden. Dies beweist „iii) $\Rightarrow$ i)“ . Die Umkehrung „i) $\Rightarrow$ iii)“ folgt aus Satz 2.3 des letzten Semesters. $\square$

Satz 3.1 (Lemma) *Das Transponieren von Matrizen verträgt sich im folgenden Sinn mit der Matrizenmultiplikation:*

$$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t.$$

Beweis. Der Eintrag in $(A \cdot B)^t$ in der k-ten Zeile und der l-ten Spalte ist

$$(A \cdot B)_{l,k} = \sum_\nu a_{l,\nu} b_{\nu,k} = (B^t \cdot A^t)_{k,l}.$$

Beispiel 3.7 *Matrizen A mit den äquivalenten Eigenschaften i), ii), iii) heißen* orthogonal. *Mit der Matrizenmultiplikation als Verknüpfung bilden sie eine Gruppe: Wenn A und B orthogonal sind, dann ist auch $A \cdot B$ orthogonal, denn*

$$(A \cdot B)^t \cdot (A \cdot B) = B^t \cdot (A^t \cdot A) \cdot B = B^t \cdot B = \mathbb{1}.$$

Die Assoziativität der Matrizenmultiplikation ist klar. Die Einheitsmatrix ist auch orthogonal. Jede orthogonale Matrix A ist invertierbar mit $A^{-1} = A^t$. Und die Matrix A^{-1} ist wieder orthogonal, denn sie bildet die ON-Basis $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n$ auf die ON-Basis $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ ab.

Die Gruppe der orthogonalen $n \times n$-Matrizen heißt orthogonale Gruppe $O(n, \mathbb{R})$.

Wir betrachten die zwei-dimensionale orthogonale Gruppe $O(2, \mathbb{R})$ etwas genauer. Dies ist die Menge aller 2×2–Matrizen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Gleichungen

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1, \qquad ac + bd = 0$$

haben die Lösungen

$$(a, b) = (cos(\varphi), -sin(\varphi)), \qquad (c, d) = \pm(sin(\varphi), cos(\varphi)), \qquad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Also besteht $O(2, \mathbb{R})$ aus den Matrizen

$$\begin{pmatrix} cos(\varphi) & -sin(\varphi) \\ sin(\varphi) & cos(\varphi) \end{pmatrix} \qquad \text{(Drehmatrix)},$$

$$\begin{pmatrix} cos(\varphi) & -sin(\varphi) \\ -sin(\varphi) & -cos(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} cos(\varphi) & -sin(\varphi) \\ sin(\varphi) & cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

(Spiegelung an der x_1-Achse $\circ$ Drehung).

Beispiel 3.8 *Die* konforme Gruppe $\mathbb{C}^*$ *ist die Menge der invertierbaren Matrizen*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} &= \sqrt{a^2+b^2} \begin{pmatrix} cos(\varphi) & -sin(\varphi) \\ sin(\varphi) & cos(\varphi) \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{R}) \\ &= r \cdot A, \quad 0 < r \in \mathbb{R}, \quad A \text{ Drehmatrix.} \end{aligned}$$

Diese Matrizen beschreiben Drehstreckungen. *Die Gruppe ist abelsch.*

Diese Beispiele sind sehr verschiedenartig: Vektoraddition in $\mathbb{R}^n$, Multiplikation von Matrizen, Hintereinanderausführung von Permutationen. Aber indem wir sie als Gruppenstrukturen auffassen, sehen wir, wieviel sie in Wirklichkeit gemeinsam haben.

Wir stellen noch einige Konsequenzen aus den Gruppeneigenschaften zusammen:

(1) Die Eins $e \in G$ mit der Eigenschaft $e \cdot g = g$ ('Linkseins') ist auch eine 'Rechtseins', d.h. es gilt $g \cdot e = g$ für alle $g \in G$.

Beweis. Zu beliebigem $g \in G$ gibt es das Inverse g^{-1} mit $g^{-1} \cdot g = e$ und dazu wieder ein Inverses $g' \in G$ mit $g' \cdot g^{-1} = e$. Daraus folgt

$$g = e \cdot g = (g' \cdot g^{-1}) \cdot g = g' \cdot e = g' \cdot (e \cdot e) = (g' \cdot e) \cdot e = (g' \cdot (g^{-1} \cdot g) \cdot e = (g' \cdot g^{-1}) \cdot g \cdot e = g \cdot e.$$

(2) Das 'Linksinverse' g^{-1} zu g mit der Eigenschaft $g^{-1} \cdot g = e$ ist auch ein 'Rechtsinverses', d.h. es gilt $g \cdot g^{-1} = e$.

Beweis. Mit der Notation des vorhergehenden Beweises ist $g = g' \cdot e$ und wegen der Eigenschaft (1) ist dies $= g'$. Also ist auch $g \cdot g^{-1} = g' \cdot g^{-1} = e$.

(3) Das Einselement e ist eindeutig bestimmt.

Beweis. Sei auch $e' \in G$ mit $e' \cdot g = g$ für alle $g \in G$. Setzen wir $g = e$, so folgt daraus $e' \cdot e = e$. Da e aber auch eine Rechtseins ist, gilt $e' \cdot e = e'$.

(4) Das Inverse g^{-1} ist durch g eindeutig bestimmt.

Beweis. Es sei $g^{-1} \cdot g = g' \cdot g = e$. Wegen (2) ist dann

$$g^{-1} = (g^{-1} \cdot g) \cdot g^{-1} = e \cdot g^{-1} = (g' \cdot g) \cdot g^{-1} = g' \cdot (g \cdot g^{-1}) = g'.$$

(5) Kürzungsregel: Seien $a, b, g \in G$. Wenn $g \cdot a = g \cdot b$ gilt, dann auch (Linksmutiplikation mit g^{-1}) die Gleichung $a = b$. Aus $a \cdot g = b \cdot g$ folgt (nach Rechtsmultiplikation mit g^{-1}) die Gleichung $a = b$.

(6) Lösbarkeit von Gleichungen: Zu beliebigen $g, h \in G$ gibt es genau ein $x \in G$ und ein $y \in G$ mit

$$\begin{aligned} g \cdot x = h & \quad (\text{ nämlich } x := g^{-1} \cdot h,) \\ y \cdot g = h & \quad (\text{ nämlich } y := h \cdot g^{-1}.) \end{aligned}$$

Weiter oben haben wir Teilmengen von Gruppen, die selbst wieder Gruppen waren „Untergruppen“ genannt. Diesen Begriff müssen wir noch präzisieren:

Definition 3.2 *Die Menge G mit der Operation $'\cdot'$ sei eine Gruppe. Eine nichtleere Teilmenge $H \subset G$ heißt* Untergrupppe, *wenn sie mit der Operation $'\cdot'$ selbst eine Gruppe ist.*

Satz 3.2 (Untergruppe) *Eine Teilmenge $H \subset G$ der Gruppe G ist eine Untergruppe, genau dann, wenn folgende drei Eigenschaften erfüllt sind:*

1) Die Eins gehört zu H, d.h.: $\quad e \in H$;

2) H ist abgeschlossen unter der Gruppen–Verknüpfung, d.h.: $\quad g, h \in H \Rightarrow g \cdot h \in H$;

3) H ist abgeschlossen unter Inversenbildung, d.h.: $\quad h \in H \Rightarrow h^{-1} \in H$.

Beweis: „$\Rightarrow$“ : 1) Als Gruppe muss H eine Eins haben, wir bezeichnen sie mir e_H, um sie von der Eins $e \in G$ zu unterscheiden. Dann ist

$$e_H = e_H \cdot e_H = e \cdot e_H,$$

und aus der Kürzungsregel in G folgt $e = e_H$.

Die Eigenschaften 2) und 3) müssen offenbar gelten, wenn H mit $'\cdot'$ eine Gruppe sein soll.

„$\Leftarrow$“ : Wenn 1), 2) und 3) gelten, dann besitzt die Menge H mit der Verknüpfung $'\cdot'$ alle Eigenschaften einer Gruppe. $\square$

Beispiel 3.9 *Die* Spezielle lineare Gruppe

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : det(A) = 1\} \subset GL(n, \mathbb{R})$$

ist eine Untergruppe. Das folgt aus dem Determinanten-Multiplikationssatz. Die alternierende Gruppe

$$A_n = \{\sigma \in \Sigma_n : sign(\sigma) = 1\} \subset \Sigma_n$$

ist eine Untergruppe. Das folgt aus der Produktformel für die Signum-Funktion. Mit $GL(n, \mathbb{Z}) \subset GL(n, \mathbb{R})$ bezeichnet man die ganzzahligen $n \times n$-Matrizen mit Determinante ± 1. Dass diese Menge eine Untergruppe ist, folgt aus der Beschreibung der inversen Matrix mit Hilfe der Adjunkten.

Aufgabe 3.1 *Zeigen Sie, dass die Matrizen*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad mit \quad a \cdot c \neq 0$$

eine Untergruppe der $GL(2, \mathbb{R})$ bilden.

Aufgabe 3.2 *Eine Matrix $C \in GL(n, \mathbb{R})$ werde festgehalten.*

a) Zeigen Sie, dass die Matrizen $A \in GL(n, \mathbb{R})$ mit $A \cdot C = C \cdot A$ eine Untergruppe von $GL(n, \mathbb{R})$ bilden.

b) Bestimmen Sie diese Gruppe für $n = 2$ und

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3.3 *Zeigen Sie, dass die Permutationen*

$$id, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe Σ_3 bilden.

3.2 Körper

Definition 3.3 *Ein* Körper *ist eine (nichtleere) Menge K mit zwei Rechenoperationen $'+'$ und $'\cdot'$. Diese Operationen müssen folgende Eigenschaften haben:*

(a) K mit $'+'$ ist eine abelsche Gruppe. (Das neutrale Element wird mit $0 \in K$ bezeichnet, und das Inverse zu $a \in K$ mit $-a$.)

(b) $K^* := K \setminus \{0\}$ mit $'\cdot'$ ist eine abelsche Gruppe. (Hier wird das neutrale Element mit $1 \in K^*$ bezeichnet, und das Inverse zu $0 \neq a \in K^*$ ist $1/a$.)

(c) Für alle $a, b, c \in K$ gilt das Distributivgesetz

$$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Beispiel 3.10 *Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ mit den üblichen Rechenoperationen bilden einen Körper.*

Beispiel 3.11 *Der Körper $\mathbb{C}$ der* komplexen Zahlen: *Als Menge ist $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{(a,b) \, : a, b \in \mathbb{R}\}$ der zweidimensionale Zahlenraum. Statt (a,b) schreibt man jetzt üblicherweise $a + b \cdot i$. Die Addition ist die normale Vektoraddition des $\mathbb{R}^2$. Damit ist (a) erfüllt. Die Multiplikation wird definiert wie in der konformen Gruppe*

$$\mathbb{C}^* = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \, : (0,0) \neq (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Wegen der Formel

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' - bb' & -(ab' + a'b) \\ ab' + a'b & aa' - bb' \end{pmatrix}$$

definiert man die Multiplikation für alle $a + b \cdot i \in \mathbb{C}$ also durch

$$(a + b \cdot i) \cdot (a' + b' \cdot i) := aa' - bb' + (ab' + a'b) \cdot i.$$

Da man natürlich $i = 0 + 1 \cdot i$ setzt, ist insbesondere

$$\boxed{i^2 = -1.}$$

Beweis von (b). Die so definierte Multiplikation in $\mathbb{C}$ ist assoziativ, weil Multiplikation von Matrizen assoziativ ist. Man sieht unmittelbar, dass sie kommutativ ist. Das Einselement ist $1 = 1 + 0 \cdot i$, weil dieses Element zur Einheitsmatrix gehört ($a = 1, b = 0$). Die Inverse Matrix ist

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Also ist für $0 \neq a + b \cdot i \in \mathbb{C}$ das Inverse

$$(a + b \cdot i)^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2}(a - b \cdot i).$$

Eigenschaft (c) gilt, weil die Matrizenmultiplikation distributiv ist.

In $\mathbb{C}$ gibt es die Konjugation

$$c = a + b \cdot i \mapsto \overline{c} = a - b \cdot i.$$

Man benutzt sie, um den Betrag

$$|c| := \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{c \cdot \overline{c}}$$

der komplexen Zahl c (= Länge des Vektors $(a, b) \in \mathbb{R}^2$) und ihr Inverses

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{|c|^2} \cdot \overline{c}$$

kürzer zu schreiben.

