Funktionentheorie

Wolf P. Barth

Sommersemester 2000

Mathematisches Institut der Universität
Erlangen, Bismarckstraße $1\frac{1}{2}$
e-mail: barth@mi.uni-erlangen.de

Version vom 26. April 2000

Inhaltsverzeichnis

Funktionentheorie ist die Theorie der *komplex-differenzierbaren* Funktionen einer komplexen Variablen. Was 'komplex-differenzierbar' heißt, werden wir dabei noch genau verstehen müssen. Das klingt etwas esoterisch, die Funktionentheorie ist aber soetwas wie das Herz der Mathematik.

Zunächst eine kurze Liste von Lehrbüchern zur Funktionentheorie:

- Cartan, H.: Theorie elementaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes. Hermann, Paris 1961. Deutsch: BI-Verlag 1966
- Fischer, W., Lieb, I.: Funktionentheorie. Vieweg 1980.
- Knopp, K.: Elemente der Funktionentheorie, Funktionentheorie I,II. 3 Bde., Sammlung Göschen.
- Remmert, R.: Funktionentheorie I,II. Springer 1984.

0 Die komplexen Zahlen

Die komplexen Zahlen, und erst recht, die komplex-wertigen Funktionen sind noch gar nicht so lange in der Mathematik heimisch. Die Notwendigkeit, komplexe Zahlen einzuführen, stellte sich nicht - wie man erwarten sollte - bei dem Versuch quadratische Gleichungen der Art

$$x^2 + 1 = 0$$

nach x aufzulösen. Nein! Derartige Gleichungen sahen Griechen, Inder und Araber Jahrhunderte lang einfach nicht als sinnvoll an; die Notwendigkeit, sie aufzulösen gab es nicht. Anders war es nach der Aufstellung der sogenannten Cardanoschen Formeln (Beginn des 16. Jahrhunderts) zur Auflösung der Gleichungen dritten Grades. Beim sogenannten 'Casus irreducibilis' bekam man reelle Lösungen, die man aber nur mit Hilfe komplexer Zahlen hinschreiben konnte. Von da an konnten komplexe Zahlen nicht mehr verdrängt werden. Später kamen dann die Erfolge Eulers (18. Jahrhundert), die allerdings nicht immer ganz hasenrein waren, und zu Beginn des 19. Jahrhunderts begründeten Cauchy und Gauß das Rechnen mit komplexen Zahlen exakt. Allerdings scheint selbst Gauß zeitlebens dabei ein ungutes Gefühl gehabt zu haben: Beweise, die er mit Hilfe komplexer Zahlen fand, versuchte er nachträglich so zu frisieren, dass er sie ohne Verwendung dieser Zahlen schreiben konnte.

0.1 Algebra

Eigentlich sollten die Rechenregeln für komplexe Zahlen mittlerweile bekannt sein. Zur Sicherheit wollen wir sie noch einmal zusammenstellen:

- Eine komplexe Zahl $c \in \mathbb{C}$ schreiben wir

$$c = a + b \cdot i \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}.$$

In dieser Schreibweise heißen

$$a = Re(c) \quad \text{Realteil von } c, \qquad b = Im(c) \quad \text{Imaginärteil von } c.$$

Die komplexe Zahl $\bar{c} = a - b \cdot i$ heißt *konjugiert-komplexe* Zahl zu c. Die reelle Zahl

$$|c| := \sqrt{a^2 + b^2}$$

heißt *der Betrag* von c.

- Reelle Zahlen $r \in \mathbb{R}$ identifizieren wir mit den komplexen Zahlen $r + 0 \cdot i$. Unter $r \cdot i, r \in \mathbb{R}$, verstehen wir die komplexe Zahl $0 + r \cdot i$ (rein imagiäre Zahl).

- Zwei komplexe Zahlen

$$c_1 = a_1 + b_1 \cdot i, \quad c_2 = a_2 + b_2 \cdot i$$

addieren sich folgendermaßen

$$c_1 + c_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot i.$$

Für reelle Zahlen $c_1 = a_1$ und $c_2 = a_2$ ist dies die gewohnte Addition. Für 'echt' komplexe Zahlen $c_k = a_k + b_k \cdot i$ ist dies die Vektoraddition im reellen Vektorraum $\mathbb{R}^2$.

- Zwei komplexe Zahlen

$$c_1 = a_1 + b_1 \cdot i, \quad c_2 = a_2 + b_2 \cdot i$$

multiplizieren sich folgendermaßen

$$c_1 \cdot c_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2) \cdot i.$$

Für reelle Zahlen $c_1 = a_1$ und $c_2 = a_2$ ist dies die gewohnte Multiplikation. Außerdem gilt die Formel, wegen der man dies alles macht:

$$i^2 = i \cdot i = -1.$$

Die Multiplikation komplexer Zahlen ist kommutativ (wir brauchen also keinen Unterschied zwischen $b \cdot i$ und ib zu machen) und assoziativ. Weiter gelten die üblichen Distributivgesetze, welche Addition und Multiplikation verknüpfen. Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ mit ihrer Addition und Multiplikation bilden also einen Körper.

Legt man die Distributivgesetze und die Formel $i^2 = -1$ zugrunde, so kann man die Multiplikation gar nicht anders als angegeben definieren.

- Für den Betrag gelten dabei die Rechenregeln

$$\begin{aligned} |c_1 + c_2| &\leq |c_1| + |c_2| \qquad \text{(Dreiecksungleichung)} \\ |c_1 \cdot c_2| &= |c_1| \cdot |c_2|. \end{aligned}$$

Die Dreiecksungleichung folgt, weil der Betrag $|c|$ nichts anderes ist als die Norm $\| (a, b) \|$ des Vektors $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ und die Betragsformel für das Produkt muss man halt nachrechnen:

$$\begin{aligned} |c_1 \cdot c_2|^2 &= |a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i|^2 \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2)^2 \\ &= a_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_2^2 + b_1^2 a_2^2 \\ &= (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) \\ &= |c_1|^2 \cdot |c_2|^2. \end{aligned}$$

- Das Quadrat des Betrags kann man auch so schreiben:

  $$|c|^2 = a^2 + b^2 = (a + b \cdot i) \cdot (a - b \cdot i) = c \cdot \bar{c}.$$

  Für $c \neq 0$ ist $|c| \neq 0$ und es gilt

  $$c \cdot \frac{\bar{c}}{|c|^2} = \frac{|c|^2}{|c|^2} = 1.$$

  Damit haben wir ein einfache Formel für das Inverse einer komplexen Zahl $c \neq 0$:

  $$\frac{1}{c} = \frac{1}{|c|^2} \cdot \bar{c}.$$

Für die Addition komplexer Zahlen ist die Schreibweise $c = a + bi$ (Trennung in Real- und Imaginärteil) vorteilhaft, weil die Addition ja nichts anderes ist als Vektor-Addition im $\mathbb{R}^2$. Der Multiplikation besser angepasst ist aber die Schreibweise in Polar-Koordinaten:

Jede komplexe Zahl $c \neq 0$ kann man

$$c = |c| \cdot \hat{c} \quad \text{mit} \quad \hat{c} = \frac{c}{|c|}$$

schreiben, wo $\hat{c}$ eine komplexe Zahl vom Betrag $|\hat{c}| = 1$ ist. Diese hat eine Darstellung

$$\hat{c} = cos(\varphi) + i \cdot sin(\varphi), \quad \varphi \in \mathbb{R},$$

mit einem Winkel

$$\varphi = arg(c).$$

Damit wird dann

$$c = |c| \cdot (cos(\varphi) + i \cdot sin(\varphi)).$$

Der Winkel φ ist hier nur dann eindeutig bestimmt, wenn man $0 \leq \varphi < 2\pi$ vereinbart. (Eine solche Vereinbarung führt aber sehr schnell auf die allerhübschesten Schwierigkeiten.) Auch die Zahl $c = 0$ kann man in Polarkoordinaten

$$0 = 0 \cdot (cos(\varphi) + i \cdot sin(\varphi))$$

schreiben. Hier ist der Winkel $\varphi = arg(0)$ aber völlig unbestimmt (und auch völlig bedeutungslos).

Mit den Additionstheoremen der Winkelfunktionen findet man für die Multiplikation komplexer Zahlen in Polarkoordinaten-Schreibweise

$$\begin{aligned} c_1 \cdot c_2 &= |c_1| \cdot (cos(\varphi_1) + i \cdot sin(\varphi_1)) \cdot |c_2| \cdot (cos(\varphi_2) + i \cdot sin(\varphi_2)) \\ &= |c_1| \cdot |c_2| \cdot (cos(\varphi_1) cos(\varphi_2) - sin(\varphi_1) sin(\varphi_2)) + i \cdot (cos(\varphi_1) sin(\varphi_2) + sin(\varphi_1) cos(\varphi_2))) \\ &= |c_1| \cdot |c_2| \cdot (cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot (sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned}$$

Wir sehen: Bei der Multiplikation zweier komplexer Zahlen multiplizieren sich deren Beträge, während sich ihre Argumente addieren. Umgekehrt gilt dann bei Division durch $c_2 \neq 0$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{|c_1|}{|c_2|} \cdot (cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot (sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Diese Formeln sind sehr schön und erhellend. Das Dumme ist nur, dass man mit dem Winkel dabei sehr schnell über 2π hinaus oder unter 0 herunter kommt.

Trotzdem hat die Polarkoordinaten-Schreibweise enorme Vorteile. Das zeigt sich besonders deutlich, wenn man die sogenannten *Einheitswurzeln* sucht. Eine k-te Einheits-Wurzel ist eine komplexe Zahl c mit $c^k = 1$. Schreiben wir $c = |c| \cdot (cos(\varphi) + i \cdot sin(\varphi))$, so bedeutet dies $|c|^k = 1$, d.h., $|c| = 1$ und

$$k \cdot \varphi = 0, \quad \text{genauer} \quad k \cdot \varphi = n \cdot 2\pi, n \in \mathbb{N}.$$

Man findet die k verschiedenen Winkel

$$\varphi = \frac{n}{k} \cdot 2\pi, \quad n = 0, ..., k-1.$$

Es gibt also k verschiedene k-te Einheitswurzeln.

Beispiele: $k = 2$: $c = \pm 1$.
$k = 3$: Man findet $c = 1$ und

$$\omega = cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \cdot sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}, \quad \omega^2 = cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \cdot sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}.$$

$k = 4$: $c = 1, i, -1, -i$.

Aufgabe 0.1 **a)** *Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahlen*

$$\frac{1-i}{1+i} \quad \textit{und} \quad \frac{1+2i}{1-2i}.$$

b) *Bestimmen Sie* $\sqrt{1+2i}$, *d.h., Real- und Imaginärteil aller komplexen Zahlen* w *mit* $w^2 = 1 + 2i$.

Aufgabe 0.2 *Es sei* $z = x + iy \in \mathbb{C}$. *Schreiben Sie die Zahlen*
a) z^3, **b)** z^n, $n \in \mathbb{N}$,
in der Form $c = a + ib$ *mit* $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 0.3 *Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $\bar{z} = z$, *bzw.* $\bar{z} = -z$, *bzw.* $\bar{z} = 1/z$.

Aufgabe 0.4 *Berechnen Sie Real- und Imagiärteil für jede der folgenden Zahlen:*

$$\begin{aligned} c_1 &:= (4+3i)(4+2i)(3-i)(1-i), \\ c_2 &:= \frac{i}{(i-1)(i-2)(i-3)}, \\ c_3 &:= \frac{1+z}{1-z} \quad \textit{wo } z = cos(\varphi) + isin(\varphi) \neq 1. \end{aligned}$$

Aufgabe 0.5 *Zeigen Sie: Ein Dreieck mit den Eckpunkten $a, b, c \in \mathbb{C}$ hat als Flächeninhalt*

$$F = \frac{1}{2}|Im(\bar{a}b + \bar{b}c + \bar{c}a)|.$$

Aufgabe 0.6 *Es sei $c \in \mathbb{C}$ fest und $f(z) := z/(z-c)$ für $z \in \mathbb{C}$.*
a) *Bestimmen Sie Definitions- und Bildbereich der Funktion f.*
b) *Zeigen Sie, dass f eine bijektive Abbildung seines Definitions- auf seinen Bildbereich vermittelt, indem Sie die Umkehrfunktion angeben.*
c) *Zeigen Sie: Das Bild einer Kreislinie $K \subset \mathbb{C}$ unter f ist stets wieder eine Kreislinie, außer, wenn $c \in K$. Was ist $f(K \setminus \{c\})$ in diesem Fall?*

Aufgabe 0.7 *Was ist der Imaginärteil von $\frac{1}{1-i}$?* (H 96, T 2, A 1.1)

0.2 Konvergenz

Konvergenz von Folgen definiert man in $\mathbb{C}$ genauso wie in $\mathbb{R}$:

Definition 0.1 *Die Folge $c_n \in \mathbb{C}$ komplexer Zahlen konvergiert gegen $c \in \mathbb{C}$, wenn es zu jedem $0 < \epsilon \in \mathbb{R}$ ein $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ gibt derart, dass für alle $n \geq N(\epsilon)$ gilt:*

$$|c_n - c| < \epsilon.$$

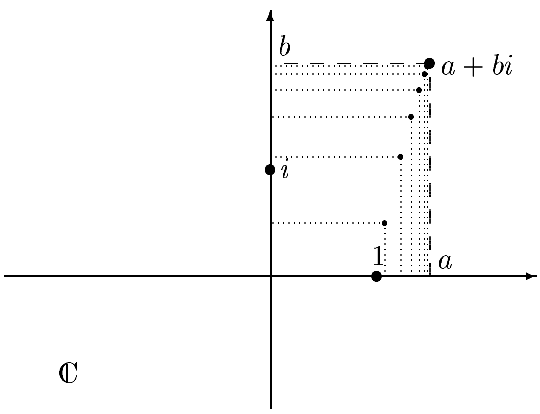
Das ist haargenau dasselbe, wie die übliche Konvergenz im $\mathbb{R}^2$. Deswegen sind die folgenden Eigenschaften zur Konvergenz äquivalent:

a) Eine Folge $c_n = a_n + b_n \cdot i$ konvergiert gegen $c = a + b \cdot i$, genau dann wenn Real- und Imaginärteile konvergieren:

$$a = lim(a_n), \quad b = lim(b_n).$$

b) Cauchy-Kriterium: Eine Folge $c_n \in \mathbb{C}$ konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist. D.h., für alle $0 < \epsilon \in \mathbb{R}$ existiert ein $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $m, n > N(\epsilon)$ gilt:

$$|c_m - c_n| < \epsilon.$$



Offene und abgeschlossene Mengen $M \subset \mathbb{C}$ definiert man wie in der Ebene $\mathbb{R}^2$. Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ heißt also *offen*, wenn zu jedem Punkt $z_0 \in U$ ein Radius $r > 0$ existiert, so, dass die Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ noch ganz zu U gehört. Und $A \subset \mathbb{C}$ heißt *abgeschlossen*, wenn $U := \mathbb{C} \setminus A$ offen ist. Mit der Konvergenz von Folgen hängt das so zusammen: $A \subset \mathbb{C}$ ist abgeschlossen, wenn für jede Folge von Punkten $z_n \in A$, welche in $\mathbb{C}$ konvergiert, der Grenzwert $\lim z_n$ auch in A liegt.

Definition 0.2 *Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ heißt ein* Gebiet, *wenn sie offen und zusammenhängend ist.*

Dabei heißt U zusammenhängend, wenn für je zwei Punkte $z_0, z_1 \in U$ ein stetiger Weg $\gamma : [0,1] \to U$ existiert mit $\gamma(0) = z_0$ und $\gamma(1) = z_1$. Auch das hat mit Konvergenz zu tun, weil Stetigkeit ja über Folgenstetigkeit definiert werden kann.

In der Funktionentheorie kommen konvergente Folgen meist als Reihen vor. Eine Reihe $\sum c_n$ komplexer Zahlen konvergiert (wie üblich) wenn die Folge ihrer Partialsummen

$$S_n := \sum^n c_\nu$$

konvergiert. Und das Cauchy-Kriterium für diese Folge liefert

Satz 0.1 (Cauchy-Kriterium für Reihen) *Eine Reihe $\sum c_n$ komplexer Zahlen konvergiert genau dann, wenn für alle $0 < \epsilon \in \mathbb{R}$ ein $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, derart, dass für alle $m \geq n \geq N(\epsilon)$ gilt*

$$\left| \sum_n^m c_\nu \right| < \epsilon.$$

Indem man hier speziell $m = n$ setzt, erhält man

Satz 0.2 (Notwendiges Kriterium) *Konvergiert die Reihe $\sum c_n$ so ist notwendigerweise*

$$\lim_{n \to \infty} c_n = 0.$$

Beispiel: Die *geometrische Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n$$

zur Basis $c \in \mathbb{C}$ hat die Partialsummen

$$S_n = \frac{1 - c^{n+1}}{1 - c}$$

(Beweis wie im Reellen). Für $|c| < 1$ ist $\lim |c|^n = 0$ und deswegen auch $\lim c^n = 0$. Daraus folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - c^{n+1}}{1 - c} = \frac{1}{1 - c}$$

für $|c| < 1$. Für $|c| \geq 1$ ist das notwendige Kriterium $\lim |c|^n = 0$ nicht erfüllt, und die geometrische Reihe zur Basis c divergiert.

Aus dem Cauchy-Kriterium erhält man weiter

Satz 0.3 (Majorantenkriterium) *Die Reihe $\sum r_n$ reeller Zahlen $r_n \in \mathbb{R}$ sei konvergent. c_n sei eine Folge komplexer Zahlen mit*

$$|c_n| \leq r_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

dann konvergiert die komplexe Reihe $\sum c_n$.

Beweis. Ist $m \geq n$, so gilt für die Differenz der Partialsummen

$$|S_m - S_n| = \left| \sum_{n+1}^{m} c_\nu \right| \leq \sum_{n+1}^{m} |c_\nu| \leq \sum_{n+1}^{m} r_\nu.$$

□

Die wichtigsten Reihen sind in der Funktionentheorie Potenzreihen

$$\sum a_n z^n, \quad a_n \in \mathbb{C}, z \in C,$$

bzw. allgemeiner Potenzreihen mit Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$

$$\sum a_n (z - z_0)^n.$$

Das nützlichste Konvergenzkriterium für Potenzreihen ist meiner Meinung nach das Quotientenkriterium, etwa in folgender Form:

Satz 0.4 (Quotientenkriterium) *Für die Potenzreihe $\sum a_n z^n$ gelte*

$$\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \rho \in \mathbb{R}.$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum a_n z^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit

$$|z| < r := \frac{1}{\rho},$$

bzw. für alle $z \in \mathbb{C}$, wenn $\rho = 0$ ist. Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq r$ divergiert die Potenzreihe.

Beweis. Für alle $|z| < r$ gilt

$$\frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \cdot |z|.$$

Für $n \geq n_0$ ist dieser Quotient $\leq q$ für jedes $q \in \mathbb{R}$ mit

$$\rho \cdot |z| < q < 1.$$

Daraus folgt für $n \geq n_0$

$$|a_n z^n| \leq |a_{n_0} z^{n_0}| \cdot q^{n-n_0},$$

und die konvergente Reihe

$$|a_{n_0} z^{n_0}| \cdot \sum q^{n-n_0}$$

ist eine Majorante der Potenzreihe.

Falls $|z| > r$ ist, gilt

$$\lim \frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \rho \cdot |z| > 1,$$

und die Reihe erfüllt nicht das notwendige Kriterium $\lim |a_n z^n| = 0$. $\square$

Beispiel (Exponentialreihe): Für die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

ist

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n} \to 0.$$

Die Exponentialreihe konvergiert deswegen für alle $z \in \mathbb{C}$.

Ein anderes, vor allem theoretisch wichtiges Konvergenzkriterium ist

Satz 0.5 *Es gebe einen Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ mit*

$$|a_n z_0^n| \leq C \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum a_n z^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |z_0|$.

Beweis. Aus $|z| < |z_0|$ folgt

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leq C \cdot q^n$$

mit

$$q := \left|\frac{z}{z_0}\right| < 1.$$

Und die konvergente geometrische Reihe $C \cdot \sum q^n$ ist deswegen eine Majorante. $\square$

Satz 0.6 (Lemma von Abel) *Die Potenzreihe $\sum a_n z^n$ konvergiere für ein $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann konvergiert sie für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |z_0|$.*

Beweis. Wegen der Konvergenz in z_0 ist $\lim a_n z_0^n = 0$. Insbesondere ist

$$|a_n z_0^n| \leq C$$

beschränkt. Die Behauptung folgt aus Satz 0.5 $\square$

Dieses Lemma von Abel hat eine ganz wichtige Folgerung für die Konvergenz von Potenzreihen: Konvergiert eine Potenzreihe $\sum a_n z^n$ in einem Punkt z_0 mit $r := |z_0| > 0$, so konvergiert die Reihe für alle z in der Kreisscheibe

$$K_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}.$$

Die Menge $K \subset \mathbb{C}$ aller Punkte z, in denen die Reihe konvergiert, enthält deswegen die Kreisscheibe

$$K_0 := \bigcup K_r, \quad r = |z_0|,\, z_0 \in \mathbb{C} \text{ mit } \sum a_n z_0^n \text{ konvergent}.$$

Ist R der Radius dieser Kreisscheibe, so kann die Reihe in keinem $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $|z_0| > R$ konvergieren, denn dieses würde ja als ein z_0 bei der Definition von K_0 vorkommen!

Komplexe Potenzreihen konvergieren deswegen immer auf Kreisscheiben. Der Radius der Kreisscheibe, auf der eine Potenzreihe konvergiert, heißt *Konvergenzradius* der Potenzreihe. Dabei kann der Konvergenzradius auch $= 0$ oder $= \infty$ sein. Das ist so zu verstehen: Eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < R$ und für kein $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$. In welchen Punkten auf dem Rand $|z| = R$ des Konvergenzkreises eine Potenzreihe konvergiert, das ist eine sehr, sehr komplizierte Angelegenheit.

Dieser komplexe Tatbestand kann durchaus reelle Konsequenzen haben. Die geometrische Reihe

$$\sum_0^\infty (-1)^n z^{2n} = \frac{1}{1+z^2}$$

etwa hat den Konvergenzradius $R = 1$, denn im Punkt $z = i$ kann sie unmöglich konvergieren. Das sieht man der reellen Funktion $1/(1+x^2)$ aber nicht an.

Aufgabe 0.8 *Zeigen Sie*

$$\sum_{k=0}^\infty \left(\frac{1+i}{2}\right)^k = 1 + i.$$

0.3 Funktionen

Wir betrachten hier komplex-wertige Funktionen

$$f : z \mapsto f(z) \in \mathbb{C}$$

definiert auf einer Teilmenge $M \subset \mathbb{C}$. Später wird die Definitionsmenge M meistens ein Gebiet sein.

Der Real- und der Imaginärteil einer Funktion $f : M \to \mathbb{C}$

$$u := Re(f(z)), \quad v := Im(f(z))$$

sind reelle Funktionen von z, beziehungsweise reelle Funktionen der beiden reellen Variablen

$$x = Re(z), \quad y = Im(z).$$

Wir schreiben solche Funktionen immer

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Wir können sie auch als ein Paar u, v von zwei reell-wertigen Funktionen zweier reeller Argumente x, y auffassen. Der Graph einer solchen Funktion ist eine Teilmenge von $\mathbb{C} \times \mathbb{C} = \mathbb{R}^4$ und entzieht sich damit völlig der Anschauung.

Beispiele: 1) Ein Polynom vom Grad n ist eine Funktion

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0, \quad a_\nu \in \mathbb{C}.$$

Der Definitionsbereich ist ganz $\mathbb{C}$. So ein Polynom ist leicht hinzuschreiben, aber wegen der Komplexität doch nicht ganz einfach zu begreifen. So ist z.B.

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i \cdot 2xy = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$$

mit

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy.$$

2) Eine *rationale Funktion* ist ein Quotient

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

von zwei Polynomen p und q. Die Funktion ist definiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $q(z) \neq 0$.

3) Die Exponentialfunktion kann man über ihre Potenzreihe

$$exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

definieren. Nach 0.2 konvergiert diese Reihe ja für alle $z \in \mathbb{C}$ und liefert dort einen Wert. Ganz genauso wie im Reellen beweist man mit dem Cauchy-Produkt ihre Produktformel

$$\begin{aligned} exp(z_1 + z_2) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k}{k!} \frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= exp(z_1) \cdot exp(z_2). \end{aligned}$$

3) Auch die Winkelfunktionen

$$sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

kann man über ihre Potenzreihen für alle $z \in \mathbb{C}$ definieren. Die Konvergenz der Reihen beweist man mit dem Quotientenkriterium genauso wie bei der Exponentialreihe. Diese Winkelfunktionen sind mit der Exponentialfunktion über die *Eulersche Formel*

$$e^{i \cdot z} = cos(z) + i \cdot sin(z), \quad z \in \mathbb{C},$$

verknüpft. Zum Beweis setzt man einfach ein:

$$\begin{aligned} exp(i \cdot z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i \cdot z)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i \cdot z)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i \cdot z)^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n} \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n+1} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= cos(z) + i \cdot sin(z).
\end{aligned}
$$

Mit der Eulerschen Formel kann man die Exponentialfunktion in Real- und Imaginärteil trennen:

$$
\begin{aligned}
exp(z) &= exp(x + i \cdot y) \\
&= exp(x) \cdot exp(i \cdot y) \\
&= exp(x) \cdot (cos(y) + i \cdot sin(y)) \\
&= exp(x) cos(y) + i \cdot exp(x) sin(y).
\end{aligned}
$$

Die Stetigkeit komplexwertiger Funktionen definiert man genauso wie für Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Definition 0.3 *Sei $M \subset \mathbb{C}$. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{C}$ heißt stetig in $z_0 \in M$, wenn zu jedem $0 < \epsilon \in \mathbb{R}$ ein $0 < \delta(\epsilon) \in \mathbb{R}$ existiert mit*

$$z \in M, |z - z_0| < \delta(\epsilon) \quad \Rightarrow \quad |f(z) - f(z_0)| < \epsilon.$$

Wie im Reellen ist dazu äquivalent die *Folgenstetigkeit*: Ist $z_n \in M$ eine Folge mit $\lim z_n = z_0 \in M$, so gilt $\lim f(z_n) = f(z_0)$. Und genauso wie im Reellen beweist man die Stetigkeit von Summen, Differenzen, Produkten und Quotienten stetiger Funktionen. Insbesondere sind alle Polynome stetig und alle rationalen Funktionen dort stetig, wo sie definiert sind.

Natürlich sind auch im Komplexen alle Funktionen stetig, die man durch Potenzreihen darstellen kann. Wie üblich braucht man dazu einen Begriff:

Definition 0.4 *Sei $M \subset \mathbb{C}$. Die Funktionenfolge $f_n : M \to \mathbb{C}$ heißt gleichmäßig konvergent gegen die Funktion $f : M \to \mathbb{C}$, wenn zu jedem $0 < \epsilon \in \mathbb{R}$ ein $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ existiert mit:*

$$n \geq N(\epsilon), z \in M \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \epsilon.$$

Und weiter braucht man zwei Aussagen:

Satz 0.7 *Die Folge f_n von stetigen Funktionen $f_n : M \to \mathbb{C}$ konvergiere auf M gleichmäßig gegen die Funktion $f : M \to \mathbb{C}$. Dann ist auch f stetig.*

Beweis. Sei $0 < \epsilon \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$ für $n \geq N$ und alle $z \in M$. Sei $z_0 \in M$ beliebig und $0 < \delta \in \mathbb{R}$ so gewählt, dass $|f_N(z) - f_N(z_0)| < \epsilon$ für alle $z \in M$ mit $|z - z_0| < \delta$. Für diese z gilt dann auch

$$
\begin{aligned}
|f(z) - f(z_0)| &= |f(z) - f_N(z) + f_N(z) - f_N(z_0) + f_N(z_0) - f(z_0)| \\
&\leq |f(z) - f_N(z)| + |f_N(z) - f_N(z_0)| + |f_N(z_0) - f(z_0)| \\
&\leq 3 \cdot \epsilon.
\end{aligned}
$$

$\square$

Satz 0.8 *Es sei $\sum a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R. Für jedes $r < R$ ist die Konvergenz der Potenzreihe auf der echt kleineren Kreisscheibe $|z| < r$ gleichmäßig.*

Beweis. Wir müssen nur den Beweis für das Lemma von Abel noch einmal, etwas sorgfältiger, durchgehen. Dazu wählen wir ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $r < |z_0| < R$. Nach Voraussetzung konvergiert die Reihe $\sum a_n z^n$ in z_0 und insbesondere ist $|a_n z_0^n| \leq C$ beschränkt. Für alle $|z| < r$ ist

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leq C \cdot \left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n.$$

Mit $q := r/|z_0| < 1$ ist die geometrische Reihe $C \cdot \sum q^n$ eine Majorante der Potenzreihe $\sum a_n z^n$. Und zwar ist diese Majorante, unabhängig von z, eine Majorante für alle Reihen $\sum a_n z^n$ mit $|z| < r$. Daraus folgt die gleichmäßige Konvergenz auf der Kreisscheibe $|z| < r$. □

Damit wissen wir also jetzt: Konvergiert eine Potenzreihe $\sum a_n z^n$ auf einer Kreisscheibe gegen eine Grenzfunktion $f(z)$, so ist f stetig auf jeder kleineren Kreisscheibe $|z| < r$ mit $r < R$. Jeder Punkt z_0 *im Inneren* der Kreisscheibe $|z| < R$ liegt aber in einer geeigneten Kreisscheibe $|z| < r$ mit $|z_0| < r < R$. Damit ist f stetig in jedem Punkt z_0 im Inneren des Konvergenzkreises.

Aufgabe 0.9 *Es sei p ein Polynom und nicht konstant 0. Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ für die*

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) e^{nz}$$

konvergiert. (F 91, T 2, Aufg 2, leicht modifiziert)

1 Komplex-differenzierbare Funktionen

1.1 Komplexe Differenzierbarkeit

Genau wie im Reellen kann man auch für komplexwertige Funktionen die Differenzierbarkeit erklären.

Definition 1.1 *Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{C}$ heißt komplex-differenzierbar in $z_0 \in M$ mit Ableitung $f'(z_0) = c$, wenn für $z \in M$ gilt*

$$f(z) = f(z_0) + c \cdot (z - z_0) + \varphi(z),$$

wo $\varphi : M \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\varphi(z)}{z - z_0} = 0.$$

Man kann diese Bedingung auch

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

schreiben.

Was bedeutet komplexe Differenzierbarkeit für Real- und Imaginärteil einer komplexen Funktion

$$f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y) \quad ?$$

Ist $c = a + ib$, so ist

$$\begin{aligned} c \cdot (z - z_0) &= (a + ib) \cdot ((x - x_0) + i(y - y_0)) \\ &= a(x - x_0) - b(y - y_0) + i[b(x - x_0) + a(y - y_0)]. \end{aligned}$$

Die komplexe Funktion f wird approximiert durch die $\mathbb{C}$-lineare Funktion $c \cdot (z - z_0)$ und die reelle Abbildung (u, v) von zwei reellen Variablen wird approximiert durch $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}.$$

Satz 1.1 *Die komplexe Funktion $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ist genau dann $\mathbb{C}$-differenzierbar in z_0, wenn die reelle Abbildung (u, v) in (x_0, y_0) total $\mathbb{R}$-differenzierbar ist mit einer Funktionalmatrix der Form*

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Falls nicht $a = b = 0$ ist, ist obige 2×2-Matrix die Matrix zu einer Drehstreckung. Und zwar wird die Ebene $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ mit dem Faktor $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ gestreckt, und um einen Winkel φ mit

$$cos(\varphi) = a, \quad sin(\varphi) = b$$

gedreht. Das ist genau die Multiplikation $m_c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit der komplexen Zahl $c = a + ib$, aufgefasst als reelle Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Ist $f = u + iv$ komplex-differenzierbar mit Ableitung $f' = c = a + ib$, so hat die reelle Abbildung (u, v) die partiellen Ableitungen

$$u_x := \frac{\partial u}{\partial x} = a, \quad u_y := \frac{\partial u}{\partial y} = -b,$$

$$v_x := \frac{\partial v}{\partial x} = b, \quad v_y := \frac{\partial v}{\partial y} = a.$$

Es gelten die sogenannten *Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen*

$$\boxed{u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.}$$

Beispiel: Die Exponentialfunktion ist

$$exp(z) = e^x cos(y) + i \cdot e^x sin(y) = u + iv$$

mit

$$u(x, y) = e^x cos(y), \quad v(x, y) = e^x sin(y).$$

Es ist

$$u_x = e^x cos(y) = v_y, \quad u_y = -e^x sin(y) = -v_x.$$

Die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen sind erfüllt. Weil die Funktionen $u = e^x cos(y)$ und $v = e^x sin(y)$ stetig partiell $\mathbb{R}$-differenzierbar sind, ist die reelle Abbildung (u, v) stetig partiell $\mathbb{R}$-differenzierbar und damit total $\mathbb{R}$-differenzierbar. Weil die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen gelten, ist die Exponentialfunktion $exp(z) = u + iv$ komplex differenzierbar.

Für $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ definiert man

$$\frac{\partial f}{\partial x} = u_x + iv_x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = u_y + iv_y.$$

Dann ist also für $\mathbb{C}$-differenzierbares f

$$f' = \frac{df}{dz} = a + ib = u_x + iv_x = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Und die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen sind äquivalent zu

$$\frac{\partial f}{\partial y} = i \cdot \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Beispiel: Die Funktion $f(z) = z = x + iy$ ist total reell differenzierbar mit

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = i.$$

Die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen sind also erfüllt und $f(z) = z$ ist $\mathbb{C}$-differenzierbar mit komplexer Ableitung $= 1$.

Da komplexe Differenzierbarkeit wörtlich wie im Reellen definiert ist, gelten auch wörtlich dieselben Rechenregeln (die Beweise sind nämlich wörtlich die gleichen):

- Ist die Funktion f $\mathbb{C}$-differenzierbar im Punkt z, so ist sie dort stetig.
- Sind die Funktionen f_1, f_2 $\mathbb{C}$-differenzierbar im Punkt z und $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, so ist auch die Funktion $c_1 f_1 + c_2 f_2$ $\mathbb{C}$-differenzierbar in z mit Ableitung
$$(c_1 f_1 + c_2 f_2)'(z) = c_1 f_1'(z) + c_2 f_2'(z) \quad \text{(Linearität)}.$$
- Sind die Funktionen f_1, f_2 $\mathbb{C}$-differenzierbar im Punkt z, so ist es auch $f_1 \cdot f_2$ mit Ableitung
$$(f_1 \cdot f_2)'(z) = f_1'(z) \cdot f_2(z) + f_1(z) \cdot f_2'(z) \quad \text{(Produktregel)}.$$
- Ist die Funktion f $\mathbb{C}$-differenzierbar im Punkt z mit $f(z) \neq 0$, so ist dort auch $1/f$ in z differenzierbar mit Ableitung
$$\left(\frac{1}{f}\right)'(z) = -\frac{f'(z)}{f^2(z)}.$$
- Ist die Funktion g $\mathbb{C}$-differenzierbar im Punkt z und f $\mathbb{C}$-differenzierbar im Punkt $g(z)$, so ist $f \circ g$ $\mathbb{C}$-differenzierbar im Punkt z mit Ableitung
$$(f \circ g)'(z) = f'(g(z)) \cdot g'(z) \quad \text{(Kettenregel)}.$$

Weil die Identität $f(z) = z$ komplex-differenzierbar mit Ableitung $z' = 1$ ist (letztes Beispiel), folgt aus aus der Produktformel, dass jede Potenz $f(z) = z^n, n \in \mathbb{N}$, differenzierbar ist mit Ableitung
$$(z^n)' = nz^{n-1}.$$
Wegen der Linearität sind damit alle Polynome auf ganz $\mathbb{C}$ komplex-differenzierbar. Eine *rationale Funktion* ist ein Quotient
$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$
von zwei Polynomen $p, q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Sie ist definiert auf ganz $\mathbb{C}$, bis auf die Nullstellen des Nenners (Pole). Wo die rationale Funktion definiert ist, gilt wie üblich
$$\left(\frac{p}{q}\right)'(z) = \frac{p'(z)q(z) - p(z)q'(z)}{q^2(z)}.$$
Bisher kennen wir also die folgenden komplex-differenzierbaren Funktionen: Polynome, oder allgemeiner rationale Funktionen und die e-Funktion, und alles was man daraus sinnvoll zusammensetzen kann.

Definition 1.2 *Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{C}$ heißt* holomorph *auf M, wenn sie in jedem Punkt $z \in M$ komplex-differenzierbar ist.*

Aufgabe 1.1 a) *Berechnen Sie $\partial f/\partial x$ und $\partial f/\partial y$ für $f(z) = \bar{z}$.*
b) *Kontrollieren Sie, ob $f(z) = \bar{z}$ die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen erfüllt.*

Aufgabe 1.2 *Die Funktion f sei holomorph auf dem Einheitskreis E. Zeigen Sie:*
a) $f(z) \in \mathbb{R}$ *für alle* $z \in E \quad \Rightarrow \quad f = const$,
b) $|f(z)| = const \quad \Rightarrow \quad f = const$.

Aufgabe 1.3 *Für* $\mathbb{R}$*-differenzierbare komplexwertige Funktionen* f *definiert man die Wirtinger-Ableitungen*

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Zeigen Sie
a) *die Produktregel für* $\partial/\partial z$ *und* $\partial/\partial\bar{z}$,
b) f *ist holomorph genau dann, wenn* $\partial f/\partial\bar{z} = 0$,
c) *wenn* f *holomorph ist, dann ist* $\partial f/\partial z = df/dz$.

Aufgabe 1.4 *Jeder Funktion* $f(z)$ *entspricht durch Einführung von Polarkoordinaten* $z = r(cos(\varphi) + isin(\varphi))$ *eine Funktion* $g(r,\varphi) = f(rcos(\varphi) + irsin(\varphi))$.
a) *Welche Bedingungen für* $Re(g)$ *und* $Im(g)$ *sind äquivalent zu den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für* f*?*
b) *Für welche holomorphe Funktion* f *ist auch* g *holomorph in Abhängigkeit von* $w = r + i\varphi$*?*

Aufgabe 1.5 *Sei* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *definiert durch* $f(z) = e^z$. *Man schreibe* $z \in \mathbb{C}$ *in der Form* $z = x + iy\,(x, y \in \mathbb{R})$.
a) *Seien* $0 < \epsilon < \pi$ *und* $a \in \mathbb{R}$. *Man zeichne die Bildmenge* $f(Q)$ *des Quadrats* $Q = \{x + iy : a - \epsilon \leq x \leq a + \epsilon, -\epsilon \leq y \leq \epsilon\}$ *unter der Abbildung* f.
b) *Man berechne das Verhältnis der Flächen von* $f(Q)$ *und von* Q *im Limes* $\epsilon \to 0$.
c) *Wieso folgt das Ergebnis in Teilaufgabe b) auf Grund der Holomorphie der Funktion* f*?*
(F 92, T 3, A 2)

Aufgabe 1.6 **a)** *Die Funktion* $f : U \to \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}$, *sei holomorph mit* $f'(z) \neq 0$ *für alle* $z \in U$. *Zeigen Sie: Die Höhenlinien von Real- und Imaginärteil von* f, *d.h. die Kurven* $\{z \in \mathbb{C} : Re\, f(z) = c\}$, $c \in \mathbb{R}$, *bzw.* $\{z \in \mathbb{C} : Im\, f(z) = c\}$, $c \in \mathbb{R}$, *sind regulär und sschneiden sich senkrecht.*
b) *Skizzieren Sie die Höhenlinien von Real- und Imaginärteil von* $f(z) = z^2$.
(H 97, T 3, A 5)

1.2 Komplexe Kurvenintegrale

Es sei

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto z(t) = x(t) + iy(t)$$

ein *stückweise differenzierbarer* Weg in der komplexen Ebene. Damit meinen wir, dass beide Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ stetig sind, und bis auf endlich viele Stellen auch stetig differenzierbar. Beispiele sind etwa der Rand des Einheitskreises

$$\partial E : \quad t \mapsto e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi,$$

oder der Rand des Einheitsquadrates

$$t \mapsto \begin{cases} t & (0 \le t \le 1), \\ 1 + (t-1) \cdot i & (1 \le t \le 2) \\ 3 - t + i & (2 \le t \le 3) \\ (4-t) \cdot i & (3 \le t \le 4). \end{cases}$$

Wir wollen das komplexe Kurvenintegral

$$\int_\gamma f(z)\,dz$$

definieren. Zunächst definieren wir dieses Integral für den Fall, dass der Weg γ eine reelles Intervall $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ ist: Ist $f(t) = u(t) + i \cdot v(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, eine stetige komplex-wertige Funktion auf dem Intervall $[\alpha, \beta]$, so setzt man

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,dt := \int_\alpha^\beta u(t)\,dt + i \cdot \int_\alpha^\beta v(t)\,dt = \int_\alpha^\beta Re(f(t))\,dt + i \cdot \int_\alpha^\beta Im(f(t))\,dt.$$

Für dieses komplexe Integral hat man, genau wie für das reelle Integral, die *Standard-Abschätzung*

$$\left| \int_\alpha^\beta f(t) dt \right| \le \int_\alpha^\beta |f(t)|\,dt.$$

Der Beweis dafür ist allerdings etwas trickreich:

Sei

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = a + i \cdot b = c \neq 0$$

und $c' := \bar{c}/|c|$ mit $|c'| = 1$. Dann ist

$$\int_\alpha^\beta c' \cdot f(t)\,dt = c' \cdot \int_\alpha^\beta f(t)\,dt = c' \cdot c$$

reell, also

$$\int_\alpha^\beta Im(c' \cdot f(t))\,dt = Im\left(c' \cdot \int_\alpha^\beta f(t)\,dt \right) = 0,$$

und

$$\begin{aligned} \left| \int_\alpha^\beta f(t)\,dt \right| &= \left| c' \cdot \int_\alpha^\beta f(t)\,dt \right| \\ &= \left| \int_\alpha^\beta c' \cdot f(t)\,dt \right| \\ &= \left| \int_\alpha^\beta Re(c' \cdot f(t))\,dt \right| \\ &\le \int_\alpha^\beta |c' \cdot f(t)|\,dt \\ &= \int_\alpha^\beta |f(t)|\,dt. \end{aligned}$$

Jetzt sei

$$\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto z(t) = x(t) + i \cdot y(t),$$

ein komplexer Weg. Dann definieren wir, zunächst rein formal

$$dz := z'(t)dt = (\frac{dx}{dt} + i \cdot \frac{dy}{dt})dt,$$

$$\int_\gamma f(z)\, dz := \int_\alpha^\beta f(z(t))\, dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))\, z'(t)\, dt.$$

Beispiel 1: $\int_\gamma dz = \int_a^b dx + i \cdot \int_a^b dy = x(b) - x(a) + i \cdot (y(b) - y(a)) = \gamma(b) - \gamma(a)$.
Beispiel 2: Wir integrieren die Funktion $f(z) = z$:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma zdz &= \int_a^b (x + i \cdot y)(dx + i \cdot dy) \\
&= \int_a^b (xdx - ydy) + i \int_a^b (xdy + ydx) \\
&= \left[\frac{1}{2}(x^2 - y^2)\right]_a^b + i \cdot [xy]_a^b \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left[z^2\right]_a^b \\
&= \frac{1}{2}(\gamma(b)^2 - \gamma(a)^2).
\end{aligned}$$

Als erstes müssten wir jetzt einsehen, dass dieses Integral unabhängig von der Parametrisierungsabbildung des Weges ist. Das tun wir aber nicht, sondern wir überlegen uns, dass sein Real- und Imaginärteil Kurvenintegrale von reellen Vektorfeldern, sind. Die Parameterunabhängigkeit (bis auf das von der Durchlaufrichtung abhängige Vorzeichen) folgt dann aus der Analysis (II oder III).

Also, was sind Real- und Imaginärteil des soeben definierten Integrals?

$$\begin{aligned}
Re\left(\int_\gamma f(z)dz\right) &= \int_\alpha^b Re(f(z(t)) \cdot z'(t))\, dt \\
&= \int_\alpha^\beta Re\left((u + iv) \cdot (\frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}\right))dt \\
&= \int_\alpha^\beta \left(u(x,y)\frac{dx}{dt} - v(x,y)\frac{dy}{dt}\right) dt \\
&= \int_\gamma (\begin{pmatrix} u(x,y) \\ -v(x,y) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{pmatrix})dt \\
&= \int_\gamma (\begin{pmatrix} u(x,y) \\ -v(x,y) \end{pmatrix}, ds), \\
Im\left(\int_\gamma f(z)dz\right) &= \int_\alpha^\beta Im\left((u + iv) \cdot (\frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt})\right) dt \\
&= \int_\alpha^\beta (u\frac{dy}{dt} + v\frac{dx}{dt})dt \\
&= \int_\gamma (\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}, ds).
\end{aligned}$$

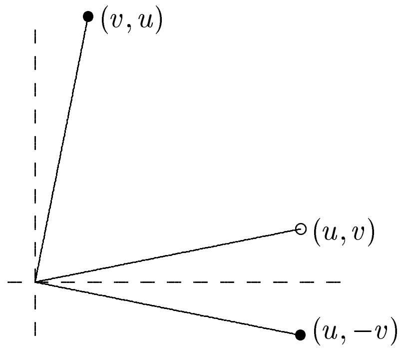
Beide, Real- und Imaginärteil sind Kurvenintegrale über Vektorfelder. Leider ist keines der beteiligten Felder das Feld (u, v), sondern wir haben ausgerechnet:

$$\boxed{\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (\begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}, ds) + i \cdot \int_\gamma (\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}, ds)}$$

Es handelt sich nicht um das Feld (u, v), sondern beim Realteil um das Feld $(u, -v)$ und beim Imaginärteil um (v, u). Immerhin haben beide Felder etwas miteinander zu tun:

$$((u, -v).(v, u)) = uv - vu = 0,$$

beide Felder stehen aufeinander senkrecht:



$$\begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$$

Sehr häufig brauchen wir auch für diese Kurvenintegrale die *Standard-Abschätzung*

$$\left| \int_\gamma f(z)\, dz \right| \leq M \cdot L,$$

wo

$$M := \max_{z \in |\gamma|} |f(z)|, \qquad L := L(\gamma) = \int_\alpha^\beta |\gamma'(t)|\, dt.$$

Beweis. Es ist wegen der Standard-Abschätzung für Integrale komplexer Funktionen über reelle Intervalle

$$\begin{aligned} \left| \int_\gamma f(z)\, dz \right| &= \left| \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t) dt \right| \\ &\leq \int_\alpha^\beta |f(\gamma(t))\gamma'(t)|\, dt \\ &\leq \int_\alpha^\beta M \cdot |\gamma'(t)|\, dt \\ &= M \cdot L. \end{aligned}$$

□

Auch die *Substitutionsformel* gilt ziemlich wörtlich wie für reelle Integrale. In einer reellen Veränderlichen ist dies die Formel

$$\int_a^b f(g(\xi))g'(\xi)d\xi = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx \qquad \text{(Substitution } x = g(\xi).\text{)}$$

Für komplexe Kurvenintegrale wird daraus die Formel

$$\int_\gamma f(g(\zeta))g'(\zeta)d\zeta = \int_\Gamma f(z)dz \qquad \text{(Substitution } \Gamma = g \circ \gamma.\text{)}$$

Dabei ist wie immer der Integrand f als stetig, und weiter die Substitutionsfunktion g als komplex differenzierbar mit stetiger Ableitung g' vorauszusetzen.

Beweis. Es sei $g(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ und $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$. Damit wird

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} g(\gamma(t)) &= u_x \frac{dx}{dt} + u_y \frac{dy}{dt} + i(v_x \frac{dx}{dt} + v_y \frac{dy}{dt}) \\
&= (u_x + iv_x) \frac{dx}{dt} + (u_y + iv_y) \frac{dy}{dt} \\
&= (u_x + iv_x) \cdot (\frac{dx}{dt} + i \frac{dy}{dt}) \\
&= g'(\gamma(t)) \cdot \frac{d\gamma}{dt}.
\end{aligned}$$

Und wir finden

$$\int_\gamma f(g(\zeta)) g'(\zeta) d\zeta = \int_\alpha^\beta f(g(\gamma(t)) g'(\gamma(t)) \frac{d\gamma}{dt} dt = \int_\alpha^\beta f(g(\gamma(t)) \frac{d}{dt} g(\gamma(t)) dt = \int_\Gamma f(z) dz.$$

□

Beispiel: Wir integrieren $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{Z}$ über den Rand des Einheitskreises und wenden die Substitution $g(z) = 1/z$ an. Es ist also $\gamma(t) = e^{i \cdot t}$, $0 \le t \le 2\pi$, und $\Gamma(t) = e^{-i \cdot t}$, $0 \le t \le 2\pi$. Für die linke Seite finden wir

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(g(\zeta)) g'(\zeta) d\zeta &= \int_\gamma f\left(\frac{1}{\zeta}\right) \cdot \left(-\frac{1}{\zeta^2}\right) d\zeta \\
&= \int_\gamma \zeta^{-n} (-\zeta^{-2}) d\zeta \\
&= -\int_\gamma \zeta^{-2-n} d\zeta \\
&= \begin{cases} 0 & (n \neq -1) \\ -2\pi i & (n = -1) \end{cases}
\end{aligned}$$

Und für die rechte Seite erhält man direkt

$$\int_\Gamma f(z) dz = \int_\Gamma z^n dz = \begin{cases} 0 & (n \neq -1) \\ -2\pi i & (n = -1) \end{cases}$$

Natürlich wollen wir diese Integrale auswerten für holomorphe Funktionen $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, wo also die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen gelten. Was bedeuten diese Differentialgleichungen für die beiden Vektorfelder unter dem Integral?

Vektorfeld	Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen
$(u, -v)$	$u_x = v_y \Leftrightarrow div(u, -v) = 0$ $u_y = -v_x \Leftrightarrow rot(u, -v) = 0$
(v, u)	$u_x = v_y \Leftrightarrow rot(v, u) = 0$ $u_y = -v_x \Leftrightarrow div(v, u) = 0$

Die Rotation eines ebenen Feldes $\mathbf{a} = (a_1(x,y), a_2(x,y))$ ist streng genommen nicht definiert. Aber wenn wir dieses Feld zu einem z-unabhängigen drei-dimensionalen Feld

$$\mathbf{a}(x,y,z) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \\ 0 \end{pmatrix}$$

fortsetzen, dann hat

$$rot(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}$$

nur eine einzige Komponente $\neq 0$, und zwar in z-Richtung. Diese Komponente können wir als Rotation des ebenen Feldes auffassen. Dann ist also

$$rot(u,v) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Somit haben wir jeder holomorphen Funktion zwei aufeinander senkrechtstehende ebene Felder zugeordnet, die beide quellen- und wirbelfrei sind. Solche Felder haben durchaus praktische Bedeutung (z.B. als eine z-unabhängie wirbelfreie Flüssigkeits- oder Luftströmung). Beschreibung, bzw. Konstruktion solcher Felder ist eine der klassischen Anwendungen der Funktionentheorie. Umgekehrt spielten die Eigenschaften solcher Felder eine große Rolle, als Riemann um die Mitte des vergangenen Jahrhunderts die Grundlagen der modernen Funktionentheorie schuf.

Beide Felder sind divergenz- und wirbelfrei. Damit verschwinden ihr Wegintegral (nach dem Satz von Stokes) und ihr Fluss-Integral (nach dem zwei-dimensionalen Satz von Gauß) über geschlossene Wege, die ein Gebiet umranden, auf dem die Funktion f holomorph ist. Es folgt

Satz 1.2 (Integralsatz von Cauchy, erste Version)) *Die Funktion f sei holomorph (mit stetiger Ableitung) auf einer offenen Umgebung der abgeschlossenen Menge $M \subset \mathbb{C}$, deren Rand ∂M eine stückweise stetig differenzierbare Kurve ist. Dann gilt*

$$\boxed{\oint_{\partial M} f(z)dz = 0.}$$

Beweis. Nach der Formel von Gauß-Green aus der Analysis ist der Realteil des Integrals

$$\oint_{\partial M} (\begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}, ds) = \int_M (-v_x - u_y)\, dxdy = 0$$

und der Imaginärteil

$$\oint_{\partial M} (\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}, ds) = \int_{\partial M} (u_x - v_y)\, dxdy = 0.$$

□

Das war ein Beweis des Integralsatzes von Cauchy für Physiker. Es gibt aber auch einen Beweis für Mathematiker, bei dem die Stetigkeit der Ableitung $f'(z)$ nicht vorausgesetzt zu werden braucht:

Satz 1.3 (Cauchyscher Integralsatz für Rechtecke) *Die Funktion f sei holomorph auf einer Umgebung eines Rechtecks $R \subset \mathbb{C}$. Dann gilt*

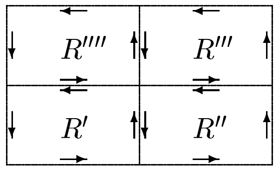
$$\oint_{\partial R} f(z)dz = 0.$$

Beweis. O.B.d.A. normieren wir das Rechteck auf

$$R_0 = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}.$$

Wir zerlegen R_0 in die vier gleichgroßen Rechtecke

$$\begin{array}{lcl} R' & := & \{0 \leq x \leq a/2, 0 \leq y \leq b/2\} \\ R'' & := & \{a/2 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b/2\} \\ R''' & := & \{a/2 \leq x \leq a, b/2 \leq y \leq b\} \\ R'''' & := & \{0 \leq x \leq a/2, b/2 \leq y \leq b\} \end{array}$$



Weil sich die Wegintegrale über die Geraden im Innern des Rechtecks R_0 herauskürzen ist

$$\oint_{\partial R_0} f(z)dz = \oint_{\partial R'} f(z)dz + \oint_{\partial R''} f(z)dz + \oint_{\partial R'''} f(z)dz + \oint_{\partial R''''} f(z)dz.$$

Sei etwa

$$\oint_{\partial R_0} f(z)dz = I$$

und R_1 dasjenige unserer vier Teilrechtecke, wofür das Randintegral maximalen Betrag besitzt. Dann ist also

$$|I| \leq 4 \cdot \left| \oint_{\partial R_1} f(z)dz \right|.$$

So schachtelt man weiter und findet eine Folge immer kleinerer, ineinander liegender Rechtecke R_k mit

$$|I| \leq 4^k \cdot \left| \oint_{\partial R_k} f(z)dz \right|.$$

Die schachteln sich auf einen Punkt

$$c \in \bigcap R_k$$

zusammen. Nun benutzt man die $\mathbb{C}$-Differenzierbarkeit in diesem Punkt:

$$f(z) = f(c) + f'(c)(z-c) + (z-c) \cdot \psi(z)$$

mit

$$\lim_{z \to c} \psi(z) = 0.$$

Dann ist also für alle Rechtecke R_k

$$\begin{aligned} \oint_{\partial R_k} f(z)dz &= \oint_{\partial R_k} f(c)dz + \oint_{\partial R_k} f'(c)(z-c)dz + \oint_{\partial R_k} (z-c)\psi(z)dz \\ &= \oint_{\partial R_k} (z-c)\psi(z)dz \end{aligned}$$

wegen der Beispiele 1 und 2.

Für dieses letzte Integral benützen wir die Standard-Abschätzung:

$$\left| \oint_{\partial R_k} (z-c)\psi(z)dz \right| \leq L_k \cdot M,$$

wo L_k der Umfang von R_k ist, und

$$M := \sup_{z \in R_k} |z-c||\psi(z)|.$$

Sei U der Umfang des Rechtecks R_0. Bei jedem Schachtelungsschritt halbiert sich der Umfang des Rechtecks. Also ist

$$L_k = \frac{1}{2^k} \cdot U.$$

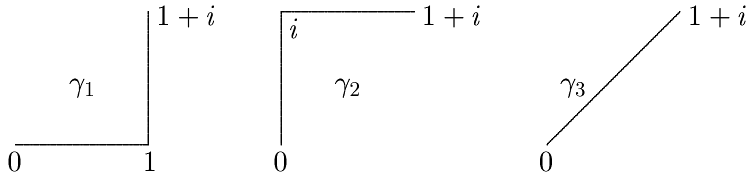
Auch $|z-c|$ ist bestimmt $< L_k$. Somit finden wir

$$|I| \leq 4^k \cdot \frac{U^2}{4^k} \sup_{z \in R_k} |\psi(z)| = U^2 \sup_{z \in R_k} |\psi(z)|.$$

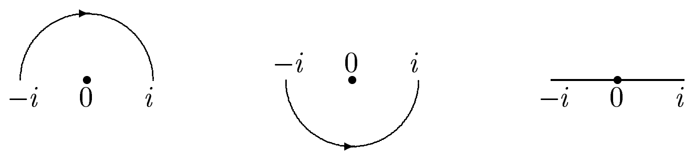
Für $k \to \infty$ schachtelt sich R_k auf dem Punkt c zusammen. Deswegen geht $sup\{|\psi(z)|, z \in R_k\}$ gegen 0. Dann muss $I = 0$ gewesen sein. $\square$

Aufgabe 1.7 *Es sei γ der positiv orientierte Rand des Einheitskreises. Berechnen Sie*
a) $\oint_\gamma x dz$, **b)** $\oint_\gamma z^n dz$, **c)** $\oint_\gamma \bar{z}^n dz$, $(n \in \mathbb{Z})$.

Aufgabe 1.8 *Berechnen Sie* $\displaystyle\int_0^{1+i} Re(z)dz$ *längs der drei Wege:*



Aufgabe 1.9 *Berechnen Sie* $\int_{-i}^{i} |z|dz$ *längs der drei Wege:*



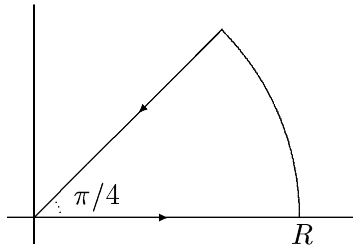
Aufgabe 1.10 *Werten Sie* $\oint_{|z|=1} e^z dz$ *aus und zeigen Sie damit*

$$\int_0^{2\pi} e^{cos(\varphi)} \cdot cos(\varphi + sin(\varphi))d\varphi = \int_0^{2\pi} e^{cos(\varphi)} \cdot sin(\varphi + sin(\varphi))d\varphi = 0.$$

Aufgabe 1.11 *Es sei $\gamma(t)$ der Weg $cos(t+\alpha)+isin(t+\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ fest, $0 \leq t \leq 2\pi$. Berechnen Sie $\int_\gamma \sqrt{z}dz$.*

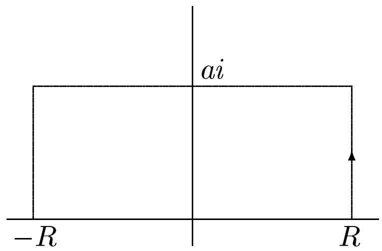
Aufgabe 1.12 *Werten Sie $\oint_\gamma e^{-z^2}dz$ über nebenstehenden Weg γ aus, lassen Sie R gegen ∞ gehen, und berechnen Sie damit die Fresnel-Integrale*

$$\int_0^\infty cos(x^2)dx = \int_0^\infty sin(x^2)dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$



Aufgabe 1.13 *Werten Sie $\oint_\gamma e^{-z^2}dz$ über nebenstehenden Weg γ aus, lassen Sie R gegen ∞ gehen, und zeigen Sie damit*

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}cos(2ax)dx = e^{-a^2}\sqrt{\pi}.$$



Aufgabe 1.14 *Man zeige $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+iy)^2}dx = \sqrt{\pi}$ für jedes $y \in \mathbb{R}$. Dabei darf $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ vorausgesetzt werden.* (H 92, T 2, A 2)

1.3 Stammfunktionen

Stammfunktionen definiert man genau so, wie im Reellen:

Definition 1.3 *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ eine komplex-wertige Funktion auf U. Eine* Stammfunktion *von f ist ein holomorphe Funktion $F : U \to \mathbb{C}$ mit Ableitung $F' = f$.*

Und genau wie im Reellen gibt es auch im Komplexen einen HDI:

Satz 1.4 (Komplexer HDI) *Die stetige Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ habe auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ eine Stammfunktion $F : U \to \mathbb{C}$. Dann gilt für jeden (stückweise stetig differenzierbaren) Weg $\gamma : [a,b] \to U$:*

$$\int_\gamma f(z)dz = F(b) - F(a).$$

Beweis. Da sich die Aussage mit dem Zusammensetzen von Wegen verträgt, können wir o.B.d.A. annehmen, daß γ selbst stetig differenzierbar ist. Dann ist

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\frac{d\gamma}{dt}dt.$$

Mit $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ wird

$$\frac{dF(\gamma(t))}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = f(\gamma(t)) \cdot (\frac{dx}{dt} + i \cdot \frac{dy}{dt}) = f(\gamma(t)) \cdot \frac{d\gamma}{dt}.$$

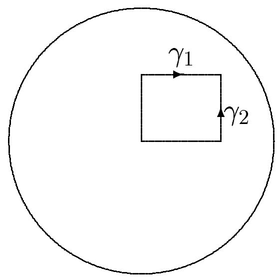
Real-, bzw. Imagiärteil von $F(\gamma(t))$ ist also eine reelle Stammfunktion von Real-, bzw. Imaginärteil des Integranden $f(\gamma(t))d\gamma/dt$. Deswegen folgt die Behauptung aus dem gewöhnlichen reellen HDI. $\square$

Und genau wie im Reellen ist nicht der HDI das Hauptproblem beim Integrieren, sondern das Auffinden einer Stammfunktion. Fangen wir mal ganz bescheiden an:

Satz 1.5 (Satz von Morera) *Es sei $K \subset \mathbb{C}$ eine offene Kreisscheibe und $f : K \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gibt es auf K eine Stammfunktion $F : K \to \mathbb{C}$ für f.*

Beweis. Die Aussage ist invariant gegen Translationen $z \mapsto z + z_0$ und Streckungen $z \mapsto c \cdot z$ mit $0 \neq c \in \mathbb{R}$. Deswegen können wir den Kreis K o.B.d.A. auf den Einheitskreis $E : |z| < 1$ normieren. Jeder Punkt $z_0 = x_0 + iy_0 \in E$ ist Ecke eines achsenparallelen Rechtecks R, dessen gegenüberliegende Ecke der Nullpunkt ist. Wir können z_0 mit dem Nullpunkt durch zwei Wege γ_1 und γ_2 verbinden, die jeweils aus zwei Seiten des Rechtecks R bestehen. Dabei ist

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{\gamma_2} f(z)dz = \pm \oint_{\partial R} f(z)dz = 0$$



wegen des Integralsatzes von Cauchy (Satz 1.3). Wir definieren eine Funktion $F : E \to \mathbb{C}$ durch

$$F(z_0) = \int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Diese Funktion F ist eine Stammfunktion von f.

Um das einzusehen, müssen wir F in $z_0 = x_0 + iy_0$ nach x und y partiell differenzieren. Sei etwa γ_1 der Weg, welcher z_0 auf der Geraden $y = y_0$ erreicht. Dann ist

$$\frac{\partial F}{\partial x}(z_0) = \frac{d}{dx} \int_0^x f(t, y_0)dt \Big|_{z_0} = f(x_0, y_0).$$

Der Weg γ_2 erreicht z_0 auf der Geraden $x = x_0$. Deswegen ist

$$\frac{\partial F}{\partial y}(z_0) = \frac{d}{dy} \int_0^y f(x_0, t) i \cdot dt \Big|_{z_0} = i \cdot f(x_0, y_0).$$

Dies zeigt: Die Funktion F ist in z_0 komplex-differenzierbar mit Ableitung $f(z_0)$. $\square$

Beispiel: Die Potenz-Funktion $z^n, n \in \mathbb{Z}$ hat für $n \neq -1$ die Stammfunktion $z^{n+1}/(n+1)$ dort, wo sie definiert ist. Nämlich auf ganz $\mathbb{C}$, falls $n \geq 0$ und auf $\mathbb{C}^*$ falls $n < 0$. Für $z^{-1} = 1/z$ bekommt man so keine Stammfunktion. Das hat seinen guten Grund!

Beim Beweis des Satzes von Morera haben wir nur die Eigenschaft $\oint_{\partial R} f(z)dz = 0$ für achsenparallele Rechtecke $R \subset K$ benutzt, die aus dem Cauchyschen Integralsatz folgt. Damit haben wir bewiesen:

Satz 1.6 *Es sei K subset $\mathbb{C}$ eine offene Kreisscheibe und $f : K \to \mathbb{C}$ stetig. Für jedes achsenparallele Rechteck $R \subset K$ gelte $\oint_{\partial R} f(z)dz = 0$. Dann besitzt f eine Stammfunktion $F : K \to \mathbb{C}$.*

Man kann den Satz von Morera auch so formulieren: Ist f holomorph auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$, so hat f lokal immer eine Stammfunktion. Lokal heißt dabei: auf jeder Kreisscheibe, welche ganz in U liegt. Natürlich wollen wir unsere Stammfunktionen global, auf ganz U haben. Aber leider: anders als im Reellen geht das i.A. nicht! Und das hat merkwürdigerweise einen geometrischen Grund. Zunächst einmal ein Kriterium dafür:

Satz 1.7 (Globale Stammfunktion) *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Eine stetige Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ hat genau dann eine Stammfunktion $F : U \to \mathbb{C}$, wenn für jeden geschlossenen Weg γ in U gilt:*

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0.$$

Beweis. Sei zuerst die Existenz einer Stammfunktion vorausgesetzt. Dass $\gamma : [a, b] \to U$ geschlossen ist, das heißt $\gamma(b) = \gamma(a)$. Und deswegen ist für jeden geschlossenen Weg γ in U nach dem komplexen HDI

$$\oint_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = F(\gamma(a)) - F(\gamma(a)) = 0.$$

Sei jetzt umgekehrt $\oint_\gamma f(z)dz = 0$ für jeden geschlossenen Weg γ in U. Wir fixieren einen Punkt $z_0 \in U$. Wenn man jeden Punkt $z \in U$ mit z_0 durch einen (stückweise differenzierbaren, stetigen) Weg verbinden kann, dann heißt U zusammenhängend. Zusammenhängend braucht U natürlich nicht zu sein. Aber dann ist die Menge U_0 aller Punkte $z \in U$, welche man mit z_0 durch einen Weg verbinden kann offen in $\mathbb{C}$ und zusammenhängend. Diese Menge U_0 heißt die *Zusammenhangs-Komponente* von z_0 in U. Wir zeigen die Existenz einer Stammfunktion F auf U_0. Falls es noch andere Zusammenhangskomponenten geben sollte, geht es auf denen genau so.

Sei also jetzt $z \in U$. Wir definieren $F(z)$ durch

$$F(z) := \int_\gamma f(z)dz,$$

wo $\gamma : [a, b] \to U$ ein Weg mit $\gamma(a) = z_0$ und $\gamma(b) = z$ ist. Es gibt viele (sehr viele) solcher Wege. Aber, wenn zwei Wege

$$\gamma_1 : [a_1, b_1] \to U, \quad \gamma_2 : [a_2, b_2] \to U$$

die Eigenschaft $\gamma_i(a_i) = z_0, \gamma_i(b_i) = z$ haben, dann können wir aus ihnen einen geschlossenen Weg

$$\gamma(t) := \begin{cases} \gamma_1((1-t)a_1 + tb_1 & (0 \le t \le 1) \\ \gamma_2((2-t)b_2 + (t-1)a_2) & (1 \le t \le 2) \end{cases}$$

zusammensetzen. Dieser Weg hat den Anfangs- und Endpunkt z_0. Nach Voraussetzung ist

$$0 = \oint_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Also ist

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

für je zwei Wege γ_1 und γ_2, welche z_0 in U_0 mit z verbinden. Die Funktion $F : U_0 \to \mathbb{C}$ ist deswegen wohldefiniert.

Um noch $F'(z) = f(z)$ zu zeigen, benützen wir wie im Beweis von Satz 1.5 zwei Wege, die in z parallel zur x-Achse, bzw. parallel zur y-Achse einmünden. □

Kann dieses Kriterium auch einmal ein negatives Resultat liefern? Dazu die 'Fundamentalformel der Funktionentheorie' (dieser Name ist nicht Standard, er stammt von mir, ist aber trotzdem sinnvoll): Wir integrieren die Funktion $f(z) = 1/z$ über den (mathematisch positiv orientierten) Rand des Einheitskreises. Mit der Parametrisierung

$$\gamma(t) = e^{i \cdot t}, \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

wird das Integral

$$\oint_{\partial E} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} e^{-i \cdot t} \cdot i e^{it} dt = \int_0^{2\pi} i \cdot dt = 2\pi i.$$

Nochmal zum besseren Mitdenken:

$$\boxed{\oint_{|z|=1} \frac{1}{z} dz = 2\pi i}$$

Das Integral ist nicht Null!!! Die Funktion $1/z$ hat also auf $\mathbb{C}^*$, dort wo sie mit Recht definiert ist, keine Stammfunktion. Das wird noch Konsequenzen haben. Böse, ... auf den ersten Blick. Aber letztenendes ist die Formel eine Zauberformel.

Woran liegt es, dass $1/z$ auf $\mathbb{C}^*$ keine Stammfunktion besitzt? Das muss was mit der Definitionslücke im Nullpunkt zu tun haben. Um den haben wir ja rum integriert. Und in der Tat: Hat eine offene Menge $U \subset \mathbb{C}$ kein solches Loch, dann hat jede holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion. Nur ist es nicht ganz einfach, das exakt zu machen.

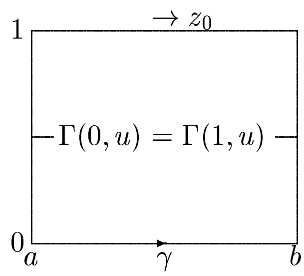
Definition 1.4 *Eine offene Menge $U \subset \mathbb{C}$ heißt* einfach-zusammenhängend*, wenn für jeden geschlossenen Weg*

$$\gamma : [a, b] \to U, \quad \gamma(b) = \gamma(a),$$

eine stetige Abbildung (Homotopie)

$$\Gamma : [a, b] \times [0, 1] \to U$$

existiert mit:
1) Für alle $t \in [a, b]$ ist $\Gamma(t, 0) = \gamma(t)$;
2) für alle $u \in [0, 1]$ ist $\Gamma(0, u) = \Gamma(1, u)$;
3) für alle $t \in [a, b]$ ist $\Gamma(t, 1) = z_0$, unabhängig von t, derselbe Punkt.



Anschaulich heißt das: Man kann jeden geschlossenen Weg auf den Punktweg $\gamma_0(t) = z_0$ zusammen ziehen, und zwar in U. (Das ist wichtig!)

Beispiel 1: Jede Kreisscheibe $K : |z - z_0| < r$ ist einfach-zusammenhängend. Sei etwa $\gamma : [a, b] \to K$ ein geschlossener Weg. Dann definieren wir die Homotopie Γ durch

$$\Gamma(t, u) := (1 - u) \cdot \gamma(t) + u \cdot z_0.$$

Damit ziehen wir den Weg γ auf den Mittelpunkt z_0 des Kreises zusammen.

Beispiel 2: Eine offene Menge $U \subset \mathbb{C}$ heißt *sternförmig*, wenn es einen Punkt $z_0 \in U$ gibt, derart, dass für jeden Punkt $z \in U$ die ganze Strecke

$$(1-u) \cdot z + u \cdot z_0, \quad 0 \leq u \leq 1,$$

die z_0 geradlinig mit z verbindet, in U liegt. Sternförmige Mengen sind einfach-zusammenhängend. Der Beweis geht genau so, wie bei Kreisscheiben.

Beispiel 3: Es gebe eine stetige Abbildung (Null-Homotopie)

$$H : U \times [0,1] \to U$$

mit
1) $H(z,0) = z$ für alle $z \in U$,
2) $H(z,1) = z_0 \in U$ konstant, für alle $z \in U$.
Dann ist U einfach zusammenhängend. Denn ist γ ein geschlossener Weg in U, so ist

$$\Gamma(t,u) := H(\gamma(t),u)$$

eine Homotopie, die den Weg γ auf den konstanten Punkt $z_0 \in U$ zusammenzieht.

Als konkretes Beispiel betrachten wir etwa den halben Kreisring

$$U := \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R, Im(z) > 0\} = \{z = \rho e^{i\varphi} \in \mathbb{C} : r < \rho < R, 0 < \varphi < \pi\}.$$

Eine Null-Homotopie wird gegeben durch

$$H(z,u) := \left((1-u)\rho + u\frac{r+R}{2}\right) \cdot e^{i\cdot\left((1-u)\varphi + u\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Sie zieht den halben Kreisring auf den Punkt $z_0 := i(r+R)/2$ zusammen.

Satz 1.8 *Die Funktion f sei holomorph auf der* einfach-zusammenhängenden *offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$. Dann besitzt f auf U eine Stammfunktion.*

Beweis. Wegen Satz 1.6 müssen wir für jeden geschlossenen Weg $\gamma : [a,b] \to U$ zeigen

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0.$$

Nach Voraussetzung gibt es eine Homotopie $\Gamma : [a,b] \times [0,1] \to U$, welche den Weg γ auf einen konstanten Weg $\gamma_1(t) = z_0$ zusammen zieht. Für den konstanten Weg γ_1 ist natürlich $\int_{\gamma_1} f(z)dz = 0$. Wir bezeichnen mit γ_u den geschlossenen Weg

$$\gamma_u : [a,b] \to U, \quad \gamma_u(t) := \Gamma(t,u)$$

und mit $I(u)$ das Integral

$$I(u) := \oint_{\gamma_u} f(z)dz.$$

Der Beweis besteht darin, zu zeigen, dass $I(u)$ konstant, unabhängig von $u \in [0,1]$ ist.