Beispiel 3.12 *Die endlichen Körper $\mathbb{F}_p$ (p eine Primzahl). Als Menge ist $\mathbb{F}_p$ die Teilmenge $\{0, 1, ..., p-1\} \subset \mathbb{Z}$. Um die Elemente in $\mathbb{F}_p$ von den entsprechenden Zahlen in $\mathbb{Z}$ zu unterscheiden, wollen wir Elemente in $\mathbb{F}_p$ mit $[m], 0 \leq m \leq p - 1, m \in \mathbb{Z}$ bezeichnen.*

Die Operationen $'+'$ und $'\cdot'$ in $\mathbb{F}_p$ sind die übliche Addition und Multiplikation ganzer Zahlen, aber modulo p genommen. *Was das für die Addition bedeutet, haben wir uns schon im letzten Abschnitt, bei der Gruppe $\mathbb{Z}_n$ angesehen. $\mathbb{F}_p$ mit dieser Addition ist also eine abelsche Gruppe, die wir in Abschnitt 3.1 mit $\mathbb{Z}_p$ bezeichneten.*

Die Multiplikation ist etwas komplizierter definiert wie folgt: Seien $[m], [n] \in \mathbb{F}_p$. In $\mathbb{Z}$ berechnen wir das Produkt $r := m \cdot n \in \mathbb{Z}$. Wir dividieren r durch p mit Rest s:

$$r = k \cdot p + s, \qquad \textit{mit } k, s \in \mathbb{Z} \textit{ und } 0 \leq s \leq p - 1.$$

Man setzt

$$[m] \cdot [n] := [s] \in \mathbb{F}_p.$$

Diese Multiplikation ist assoziativ und kommutativ, da dies für die Multiplikation in $\mathbb{Z}$ gilt, und das neutrale Element ist $[1] \in \mathbb{F}_p$. Auch die Distributivgesetze übertragen sich einfach aus $\mathbb{Z}$. Schwierigkeiten macht nur die Existenz des Inversen für die Multiplikation mit $0 \neq [m] \in \mathbb{F}_p$. Hierzu ist nachzuweisen:

Für jede Primzahl p und jedes $0 \neq [m] \in \mathbb{F}_p$ gibt es ein $[m'] \in \mathbb{F}_p$ mit $[m] \cdot [m'] = [1]$. *(Dieses Element $[m'] \in \mathbb{F}_p$ ist dann das Inverse $[m]^{-1}$.)*

Zum Beweis dieser Aussage genügt es, einzusehen, daß die Multiplikationsabbildung

$$\mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_p, \quad [n] \mapsto [m] \cdot [n]$$

surjektiv ist. Da $\mathbb{F}_p$ *ein endliche Menge ist, genügt es zu zeigen, diese Abbildung ist injektiv, d.h.:*

$$[n_1], [n_2] \in \mathbb{F}_p \text{ mit } [m] \cdot [n_1] = [m] \cdot [n_2] \quad \Rightarrow \quad [n_1] = [n_2].$$

Wegen des Distributivgesetzes genügt es, dafür zu zeigen

$$[m] \cdot [n] = 0 \quad \Rightarrow \quad [n] = 0.$$

Nun bedeutet $[m] \cdot [n] = 0 \in \mathbb{F}_p$ *für die ganzen Zahlen* m *und* n, *daß* mn *durch* p *teilbar ist. Dabei kann* p *nicht* m *teilen, weil* $0 < m < p$. *Also muß der Primfaktor* p *die Zahl* n *teilen. Mit* $0 \leq n < p$ *folgt daraus* $n = 0$. □

Natürlich kann man fragen, wozu solche Körper gut sind. Die komplexen Zahlen kommen beispielsweise in der Physik vor, und der merkwürdige, winzige Körper $\mathbb{F}_2$ in der Theorie der Codes in der Informatik.

Weil der Körper $\mathbb{F}_2$ so merkwürdig ist, wollen wir uns seine Addition und seine Multiplikation einmal ganz explizit anschauen:

$$\begin{array}{c|cc} + & [0] & [1] \\ \hline [0] & [0] & [1] \\ [1] & [1] & [0] \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & [0] & [1] \\ \hline [0] & [0] & [0] \\ [1] & [0] & [1] \end{array}.$$

Mit Elementen aus einem beliebigen Körper kann man genauso wie mit reellen Zahlen rechnen, wenn man nichts anderes als die genannten Körpereigenschaften benutzt. Im ganzen ersten Semester haben wir fast nichts anderes gemacht. Deswegen funktioniert das Folgende mit Elementen aus einem beliebigen Körper K ganz genau so wie mit reellen Zahlen:

- Die Theorie der linearen Gleichungssysteme, Zeilenstufenform, Gauß–Algorithmus;
- der Struktursatz für inhomogene lineare Gleichungssysteme: die allgemeine Lösung eines inhomogenen linearen Gleichungs–Systems erhält man aus einer speziellen Lösung des inhomogenen Systems, indem man dazu alle Lösungen des homogenen Systems addiert;
- Vektorrechnung im K^n, Geraden im K^n;
- lineare Unterräume (= Lösungsmengen homogener linearer Gleichungssysteme);
- lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit, Basis und Dimension;
- lineare Abbildungen und Matrizen;
- Matrizenrechnung (Matrizenmultiplikation), invertierbare Matrizen, Permutationsmatrizen, Determinanten.

Wir werden unsere Notation für die Menge aller Matrizen jetzt etwas abändern: Mit $M(m \times n, K)$ bezeichnen wir künftig die Menge aller Matrizen A mit m Zeilen und n Spalten, und mit Einträgen $a_{i,j} \in K$. Insbesondere schreiben wir jetzt $M(m \times n, \mathbb{R})$ für die Menge der reellen $m \times n$–Matrizen, die wir bisher einrach mit $M(m \times n)$ bezeichneten.

Das Skalarprodukt, und was damit zusammenhängt (Bewegungen, orthogonale Transformationen) läßt sich nicht ohne weiteres von $\mathbb{R}$ auf einen beliebigen Körper K übertragen. Man braucht nämlich die $\geq$-Relation, die in einem beliebigen Körper (z.B. in den komplexen Zahlen) nicht existiert.

Dieses Prinzip des Übergangs von $\mathbb{R}$ zu einem beliebigen Körper K soll an zwei einfachen Beispielen diskutiert werden:

Beispiel 3.13 Ein lineares Gleichungssystem über dem Körper $\mathbb{F}_2$: *Der Einfachheit halber schreiben wir für* $[0], [1] \in \mathbb{F}_2$ *wieder* 0 *und* 1. *Weil in* $\mathbb{F}_2$ *die Regel* $1 + 1 = 0$ *gilt, ist für* $x \in \mathbb{F}_2$ *stets* $x + x = 0 = x - x$. *Also ist Addition dasselbe wie Subtraktion. Wir betrachten das inhomogene lineare Gleichungssystem*

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 &= b_1 \\ x_1 + x_3 &= b_2 \\ x_1 + x_2 &= b_3 \end{aligned}$$

mit beliebigen $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{F}_2$. *Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & b_1 \\ 1 & 0 & 1 & b_2 \\ 1 & 1 & 0 & b_3 \end{array} \right).$$

Wir wenden elementare Zeilenumformungen an:

Vertauschen von 1. und 2. Zeile $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 1 & 1 & b_1 \\ 1 & 1 & 0 & b_3 \end{array} \right)$$

Addition der 1. zur 3. Zeile $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_2 + b_3 \end{array} \right)$$

Addition der 2. zur 3. Zeile $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 + b_2 + b_3 \end{array} \right)$$

Das Gleichungssystem ist also genau dann lösbar, wenn $b_1 + b_2 + b_3 = 0$. *Und dann ist seine Lösungsmenge*

$$\{(x_3 + b_2, x_3 + b_1, x_3) \, : \, x_3 \in \mathbb{F}_2\}.$$

Beispiel 3.14 Die Paulischen Spin-Matrizen *aus der Quantenmechanik sind*

$$\sigma_1 := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sie erfüllen beispielsweise die Regel

$$\begin{aligned}
\sigma_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_2 \cdot \sigma_1 &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \\
&= \frac{i}{2}\sigma_3 + \frac{i}{2}\sigma_3 \\
&= i\sigma_3.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3.4 *Stellen Sie die komplexen Zahlen*

$$(1+i)^{-1}, \quad (2+i)^{-1} \quad (1+3i)^{-1}$$

dar in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3.5 *Bestimmen Sie $\det(A)$, A^2 und A^{-1} für die komplexe 2×2-Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & -i \\ i & 1-i \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3.6 *Berechnen Sie die Determinanten der komplexen Matrizen*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ i & 0 & 2i \\ 0 & 2i & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & i & -1 \\ i & -1 & i \\ -1 & i & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3.7 *Lösen Sie das lineare Gleichungssystem*

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & iy & & & = & i \\ & & y & + & iz & = & i \\ ix & & & + & z & = & i \end{array}.$$

Aufgabe 3.8 *a) Bestimmen Sie den Rang der Matrix*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

über dem Körper $\mathbb{F}_2$ und über dem Körper $\mathbb{F}_5$.

b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & & & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 1 \\ x & & & + & z & = & 1 \end{array}$$

über $\mathbb{F}_2$ und $\mathbb{F}_5$.

3.3 Vektorräume

Ein Vektorraum ist eine Verallgemeinerung des Zahlenraums $\mathbb{R}^n$. Er ist eine Menge, in der alle Operationen der Vektorrechnung so, wie wir sie in Kapitel 1 betrachteten, verwendbar sind.

Definition 3.4 *Ein* Vektorraum über dem Körper K *(oder kürzer ausgdrückt: ein K-Vektorraum) ist*

- *eine abelsche Gruppe V (Gruppenoperation $'+'$ geschrieben, mit neutralem Element $\mathbf{0} \in V$)*
- *zusammen mit einer Operation*

$$K \times V \to V, \qquad c, v \mapsto c \cdot v$$

  von K auf V,

für die gilt

(a) $c_1 \cdot (c_2 \cdot \mathbf{v}) = (c_1 c_2) \cdot \mathbf{v}$ *(Assoziativität)*
für alle $c_1, c_2 \in K$, $\mathbf{v} \in V$,

(b) $(c_1 + c_2) \cdot \mathbf{v} = c_1 \cdot \mathbf{v} + c_2 \cdot \mathbf{v}$ *(Distributivität)*
$c \cdot (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = c \cdot \mathbf{v}_1 + c \cdot \mathbf{v}_2$ *(Distributivität)*
für alle $c_1, c_2, c \in K, \mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$,

(c) $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$ *für alle $\mathbf{v} \in V$.*

Aus den Distributivgesetzen folgt für alle $\mathbf{v} \in V$:

$$\begin{array}{rcl} 0 \cdot \mathbf{v} = (0+0) \cdot \mathbf{v} = 0 \cdot \mathbf{v} + 0 \cdot \mathbf{v} & \Rightarrow & 0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} \in V, \\ \mathbf{v} + (-1) \cdot \mathbf{v} = (1-1) \cdot \mathbf{v} = 0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} & \Rightarrow & (-1) \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{v}. \end{array}$$

Beispiel 3.15 *Der Zahlenraum $\mathbb{R}^n$ ist ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{R}$. Jeder lineare Unterraum $U \subset \mathbb{R}^n$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Ebenso ist für einen beliebigen Körper K der Raum*

$$K^n = \underbrace{K \times ... \times K}_{n \text{ mal}} = \{(x_1, ..., x_n) \, : x_1, ..., x_n \in K\}$$

ein Vektorraum über K.

Beispiel 3.16 $\mathbb{R}^\infty$ *sei die Menge aller unendlichen Folgen*

$$(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} = (a_1, a_2, a_3, ...), \quad a_\nu \in \mathbb{R}.$$

Genau wie Vektoren im $\mathbb{R}^n$ können wir auch Folgen komponentenweise addieren und mit reellen Zahlen multiplizieren. Dadurch wird $\mathbb{R}^\infty$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

Beispiel 3.17 *Auch Funktionen können Vektorräume bilden. Zum Beispiel sind*

$C^0[a,b]$	*Raum der stetigen Funktionen auf* $[a,b] \subset \mathbb{R}$
$C^q(a,b)$	*Raum der q–mal stetig differenzierbaren Funktionen auf* $(a,b) \subset \mathbb{R}$

Vektorräume über $\mathbb{R}$ *und*

$K[X]$	*Raum der Polynome*	$\sum_1^n a_\nu X^\nu$, $n \in \mathbb{N}$, $a_\nu \in K$,
$K_d[X]$	*Raum der Polynome*	$\sum_1^d a_\nu X^\nu, a_\nu \in K$, *vom Grad* $\leq d$

Vektorräume über K.