Und dafür genügt es, zu zeigen: Zu jedem $u_0 \in [0,1]$ gibt es ein $\epsilon > 0$ derart, dass $I(u)$ konstant auf dem Intervall

$$[u_0 - \epsilon, u_0 + \epsilon] \cap [0,1]$$

ist. Dazu überdecken wir den Weg γ_{u_0} durch offene Kreisscheiben, welche ganz in U liegen. Etwa so:

$$a = t_0 < t_1 < ... < t_m = b, \quad \gamma_{u_0}([t_0, t_1]) \subset K_1 \subset U, ..., \gamma_{u_0}([t_{m-1}, t_m]) \subset K_m \subset U.$$

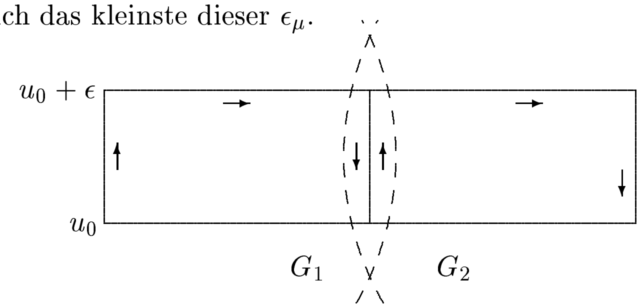
Auf K_1 gibt es eine Stammfunktion F_1 von f, ... , auf K_m eine Stammfunktion F_m. Und es ist

$$\oint_{\gamma_{u_0}} f(z)dz = \sum_{\mu=1}^{m} I_\mu \text{ mit } I_\mu = F(\gamma_{u_0}(t_\mu) - F(\gamma_{u_0}(t_{\mu-1}).$$

Wegen der Stetigkeit von Γ sind die Urbilder $G_\mu := \Gamma^{-1}(K_\mu) \subset [a,b] \times [0,1]$ offen. Zu jedem Intervall $[t_\mu, t_{\mu-1}]$ gibt es deswegen ein $\epsilon_\mu > 0$ mit

$$[t_\mu, t_{\mu-1}] \times ([u_0 - \epsilon_\mu, u_0 + \epsilon_\mu]) \cap [0,1] \subset G_\mu.$$

Als ϵ nehmen wir natürlich das kleinste dieser ϵ_μ.



Das Integral I_μ ist das Integral über f längs des Weges $\gamma_{u_0}(t), t_{\mu-1} \leq t \leq t_\mu$. Aber wegen der Wegunabhängigkeit des Integral in der Kreisscheige K_μ ist es auch das Integral über den folgenden Weg $\gamma^{(\mu)}$ von $\gamma_{u_0}(t_{\mu-1})$ nach $\gamma_{u_0}(t_\mu)$: Zuerst mit $\Gamma(t_{\mu-1}, u), u_0 \leq u \leq u_0 + \epsilon$, von $\Gamma(t_{\mu-1}, u_0)$ nach $\Gamma(t_{\mu-1}, u_0 + \epsilon)$, dann mit $\Gamma(t, u_0 + \epsilon), t_{\mu-1} \leq t \leq t_\mu$, nach $\Gamma(t_\mu, u_0 + \epsilon)$, und schließlich mit $\Gamma(t_\mu, u), u_0 + \epsilon \geq u \geq u_0$, nach $\Gamma(t_\mu, u_0)$. Insbesondere ist

$$\int_{\gamma_{u_0}} f(z)dz = \sum_{\mu=1}^{m} \int_{\gamma_\mu} f(z)dz.$$

Das letzte Integral ist aber gerade das Integral über den Weg $\gamma_{u_0+\epsilon}$, weil sich die Integrale über die Verbindungsstrecken zwischen $\Gamma(u_0, t_\mu)$ und $\Gamma(u_0 + \epsilon, t_\mu)$ herauskürzen, und weil der erste und der letzte Teil dieses Weges konstant sind. $\square$

Satz 1.9 (Cauchyscher Integralsatz für einfachzusammenhängende Gebiete) *Die Funktion f sei holomorph auf der einfach-zusammenhängenden offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$. Dann gilt*

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0$$

für jeden geschlossenen Weg in U.

Beweis. Nach Satz 1.8 besitzt f auf U eine Stammfunktion $F : U \to \mathbb{C}$. Wegen $\gamma(a) = \gamma(b)$ ist

$$\oint_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0.$$

□

Das ist aber immer noch nicht die Form, in der wir den Integralsatz meistens anwenden werden. Das ist vielmehr folgende Version:

Satz 1.10 (Cauchyscher Integralsatz für Randintegrale) *Die Menge $U \subset \mathbb{C}$ sei beschränkt und ihr Rand ∂U sei ein stückweise differenzierbarer Weg. Wird dieser Weg durchwegs so orientiert, dass die Menge U stets zur Linken liegt, so gilt für jede Funktion f, die auf einer Umgebung von $\bar{U}$ holomorph ist*

$$\oint_{\partial U} f(z)dz = 0.$$

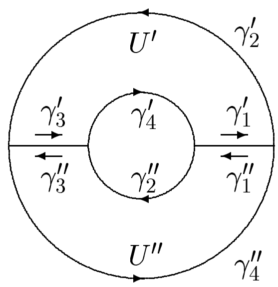
Der Beweis besteht darin, die Menge U in einfach-zusammenhängende Teile U_k zu zerhacken. Nach Satz 1.9 ist dann jedes Randintegral $\oint_{\partial U_k} f(z)dz = 0$. Und weil sich beim Auf-Addieren die zusätzlichen Randintegrale paarweise herauskürzen, wird

$$\oint_{\partial U} f(z)dz = \sum_k \oint_{\partial U_k} f(z)dz = 0.$$

Die Schwierigkeit besteht darin, dieses Verfahren in voller Allgemeinheit durchzuführen. Das ist mir zu zeitraubend. In konkreten Fällen, wo wir diese Formel anwenden, ist nämlich immer klar, wie das geht. Statt des allgemeinen Beweises also ein (später wichtiges)

Beispiel: Es sei U der Kreisring

$$\{z \in \mathbb{C} : r \le |z| \le R\}.$$



Dann ist $\partial U = \gamma_a + \gamma_i$ mit

$$\gamma_a(t) = R \cdot e^{i \cdot t}, \quad \gamma_i(t) = r \cdot e^{-i \cdot t}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Wir zerlegen U mit Hilfe der x-Achse in zwei Teile U' und U'':

$$U' := \{z \in U : Im(z) \ge 0\}, \quad U'' := \{z \in U : Im(z) \le 0\}.$$

Der Rand von U' besteht dann aus den vier Teilen

$$\begin{aligned}
\gamma_1'(t) &= r + t, \quad 0 \le t \le R - r, \\
\gamma_2'(t) &= R \cdot e^{i \cdot t}, \quad 0 \le t \le \pi, \\
\gamma_3'(t) &= t, \quad -R \le t \le r, \\
\gamma_4'(t) &= r \cdot e^{-i \cdot t}, \quad \pi \le t \le 2\pi.
\end{aligned}$$

Es gibt eine einfachzusammenhängende Umgebung von U' (Beispiel 3), auf der f holomorph ist, und deswegen folgt aus Satz 1.8

$$\sum_1^4 \int_{\gamma_k'} f(z)dz = \oint_{\partial U'} f(z)dz = 0.$$

Analog besteht der Rand von U'' aus den vier Teilen

$$\begin{aligned}
\gamma_1''(t) &= R - t, \quad 0 \le t \le R - r, \\
\gamma_2''(t) &= r \cdot e^{-i \cdot t}, \quad 0 \le t \le \pi, \\
\gamma_3''(t) &= -r - t, \quad 0 \le t \le R - r, \\
\gamma_4''(t) &= R \cdot e^{i \cdot t}, \quad \pi \le t \le 2\pi,
\end{aligned}$$

wo wieder

$$\sum_k \int_{\gamma_k''} f(z)dz = \oint_{\partial U''} f(z)dz = 0.$$

Der Rand von U ist

$$\partial U = \gamma_2' + \gamma_4'' + \gamma_2'' + \gamma_4'.$$

Da sich das Integral über γ_1' mit dem über γ_1'', und das über γ_3' mit dem über γ_3'' herauskürzt, ist

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial U} f(z)dz &= \int_{\gamma_2'} f(z)dz + \int_{\gamma_4''} f(z)dz + \int_{\gamma_2''} f(z)dz + \int_{\gamma_4'} f(z)dz \\
&= \sum_{k=1}^{4} \int_{\gamma_k'} f(z)dz + \sum_{k=1}^{4} \int_{\gamma_k''} f(z)dz \\
&= \oint_{\partial U'} f(z)dz + \oint_{\partial U''} f(z)dz \\
&= 0.
\end{aligned}$$

1.4 Die Cauchysche Integralformel

Die Funktion f sei holomorph auf einer Umgebung des Kreises $K : |z - z_0| \le r$. Aus dem letzten Beispiel folgt

$$\oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

für alle Radien $\rho \in \mathbb{R}$ mit $0 < \rho \le r$. Hier können wir $\rho \to 0$ gehen lassen und die Differenzierbarkeit von f in z_0

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + (z - z_0)\psi(z), \quad \lim_{z \to z_0} \psi(z) = 0,$$

benützen. Wegen $\oint dz/z = 2\pi i$ ist

$$\oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz = f(z_0) \oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{1}{z - z_0} dz = f(z_0) \cdot 2\pi i.$$

Und

$$\oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{f'(z_0)(z - z_0)}{z - z_0} dz = \oint_{|z-z_0|=\rho} f'(z_0) dz = 0$$

gilt, weil der Integrand konstant ist (Beispiel 1 in 1.2). Schließlich folgt aus der Standard-Abschätzung

$$\left|\oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{(z-z_0)\psi(z)}{z-z_0}dz\right| = \left|\oint \psi(z)dz\right| \leq 2\pi \cdot \max_{|z-z_0|\leq\rho} |\psi(z)| \to 0$$

für $\rho \to 0$. Wir addieren die drei Integrale auf und finden:

Satz 1.11 (Cauchysche Integralformel für Kreisscheiben) *Ist die Funktion f auf einer Umgebung der Kreisscheibe $|z-z_0| \leq r$, $r > 0$, holomorph, so gilt*

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-z_0}dz.}$$

Diese Integralformel gilt nicht nur für Kreisscheiben, sondern für jedes Gebiet $U \subset \mathbb{C}$, über dessen Rand man integrieren kann:

Satz 1.12 (Cauchysche Integralformel) *Die beschränkte offene Menge U habe einen stückweise glatten Rand. Dieser sei so orientiert, dass die Menge U stets zur Linken liegt. Dann gilt für jede Funktion f, die auf einer Umgebung von $\bar{U}$ holomorph ist, und für jeden Punkt $z_0 \in U$*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial U} \frac{f(z)}{z-z_0}dz.$$

Beweis. Der Allgemeinfall wird folgendermaßen auf den Fall der Kreisscheibe zurückgeführt: Weil U offen ist, gibt es eine Kreisscheibe $K : |z-z_0| \leq r$, die ganz in U liegt. Wir wenden den Cauchyschen Integralsatz an auf die offene Menge $U' := U \setminus K$ und finden

$$\oint_{\partial U'} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \oint_{\partial U} \frac{f(z)}{z-z_0}dz - \oint_{\partial K} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 0.$$

Es ist also

$$\oint_{\partial U} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = f(z_0) \cdot 2\pi i.$$

□

Diese Cauchysche Integralformel ist eine Fundamentalformel für die Funktionentheorie. Man muss sie so auffassen: Der Wert $f(z_0)$ einer holomorphen Funktion in einem Punkt z_0 im Inneren von U ist eine Art von Mittelwert über die Werte dieser Funktion am Rand.

Wir ziehen Folgerungen, die zunächst verblüffen.

Satz 1.13 (Cauchysche Integralformel für die Ableitungen) *Die Funktion f sei holomorph auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$. Dann ist f auf U beliebig oft komplex differenzierbar. Für die Ableitungen in z_0 gilt*

$$\frac{d^k f}{dz^k}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i}\oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}dz.$$

Dabei ist auf einem Kreis, der noch ganz in U liegt, um z_0 herum zu integrieren.

Beweis. Es genügt, die Aussage für Kreisscheiben zu beweisen. Und dann können wir o.B.d.A. gleich noch annehmen, dass es sich um den Einheitskreis $K : |z| < 1$ handelt, und dass die Funktion f noch auf einer Umgebung von $\bar{K}$ holomorph ist. Für Punkte $z \in K$ verwenden wir die Cauchysche Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Weil $\zeta - z$ nie $= 0$ werden kann, ist der Integrand eine stetige Funktion der beiden Variablen ζ, z. In Bezug auf z ist er unendlich oft $\mathbb{C}$-differenzierbar. Seine k-te Ableitung ist

$$\frac{d^k}{dz^k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = k! \cdot \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}.$$

Nach Forster II ??? können wir (zunächst die reellen, aber dann auch die komplexen) Ableitungen mit der Integration vertauschen, und finden

$$\frac{d^k f}{dz^k}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{d^k}{dz^k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{k!}{2\pi i} \oint \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta.$$

□

Eine Anwendung dieses Satzes ist folgende: Ist eine Funktion auf einer offenen Menge $\mathbb{C}$-differenzierbar, so ist die Ableitung immer stetig. Die Funktion ist also stetig $\mathbb{C}$-differenzierbar. Damit erweist sich der Unterschied zwischen $\mathbb{C}$-Differenzierbarkeit und stetiger $\mathbb{C}$-Differenzierbarkeit, den ich z.B. beim Beweis der Sätze 1.2 und 1.3 machte, im Nachhinein als unwichtig.

Satz 1.14 (Korollar zu Satz 1.13) *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ stetig. Für jedes achsenparallele Rechteck $R \subset U$ gelte $\oint_{\partial R} f(z)dz = 0$. Dann ist f holomorph auf U.*

Beweis. Wie im Beweis von Satz 1.5 sieht man, dass f auf jeder offenen Kreisscheibe $K \subset U$ eine Stammfunktion F_K besitzt. Diese Stammfunktion F_K ist auf K holomorph und wegen Satz 1.13 beliebig oft komplex differenzierbar. Dann ist also auch $f = F_K'$ holomorph auf jeder Kreisscheibe $K \subset U$. Damit ist f holomorph auf U. □

Aus der Standard-Abschätzung für Integrale bekommen wir jetzt Abschätzungen für die Ableitungen:

Satz 1.15 (Cauchy-Abschätzungen) *Die Funktion f sei holomorph auf einer Umgebung der Kreisscheibe $|z - z_0| \leq R$. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$*

$$|f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k! \cdot M(R)}{R^k},$$

wo $|f(z)| \leq M(R)$ für $|z - z_0| = R$.

Beweis. Es ist

$$|f^{(k)}(z_0)| = \left| \frac{k!}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz \right| \leq \frac{k!}{2\pi} \frac{M(R)}{|z - z_0|^{k+1}} \cdot 2\pi R = \frac{k! \cdot M(R)}{R^k}.$$

□

Eine Anwendung ist die folgende Aussage für *ganze* Funktionen. Dabei heißt eine Funktion ganz, wenn sie auf der ganzen komplexen Ebene holomorph ist (wie z.B. die Exponentialfunktion).

Satz 1.16 (von Liouville) *Die ganze Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei beschränkt. Dann ist f konstant.*

Beweis. Sei etwa $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Für einen Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und eine Kreisscheibe $|z - z_0| = R$ verwenden wir die Cauchy-Abschätzung

$$|f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k! \cdot M(R)}{R^k} \leq \frac{k! \cdot M}{R^k}.$$

Hier können wir jetzt $R \to \infty$ gehen lassen. Für alle $k \geq 1$ geht dann $k! \cdot M/R^k \to 0$. Alle Ableitungen $f^k(z_0)$, und insbesondere die erste, $f'(z_0)$, müssen $= 0$ gewesen sein. Und das gilt für jeden Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann muss also $f'(z) = 0$ auf ganz $\mathbb{C}$ sein. Daraus folgt $f = const$. □

Aufgabe 1.15 *Gegeben sei ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$, das den Kreis $\{z : |z| \leq 1\}$ enthält. Es sei $f : G \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit $|f(z)| \leq 1$ für $z \in \partial K$.*
a) *Man zeige, dass $|f(0)| \leq 1$ gilt, falls f in G holomorph ist.*
b) *Warum kann f mit $|f''(0)| \geq 5$ nicht holomorph in G sein?*
(F 92, T 3, A 3)

Aufgabe 1.16 *Geben Sie alle ganzen Funktionen f auf $\mathbb{C}$ an, für die ein $0 < a \in \mathbb{R}$ existiert, mit $|f'(z)| \leq a|e^z|$ für alle genügend großen $z \in \mathbb{C}$.* (H 93, T 1, A 1)

Aufgabe 1.17 *Bestimmen Sie alle ganzen periodischen Funktonen f mit Periode 1 (d.h.: $f(z+1) = f(z)$) und $\lim_{y \to \pm\infty} f(x + iy) = 0$ für $0 \leq x \leq 1$ gleichmäßig in x.* (H 93, T 3, A 1)

Aufgabe 1.18 *Zeigen Sie, dass es keine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ geben kann mit*

$$|f'(0)| > \max_{|z|=1} |f(z)|.$$

(F 93, T 3, A 3)

Aufgabe 1.19 *Bestimmen Sie alle ganzen Funktionen f mit*

$$|f(z)| \leq C|z|^n e^z$$

für alle $z = x + iy$ mit $|z| \geq R$ für zwei Konstanten $C, R > 0$. Erwähnen Sie alle dabei verwendeten Sätze. (H 97, T3, A 4)

1.5 Anwendungen

1.5.1 Der Riemannsche Hebbarkeitssatz

Satz 1.17 (Riemann) *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $\Delta \subset U$ der Durchschnitt von U mit einer reellen Geraden. Die Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ sei stetig auf U und holomorph auf $U \setminus \Delta$. Dann ist f auch holomorph auf ganz U.*

Beweis. Die Aussage ist invariant gegen Drehungen der komplexen Ebene. Deswegen können wir o.B.d.A. annehmen, dass das Geradenstück Δ parallel zur x-Achse ist. Wegen Satz 1.14 genügt es zu zeigen, dass $\oint_{\partial R} f(z)dz = 0$ für jedes achsenparallele Rechteck $R \subset U$. Diese Aussage folgt aus der Cauchyschen Integralformel, wenn $R \cap \Delta = \emptyset$. Wir brauchen uns also nur um den Fall zu kümmern, wo Δ das Rechteck R schneidet. In diesem Fall zerlegt Δ das Rechteck R in zwei Teilrechtecke R' und R'', wobei jeweils eine Seite von R' und R'' in Δ enthalten ist. Wegen

$$\oint_{\partial R} f(z)dz = \oint_{\partial R'} f(z)dz + \oint_{\partial R''} f(z)dz$$

ist die Aussage damit zurückgeführt auf Rechtecke R, von denen eine Seite auf Δ liegt.

Sei diese Seite etwa $\{x + ib : a_1 \leq x \leq a_2\}$. Wir fixieren eine Folge reeller Zahlen b_n mit $b = \lim b_n, b_n \neq b$, so, dass das Geradenstück $\{x + ib_n : a_1 \leq x \leq a_2\}$ in R liegt. $R_n \subset R$ sei das Rechteck, welches diese Seite aus R ausschneidet. Dann ist f auf einer offenen Umgebung von R_n holomorph. Wegen des Cauchyschen Integralsatzes ist also $\oint_{\partial R_n} f(z)dz = 0$. Ist S_n das Rechteck $R \setminus R_n$, so folgt also

$$\oint_{\partial R} f(z)dz = \oint_{\partial R_n} f(z)dz + \oint_{\partial S_n} f(z)dz = \oint_{\partial S_n} f(z)dz.$$

Und das Randintegral $\oint_{\partial S_n} f(z)dz$ besteht aus den vier Teilintgralen

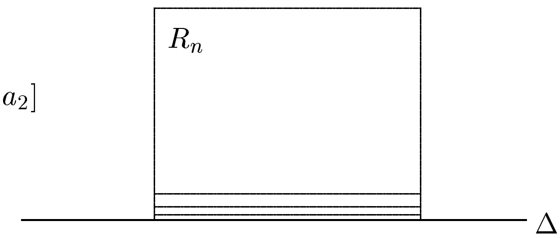
$$\begin{array}{rclcrcl} I_1 & := & \int_{a_1}^{a_2} f(x+ib)dz, & \quad & I_2 & := & \int_b^{b_n} f(a_2+iy)dz, \\ I_3 & := & \int_{a_2}^{a_1} f(x+ib_n)dz, & & I_4 & := & \int_{b_n}^{b} f(a_1+iy)dz. \end{array}$$

Für $n \to \infty$ geht die Länge der Integrationswege von I_2 und I_4 gegen 0. Damit gehen diese Integrale gegen 0. Und weil

$f(x+ib_n) \to f(x+ib)$ gleichmäßig konvergiert auf $[a_1, a_2]$

ist

$$\lim_{n\to\infty} I_1 + I_3 = \lim_{n\to\infty} \int_{a_1}^{a_2} (f(x,b) - f(x,b_n))dz = 0.$$



□

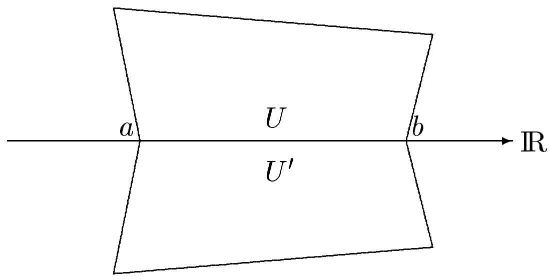
Aufgabe 1.20 *Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph. Es gebe ein $c > 0$ derart, dass $|f(z)| \leq c|z|$ für alle $z \in \mathbb{C}$ ist. Zeigen Sie, dass f dann die Form $f(z) = az$ ($a \in \mathbb{C}$ fest) haben muss.* (F 97, T 2, A 1a)

1.5.2 Das Schwarzsche Spiegelungsprinzip

Satz 1.18 *Die offene Menge $U \subset \mathbb{C}$ liege ganz in der oberen Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$. Der Abschluss $\bar{U}$ treffe die reelle Achse im Intervall $[a,b]$. Die Funktion f sei holomorph auf U, stetig auf $U \cup [a,b]$ fortsetzbar mit reellen Werten auf $[a,b]$. Dann ist f holomorph fortsetzbar zu einer Funktion $F : V \to \mathbb{C}$, wo*

$$V := U \cup]a,b[\cup U', \quad U' = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in U\}$$

Beweis. Wir definieren die Funktion $g : U' \to \mathbb{C}$ durch $g(z) := \overline{f(\bar{z})}$. Falls $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, dann ist also $g(x+iy) = u(x,-y) - iv(x,-y)$. Und aus den Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen für f folgt, dass auch g auf U' diese Gleichungen erfüllt. Die Funktion



$$F : V \to \mathbb{C}, \quad \begin{cases} f(z) & (z \in U \cup]a,b[) \\ g(z) & (z \in U') \end{cases}$$

ist deswegen stetig auf V und holomorph auf $V \setminus \mathbb{R}$. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz ist F dann holomorph auf ganz V. $\square$

1.5.3 Das Maximumprinzip

Ist die Funktion f holomorph auf einer offenen Menge, die den abgeschlossenen Kreis $K = \{|z-z_0| \leq r\}$ enthält, so kann man mit $z = z_0 + re^{i\varphi}$ die Cauchysche Integralformel auch wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial K} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\varphi})}{re^{i\varphi}} rie^{i\varphi} d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi}) d\varphi. \end{aligned}$$

Dieses letzte Integral kann man als Mittelwert deuten: es ist der Mittelwert über alle Funktionswerte von f auf ∂K.

Definition 1.5 *Die Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ sei stetig (reell- oder komplexwertig) auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$. Sie hat die* Mittelwerteigenschaft *wenn für jede Kreisscheibe $\{|z - z_0| \leq r\} \subset U$ gilt*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi}) d\varphi.$$

Holomorphe Funktionen haben diese Mittelwerteigenschaft. Wenn f die Mittelwerteigenschaft hat, dann haben dies auch die reellen Funktionen $Re(f)$ und $Im(f)$.

Satz 1.19 (Maximumprinzip) *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ stetig und habe die Mittelwerteigenschaft. Falls $z_0 \in U$ existiert mit*

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| \text{ für alle } z \text{ in einer Umgebung von } z_0,$$

(d.h. $|f(z_0)|$ ist ein relatives Maximum von $|f(z)|$), dann gibt es eine Umgebung von z_0, auf der f konstant ist.

Beweis. Sei $w := f(z_0)$. Falls $w = 0$ ist, gilt also $|f(z)| = 0$ auf einer Umgebung von z_0 und f ist dort konstant $= 0$.

Sei nun $w \neq 0$. Wir betrachten die Funktion $g(z) := \bar{w} f(z)$. Sie hat auch die Mittelwerteigenschaft. Außerdem erfüllt sie die Voraussetzung

$$|g(z)| = |\bar{w}| \cdot |f(z)| \leq |\bar{w}| \cdot |f(z_0)| = |g(z_0)|$$

(auf einer Umgebung von z_0) des Satzes. Weil $g(z_0) = \bar{w} \cdot w$ reell und > 0 ist können wir also o.B.d.A. annehmen: es gelte $f(z_0) \in \mathbb{R}$ und $f(z_0) > 0$.

Nach Voraussetzung ist für kleine r

$$M(r) := \sup_{0 \leq \varphi \leq 2\pi} |f(z_0 + re^{i\varphi})| \leq f(z_0).$$

Wegen der Mittelwerteigenschaft gilt aber

$$|f(z_0)| = |\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi}) d\varphi| \leq M(r).$$

Somit ist für kleine r

$$w = f(z_0) = M(r).$$

Wir betrachten die Funktion

$$g(z) := Re(f(z_0) - f(z)) = w - Re(f(z)).$$

Auf einer Umgebung von z_0 ist $g \geq 0$, und es gilt $g(z) = 0$ genau dann, wenn $Re(f(z)) = w$. Auch g erfüllt die Mittelwerteigenschaft. Also gilt für alle kleinen r

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z_0 + re^{i\varphi}) d\varphi = g(z_0) = 0.$$

Weil hier der Integrand reell, stetig und ≥ 0 ist, muss er identisch $= 0$ sein. Es folgt $g(z_0 + re^{i\varphi}) = 0$ für alle kleinen r. □

Man kann das Maximum-Prinzip auch so ausdrücken:

Satz 1.20 *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, zusammenhängend und beschränkt. Die Funktion $f : \bar{U} \to \mathbb{C}$ sei stetig und holomorph auf U mit*

$$M := \max_{z \in \bar{U}} |f(z)| = |f(z_{max})|.$$

Dann ist $z_{max} \in \partial U$ oder f ist konstant. (Holomorphe Funktionen nehmen ihr Maximum am Rand an.)

Beweis. Falls $z_{max} \in U$ im Inneren liegt, ist nach Satz 1.19 $f(z) = f(z_{max}) =: w$ konstant auf einer Umgebung von z_{max}. Die nichtleere Menge $\{z \in U : f(z) = w\}$ ist abgeschlossen (weil f stetig ist) und offen (Maximumprinzip). Wenn U zusammenhängend ist, muss diese Menge also mit U übereinstimmen. □

Aufgabe 1.21 *Seien $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $f, g : G \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ zwei holomorphe Funktionen, und Γ eine einfach geschlossene Kurve in G. Auf Γ gelte $|f(z)| = |g(z)|$. Beweisen Sie, dass es dann ein $\alpha \in [0, 2\pi)$ gibt derart, dass $f(z) = e^{i\alpha} g(z)$ für alle $z \in G$ gilt. Zeigen Sie ferner, dass die Bedingung der Nullstellenfreiheit von f und g wesentlich ist.* (H 97, T 3, A 1)

1.5.4 Lemma von Schwarz

Satz 1.21 *Die Funktion f sei holomorph auf dem Einheitskreis $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Wenn $f(0) = 0$ und $|f(z)| \leq 1$ für alle $z \in E$ gilt, dann ist sogar für alle $z \in E$*

$$|f(z)| \leq |z|.$$

Beweis. Die Funktion $g(z) := f(z)/z$ ist holomorph auf $E \setminus \{0\}$. Weil f komplex-differenzierbar ist, ist g durch $g(0) := f'(0)$ stetig in den Nullpunkt fortsetzbar. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz ist deswegen g holomorph auf E. Wegen der Voraussetzung $|f(z)| \leq 1$ ist für jedes $r < 1$

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{1}{r} \text{ für alle } z \text{ mit } |z| = r.$$

Nach dem Maximumprinzip gilt dies dann auch für alle z mit $|z| \leq r$. Beim Grenzübegang $r \to 1$ ergibt sich die Behauptung. □

Aufgabe 1.22 *Sei U eine Umgebung der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$ und sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Es existiere eine Konstante $c \geq 0$ mit $|f(z)| = c$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$. Man zeige: f ist konstant oder besitzt eine Nullstelle im Innern von D.* (H 91, T 3, A 3)

Aufgabe 1.23 *Gibt es eine holomorphe Funktion $0 \neq f : E \to \mathbb{C}$ auf der offenen Einheitskreisscheibe E, so, dass zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $\epsilon > 0$ mit der Eigenschaft existiert, dass $|f(z)| > n$ für alle z mit $1 - |z| < \epsilon$?* (F 93, T 2, A 2)

2 Potenzreihen und Laurent-Reihen

In Abschnitt 1 haben wir gesehen, dass die folgenden Eigenschaften für eine komplexwertige Funktion f, definiert auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ alle äquivalent sind:

- f ist holomorph, d.h. $\mathbb{C}$-differenzierbar,
- f ist stetig $\mathbb{C}$-differenzierbar,
- f ist unendlich oft $\mathbb{C}$-differenzierbar,
- f besitzt lokal eine Stammfunktion,
- f erfüllt lokal den Cauchyschen Integralsatz, d.h., jeder Punkt in U liegt in einer Kreisscheibe $K \subset U$ so, dass $\oint_\gamma f(z)dz = 0$ gilt für alle geschlossenen Wege in K,
- für f gilt lokal die Cauchysche Integralformel, d.h., jeder Punkt in U liegt in einer offenen Kreisscheibe K mit $\bar{K} \subset U$ und $1/2\pi i \cdot \oint_{\partial K} f(\zeta)/(\zeta - z)d\zeta = f(z)$ für alle $z \in K$.

Dies sind alles Eigenschaften, welche man mit den analytischen Rechenoperationen (Differentiation und Integration) formulieren kann. Wir werden ihnen eine weitere äquivalente Eigenschaft hinzufügen, nämlich die (lokale) Entwickelbarkeit in eine Potenzreihe.

2.1 Potenzreihen

Für jede Potenzreihe $f(z) = \sum a_n z^n$ kann man formal eine Ableitung $f'(z)$ und eine Stammfunktion $F(z)$ definieren durch

$$f'(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}z^n, \quad F(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} z^n.$$

Als erstes wollen wir uns überlegen, dass diese Reihen dort auch konvergieren, wo die Reihe für f konvergiert.

Sei etwa die Reihe für f konvergent in $z_0 \neq 0$ in $\mathbb{C}$. Dann ist also insbesondere die Folge $|a_n z_0^n|$ beschränkt. Dann sind natürlich auch die Folgen

$$|a_{n+1}z_0^n| = \frac{1}{|z_0|}|a_{n+1}z_0^{n+1}| \text{ und } |a_{n-1}z_0^n| = |z_0| \cdot |a_{n-1}z_0^{n-1}|$$

beschränkt. Für $|z| < |z_0|$ mit $q := |z/z_0|$ folgt daraus

$$|(n+1)a_{n+1}z^n| = (n+1)|a_{n+1}z_0^n|q^n \leq C \cdot (n+1)q^n.$$

Mit dem Quotientenkriterium sieht man, dass die Reihe $\sum(n+1)q^n$ für $q < 1$ konvergiert. Also ist $C \cdot \sum(n+1)q^n$ eine konvergente Majorante für die Reihe von $f'(z)$. Diese Reihe konvergiert also für alle z mit $|z| < |z_0|$. Daraus folgt, dass die abgeleitete Reihe denselben Konvergenzradius hat, wie die Rreihe $\sum a_n z^n$ selbst. Für die integrierte Reihe geht der Beweis ganz analog.

Als nächstes müssen wir uns überlegen, dass die abgeleitete Reihe tatsächlich die komplexe Ableitung ist. Dazu benutzen wir die Vertauschbarkeit von Konvergenz und Wegintegralen. Deswegen ist es einfacher, zu zeigen, dass die integrierte Reihe tatsächlich eine Stammfunktion ist.

Satz 2.1 (Stammfunktion) *Die Reihe $f(x) = \sum a_n(z - z_0)^n$ sei konvergent auf der Kreisscheibe $K : |z - z_0| < R$. Dann stellt die integrierte Reihe*

$$F(z) = \sum_0^\infty \frac{a_n}{n+1}(z - z_0)^{n+1}$$

auf dieser Kreisscheibe ein $\mathbb{C}$-differenzierbare Funktion mit Ableitung f dar.

Beweis. Jeder Punkt $z \in K$ liegt in einer echt kleineren Kreisscheibe $|z - z_0| \leq r$, $r < R$. Auf dieser Kreisscheibe konvergiert die Reihe für f gleichmäßig und wie im Reellen darf man deswegen ihre Konvergenz mit der Integration vertauschen. Deswegen gilt für jeden Weg γ in dieser kleineren Kreisscheibe, der z_0 mit z verbindet

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_0^\infty \int_\gamma a_n(z - z_0)^n dz = \sum_0^\infty \frac{a_n}{n+1}(z - z_0)^{n+1} = F(z).$$

Wählen wir den Weg γ insbesondere so, dass er in z parallel zur x-Achse, bzw. zur y-Achse ankommt, so finden wir

$$\frac{\partial F}{\partial x}(z) = f(z), \quad \frac{\partial F}{\partial y}(z) = i \cdot f(z).$$

Deswegen ist F in z komplex-differenzierbar mit Ableitung $f(z)$. □

Damit ist die Stammfunktion F holomorph auf der Kreisscheibe K, und nach Satz 1.13 unendlich oft $\mathbb{C}$-differenzierbar. Deswegen ist auch die ursprüngliche Funktion f holomorph. Das ist

Satz 2.2 *Jede durch eine Potenzreihe dargestellte Funktion ist im Inneren ihres Konvergenzkreises holomorph.*

Natürlich wird die abgeleitete Funktion $f(z)$ durch die abgeleitete Reihe $\sum_{n=1}^\infty na_n(z - z_0)^{n-1}$ gegeben. Formal sieht man dies ein, indem man diese abgeleitete Reihe gliedweise integriert. Dann findet man nämlich, bis auf die Konstante a_0 die ursprüngliche Reihe.

Das war die eine Richtung:

$$\text{Potenzreihendarstellung} \quad \Longrightarrow \quad \text{holomorph}$$

Jetzt zur Umkehr-Richtung:

Satz 2.3 *Die Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ sei holomorph auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$. Dann ist f um jeden Punkt $z_0 \in U$ in eine Potenzreihe $\sum a_n(z - z_0)^n$ entwickelbar. Die Koeffizienten dieser Reihe sind die Taylorkoeffizienten*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}dz.$$

(Hier ist r so klein zu wählen, dass die Kreisschiebe $|z-z_0| \leq r$ noch ganz in U liegt.) Diese Potenzreihe konvergiert auf der größten offenen Kreisscheibe mit Mittelpunkt z_0, die noch ganz in U liegt.

Beweis. Für jeden Radius r mit $\{|z - z_0| \leq r\} \subset U$ haben wir die Cauchysche Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Die Funktion $1/(\zeta - z)$ ist um den Punkt z_0 in eine geometrische Reihe entwickelbar:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} \\
&= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \\
&= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Auf jeder kleineren Kreisscheibe $\{|z - z_0| \leq \rho\}$ mit $|z - z_0| < \rho < r$ konvergiert diese Reihe gleichmäßig. Wir dürfen in der Cauchy-Formel das Integral mit dem Grenzübergang vertauschen und finden

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \cdot \oint_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

Damit haben wir für $|z - z_0| \leq \rho$ die Potenzreihendarstellung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Die Koeffizienten

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

sind dabei unabhängig von ρ, solange nur die Kreisscheibe $\{|\zeta - z_0| \leq \rho\}$ ganz in U liegt.

Auf jeder offenen Kreisscheibe um z_0, deren Abschluss noch ganz in U liegt haben wir damit die gleiche Potenzreihenentwicklung. Dann gilt die auch auf der größten offenen Kreisscheibe, die noch ganz in U liegt.

Dass die Koeffizienten die üblichen Taylorkoeffizienten

$$a_n = \frac{f^n(z_0)}{n!}$$

sind, folgt durch Differentiation dieser Potenzreihe. □

Beispiel. Die Funktion

$$f(z) := \frac{1}{1 + z^2}$$

ist rational mit den beiden Polen $z = \pm i$. Der größte Kreis um $z_0 = 0$, auf dem die Funktion holomorph ist, hat den Radius 1. Deswegen konvergiert die Potenzreihenentwicklung

$$\frac{1}{1 + z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k}$$

auf der Kreisscheibe $|z| < 1$, aber auf keiner größeren Kreisscheibe.

Die Taylor-Koeffizienten sind durch die Werte von f und seinen Ableitungen in z_0 bestimmt. Diese sind durch das Verhalten von f auf jedem, beliebig kleinen offenen ϵ-Kreis $\{|z - z_0| < \epsilon\}, \epsilon > 0$, festgelegt. Diese Garn spinnen wir jetzt etwas weiter.

Satz 2.4 (Identitätssatz auf der Kreisscheibe) *Die Funktionen f und g seien beide holomorph auf der Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$. Es gebe eine Folge $z_\nu \neq z_0$ von Punkten der Kreisscheibe, die gegen den Mittelpunkt z_0 konvergiert. Auf den Punkten z_ν der Folge gelte*

$$f(z_\nu) = g(z_\nu).$$

Dann gilt $f(z) = g(z)$ für alle Punkte z der Kreisscheibe.

Beweis. Es reicht, für die Differenzfunktion $h := f - g$ folgende Aussage zu beweisen:

Satz 2.5 *Die Funktion h sei holomorph auf einer Kreisscheibe. Es gebe eine Folge $z_\nu \neq z_0$ von Nullstellen der Funktion h, die sich gegen den Mittelpunkt der Kreisscheibe häuft. Dann ist identisch $h \equiv 0$ auf der ganzen Kreisscheibe.*

Beweis. Wir betrachten die Potenzreihenentwicklung

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

auf der Kreisscheibe und zeigen $a_k = 0$ durch Induktion nach k. Wegen der Stetigkeit von h ist

$$a_0 = h(z_0) = \lim_{\nu \to \infty} h(z_\nu) = 0.$$

Das ist der Induktionsanfang. Sei also

$$a_0 = ... = a_n = 0.$$

Dann lautet die Potenzreihenentwicklung

$$h(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = (z - z_0)^{(n+1)} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+1+k} (z - z_0)^k.$$

Die Potenzreihe

$$h_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+1+k} (z - z_0)^k$$

konvergiert auf derselben Kreisscheibe. Die Funktion h_0 ist also holomorph und es ist für alle ν

$$h_0(z_\nu) = \frac{h(z_\nu)}{(z_\nu - z_0)^{n+1}} = 0.$$

Daraus folgt $a_{n+1} = h_0(z_0) = 0$. $\square$

Satz 2.6 (Identitätssatz auf zusammenhängenden Gebieten) *Die offene Menge $M \subset \mathbb{C}$ sei zusammenhängend (d.h., zu je zwei Punkten $z_0, z_1 \in M$ gebe es einen Weg γ, der ganz in M verläuft, mit $\gamma(0) = z_0$ und $\gamma(1) = z_1$). Die Funktionen f und g seien holomorph auf M. Es gebe einen Punkt $z_0 \in M$ und eine Folge $z_\nu \neq z_0$ von Punkten in M mit*

$$f(z_\nu) = g(z_\nu) \text{ für alle } \nu \quad \text{und} \quad \lim_{\nu \to \infty} z_\nu = z_0.$$

Dann gilt identisch $f \equiv g$ auf ganz M.

Beweis. Wir müssen $f(z) = g(z)$ für jeden Punkt $z \in M$ zeigen. Dazu verbinden wir z_0 mit z durch einen Weg γ in M. Es sei

$$s := \sup_t \{f(\gamma(\tau)) = g(\gamma(\tau)) \text{ für alle } 0 \leq \tau < t\}$$

Nach Satz 2.4 stimmt f mit g identisch überein auf einer Kreisscheibe um z_0 von einem Radius $r > 0$. Da die Parametrisierungsabbildung des Weges γ stetig ist, gilt dann $s > 0$. Damit ist $\gamma(s) \in M$ Grenzwert einer Folge $z_\nu = \gamma(\tau_\nu)$, in deren Punkten f und g dieselben Werte annehmen. Nach Satz 2.4 stimmen dann f und g identisch überein auf jeder Kreisscheibe um $\gamma(s)$, die ganz in M liegt. Weil M offen ist, gibt es eine solche Kreisscheibe mit einem Radius > 0. Da die Parametrisierungsabbildung in s stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ so, daß alle Wegpunkte $\gamma(\tau), s \leq \tau < s + \delta$, in dieser Kreisscheibe liegen. Auf diesen Punkten gilt dann auch $f(\gamma(\tau)) = g(\gamma(\tau))$. Damit kann s nicht maximal gewesen sein, außer wenn $\gamma(s) = z$ und deswegen $f(z) = g(z)$. □

Satz 2.7 (Eindeutigkeit der Ausdehnung ins Komplexe) *Die komplexwertige Funktion φ, definiert auf einem Intervall $[a, b], b > a$, der reellen Achse, sei fortsetzbar zu einer holomorphen Funktion f auf einer zusammenhängenden offenen Menge $M \subset \mathbb{C}$ mit $[a, b] \subset M$. Dann ist f durch φ eindeutig bestimmt.*

Beweis. Sind f und g zwei holomorphe Ausdehnungen von φ auf M, dann gibt es eine unendliche Folge $x_\nu \in [a, b]$ mit $x_\nu > a$ und $\lim x_\nu = a$. Für alle diese Punkte gilt $f(x_\nu) = \varphi(x_\nu) = g(x_\nu)$. Die Behauptung folgt aus Satz 2.6. □

Satz 2.6 hat die folgende Eigenschaft holomorpher Funktionen als Konsequenz: Innerhalb des Definitionsgebiets M einer holomorphen Funktion $f \not\equiv 0$ können sich die Nullstellen von f nicht häufen, zu jeder Nullstelle $z_0 \in M$ von f gibt es einen Kreis mit einem Radius $r > 0$, in dem keine andere Nullstelle von f liegt. Man sagt, die Nullstellen liegen *diskret* in M.

Natürlich ist dies keine besondere Eigenschaft der Zahl 0, wie man durch Übergang von f zu $f - a$ sieht, gilt

Satz 2.8 (Diskretheit der a-Stellen) *Die Funktion f sei holomorph und nicht-konstant auf der zusammenhängenden offenen Menge $M \subset \mathbb{C}$. Dann hat die Menge der Punkte $z \in M$, auf denen die Funktion f einen festen Wert $a \in \mathbb{C}$ annimmt, keinen Häufungspunkt in M.*

Aufgabe 2.1 *Zeigen Sie*

$$\frac{z+1}{(z-1)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) z^k \quad \text{für} \quad |z| < 1.$$

Aufgabe 2.2 *Zeigen Sie*

$$\frac{1}{(z+1)(z+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{k+1}-2^{k+1}}{6^{k+1}}(1-z)^k \quad \textit{für} \quad |z-1| < 2.$$

Aufgabe 2.3 *Berechnen Sie die Taylorkoeffizienten der folgenden Funktionen im Nullpunkt bis zur Ordnung vier und geben Sie den Konvergenzradius der Taylorreihen an:*

$$\textbf{a)}\ sin\left(\frac{z}{4-z^2}\right), \quad \textbf{b)}\ \frac{cosh(z)}{cos(z)}, \quad \textbf{c)}\ e^{tang(z)}, \quad \textbf{d)}\frac{1}{1+e^z}.$$

Aufgabe 2.4 *Wie im Reellen sei* $cosh(z) = (e^z + e^{-z})/2$ *und* $sinh(z) = (e^z - e^{-z})/2$.
a) *Beweisen Sie für alle* $z \in \mathbb{C}$ *die Formeln*
$e^{iz} = cos(z) + isin(z)$,
$cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$, $\quad sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$,
$cos(iz) = cosh(z)$, $\quad sin(iz) = i \cdot sinh(z)$,
$cosh(iz) = cos(z)$, $\quad sinh(iz) = i \cdot sin(z)$,
b) *und für alle* $x, y \in \mathbb{R}$ *die Formeln*
$cos(x+iy) = cos(x)cosh(y) - isin(x)sinh(y)$, $\quad sin(x+iy) = sin(x)cosh(y) + icos(x)sinh(y)$,
$cosh(x+iy) = cosh(x)cos(y) + isinh(x)sin(y)$, $\quad sinh(x+iy) = sinh(x)cos(y) + icosh(x)sin(y)$.

Aufgabe 2.5 *Man bestimme die Ordnungen der Nullstellen folgender Funktionen:*
a) $sin^2(z)$, **b)** $(1-e^z)(z^2-4)^3$, **c)** $(z^2-\pi^2)^2 sin(z)$. (F 91, T 1, A 3)

Aufgabe 2.6 *Sei* $U \subset \mathbb{C}$ *eine offene Nullumgebung und* $f : U \to \mathbb{C}$ *holomorph. Darüberhinaus konvergiere die Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0).$$

Man beweise, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(z)$$

gleichmäßig auf jeder Kreisscheibe um 0 *konvergiert, die in* U *enthalten ist. Hinweis: Man denke an das Cauchy-Kriterium.* (F 92, T 2, A 2)

Aufgabe 2.7 *Es seien* $G \subset \mathbb{C}$ *ein Gebiet und* $f, g : G \to \mathbb{C}$ *holomorphe Funktionen mit* $f' = fg$. *Zeigen Sie: Hat* f *eine Nullstelle, so ist* $f = 0$. (F 93, T 1, A 4)

Aufgabe 2.8 *Es sei* $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^{(2^n)}$. *Man zeige:*
a) *Der Konvergenzradius dieser Reihe ist* 1.
b) $|f(z^{(2^k)})| \le |f(z)| + k$ *für* $|z| < 1$ *und* $k \in \mathbb{N}$.
c) *Für jede* 2^k*-te Einheitswurzel* ρ *gilt*

$$\lim_{t \to 1, t < 1} |f(t\rho)| = \infty,\ k \in \mathbb{N}.$$

d) *Für keinen Punkt des Randes (d.h.* $|z| = 1$*) ist* f *in eine offene Umgebung von* z *analytisch fortsetzbar.*
(H 93, T 2, A 3)

Aufgabe 2.9 *Man entscheide, in welchem Fall eine im Nullpunkt holomorphe Funktion f existiert mit $f(\frac{1}{n}) = ...$ für $n = 1, 2, 3, ...$*
a) $0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0\frac{1}{6}, ...,$ **b)** $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, ...,$ **c)** $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{5}, ...$
(Die Antwort ist jeweils zu begründen.) (F 92, T 1, A 3)

Aufgabe 2.10 *Welchen Konvergenzradius hat die Potenzreihenentwicklung von $\frac{1}{cos(z)}$ im Punkt $z_0 = 1$?* (H 96, T 2, A 1.3)

Aufgabe 2.11 *Die Funktion f sei im Kreisring $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ holomorph und auf dem Intervall $]-2, -1[$ reellwertig. Muss dann f auch auf dem Intervall $]1, 2[$ reellwertig sein? (Beweis oder Gegenbeispiel!)* H 98, T 2, A 4)

2.2 Elementare Funktionen und analytische Fortsetzung

In diesem Paragraphen wollen wir uns den Zoo der elementaren holomorphen Funktionen etwas näher ansehen. Einerseits wollen wir etwas mehr Sicherheit im Umgang mit ihnen, andererseits möchten wir so, wie es im Reellen auch war, einen Logarithmus haben.

2.2.1 Die Funktion z^2 und ihre Umkehrung

Der Kern des Problems liegt schon in den ganz einfachen Potenzfunktionen

$$f : z \mapsto z^n, \quad n \geq 2.$$

Betrachten wir die einfachste davon in Polarkoordinaten:

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} z & \mapsto & z^2 \\ \| & & \| \\ r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) & \mapsto & r^2(\cos(2\varphi) + i\sin(2\varphi)) \end{array} \right.$$

Die Zahl z^2 besitzt ein doppelt so großes Argument 2φ, wie die Zahl z. Wenn man beispielsweise mit der Zahl z auf der oberen *Hälfte des Einheitskreises* von 1 nach -1 geht, bewegt sich die Zahl z^2 um den *ganzen Einheitskreis* herum. Derselbe Sachverhalt lässt sich auch so ausdrücken:

Die Funktion $z \to z^2$ bildet die obere Halbebene

$$H : \quad \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$$

bijektiv auf die in der positiven reellen Achse aufgeschlitzte Ebene

$$\{w \in \mathbb{C} : \quad \textit{nicht } 0 < w \in \mathbb{R}\}$$

ab.

Beweis. Die Zahlen in der aufgeschlitzten Ebene sind von der Form

$$w = r(\cos(\psi) + i\sin(\psi)) \text{ mit } r > 0 \text{ und } 0 < \psi < 2\pi.$$

So ein w schreibt sich $w = z^2$ für genau ein $z \in H$, nämlich

$$z =_{+} \sqrt{r}(\cos(\frac{\psi}{2}) + i\sin(\frac{\psi}{2})).$$

Das ist ganz klar. Man sollte es sich aber an einer Zeichnung unbedingt noch klarer machen:

Denn jetzt beginnt das Problem: Wir wollen doch die Funktion $f(z) = z^2$ nicht auf der komischen oberen Halbebene H definieren sondern dort, wo sie ja längst definiert ist, auf der ganzen komplexen Zahlenebene. Wenn z jetzt einmal um den *ganzen Einheitskreis* herumgeht, bewegt sich $w = z^2$ *zweimal um diesen Einheitskreis* herum. Oder anders ausgedrückt: Die punktierte komplexe Zahlenebene

$$\mathbb{C}^* := \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0\}$$

wird *zwei-zu-eins* auf sich selbst abgebildet. Obwohl es in drei Dimensionen unmöglich ist, diese Abbildung $z \to z^2$ geometrisch zu realisieren, kann man sie doch noch irgendwie begreifen. Es ist halt so, dass z und $-z$ dasselbe Quadrat haben. Wenn $z \neq 0$ ist, sind das zwei verschiedene komplexe Zahlen mit demselben Quadrat, die sich um das Vorzeichen unterscheiden.

Im Reellen war das ja genauso: streng genommen hat jede positive reelle Zahl eine positive und eine negative Quadratwurzel. Im Komplexen gibt es keine positiven oder negativen Zahlen. Jede komplexe Zahl $w \neq 0$ besitzt zwei Quadratwurzeln, die sich ums Vorzeichen unterscheiden. Man kann sie auch hinschreiben, nicht nur in Polarkoordinaten: Die komplexe Zahl $w = x + iy$ hat die beiden Quadratwurzeln

$$\pm\sqrt{w} = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{x^2+y^2}+x)} \pm i\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{x^2+y^2}-x)}\right).$$

Dabei muss man vor i das Vorzeichen $+$ wählen, falls $y \geq 0$, und das negative Vorzeichen, wenn $y < 0$.

So einleuchtend ('trivial') dieser Sachverhalt auch ist, er macht es uns unmöglich, die Quadratwurzel $z = \sqrt{w}$ auf der ganzen komplexen Zahlenebene sinnvoll als Funktion zu definieren: Für Zahlen

$$w = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)), \quad r > 0, 0 < \varphi < 2\pi$$

der geschlitzten komplexen Ebene können wir natürlich

$$\sqrt{w} :=_{+} \sqrt{r}(\cos(\frac{\varphi}{2}) + i \cdot \sin(\frac{\varphi}{2}))$$

definieren. Diese Funktion ist aber bei der positiven reellen Halbachse unstetig: kommen wir von oben an die Halbachse ($\varphi \to 0$), dann geht der Funktionswert gegen

$$ {}_{+}\sqrt{r}(\cos(0) + i\sin(0)) = {}_{+}\sqrt{r}, $$

während bei Annäherung von unten ($\varphi \to 2\pi$), der Funktionswert gegen

$$ {}_{+}\sqrt{r}(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = {}_{-}\sqrt{r} $$

geht.

Man hat zwei Möglichkeiten:

a) die brutale: Wir können die Quadratwurzel nicht als stetige Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ definieren, also definieren wir sie nur auf der geschlitzten Ebene. Die Ebene können wir dabei auch anders aufschlitzen, also etwa längs der negativen reellen Halbachse.

b) die geniale: Wir können die Quadratwurzel auf ganz $\mathbb{C}$ nicht als stetige Funktion definieren, also definieren wir sie nicht als Funktion, sondern als *mehrdeutige Funktion.*

Das zweite Verfahren kann man etwa folgendermaßen ausführen. Wir nehmen die Wurzelfunktion $\sqrt{w}$ über der geschlitzten Ebene und nennen sie *einen Zweig* der Quadratwurzelfunktion. Als einen zweiten Zweig nehmen wir die Funktion $-\sqrt{w}$ hinzu. Beide Zweige verkleben wir über der positiven reellen Halbachse so, dass man beim Übergang über diese Halbachse von einem Zweig in den anderen kommt. Das Resultat ist keine Funktion, sondern eine zweiwertige Relation. Ihr Graph ist kein Funktionsgraph, sondern eine *Riemannsche Fläche.* Diese Riemannsche Fläche von $\sqrt{w}$ liegt zweiblättrig über der komplexen Zahlenebene. Der Nullpunkt, wo beide Blätter zusammenkommen, heißt ein *Verzweigungspunkt.* (All das kann mathematisch beliebig exakt durchgeführt werden.)

2.2.2 Umkehrfunktionen

Wer diese Ausführungen verstanden hat, hat verstanden, was die Riemannsche Fläche einer Funktion ist, und warum man sie braucht. Man braucht sie für mehrdeutige Funktionen. Mehrdeutige Funktionen sind unvermeidlich, wenn man Umkehrfunktionen oder Stammfunktionen behandeln will, was auf die Dauer unvermeidlich ist. Und eine mehrdeutige Funktion ist keine Funktion auf (einem Teil) der komplexen Ebene, sondern auf ihrer Riemannschen Fläche, die in mehreren Blättern über der komplexen Ebene ausgebreitet liegt. (Wo?)

Wir müssen noch einige der wichtigsten Beispiele behandeln:

Die n-te Wurzel ist die Umkehrfunktion der Potenzfunktion

$$ z \mapsto w = z^n,\ 0 < n \in \mathbb{N}. $$

Diese Funktion $w = z^n$ bildet den Sektor

$$\{z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) : r > 0, 0 < \varphi < \frac{2\pi}{n}\} \subset \mathbb{C}$$

bijektiv auf die geschlitzte Ebene ab. Anders ausgedrückt: die punktierte Ebene $\mathbb{C}^*$ wird n-zu-eins auf $\mathbb{C}^*$ abgebildet. Jede Zahl $0 \neq w \in \mathbb{C}$ besitzt genau n verschiedene n–te Wurzeln. Die verschiedenen Werte von $\sqrt[n]{w}$ unterscheiden sich um die n *n–ten Einheitswurzeln*

$$\cos(k \cdot \frac{2\pi}{n}) + i\sin(k \cdot \frac{2\pi}{n}), \quad k = 0, 1, ..., n-1.$$

Die Riemannsche Fläche der n-ten Wurzel hat n Zweige. Wenn man mit w einmal um den Nullpunkt läuft, so kommt man mit der Funktion $\sqrt[n]{w}$ von einem Zweig in den nächsten, vom n–ten Zweig wieder in den ersten. Der Nullpunkt ist ein n–facher Verzweigungspunkt.

Der natürliche Logarithmus ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion. Die Exponentialfunktion hat auch im Komplexen die Funktionalgleichung

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}.$$

Das kann man genau wie in 0.3 mit dem Cauchy-Produkt der Potenzreihen beweisen. Man kann diese Beziehung aber auch ohne Arbeit aus dem Identitätssatz folgern: Für jedes feste $x_2 \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$e^{z+x_2} - e^z \cdot e^{x_2}$$

auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph, auf der reellen Achse $\equiv 0$. Nach dem Identitätssatz ist die Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ identisch $\equiv 0$. Für jedes feste $z_1 \in \mathbb{C}$ ist deswegen die Funktion

$$e^{z_1+z} - e^{z_1} \cdot e^z$$

$\equiv 0$ auf $\mathbb{R}$, holomorph auf $\mathbb{C}$. Nach dem Identitätssatz ist die Funktion $\equiv 0$ auf ganz $\mathbb{C}$. Das war die Behauptung.

Insbesondere folgt daraus die Periodizität

$$e^{z+k\cdot 2\pi i} = e^z, \quad k \in \mathbb{Z},$$

der Exponentialfunktion. Und jeder Streifen

$$\{z = x + iy \in \mathbb{C} : \quad 0 < y < 2\pi\}$$

wird von der Exponentialfunktion bijektiv auf die geschlitzte Ebene abgebildet: Zu jedem $w = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) \in \mathbb{C}$ mit $r > 0$ und $0 < \varphi < 2\pi$ gibt es genau ein Urbild

$$z = \ln(r) + i \cdot \varphi$$

in diesem Streifen unter der Exponentialabbildung. Wieder ist es wichtig, eine geometrische Vorstellung davon zu haben, wie dieser Streifen auf die geschlitzte Ebene abgebildet wird (an seinem linken Ende auf den Nullpunkt zusammengepresst, an seinem rechten Ende unendlich weit aufgebogen). Und dass es unendlich viele parallele Streifen der Breite 2π mit demselben Bild gibt, hat zur Folge, dass jedes $w \in \mathbb{C}^*$ unendlich viele Urbilder unter der Exponentialabbildung besitzt, die sich alle additiv um

$k \cdot 2\pi i, k \in \mathbb{Z}$, unterscheiden. Jeder Streifen $\{z \in \mathbb{C} : k \cdot 2\pi < Im(z) < (k+1) \cdot 2\pi\}$ legt einen Zweig des natürlichen Logarithmus auf der geschlitzten Ebene fest.

Wir können beispielsweise einen *Hauptwert* des Logarithmus definieren durch

$$w = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)), \quad r > 0, 0 < \varphi < 2\pi \quad \Rightarrow \quad \ln(w) := \ln(r) + i \cdot \varphi.$$

Nähert man sich der positiven reellen Halbachse von oben an, so erhält man als stetigen Grenzwert den üblichen natürlichen Logarithmus der reellen Zahlen. Bei Annäherung von unten ist der Grenzwert um $2\pi i$ größer. Man kommt nach einer Umkreisung des Nullpunkts in positiver Richtung in den nächsten Zweig des ln, wo die Werte um $2\pi i$ größer sind. Die Riemannsche Fläche des Logarithmus besteht aus unendlich vielen dieser Zweige.

Damit hat der Ausdruck $ln(w)$ unendlich viele verschiedene Werte, die sich alle um $k \cdot 2\pi i$ unterscheiden.

Beispiel: $\ln(i)$ hat den Hauptwert $\frac{\pi}{2} i$ (denn $e^{\pi i/2} = i$) und die unendlich vielen Werte $\frac{\pi}{2} i + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$.

Damit haben wir die n-ten Wurzeln als (mehrdeutige) Umkehrfunktionen der Potenzfunktionen z^n und den Logarithmus als (unendlich vieldeutige) Umkehrfunktion der Exponentialfunktion definiert. Mir war es wichtiger, eine Vorstellung vom globalen Verhalten dieser Umkehrfunktionen zu vermitteln, als die ziemlich selbstverständliche Tatsache zu beweisen, dass Umkehrfunktionen von holomorphen Funktionen (lokal) wieder holomorph sind. Dies wird jetzt nachgeholt.

Satz 2.9 (Holomorphie der Umkehrfunktion) *Die Funktion f sei holomorph auf einer Umgebung des Punktes $z_0 \in \mathbb{C}$. Falls $f'(z_0) \neq 0$, dann gibt es eine Umgebung $U \subset \mathbb{C}$ des Punktes z_0, die durch $w = f(z)$ bijektiv auf eine Umgebung $V \subset \mathbb{C}$ des Bildpunktes $f(z_0)$ abgebildet wird. Die Umkehrfunktion $z = f^{-1}(w)$ ist auf V wieder holomorph.*

Beweis. Wir führen die Aussage auf den Satz über die lokale Umkehrbarkeit differenzierbarer Abbildungen zurück. Dazu schreiben wir wie immer

$$f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y).$$

Die Funktionalmatrix

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$

der differenzierbaren Abbildung (u, v) hat die Determinante

$$u_x v_y - u_y v_x = (u_x)^2 + (v_x)^2 = |f'(z)|^2.$$

Wegen $f'(z) \neq 0$ ist diese Determinante in z_0 also $\neq 0$ und die Funktionalmatrix ist invertierbar. In dieser Situation beweist man in der Analysis-Vorlesung, dass Umgebungen $U \subset \mathbb{C}$ von z_0 und $V \subset \mathbb{C}$ von $f(z_0)$ und eine stetig reell differenzierbare Umkehrabbildung $f^{-1} : V \to U$ existieren. Die partiellen Ableitungen von Real- und Imaginärteil dieser Umkehrabbildung erfüllen wieder die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen, weil die Inverse der Drehstreckungs-Matrix

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ -u_y & u_x \end{pmatrix}$$

auch wieder eine Drehstreckungs-Matrix ist. $\square$

So sind z.B. die Funktionen $\sqrt[n]{z}$ und $ln(z)$ dort holomorph, wo sie als Funktionen wohldefiniert sind. Dann müssen sie auch in Potenzreihen zu entwickeln sein. Wollen wir z.B. $\sqrt[n]{z}$ in eine Potenzreihe um $z_0 = 1$ entwickeln, brauchen wir die k-ten Ableitungen

$$\left.\frac{d^k}{dz^k}\sqrt[n]{z}\right|_{z=1} = \left.\frac{d^k}{dx^k}x^{1/n}\right|_{x=1} = \frac{1}{n}\cdot(\frac{1}{n}-1)\cdot\ldots\cdot(\frac{1}{n}-k+1).$$

Mit der (sinnvollen) Abkürzung

$$\begin{pmatrix} c \\ k \end{pmatrix} := \frac{c}{k}\cdot\frac{c-1}{k-1}\cdot\ldots\cdot\frac{c-k+1}{1} \qquad \text{für all } c \in \mathbb{C}$$

erhalten wir für die Taylorentwicklung von $\sqrt[n]{z}$ um $z_0 = 1$

$$\sqrt[n]{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} 1/n \\ k \end{pmatrix} (z-1)^k.$$

Diese Entwicklung konvergiert auf dem größten Kreis um $z_0 = 1$, auf dem die Funktion holomorph ist, also auf dem Kreis vom Radius 1, der am Nullpunkt anstößt.

Für die Entwicklung des Logarithmus um $z_0 = 1$ brauchen wir die Ableitungen

$$\begin{aligned}\left.\frac{d^k}{dz^k}\ln(z)\right|_{z=1} &= \left.\frac{d^k}{dx^k}ln(x)\right|_{x=1} \\ &= \begin{cases} 0 \quad \text{für } k=0 \\ 1 \quad \text{für } k=1 \\ \left.\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\frac{1}{x}\right|_{x=1} \\ = (-1)\cdot(-2)\cdot\ldots\cdot(-(k-1)) \\ = (-1)^{k-1}\cdot(k-1)! \quad \text{für } k>1 \end{cases}\end{aligned}$$

und erhalten die Taylorentwicklung (des Hauptwerts) des Logarithmus um $z_0 = 1$

$$\ln(z) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}(z-1)^k.$$

Wieder konvergiert die Entwicklung im Kreis vom Radius 1. (Einfacher wäre es gewesen, die Entwicklung

$$\ln'(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{1+(z-1)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(z-1)^k \quad \text{(geometrische Reihe)}$$

zu integrieren.)

Mit dem Logarithmus kann man auch die allgemeinen Potenzfunktionen definieren:

$$a^z = e^{z\cdot\ln(a)}, \qquad z^a = e^{a\cdot\ln(z)}, \qquad (a \in \mathbb{C}),$$

die allerdings mehr oder weniger mehrdeutig sind. Man beweist (in Verallgemeinerung unserer Potenzreihenentwicklung für die n–ten Wurzeln), dass für $|z| < 1$

$$(1+z)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} z^k.$$

Mit der Exponentialfunktion hängen sehr eng die Winkel- und die Hyperbelfunktionen zusammen:

$$\begin{aligned} \cos(z) &= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), & \sin(z) &= \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \\ \cosh(z) &= \frac{1}{2}(e^{z} + e^{-z}) & \sinh(z) &= \frac{1}{2}(e^{z} - e^{-z}) \end{aligned}$$

Weil diese Beziehungen für reelle z gelten, gelten sie nach dem Identitätssatz auch für alle komplexen Zahlen z. Dagegen gelten die Beziehungen

$$\cos(z) = Re(e^{iz}), \qquad \sin(z) = Im(e^{iz})$$

nur für reelle z, denn die rechten Seiten der Gleichungen sind nicht holomorph in z und deswegen greift der Identitätssatz hier nicht.

Satz 2.10 *Für eine holomorphe Funktion*

$$f(z) = \sum_n a_n (z - z_0)^n$$

sind äquivalent:
a) $a_1 \neq 0$*;*
b) f *besitzt lokal bei* z_0 *eine holomorphe Umkehrfunktion;*
c) f *ist lokal bei* z_0 *injektiv.*

Beweis. Die Aussage a) $\Rightarrow$ b) ist der Inhalt von Satz 2.9. Die Aussage b) $\Rightarrow$ a) folgt wie im Reellen aus der Kettenregel: Ist $z = g(w)$ eine lokale holomorphe Umkehrfunktion mit $g(f(z)) = z$, so gilt

$$1 = \left.\frac{d}{dz} z\right|_{z=z_0} = \left.\frac{dg}{dw}\right|_{f(z_0)} \cdot \left.\frac{df}{dz}\right|_{z_0},$$

und deswegen muss $f'(z_0) \neq 0$ sein.

Die Richtung b) $\Rightarrow$ c) ist klar. Die Umkehrung c) $\Rightarrow$ b) verdient Beachtung, vor allem deswegen, weil sie im Reellen nicht gilt (Gegenbeispiel $f(x) = x^3$). Sei in der Potenzreihenentwicklung von f der Koeffizient $a_1 = 0$. Wenn f lokal injektiv ist, kann nicht $f(z) \equiv f(z_0)$ sein, es muss Koeffizienten $a_n \neq 0$, $n > 0$, in der Potenzreihe geben. Sei davon a_m, $m \geq 2$, der erste. Also

$$f(z) = a_0 + \sum_{n \geq m} a_n (z - z_0)^n = a_0 + (z - z_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} a'_n (z - z_0)^n.$$

Die Funktion $g(z) := \sum_n a'_n (z - z_0)^n$ erfüllt $g(z_0) = a_m \neq 0$. Deswegen existiert lokal bei z_0 eine m-te Wurzelfunktion $w(z)$ mit $w(z)^m = g(z)$. Und die ursprüngliche Funktion f ist von der Form

$$f(z) = a_0 + ((z - z_0) w(z))^m.$$

Die Funktion $(z - z_0) \cdot w(z)$ hat im Punkt $z = z_0$ die Ableitung $w(z_0) \neq 0$ und bildet deswegen jede kleine Umgebung von z_0 bijektiv auf eine kleine Umgebung von $0 \in \mathbb{C}$ ab. Insbesondere gibt es in jeder Umgebung von z_0 Punkt $z_1 \neq z_2$ mit

$$(z_1 - z_0) \cdot w(z_1) = e^{2\pi i m}(z_2 - z_0) \cdot w(z_2).$$

Für diese Punkte ist $f(z_1) = f(z_2)$ und f kann in keiner Umgebung von z_0 injektiv sein. □

Definition 2.1 *Eine holomorphe Funktion $f : U \to V$, $U, V \subset \mathbb{C}$ offen, heißt* biholomorph, *wenn $f : U \to V$ bijektiv ist. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt* schlicht, *wenn f injektiv ist.*

Satz 2.11 (Gebietstreue) *Die Funktion f sei holomorph und nicht konstant auf einem Gebiet $U \subset \mathbb{C}$. Dann ist die Bildmenge $f(U) \subset \mathbb{C}$ wieder ein Gebiet.*

Beweis. Weil U zusammenhängend und f stetig ist, ist $f(U)$ zusammenhängend. Zu zeigen ist, dass f offen ist. Sei also $w_0 = f(z_0) \in f(U)$ mit $z_0 \in U$. Wie im Beweis von Satz 2.10 sieht man, dass in der Nähe von z_0

$$f(z) = f(z_0) + g(z)^m,\ m \geq 1,$$

wo $g(z_0) = 0$, $g'(z_0) \neq 0$. Also gibt es eine Umgebung von z_0, die unter g bijektiv auf eine offene Kreisscheibe $|w| < r$ abgebildet wird. Das Bild $f(U)$ enthält dann die Kreisscheibe $|w - w_0| < r^m$. □

Aufgabe 2.12 *Entwickeln Sie die folgenden Funktionen in eine Potenzreihe um $z_0 = 0$ und bestimmen Sie die Konvergenzradien:*

$$\mathbf{a)}\ ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right), \quad \mathbf{b)}\ ln(z+i) + ln(z-i).$$

Aufgabe 2.13 *Bestimmen Sie alle Werte von i^i.*

Aufgabe 2.14 *Berechnen Sie auf jedem Strahl*

$$z(t) = t \cdot e^{i\alpha}, \quad 0 < t \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in [0, 2\pi[\ \textit{fest},$$

den Grenzwert

$$\lim_{t \to 0} z(t) \cdot ln(z(t)).$$

Bestimmen Sie 0^0 als Grenzwert $\lim_{z \to 0} z^z$ auf diesen Strahlen.

Aufgabe 2.15 a) *Die Funktion f sei holomorph auf einer Umgebung des Punktes $w_0 \in \mathbb{C}$ und habe dort eine k-fache Nullstelle. (d.h., $f(w_0) = f'(w_0) = ...f^{(k-1)}(w_0) = 0$, $f^{(k)}(w_0) \neq 0$). Zeigen Sie: Es gibt eine biholomorphe Abbildung $Z \to W$, $w = w(z)$ einer Umgebung Z des Nullpunkts auf eine Umgebung W von w_0 mit $f(w(z)) = z^k$.*
b) *Zeigen Sie: Eine Äquipotentiallinie eines quellen- und wirbelfreien ebenen Feldes kann sich selbst nur unter einem Winkel $\nu \cdot 2\pi/k$, $2 \leq k \in \mathbb{N}$, $\nu \in \mathbb{N}$, $1 \leq \nu \leq k-1$, schneiden. In diesem Fall schneidet sich die Äquipotentiallinie dort k-fach und auch k Feldlinien schneiden sich dort und halbieren die Winkel zwischen den Äquipotentiallinien.*

Aufgabe 2.16 *Gibt es in einer Umgebung von 0 in $\mathbb{C}$ holomorphe Funktionen*
a) $\sqrt{1-cos(z)}$, *bzw.* **b)** $\sqrt{sin(z)}$*?*
Das heißt: gibt es eine bei 0 *holomorphe Funktion f mit* $(f(z))^2 = 1 - cos(z)$ *(bzw.* $(f(z))^2 = sin(z)$*)?*
(F 90, T 2, A 4)

Aufgabe 2.17 *Auf welchem Gebiet in $\mathbb{C}$ wird durch*

$$f(z) = \int_0^1 \frac{dt}{1+zt}$$

eine holomorphe Funktion f definiert. Berechne f durch bekannte elementare Funktionen. (H 91, T 3, A 1)

2.2.3 Stammfunktionen

Ähnlich wichtig wie die Behandlung von Umkehrfunktionen, ist die Behandlung von Stammfunktionen. Erfüllt die holomorphe Funktion f auf ihrem Definitionsbereich

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0 \text{ für jeden geschlossenen Weg } \gamma,$$

so existiert eine Stammfunktion $F(z)$ auf demselben Gebiet. Lokal (d.h. auf Kreisscheiben) ist diese Bedingung immer erfüllt (Satz von Morera). Aber global ist diese Bedingung i.a. nicht erfüllt. Das einfachste und wichtigste Beispiel ist die Funktion $f(z) = 1/z$ auf dem Gebiet $\mathbb{C}^*$. Wir wissen, dass für den (positiv orientierten) Rand γ des Einheitskreises gilt:

$$\oint_\gamma \frac{1}{z}dz = 2\pi i.$$

Die Stammfunktion $F(z) = \ln(z)$ erhöht deswegen bei jedem (positiven) Umlauf um den Nullpunkt ihren Wert um $2\pi i$. Anders, als bei manchen Umkehrfunktionen entstehen so immer unendlich viele Zweige, sobald eine Stammfunktion nicht eindeutig ist.