Beispiel 3.18 *Sind* V_1 *und* V_2 *Vektorräume über* K*, so ist auch ihr kartesisches Produkt*

$$V_1 \times V_2 = \{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \,:\, \mathbf{v}_1 \in V_1, \mathbf{v}_2 \in V_2\}$$

mit komponentenweiser Definition der Vektorrechenoperationen

$$\begin{array}{rcl} (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + (\mathbf{v}_1', \mathbf{v}_2') & = & (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1', \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_2') \\ c \cdot (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) & = & (c \cdot \mathbf{v}_1, c \cdot \mathbf{v}_2) \end{array}$$

ein K*-Vektorraum.*

Definition 3.5 *Eine Abbildung* $\Phi : V_1 \to V_2$ *des* K*-Vektorraums* V_1 *in den* K*-Vektorraum* V_2 *heißt* linear *(genauer* K*-linear), wenn*

$$\Phi(s \cdot \mathbf{x} + t \cdot \mathbf{y}) = s \cdot \Phi(\mathbf{x}) + t \cdot \Phi(\mathbf{y})$$

für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1$, $s, t \in K$ *gilt. Diese Art von Abbildungen ist uns für den Zahlenraum* $\mathbb{R}^n$ *wohlbekannt.*

Definition 3.6 *Zwei Vektorräume* V_1 *und* V_2 *heißen* isomorph, *wenn es eine* bijektive lineare *Abbildung* $\Phi : V_1 \to V_2$ *gibt. Dann ist auch die Umkehrabbildung* Φ^{-1} *bijektiv und linear (Beweis der Linearität wörtlich wie in 2.3, p.50). Eine bijektive lineare Abbildung heißt* Isomorphismus.

Isomorphe Vektorräume können mit den Mitteln der linearen Algebra voneinander nicht unterschieden werden. (Das Fremdwort *isomorph* soll ja auch so etwas ausdrücken: gleichförmig, gleichartig oder gleich (?)). Zwei Geraden $\mathbb{R} \cdot \mathbf{v}$ und $\mathbb{R} \cdot \mathbf{w}$ im $\mathbb{R}^n$ sind als *Teilmengen des* $\mathbb{R}^n$ verschieden, falls $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ linear unabhängig sind. Die lineare Ausdehnung der Zuordnung $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{w}$ ist aber ein Isomorphismus zwischen diesen beiden Vektorräumen. Auf sich allein gestellt, als abstrakte Vektorräume, unabhängig von ihrer Lage im $\mathbb{R}^n$, sind diese beiden Geraden nicht zu unterscheiden.

Beispiel 3.19 *Der Vektorraum*

$$K_d[X] = \{\sum_0^d a_\nu x^\nu \,:\, a_\nu \in K\}$$

ist isomorph mit K^{d+1} *unter der linearen Abbildung*

$$\Phi : \sum_0^d a_\nu x^\nu \mapsto (a_0, ..., a_d).$$

Beispiel 3.20 *Jede invertierbare lineare Abbildung* $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *ist ein Isomorphismus. Der* $\mathbb{R}$-*Vektorraum* $\mathbb{R}^n$ *ist also nicht von sich selbst zu unterscheiden (nicht ganz unerwartet), aber das auf so viele verschiedene Weisen, wie es invertierbare* $n \times n$*-Matrizen gibt!*

Eine (endliche oder unendliche) Folge $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ...$ von Vektoren $\mathbf{v}_k \in V$ heißt *linear unabhängig*, wenn sie dem folgenden (aus $\mathbb{R}^n$ wohlbekannten) Test genügt: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $c_1, ..., c_n \in K$ gilt

$$\boxed{\textstyle\sum_1^n c_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = ... = c_n = 0.}$$

Beispiel 3.21 *In* $V = C^0[0,1]$ *betrachten wir die Folge der* Monome $1, x, x^2, ..., x^k, ...$. *Dieses System ist linear unabhängig:*

$$\sum_1^n c_k x^k = 0 \quad \Rightarrow \quad c_k = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial x^k} (\sum_1^n c_\nu x^\nu)|_{x=0} = 0.$$

Definition 3.7 *Eine Folge* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ...$ *von Vektoren* $\mathbf{v}_k \in V$ *heißt* Basis von V, *wenn sie*
1) linear unabhängig ist,
2) den Vektorraum V *aufspannt.*
(D.h., jedes $\mathbf{v} \in V$ *ist eine* endliche *Linearkombination* $\sum_1^n c_k \mathbf{v}_k$, $c_k \in K$*). Die Länge einer Basis von* V *heißt* Dimension von V, *in Zeichen* $dim_K(V)$. *(Wie in Kapitel 1 zeigt man, daß die Länge einer Basis für einen Vektorraum* V *unabhängig von der Auswahl dieser Basis ist.)*

Beispiel 3.22 $dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n) = 2n$.

Satz 3.3 *Jeder endlich–dimensionale* $\mathbb{K}$*-Vektorraum* V *ist isomorph zu* K^n *mit* $n = dim_K(V)$.

Beweis. Ist $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n \in V$ eine Basis für V, so definieren wir eine Abbildung $\Phi : K^n \to V$ durch

$$\Phi(c_1, ..., c_n) := c_1 \mathbf{v}_1 + ... + c_n \mathbf{v}_n.$$

Dann folgen
Linearität:

$$\begin{aligned}
\Phi(cc_1, ..., cc_n) &= cc_1 \mathbf{v}_1 + ... + cc_n \mathbf{v}_n \\
&= c(c_1 \mathbf{v}_1 + ... + c_n \mathbf{v}_n) \\
&= c\Phi(c_1, ..., c_n), \\
\Phi(b_1 + c_1, ..., b_n + c_n) &= (b_1 + c_1)\mathbf{v}_1 + ... + (b_n + c_n)\mathbf{v}_n \\
&= b_1 \mathbf{v}_1 + ... + b_n \mathbf{v}_n + c_1 \mathbf{v}_1 + ... + c_n \mathbf{v}_n \\
&= \Phi(b_1, ..., b_n) + \Phi(c_1, ..., c_n).
\end{aligned}$$

Injektivität:

$$\Phi(c_1, ..., c_n) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad c_1\mathbf{v}_1 + ... + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$
$$\Rightarrow \quad c_1 = ... = c_n = 0,$$

da $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ linear unabhängig.

Surjektivität: weil $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ den Vektorraum V aufspannen. □

Für endlich-dimensionale K-Vektorräume gelten also die für lineare Unterräume des $\mathbb{R}^n$ wohlbekannten Tatsachen:

Kapitel 1	
Satz 1.8, 1.9	Test auf lineare (Un-)Abhängigkeit
Satz 1.11	Basis-Ergänzungssatz
Satz 1.12	Basis-Auswahlsatz
Satz 1.13	Invarianz der Basislänge
Kapitel 2	
Satz 2.4	Prinzip der linearen Ausdehnung
Satz 2.6	Quadratische Matrizen

Aufgabe 3.9 *Es sei K ein endlicher Körper mit p Elementen und V ein zweidimensionaler Vektorraum über K.*

a) Wieviele Vektoren enthält V?

b) Wieviele lineare Abbildungen von V in sich gibt es?

c) Wieviele dieser Abbildungen sind bijektiv?

Aufgabe 3.10 *Ergänzen Sie die Vektoren $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1)$ und $\mathbf{v}_2 = (1, -1, 0)$ zu einer $\mathbb{C}$-Basis des $\mathbb{C}$-Vektorraums $\mathbb{C}^3$ und zu einer $\mathbb{R}$-Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{C}^3$.*

3.4 Untervektorräume und lineare Abbildungen

Definition 3.8 *Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K. Eine nichtleere Teilmenge $U \subset V$ heißt* K-Untervektorraum, *wenn*

$$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U, c_1, c_2 \in K \Rightarrow c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 \in U.$$

Ein K-Untervektorraum $U \subset V$ ist mit den Rechenoperationen aus V selbst ein K-Vektorraum. Die folgenden Beispiele haben wir bereits kennengelernt:

Beispiel 3.23 • *lineare Unterräume $U \subset \mathbb{R}^n$,*

- *wenn $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ...\} \subset V$ eine (endliche oder unendliche) Teilmenge eines K-Vektorraums ist, so ist die Menge aller* endlichen *Linearkombinationen*

$$span(A) = \{\sum_1^k c_\nu \mathbf{a}_\nu \ : c_\nu \in K, \mathbf{a}_\nu \in A\}$$

ein Untervektorraum von V,

- *wenn $U_1, U_2 \subset V$ Untervektorräume sind, dann ist auch*

$$U_1 + U_2 := span(U_1 \cup U_2) = \{\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \ : \ \mathbf{u}_1 \in U_1, \mathbf{u}_2 \in U_2\}$$

ein Untervektorraum von V und ebenso $U_1 \cap U_2$,

- *Für jeden Vektor $\mathbf{v} \neq 0$ aus V ist $span(\mathbf{v}) = K \cdot \mathbf{v}$, die Gerade durch $\mathbf{v}$ ein Untervektorraum im Vektorraum V.*

Die folgenden Eigenschaften linearer Unterräume $U \subset \mathbb{R}^n$ gelten auch für K-Untervektorräume $U \subset V$ eines endlich-dimensionalen K-Vektorraums V, da sich ihr Beweis wörtlich überträgt:

Kapitel 1	
Satz 1.14	Dimensionsformeln
Satz 1.15	$d + r = n$ für homogene lineare Gleichungssysteme
Satz 1.16	genauso viele Unbekannte wie Gleichungen
Kapitel 2	
Satz 2.7	$Rang(A) = Rang(A^t)$

In 3.3 haben wir den Begriff der linearen Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ durch die folgende Definition verallgemeinert.

Definition 3.9 *Es seien V und W zwei K-Vektorräume. Eine Abbildung $\Phi : V \to W$ heißt K-*linear*, wenn für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ und $c_1, c_2 \in K$ gilt*

$$\Phi(c_1\mathbf{x} + c_2\mathbf{y}) = c_1\Phi(\mathbf{x}) + c_2\Phi(\mathbf{y}).$$

Beispiel 3.24 *Es sei $V = W = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ der Vektorraum der beliebig oft differenzierbaren reellen Funktionen. Dann ist die Differentiationsabbildung*

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{C}^\infty \to \mathcal{C}^\infty \\ f \mapsto \frac{df}{dx} \end{array} \right.$$

$\mathbb{R}$-*linear.*

Beispiel 3.25 *Es sei $V = \mathcal{C}^0[a, b]$ der $\mathbb{R}$–Vektorraum der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und $W = \mathbb{R}$. Dann ist die Integrationsabbildung*

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{C}^0 \to \mathbb{R} \\ f \mapsto \int_a^b f(t)dt \end{array} \right.$$

$\mathbb{R}$-*linear.*

Beispiel 3.26 (Prinzip der linearen Ausdehnung) *Es seien $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_m$ eine Basis des K-Vektorraums V und $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n$ eine Basis des K-Vektorraums W. Für jeden Vektor $\mathbf{v} = \sum_1^m c_\mu \mathbf{v}_\mu \in V$ ist das Bild unter einer linearen Abbildung $\Phi : V \to W$,*

$$\Phi(\mathbf{v}) = \Phi(\sum_1^m c_\mu \mathbf{v}_\mu) = \sum c_\mu \Phi(\mathbf{v}_\mu)$$

eindeutig bestimmt durch die Bilder $\Phi(\mathbf{v}_\mu) \in W$ der Basisvektoren $\mathbf{v}_\mu \in V$. Und zu jeder möglichen Wahl dieser Bildvektoren $\Phi(\mathbf{v}_\mu)$ gibt es eine lineare Abbildung Φ. Entwickeln wir diese Bildvektoren in der Basis $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n$ des Vektorraums W :

$$\Phi(\mathbf{v}_\mu) = \sum_{\nu=1}^n a_{\nu,\mu} \mathbf{w}_\nu,$$

so ist das Bild von $\mathbf{v} = \sum_1^m c_\mu \mathbf{v}_\mu$

$$\Phi(\mathbf{v}) = \Phi(\sum_1^m c_\mu \mathbf{v}_\mu) = \sum_{\nu=1}^n (\sum_{\mu=1}^m a_{\nu,\mu} c_\mu) \mathbf{w}_\nu.$$

Zur Abbildung Φ gehört die $n \times m$-Matrix

$$A = (a_{\nu,\mu}) \quad \begin{array}{l} \nu = 1, ..., n : \text{ Zeile} \\ \mu = 1, ..., m : \text{ Spalte} \end{array}$$

mit Einträgen aus dem Körper K. Wir halten fest:

Basisvektor $\mathbf{v}_\mu \in V$ abbilden, Bildvektor $\Phi(\mathbf{v}_\mu) \in W$ entwickeln in der Basis $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n \in W$: $\Phi(\mathbf{v}_\mu) = \sum_1^n a_{\nu,\mu} \mathbf{w}_\nu$	$\Rightarrow$	μ–ten Spaltenvektor $\begin{pmatrix} a_{1,\mu} \\ \vdots \\ a_{n,\mu} \end{pmatrix}$ der Matrix A
Matrixprodukt $\quad A \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$	$\Rightarrow$	Entwicklungskoeffizienten $\sum_{\mu=1}^m a_{\nu,\mu} c_\mu$ des Bildvektors $\Phi(\sum_1^m c_\mu \mathbf{v}_\mu)$ in der Basis $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n \in W$

Satz 3.4 (Lineare Abbildungen und Matrizen) *a) Die Menge aller K-linearen Abbildungen $\Phi : V \to W$ ist ein K-Vektorraum. Wir bezeichnen ihn mit $Hom_K(V, W)$.*

b) $M(n \times m, K)$ ist ein K-Vektorraum der Dimension $m \cdot n$.

c) Jede Wahl von Basen $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_m \in V$ und $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n \in W$ definiert einen K-Isomorphismus

$$Hom_K(V, W) \to M(n \times m, K),$$

nämlich die Zuordnung, welche jeder linearen Abbildung ihre Matrix (bezüglich der gewählten Basen) zuordnet.