Den Logarithmus brauchen wir als Stammfunktion nicht mehr zu behandeln, weil wir ihn ja schon als Umkehrfunktion diskutierten. Aber es gibt genug andere wichtige Beispiele:

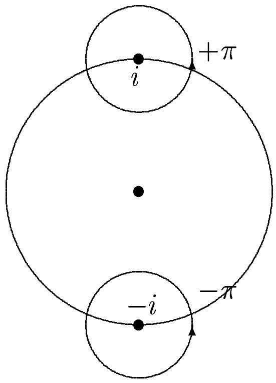
Der Arcustangens kann definiert werden als Stammfunktion der rationalen Funktion

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}.$$

Diese rationale Funktion hat die beiden Singularitäten $\pm i$. Auf jeder Kreisscheibe, die keine der beiden Singularitäten enthält, gibt es also eine Stammfunktion von f. Beispielsweise existiert auf dem Einheitskreis der Arcustangens–Hauptwert mit der Potenzreihenentwicklung

$$\arctan(z) = \int_0^z \frac{1}{1+\zeta^2}d\zeta = \int_0^z \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \zeta^{2k} d\zeta = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \int_0^z \zeta^{2k} d\zeta = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{2k+1} z^{2k+1}.$$

Dass dies tatsächlich ein Zweig des Arcustangens ist, d.h. eine Umkehrfunktion von $\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$ folgt wie üblich aus dem Identitätssatz, weil es im Reellen so ist.



Diesen Hauptzweig des Arcustangens kann man längs eines jeden Weges γ, der durch keinen der Punkte $\pm i$ geht, als Stammfunktion der rationalen Funktion $1/(1+z^2)$ fortsetzen. Aber wenn der Weg γ beispielsweise die Singularität i einmal in positiver Richtung umrundet, erhöht sich der Wert um

$$\oint_\gamma \frac{1}{\zeta+i}\frac{d\zeta}{\zeta-i} = 2\pi i \left.\frac{1}{z+i}\right|_{z=i} = \frac{2\pi i}{2i} = \pi \qquad \text{(Cauchysche Integralformel).}$$

Man ist nach der Umrundung von i in einem anderen Zweig des Arcustangens, in dem die Funktionswerte um π größer sind. Entsprechend erniedrigen sich die Funktionswerte um π, wenn man den Pol $-i$ in positiver Richtung umrundet. Auf diese Weise gehören all die unendlich vielen Zweige des reellen Arcustangens, die man aus dem Graphen der reellen Tangensfunktion durch Spiegelung erhält, zu einer einzigen Riemannschen Fläche der unendlich vieldeutigen komplexen Arcustangens–Funktion.

Der Arcussinus ist eine andere, aus Integraltafeln wohlbekannte Stammfunktion:

$$\arcsin(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}.$$

Damit wir einen Zweig erwischen, für den $\sin(\arcsin(z)) = z$ gilt, müssen wir hier beim Ursprung den positiven Zweig der reellen Wurzelfunktion nehmen. Dann bekommen wir den Hauptwert. Er hat um $z_0 = 0$ die Entwicklung

$$\begin{aligned}
\arcsin(z) &= \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \\
&= \int_0^z \sum_{k=0}^\infty \begin{pmatrix} -1/2 \\ k \end{pmatrix} \cdot (-\zeta^2)^k d\zeta \\
&= \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \begin{pmatrix} -1/2 \\ k \end{pmatrix} \int_0^z \zeta^{2k} d\zeta \\
&= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{2k+1} \begin{pmatrix} -1/2 \\ k \end{pmatrix} z^{2k+1} \\
&= z + \frac{1}{6}z^3 + \frac{3}{40}z^5 + \ldots.
\end{aligned}$$

Als zusätzliche Komplikation ist hier schon der Integrand

$$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

mehrdeutig und ändert bei Umrundung eines der beiden Verzweigungspunkte ± 1 sein Vorzeichen.

Aufgabe 2.18 *Zeigen Sie*

a) $arcsin(z) = -i \cdot ln(iz + \sqrt{1-z^2})$, **b)** $arccos(z) = -i \cdot ln(z + i\sqrt{1-z^2})$,

c) $arctang(z) = \frac{1}{2i} ln \left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$, **d)** $arccotang(z) = \frac{1}{2i} ln \left(\frac{z+i}{z-i}\right)$.

Mit $arsin(z)$ *usw. werden Die Unkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen* $sinh(z)$ *usw. bezeichnet. Zeigen Sie*

e) $arsin(z) = ln(z + \sqrt{1+z^2})$, **f)** $arcos(z) = ln(z + \sqrt{z^2-1})$,

g) $artang(z) = \frac{1}{2} ln \left(\frac{1+z}{1-z}\right)$, **h)** $arcotang(z) = \frac{1}{2} ln \left(\frac{z+1}{z-1}\right)$.

Aufgabe 2.19 *Es bezeichne* $F(G)$ *den komplexen Vektorraum der holomorphen Funktionen auf einem gebiet* G *und* $A(G) \subset F(G)$ *den Unterve ktorraum der Ableitungen holomorpher Funktionen auf* G*. Ferner werde mit* $H(G) := F(G)/A(G)$ *der Quotientenvektorraum bezeichnet.*
Weshalb ist $H(E) = 0$ *aber* $H(E \setminus 0) \neq 0$*? Wissen Sie noch genaueres über* $H(E \setminus 0)$*? (*E *bezeichnet wie üblich die offene Einheitskreisscheibe.)* (F 96, T 3, A 5)

Aufgabe 2.20 *In einem älteren Lehrbuch lesen wir, unter Hinweis auf den Brief von Gauß an Bessel vom 18. Dez. 1811, Zitat:* " f) Definitionen vermöge Integration durch komplexes Gebiet. Endlich erwähnen wir noch die Definitionen:

$$log\, z = \int_1^z \frac{dz}{z}, \quad arctan\, z = \int_0^z \frac{dz}{1+z^2}, \quad arcsin\, z = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Danach werden wir die Exponential- und die trigonometrischen Funktionen als die Umkehrfunktionen dieser Funktionen anzusehen haben." *(Ende des Zitats.)*

Geben Sie eine teilweise Erläuterung dieser Vorgehensweise, indem Sie am Beispiel des arcus tangens angeben, wie das Integral $\int_0^z \frac{dz}{1+z^2}$ *überhaupt aufzufassen ist, auf welchem (möglichst großen) Teilgebiet von* $\mathbb{C}$ *dadurch eine holomorphe Funktion wohldefiniert ist und inwiefern diese als "Umkehrfunktion" des Tangens* $tan\, z = \frac{sin\, z}{cos\, z}$ *anzusehen ist.* (H 96, T 3, A 5)

2.2.4 Analytische Fortsetzung

Ist f holomorph auf einer offenen Menge $M \subset \mathbb{C}$, so kann man eine Stammfunktion F durch

$$F(\gamma(t)) = \int_{\gamma(0)}^{\gamma(t)} f(z) dz$$

längs eines jeden Weges in M analytisch fortsetzen. Auch die n-ten Wurzeln kann man längs eines jeden Weges γ in $\mathbb{C}^*$ analytisch fortsetzen. Wir wollen den Begriff 'analytische Fortsetzung' noch etwas präzisieren:

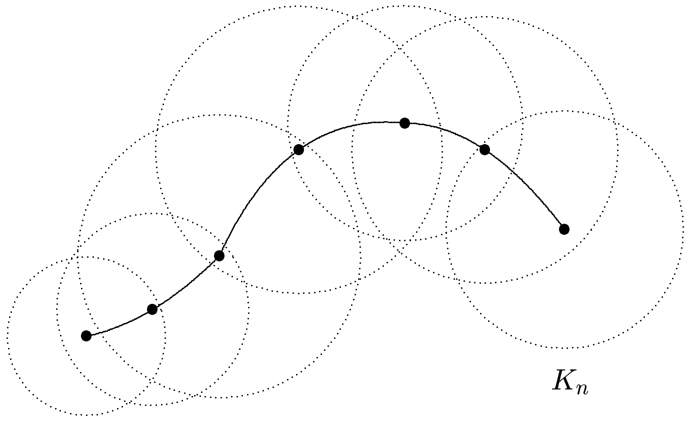
Definition 2.2 *Die Funktion* f_0 *sei holomorph auf einer Kreisscheibe* K_0 *um* $z_0 \in \mathbb{C}$*. Ein Punkt* $z \in \mathbb{C}$ *sei mit* z_0 *verbunden durch den Weg* $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$*, i.e.* $\gamma(0) = z_0, \gamma(1) = z$*. Eine Funktion* f *holomorph auf einer Kreisscheibe* K *um* z *heißt* analytische Fortsetzung *von* f_0 *längs des Weges* γ*,* *wenn es eine Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = 1$ des Parameterintervalls gibt, sowie offene Kreise K_ν, $0 \leq \nu \leq n$, um die Punkte $\gamma(t_\nu)$ und holomorphe Funktionen f_ν auf K_ν derart, dass*

i) die Teilkurve $\gamma([t_{\nu-1}, t_{\nu+1}])$ ganz im Kreis K_ν enthalten ist (bzw. $\gamma([0, t_1])$ in K_0, sowie $\gamma([t_{n-1}, t_n])$ in K_n,

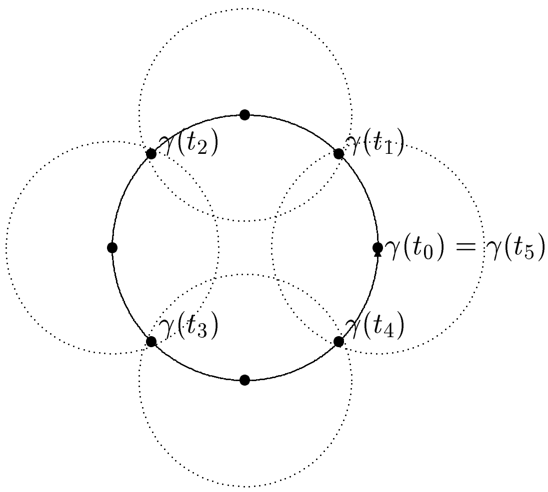
ii) die holomorphen Funktionen f_ν und $f_{\nu+1}$ auf $K_\nu \cap K_{\nu+1}$ übereinstimmen,

ii) die Funktionen f und f_n auf $K_n \cap K$ übereinstimmen.

Dieses Verfahren der analytischen Fortsetzung nennt man auch Kreiskettenverfahren.



Beispiel. Der Rand des Einheitskreises, parametrisiert durch $[0, t] \ni t \mapsto e^{2\pi i t}$



wird überdeckt durch die fünf Kreise K_ν vom Radius 1 um die fünf Punkte $e^{2\pi i \cdot \nu/4} = i^\nu$, $\nu = 0, ..., 4$. Eine zugehörige Zerlegung des Parameterintervalls ist etwa

$$0 = t_0 < t_1 = \frac{1}{8} < t_2 = \frac{3}{8} < t_3 = \frac{5}{8} < t_4 = \frac{7}{8} < t_5 = 1.$$

Setzt man $\sqrt{z}$ längs dieser Kreiskette analytisch fort, so kommt man in den anderen Zweig der Wurzel.

Im Allgemeinen führt analytische Fortsetzung also zu mehrdeutigen Funktionen. Aber es gibt einen wichtigen Fall, in dem analytische Fortsetzung immer auf *eindeutige* holomorphe Funktionen führt:

Satz 2.12 (Monodromiesatz) *Die offene Menge $M \subset \mathbb{C}$ sei zusammenhängend und einfach-zusammenhängend. Die Funktion f sei holomorph auf einem Kreis $K \subset M$ und analytisch fortsetzbar längs eines jeden Weges in M. Dann gibt es eine (eindeutige) holomorphe Funktion auf ganz M, die mit jeder analytischen Fortsetzung von f übereinstimmt.*

Beweis (vgl. Satz 1.8). Es sei $z_0 \in K$ der Kreismittelpunkt. Weil M zusammenhängend ist, kann man jeden Punkt $z_1 \in M$ mit z_0 durch einen Weg γ verbinden, der ganz in M verläuft. Nach Voraussetzung kann man f längs dieses Weges analytisch nach z_1 fortsetzen. So kann man bei allen Punkten $z_1 \in M$ eine holomorphe Funktion definieren, die f fortsetzt. Die Behauptung läuft darauf hinaus, einzusehen, dass bei jeder analytischen Fortsetzung längs irgend eines Weges γ_1 in M bei z_1 stets die gleiche holomorphe Funktion herauskommt.

Dies ist klar, wenn sich der Weg γ_1 wenig von γ unterscheidet, weil er dann noch ganz in der Kreiskette zu γ liegt. Weil M einfach-zusammenhängend ist, kann man je zwei Wege γ und γ_1, die z_0 mit z_1 verbinden, durch eine stetige Schar $\gamma_u, 0 \leq u \leq 1$, von Wegen γ_u in M verbinden, $\gamma_0 = \gamma$. Bei jeder kleinen Änderung von u ändert sich die analytisch nach z_1 fortgesetzte Funktion nicht. Den Übergang von γ nach γ_1 kann man durch endlich viele solche kleinen Änderungen des Parameters u erreichen, und deswegen bleibt auch dabei die analytisch nach z_1 fortgesetzte Funktion gleich. □

Folgerung. *Die Funktion f sei holomorph auf der zusammenhängenden einfachzusammenhängenden offenen Menge $M \subset \mathbb{C}$ und habe dort keine Nullstelle. Dann gibt es eine holomorphe Funktion h auf M mit*

$$f = e^h \quad \text{d.h.} \quad h = ln(f).$$

Beweis. Wir wählen einen Punkt $z_0 \in M$ und einen Kreisscheibe um $f(z_0)$, welche den Nullpunkt nicht enthält. Auf dieser Kreisscheibe gibt es einen Zweig ln des natürlichen Logarithmus. Die Funktion $h := ln(f)$ ist dann holomorph auf einer Umgebung von z_0. Wir können sie analytisch längs eines jeden Weges in M fortsetzen, indem wir einfach den Wert des Logarithmus stetig fortsetzen. Nach dem Monodromiesatz bekommen wir dann keine mehrdeutige Funktion auf M, sondern eine wohldefiniert holomorphe Funktion h auf ganz M. □

Aufgabe 2.21 a) *Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung um $z_0 = 0$ für alle Zweige der Funktion $\sqrt[3]{z^2-1}$.*
b) *Der Zweig dieser Funktion, der im Nullpunkt den Wert $e^{2\pi i/6}$ hat, werde längs des Weges $\gamma = \gamma_1\gamma_2\gamma_1$ mit*

$$\gamma_1(t) = 1 + e^{i(t+\pi)}, \quad \gamma_2(t) = -1 + e^{-it}, \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

analytisch fortgesetzt. Welchen Wert hat diese analytische Fortsetzung im Nullpunkt?

Aufgabe 2.22 *Das Gebiet D in $\mathbb{C}$ sei das Komplement der Menge*

$$D' = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 2 \ \textit{oder} \ t \leq 1\}.$$

Begründen Sie die folgende Behauptung: Es gibt eine holomorphe Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ mit

$$e^{f(z)} = (z-2)(z^2-1).$$

(H 95, T 1, A 3)

Aufgabe 2.23 *Sei $r > 0$ und f holomorph auf G. In jedem Punkt a von G sei der Konvergenzradius der Potenzreihenentwicklung von f um den Punkt a größer als r. Folgt daraus, dass f zu einer auf dem Gebiet*

$$\tilde{G} := \bigcup_{a \in G} K_r(a)$$

holomorphen Funktion fortsetzbar ist? (Beweis oder Gegenbeispiel.) (F 96, T 2, A 3)

Aufgabe 2.24 *Auf einer offenen Kreisscheibe B_0 von einem Radius $r < \frac{1}{2}$ um den Punkt $\frac{1}{2} \in \mathbb{C}$ sei eine holomorphe Funktion f_0 gegeben, die sich längs eines jeden Weges in $D \setminus 0$ analytisch fortsetzen lässt; hierbei bezeichne D die offene Einheitskreisscheibe. Zeigen Sie, dass die dadurch definierte 'mehrdeutige' Funktion f von der Gestalt $f(z) = g(\ln z)$ ist, genauer: Beweisen Sie die Existenz einer holomorphen Funktion g auf der linken Halbebene, welche die Bedingung $f_0(z) = g(\ln z)$ für alle $z \in B_0$ erfüllt, wobei jetzt 'ln' den Hauptzweig des Logarithmus bezeichnet.* (F 97, T 3, A 2)

Aufgabe 2.25 *Bestimmen Sie ein möglichst großes unbeschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}$, welches den Nullpunkt enthält, und eine holomorphe Funktion $h : \Omega \to \mathbb{C}$, so dass $e^{h(z)} = z^2 - z - 6$ ist.* (H 97, T 2, A 5)

Aufgabe 2.26 **a)** *Zeigen Sie, dass sich die Funktion $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ zu einer holomorphen Funktion auf $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$ fortsetzen lässt.*
b) *Ist die Fortsetzung auf dem Strahl $]-\infty, -1]$ positiv oder negativ?*
(H 98, T 1, A 4)

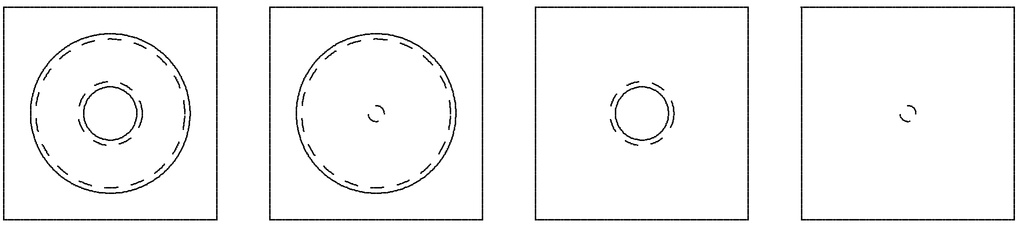
Aufgabe 2.27 *Auf der positiv geschlitzten Ebene werde $f(z) = \sqrt[3]{\ln z}$ dadurch festgelegt, dass es auf der oberen Halbebene durch die Hauptzweige von Wurzel und Logarithmus gegeben sei. Was ist dann $\lim_{\epsilon \to 0} f(1 - i\epsilon)$?* (H 98, T 3, A 1.4)

2.3 Laurent-Reihen

Hier betrachten wir holomorphe Funktionen auf Kreisringen. Ein *Kreisring* mit Zentrum $z_0 \in \mathbb{C}$ ist eine Menge

$$K(r,R) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}, \quad 0 \le r < R \le \infty.$$

Dabei sind die Grenzfälle $r = 0$ und $R = \infty$ ausdrücklich zugelassen. Es gibt also die folgenden vier Sorten von Kreisringen:



$0 < r < R < \infty$ $\qquad$ $r = 0,\ R < \infty$ $\qquad$ $0 < r,\ R = \infty$ $\qquad$ $r = 0,\ R = \infty$

Um Schreibarbeit zu sparen, werde ich mich zunächst auf den Fall $z_0 = 0$ konzentrieren. Für Kreisscheiben, die nicht den Nullpunkt als Mittelpunkt haben geht alles ganz genau so.

Wir wollen die Cauchysche Integralformel auswerten für eine holomorphe Funktion f auf einem derartigen Kreisring $K(r, R)$. Natürlich können wir dabei nicht über den Rand $\partial K(r, R)$ integrieren, weil die Funktion f dort nicht mehr zu definiert sein braucht. Aber über jeden Kreisrand, der etwas im Innern von $K(r, R)$ liegt, kann man schon integrieren. Für jeden Punkt $z \in K(r, R)$ und je zwei Radien

$$r', R' \text{ mit } r < r' < |z| < R' < R$$

gilt also die Formel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=R'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=r'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Wegen des Cauchyschen Integralsatzes sind dabei die beiden Integrale

$$I_a := \oint_{|\zeta|=R'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad I_i := \oint_{|\zeta|=r'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

unabhängig von R' und r', solange eben nur die Bedingung $r < r' < |z| < R' < R$ erfüllt ist.

Das Integral I_a ist das übliche Cauchy-Integral über den Kreisrand $|\zeta| = R$, nur ist die Funktion f nicht mehr im ganzen Inneren dieses Kreises holomorph. Das ändert aber nichts an der Technik, welche wir beim Beweis von Satz 2.3 verwendeten: Für $|z| < R' = |\zeta|$ ist

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta(1 - \frac{z}{\zeta})} = \frac{1}{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}}$$

holomorph in z und in eine Potenzreihe entwickelbar. Nach Vertauschen von Summation und Integral erhalten wir wie in Satz 2.3

$$I_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\oint_{|\zeta|=R'} \frac{1}{\zeta^{n+1}} d\zeta \right) \cdot z^n.$$

Die Funktion I_a ist also holomorph im ganzen Kreis $|z| < R$, nicht nur im Kreisring.

Genauso wie das Integral I_a kann man auch das Integral I_i über den inneren Rand behandeln. Man muss es nur so hintricksen, dass eine geometrische Reihe zur Basis ζ/z rauskommt, denn bei I_i ist $|\zeta/z| < 1$:

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z(1 - \frac{\zeta}{z})} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta}{z}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n \frac{1}{z^{n+1}}.$$

Das ist keine Potenzreihe in z, sondern in $1/z$. Und sie konvergiert für

$$|z| > r' = |\zeta|,$$

d.h., außerhalb des Kreises vom Radius r'. Wir können diese Reihe auch

$$-\sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{1}{\zeta^{n+1}} z^n$$

schreiben, dann sieht sie formal ganz genauso aus, wie die Reihe für I_a, nur dass der Summationsindex n jetzt negativ ist. Vertauschen von Summation und Integration geht genauso problemlos, wie bei I_a. Das Ergebnis ist

$$I_i(z) = -\sum_{n=-1}^{-\infty} \oint_{|\zeta|=r'} \frac{1}{\zeta^{n+1}} d\zeta \cdot z^n.$$

Fassen wir noch I_a und I_i zusammen, erhalten wir

Satz 2.13 (Laurent-Entwicklung) *Ist die Funktion f holomorph auf einem Kreisring $r < |z| < R$, so ist sie dort in eine* Laurent-Reihe

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

entwickelbar. Für die Koeffizienten a_n gilt die übliche Cauchy-Formel

$$a_n = \oint_{|\zeta|=\rho} \frac{d\zeta}{\zeta^{n+1}}, \quad r < \rho < R.$$

Diese Laurentreihe konvergiert im Inneren des Kreisrings und auf jedem echt kleineren Kreisring $r' < |z| < R'$, $r < r' < R' < R$, gleichmäßig.

So eine Laurent-Reihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ besteht also z.T. aus einer ganz normalen Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Dieser Teil ist nicht sehr aufregend, deswegen heißt er *Nebenteil* der Laurentreihe. Aufregender ist der *Hauptteil* $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n$ der Laurent-Reihe, welcher die negativen Potenzen von z enthält. Der Nebenteil konvergiert, wie jede Potenzreihe, auf einer ganz normalen Kreisscheibe $|z| < R$, während der Hauptteil auf dem Komplement $|z| > r$ einer Kreisscheibe konvergiert. Nur wenn $r < R$ ist, stellt die Laurent-Reihe eine holomorphe Funktion dar, aund zwar auf dem Ring-Gebiet $r < |z| < R$.

Beispiele. 1) Sei $0 \neq a \in \mathbb{C}$. Die rationale Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z-a}$$

besitzt zwei verschiedene Laurent-Entwicklungen um den Nullpunkt: Einmal auf der Kreisscheibe $|z| < |a|$ die gewöhnliche Potenzreihe

$$\frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{a}} = -\frac{1}{a} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{a^{k+1}}\right) \cdot z^k$$

und auf dem Kreisring $|z| > |a|$ die Laurentreihe

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{a}{z}} = \frac{1}{z} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^k = \sum_{k=-\infty}^{-1} a^{-k-1} z^k.$$

2) Die Funktion $e^{1/z}$ ist auf dem Kreisring $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z|\} = \mathbb{C}^*$ holomorph mit der dort konvergenten Laurentreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{z^k} = \sum_{k=-\infty}^{0} \frac{1}{(-k)!} z^k.$$

Definition 2.3 *Ist die Funktion f holomorph auf einem Kreisring*

$$\{z \in \mathbb{C} : \quad 0 < |z - z_0| < R\}$$

mit innerem Radius 0, so nennt man z_0 eine isolierte Singularität *der Funktion f.*

Entsprechend dem Hauptteil ihrer Laurent-Entwicklung um z_0 klassifiziert man isolierte Singularitäten:

Hauptteil	isolierte Singularität
$= 0$	hebbar
endlich	Pol
unendlich	wesentliche Singularität

Beispiele. 1) Der Nullpunkt ist eine wesentliche Singularität der Funktion $e^{1/z}$.

2) Die Funktion f sei holomorph, aber nicht identisch $\equiv 0$ auf einer Umgebung des Nullpunkts mit $f(0) = 0$. Da die Nullstellen von f diskret liegen, gibt es eine Kreisscheibe $|z| < R$, die außer 0 keine Nullstellen von f enthält. Dann ist der Nullpunkt eine isolierte Singularität der Funktion $1/f$. Auf dem Kreisring $0 < |z| < R$ besitzt sie eine Laurentreihe. Um deren Hauptteil zu untersuchen gehen wir aus von der Potenzreihe

$$\sum_{k=m}^{\infty} a_k z^k = z^m \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+m} z^k$$

für f. Die Potenz m, mit der die Reihe beginnt ist dabei echt > 0, weil ja $z = 0$ eine Nullstelle sein sollte. Wenn m den genauen Beginn der Reihe angibt, so ist auch $a_m \neq 0$. Die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{m+k} z^k = \frac{f(z)}{z^m}$$

ist dabei holomorph auf der Kreisscheibe $|z| < R$ und hat dort keine Nullstelle. Also ist dort auch der Kehrwert

$$\frac{z^m}{f(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$$

holomorph und in eine Potenzreihe mit den Koeffizienten b_k zu entwickeln. Für die Funktion $1/f$ selbst hat man dann auf dem Kreisring $0 < |z| < R$ die Laurent-Reihe

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{z^m} \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k = \sum_{k=-m}^{\infty} b_{k+m} z^k.$$

Die isolierte Singularität von $1/f$ ist also ein Pol. Die Zahl m heißt *Ordnung* der Nullstelle von f, bzw. des Pols von $1/f$.

Die verschiedenen Arten isolierter Singularitäten unterscheiden sich auch in Bezug auf des Verhalten der Funktionswerte bei Annäherung an die Singularität:

Satz 2.14 (Isolierte Singularitäten) *Der Punkt z_0 sei eine isolierte Singularität der Funktion f. Diese Singularität ist*

hebbar	$\iff$	$f(z)$ bleibt beschränkt
ein Pol	$\iff$	$\lim_{z \to z_0} \lvert f(z) \rvert = \infty$
wesentlich	$\iff$	die Werte von f auf jeder Kreisscheibe $\lvert z - z_0 \rvert < \epsilon$ liegen dicht in $\mathbb{C}$.

Beweis. Wenn die Singularität hebbar ist, dann ist der Hauptteil der Laurentreihe dort identisch Null. Die Funktion ist also in einer Umgebung von z_0 holomorph und deswegen beschränkt.

Wenn umgekehrt die Funktionswerte f(z) in der Nähe der Singularität durch eine Schranke C beschränkt sind, schätzen wir die Koeffizienten der Laurent-Entwicklung ab:

$$\begin{aligned} |a_k| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2r\pi \cdot r^{-k-1} \cdot C \\ &= C \cdot r^{-k} \end{aligned}$$

Für $k \leq -1$ ist die r-Potenz positiv und mit $r \to 0$ folgt $a_k = 0$ für $k \leq -1$.

Wenn ein Pol vorliegt, dann sieht die Laurent-Entwicklung folgendermaßen aus:

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k (z-z_0)^k = \frac{f_0(z)}{(z-z_0)^{-m}}.$$

Hier ist f_0 holomorph mit $f_0(0) = a_m \neq 0$ und $m \geq 1$. Daraus folgt $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$.

Gilt umgekehrt $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$, so gibt es einen Radius $r > 0$, derart, dass f auf der Kreisscheibe vom Radius r um z_0 keine Nullstelle hat. Die Funktion $1/f$ ist dann für $0 < |z - z_0| < r$ holomorph und $\lim_{z \to z_0} 1/f(z) = 0$. Also ist nach dem, was wir schon bewiesen haben, z_0 eine hebbare Singularität von $1/f$. Da $1/f$ eine Nullstelle in z_0 hat, besitzt f dort einen Pol.

Sei z_0 jetzt eine wesentliche Singularität von f. Wir müssen zeigen: Für jeden Radius $r > 0$ liegt die Menge der Werte $f(z), |z - z_0| < r$, dicht in $\mathbb{C}$. Das heißt: zu jedem $w \in \mathbb{C}$ und $\epsilon > 0$ gibt es ein z mit $0 < |z - z_0| < r$ so, dass $|w - f(z)| < \epsilon$. Andernfalls gäbe es aber so ein $w \in \mathbb{C}$ und ein $\epsilon > 0$ derart, dass für alle z mit $0 < |z - z_0| < r$ gilt $|w - f(z)| > \epsilon$. Die Funktion $h(z) := 1/(w - f(z))$ ist dann bei z_0 (durch $1/\epsilon$) beschränkt und hat eine hebbare Singularität. Diese Funktion h ist also holomorph bei z_0 und $f = w + 1/h$ hätte einen Pol in z_0, Widerspruch.

Falls umgekehrt die Wertemenge dicht liegt, kann die Singularität weder hebbar, noch ein Pol sein, ist also wesentlich. □

Die Richtung $\Rightarrow$ der dritten Aussage in Satz 2.14 heißt auch Satz von Casorati-Weierstraß. Es gibt eine starke Verschärfung dieser Aussage: Auf jeder Kreisscheibe $|z - z_0| < \epsilon$ nimmt $f(z)$ als Wert alle komplexen Zahlen an, bis auf eventuell eine Ausnahme. Das ist der Satz von Picard. Der ist viel schwerer zu beweisen.

Definition 2.4 *Eine Funktion auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ heißt* meromorph, *wenn sie auf U holomorph ist, bis auf die Punkte einer in U diskreten Menge, in denen sie Pole besitzt. Lokal ist eine meromorphe Funktion f also stets eine Quotient p/q mit holomorphen Funktionen p und $q \not\equiv 0$.*

Aufgabe 2.28 *Sei f eine holomorphe Funktion auf der abgeschlossenen Kreisscheibe $\bar{E} = \{z \in \mathbb{C} | \, |z| \leq 1\}$ bis auf einen einfachen Pol in $p \in S^1 = \partial E$. Sei $f(z) = \sum_n a_n z^n$ um 0. Zeige*

$$\lim_{n \to \infty} (a_n / a_{n+1}) = p.$$

(F 90, T 3, A 3)

Aufgabe 2.29 *Eine holomorphe Funktion $f(z)$ hat eine Eigenschaft 'bei ∞', wenn $f(1/z)$ sie bei* 0 *hat. In diesem Sinn habe die holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \setminus 0 \ \to \mathbb{C}$ Pole bei* 0 *und ∞. Man zeige, dass f von der Gestalt $f(z) = \sum_{n=-k}^{r} a_n z^n$ für geeignete $k, r > 0$ sein muss.* (H 90, T 2, A 2)

Aufgabe 2.30 *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $A \subset D$ diskret und abgeschlossen in D. Sei $f : D \setminus A \to \mathbb{C}$ holomorph und injektiv. Man zeige, dass kein $a \in A$ eine wesentliche Singularität von f ist.* (F 91, T 2, A 3)

Aufgabe 2.31 *Bestimmen Sie die Art der Singularität von $f(z) = sin\left(\frac{\pi}{z^2+1}\right)$ in $z_0 = i$.* (F 91, T 3, A 2)

Aufgabe 2.32 *i) Man bestimme die Ordnung der Nullstelle bei $z = 0$ der holomorphen Funktion $z \mapsto z^2(exp(z^2) - 1)$.*
ii) Man bestimme die singulären Punkte und ihre Art von der Funktion

$$z \mapsto \frac{exp\left(\frac{1}{z-1}\right)}{exp(z) - 1}.$$

(H 91, T 2, A 2)

Aufgabe 2.33 *Seien $a, b \in \mathbb{C}$ gegeben, $a \neq b$, und sei*

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)}.$$

Man entwickle f um $z_0 = a$ in Laurent-Reihen mit den Konvergenzbereichen $0 < |z - a| < |b - a|$ *und* $|z - a| > |b - a|$. (F 92, T 1, A 4)

Aufgabe 2.34 **a)** *Bestimmen Sie, welche Singularität die Funktion*

$$\frac{cos\, z - 1}{z^6}$$

im Nullpunkt hat.
b) *Zeigen Sie, dass $e^{1/sin(z)}$ keinen Pol in* 0 *hat.*
(H 92, T 1, A 4)

Aufgabe 2.35 *Man finde die Laurententwicklung der durch*

$$f(z) = \frac{2}{(z+1)(z+3)}$$

definierten Funktion im Kreisring $K = \{z : 1 < |z| < 3\}$. (H 92, T 3, A 4)

Aufgabe 2.36 *Die Funktion f habe an der Stelle $p \in \mathbb{C}$ einen Pol, und g sei eine ganze Funktion und kein Polynom. Kann man schließen, welchen Typ die Singularität von $g \circ f$ an der Stelle p hat?* (H 93, T 1, A 3)

Aufgabe 2.37 *Man entwickle die rationale Funktion*

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$$

in eine Laurentreihe im Kreisring $1 < |z| < 2$. (H 94, T 3, A 1)

Aufgabe 2.38 **a)** *Bestimmen Sie die Singularitäten der Funktion*

$$f(z) = \frac{z}{exp(z) - 1}$$

und geben Sie deren Natur an.
b) *Wie groß ist der Konvergenzradius der Potenzreihenentwicklung von f um den Punkt $z_0 = 2\pi$?* (F 95, T 1, A 4)

Aufgabe 2.39 *Beweisen Sie folgende Aussagen (es ist $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$):*
a) *Jede holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ mit $|f(z)| > 1$ für alle $z \in \mathbb{C}^*$ ist konstant.*
b) *Ist $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ holomorph und gilt $f(1/n) = 1/n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist entweder $f(z) = z^2$ für alle $z \in \mathbb{C}^*$ oder f besitzt in 0 eine wesentliche Singularität.* (H 95, T 3, A 4)

Aufgabe 2.40 *Die komplexwertige Funktion f sei holomorph auf dem offenen Kreisring*

$$R_{r,s}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < s\}$$

und stetig auf $\overline{R_{r,s}(z_0)} = \{z \in \mathbb{C} : r \leq |z - z_0| \leq s\}$, und es gelte dort eine Abschätzung der Form $|f(z)| \leq M$ mit einer Konstanten $M \geq 0$. Beweisen Sie für die Koeffizienten der Laurent-Entwicklung $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$ von f die Abschätzungen $|c_{k-1}| \leq M/s^{k-1}$ und $c_{-k} \leq Mr^k$ für alle $k \geq 1$. (H 95, T 3, A 5)

Aufgabe 2.41 *Es sei $R > 1$. Die Funktion f sei auf der Kreisscheibe $|z| < R$ holomorph bis auf eine Polstelle im Punkt 1 mit dem Hauptteil $1/(z-1)$. Für $|z| < 1$ sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Wie lautet die Laurent-Entwicklung von f im Kreisgebiet $1 < |z| < R$?* (F 96, T 1, A 2)

Aufgabe 2.42 *Seien f, g zwei Funktionen, die holomorph auf der Einheitskreisscheibe $D = \{z : z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ und stetig auf $\bar{D}$ sind. Zudem gelte*

$$0 < |g(z)| < |f(z)| \text{ für } |z| = 1 \quad \text{und} \quad |f(0)| < |g(0)|.$$

Zeigen Sie, dass ein Punkt $z_0 \in D$ existiert, in dem die Nullstellenordnung von f größer als die Nullstellenordnung von g ist. (F 97, T 1, A 2)

Aufgabe 2.43 **a)** *Darf die aus der reellen Analysis bekannte l'Hospitalsche Regel auch bei hebbaren Singularitäten von Quotienten holomorpher Funktionen angewendet werden? (Beweis oder Gegenbeispiel!)*
b) *Klassifizieren Sie die isolierten Singularitäten der folgenden holomorphen Funktionen und bestimmen Sie eventuelle holomorphe Fortsetzungen:*

$$f(z) = \frac{1 - cos\, z}{z^2}, \qquad g(z) = z^2\, sin\left(\frac{1}{z}\right).$$

(H 98, T 2, A 3)

Aufgabe 2.44 *Bestimmen Sie Lage und Art aller Singularitäten der Funktion*

$$f(z) = (z^2 + 2) sin \frac{1}{z - 1}$$

und entwickeln Sie f um diese Singularitäten in eine Laurentreihe. (H 98, T 3, A 5)

Aufgabe 2.45 *Sei* $D := \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0, z \neq 1\}$, *und sei*

$$f : D \to \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)}.$$

a) *Berechnen Sie die Laurent-Reihe von* f *in* $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$.
b) *Berechnen Sie die Laurent-Reihe von* f *in* $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$.
(F 99, T 2, Teil von A 2)

Aufgabe 2.46 *Gegeben ist die Funktion*

$$f(z) := z\cos\left(\frac{1}{z-1}\right).$$

a) *Bestimmen Sie die Laurent-Entwicklung von* f *um den Punkt* 1.
b) *Um welche Art von Singularität handelt es sich an der Stelle* 1*?*
(H 99, T 1, Teil von A 2)

Aufgabe 2.47 *Bestimmen Sie Lage, Art und Ordnung der Singularitäten der Funktion* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, *gegeben durch*

$$f(z) := \frac{1}{e^{z^2} - 1}.$$

(H 99, T 3, A 2)

2.4 Der Residuensatz

Definition 2.5 *Die Funktion* f *habe eine isolierte Singularität bei* $z_0 \in \mathbb{C}$ *mit der Laurent-Entwicklung*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

auf einem Ringgebiet $0 < |z - z_0| < R$. *Dann heißt der Koeffizient* a_{-1} *das* Residuum $Res(f, z_0)$ *von* f *in* z_0.

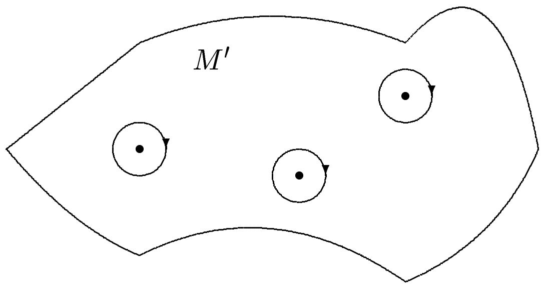
Das Residuum heißt so, weil es beim Integrieren übrig bleibt: Für $0 < r < R$ gilt

$$\oint\limits_{|z-z_0|=r} f(z)dz = \oint\limits_{|z-z_0|=r} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-z_0)^k dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \oint\limits_{|z-z_0|=r} (z-z_0)^k dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta_{k,-1} \cdot 2\pi i = a_{-1} \cdot 2\pi i.$$

Diese einfache Tatsache, in mancherlei Form verkleidet, heißt Residuensatz. Für die meisten Zwecke genügt dieser Satz in der folgenden Form:

Satz 2.15 (Residuensatz) *Die Menge $M \subset \mathbb{C}$ sei beschränkt mit stückweise glattem Rand. Die Funktion f sei holomorph, mit höchstens isolierten Singularitäten, auf einer Umgebung von $\bar{M}$. Auf ∂M liege keine der Singularitäten. Dann gilt*

$$\oint_{\partial M} f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{z_0 \in M} Res(f, z_0).$$



Beweis. Da die isolierten Singularitäten isoliert liegen, gibt es in der kompakten Menge $\bar{M}$ nur endlich viele davon, etwa $z_1, ..., z_n$. Seien $K_1, ..., K_n$ kleine Kreisscheiben um $z_1, ..., z_n$ und M' das Gebiet $M \setminus (K_1 \cup ... \cup K_n)$. Da f auf einer Umgebung von M' holomorph ist, gilt der Cauchysche Integralsatz

$$\oint_{\partial M'} f(z)dz = 0.$$

Da $\partial M' = \partial M + \sum_1^n \partial K_i$ ist, die Kreise negativ orientiert, bedeutet dies

$$\oint_{\partial M} f(z)dz = \oint_{\partial M'} f(z)dz + \sum_1^n \oint_{\partial K_i} f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_1^n Res(f, z_i).$$

□

Das Residuum läßt sich besonders einfach ausrechnen, wenn die Funktion einen einfachen Pol hat. Sei etwa

$$f(z) = \frac{g(z)}{z - z_0}, \quad \text{mit } g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k$$

holomorph bei z_0. Die Laurent-Entwicklung von f ist dann

$$f(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} b_{k+1} (z - z_0)^k$$

und

$$Res(f, z_0) = b_0 = g(0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

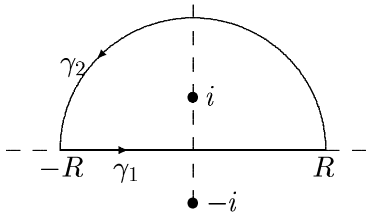
Wenn f in der Form $f = p/q$ vorliegt und z_0 eine einfache Nullstelle von q ist (d.h. $q(z_0) = 0$, $q'(z_0) \neq 0$), dann können wir das umschreiben

$$Res(\frac{p}{q}, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{q(z) - q(z_0)} p(z) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

Der Residuensatz hat eine große Zahl von Anwendungen. Meist wird die Berechnung eines Wegintegrals auf die Berechnung von Residuen zurückgeführt. Ein typisches Beispiel ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} \frac{dz}{1 + z^2}.$$

Mit γ bezeichen wir den geschlossenen Weg, der aus dem Intervall $\gamma_1 = [-R, R] \subset \mathbb{R}$ und dem Halbkreis $\gamma_2(t) := Re^{ti}, 0 \leq t \leq 2\pi$, zusammengesetzt ist. Für $R > 1$ enthält dieser Weg die isolierte Singularität $z_0 = i$ von $f(z) = 1/(1+z^2)$. Deswegen ist



$$\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2} = 2\pi i \cdot Res(\frac{1}{1+z^2}, i) = 2\pi i \cdot \lim_{z \to i} \frac{z-i}{(z+i)(z-i)} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi$$

unabhängig von R. Das interessiert uns aber nicht, sondern

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dz}{1+z^2} = \lim_{R\to\infty} \oint_{\gamma_1} \frac{dz}{1+z^2} - \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} \frac{dz}{1+z^2}.$$

Glücklicherweise wird

$$\left| \int_{\gamma_2} \frac{dz}{1+z^2} \right| \leq R\pi \cdot \max_{|z|=R} \frac{1}{|1+z^2|} \leq R\pi \cdot \frac{1}{R^2-1} \to 0 \text{ für } R \to \infty.$$

Deswegen ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{1+z^2} = \pi.$$

Wer den Arcustangens kennt, wußte das Ergebnis natürlich schon.

Als weiteres Beispiel betrachten wir das *Fourier–Integral*

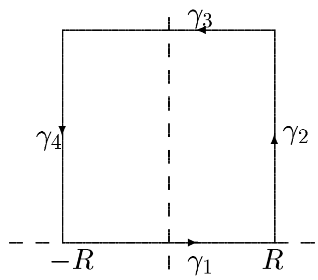
$$\mathcal{F}[g](\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{i\omega x} dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} g(x) e^{i\omega x} dx, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

einer Funktion g. Ist etwa g holomorph auf $\mathbb{C}$ bis auf endlich viele isolierte Singularitäten, keine davon auf der reellen Achse, mit $\lim_{|z|\to\infty} g(z) = 0$, so ist dies Integral definiert und es gilt

$$\mathcal{F}[g](\omega) = \begin{cases} 2\pi i \cdot \sum_{Im(z_0)>0} Res(g(z)e^{i\omega z}, z_0) & (\omega > 0), \\ -2\pi i \cdot \sum_{Im(z_0)<0} Res(g(z)e^{i\omega z}, z_0) & (\omega < 0). \end{cases}$$

Beweis. Wir betrachten nur den Fall $\omega > 0$. Dazu integrieren wir über den Rand eines Quadrates mit der Seitenlänge $2R$, der aus den vier Wegen

$$\begin{array}{rcll} \gamma_1(t) & = & t, & -R \leq t \leq R \\ \gamma_2(t) & = & R + it, & 0 \leq t \leq 2R \\ \gamma_3(t) & = & R - t + 2iR, & 0 \leq t \leq 2R \\ \gamma_4(t) & = & -R + i(2R - t) & 0 \leq t \leq 2R \end{array}$$



besteht. Die Behauptung folgt aus dem Residuensatz, wenn wir

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_k} g(z) e^{i\omega z} dz = 0 \quad \text{ für } k = 2, 3, 4$$

zeigen können. Behandeln wir zunächst γ_2:

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_2} g(z)e^{i\omega z}dz\right| &= \left|\int_0^{2R} g(R+it)e^{i\omega(R+it)}dt\right| \\
&\leq \int_0^{2R} |g(R+it)|e^{-\omega t}dt \\
&\leq \max_{0\leq t\leq 2R} |g(R+it)| \cdot \int_0^{2R} e^{-\omega t}dt \\
&= \max_{0\leq t\leq 2R} |g(R+it)| \cdot \frac{1}{\omega}(1-e^{-\omega\cdot 2R}) \\
&\to 0
\end{aligned}$$

für $R\to\infty$, weil $|g(z)|\to 0$ für $|z|\to\infty$ und $\omega\geq 0$.

Das Integral über γ_4 geht ganz analog. Bleibt noch γ_3. Dieses Integral ist

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_3} g(z)e^{i\omega z}dz\right| &= \left|\int_0^{2R} g(R-t+2iR)e^{i\omega(R-t+2iR)}dt\right| \\
&\leq \int_0^{2R} |g(R-t+2iR)|e^{-2\omega R}dt \\
&\leq \max_{0\leq t\leq 2R} |g(R-t+2iR)| \cdot 2R\cdot e^{-2\omega R} \\
&\to 0
\end{aligned}$$

für $R\to\infty$.

Die Funktion $g(x) = 1/(1+x^2)$ erfüllt beispielsweise die Voraussetzungen. Ihr Fourierintegral für $\omega > 0$ ist also

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[\frac{1}{1+x^2}](\omega) &= 2\pi i\cdot Res(\frac{e^{i\omega z}}{1+z^2}, i) \\
&= 2\pi i\cdot\frac{e^{-\omega}}{2i} \\
&= e^{-\omega}\pi.
\end{aligned}$$

Aber der Residuensatz wird auch in der anderen Richtung angewendet: Sei beispielsweise f eine Funktion auf einer Umgebung von $\bar{M}$, die in M höchstens Pole besitzt. Bei einem Pol z_0 der Ordnung m ist

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + ... \\
f'(z) &= \frac{-m\cdot a_{-m}}{(z-z_0)^{m+1}} + ... \\
\frac{f'}{f}(z) &= \frac{-m}{z-z_0} + ... \\
Res(\frac{f'}{f}, z_0) &= -m
\end{aligned}$$

während in einer Nullstelle z_0 der Ordnung m gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= a_m(z-z_0)^m + \ldots \\ f'(z) &= m \cdot a_m(z-z_0)^{m-1} + \ldots \\ \frac{f'}{f}(z) &= \frac{m}{z-z_0} + \ldots \\ Res(\frac{f'}{f}, z_0) &= m. \end{aligned}$$

Deswegen folgt aus dem Residuensatz

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial M} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P,$$

Wo N die Anzahl der Nullstellen von f und P die Anzahl der Polstellen von f in M ist, beide mit Vielfachheiten m gezählt.

Die folgende Aussage ist der Lieblingssatz der Aufgabensteller für Analysis im Hauptexamen.

Satz 2.16 (von Rouché) *Die Funktionen f und g seien holomorph auf einer Umgebung der kompakten Menge $M \subset \mathbb{C}$. Auf dem Rand von M gelte*

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)|, \quad (z \in \partial M).$$

Dann haben f und g im Inneren von M die gleiche Anzahl von Nullstellen.

Beweis. Wir betrachten die meromorphe Funktion

$$h(z) := \frac{f(z)}{g(z)}.$$

Wegen der Voraussetzung kann g keine Nullstelle auf ∂M haben. Es gibt deswegen eine offenen Umgebung $U \subset \mathbb{C}$ von ∂M, auf der h holomorph ist. Aus der Voraussetzug folgt weiter

$$|h(z) - 1| < 1, \quad (z \in \partial M).$$

Wir können deswegen auch $|h(z) - 1| < 1$ auf ganz U annehmen. Damit liegt $h(U)$ ganz in der offenen Kreisscheibe um 1 vom Radius 1. Dort gibt es einen Zweig des Logarithmus. Also ist $ln(h)$ wohldefiniert auf U und dort eine Stammfunktion von

$$\frac{h'}{h} = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}.$$

Auch f kann auf ∂M keine Nullstelle haben. Es folgt

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial M} \frac{h'(z)}{h(z)} dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial M} \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial M} \frac{g'(z)}{g(z)} dz.$$

Nach der letzten Bemerkung messen diese beiden Integrale aber gerade die Anzahlen der Nullstellen von f und g im Inneren von M. $\square$

Aufgabe 2.48 *Es sei* $1 < r \in \mathbb{R}$. *Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes das Integral*

$$\oint_{|z|=r} \frac{dz}{z^5(z^4-1)}.$$

Aufgabe 2.49 *Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes das Integral*

a) $\oint \frac{e^{\pi z}}{1+z^2} dz$ *über die (mathematisch positiv orientierten) Kreise* $|z+i| = 1$ *und* $|z+i| = 3$.

b) $\oint \frac{z}{(z+1)^2(z+2)} dz$ *über die (mathematisch positiv orientierten) Kreise* $|z| = 3$ *und* $|z| = \frac{3}{2}$.

Aufgabe 2.50 *Es sei* $0 < b < a \in \mathbb{R}$. *Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes das Integral*

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + b\cos(t)}.$$

Aufgabe 2.51 *Zeigen Sie für* $0 < p < 1$, $p \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2p\cos(t) + p^2} = \frac{2\pi}{1-p^2}$$

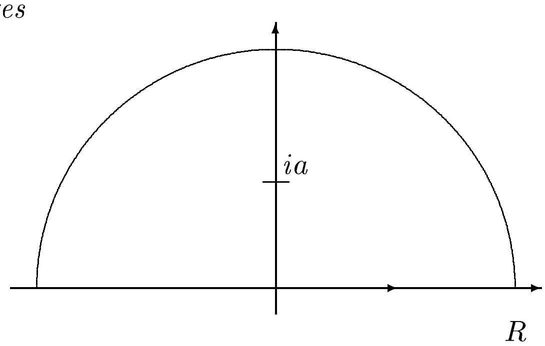
mit Hilfe der Substitution $e^{it} = z$.

Aufgabe 2.52 *Es sei* $0 < a < R \in \mathbb{R}$ *und* γ *der Weg in nebenstehender Zeichnung. Zeigen Sie mit Hilfe des Residuensatzes*

$$\oint_\gamma \frac{e^{iz}}{z^2+a^2} dz = \frac{\pi e^{-a}}{a}$$

und folgern Sie daraus

$$\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{x^2+a^2} dx = \frac{\pi e^{-a}}{2a}.$$



Aufgabe 2.53 *Es sei* $1 < R \in \mathbb{R}$ *und* γ *der Weg aus Aufgabe 2.52. Zeigen Sie mit Hilfe des Residuensatzes*

$$\oint_\gamma \frac{z e^{iz}}{z^2+1} dz = \frac{i\pi}{e}$$

und folgern Sie daraus

$$\int_0^\infty \frac{x\sin(x)}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2e}.$$

Aufgabe 2.54 *Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes die Integrale*

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^4} dx \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{1+x^4} dx.$$

Aufgabe 2.55 *Zeigen Sie für* $0 < a \in \mathbb{R}$

$$\int_0^\infty \frac{cos(ax)}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}e^{-a}.$$

Aufgabe 2.56 *Man berechne*

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^5}$$

mit dem Residuensatz. (Hilfe: $e^{4\pi i/5} - e^{6\pi i/5} = 2isin\frac{\pi}{5}$*).* (F 90, T 2, A 2)

Aufgabe 2.57 *Sei* $f(z) := \frac{1}{1+z^2}$ *für* $z \in \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$*. Man bestimme*

$$\int_{\gamma_k} f(\xi)d\xi$$

für die Wege $\gamma_k(t) := \exp(i\frac{k\pi}{2}) + exp(2\pi it)$, $t \in [0,1]$, $k = 1,2,3,4,$ *und für* $\gamma_5(t) := 2exp(2\pi it)$*.* (H 90, T 1, A 2)

Aufgabe 2.58 *Man berechne*

$$\int_0^\infty \frac{x^n}{x^m+1}dx$$

für $m \geq n+2 \geq 2$ *nach dem Residuenkalkül mit Hilfe eines Integrationsweges, der nur einen der Pole des Integranden umläuft.* (H 90, T 2, A 3)

Aufgabe 2.59 *Betrachten Sie* $f(z) = 1/(z^4+z^2+1)$*. Bestimmen Sie die Pole von* f *im Quadranten* $Re\, z > 0$, $Im\, z > 0$ *und ihre Residuen. Zeigen Sie:*

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+x^2+1} - i\int_0^\infty \frac{dy}{y^4-y^2+1} = \frac{\pi}{6}\sqrt{3} - i\cdot\frac{\pi}{2}.$$

(H 90, T 3, A 3)

Aufgabe 2.60 a) *Man zeige: Ist* R *eine rationale Funktion auf* $\mathbb{C}$ *und* Γ *ein geschlossener Weg in* $\mathbb{C}$ *auf dem keine Pole von* R *liegen, dann wird durch*

$$f(z) := \int_\Gamma e^{z\zeta}R(\zeta)d\zeta$$

eine ganze Funktion f *gegeben. Welche Form haben* f' *und* f''*?*
b) *Es sei* $R(\zeta) := \frac{1}{(\zeta-1)(\zeta-2)}$*. Man zeige, dass* f *die Differentialgleichung*

$$f''(z) - 3f'(z) + 2f(z) = 0$$

auf $\mathbb{C}$ *erfüllt.*
c) *Für die in b) angegebene Funktion* R *und für zwei passend gewählte Wege* Γ_1, Γ_2 *berechne man zwei über* $\mathbb{C}$ *linear unabhängige Funktionen* f_1, f_2 *mit dem Residuensatz.*
(H 91, T 3, A 4)

Aufgabe 2.61 *Gegeben seien ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ und ein Kreis $K \subset G$. Seien weiter $f, g : G \to \mathbb{C}$ holomorph mit $|g(z)| \leq |f(z)|$ für $z \in \partial K$. Nach dem Satz von Rouché haben dann $f + g$ und f bekanntlich gleich viele Nullstellen in K.*
a) *Man finde mit Hilfe dieses Satzes den kleinsten Kreis mit ganzzahligem Radius und Mittelpunkt 0, in dem alle Nullstellen des Polynoms $P(z) = z^7 - 5z^3 + 7$ liegen.*
b) *Sei $P(z)$ wie in Teilaufgabe a). Man integriere die Funktion $1/P(z)$ entlang der Kurve $\gamma : \{z : z = 3i + t, t \in \mathbb{R}\}$.*
(F 92, T 3, A 4)

Aufgabe 2.62 *Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytisch in $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $f'(z_0) \neq 0$, und sei $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ meromorph mit einem Pol erster Ordnung in $w = f(z_0)$ mit Residuum A. Man berechne das Residuum von $g \circ f$ in z_0.* (H 92, T 3, A 3)

Aufgabe 2.63 *Sei $0 < \alpha < 1$. Integrieren Sie für $R > 0$ die Funktion $f(z) = e^{az}(1 + e^z)^{-1}$ über den Rand des Rechtecks mit den Ecken $\pm R, \pm R + 2\pi i$ und zeigen Sie so, dass*

$$\lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

ist. (F 93, T 1, A 6)

Aufgabe 2.64 *Man bestimme alle Singularitäten der durch*

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z}{z^2 + 4}$$

definierten Funktion f in $\mathbb{C}$ und berechne die zugehörigen Residuen. Für welche einfach geschlossenen Wege γ in $\mathbb{C}$, die nicht über die Singularitäten laufen, ist $\int_\gamma f(z)dz = 0$? (F 93, T 3, A 3)

Aufgabe 2.65 *Bestimme die Anzahl der Nullstellen, mit Vielfachheit gezählt, von*

$$3z^4 - 7z + 2 \quad \text{für} \quad 1 < |z| < 3/2.$$

(H 93, T 1, A 2)

Aufgabe 2.66 *Berechnen Sie folgende Integrale mit Hilfe des Residuensatzes:*

$$\int_{\Gamma_1} \frac{e^z}{z} dz \quad \text{und} \quad \int_{\Gamma_2} \frac{1}{(z-2)^2(z-1)^3} dz,$$

mit $\Gamma_1 : [0, 1] \ni t \mapsto e^{2\pi it}$ und $\Gamma_2 : [0, 1] \ni t \mapsto 3e^{2\pi it}$. (H 93, T 3, A 3)

Aufgabe 2.67 **b)** *Man bestimme die Nullstellenmenge der Funktion $f(z) = e^{1/z} - 1$, $z \in G := \mathbb{C} \setminus \{0\}$.*
c) *Man berechne das Kurvenintegral*

$$\int_\gamma \frac{z^{-2} e^{1/z}}{e^{1/z} - 1} dz$$

für die Kurve $\gamma(t) = i + \frac{7}{8} e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. (F 94, T 1, Teil von A 3)

Aufgabe 2.68 *Sei* $a > 0$. *Berechnen Sie*

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}$$

mit Hilfe des Residuensatzes. (F 94, T 3, A 2)

Aufgabe 2.69 *Man berechne*

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(5 - 3sin\,t)^2}.$$

(H 94, T 1, A 1)

Aufgabe 2.70 *Man zeige: Alle Wurzeln der Gleichung* $z^7 - 5z^3 + 12 = 0$ *liegen im Ringgebiet zwischen den Kreislinien*

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \text{ und } \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}.$$

(H 94, T 1, Teil von A 3)

Aufgabe 2.71 *Sei* $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{1, 2\}$. *Welche Werte kann* $\int_W f(z)dz$ *annehmen, wenn* W *irgend ein geschlossener Weg in* $\mathbb{C}$ *ist, der nicht durch* $z = 1$ *oder* $z = 2$ *läuft?* (H 94, T 3, A 2)

Aufgabe 2.72 *Berechnen Sie*

$$\int_{S_7^+} \frac{1 + z}{1 - cos\,z} dz,$$

wobei S_7^+ *den im mathematisch positiv durchlaufenen Kreis* $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 7\}$ *bezeichnet.* (F 95, T 2, A 2)

Aufgabe 2.73 *Berechnen Sie für den im positiven Sinn durchlaufenen Kreis* $S_2^+ := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ *die folgenden Integrale:*

$$\int_{S_2^+} \frac{sin(e^z)}{z} dz, \quad \int_{S_2^+} \frac{e^z}{z(z-1} dz \quad \text{und} \quad \int_{S_2^+} \frac{sin\,z}{z^4} dz.$$

(F 95, T 3, A 3)

Aufgabe 2.74 *Sei* $G \subset \mathbb{C}$ *ein beschränktes Gebiet und seien* f *und* f_n *stetige Funktionen auf* $\bar{G}$, *die auf* G *holomorph sind. Die Funktion* f *sei nicht konstant. Ferner konvergiere die Folge* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *auf dem Rand* $\partial G := \bar{G} \setminus G$ *gleichmäßig gegen* f. *Zeigen Sie: Hat* f *eine Nullstelle* $z_0 \in G$, *so gibt es ein* $n_0 \in \mathbb{N}$, *so dass auch* f_n *für jedes* $n \geq n_0$ *eine Nullstelle besitzt. (Hinweis: Satz von Rouché.)* (F 95, T 3, A 5 a))

Aufgabe 2.75 **a)** *Es sei* $f(z) = (z - \alpha)(z - \bar{\alpha})$ *mit* $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \notin \mathbb{R}$. *Geben Sie eine Formel für das Residuum von* $1/f(z)^3$ *an der Stelle* $z = \alpha$ *an.*
b) *Berechnen Sie das Integral*

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2 - 2x + 10)^3}.$$

(H 95, T 1, A 1)

Aufgabe 2.76 *Berechnen Sie* **a)** $\int_{|z|=1} \frac{z^2}{\sin z} dz$, **b)** $\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2} dz$, **c)** $\int_{|z|=1} z^2 \sin\frac{1}{z} dz$.
(H 95, T 2, A 3)

Aufgabe 2.77 *Sei* $A \subset \mathbb{C}$ *endlich und* $f : \mathbb{C} \setminus A \to \mathbb{C}$ *holomorph. Man zeige*
a) *Es gibt ein* $r > 0$, *so dass* $h : K_r(0) \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $h(z) := f(\frac{1}{z})/z^2$, *holomorph ist.*
b) $Res(h; 0) = \sum_{a \in A} Res(f, a)$.
c) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{6z^6 + 5}{4z^7 + 1} dz = 3\pi i$ *mit* Γ *repräsentiert durch* $[0, 2\pi] \ni t \mapsto e^{it} \in \mathbb{C}$.
(F 96, T 2, A 2)

Aufgabe 2.78 *Berechnen Sie das Integral*

$$\int_{|z|=r} \frac{dz}{(e^z - 1)(e^z - i)}$$

längs jeder positiv orientierten Kreislinie um Null mit dem Radius $r < 2\pi + 1$, *auf der keine Polstelle des Integranden liegt.* (F 97, T 1, A 1)

Aufgabe 2.79 *Formulieren und beweisen Sie den Satz von Rouché (Stichworte: Null- und Polstellenzählendes Integral, stetige Deformation, Ganzzahligkeit) und erläutern Sie seine Anwendung anhand der Frage: Wieviele Nullstellen hat das Polynom* $p(z) = z^5 - 2z^3 + 3z^2 - z + 1$ *in* $B_2(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$*?* F 97, T 1, A 5)

Aufgabe 2.80 *Berechnen Sie das Integral*

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \sin\theta}.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{2dz}{z^2 + 4iz - 1},$$

wobei das Umlaufintegral den Einheitskreisrand im mathematisch positiven Sinne einmal durchläuft.
(H 97, T 1, A 2)

Aufgabe 2.81 *Berechnen Sie das Integral* $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^2 - 1}{z} dz$, *wobei* γ *gegeben ist durch die (jeweils positiv orientierte) Kurve*
a) $|z - 2| = 1$;
b) $|z| = 1$ *für* $Im\, z \geq 0$, $2 Im\, z = (Re\, z)^2 - 1$ *für* $Im\, z \leq 0$.
(F 98, T 2, A 4)

Aufgabe 2.82 *Seien* $G \subset \mathbb{C}$ *ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit* $0 \in G$, Γ *ein geschlossener Weg in* G, *der* 0 *einmal im positiven Sinn umläuft, und* $f, g : G \to \mathbb{C}$ *holomorphe Funktionen. Auf* Γ *sei* $g(z) \neq 0$, *und im Inneren von* Γ *habe* g *die einfachen Nullstellen* $a_1, ..., a_n$, *die alle von* 0 *verschieden seien. Welchen Wert hat unter diesen Voraussetzungen das Integral*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{g(z)} dz \quad ?$$

(F 99, T 1, A 3)

Aufgabe 2.83 *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ und $f : D \to \mathbb{C}$ wie in Aufgabe 2.45*
a) *Besitzt f eine Stammfunktion $F : D \to \mathbb{C}$?*
b) *Berechnen Sie*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1/2}\frac{3z^2-2z}{z^2(z-1)}dz \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1/2}\frac{3z^3-2z^2}{z^2(z-1)}dz.$$

(F 99, T 2, Teil von A 2)

3 Konvergente Folgen holomorpher Funktionen

3.1 Kompakte Konvergenz

Der Begriff der *gleichmäßigen Konvergenz* ist für holomorphe Funktionen genau derselbe, wie für reell-wertige Funktionen:

Definition 3.1 *Es seien $U \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge und $f_n : U \to \mathbb{C}$ eine Folge komplex-wertiger Funktionen. Die Funktionenfolge f_n konvergiert auf U* gleichmäßig *gegen eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$, wenn zu jedem $0 < \epsilon \in \mathbb{R}$ ein $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so, dass für alle $n \geq N(\epsilon)$ und für alle $z \in U$ gilt:*

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon.$$

Mit dem Begriff der Funktionen-Norm

$$||f||_U := \begin{cases} \sup_{z \in G} |f(z)| & \text{falls } |f| \text{ beschränkt auf } U \\ \infty & \text{falls } |f| \text{ nicht beschränkt auf } U \end{cases}$$

kann man diese gleichmäßige Konvergenz etwas kürzer schreiben:

$$f_n \to f \text{ gleichmäßig auf } U \quad \Leftrightarrow \quad ||f_n - f||_U \to 0.$$

Satz 3.1 *Die Menge $U \subset \mathbb{C}$ sei offen und die Funktionen $f_n, n \in \mathbb{N}$, seien holomorph auf U. Konvergiert die Funktionenfolge f_n gleichmäßig auf U gegen eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$, so ist auch diese Grenzfunktion wieder holomorph.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass f auf jeder offenen Kreisscheibe $K \subset U$ mit $\bar{K} \subset U$ holomorph ist. Nun ist aber für jedes $z \in K$

$$\begin{aligned} f(z) &= \lim_{n\to\infty} f_n(z) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial K} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta & \text{(Cauchysche Integralformel für } f_n \text{)} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial K} \frac{\lim f_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta & \text{(gleichmäßige Konvergenz)} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial K} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \end{aligned}$$

Für die Grenzfunktion f gilt also auch die Cauchysche Integralformel. Wie im Beweis von Satz 1.13 folgt daraus, dass auch die Grenzfunktion holomorph ist. □

Potenzreihen oder Laurent-Reihen konvergieren auf ihrem Konvergenzgereich i.A. *nicht* gleichmäßig. Trotzdem ist ihr Grenzwert wieder holomorph. Die Konvergenz ist nämlich gleichmäßig auf jeder echt kleineren Kreisscheibe, bzw. auf jedem Kreisring, dessen Abschluss noch im Konvergenzbereich liegt. Anders ausgedrückt: Auf jeder kompakten Teilmenge des Konvergenzgebiets ist die Konvergenz gleichmäßig.

Definition 3.2 *Eine Folge von Funktionen $f_n : U \to \mathbb{C}$ konvergiert* kompakt *gegen eine Funktion $f : U \to C$, wenn auf jeder kompakten Teilmenge $K \subset U$ die Folge f_n gleichmäßig gegen f konvergiert. Oder mit der Funktionen-Norm ausgedrückt: Für jede kompakte Teilmenge $K \subset U$ ist*

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_K = 0.$$

Satz 3.2 (Eigenschaften der kompakten Konvergenz) *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Die Folge von Funktionen $f_n : U \to \mathbb{C}$ konvergiere kompakt gegen die Funktion $f : U \to \mathbb{C}$. Dann gilt*

i) $f = \lim f_n$ ist holomorph.

ii) Die Folge der Ableitungen f_n' konvergiert kompakt gegen f'.

iii) Sei U zusammenhängend. Ist $f_n(z) \neq 0$ für alle $z \in U$ und $n \in N$, so ist auch $f(z) \neq 0$ für alle $z \in U$ oder $f(z) \equiv 0$ identisch auf U.

Beweis. i) ist schon in Satz 3.1 bewiesen worden.

ii) Es genügt, gleichmäßige Konvergenz $f_n' \to f'$ zu zeigen auf jeder Kreisscheibe K mit $\bar{K} \subset U$. Für alle $z \in K$ ist aber

$$|f_n'(z) - f'(z)| = \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial K} \left| \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)|}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| \leq \frac{L(\partial K)}{2\pi} \cdot \frac{1}{dist(z, \partial K)^2} \cdot \max_{\zeta \in \partial K} |f_n(\zeta) - f(\zeta)|.$$

Auf jeder echt kleineren Kreisscheibe $K' \subset$ ist

$$\frac{L(\partial K)}{2\pi} \frac{1}{dist(z, \partial K)^2}$$

beschränkt. Wegen $||f_n - f||_K \to 0$ konvergiert also $||f_n' - f'|| \to 0$ für $n \to \infty$ auf K'.

iii) Sei f nicht identisch $= 0$, aber $f(z_0) = 0$. Weil die Nullstellen von f diskret liegen, gilt für alle kleinen $r > 0$, dass $f(z_0 + re^{i\varphi}) \neq 0$. Ein solches r mit $|f(z_0 + re^{i\varphi})| \geq c > 0$ werde festgehalten. Weil $f_n \to f$ auf $|z - z_0| \leq r$ gleichmäßig konvergiert, ist $|f_n(z_0 + re^{i\varphi}| \geq c/2$ für $n \geq n_0$. Nun konvergiert $f_n(z_0) \to f(z_0) = 0$ und deswegen $1/|f_n(z_0)| \to \infty$. Weil f_n keine Nullstellen hat, ist $1/f_n$ holomorph. Nach dem Maximumprinzip muss dann auch

$$\max_{|z - z_0| = r} \frac{1}{|f_n(z)|} \to \infty$$

gehen, im Widerspruch zu $|1/f(z)| \leq 2/c$. □

Im Reellen ist ein großer Unterschied zwischen punktweiser und gleichmäßiger Konvergenz. Der ist im Komlexen nicht so groß.

Definition 3.3 *Die Folge f_n von Funktionen $f_n : U \to \mathbb{C}$ heißt gleichmäßig beschränkt, wenn $C(K) \in \mathbb{R}$ existiert mit*

$$||f_n||_K \leq C(K)$$

für alle n.

Satz 3.3 (Kriterium für kompakte Konvergenz) *Die Folge f_n von holomorphen Funktionen $f_n : U \to \mathbb{C}$ konvergiert genau dann kompakt auf U gegen die Funktion $f : U \to \mathbb{C}$, wenn*
i) $f_n \to f$ punktweise auf U konvergiert, und
ii) die Folge f_n auf jedem Kompaktum $K \subset U$ gleichmäßig beschränkt ist.

Beweis. "$\Rightarrow$": Wenn die Folge $f_n \to f$ kompakt konvergiert, dann auch punktweise. Sei $K \subset U$ kompakt und $C'(K) := \| f \|_K$. Für $n \geq n_0$ ist dann

$$\| f_n \|_K \leq \| f \|_K + \| f_n - f \|_K \leq C'(K) + 1.$$

Und mit

$$C(K) := max\{C'(K)+1, \| f_1 \|_K, ..., \| f_{n_0-1} \|_K\}$$

gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $\| f_n \|_K \leq C(K)$ ist.

"$\Leftarrow$": Wir setzen $c_{m,n}(K) := \| f_m - f_n \|_K$. Die gleichmäßige Konvergenz auf K folgt aus dem Cauchy-Kriterium, wenn wir zeigen können: $c_{m,n}(K) \leq \epsilon$ für $m, n \geq N(\epsilon, K)$.

Falls diese Bedingung aber nicht erfüllt ist, gibt es ein Kompaktum $K \subset U$, ein $\epsilon > 0$, und Teilfolgen m_i, n_i so, dass für alle i

$$\| f_{m_i} - f_{n_i} \|_K \geq \epsilon.$$

Weil K kompakt ist, gibt es ein $z_i \in K$ mit

$$|f_{m_i}(z_i) - f_{n_i}(z_i)| = \| f_{m_i} - f_{n_i} \|_K .$$

Nachdem wir zu einer Teilfolge übergehen, können wir o.B.d.A. annehmen, dass $z_i \to z_0 \in K$ konvergiert für $i \to \infty$. Dann ist also

$$\begin{aligned} \epsilon \leq |f_{m_i}(z_i) - f_{n_i}(z_i)| &= \left| \int_{z_0}^{z_i} (f'_{m_i} - f'_{n_i}) dz + f_{m_i}(z_0) - f_{n_i}(z_0) \right| \\ &\leq \underbrace{|z_i - z_0|}_{\to 0} \cdot \| f'_{m_i} - f'_{n_i} \|_K + \underbrace{|f_{m_i}(z_0) - f_{n_i}(z_0)|}_{\to 0} . \end{aligned}$$

Mit dem folgenden Lemma führt dies zu einem Widerspruch:

Satz 3.4 (Lemma) *Ist die Folge $f_n : U \to \mathbb{C}$ holomorpher Funktionen gleichmäßig beschränkt auf jeder kompakten Menge $K \subset U$, so gilt dies auch für die Folge f'_n ihrer Ableitungen.*

Beweis. Es genügt, die gleichmäßige Beschränktheit der f'_n zu zeigen auf jeder kompakten Kreisscheibe $K_r \subset U$ vom Radius r. K_r liegt aber konzentrisch in einer etwas größeren Kreisscheibe $K_R \subset U$, $R > r$. Für alle $z \in K_r$ ist

$$|f'_n(z)| = \frac{1}{2\pi} \left| \oint_{\partial K_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| \leq \frac{R}{(R-r)^2} C(K_R).$$

□

Satz 3.5 (von Montel) *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Die Folge von holomorphen Funktionen $f_n : U \to \mathbb{C}$ sei gleichmäßig beschränkt auf Kompakta. Dann gibt es eine Teilfolge $(f_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$, die auf U kompakt konvergiert.*

Beweis. Zunächst wählen wir eine Folge (z_ν) von Punkten $z_\nu \in U$, die in U dicht liegt. Dazu kann man etwa die Menge aller Punkte $c = a + ib$ mit rationalem Realteil $a \in \mathbb{Q}$ und Imaginärteil $b \in \mathbb{Q}$ abzählen und als Folge (c_μ) hinschreiben. Und als Folge (z_ν)nimmt man die Teilfolge (c_{μ_ν}) derjenigen c_μ, welche in U liegen.