Beweis. a) Die Addition linearer Abbildungen $\Phi, \Psi : V \to W$ wird durch

$$(\Phi + \Psi)(\mathbf{x}) := \Phi(\mathbf{x}) + \Psi(\mathbf{x})$$

definiert und die Multiplikation mit Skalaren $c \in K$ durch

$$(c \cdot \Phi)(\mathbf{x}) := c \cdot \Phi(\mathbf{x}).$$

Es ist einfach, alle Vektorraumeigenschaften nachzurechnen.

b) $M(n \times m, K)$ ist nur eine andere Schreibweise für $K^{n \cdot m}$.

c) Dass die Zuordnung $\Phi \mapsto A$ eine K-lineare Abbildung $Hom_K(V, W) \to M(n \times m, K)$ ist, folgt sofort aus den Definitionen.

Injektivität: Die einzige lineare Abbildung $\Phi : V \to W$, die zur Nullmatrix gehört, ist die Nullabbildung.

Surjektivität: Jede Matrix A gehört zu einer linearen Abbildung wegen des Prinzips der linearen Ausdehnung. □

Es sei $\Phi : V \to W$ linear. Wie in 2.2 (Bildsatz) beweist man: Die Menge

$$\Phi(V) := \{\Phi(\mathbf{v}) \in W \, : \mathbf{v} \in V\} \subset W$$

ist ein Untervektorraum von W. Er heißt auch das *Bild*, oder der *Bildraum* von Φ, in Zeichen $Bild(\Phi)$. Seine Dimension (notwendig $\leq dim(V)$) heißt *Rang* der linearen Abbildung Φ.

Bemerkung. *Bei jeder Auswahl von Basen für V und W ist der Rang der Φ beschreibenden Matrix gleich dem Rang der linearen Abbildung Φ.*

Beweis. Sei $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_m$ eine Basis von V und $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n$ eine Basis von W, sei $A = (a_{\nu,\mu})$ die $\Phi : V \to W$ beschreibende Matrix in diesen Basen. Unter dem K-Isomorphismus

$$K^n \to W, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \mathbf{w}_\nu$$

wird der μ–te Spaltenvektor der Matrix A auf den Bildvektor $\Phi(\mathbf{v}_\mu)$ abgebildet (Definition der Matrix A zur Abbildung Φ). Der Spaltenraum der Matrix A wird also surjektiv auf den Unterraum von W abgebildet, der von den Bildvektoren $\Phi(\mathbf{v}_\mu), \mu = 1, ..., m$, erzeugt wird. Dies ist der Bildraum $\Phi(V)$. Da $K^n \to W$ ein Isomorphismus ist, wird der Spaltenraum $\subset V$ injektiv abgebildet. Insgesamt haben wir eine injektive und surjektive lineare Abbildung des Spaltenraums von A auf den Vektorraum $Bild(\Phi)$, also einen K-Isomorphismus. Dabei bleibt die Dimension erhalten. □

Ein Gegenstück zu $Bild(\Phi)$ ist

$$Kern(\Phi) := \{\mathbf{v} \in V \, : \Phi(\mathbf{v}) = 0\} \subset V.$$

$Kern(\Phi)$ ist ein Untervektorraum von V, denn wenn $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in Kern(\Phi)$, d.h., wenn $\Phi(\mathbf{v}_1) = \Phi(\mathbf{v}_2) = 0$, dann ist für alle $c_1, c_2 \in K$ auch $\Phi(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) = c_1\Phi(\mathbf{v}_1) + c_2\Phi(\mathbf{v}_2) = 0$.

Satz 3.5 (Dimensionsformel) *Für jede lineare Abbildung $\Phi : V \to W$ ist*

$$dim(V) = dim(Kern(\Phi)) + dim(Bild(\Phi)).$$

Beweis. Nach dem Basis-Auswahlsatz existiert eine Basis $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_d$ für den Untervektorraum $Kern(\Phi)$, die wir nach dem Basisergänzungssatz zu einer Basis $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_d, \mathbf{v}_{d+1}, ..., \mathbf{v}_d$ von V ergänzen können. Die Dimensionsformel ergibt sich, wenn wir zeigen können, daß die Bilder $\Phi(\mathbf{v}_{d+1}), ..., \Phi(\mathbf{v}_n) \in W$ eine Basis des Bildraums $Bild(\Phi)$ sind.

Aufspannen: Ist $\Phi(\mathbf{v})$ mit $\mathbf{v} \in V$ ein beliebiger Vektor in $Bild(\Phi)$, so entwickeln wir $\mathbf{v}$ in unserer Basis von V:

$$\mathbf{v} = \sum_1^d c_k \mathbf{u}_k + \sum_{d+1}^n c_k \mathbf{v}_k,$$

und erhalten daraus

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{v}) &= \sum_1^d c_k \Phi(\mathbf{u}_k) + \sum_{d+1}^n c_k \Phi(\mathbf{v}_k) \\ &= \sum_{d+1}^n c_k \Phi(\mathbf{v}_k) \end{aligned}$$

wegen $\mathbf{u}_k \in Kern(\Phi)$. Wir sehen $\Phi(\mathbf{v}_k)$ liegt in $span(\Phi(\mathbf{v}_{d+1}), ..., \Phi(\mathbf{v}_n))$.

Lineare Unabhängigkeit: Wenn es eine lineare Relation

$$\sum_{d+1}^n c_k \Phi(\mathbf{v}_k) = \mathbf{0}$$

geben sollte, so heißt dies, der Vektor $\sum_{d+1}^n c_k \mathbf{v}_k$ würde zu $Kern(\Phi)$ gehören. Wir könnten ihn in der Basis $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_d$ von $Kern(\Phi)$ entwickeln, etwa

$$\sum_{d+1}^n c_k \mathbf{v}_k = \sum_1^d c_k \mathbf{u}_k$$

und hätten eine lineare Relation

$$\sum_1^d c_k \mathbf{u}_k - \sum_{d+1}^n c_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

zwischen den Basisvektoren $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{v}_n$ von V. Da diese linear unabhängig sind, müssen alle Koeffizienten $= 0$ sein, insbesondere folgt $c_{d+1} = ... = c_n = 0$. □

Beispiel 3.27 *Die lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ werde bezüglich der Standardbasis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^3$ durch die Matrix*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Dann ist

$$\begin{aligned} Kern(\Phi) &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}\} \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_2 = x_3 = 0\} \\ &= span(\mathbf{e}_1), \\ Bild(\Phi) &= \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{y} = A \cdot \mathbf{x} \text{ für ein } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix}\} \\
&= \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 : y_3 = 0\} \\
&= span(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2).
\end{aligned}
$$

Es ist also $dim(Kern(\Phi)) = 1$ *und* $dim(Bild(\Phi)) = 2$, *und die Summe beider Dimensionen ist drei, in Übereinstimmung mit Satz 3.5.*

4 Koordinatentransformationen und Ähnlichkeit von Matrizen

4.1 Basiswechsel und Koordinatentransformationen

In diesem Abschnitt ist K ein beliebiger Körper. 'Vektorraum' bedeutet stets 'K-Vektorraum'.

Ist $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ eine Basis des Vektorraums V, so lässt sich jeder Vektor $\mathbf{x} \in V$ als Linearkombination

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{v}_1 + ... + x_n\mathbf{v}_n$$

mit (durch $\mathbf{x}$) eindeutig bestimmten $x_1, ..., x_n \in K$ darstellen. Diese Körperelemente $x_1, ..., x_n$ heißen *Komponenten von* $\mathbf{x}$, oder *Koordinaten von* $\mathbf{x}$ *in der Basis* $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$. Wir wollen hier der Frage nachgehen, wie sich diese Koordinaten des Vektors $\mathbf{x}$ ändern, wenn wir ihn in einer anderen Basis $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n \in V$ entwickeln.

Dazu schreiben wir zuerst die *neuen Basisvektoren als Linearkombinationen der alten:*

$$\mathbf{w}_1 = \sum_\nu a_{\nu,1}\mathbf{v}_\nu, \ ..., \ \mathbf{w}_n = \sum_\nu a_{\nu,n}\mathbf{v}_\nu.$$

Die Koordinaten $a_{\nu,\mu}$ der neuen Basisvektoren $\mathbf{w}_\mu$ in der alten Basis bilden die Spalten einer Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in M(n \times n, K).$$

Diese Matrix A ist unsere *Übergangsmatrix.* Sie stellt bezüglich der Basis $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ eine lineare Abbildung dar, und zwar diejenige Abbildung, welche

$$\mathbf{v}_1 \mapsto \mathbf{w}_1, \ ..., \ \mathbf{v}_n \mapsto \mathbf{w}_n$$

abbildet, (und dadurch eindeutig bestimmt ist). Da die $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n$ eine Basis von V bilden, ist $rang(A) = n$, die Übergangsmatrix A ist invertierbar.

Ein Vektor $\mathbf{x} \in V$ schreibt sich nun auf zwei Weisen

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{x} & = & \sum_1^n x_\nu \mathbf{v}_\nu & = & \sum_1^n y_\mu \mathbf{w}_\mu, \\ & & \text{alte Koordinaten:} & & \text{neue Koordinaten:} \\ & & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \end{array}$$

die aber durch folgende Beziehung verknüpft sind:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^n x_\nu \mathbf{v}_\nu = \quad \mathbf{x} &= \sum_{\mu=1}^n y_\mu (\sum_{\nu=1}^n a_{\nu,\mu}\mathbf{v}_\nu) \\ &= \sum_{\nu=1}^n (\sum_{\mu=1}^n a_{\nu,\mu} y_\mu)\mathbf{v}_\nu. \end{aligned}$$

Daraus folgt für die Koordinaten:

$$\text{Alte Koordinaten } = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

anders formuliert:

$$\text{alte Koordinaten} = A \cdot \text{ neue Koordinaten}$$

$$\boxed{\text{neue Koordinaten} = A^{-1} \cdot \text{ alte Koordinaten}}$$

Dieses Transformationsverhalten, welches die Koordinaten eines Vektors $\mathbf{x} \in V$ aufweisen, heißt *kontravariantes Transformationsverhalten.* (Die Koordinaten transformieren sich *gegenläufig* zur Übergangsmatrix.)

Nicht nur Koordinaten von Vektoren ändern sich bei Koordinatentransformationen, sondern auch Matrizen zu linearen Abbildungen. Dies müssen wir als Nächstes untersuchen.