Weil die Folge der Zahlen $f_n(z_1)$ beschränkt ist, gibt es nach Weierstraß eine Teilfolge $f_{n_{i_1}}$ derart, dass die Folge der Funktionswerte $f_{n_{i_1}}(z_1)$ konvergiert. Und von dieser Folge gibt es eine Teilfolge $f_{n_{i_2}}$ derart, dass auch die Folge der Funktionswerte $f_{n_{i_2}}(z_2)$ konvergiert. So macht man weiter, und findet iterativ Teilfolgen $f_{n_{i_k}}$ so, dass die Folgen der Werte

$$f_{n_{i_k}}(z_1), ..., f_{n_{i_k}}(z_k)$$

konverieren. Mit dem üblichen Diagonalfolge-Trick geht man über zur Teilfolge

$$g_1 := f_{n_{i_1}} \text{ mit } i_1 = 1, \quad g_2 := f_{n_{i_2}} \text{ mit } i_2 = 2, \quad ...$$

die in allen Punkten z_ν konvergiert, weil sie Teilfolge aller Folgen $f_{n_{i_\nu}}$ ist.

Wegen Satz 3.3 genügt es zu zeigen, dass diese Teilfolge g_k auf U punktweise konvergiert. Betrachten wir einen beliebigen Punkt $z_0 \in U$. Sei $K \subset U$ eine kompakte Kreisscheibe um diesen Punkt. Mit der Folge g_k ist auch die Folge der Ableitungen g'_k auf K beschränkt (Satz 3.4). Sei etwa $|g'_k(z)| \leq C'$ für alle $z \in K$. Für alle $z \in K$ ist also $|g_k(z_0) - g_k(z)| \leq |z_0 - z| \cdot C'$.

Sei nun $0 < \epsilon \in \mathbb{R}$ beliebig vorgegeben. Wir wählen ein z_ν aus unserer abzählbaren Folge mit $|z_0 - z_\nu| < \epsilon/3C'$. Und wegen der Konvergenz im Punkt z_ν gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $m, n \geq N$ gilt $|g_m(z_\nu) - g_n(z_\nu)| < \epsilon/3$. Insgesamt ist dann für $m, n \geq N$

$$|g_m(z_0) - g_n(z_0)| \leq \underbrace{|g_m(z_0) - g_m(z_\nu|}_{\leq |z_0 - z_\nu| \cdot C'} + \underbrace{|g_m(z_\nu) - g_n(z_\nu)|}_{<\epsilon/3} + \underbrace{|g_n(z_\nu) - g_n(z_0)|}_{\leq |z_0 - z_\nu| \cdot C'} < \epsilon.$$

□

Aufgabe 3.1 *Sei* $E = \{z \in \mathbb{C} | \, |z| < 1\}$. *Sei* $f : E \to \mathbb{C}$ *holomorph,* $f(0) = 0$. *Zeigen Sie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(z^n)$$

konvergiert kompakt auf E. *Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass diese Reihe i.a. nicht gleichmäßig konvergiert.* (H 91, T 1, A 2b)

Aufgabe 3.2 *Sei* $\{a_n | \, n \in \mathbb{N}\}$ *eine Folge komplexer Zahlen. Gibt es dann stets eine ganze Funktion* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *mit* $f(n) = a_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$? *Hinweis: Konstruiere* f *als Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(z)$ *mit Polynomen* ϕ_n *der Gestalt*

$$\phi_n(z) = b_n \cdot (z-1) \cdot ... \cdot (z-n+1) \cdot (z/n)^k.$$

(H 91, T 1, A 3)

Aufgabe 3.3 *Man zeige, dass durch*

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} exp(k^2 z)$$

eine holomorphe Funktion auf der linken Halbebene definiert wird. (F 93, T 2, A 4b)

Aufgabe 3.4 *Beweisen Sie: Ist* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *eine Folge holomorpher Funktionen auf der Einheitskreisscheibe* $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ *mit Werten in der punktierten Einheitskreisscheibe* $E^* = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ *und* $\lim_{n \to \infty} f_n(0) = 0$, *so gilt* $\lim_{n \to \infty} f_n(z) = 0$ *für jedes* $z \in E$. *(Hinweis: Satz von Montel. Begründen und verwenden Sie außerdem den folgenden Sachverhalt: Eine Folge komplexer Zahlen, bei der jede Teilfolge eine gegen Null konvergierende Teilfolge besitzt, konvergiert selbst gegen Null.)* (F 95, T 3, A 5b)

Aufgabe 3.5 *Beweisen Sie, dass die durch*

$$f(z) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{1+z^{2k}}$$

definierte Funktion im Inneren und Äußeren des Einheitskreises holomorph ist. Hinweis: Finden Sie für $|z| < 1$ und $|z| > 1$ geeignete Majoranten. (F 98, T 3, A 5)

Aufgabe 3.6 *Zeigen Sie, dass die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{1-z^n}$$

in $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ auf kompakten Teilmengen gleichmäßig konvergiert. (H 99, T 1, A 1c)

3.2 Unendliche Reihen

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f_n : U \to \mathbb{C}$ eine Folge holomorpher Funktionen.

Definition 3.4 *Die Reihe $\sum f_n$ heißt* normal konvergent, *auf U, wenn für jedes Kompaktum $K \subset U$ die Reihe*

$$\sum_n \| f_n \|_K$$

konvergiert.

Eine normal konvergente Reihe konvergiert also absolut in jedem $z \in U$. Deswegen ist Umordnen der Reihenglieder erlaubt, ohne dass sich der Wert der Reihe ändert. Die Partialsummen $S_M := \sum_0^M f_n$ der Reihe erfüllen auf jedem Kompaktum $K \subset U$ das Cauchy-Kriterium

$$\| S_M - S_N \|_K = \| \sum_{N+1}^{M} f_n \|_K \leq \sum_{N+1}^{M} \| f_n \|_K < \epsilon,$$

wenn $M > N \geq N_0(\epsilon)$. Die Partialsummen konvergieren deswegen kompakt auf U und es folgt

Satz 3.6 *Der Grenzwert $S = \sum f_n$ einer auf U normal konvergenten Reihe holomorpher Funktionen ist wieder holomorph.*

Beipiel. Die berühmte Riemannsche Zeta-Funktion ist die unendliche Reihe

$$\zeta(z) = \frac{1}{1^z} + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}.$$

Dabei ist

$$n^{-z} = e^{-z \cdot ln(n)}$$

mit dem gewöhnlichen reellen Logarithmus ln. Es folgt

$$|n^{-z}| = |e^{-(x+iy)\cdot ln(n)}| = e^{-x\cdot ln(n)} = n^{-x}.$$

Für $Re(z) = x \geq 1+\epsilon$ ist

$$|n^{-z}| = \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^{1+\epsilon}}.$$

Auf jeder Menge $M_\epsilon = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) \geq 1+\epsilon\}$ ist also

$$\sum \parallel \frac{1}{n^z} \parallel_{M_\epsilon} = \sum \frac{1}{n^{1+\epsilon}}$$

konvergent. Die Reihe für die Zeta-Funktion konvergiert also normal auf der offenen Menge $\{Re(z) > 1\} \subset \mathbb{C}$.

Für $z = 1$ konvergiert die Reihe natürlich nicht, da ist sie die divergente harmonische Reihe. Es lässt sich aber zeigen, dass $\zeta(z)$ in alle $z \in \mathbb{C}, z \neq 1$, holomorph fortsetzbar ist. Die Werte $\zeta(-2k)$ in den negativen geraden ganzen Zahlen sind alle $= 0$. Die Riemannsche Vermutung besagt, dass alle anderen Nullstellen dieser Funktion auf der Geraden $Re(z) = 1/2$ liegen. Diese Vermutung ist verifiziert für über 10^6 Nullstellen. Aber die allgemeine Aussage ist noch offen. Es ist die letzte der großen klassischen Vermutungen der Mathematik (vergleichbar mit Kontinuumshypothese, Mordellscher Vermutung, Fermat-Vermutung), die im letzten Jahrhundert nicht bewiesen wurde.

Durch einen Trick verallgemeinern wir den Begriff der normalen Konvergenz auf Reihen von meromorphen Funktionen.

Definition 3.5 *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und f_n eine Folge meromorpher Funktionen auf U. Diese Folge heißt* normal konvergent*, wenn zu jedem Kompaktum $K \subset U$ ein Index $N(K)$ existiert, so, dass*
i) für $n \geq N(K)$ keine Funktion f_n Pole in K hat,
ii) $\sum_{n=N(K)}^{\infty} \parallel f_n \parallel_K < \infty$.

Die Pole von Funktionen der Folge wandern sozusagen aus jedem Kompaktum aus, und die übrigen, dort holomorphen Funktionen bilden eine normal konvergente Reihe.

Weil es auf einem Kompaktum nicht auf die ersten endlich vielen Summanden ankommt, folgt sofort

Satz 3.7 *Der Wert einer normal konvergenten Reihe meromorpher Funktionen ist wieder eine meromorphe Funktion.*

Beipiel. (Eisenstein) Für $m \in \mathbb{N}$ sei

$$E_m(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^m}.$$

Für $|n| > N$ hat keiner der Summanden seinen Pol in der Kreisscheibe $K_N := \{|z| \leq N\}$. Die Pole wandern also aus, Bedingung i) der normalen Konvergenz ist erfüllt. Für $m \geq 2$ ist aber auch Bedingung ii) erfüllt:

$$\sum_{|n|\geq N+1} \parallel \frac{1}{(z-n)^m} \parallel_{K_N} \leq 2 \sum_{n \geq N+1} \frac{1}{(n-N)^m} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^m} < \infty$$

wegen $m \geq 2$.

Also ist E_m für $m \geq 2$ eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$. Ihre Pole liegen in den ganzen Zahlen $k \in \mathbb{Z}$ und haben die Ordnung m. Außerdem merkt die Reihe es nicht, wenn man z durch $z+1$ ersetzt. Die Funktion E_m ist periodisch mit Periode 1:

$$E_m(z+1) = E_m(z).$$

Satz 3.8 (Identifikation von E_1 und E_2) *Es ist*

$$E_1(z) = \pi cot(\pi z), \qquad E_2(z) = \frac{\pi^2}{(sin(\pi z))^2}.$$

Beweis. Weil wir $E_1(z)$ noch nicht richtig definiert haben (Konvergenz!), fangen wir mit E_2 an. Die Idee ist, zunächst einmal zu zeigen:

a) Die Differenz $D(z) := E_2(z) - \frac{\pi^2}{(sin(\pi z))^2}$ ist holomorph auf $\mathbb{C}$, also eine ganze Funktion.

b) Die Differenz ist auf $\mathbb{C}$ beschränkt, nach dem Satz von Liouville dann also konstant, $D(z) = a \in \mathbb{C}$.

Beweis von a). Die Pole von $E_2(z)$ sind die ganzen Zahlen $k \in \mathbb{Z}$, und in $k \in \mathbb{Z}$ hat $E_2(z)$ nach Konstruktion den Hauptteil $1/(z-k)^2$.

Die Pole von $1/(sin(\pi z)^2$ sind auch die ganzen Zahlen $k \in \mathbb{Z}$. Folgendermaßen bestimmen wir den Hauptteil dieser Funktion in $k = 0$:

$$\begin{aligned} sin(\pi z) &= \pi z \cdot (1 - \frac{(\pi z)^2}{6} \pm ...), \\ \frac{1}{sin(\pi z)} &= \frac{1}{\pi z} \cdot (1 + \frac{(\pi z)^2}{6} \pm ...), \\ \frac{1}{(sin(\pi z))^2} &= \frac{1}{(\pi z)^2} \cdot (1 + \frac{(\pi z)^2}{3} \pm ...). \end{aligned}$$

Der Hauptteil von $\pi^2/(sin(\pi z))^2$ in $k = 0$ ist also die Funktion $1/z^2$. Weil $sin(\pi z)$ periodisch ist mit Periode 1, hat die Funktion $\pi^2/(sin(\pi z))^2$ in $k \in \mathbb{Z}$ den Hauptteil $1/(z-k)^2$, genau wie die Funktion $E_2(z)$. Damit kürzen sich in der Differenz $D(z)$ alle Hauptteile heraus, $D(z)$ ist eine ganze Funktion.

Beweis von b). Weil beide Funktionen, $E_2(z)$ wie $\pi^2/(sin(\pi z))^2$, periodisch sind mit Periode 1, genügt es zu zeigen, dass $D(z)$ auf dem Streifen $0 \leq x \leq 1$ beschränkt ist. Wegen $D(\bar{z}) = \overline{D(z)}$ genügt es, dies für $y \geq 0$ zu tun. Und weil D auf $y \leq 1$ stetig, damit beschränkt ist, genügt es zu zeigen: Beide Funktionen, $E_2(z)$ wie $\pi^2/(sin(\pi z)^2$ sind auf dem Streifen $0 \leq x \leq 1, y \geq 1$, beschränkt.

Wegen

$$sin(\pi z) = \frac{1}{2\pi}(e^{i\pi(x+iy)} - e^{-i\pi(x+it)}) = \frac{1}{2i}(e^{-y}e^{i\pi x} - e^{y}e^{-i\pi x})$$

folgt

$$|sin(\pi z)| \geq \frac{1}{2}|e^y - e^{-y}| \to \infty \text{ für } y \to \infty, \qquad \left|\frac{1}{(sin(\pi z))^2}\right| \to 0 \text{ für } y \to \infty.$$

Das war die eine Funktion. Und für $E_2(z)$ gilt

$$\begin{aligned} |E_2(z)| &= \left|\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+iy-n)^2}\right| \leq \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x+iy-n|^2} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-n)^2+y^2} \\ &\leq \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{1}{(x+1)^2+y^2} + 2\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Das war die Identifikation von $E_2(z)$ bis auf eine additive Konstante. Kümmern wir uns jetzt um $E_1(z)$. Zunächst einmal schreiben wir die divergente Reihe

$$E_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z-n}$$

so um, dass sie konvergiert. Und zwar definieren wir

$$E_1(z) := \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right) = \frac{1}{z} + 2z \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2-n^2}.$$

Diese Reihe von meromorphen Funktionen konvergiert normal: Auf jeder Kreisscheibe $K_N = \{z : |z| \leq N\}$ ist für $n = N + \nu$

$$\sum_{n \geq N+1} \parallel \frac{1}{z^2-n^2} \parallel_{K_N} \leq \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} < \infty$$

wegen

$$|z^2 - n^2| \geq |N^2 - n^2| = 2N\nu + \nu^2 \geq \nu^2.$$

Damit ist jetzt $E_1(z)$ meromorph auf $\mathbb{C}$ mit einfachen Polen in den ganzen Zahlen $k \in \mathbb{Z}$. Unsere Definition ist aber etwas unsymmetrisch, deswegen bedarf folgende Eigenschaft eines Beweises: $E_1(z)$ ist periodisch, es gilt

$$E_1(z+1) = E_1(z).$$

Beweis: Für festes z und jedes N gilt

$$\begin{array}{lcll}
E_1(z) & = & \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{z-n} & + \underbrace{2z \sum_{n \geq N} \frac{1}{z^2-n^2}}_{\to 0 \text{ für } N \to \infty} \\
 & & \parallel & \\
E_1(z+1) & = & \displaystyle\sum_{n=-N+1}^{N+1} \frac{1}{z+1-n} & + \underbrace{\frac{1}{z+1-N} + \frac{1}{z+1-N-1} + 2(z+1) \sum_{N+2}^{\infty} \frac{1}{(z+1)^2-n^2}}_{\to 0 \text{ für } N \to \infty}.
\end{array}$$

Außerdem ist E_1 nach Definition ungerade:

$$E_1(-z) = -E_1(z),$$

und wegen der Vertauschbarkeit von Differentiation und kompakter Konvergenz ist die Ableitung

$$\frac{dE_1}{dz}(z) = -\frac{1}{z^2} + \frac{d}{dz} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right) = -\frac{1}{z^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(z-n)^2} + \frac{1}{(z+n)^2} \right) = -E_2(z).$$

Nun gilt aber für die Winkelfunktionen

$$\frac{d}{dz} \pi cot(\pi z) = \pi \frac{d}{dz} \frac{cos(\pi z)}{sin(\pi z)} = \pi \frac{-sin^2(\pi z) - cos^2(\pi z)}{sin^2(\pi z)} \cdot \pi = -\frac{\pi^2}{sin^2(\pi z)} = -E_2(z) + a.$$

Für E_1 folgt daraus

$$E_1(z) = \pi cot(\pi z) + a \cdot z + b$$

mit Konstanten $a, b \in \mathbb{C}$. Weil E_1 eine ungerade Funktion ist, folgt $b = 0$. Und weil E_1 auch periodisch ist, folgt $a = 0$. $\square$

3.3 Partialbruchzerlegung nach Mittag-Leffler

Jede rationale Funktion p/q, p, q Polynome, lässt eine Partialbruchzerlegung

$$\frac{p(z)}{q(z)} = P(z) + \frac{p_1(z)}{(z - z_1)^{m_1}} + ... + \frac{p_k(z)}{(z - z_k)^{m_k}}$$

zu. Dabei sind $z_1, ..., z_k \in \mathbb{C}$ die Pole der rationalen Funktion, d.h. die Nullstellen von q mit den Vielfachheiten $m_1, ..., m_k$, P ist ein Polynom, und die Zähler $p_1, ..., p_k$ sind Polynome vom Grad $\leq m_1 - 1, ..., m_k - 1$.

Beweis. Die rationale Funktion können wir um jeden Pol z_0 in eine Laurent-Reihe entwickeln. Der Hauptteil der Laurentreihe ist von der Form $p_0(z)/(z - z_0)^{m_0}$. Dabei ist p_0 ein Polynom vom Grad $\leq m_0 - 1$. Die rationale Funktion

$$\frac{p(z)}{q(z)} - \frac{p_0(z)}{(z - z_0)^{m_0}}$$

hat bei z_0 keinen Pol mehr. Subtrahieren wir von p/q alle Hauptteile $p_1(z)/(z - z_1)^{m_1}, ..., p_k(z)/(z - z_k)^{m_k}$ so bleibt eine rationale Funktion ohne Pole, d.h. ein Polynom P übrig. $\square$

Anmerkung: Das ist zwar klar, eine rationale Funktion p/q ohne Pole ist ein Polynom, denn wenn im Nenner auch ein echtes Polynom q stünde, dann hätte dieses nach dem Fundamentalsatz der Algebra Nullstellen und p/q hätte Pole. Nur: Diesen Fundamentalsatz der Algebra will ich erst im nächsten Paragraphen beweisen!

Diese Partialbruchzerlegung lässt sich von rationalen Funktionen auf transzendente Funktionen mit isolierten Singularitäten verallgemeinern. Für die Funktionen $cot(\pi z)$ und $\pi^2/sin^2(\pi z)$ haben wir das ja im letzten Paragraphen schon gemacht.

Satz 3.9 (Partialbruchzerlegung nach Mittag-Leffler) *a) Es sei $z_k \in \mathbb{C}$ eine unendliche Folge ohne Häufungspunkt in $\mathbb{C}$, d.h. $\lim_{k \to \infty} z_k = \infty$. In jedem Punkt sei ein Hauptteil*

$$h_k = \sum_{l<0} a_l^{(k)} (z - z_k)^l$$

gegeben. Dann gibt es eine Funktion f auf $\mathbb{C}$, die in den Punkten z_k isolierte Singularitäten mit den vorgegebenen Hauptteilen hat und sonst holomorph ist.

b) Jede Funktion f, die die vorgegebenen Hauptteile hat und sonst holomorph ist, lässt sich schreiben

$$f(z) = h(z) + \sum_k (h_k(z) - p_k(z)).$$

Dabei ist h eine ganze Funktion und die p_k sind Polynome (konvergenzerzeugende Summanden).

Beweis. a) Am liebsten würden wir einfach aufsummieren

$$f = \sum_k h_k,$$

aber diese Reihe braucht nicht zu konvergieren. Wir ordnen die z_k nach ihrem Absolutbetrag an: $|z_0| \leq |z_1| \leq ....$ Mit K_k bezeichnen wir die Kreisscheibe $\{|z| < |z_k|/2\}$ vom Radius $|z_k|/2$. Für $k \leq l$ ist also $K_k \subset K_l$.

Der Hauptteil h_k ist holomorph auf dem Kreis um den Nullpunkt vom Radius $|z_k|$. Er besitzt dort eine Potenzreihenentwicklung, die auf K_k gleichmäßig konvergiert. Wir wählen das Polynom p_k als eine Partialsumme dieser Reihe, derart dass

$$|h_k(z) - p_k(z)| \leq \frac{1}{2^k} \quad \text{für alle } z \in K_k.$$

Für alle $l \geq k$ ist dann auch

$$|h_l(z) - p_l(z)| \leq \frac{1}{2^l} \quad \text{auf } K_k.$$

Daraus folgt, dass die Reihe

$$\sum_{l=k}^{\infty} (h_l(z) - p_l(z))$$

auf K_k gegen eine holomorphe Funktion konvergiert. Die Funktionen $h_l, l < k$, spielen für die Konvergenz auf K_k keine Rolle, obwohl sie dort für die isolierten Singularitäten sorgen.

Weil die Folge der Kreise K_k für $k \to \infty$ die Ebene $\mathbb{C}$ ausschöpft, haben wir Konvergenz gegen eine Funktion f auf ganz $\mathbb{C}$ (bis auf die isolierten Singularitäten natürlich).

b) Ist g eine andere Funktion auf $\mathbb{C}$ mit genau denselben isolierten Singularitäten und Hauptteilen, dann ist $h := f - g$ auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph, also eine ganze Funktion. □

Beispiel. Wir betrachten die ganzen Zahlen $z_k = k \in \mathbb{Z}$ und dort die Hauptteile $h_k = 1/(z-k)$. Die Reihe $\sum h_k$ divergiert, weil sie eine Variante der harmonischen Reihe ist. In Satz 3.8 haben wir Summanden paarweise zusammengefasst, und sie so zur Konvergenz gezwungen. Das Verfahren im Beweis des Satzes von Mittag-Leffler funktioniert etwas anders: Für jeden Hauptteil h_k benützen wir

$$h_k(0) = -\frac{1}{k}$$

als konvergenzerzeugenden Summanden. Das funktioniert: Die Reihe

$$\frac{1}{z} + \sum_{0 \neq k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{z-k} + \frac{1}{k} \right)$$

konvergiert, weil für $k \geq N+1$ gilt

$$\| \frac{1}{z-k} + \frac{1}{k} \|_{K_N} = \| \frac{z}{k(z-k)} \|_{K_N} \leq \frac{N}{k(k-N)} \leq \frac{N}{(k-N)^2}.$$

Diese Funktion ist aber auch nichts anderes als die durch die modifizierte Eisensteinreihe $E_1(z)$ definierte Funktion:

$$\frac{1}{z} + \sum_{k \neq 0} \left(\frac{1}{z-k} + \frac{1}{k} \right) \quad = \quad \frac{1}{z} + \sum_{k \neq 0} \frac{1}{z+k} - \frac{1}{k}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{z} + \frac{1}{2} \sum_{0 \neq k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{z-k} + \frac{1}{z+k} \\
&= \frac{1}{z} + 2z \sum_{0<k \in \mathbb{N}} \frac{1}{z^2 - k^2} \\
&= \pi cot(\pi z).
\end{aligned}
$$

Als weiteres Beispiel betrachten wir die Weierstraßsche $\wp$-Funktion. Diese Funktion ist vor allem theoretisch wichtig. Ihre Untersuchung hat sehr viel zur Entwicklung der Funktionentheorie beigetragen.

Definition 3.6 *Sei $\tau \in \mathbb{C}$ mit $Im(\tau) > 0$. Die Untergruppe*

$$\Omega := \{m + n\tau : m, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$$

heißt das von den Zahlen τ und 1 erzeugt Gitter.

Für jedes $\omega = m + \tau n \in \Omega$ betrachten wir den quadratischen Hauptteil

$$h_\omega(z) := \frac{1}{(z-\omega)^2} = \frac{1}{(z-(m+n\tau))^2}.$$

Die Weierstraßsche $\wp$-Funktion ist die Reihe

$$\sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{(z-\omega)^2}.$$

Nur leider konvergiert diese Reihe so nicht. Sie hat zwar den angenehmen Aspekt, dass im wesentlichen über $1/n^2$ aufaddiert wird. Aber jetzt ist die Summation nicht eindimensional, sondern zweidimensional: Wir haben zwei Summationsindizes m und n, es handelt sich um eine Doppelreihe.

Wir brauchen konvergenzerzeugende Summanden. Dazu entwickeln wir h_ω für $\omega \neq 0$ um den Nullpunkt

$$\frac{1}{(z-\omega)^2} = \frac{1}{\omega^2} \frac{1}{(1-\frac{z}{\omega})^2} = \frac{1}{\omega^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\omega} \right)^n \right)^2 = \frac{1}{\omega^2} + ...$$

Der konstante Summand

$$g_\omega := \frac{1}{\omega^2}$$

genügt als konvergenzerzeugender Summand:

$$\| h_\omega - g_\omega \|_{|z| \leq R} = \| \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \|_{|z| \leq R} = \| \frac{z(z-2\omega)}{\omega^2(z-\omega)^2} \|_{|z| \leq R},$$

und für $R \leq \omega/2$ ist dies

$$\leq R \cdot \| \frac{R + 2|\omega|}{|\omega|^2(|\omega| - |z|)^2} \|_{||z| \leq R} \leq \frac{3}{|\omega| \cdot |\omega|^2/4} = \frac{12}{|\omega|^3}.$$

Die Reihe

$$\sum_{\substack{0 \neq \omega \in \Omega \\ |\omega| \geq 2R}} \frac{1}{|\omega|^3} \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\omega \in R_\nu} \frac{1}{|\omega|^3} \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} 8\nu \cdot \frac{1}{(\nu r)^3} = \frac{8}{r^3} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} < \infty$$

konvergiert. Dabei ist R_ν der Rand des Parallelogramms mit den Ecken

$$\pm\nu,\ \pm\nu\cdot\omega.$$

Dieser Rand enthält 8ν Gitterpunkte. Und $r>0$ ist der Radius eines Kreises um den Nullpunkt, der ganz im Inneren des Parallelogramms R_1 liegt.

Somit konvergiert die Reihe

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{(z-m-n\tau)^2} - \frac{1}{(m+n\tau)^2} \right)$$

normal auf ganz $\mathbb{C}$ und definiert dort die Weierstraßsche $\wp$-Funktion.

Aufgabe 3.7 **a)** *Zeigen Sie: Die Funktionen*

$$cotang(z) \quad und \quad \frac{2i}{e^{2iz}-1}$$

haben dieselben Pole und dort dieselben Hauptteile.
b) *Bestimmen Sie die Differenz*

$$cotang(z) - \frac{2i}{e^{2iz}-1}.$$

Aufgabe 3.8 *Entwickeln Sie $z^2\pi^2/sin^2(\pi z)$ um den Nullpunkt in eine Laurentreihe bis zur Ordnung zwei und zeigen Sie mit der Partialbruchzerlegung der Funktion $\pi^2/sin^2(\pi z)$*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Aufgabe 3.9 *Zeigen Sie*

a) $$\frac{\pi^2}{cos^2(\pi z)} = \frac{\pi^2}{sin^2(\pi(z+\frac{1}{2}))} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-(n+\frac{1}{2}))^2},$$

b) $$\pi\cdot tang(\pi z) = \int_0^z \frac{\pi^2}{cos^2(\pi\zeta)}d\zeta = -\sum_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{z-(n+\frac{1}{2})} + \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right),$$

c) $$\frac{\pi}{sin(\pi z)} = \frac{\pi}{2}cotan(\frac{\pi z}{2}) - \frac{\pi}{2}tang(\frac{\pi z}{2}) = \frac{1}{z} + \sum_{1}^{\infty}(-1)^n\frac{2z}{z^2-n^2}.$$

Aufgabe 3.10 *Bestimmen Sie das größte Gebiet in $\mathbb{C}$, auf dem durch*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^4}$$

eine holomorphe Funktion definiert wird. (H 95, T 1, A 2)

Aufgabe 3.11 *Geben Sie ein Beispiel dafür, dass die Reihe der Hauptteile einer auf ganz $\mathbb{C}$ meromorphen Funktion im allgemeinen nicht konvergiert. (Begründung.)* (H 98, T 3, A 1 Frage 5)

3.4 Weierstraßprodukte

Ausgangspunkt ist der Fundamentalsatz der Algebra:

Satz 3.10 (Fundamentalsatz der Algebra) *Jedes Polynom vom Grad ≥ 1 hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.*

Beweis. Es sei

$$p(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_k z^k$$

ein Polynom vom Grad $k \geq 1$, d.h. $a_k \neq 0$. Da

$$\frac{p(z) - a_k z^k}{z^k} = \frac{a_0}{z^k} + \frac{a_1}{z^{k-1}} + ... + \frac{a_{k-1}}{z} \to 0$$

geht für $|z| \to \infty$, gibt es ein r derart, daß für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > r$ gilt:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{p(z) - a_k z^k}{z^k}\right| &\leq \frac{1}{2}|a_k|, \\
|p(z) - a_k z^k| &\leq \frac{1}{2}|a_k z^k|, \\
|p(z)| &= |a_k z^k - (a_k z^k - p(z))| \\
&\geq |a_k z^k| - |p(z) - a_k z^k| \\
&\geq \frac{1}{2}|a_k z^k|.
\end{aligned}$$

Wird r groß genug gewählt (insbesondere $r > 2/|a_k|$), so gilt für $|z| \geq r$ die Abschätzung $|p(z)| \geq 1$.

Wenn p keine Nullstelle in $\mathbb{C}$ hätte, so wäre $q = 1/p$ eine ganze Funktion. Aus der Abschätzung für p folgt

$$|q(z)| \leq 1 \text{ falls } |z| \geq r.$$

Auf der abgeschlossenen Kreisscheibe vom Radius r ist aber q als stetige Funktion beschränkt. Damit ist q eine beschränkte ganze Funktion und nach dem Satz von Liouville konstant. Also wäre auch p konstant und damit $a_1 = ... = a_k = 0$, Widerspruch! $\square$

Hat ein Polynom $p(z) = \sum a_k z^k$ die Nullstelle z_0, so können wir das Polynom um diese Nullstelle entwickeln

$$p(z) = \sum_0^n a_k(z - z_0 + z_0)^k = \sum_{k=0}^n a_k \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} z_0^{k-l}(z - z_0)^l = \sum_{k=0}^n b_k(z - z_0)^k.$$

Wegen $p(z_0) = 0$ ist $b_0 = 0$ und wir können den Linearfaktor $z - z_0$ aus p herausziehen:

$$p(z) = (z - z_0) \cdot q(z),$$

wobei q ein Polynom vom Grad $n - 1$ ist. Indem man dieses Ausklammern $(n-1)$-mal wiederholt beweist man folgende Version des Fundamentalsatzes

Satz 3.11 (Satz von Vieta) *Jedes Polynom p vom Grad n ist ein Produkt von n Linearfaktoren*

$$c \cdot (z - z_1) \cdot ... \cdot (z - z_n).$$

Dabei ist c der Koeffizient der Potenz z^n. Linearfaktoren können in diesem Produkt auch mehrfach als Faktor vorkommen. Zu einer Nullstelle von p gehört also ein Faktor $(z-z_0)^m$, wo m die Vielfachheit dieser Nullstelle ist. Und das Polynom p ist das Produkt aller Faktoren, die zu seinen Nullstellen gehören.

Eine ähnliche Produktzerlegung gibt es auch für transzendente ganze Funktionen. Da diese aber unendlich viele Nullstellen haben können, brauchen wir

Satz 3.12 (Konvergenzkriterium für unendliche Produkte) *Sei $c_n \in \mathbb{C}$ eine unendliche Folge komplexer Zahlen.*
a) Seien alle $|c_n| < 1/2$. Die Reihe $\sum_1^\infty c_n$ konvergiert absolut genau dann, wenn die Reihe $\sum_1^\infty \underline{ln}(1+c_n)$ absolut konvergiert. Dabei ist $\underline{ln}$ der Zweig des Logarithmus auf der Kreisscheibe $|z-1| < 1$ mit $\underline{ln}(1) = 0$.
b) Die Reihe $\sum_1^\infty c_n$ konvergiere absolut. Dann konvergiert auch das unendliche Produkt

$$\prod_1^\infty (1+c_n) := \lim_{N\to\infty} \prod_1^N (1+c_n),$$

und zwar gegen

$$(1+c_1)\cdot \ldots \cdot (1+c_N)\cdot e^{\sum_{n=N+1}^\infty \underline{ln}(1+c_n)}.$$

c) Die Reihe $\sum c_n$ konvergiere absolut. Das unendliche Produkt $\lim_{N\to\infty}\prod_1^N(1+c_n)$ verschwindet genau dann, wenn ein Faktor $= 0$ ist, d.h., ein $c_n = -1$ ist. Der Grenzwert ist invariant gegen Umordnen und Setzen von Klammern.

Beweis. a) Die Funktion $\underline{ln}(1+z)$ hat in $z=0$ eine einfache Nullstelle. Deswegen ist $\underline{ln}(1+z)/z$ holomorph auf der Kreisscheibe $|z-1| < 1$ ohne Nullstellen. Auf der kompakten Kreisscheibe $|z-1| \le 1/2$ ist diese Funktion deswegen beschränkt:

$$0 < c \le \frac{\underline{ln}(1+z)}{z} \le C.$$

Es folgt für $|z| \le 1/2$

$$c|z| \le |\underline{ln}(1+z)| \le C|z|.$$

Für unsere Folge c_n gilt deswegen

$$c\sum_1^\infty |c_n| \le \sum_1^\infty |\underline{ln}(1+c_n)| \le C\sum_1^\infty |c_n|.$$

b) Wegen a) konvergiert $\sum_{n=N+1}^\infty \underline{ln}(1+c_n)$ absolut. Aus der Stetigkeit der Exponentialfunktion folgt

$$e^{\lim_{M\to\infty}\sum_{N+1}^M \underline{ln}(1+c_n)} = \lim_{M\to\infty} e^{\sum_{N+1}^M \underline{ln}(1+c_n)} = \lim_{M\to\infty}\prod_{N+1}^M (1+c_n).$$

c) Wegen

$$e^{\sum_{n=N+1}^\infty \underline{ln}(1+c_n)} \neq 0$$

verschwindet das unendliche Produkt genau dann, wenn einer der Faktoren $1+c_n$, $1 \le n \le N = 0$ ist. Die Invarianz gegen Umordnen und Setzen von Klammern folgt aus der absoluten Konvergenz der Reihe $\sum_{N+1}^\infty \underline{ln}(1+c_n)$. $\square$

Definition 3.7 *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f_n : U \to \mathbb{C}$ eine Folge holomorpher Funktionen auf U. Das unendliche Produkt $\prod(1+f_n)$ konvergiert normal auf U, wenn die Reihe $\sum f_n$ auf U normal konvergiert.*

Satz 3.13 *Das unendliche Produkt $\prod(1+f_n)$ mit holomorphen Funktionen $f_n : U \to \mathbb{C}$ konvergiere normal auf U. Dann gilt*
a) Die Grenzfunktion $f := \lim_{N\to\infty} \prod_1^N (1+f_n)$ ist holomorph auf U.
b) Für alle $z \in U$ ist die Verschwindungsordnung $o_z(f)$ endlich, und zwar gleich

$$o_z(f) = \sum_n o_z(1+f_n).$$

c) Die logarithmische Ableitung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+f_n)'}{1+f_n}$$

konvergiert normal auf U gegen die logarithmische Ableitung f'/f der Grenzfunktion f.