Sei dazu $\Phi : V \to W$ eine lineare Abbildung des Vektorraums V in den Vektorraum W, seien $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n \in V$ und $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_m \in W$ Basen, sei

$$C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m,1} & \cdots & c_{m,n} \end{pmatrix}$$

die Matrix, welche die Abbildung Φ in diesen Basen beschreibt, d.h.

$$\Phi(\mathbf{v}_\nu) = \sum_{i=1}^{m} c_{i,\nu} \mathbf{w}_i.$$

Jetzt wechseln wir zu neuen Basen

neue Basis	Beziehung zur alten Basis	Übergangsmatrix
$\mathbf{v}'_1, \cdots, \mathbf{v}'_n$	$\mathbf{v}'_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu,\mu} \mathbf{v}_\nu$	$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$
$\mathbf{w}'_1, \cdots, \mathbf{w}'_m$	$\mathbf{w}'_j = \sum_{i=1}^{m} b_{i,j} \mathbf{w}_i$	$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m,1} & \cdots & b_{m,m} \end{pmatrix}$

und berechnen die neue Matrix C' für die Abbildung Φ:

$\Phi(\mathbf{v}'_\mu) = \sum_{j=1}^{m} c'_{j,\mu} \mathbf{w}'_j = \sum_{i,j=1}^{m} c'_{j,\mu} b_{i,j} \mathbf{w}_i$
$\mathbf{v}'_\mu = \sum a_{\nu,\mu} \mathbf{v}_\nu \quad \Rightarrow \quad \Phi(\mathbf{v}'_\mu) = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu,\mu} \Phi(\mathbf{v}_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{\nu,\mu} c_{i,\nu} \mathbf{w}_i.$

Durch Koeffizientenvergleich findet man hieraus

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu,\mu} c_{i,\nu} = \sum_{j=1}^{m} c'_{j,\mu} b_{i,j},$$

oder in Form eines Matrizenprodukts

$$C \cdot A = B \cdot C'$$

$$\boxed{\text{neue Matrix} \quad C' \quad = \quad B^{-1} \cdot C \cdot A}$$

Hier sind $C, C' \in M(m \times n, K)$, $B \in M(m \times m, K)$ und $A \in M(n \times n, K)$.

Satz 4.1 *Es sei $\Phi : V \to W$ eine lineare Abbildung vom Rang r. Dann gibt es Basen in V und W, in denen Φ die beschreibende Matrix*

$$dim(W) \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1\!\!1_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{dim(V)} \right.$$

hat.

Beweis. Es sei $C \in M(m \times n, K)$ die Matrix für Φ bezüglich irgend welcher Basen von V und W. Es ist zu zeigen, dass es invertierbare Matrizen $A \in GL(n, K)$ und $B \in GL(m, K)$ gibt, derart, dass das Produkt $B^{-1} \cdot M \cdot A$ die angegebene Form hat. Zunächst benützen wir elementare Zeilentransformationen, um C auf Zeilenstufenform zu bringen:

$$B^{-1} \cdot C = \left(\begin{array}{cccccccc} 0 & \cdots & 1 & * & * & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & * & * & \\ & & & & 0 & \cdots & 1 & * \\ & & & & 0 & & & \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{c}0\\0\\0\end{array}} \right\} r \right).$$

Durch *elementare Spaltenumformungen* kann man alle Einträge der ersten r Zeilen, bis auf die führenden Einsen, auf 0 transformieren. Elementare Spaltenumformungen erhält man als Produkt mit Elementarmatrizen von rechts. Ist A' das Produkt all dieser Elementarmatrizen, so haben wir also

$$B^{-1} \cdot C \cdot A' = \left(\begin{array}{cccccccc} 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \\ & & & & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ & & & & 0 & & & \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{c}0\\0\\0\end{array}} \right\} r \right).$$

Jetzt vertauschen wir nur noch die Spalten so, dass die Spalten mit den Einsen in ihrer richtigen Reihenfolge ganz nach links kommen. Auch dies ist zu erreichen durch Multiplikation mit einem Produkt von Elementarmatrizen von rechts. Bezeichnen wir mit A das Produkt aller Elementarmatrizen, mit denen wir insgesamt von rechts multiplizierten, so hat $B^{-1} \cdot C \cdot A$ die angegebene Form. □

Der Sinn dieses Satzes besteht darin, dass lineare Abbildungen eines endlich-dimensionalen Vektorraums in einen anderen wenig vor dem forschenden Auge des Mathematikers verbergen können. Man kann ihre Matrizen auf eine ganz einfache *Normalform* bringen, die nur vom Rang der linearen Abbildung abhängt.

Völlig anders ist die Situation für lineare Abbildungen eines Vektorraums *in sich selbst.* Dann ist nämlich der Bildraum W gleich dem Urbildraum V, wir haben nur eine einzige Basis, die wir wechseln können, es ist in obiger Formel $B = A$ zu setzen. Bei einem Basiswechsel des Vektorraums V mit Übergangsmatrix A wird die Matrix C einer linearen Abbildung $\Phi : V \to V$ in

$$C' = A^{-1} \cdot C \cdot A$$

transformiert. Den Rest dieses Semesters widmen wir der Frage nach einer möglichst einfachen Form C' auf welche wir die Matrix C transformieren können.

Definition 4.1 *Zwei Matrizen $C, C' \in M(n \times n, K)$ heißen* ähnlich *oder* äquivalent, *wenn es eine invertierbare Matrix $A \in GL(n, K)$ gibt, so dass*

$$\boxed{C' = A^{-1} \cdot C \cdot A.}$$

Diese Ähnlichkeit von Matrizen ist eine *Äquivalenzrelation* im folgenden technischen Sinne: Sie hat die Eigenschaften

- *Reflexivität:* $A = 1\!\!1_n \Rightarrow C = 1\!\!1_n^{-1} \cdot C \cdot 1\!\!1_n$,
- *Symmetrie:* $C' = A^{-1} \cdot C \cdot A \Rightarrow C = (A^{-1})^{-1} \cdot C' \cdot A^{-1}$,
- *Transitivität:* Aus $C' = A^{-1} \cdot C \cdot A$ und $C'' = B^{-1} \cdot C' \cdot B$ folgt $C'' = B^{-1}A^{-1} \cdot C \cdot AB = (AB)^{-1} \cdot C \cdot AB$.

Aufgabe 4.1 *Der Homomorphismus $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ werde bezüglich der kanonischen Basen durch die Matrix*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Man berechne die Matrixdarstellung von φ bezüglich der Basis

$$\mathbf{a}_1 = (0, 1, 1), \quad \mathbf{a}_2 = (1, 0, 3), \quad \mathbf{a}_3 = (1, 0, 1)$$

des $\mathbb{R}_3$ und der Basis

$$\mathbf{b}_1 = (1, 1), \quad \mathbf{b}_2 = (1, -1)$$

des $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 4.2 *(Eine $n \times n$-Matrix heißt symmetrisch, wenn $A^t = A$.) Es sei V der Vektorraum der reellen symmetrischen zweireihigen Matrizen und*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in V.$$

Der Endomorphismus $\varphi : V \to V$ sei definiert durch $\varphi(S) = A^t S A$. Man berechne die Matrix von φ bezüglich der Basis

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

von V.

Aufgabe 4.3 *Für $A \in R^{2\times 2}$ definiert*

$$\varphi(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot A$$

einen Endomorphismus von $R^{2\times 2}$. Bestimmen Sie die Matrix von φ bezüglich der Standardbasis

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4.4 *Im $\mathbb{R}^4$ bezeichne $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$ die kanonische Basis. Weiter sei*

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Begründen Sie, dass es eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ mit

$$f(\mathbf{a}_1) = \mathbf{a}_2,\ f(\mathbf{a}_2) = \mathbf{a}_1),\ f(\mathbf{a}_3) = f(\mathbf{a}_4) = \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4$$

gibt. Geben Sie deren darstellende Matrix in der Basis $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ an.
b) Bestimmen Sie die Bilder $f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), f(\mathbf{e}_3), f(\mathbf{e}_4)$ und geben Sie die darstellende Matrix von f bezüglich der kanonischen Basis an.

Aufgabe 4.5 *Gegeben seien die Vektoren*

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \in \mathbb{R}^3.$$

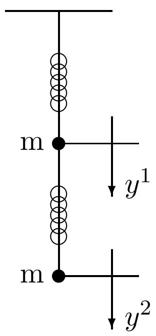
a) Zeigen sie, dass diese Vektoren eine Basis bilden.
b) Geben Sie die darstellende Matrix der linearen Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$ an und bezüglich der Basis $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$.

4.2 Eigenvektoren und Eigenwerte

Das Problem, eine möglichst einfache Normalform für äquivalente Matrizen zu finden, hat eine Bedeutung, die weit über die lineare Algebra, ja weit über die Mathematik hinausgeht. Dies soll an einem einfachen Differentialgleichungs–System aus der Mechanik illustriert werden. (Wie eine solche Differentialgleichung aufgestellt wird, ist kein Problem der Mathematik, Lösungsmethoden dafür aber sehr wohl.) Wir betrachten die Schwingung zweier gekoppelter Federn:



Ruhelagen der Federn seien $y_1 = 0$ und $y_2 = 0$,
beide Federkonstanten seien k,
beide Massen seien m,

dann gelten die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{y}_1 &= -ky_1 + k(y_2 - y_1) \\ &= k(y_2 - 2y_1) \\ m \cdot \ddot{y}_2 &= -k(y_2 - y_1) \end{aligned}$$

Für den Spaltenvektor

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

ist dies, nachdem wir noch zur Vereinfachung $k = m = 1$ normieren, die folgende Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Das Problem besteht in der *Kopplung* der beiden Gleichungen für die beiden Koordinaten y_1 und y_2. Falls die Koeffizientenmatrix

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ähnlich zu einer Diagonalmatrix wäre, etwa

$$C = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot A,$$

dann hätten wir für den Vektor

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

die Gleichung

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot C \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot C \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Dies sind *zwei entkoppelte* Differentialgleichungen

$$\ddot{x}_1 = \lambda_1 x_1, \qquad \ddot{x}_2 = \lambda_2 x_2$$

für die beiden Komponenten. In einschlägigen Vorlesungen der Analysis behandelt man deren Lösung durch Exponential- und Winkelfunktionen.

Sei also jetzt V ein K-Vektorraum und $\Phi : V \to V$ eine K-lineare Abbildung. Wir fragen, wann es eine Basis $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$ von V gibt, in der Φ durch eine Diagonalmatrix

$$C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & . & . \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \\ . & 0 & \lambda_3 & \\ . & & . & . \end{pmatrix}$$

beschrieben wird. Wenn das so ist, dann gilt für die Basisvektoren $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$:

$$\Phi(\mathbf{v}_\nu) = \lambda_\nu \cdot \mathbf{v}_\nu, \quad \nu = 1, \cdots, n.$$

(Diese Vektoren werden durch Φ also nur gestreckt, um den Faktor λ_ν, und weiter nicht geändert.)

Definition 4.2 *Ein Vektor* $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in V$ *heißt* Eigenvektor *der linearen Abbildung* $\Phi : V \to V$, *wenn ein Skalar* $\lambda \in K$ *existiert, so, dass*

$$\Phi(\mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{v}.$$

Analog heißt $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in K^n$ *ein Eigenvektor zur Matrix* $C \in M(n \times n, K)$, *wenn* $C \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x}$.

Der Streckungsfaktor λ ist durch den Eigenvektor $\mathbf{v}$ und die lineare Abbildung Φ eindeutig bestimmt, denn wenn $\Phi(\mathbf{v}) = \lambda_1 \cdot \mathbf{v} = \lambda_2 \cdot \mathbf{v}$, dann folgt $(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$, und wenn tatsächlich $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sein sollte, so würde hieraus folgen

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Aber ein Eigenvektor ist kein Nullvektor, Widerspruch!

Dieser Streckungsfaktor $\lambda \in K$ heißt der *Eigenwert zum Eigenvektor* $\mathbf{v}$.

Satz 4.2 (Tautologie) *Die Matrix* $C \in M(n \times n, K)$ *ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix, dann, und nur dann, wenn der Vektorraum* K^n *eine Basis besitzt, die aus lauter Eigenvektoren für* C *besteht.*

Dies braucht nicht mehr bewiesen zu werden, da es nur eine Zusammenfassung der obigen Diskussion ist.

Der zweifelhafte Wert von Satz 4.2 zeigt sich sofort, wenn man beginnt Eigenvektoren zur Matrix C tatsächlich zu suchen. Die entscheidende Idee besteht darin, zuerst Eigenwerte zu suchen:

Satz 4.3 (Fundamentaltrick) *Ein Skalar* $\lambda \in K$ *ist genau dann Eigenwert der Matrix* C *(zu einem Eigenvektor* $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in K^n$*), wenn gilt:*

$$det(C - \lambda \cdot \mathbb{1}_n) \;=\; 0 \qquad \textit{(Eigenwertgleichung)}$$

Beweis. Für einen Vektor $\mathbf{v} \in V$ ist

$$C \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad (C - \lambda \cdot \mathbb{1}_n) \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Und es gibt eine Vektor $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in V$ mit dieser Eigenschaft, genau dann, wenn

$$Rang(C - \lambda \cdot \mathbb{1}_n) < n, \qquad \text{(Satz 1.15)},$$

und dies ist äquivalent mit

$$det(C - \lambda \cdot \mathbb{1}_n) = 0 \qquad \text{(Satz 2.15 a)}.$$

□

Beispiel 4.1 *Wir suchen Eigenwerte der Matrix*

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

vom Beginn dieses Paragraphen. Die Eigenwertgleichung für diese Matrix ist

$$det(C - \lambda \cdot \mathbb{1}_2) = det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (-2-\lambda)(-1-\lambda) - 1 = \lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0.$$

Die Wurzeln

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{5})$$

dieser quadratischen Gleichung sind die Eigenwerte. Die zugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{v}$ *berechnet man aus den linearen Gleichungssystemen*

$$\begin{array}{rcl} (C - \lambda_1 \cdot \mathbb{1}_2) \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} (-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5})v_1 & + & v_2 \\ v_1 & + & (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5})v_2 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} & = & s_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \end{pmatrix}, s_1 \in K, \\ (C - \lambda_2 \cdot \mathbb{1}_2) \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5})v_1 & + & v_2 \\ v_1 & + & (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5})v_2 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} & = & s_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \end{pmatrix}, s_2 \in K. \end{array}$$

Diese Eigenvektoren bilden zusammen zwei Geraden.

Beim Suchen der Eigenwerte kommt es also darauf an, die Nullstellen λ der Funktion

$$\lambda \mapsto det(C - \lambda \cdot \mathbb{1}_n)$$

zu finden.

Satz 4.4 (Charakteristisches Polynom) *Es sei $C \in M(n \times n, K)$. Die Funktion*

$$\chi_C : K \ni \lambda \mapsto det(C - \lambda \mathbb{1}_n) \in K$$

ist ein Polynom vom Grad n. Mit der Abkürzung

$$sp(C) := c_{1,1} + c_{2,2} + \cdots + c_{n,n} \qquad \text{(Spur von } C\text{)}$$

ist

$$\chi_C(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \cdot sp(C) \cdot \lambda^{n-1} + \cdots + det(C).$$

Beweis. Die Leibnizformel

$$\chi_C(\lambda) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} sign(\sigma) \cdot (c_{1,\sigma(1)} - \lambda \delta_{1,\sigma(1)}) \cdots (c_{n,\sigma(n)} - \lambda \delta_{n,\sigma(n)})$$

zeigt, dass $\chi_C(\lambda)$ ein Polynom in λ vom Grad $\leq n$ ist. Man findet auch als Koeffizienten

bei λ^n	$(\sigma = id :)$	$(-1)^n$
bei λ^{n-1}	$(\sigma = id :)$	$(-1)^{n-1}(c_{1,1} + \cdots + c_{n,n})$
bei λ^0	$(\lambda = 0 :)$	$det(C)$.

□

Definition 4.3 *Das Polynom $\chi_C(\lambda) = det(C - \lambda \mathbb{1}_n)$ heißt* charakteristisches Polynom *der Matrix C. Der folgende Satz 4.5 zeigt, dass alle Matrizen, welche dieselbe lineare Abbildung Φ beschreiben, dasselbe charakteristische Polynom haben. Man kann dieses Polynom dann also auch* charakteristisches Polynom der Abbildung Φ *nennen.*

Satz 4.5 *Ähnliche Matrizen haben dasselbe charakteristische Polynom.*

Beweis. Wenn $C' = A^{-1} \cdot C \cdot A$, dann ist

$$\begin{aligned}
\chi_{C'}(\lambda) &= det(A^{-1} \cdot C \cdot A - \lambda \cdot \mathbb{1}_n) \\
&= det(A^{-1} \cdot (C - \lambda \cdot \mathbb{1}_n) \cdot A) \\
&= det(A)^{-1} \cdot det(C - \lambda \cdot \mathbb{1}_n) \cdot det(A) \qquad \text{(Determinantenmultiplikationssatz)} \\
&= \chi_C(\lambda).
\end{aligned}$$

□

Satz 4.6 (Korollar) *Ähnliche Matrizen haben die*

gleiche	*Determinante*	*(folgt schon aus dem Determinantenmultiplikationssatz),*
gleiche	*Spur,*	
gleichen	*Eigenwerte.*	

Beispiel 4.2 (Drehmatrix) *Wir betrachten die Matrix*

$$C = \begin{pmatrix} cos(\varphi) & -sin(\varphi) \\ sin(\varphi) & cos(\varphi) \end{pmatrix},$$

welche eine Drehung um den Winkel φ *in der Ebene* $\mathbb{R}^2$ *beschreibt. Ihr charakteristisches Polynom*

$$\chi_C(\lambda) = det \begin{pmatrix} cos(\varphi) - \lambda & -sin(\varphi) \\ sin(\varphi) & cos(\varphi) - \lambda \end{pmatrix} = (cos(\varphi) - \lambda)^2 + sin(\varphi)^2$$

hat die Nullstelle $\lambda \in \mathbb{R}$*, für welche* $\lambda = cos(\varphi)$ *während* $sin(\varphi) = 0$*. Es gibt nur die Fälle*

Winkel φ	*Eigenwert* λ	*Drehung*
0	1	*Identität*
π	-1	*Punktspiegelung*

Dies ist auch anschaulich völlig klar: Bei einer echten Drehung (nicht um den Winkel 0 *oder* π*) ändert jeder Vektor seine Richtung.*

Völlig anders ist die Situation, wenn man C *als Matrix* komplexer *Zahlen auffasst, und Eigenwerte in* $\mathbb{C}$ *sucht. Diese sind Wurzeln der quadratischen Gleichung*

$$\lambda^2 - 2\,cos(\varphi)\,\lambda + 1 = 0,$$

also

$$\lambda_{1,2} = cos(\varphi) \pm i \cdot sin(\varphi).$$

Beispiel 4.3 (Jordan-Block) *Eine Matrix der Form*

$$C = \begin{pmatrix} c & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & c \end{pmatrix}, \; c \in K$$

heißt Jordan–Block. Ihr charakteristisches Polynom

$$\chi_C(\lambda) = (c - \lambda)^n$$

hat nur die einzige Nullstelle c*, diese mit der* Vielfachheit n*. Wenn wir alle Eigenvektoren des Jordan–Blocks bestimmen wollen, müssen wir das lineare Gleichungssystem*

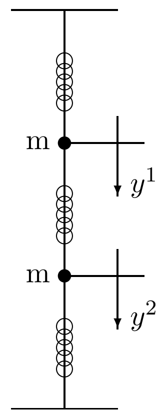
$$C \cdot \mathbf{x} = c \cdot \mathbf{x}, \qquad d.h. \qquad (C - c \cdot 1\!\!1_n) \cdot \mathbf{x} = 0$$

lösen. Nun ist

$$(C - c1\!\!1_n) \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dies ist der Nullvektor, falls $x_2 = \cdots = x_n = 0$*, d.h. alle Eigenvektoren liegen auf der Geraden, welche vom ersten Koordinatenvektor* $\mathbf{e}_1$ *aufgespannt wird.*

Aufgabe 4.6 *Gekoppelte Federn, wie am Anfang dieses Paragraphen, kann man sehr schön experimentell aufbauen. Die senkrechten Schwingungen kann man aber sehr schlecht beobachten, weil die Federn schnell horizontal ins Wackeln kommen. Einfacher ist das, wenn man die untere Masse mit einer dritten Feder (wie in nebenstehender Zeichnung) stabilisiert. Die Bewegungsgleichungen lauten dann*



$$\begin{aligned} m\ddot{y}^1 &= -ky^1 + k(y^2 - y^1) = k(y^2 - 2y^1), \\ m\ddot{y}^2 &= -k(y^2 - y^1) - ky^2 = k(y^1 - 2y^2). \end{aligned}$$

Bestimmen Sie (für $k = m = 1$) Eigenwerte und Eigenvektoren der Koeffizientenmatrix dieses Systems (und verifizieren Sie, dass dieses System auch mathematisch einfacher zu behandeln ist).

Aufgabe 4.7 *Berechnen Sie die (möglicherweise komplexen) Eigenwerte und Eigenvektoren der reellen Matrix*

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4.8 *Es sei $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ die lineare Abbildung, welche die Vektoren $\mathbf{e}_k$, $k = 1, ..., n$ der Standardbasis folgendermaßen abbildet:*

$$\varphi(\mathbf{e}_k) = \mathbf{e}_{k+1} \text{ für } k = 1, ..., n-1, \quad \varphi(\mathbf{e}_n) = \mathbf{e}_1.$$

Berechnen Sie das charakteristische Polynom von φ und bestimmen Sie im Fall $n = 4$ alle Eigenwerte und Eigenvektoren von φ.

Aufgabe 4.9 *Im $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ betrachte man den von den Funktionen*

$$f(x) = e^x, \quad g(x) = xe^x, \quad h(x) = e^{-x}$$

aufgespannten Unterraum $V = \mathbb{R}f + \mathbb{R}g + \mathbb{R}h$ und den Endomorphismus

$$\varphi : V \to V, \quad F \mapsto F' \quad \textit{(Differentiation)}$$

von V. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von φ.

Aufgabe 4.10 *Bestimmen Sie eine Basis für den Kern sowie die Eigenwerte der linearen Abbildung*

$$f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2} \quad \textit{mit} \quad X \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4.11 *Es bezeichnen A, B reelle 2×2-Matrizen, E die 2×2-Einheitsmatrix und O die 2×2-Nullmatrix. Man beweise oder widerlege durch ein Gegenbeispiel jede der folgenden Aussagen a)-d):*
a) $det(AB) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad det(A) = 0$ oder $det(B) = 0$.
b) $AB = O \quad \Rightarrow \quad A = O$ oder $B = O$.
c) Ist λ ein Eigenwert von A, so ist λ^k ein Eigenwert von A^k ($k \in \mathbb{N}$).
d) $A^2 = E \quad \Rightarrow \quad A = E$ oder $A = -E$.

Aufgabe 4.12 *Für $n \geq 1$ sei V der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$ mit reellen Koeffizienten. Sei $A : V \to V$ die lineare Abbildung mit*

$$(Af)(X) = f(X+1) - f''(X)$$

wobei f'' die zweite Ableitung von f ist. Zeigen Sie, dass $\lambda = 1$ der einzige Eigenwert von A ist, und bestimmen Sie den zugehörigen Eigenraum.

Aufgabe 4.13 *Entscheiden Sie, welche der folgenden Matrizen zueinander ähnlich sind und welche nicht, und begründen Sie Ihre Antwort:*

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 8 \\ 4 & -7 & 4 \\ 8 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$

Aufgabe 4.14 *Seien a und b reelle Zahlen mit $a^2 + b^2 = 1$. Ermitteln Sie alle Eigenwerte und Eigenräume der Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} -ab & \frac{1}{2}(a^2-b^2) & 0 \\ \frac{1}{2}(a^2-b^2) & ab & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4.15 *Seien $V = \mathbb{R}^3$ und $f : V \to V$ die lineare Abbildung mit der Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle Unterräume $U \subset V$, für die $f(U) \subset U$.

Aufgabe 4.16 *Sei A eine reelle 3×3-Matrix mit chakteristischem Polynom $\det(\lambda\mathbb{1} - A) = \lambda^3 - \lambda$.*
(i) Man begründe, dass A über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar ist.
(ii) Man gebe den Rang der Matrizen A, A^2, $A^2 + \mathbb{1}$, $A^2 - \mathbb{1}$ an.
(iii) Man bestimme alle $r, s, t \in \mathbb{R}$ mit $r\mathbb{1} + sA + tA^2 = 0$.
(iv) Man zeige, dass $A^{1994} = A^2$ ist.
(v) Man gebe eine solche reelle Matrix A an.

Aufgabe 4.17 *Gegeben seien die Matrizen*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Man beweise oder widerlege:
a) Es gibt eine invertierbare Matrix T mit $A = T^{-1}BT$.
b) Es gibt eine invertierbare Matrix T mit $A = T^{-1}CT$.

Aufgabe 4.18 *Sei* $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ *eine reelle Matrix mit* $b > 0$ *und* $c > 0$. *Zeigen Sie:*
a) A *hat zwei reelle Eigenwerte.*
b) Kein Quadrant der Ebene $\mathbb{R}^2$ *enthält Eigenvektoren zu beiden Eigenwerten von* A.