Beweis. Die Aussage a) folgt aus Satz 3.12 a) und b). Für jedes $z \in U$ ist $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = 0$ und damit $\lim_{n\to\infty}(1+f_n) = 1$. Nur für endlich viele n kann $1+f_n$ in z eine Nullstelle haben. Deswegen folgt die Behauptung b) aus Satz 3.12 b).

c) Für je zwei Funktionen g_1 und g_2 ist

$$\frac{(g_1 g_2)'}{g_1 g_2} = \frac{g_1' g_2 + g_1 g_2'}{g_1 g_2} = \frac{g_1'}{g_1} + \frac{g_2'}{g_2}.$$

Daraus folgt für jedes N

$$\frac{(\prod_1^N (1+f_n))'}{\prod_1^N (1+f_n)} = \sum_1^N \frac{(1+f_n)'}{1+f_n}.$$

Es bleibt zu zeigen

$$\frac{(\prod_{N+1}^\infty (1+f_n))'}{\prod_{N+1}^\infty (1+f_n)} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(1+f_n)'}{1+f_n}.$$

Hier können wir aber auf jedem Kompaktum N so groß wählen, dass $\| f_n \|_K < 1/2$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\left(\prod_{n=N+1}^{\infty} (1+f_n)\right)' &= \left(e^{\sum_{n=N+1}^\infty \underline{ln}(1+f_n)}\right)' \\
&= \left(e^{\sum_{n=N+1}^\infty \underline{ln}(1+f_n)}\right) \cdot \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \underline{ln}(1+f_n)\right)' \\
&= \left(e^{\sum_{n=N+1}^\infty \underline{ln}(1+f_n)}\right) \cdot \sum_{n=N+1}^{\infty} (\underline{ln}(1+f_n))' \quad \text{(kompakte Konvergenz)} \\
&= \prod_{n=N+1}^{\infty} (1+f_n) \cdot \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(1+f_n)'}{1+f_n}.
\end{aligned}$$

□

Beispiel. Die Reihe $\sum_1^\infty z^2/n^2$ konvergiert normal auf $\mathbb{C}$. Deswegen konvergiert auch das unendliche Produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z^2}{n^2})$$

normal auf $\mathbb{C}$ gegen eine holomorphe Funktion. Die Grenzfunktion hat in allen Punkten $\pm n$, $1 \leq n \in \mathbb{N}$ Nullstellen der Ordnung eins. Für die Funktion

$$f(z) := z \cdot \prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z^2}{n^2})$$

gilt wegen Satz 3.13 c)

$$\frac{f'}{f} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2z/n^2}{1-z^2/n^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-n^2} = E_1(z) = \pi cot(\pi z) = \frac{(sin(\pi z))'}{sin(\pi z)}.$$

Es folgt

$$\left(\frac{f}{sin(\pi z)}\right)' = \frac{1}{sin^2(\pi z)}(f'(z)sin(\pi z) - f(z)(sin(\pi z))') = 0.$$

Also ist

$$f(z) = c \cdot sin(\pi z) \text{ mit einer Konstanten } c \in \mathbb{C}.$$

Diese Konstante c kann man wie folgt rauskriegen:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z} \\ &= (1-\frac{0^2}{1^2}) \cdot \ldots \cdot (1-\frac{0^2}{N^2}) \cdot \lim_{z\to 0} e^{\sum_{N+1}^{\infty} \underline{ln}(1-z^2/n^2)} \\ &= \lim_{z\to 0} e^{\sum_{N+1}^{\infty} \underline{ln}(1-z^2/n^2)}. \end{aligned}$$

Für $n \geq N+1$ ist

$$|\underline{ln}(1-\frac{z^2}{n^2})| \leq C \cdot \frac{|z|^2}{n^2}.$$

Und daraus folgt

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \underline{ln}(1-\frac{z^2}{n^2}) \right| \leq C \cdot \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|z|^2}{n^2} = |z|^2 \cdot C \cdot \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \to 0 \text{ für } z \to 0.$$

Es hat sich herausgestellt, dass

$$1 = f'(0) = c \cdot \frac{d}{dz} sin(\pi z)|_{z=0} = c \cdot \pi, \quad c = \frac{1}{\pi}, \quad f(z) = \frac{1}{\pi} sin(\pi z).$$

Damit haben wir die *Produktdarstellung der Sinus-Funktion*

$$\boxed{\frac{sin(\pi z)}{\pi z} = \prod_1^{\infty}(1-\frac{z^2}{n^2})}$$

Setzt man hier insbesondere $z = 1/2$, so sieht man

$$\frac{2}{\pi} = \prod_1^\infty (1 - \frac{1}{4n^2}) = \prod_1^\infty \frac{(2n)^2 - 1}{(2n)^2}.$$

Das ist das Wallissche Produkt

$$\boxed{\frac{\pi}{2} = \prod_1^\infty \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \ldots}$$

Satz 3.14 (Weierstraßscher Produktsatz) *Es sei $z_1, z_2, \ldots \in \mathbb{C}$ eine diskrete Menge von Punkten, und zu jedem Punkt z_k sei eine Ordnung $o_k \in \mathbb{N}$ gegeben. Dann gilt:*
a) Es gibt eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die genau in den Punkten z_k Nullstellen besitzt, und dort von der Ordnung o_k.
b) Jedes f wie in a) schreibt sich als ein Weierstraß-Produkt

$$f = e^g \cdot \prod_k ((z - z_k)^{o_k} \cdot e^{-g_k}).$$

Dabei ist g eine ganze Funktion auf $\mathbb{C}$ und die Funktionen g_k sind Polynome. Die Funktionen e^{-g_k} sind konvergenzerzeugende Faktoren.

Beweis. a) Falls eines der $z_k = 0$ ist, nehmen wir es als gesonderten Faktor voraus. Danach können wir o.B.d.A. $z_k \neq 0$ für alle k annehmen. Wieder ordnen wir die Punkte so an, dass $0 < |z_1| \leq |z_2| \leq \ldots$ und setzen $K_k := \{z \in \mathbb{C} : |z| < k/2\}$. Dann ist die Funktion $z - z_k$ holomorph auf K_k ohne Nullstelle. Weil die Kreisscheibe K_{2k} einfach-zusammenhängend ist, gibt es einen Logarithmus $h_k := ln((z - z_0)^k)$ (Folgerung am Ende von 2.2.4). Es ist also $(z - z_0)^k = e^{h_k(z)}$ mit einer auf K_{2k} holomorphen Funktion h_k. Wieder entwickeln wir h_k in eine Potenzreihe auf K_{2k} und wählen eine Partialsumme g_k dieser Potenzreihe mit

$$\| h_k - g_k \|_{K_k} < min\{2^{-k}, \delta\}.$$

Dabei ist $\delta \in \mathbb{R}$ folgendermaßen gewählt:

Es ist

$$\lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z} = \frac{d}{dz} e^z|_0 = 1.$$

Deswegen gibt es ein $\delta \in \mathbb{R}$ so, dass für $|z| < \delta$ gilt

$$\left| \frac{e^z - 1}{z} \right| < 2, \qquad \text{d.h.} \qquad |e^z - 1| < 2|z|.$$

Jetzt bilden wir das unendliche Produkt

$$\prod \left((z - z_k)^{o_k} e^{-g_k} \right).$$

Für $n \geq k$ ist

$$\| (z - z_n)^{o_n} \cdot e^{-g_n} - 1 \|_{K_k} = \| e^{h_n - g_n} - 1 \|_{K_k} \leq \| e^{h_n - g_n} \|_{K_n} \leq 2 \| h_n - g_n \|_{K_n} < 2^{1-n}.$$

Deswegen konvergiert dieses unendliche Produkt normal auf jeder Kreisscheibe K_k. Weil die Aussage für endlich viele Punkte z_k trivial ist, können wir annehmen, dass wir unendlich viele dieser Punkte haben. Weil sie nach Annahme diskret in $\mathbb{C}$ liegen, geht $|z_k| \to \infty$ für $k \to \infty$. Deswegen schöpfen die Kreisscheiben K_k nach und nach die ganze Ebene $\mathbb{C}$ aus, und das Produkt konvergiert normal auf ganz $\mathbb{C}$.

Wegen 3.13 hat das Produkt genau die vorgegebenen Nullstellen mit den gegebenen Vielfachheiten.

b) Seien f_1 und f_2 zwei holomorphe Funktionen auf $\mathbb{C}$ mit den Nullstellen $z_k, k \in \mathbb{N}$, der Ordnungen o_k. Dann ist f_1/f_2 holomorph auf $\mathbb{C}$ ohne Nullstellen. Weil $\mathbb{C}$ einfach-zusammenhängend ist, gibt es einen Logarithmus g von f_1/f_2 auf $\mathbb{C}$. Es ist also $f_1 = f_2 \cdot e^g$ mit einer ganzen Funktion g. □

Aufgabe 3.12 **a)** *Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom n-ten Grades, $n \geq 1$, und es seien $c_1, ..., c_n$ die Nullstellen von f (jede Nullstelle dabei so oft aufgeführt, wie ihre Vielfachheit angibt). Man beweise*

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - c_k}.$$

b) *Man zeige: Jede Nullstelle c von f' ist konvexe Kombination der Nullstellen von f, d.h., es gibt Zahlen $\lambda_1, ..., \lambda_n \geq 0$ mit $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$ so, dass $c = \lambda_1 c_1 + ... + \lambda_n c_n$. (Hinweis: Für $f(c) \neq 0$ ergibt sich diese Darstellung aus a))* (H 91, T 3, Teil von A 2)

Aufgabe 3.13 *Zeigen Sie, dass das unendliche Produkt*

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2k-1)^2 \pi^2}\right)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergiert, und dieselben Nullstellen wie $cos(z)$ besitzt.

Aufgabe 3.14 *Zeigen Sie, dass das unendliche Produkt*

$$\prod_{0}^{\infty} (1 + z^{2^n})$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergiert, und den Wert

$$\frac{1}{1 - z^2}$$

besitzt.

Aufgabe 3.15 *Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion und nicht konstant Null. Man gebe eine Bedingung an die Ordnung der Nullstellen von f an, die dazu äquivalent ist, dass es eine ganze Funktion g mit $(g(z))^2 = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gibt. Hinweis: Produktsatz. Gilt dieselbe Aussage auf einem beliebigen Gebiet statt $\mathbb{C}$?* (F 94, T 1, A 4)

Aufgabe 3.16 *Betrachtet wird die Produktdarstellung*

$$sin(\pi z) = z \prod_{n \neq 0} (1 - z/n) e^{z/n}.$$

a) *Beweisen Sie die Konvergenz des unendlichen Produkts.*
b) *Leiten Sie mit Hilfe der logarithmischen Ableitung eine Reihenentwicklung für $cot(\pi z)$ her.* (F 99, T 1, A 2)

3.5 Die Gamma-Funktion

Die Gamma-Funktion $\Gamma(z)$ hat die fundamentale Eigenschaft

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad \text{für} \quad 0 < n \in \mathbb{N}.$$

Allgemeiner gilt

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Dann ist also

$$\Gamma(z+n) = z \cdot (z+1) \cdot \ldots \cdot (z+n-1) \cdot \Gamma(z).$$

Für die negativen ganzen Zahlen $z = -m, m \geq 0$, folgt aus dieser Eigenschaft.

$$\Gamma(z) \cdot z \cdot (z+1) \cdot \ldots \cdot (z+m) = \Gamma(z+m+1) \text{ ist holomorph } \neq 0 \text{ bei } z = -m.$$

Also hat $\Gamma(z)$ bei $z = -m$ einen Pol erster Ordnung mit Residuum $(-1)^m/m!$.

Wir setzen $g(z) = 1/\Gamma(z)$ an als Weierstraßprodukt

$$g(z) = e^{h(z)} \cdot z \cdot \prod_{\nu=1}^{\infty}(1+\frac{z}{\nu})e^{-z/\nu} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} e^{h(z) - z\sum_{\nu=1}^{n} 1/\nu} z \prod_{\nu=1}^{n}(z+\nu).$$

Wegen

$$\frac{1}{g(z+1)} = \frac{z}{g(z)}$$

ist

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{z \cdot g(z+1)}{g(z)} \\ &= \lim_{n\to\infty} e^{h(z+1)-h(z)-\sum_1^n 1/\nu} \cdot (z+n+1) \\ &= \lim_{n\to\infty} e^{h(z+1)-h(z)-\sum_1^n 1/\nu + ln(n)} \cdot (1+\frac{z+1}{n}) \\ &= e^{h(z+1)-h(z)-\gamma} \end{aligned}$$

mit der Eulerschen Konstanten

$$\gamma := \lim_{n\to\infty} \sum_1^n \frac{1}{\nu} - ln(n).$$

Insbesondere für $h(z) = \gamma \cdot z$ ist

$$h(z+1) - h(z) - \gamma = 0.$$

Deswegen definieren wir

$$\Gamma(z) := e^{-\gamma \cdot z} \cdot \frac{1}{z} \cdot \prod_1^{\infty} \frac{e^{z/\nu}}{1+z/\nu}.$$

Um die Konvergenz dieses unendlichen Produktes nachzuweisen, genügt es, das für das Produkt der Kehrwerte zu tun. Da müssen wir abschätzen

$$\| (1+\frac{z}{\nu})e^{-z/\nu} - 1 \| \quad = \quad \| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(-\frac{z}{\nu})^k + \frac{z}{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(-\frac{z}{\nu})^k - 1 \|$$

$$
\begin{aligned}
&= \| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}(-\frac{z}{\nu})^k - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!}(-\frac{z}{\nu})^k \| \\
&= \| \sum_{k=2} \frac{1-k}{k!}(-\frac{z}{\nu})^k \| \\
&\leq \| (\frac{z}{\nu})^2 \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{z}{\nu})^k \| \\
&= \frac{1}{\nu^2} \| z^2 \| \cdot \underbrace{\| \frac{1}{1-\frac{z}{\nu}} \|}_{\leq 2}
\end{aligned}
$$

für

$$\| \frac{z}{\nu} \| \leq \frac{1}{2}.$$

Deswegen konvergiert diese Reihe und damit das unendliche Produkt normal auf ganz $\mathbb{C}$. Aus dieser Definition findet man folgenden Zusammenhang mit der *sin*-Funktion:

$$g(z) \cdot g(-z) = -z^2 \cdot \prod_1^{\infty} (1 - \frac{z^2}{\nu^2}) = -z \cdot \frac{sin(\pi z)}{\pi}.$$

Es folgt also

$$\frac{sin(\pi z)}{\pi} = g(z) \cdot \frac{g(-z)}{-z} = g(z) \cdot g(1-z).$$

Für die Gamma-Funktion haben wir damit

$$\boxed{\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{sin(\pi z)}}$$

bewiesen. Insbesondere ist

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Die Gamma-Funktion heißt wohl so wegen Gauß. Er hat sie folgendermaßen definiert:

$$\Gamma(z) := \lim_{n \to \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1) \cdot \ldots \cdot (z+n)}.$$

Das hängt mit unserer Definition so zusammen:

$$
\begin{aligned}
e^{-\gamma z} \frac{1}{z} \prod_1^n \frac{e^{z/\nu}}{1 + z/\nu} &= e^{-\gamma z} \frac{1}{z \prod_1^n (1 + z/\nu) e^{-z/\nu}} \\
&= e^{-\gamma z} \frac{n!}{z(z+1) \cdot \ldots \cdot (z+n) \cdot e^{-z \sum_1^n 1/\nu}} \\
&= e^{z(\sum_1^n 1/\nu - \ln(n) - \gamma)} e^{z ln(n)} \frac{n!}{\prod_0^n z + \nu}.
\end{aligned}
$$

Euler benutzte die Definition

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Wegen

$$t^z = e^{(x+iy)ln(t)} = t^x \cdot e^{iyln(t)}$$

ist $|t^{z-1}| = t^{x-1}$ und das uneigentliche Integral konvergiert für $x = Re(z) > 1$. Um zu zeigen, dass diese Definition mit der von Gauß übereinstimmt, genügt es, das für reelle $z = x > 1$ zu tun (Identitätssaz). Dazu überlegen wir uns zunächst

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^n (1 - \frac{t}{n})^n t^{x-1} dt.$$

Der Grund für diese Formel ist letztenendes der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} (1 - \frac{t}{n})^n = e^{-t}.$$

Wegen

$$\frac{d}{du}(1 - \frac{t}{u})^u = u \cdot (1 - \frac{t}{u})^{u-1} \cdot \frac{t}{u^2} \geq 0 \text{ für } u \geq t$$

konvergiert

$$(1 - \frac{t}{n})^n \to e^{-t}$$

monoton steigend von unten auf jedem endlichen Intervall $[0, N]$ sobald $n \geq N$. Es folgt

$$\int_0^N (1 - \frac{t}{n})^n t^{x-1} dt \leq \int_0^N e^{-t} t^{x-1} dt \leq \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt,$$

für alle $N \leq n \in \mathbb{N}$.

Andererseits konvergiert

$$(1 - \frac{t}{n})^n \to e^{-t}$$

gleichmäßig auf jedem endlichen Intervall $[0, N]$. Um das einzusehen differenzieren wir den Quotienten

$$\frac{(1 - \frac{t}{n})^n}{e^{-t}} = e^t \cdot (1 - \frac{t}{n})^n$$

mit dem Resultat

$$\frac{d}{dt} e^t (1 - \frac{t}{n})^n = e^t (1 - \frac{t}{n})^n + e^t \cdot n (1 - \frac{t}{n})^{n-1} (-\frac{1}{n}) = e^t \cdot \left((1 - \frac{t}{n})^n - (1 - \frac{t}{n})^{n-1} \right) \leq 0$$

für $n \geq t$. Für alle $t \in [0, N]$ geht also

$$\frac{(1 - \frac{t}{n})^n}{e^{-t}} \geq \frac{(1 - \frac{N}{n})^n}{e^{-N}} = c_n \to 1$$

und

$$e^{-t} - (1 - \frac{t}{n})^n = e^{-t} \cdot \left(1 - \frac{(1 - \frac{t}{n})^n}{e^{-t}} \right) \leq e^{-t}(1 - c_n) \leq 1 - c_n \to 0$$

gleichmäßig auf $[0, N]$.

Aus der gleichmäßigen Konvergenz folgt für $n \geq N$

$$\int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^{x-1} dt \geq \int_0^N (1-\frac{t}{n})^n t^{x-1} dt \to \int_0^N e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Wegen der Konvergenz des uneigentlichen Integrals

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = \lim_{N\to\infty} \int_0^N e^{-t} t^{x-1} dt$$

ist also schließlich

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^{x-1} dt$$

wie behauptet.

Dieses letzte Integral werten wir nun aus durch n-malige partielle Integration

$$\begin{aligned}
\int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^{x-1} dt &= (1-\frac{t}{n})^n \frac{t^x}{x}\Big|_{t=0}^n - \int_0^n n(1-\frac{t}{n})^{n-1}(-\frac{1}{n})\frac{t^x}{x} dt \\
&= \frac{n}{x\cdot n}\int_0^n (1-\frac{t}{n})^{n-1} t^x dt \\
&= \frac{n}{x\cdot n}\cdot\left\{(1-\frac{t}{n})^{n-1}\frac{t^{x+1}}{x+1}\Big|_{t=0}^n - \int_0^n (n-1)(1-\frac{t}{n})^{n-2}(-\frac{1}{n})\frac{t^{x+1}}{x+1} dt\right\} \\
&= \frac{n(n-1)}{x(x+1)\cdot n^2}\int_0^n (1-\frac{t}{n})^{n-2} t^{x+1} dt \\
&\;\vdots \\
&= \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n-2)\cdot n^{n-1}}\int_0^n (1-\frac{t}{n}) t^{x+n-2} dt \\
&= \frac{n!}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n-2)\cdot n^{n-1}}\cdot\left\{(1-\frac{t}{n})\frac{t^{x+n-1}}{x+n-1}\Big|_{t=0}^n - \int_0^n -\frac{1}{n}\frac{t^{x+n-1}}{x+n-1} dt\right\} \\
&= \frac{n!}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n-1)\cdot n^n}\;\frac{t^{x+n}}{x+n}\Big|_{t=0}^n \\
&= \frac{n!\cdot n^{x+n}}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)\cdot n^n} \\
&= \frac{n!\cdot n^x}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)}.
\end{aligned}$$

Für $n \to \infty$ ergibt sich daraus die Identität zwischen der Definition der Gamma-Funktion durch Euler und durch Gauß.

Schließlich noch eine vierte Charakterisierung der Gamma-Funktion als ' Schleifen-Integral', die *Hankelsche Formel*: Für $Re(z) > 1$ ist

$$\Gamma(z) = \frac{i}{2sin(\pi z)}\int_\gamma t^{z-1} e^t dt.$$

Dabei ist γ der Weg $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ mit

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= t & (-\infty < t \leq -r), \\
\gamma_2(t) &= re^{i\varphi} & (-\pi \leq \varphi \leq \pi), \\
\gamma_3(t) &= -t & (r \leq t < \infty).
\end{aligned}$$

Zuerst betrachten wir das Integral

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_2} t^{z-1}e^t dt &= \int_{-\pi}^{\pi} (re^{i\varphi})^{z-1} e^{re^{i\varphi}} rie^{i\varphi} d\varphi \\
&= i\int_{-\pi}^{\pi} (re^{i\varphi})^z e^{re^{i\varphi}} d\varphi \\
&= ie^{zln(r)} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\varphi z} e^{re^{i\varphi}} d\varphi \\
&\to 0 \quad \text{für} \quad r \to 0,
\end{aligned}$$

weil

$$Re(zln(r)) \to -\infty \quad \text{für} \quad r \to 0.$$

Die anderen Anteile des Weges geben

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1+\gamma_3} t^{z-1}e^t &= \int_{-r}^{-\infty} [t^{z-1}e^t]_{oben} - [t^{z-1}e^t]_{unten} dt \\
&= \int_{-r}^{-\infty} e^t [e^{(z-1)ln(t)}]_{oben-unten} dt \\
&= \int_{-r}^{-\infty} e^t \left(e^{(z-1)(ln(|t|)+i\pi)} - e^{(z-1)(ln(|t|)-i\pi)} \right) dt \\
&= \int_{-r}^{-\infty} e^t e^{(z-1)ln(|t|)} dt \cdot \left(\underbrace{e^{i\pi(z-1)} - e^{-i\pi(z-1)}}_{=2isin(\pi(z-1))} \right) \\
&= -2isin(\pi z) \cdot \int_r^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.
\end{aligned}$$

Für $r \to 0$ erhält man daraus die behauptete Identität.

(Auch Hankel war übrigens in Erlangen tätig.)

3.6 Der Riemannsche Abbildungssatz

Der Riemannsche Abbildungssatz ist folgende Aussage:

Satz 3.15 (Riemannscher Abbildungssatz) *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet mit den beiden Eigenschaften*

1) $U \neq \mathbb{C}$,

2) U ist einfachzusammenhängend.

Dann gibt es eine biholomorphe Abbildung von U auf den Einheitskreis $E \subset \mathbb{C}$.

Die beiden Voraussetzungen sind sicher notwendig. Denn wenn $f : U \to E$ biholomorph ist, so ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1} : E \to U$ stetig. Weil E einfach-zusammenhängend ist, muss das dann auch für U gelten. Und wenn $U = \mathbb{C}$ wäre, dann könnte es keine biholomorphe Abbildung $f : \mathbb{C} \to E$

geben. Denn f wäre eine beschränkte ganze Funktion, nach dem Satz von Liouville also konstant. Da könnte f nicht bijektiv sein.

Vor dem Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes erst einige Beispiele. Betrachten wir etwa die holomorphe Funktion (*Cayley-Abbildung*)

$$w(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

mit der Umkehrfunktion

$$z(w) = -i \cdot \frac{w+1}{w-1}.$$

Diese Funktion $w(z)$ bildet also das (nicht einfach-zusammenhängende) Gebiet $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ biholomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ ab. Für reelle $z = x \in \mathbb{R}$ ist

$$w(x) = \frac{x-i}{x+i} = \frac{\overline{x+i}}{x-i} = \overline{\frac{1}{w(x)}}.$$

Also ist $w(x) \cdot \overline{w(x)} = 1$ und $|w(x)| = 1$. Das Bild $w(x)$ liegt auf dem Rand $\{|w| = 1\}$ des Einheitskreises E. Die *obere Halbebene*

$$H := \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$$

wird (wegen der Bijektivität) dann entweder auf das ganze Innere oder auf das ganze Äußere des Einheitskreises abgebildet. Wegen

$$w(i) = 0$$

ist ersteres der Fall. Damit bildet die Cayley-Abbildung $w(z)$ die obere Halbebene H biholomorph auf den Einheitskreis ab. Dies ist ein erstes Beispiel für die Aussage des Riemannschen Abbildungssatzes.

Die folgenden Beispiele zeigen, dass die Abbildung $f : U \to E$ aus dem Riemannschen Abbildungssatz keineswegs eindeutig bestimmt ist: Seien dazu $z_0, a \in \mathbb{C}$ gewählt mit $|z_0| < 1$ und $|a| = 1$. Dann betrachten wir

$$w(z) = a \cdot \frac{z + z_0}{1 + \bar{z}_0 z}$$

mit der Umkehrabbildung

$$z(w) = \frac{1}{a} \cdot \frac{w - a z_0}{1 - \bar{a} \bar{z}_0 w}.$$

Die rationale Funktion $w(z)$ hat einen einzigen Pol bei $z = -1/\bar{z}_0$ außerhalb E. Auf dem Einheitskreis E ist sie deswegen biholomorph. Was ist sein Bild?

Wegen

$$|w(z)|^2 = \frac{|z + z_0|^2}{|1 + \bar{z}_0 z|^2} = \frac{z\bar{z} + z\bar{z}_0 + \bar{z}z_0 + z_0\bar{z}_0}{1 + z\bar{z}_0 + \bar{z}z_0 + z_0\bar{z}_0 z\bar{z}} = 1$$

für $|z| = 1$ wird der Rand des Einheitskreises bijektiv auf diesen Rand abgebildet. Das Bild von E selbst ist dann entweder das Innere oder das Äußere des Einheitskreises. Weil das Äußere des Einheitskreises nicht einfach-zusammenhängend ist, kann letzteres nicht der Fall sein. Das sieht man auch wegen $w(0) = z_0 \in E$. Alle unsere Funktionen bilden also den Einheitskreis biholomorph auf sich selbst ab.

So, jetzt kommen wir zum Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes:

Erster Beweisschritt: *Es gibt eine biholomorphe Abbildung $\varphi_1 : U \to U_1$ von U auf ein beschränktes Gebiet $U_1 \subset \mathbb{C}$.*

Beweis. Sei $a \in \mathbb{C} \setminus U$. Weil U einfachzusammenhängend ist und $z - a \neq 0$ auf U, gibt es nach 2.2.4 einen auf U holomorphen Zweig φ der Funktion $ln(z-a)$. Die holomorphe Abbildung $\varphi : U \to \mathbb{C}$ ist injektiv, denn aus $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$ folgt

$$z_1 - a = e^{ln(z_1 - a)} = e^{ln(z_2 - a)} = z_2 - a$$

und damit $z_1 = z_2$. Weiter ist

$$\varphi'(z) = \frac{1}{z-a} \neq 0$$

für alle $z \in U$, und damit $\varphi : U \to \varphi(U)$ biholomorph.

Falls $w \in \varphi(U)$ ist, dann gehört der Punkt $w' := w + 2\pi i$ nicht zu $\varphi(U)$. Denn wäre $w = ln(z-a)$ und $w' = ln(z' - a)$ mit $z, z' \in U$, dann würde wieder

$$z - a = e^w = e^{w'} = z' - a$$

folgen, also $z = z'$, und weil $ln(z-a)$ eine eindeutige Funktion auf U ist, dann $w = w'$. Nun fixieren wir ein $w_0 \in \varphi(U)$ und eine Kreisscheibe $|w - w_0| < r$, die noch ganz in der offenen Menge $\varphi(U)$ liegt. Die um $2\pi i$ verschobene Kreisscheibe $|w - (w_0 + 2\pi i)| < r$ hat dann, wie wir eben gesehen haben, keinen Punkt mit U gemeinsam.

Die Abbildung $\psi : \varphi(U) \to \mathbb{C}$ sei durch

$$\psi(w) := \frac{1}{w - (w_0 + 2\pi i)}$$

definiert. Für alle $w \in \varphi(U)$ gilt $|w - (w_0 + 2\pi i)| > r$ und deswegen $|\psi(w)| < 1/r$. Die Bildmenge $U_1 := \psi(\varphi(U))$ ist deswegen ein beschränktes Gebiet, und $\varphi_1 := \psi \circ \varphi$ bildet U biholomorph auf dieses Gebiet U_1 ab. $\square$

Wenn wir φ_1 noch etwas skalieren, etwa durch $r \cdot \varphi_1$ ersetzen, können wir sogar annehmen, dass U_1 im Einheitskreis E enthalten ist. Und wenn wir U_1 dann noch etwas verschieben, können wir o.B.d.A. auch $0 \in U_1$ annehmen.

Zweiter Beweisschritt: *Es sei M die Menge aller holomorphen Abbildungen $\varphi : U_1 \to \mathbb{C}$ mit den drei Eigenschaften:*

1) $|\varphi(z)| < 1$ für alle $z \in U_1$;

2) $\varphi(0) = 0$;

3) φ ist schlicht.

Ein solches $\varphi \in M$ hat genau dann den ganzen Einheitskreis E als Bild $\varphi(U_1)$, wenn

$$|\varphi'(0)| \geq |f'(0)| \text{ für alle } f \in M.$$

Anders ausgedrückt: $|\varphi'(0)|$ muss maximal sein unter allen Werten $|f'(0)|$ wo $f \in M$.

Beweis. „$\Rightarrow$“: Es sei $\varphi(U_1) = E$ und $f : U_1 \to E$ eine Funktion aus M. Dann ist die Funktion

$$h := f \circ \varphi^{-1} : E \to f(U_1) \subset E$$

holomorph auf E mit $|h(z)| < 1$ für alle $z \in E$. Aus der Cauchyschen Ungleichung folgt

$$|h'(0)| \leq \frac{1}{r}$$

für alle $r < 1$ und deswegen $|h'(0)| \leq 1$. Aber wegen $f = h \circ \varphi$ folgt mit der Kettenregel

$$|f'(0)| = |h'(\varphi(0)) \cdot \varphi'(0)| = |h'(0)| \cdot |\varphi'(0)| \leq |\varphi'(0)|.$$

„$\Leftarrow$“: Nun sei $|\varphi'(0)| \geq |f'(0)|$ für alle $f \in M$. Wir müssen $\varphi(U_1) = E$ zeigen. Andernfalls existiert ein $a \in E$ mit $a \notin \varphi(U_1)$. Wir betrachten die holomorphe Funktion

$$\begin{array}{ccccccccc} F: & z & \mapsto & \varphi(z) & \mapsto & \dfrac{\varphi(z)-a}{1-\bar{a}\varphi(z)} & \mapsto & ln\left(\dfrac{\varphi(z)-a}{1-\bar{a}\varphi(z)}\right), \\ & \in U & \text{bihol} & \in E & \text{bihol} & \in E \setminus \{0\} & \text{bihol} & \in \{w : Re(w) < 0\}. \end{array}$$

Wegen $Re(F(z)) < 0$ und $Re(F(0)) < 0$ ist stets $F(z) + \overline{F(0)} \neq 0$, und deswegen

$$f(z) := \frac{F(z) - F(0)}{F(z) + \overline{F(0)}}$$

holomorph auf U_1.

Als nächstes zeigen wir $f \in M$:

1) Mit $u := F(z)$ und $v := F(0)$ gilt für alle $z \in U_1$

$$\begin{aligned} |f(z)|^2 &= \left|\frac{u-v}{u+\bar{v}}\right|^2 \\ &= \frac{u\bar{u} - u\bar{v} - \bar{u}v + v\bar{v}}{u\bar{u} + uv + \bar{u}\bar{v} + v\bar{v}} \\ &= 1 - \frac{u\bar{v} + \bar{u}v + uv + \bar{u}\bar{v}}{|u+\bar{v}|^2} \\ &= 1 - \frac{(u+\bar{u})(v+\bar{v})}{|u+\bar{v}|^2} \\ &= 1 - 4\underbrace{\frac{Re(u)Re(v)}{|u+\bar{v}|^2}}_{>0} \end{aligned}$$

wegen $Re(u) < 0$ und $Re(v) < 0$.

2) Es ist $f(0) = \dfrac{F(0) - F(0)}{F(0) + \overline{F(0)}} = 0$.

3) Als Hintereinanderschaltung biholomorpher Funktionen ist f schlicht.

Schließlich zeigen wir

$$|f'(0)| > |\varphi'(0)|$$

und erhalten einen Widerspruch zur Maximalität von $|\varphi'(0)|$. In der Tat, es ist

$$\begin{aligned} f'(0) &= \left(1 - \frac{F(0) + \overline{F(0)}}{F(z) + \overline{F(0)}}\right)'_{z=0} \\ &= -\frac{F(0) + \overline{F(0)}}{(F(0) + \overline{F(0)})^2} \cdot F'(0) \\ &= -\frac{F'(0)}{2Re(F(0)} \\ &= -\frac{F'(0)}{2ln|a|} \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
F'(0) &= \left(ln\frac{\varphi(z)-a}{1-\bar{a}\varphi(z)}\right)'_{z=0} \\
&= \frac{\varphi'(z)(1-\bar{a}\varphi(z))+(\varphi(z)-a)\bar{a}\varphi'(z)}{(1-\bar{a}\varphi(z))^2}\cdot\frac{1-\bar{a}\varphi(z)}{\varphi(z)-a}\Big|_{z=0} \\
&= \frac{\varphi'(0)-a\bar{a}\varphi'(0)}{-a} \\
&= \varphi'(0)\left(\bar{a}-\frac{1}{a}\right).
\end{aligned}$$

Insgesamt haben wir berechnet

$$\left|\frac{f'(0)}{\varphi'(0)}\right| = \left|\frac{\bar{a}-\frac{1}{a}}{2ln(|a|)}\right| = \frac{|a|^2-1}{2|a|ln(|a|)}$$

mit $|a|<1$. Die Aussage läuft also darauf hinaus, für $t\in\mathbb{R}$, $0<t<1$, zu zeigen, dass

$$\frac{t^2-1}{2tln(t)} > 1, \qquad \text{bzw.} \qquad t^2-1 < 2tln(t)$$

ist. Dazu setzen wir

$$s(t) := t^2-1-2tln(t).$$

Dann ist $s(1)=0$ und für $0<t<1$

$$s'(t) = 2t-2ln(t)-2 = 2(t-1-ln(t)).$$

Es ist also auch $s'(1)=0$ und für $0<t<1$

$$s''(t) = 2(1-\frac{1}{t}) < 0.$$

Es folgt $s'(t)>0$ und $s(t)<0$ für $0<t<1$. □

Dritter Beweisschritt: *Es gibt eine Funktion $\varphi\in M$ mit der Extremalbedingung*

$$|\varphi'(0)| \geq |f'(0)| \text{ für alle } f\in M.$$

Diese Aussage wurde von Riemann selbst als wahr unterstellt, und nicht weiter begründet. Dass auch sie bewiesen werden muss, wurde erst später von Weierstraß bemerkt.

Beweis. Wegen $U_1\subset E$ gehört z.B. die Funktion $f(z)=z$ zu M. Deswegen ist M nicht leer. Wegen $dz/dz=1$ ist also

$$m := sup\{|f'(0)| : f\in M\} \geq 1.$$

In M gibt es eine Folge von Funktionen f_n mit $|f'_n(0)|\to m$ für $n\to\infty$. Wegen der Eigenschaft 1) ist diese Folge auf U_1 beschränkt, insbesondere gleichmäßig beschränkt auf Kompakta. Nach dem Satz von Montel gibt es eine Teilfolge f_{n_k}, welche auf U_1 kompakt gegen eine Grenzfunktion φ konvergiert. Zu zeigen ist $\varphi\in M$. Dazu nehmen wir o.B.d.A. an, dass die Folge f_n selbst gegen φ kompakt konvergiert.

1) Für alle $z \in U_1$ ist

$$|\varphi(z)| = |\lim f_n(z)| = \lim |f_n(z)| \leq 1.$$

Wenn $|\varphi(z)| = 1$ gelten würde für ein $z \in U_1$, so würde aus dem Maximumprinzip folgen $\varphi = const.$ Wegen

$$|\varphi'(0)| = \lim |f_n'(0)| = m \geq 1$$

ist aber φ sicher nicht konstant. Also gilt $|\varphi(z)| < 1$ für alle $z \in U_1$.

2) $\varphi(0) = \lim f_n(0) = 0$.

3) φ ist schlicht. Dazu beweisen wir einen Hilfssatz:

Satz 3.16 *Ist $U \subset \mathbb{C}$ offen, f_n eine Folge von auf U holomorphen schlichten Funktionen, kompakt konvergent gegen eine nicht-konstante Funktion φ auf U, dann ist auch die Grenzfunktion φ schlicht.*

Beweis. Wenn φ nicht schlicht wäre, gäbe es Punkte $z_1 \neq z_2 \in U$ mit $w := \varphi(z_1) = \varphi(z_2)$. Wir betrachten die Funktionenfolge $f_n(z) - w$ auf U. Sie konvergiert kompakt gegen $\varphi(z) - w$. Auch auf jeder kleinen Kreisscheibe $B_i \subset U$, $i = 1, 2$, um z_i konvergiert $(f_n(z) - w)|B_i$ kompakt gegen $(\varphi(z) - w)|B_i$. Die Grenzfunktion hat eine Nullstelle in $z_i \in B_i$. Nach Satz 3.2 iii) müssen für $n \geq n_0$ dann auch alle Funktionen $f_n(z) - w$ Nullstellen in beiden Kreisscheiben besitzen. Diese Funktionen f_n wären nicht schlicht. Widerspruch! $\square$

Damit ist der Riemannsche Abbildungssatz bewiesen. Was für ein unglaublicher Mathematiker Riemann doch war!

Aufgabe 3.17 *Warum ist eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion $f = u + iv$, deren Realteil u beschränkt ist, konstant?* (H 90, T 1, A 3)

Index