Aufgabe 4.19 *Sei* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ *eine reelle Matrix. Geben Sie eine Basis des* $\mathbb{R}^3$ *an, die aus Eigenvektoren von* A *besteht.*

Aufgabe 4.20 *Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.3 Diagonalisierbarkeit

Eine Matrix heißt diagonalisierbar, wenn sie ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist. Wir interessieren uns jetzt dafür, welche Matrizen diagonalisierbar sind, und wie wir sie dann gegebenenfalls konkret diagonalisieren können, d.h., wie wir eine Basis von Eigenvektoren finden können, wenn es eine solche gibt. Ein erster Schritt in diese Richtung ist

Satz 4.7 (Diagonalisierbarkeitskriterien) *a) (notwendig) Wenn eine Matrix* C *diagonalisierbar ist, dann zerfällt ihr charakteristisches Polynom* χ_C *in ein Produkt von Linearfaktoren:*

$$\chi_C(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \cdot \dots \cdot (\lambda_n - \lambda), \quad \lambda_k \in K.$$

b) (hinreichend) Wenn χ_C *in Linearfaktoren zerfällt und alle seine Wurzeln* $\lambda_1, ..., \lambda_n$ *paarweise verschieden sind, dann ist* C *diagonalisierbar.*

Beweis. a) ist klar, man braucht nur die Determinante einer Diagonalmatrix $C' - \lambda \mathbb{1}_n$ hin zu schreiben, wo C' eine zu C ähnliche Diagonalmatrix ist. (Ähnliche Matrizen haben wegen Satz 4.5 ja das gleiche charakteristische Polynom.)

b) Zu den n paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_n$ finden wir als Lösungen der linearen Gleichungssysteme $(C - \lambda_k \mathbb{1}_n)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ Eigenvektoren $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$. Wir müssen zeigen, dass sie linear unabhängig sind.

Dazu beweisen wir durch vollständige Induktion nach $m = 1, ..., n$ folgende Aussage: Sind $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_m \in K^n$ Eigenvektoren zu m paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_m$, dann sind sie linear unabhängig. Für $m = n$ ist dies die Behauptung.

Induktionsanfang: Für $m = 1$ ist $\mathbf{v}_1$ ein Eigenvektor, der nach Definition $\neq 0$ ist. Er ist also linear unabhängig.

Induktionsschluss ($m \geq 2$): Sind $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_m$ Eigenvektoren zu m paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_m$, dann sind natürlich auch die Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_{m-1}$ paarweise verschieden und $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{m-1}$ nach *Induktionsannahme* linear unabhängig. Um $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_m$ auf lineare Unabhängigkeit zu testen, nehmen wir $\sum_1^m c_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ an. Hierauf wenden wir die Matrix $C - \lambda_m \mathbb{1}$ an:

$$\mathbf{0} = (C - \lambda_m \mathbb{1}) \sum_1^m c_k \mathbf{v}_k = \sum_1^m c_k (\lambda_k - \lambda_m) \mathbf{v}_k = \sum_1^{m-1} c_k (\lambda_k - \lambda_m) \mathbf{v}_k.$$

Aus der Induktionsvoraussetzung folgt $c_k(\lambda_k - \lambda_m) = 0$ für $k = 1, ..., m-1$, und daraus $c_k = 0$ wegen $\lambda_k \neq \lambda_m$. Aus der linearen Relation zwischen den $\mathbf{v}_k$ bleibt nur noch $c_m \mathbf{v}_m = \mathbf{0}$, und wegen $\mathbf{v}_m \neq 0$ folgt $c_m = 0$. $\square$

Wir formulieren jetzt ein Diagonalisierbarkeitskriterium, welches sowohl hinreichend als auch notwendig ist. Theoretisch ist dies eine sehr befriedigende Beschreibung der Diagonalisierbarkeit, praktisch für das Problem, eine konkret gegebene Matrix zu diagonalisieren jedoch unbrauchbar.

Satz 4.8 (Notwendiges und hinreichendes Diagonalisierbarkeitskriterium) *Eine Matrix $C \in M(n \times n, K)$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn*

(1) das charakteristische Polynom χ_C in Linearfaktoren zerfällt, etwa

$$\chi_C(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{r_1} \cdot ... \cdot (\lambda_k - \lambda)^{r_k}, \quad r_1 + \cdots + r_k = n,$$

wo die Wurzeln $\lambda_1, ..., \lambda_k$ alle paarweise verschieden sein sollen, aber mit ihren Vielfachheiten $r_1, ..., r_k$ zu Potenzen zusammengefasst,

und

(2) für die verschiedenen Wurzeln $\lambda_1, ..., \lambda_k$ gilt

$$Rang(C - \lambda_j \mathbb{1}_n) = n - r_j \qquad (j = 1, ..., k).$$

Beweis „$\Rightarrow$“ : Sei C diagonalisierbar, also etwa ähnlich zur Matrix

$$C' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_1 & & \\ & & & \lambda_2 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix},$$

und seien $r_1, ..., r_k$ die Vielfachheiten, mit denen die verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_k$ in C' auftreten. Dann zerfällt das charakteristische Polynom $\chi_C(\lambda) = \chi_{C'}(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{r_1} \cdot ... \cdot (\lambda_k - \lambda)^{r_k}$ in Linearfaktoren. Für $j = 1, ..., k$ ist

$$C - \lambda_j \mathbb{1}_n = A^{-1} \cdot C' \cdot A - \lambda_j \mathbb{1}_n = A^{-1} \cdot (C' - \lambda_j \mathbb{1}_n) \cdot A$$

und deswegen $Rang(C-\lambda_j \mathbb{1}_n) = Rang(C'-\lambda_j \mathbb{1}_n)$. Schließlich fallen in $C'-\lambda_j \mathbb{1}_n$ genau die r_j Diagonaleinträge weg, die gleich λ_j sind, während an den anderen Stellen der Diagonale die Zahlen $\lambda_i - \lambda_j$ für $i \neq j$ stehen. Diese sind ungleich Null. So ist etwa

$$C' - \lambda_1 \mathbb{1}_n = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & \lambda_2 - \lambda_1 & & \\ & & & & \lambda_2 - \lambda_1 & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Der Rang von $C' - \lambda_j \mathbb{1}_n$ ist die Zahl der Diagonaleinträge $\neq 0$, und damit $= n - r_j$.

„$\Leftarrow$“ Für $j = 1, ..., k$ sei

$$V_j := Kern(C - \lambda_j \cdot \mathbb{1}_n)$$

der *Eigenraum* zu λ_j. Nach (2) ist $dim(V_j) = n - (n - r_j) = r_j$. Wir wählen Basen $\mathbf{v}_1^{(j)}, ..., \mathbf{v}_{r_j}^{(j)} \in V_j$ für die einzelnen Eigenräume. Es genügt zu zeigen, dass alle diese Vektoren

$$\mathbf{v}_1^{(1)}, ..., \mathbf{v}_{r_1}^{(1)}, \mathbf{v}_1^{(2)}, ..., \mathbf{v}_1^{(k)}, ..., \mathbf{v}_{r_k}^{(k)}$$

linear unabhängig sind. Denn dann bilden sie eine Basis des K^n, eine Basis aus Eigenvektoren von C. Zum Test der linearen Unabhängigkeit nehmen wir also

$$c_1^{(1)}\mathbf{v}_1^{(1)} + \cdots + c_{r_1}^{(1)}\mathbf{v}_{r_1}^{(1)} + ... + c_1^{(k)}\mathbf{v}_1^{(k)} + \cdots + c_{r_k}^{(k)}\mathbf{v}_{r_k}^{(k)} = \mathbf{0}$$

an. Für einen Eigenvektor $\mathbf{v}^{(j)} \in V_j$ ist

$$(C - \lambda_2 \mathbb{1}_n) \cdots (C - \lambda_k \mathbb{1}_n) \cdot \mathbf{v}^{(j)} = (\lambda_j - \lambda_2) \cdots (\lambda_j - \lambda_k)\mathbf{v}^{(j)} \begin{cases} = 0 \text{ für } j > 1 \\ \neq 0 \text{ für } j = 1 \end{cases}$$

Multiplizieren wir also die obige lineare Relation mit dem Matrizenprodukt

$$(C - \lambda_2 \mathbb{1}_n) \cdot ... \cdot (C - \lambda_k \mathbb{1}_n),$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (\lambda_1 - \lambda_k) \cdot (c_1^{(1)}\mathbf{v}_1^{(1)} + ... + c_{r_1}^{(1)}\mathbf{v}_{r_1}^{(1)}) &= \mathbf{0} \\ c_1^{(1)}\mathbf{v}_1^{(1)} + ... + c_{r_1}^{(1)}\mathbf{v}_{r_1}^{(1)} &= \mathbf{0} \\ c_1^{(1)} = ... = c_{r_1}^{(1)} &= 0 \end{aligned}$$

Analog findet man dass auch die Koeffizienten für $j > 1$ verschwinden. □

Was sagt Satz 4.8 über einen Jordanblock? Der einzige Eigenwert c hat Vielfachheit n, während der zugehörige Eigenraum Dimension $=1$ hat. Ein Jordanblock ist (für $n \geq 2$) nicht diagonalisierbar. Er ist geradezu im höchstmöglichen Maß un-diagonalisierbar.

Aufgabe 4.21 *In einem vierdimensionalen Vektorraum* V *sei* $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4\}$ *eine Basis. Eine lineare Abbildung* $f : V \to V$ *habe die Eigenschaft*

$$\begin{array}{ll} f(\mathbf{b}_1) = \mathbf{0}, & f(\mathbf{b}_2) = \mathbf{b}_1 + 4\mathbf{b}_4, \\ f(\mathbf{b}_3) = \mathbf{b}_2 - 8\mathbf{b}_4, & f(\mathbf{b}_4) = \mathbf{b}_3 + 5\mathbf{b}_4. \end{array}$$

Ist f *diagonalisierbar?*

Aufgabe 4.22 *Man betrachte die Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ist A *diagonalisierbar? Falls ja, geben Sie eine Matrix* S *an, so dass* $S^{-1}AS$ *Diagonalgestalt hat.*

Aufgabe 4.23 *Gegeben sei die reelle Matrix* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$

a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von A.
b) Untersuchen Sie, ob A *zu einer reellen Diagonalmatrix ähnlich ist.*

Aufgabe 4.24 *Seien* r, s *reelle Zahlen mit* $0 \le r, s \le 1$, *und sei*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ r & 0 & 1-r & 0 \\ 0 & 1-s & 0 & s \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Ermitteln Sie alle Eigenwerte von P.
b) Geben Sie alle Parameterpaare (r, s) *an, für die* P *diagonalisierbar ist.*

Aufgabe 4.25 *Der Endomorphismus* $f \in End(\mathbb{R}^4)$ *habe bezüglich der kanonischen Basis die Abbildungsmatrix*

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Man prüfe, ob A *diagonalisierbar ist, und bestimme gegebenenfalls eine Basis des* $\mathbb{R}^4$, *bezüglich der* f *als Abbildungsmatrix eine Diagonalmatrix besitzt.*

Aufgabe 4.26 *a) Zeigen Sie, dass für eine* 2×2*-Matrix* A *über einem beliebigen Körper gilt:* A *ist genau dann diagonalisierbar, wenn* A *entweder verschiedene Eigenwerte besitzt, oder wenn* A *ein Vielfaches der Einheitsmatrix ist.*
b) Die reelle 2×2*-Matrix* A *habe den Vektor* $(3, 4)^t$ *als Eigenvektor zum Eigenwert* 2 *und den Vektor* $(4, -3)^t$ *zum Eigenwert* -1. *Bestimmen Sie die Matrix* A.

Aufgabe 4.27 *Betrachten Sie die reelle* 3×3*-Matrix*

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Determinante von B.
b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von B.
c) Ermitteln Sie alle Eigenräume von B*, indem Sie für jeden Eigenraum eine Basis angeben.*
c) Entscheiden Sie, ob B *diagonalisierbar ist.*

Aufgabe 4.28 *Es seien* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^3$ *die kanonische Basis und* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *eine lineare Abbildung mit*

$$f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3), \quad f(\mathbf{e}_2) = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3), \quad f(\mathbf{e}_3) = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2).$$

a) Man zeige $f^2 = f$.
b) Man bestimme je eine Basis von $Kern(f)$ *und* $Bild(f)$.
c) Man zeige, dass f *diagonalisierbar ist.*

Aufgabe 4.29 *Entscheiden Sie (mit Begründung), welche der folgenden vier Matrizen reell diagonalisierbar sind:*

$$M_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 & 11 \\ 0 & 3 & 5 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 6 & 9 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}, \quad M_2 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_3 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_4 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4.30 *Es sei* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *eine lineare Abbildung mit*

$$f - \frac{1}{4}f^2 = ir_{\mathbb{R}^3}.$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von f.
b) Zeigen Sie, dass es genau eine solche Abbildung f *gibt, die diagonalisierbar ist.*

Aufgabe 4.31 *Sei*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 5 \\ -5 & -1 & 5 \\ -5 & -5 & 9 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie das charakteristische Polynom an. Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren von A*, und geben Sie die Eigenräume an.*
b) Zeigen Sie, dass es eine Matrix $B \in \mathbb{C}^{3\times3}$ *mit* $B^2 = A$ *gibt.*

Aufgabe 4.32 *Für die Matrizen*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \textit{und} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

zeige man, dass ihre Eigenwerte samt algebraischer Vielfachheit übereinstimmen, aber nur eine diagonalisierbar ist.

Aufgabe 4.33 *Gegeben seien die Matrizen*

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \textit{und} \qquad B := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 8 & -5 & -8 \\ -8 & 4 & 7 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q}).$$

a) Zeigen Sie, dass sowohl A als auch B diagonalisierbar sind.
b) Zeigen Sie, dass A und B simultan diagonalisierbar sind, d.h., dass es ein invertierbares $T \in M_3(\mathbb{Q})$ gibt, derart dass TAT^{-1} und TBT^{-1} beide Diagonalgestalt haben.

Aufgabe 4.34 *Zeigen Sie, dass die Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

über $\mathbb{R}$ nicht diagonalisierbar, aber trigonalisierbar (d.h. ähnlich zu einer Dreiecksmatrix) ist. geben Sie ein $S \in GL(3, \mathbb{R})$ an, so dass SAS^{-1} eine Dreiecksmatrix ist.

Aufgabe 4.35 *Bestimmen Sie alle Eigenvektoren und Eigenwerte der reellen Matrizen*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \textit{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -3 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

und entscheiden Sie, ob A und B diagonalisierbar sind. Hinweis: beide Matrizen haben ganzzahlige Eigenwerte.

Aufgabe 4.36 *Gegeben sei die Matrix*

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom der Matrix M.
b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von M.
c) Geben Sie für jeden Eigenraum von M eine Basis an.
d) Entscheiden Sie, ob M reell diagonalisierbar ist.

4.4 Die Hauptachsentransformation

Wir kommen noch einmal zurück auf die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

aus Abschnitt 4.2 mit ihren Eigenvektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1+\sqrt{5} \end{pmatrix}, \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Diese beiden Vektoren sind nicht nur linear unabhängig, sondern wegen der Relation

$$4 + (1-\sqrt{5}) \cdot (1+\sqrt{5}) = 0$$

stehen sie sogar senkrecht aufeinander. Damit hat die Matrix C gleich zwei höchst bemerkenswerte Eigenschaften:

- Ihr charakteristisches Polynom hat zwei relle Nullstellen,
- ihre zwei linear unabhängigen Eigenvektoren stehen aufeinander senkrecht.

Der gemeinsame Grund für beides ist eine Eigenschaft der Matrix C, welche wir bisher noch nicht beachteten: Sie ist symmetrisch!

Definition 4.4 *Eine Matrix $A \in M(n \times n, K)$ heißt* symmetrisch, *wenn*

$$A^t = A.$$

Unsere 2×2-Matrix C ist deswegen symmetrisch, weil im System der beiden gekoppelten Federn die untere Masse dieselbe Kraft auf die obere ausübt (Eintrag rechts oben), wie die obere Masse auf die untere (Eintrag links unten in C). Dieses fundamentale Naturprinzip ist der Grund für die Symmetrie der Matrix C, und das hat für uns die genannten erfreulichen Konsequenzen. Es gilt nämlich allgemein für *relle* Matrizen:

Satz 4.9 *Alle Eigenwerte einer reellen symmetrischen Matrix sind reell. Das charakteristische Polynom einer solchen Matrix zerfällt also in reelle Linearfaktoren.*

Beweis. Zunächst müssen wir davon ausgehen, dass die Eigenwerte der symmetrischen Matrix S komplex sind, und dass zu einem solchen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ auch nur ein komplexer Eigenvektor $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ gehört. Wir betrachten die folgende Gleichungskette:

$$\overline{\lambda}\overline{\mathbf{v}}^t \cdot \mathbf{v} = \overline{\lambda\mathbf{v}}^t \cdot \mathbf{v} = \overline{S\mathbf{v}}^t \cdot \mathbf{v} = \overline{\mathbf{v}}^t \cdot \overline{S}^t \cdot \mathbf{v} = \overline{\mathbf{v}}^t \cdot S\mathbf{v} = \lambda\overline{\mathbf{v}}^t \cdot \mathbf{v}.$$

Wenn $\mathbf{v} = (v_\nu)$, dann ist $\overline{\mathbf{v}} = (\overline{v}_\nu)$, und

$$\overline{\mathbf{v}}^t.\mathbf{v} = \sum_{\nu=1}^{n} |v_\nu|^2$$

ist reell und > 0, da $\mathbf{v} \neq 0$. Aus der Gleichungskette folgt also

$$(\overline{\lambda} - \lambda) \cdot \sum_{\nu=1}^{n} |v_\nu|^2 = 0.$$

Wir finden $\overline{\lambda} = \lambda$, d.h. $\lambda \in \mathbb{R}$. $\square$

Dieser Beweis ist kurz und teuflisch. Da es unmöglich ist, in dieser Kürze zu verstehen, was eigentlich gespielt wird, wollen wir uns das charakteristische Polynom einer reellen symmetrischen 2×2–Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

einmal genauer ansehen. Das charakteristische Polynom ist

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - (a+c)\lambda + (ac - b^2).$$

Die quadratische Formel liefert

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(a + c \pm \sqrt{(a+c)^2 - 4(ac - b^2)}\right)$$

Wegen $(a+c)^2 - 4ac = (a-c)^2$ ist der Ausdruck unter der Wurzel

$$(a-c)^2 + 4b^2$$

eine Summe zweier Quadrate und damit positiv. Das für diese Argumentation wesentliche Quadrat b^2 steht hier nur deswegen, weil A symmetrisch ist. Wenn $n > 2$ ist, dann sind die Auswirkungen der Nicht-Diagonal-Einträge einer symmetrischen $n \times n$–Matrix auf deren charakteristisches Polynom nicht mehr so einfach zu verfolgen, obwohl sich das Resultat der Überlegung ja verallgemeinert.

Mit Satz 4.9 beweisen wir jetzt ganz leicht den Satz von der „Hauptachsentransformation“, einen der wichtigsten Sätze der ganzen Mathematik.

Satz 4.10 (Hauptachsentransformation für reelle symmetrische Matrizen) *Zu jeder rellen symmetrische Matrix S gibt es eine reelle orthogonale Matrix T derart, dass $T^{-1} \cdot S \cdot T$ eine Diagonalmatrix ist.*

Beweis. Wir beweisen die Behauptung für $n \times n$-Matrizen S durch Induktion nach n. Für $n = 1$ (Induktionsanfang) ist nichts zu zeigen. Sei also $n \geq 2$.

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra besitzt die Matrix S sicher einen Eigenwert λ_1, der nach Satz 4.9 reell ist. Es gibt also einen dazu gehörigen Eigenvektor $\mathbf{v}_1 \in \mathbb{R}^n$. Wir können ihn o.B.d.A. als normiert annehmen. Dann ergänzen wir $\mathbf{v}_1$ zu einer Ortho–Normalbasis $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}'_2, ..., \mathbf{v}'_n$ des $\mathbb{R}^n$. Die Matrix

$$T_1 := (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}'_2, ..., \mathbf{v}'_n)$$

ist deswegen orthogonal und insbesondere invertierbar. Wir benutzen sie als Übergangsmatrix und finden

$$T_1^{-1} \cdot S \cdot T_1 \quad = \quad T_1^t \cdot S \cdot T_1 \qquad\qquad \text{(da } T_1 \text{ orthogonal)}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^t \\ (\mathbf{v}_2')^t \\ \vdots \\ (\mathbf{v}_n')^t \end{pmatrix} \cdot S \cdot (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2', ..., \mathbf{v}_n')$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^t \\ (\mathbf{v}_2')^t \\ \vdots \\ (\mathbf{v}_n')^t \end{pmatrix} \cdot (S \cdot \mathbf{v}_1, S \cdot \mathbf{v}_2', ..., S \cdot \mathbf{v}_n')$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^t \cdot \lambda_1 \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1^t \cdot S \cdot \mathbf{v}_2' & ... & \mathbf{v}_1^t \cdot S \cdot \mathbf{v}_n' \\ (\mathbf{v}_2')^t \cdot \lambda_1 \mathbf{v}_1 & (\mathbf{v}_2')^t \cdot S \cdot \mathbf{v}_2' & ... & (\mathbf{v}_2')^t \cdot S \cdot \mathbf{v}_n' \\ ... & ... & & ... \\ (\mathbf{v}_n')^t \cdot \lambda_1 \mathbf{v}_1 & (\mathbf{v}_n')^t \cdot S \cdot \mathbf{v}_2' & ... & (\mathbf{v}_n')^t \cdot S \cdot \mathbf{v}_n' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & S_2 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Da S symmetrisch ist, gilt

$$(T_1^t \cdot S \cdot T_1)^t = T_1^t \cdot S^t \cdot T_1 = T_1^t \cdot S \cdot T_1,$$

diese Matrix ist also wieder symmetrisch. Die $*$-Einträge in ihrer ersten Zeile sind deswegen alle $= 0$, und auch S_2 ist wieder symmetrisch. Nach Induktionsannahme gibt es nun eine orthogonale $(n-1) \times (n-1)$–Matrix T_2 so, dass $T_2^{-1} \cdot S_2 \cdot T_2$ diagonal ist. Setzen wir

$$T := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} \cdot T_1 \in O(n, \mathbb{R}),$$

so ist $T^{-1} \cdot S \cdot T$ diagonal. □

Die Spaltenvektoren der orthogonalen Matrix T sind die Vektoren der neuen Basis, in der die Matrix S diagonalisiert ist. Da T orthogonal ist, stehen diese alle aufeinander senkrecht. Daraus folgt

Satz 4.11 (Korollar zu Satz 4.10) *Zu jeder reellen symmetrischen Matrix gibt es eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren.*

Obwohl die Orthogonalität der Eigenvektoren eine Konsequenz der Hauptachsentransformation ist, wollen wir sie auch noch einmal direkt aus der Symmetrie der Matrix herleiten: Sei also S eine symmetrische relle $n \times n$–Matrix mit zwei verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Seien $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^n$ dazugehörige Eigenvektoren. Wir behaupten

$$(\mathbf{v}_1.\mathbf{v}_2) \;=\; \mathbf{v}_1^t \cdot \mathbf{v}_2 \;=\; 0.$$

Der Beweis besteht im Wesentlichen aus der einen Zeile:

$$\lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1^t \cdot \mathbf{v}_2 = (S \cdot \mathbf{v}_1)^t \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1^t \cdot S^t \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1^t \cdot S \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1^t \cdot (\lambda_2 \mathbf{v}_2) = \lambda_2 \cdot \mathbf{v}_1^t \cdot \mathbf{v}_2.$$

Denn aus
$$(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot (\mathbf{v}_1.\mathbf{v}_2) \;=\; 0$$
und $\lambda_1 \neq \lambda_2$ folgt $(\mathbf{v}_1.\mathbf{v}_2) = 0$. $\square$

Aufgabe 4.37 *Gegeben sei die Matrix*
$$S := \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{2} & -1 & \sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$
a) Zeigen Sie, dass die Matrix S den Eigenwert 1 besitzt.
b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren für die Matrix S.

Aufgabe 4.38 *Sei A eine symmetrische, reelle 3×3-Matrix, deren fünfte Potenz die Einheitsmatrix E ist. Man zeige $A = \mathbb{1}_3$.*

Aufgabe 4.39 *Beweisen oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel folgende Aussagen über Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$:*
1. A ist symmetrisch und alle Eigenwerte von A sind $> 0 \quad \Rightarrow \quad x^t \cdot A \cdot x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$, $x \neq 0$.
2. A^2 ist reell diagonalisierbar $\quad \Rightarrow \quad A$ ist reell diagonalisierbar.
3. A hat den Eigenwert $+1$ und den Eigenwert $-1 \quad \Rightarrow \quad A$ ist orthogonal.

Aufgabe 4.40 *Man zeige, dass genau eine der beiden Matrizen*
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$
das Quadrat einer reellen Matrix ist.

Aufgabe 4.41 *Zeigen Sie, dass die Matrix*
$$A := \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
mittels einer orthogonalen Matrix S auf Diagonalform $D = S^{-1}AS$ gebracht werden kann, und geben Sie die Matrix D explizit an.

Aufgabe 4.42 *Üben Sie auf die Matrix*
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$
eine Hauptachsentransformation aus, d.h. bestimmen Sie eine Matrix $S \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, so dass S^tAS diagonal ist.