

Geometrie

Wolf P. Barth

Sommersemester 04

Version vom 28. Februar 2008

Mathematisches Institut der Universität
Bismarckstr. 1 1/2, D - 91054 Erlangen
e-mail: barth@mi.uni-erlangen.de

Inhaltsverzeichnis

0 Einführung	2	3.2 Der projektive Raum $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$. . .	78
0.1 Gruppen und Invarianten	3	3.3 Projektivitäten	85
0.2 Affine Unterräume	10	3.4 Das Doppelverhältnis	91
1 Euklidische Geometrie	15	3.5 Lineare Geometrie der projektiven Ebene	99
1.1 Das euklidische Skalarprodukt . . .	15	3.6 Das Dualitätsprinzip	104
1.2 Abstände, Winkel, Flächen	19	4 Kegelschnitte in der projektiven Ebene	109
1.3 Dreiecke	29	4.1 Projektive Klassifikation der Kegelschnitte	109
1.4 Kreise	35	4.2 Sekanten, Tangenten und Polaren	113
1.5 Kreise am Dreieck	42	4.3 Parametrisierung von Kegelschnitten	122
2 Affine Geometrie	53	4.4 Projektivitäten auf Kegelschnitten	131
2.1 Affine Transformationen	53	4.5 Systeme von Kegelschnitten	140
2.2 Baryzentrische Koordinaten	57	5 Nichteuklidische Geometrie	150
2.3 Ellipsen	64	5.1 Elliptische Geometrie	150
2.4 Kegelschnitte	68	5.2 Hyperbolische Geometrie	155
3 Projektive Geometrie	74		
3.1 Die projektive Ebene	74		

0 Einführung

Dies ist die etwas modifizierte Wiederholung einer Vorlesung, die ich unter dem Titel „Projektive Geometrie“ in den Wintersemestern 1994/95 und 97/98 hielt, sowie als „Geometrie“ im Sommersemester 2001. Damals wollte ich in einer einsemestrigen Geometrie-Vorlesung den gesamten Stoff abdecken, dessen Kenntnis ich von einem Studenten in einer mündlichen Geometrie-Prüfung des Hauptexamens erwarte. Auch diesmal ist dies wieder meine Absicht.

(Projektive) Geometrie lese ich sehr gerne. An Voraussetzungen braucht man nämlich nicht mehr als die Kenntnis der Linearen Algebra. Die Inhalte kann man meist zeichnerisch illustrieren und gerade im Zeitalter der Computer-Grafik ist das sehr reizvoll. Außerdem sind diese Inhalte oft einfach zu formulieren und trotzdem überraschend.

Ziel dieser Vorlesung ist eine Einführung in die projektive Geometrie. Zuvor sollen Einführungen in die euklidische und in die affine Geometrie gegeben werden. Dabei werden Sätze aus der Dreiecksgeometrie und der Geometrie des Kreises besprochen werden, wie z.B. die wichtigsten Eigenschaften des Feuerbachkreises. Auch soll an die elementarsten Eigenschaften der Kegelschnitte erinnert werden. Als eine Art Anhang möchte ich in Kapitel 5 kurz auf die beiden nicht-euklidischen Geometrien eingehen: die elliptische und die hyperbolische Geometrie. Wenn man den Formalismus der projektiven Geometrie zur Verfügung hat, ist dies recht einfach. Allerdings versuche ich das in diesem Semester erst zum zweiten Mal. Beim ersten Mal war es für mich schon schwierig, geeignete Lehrbücher darüber zu finden. Deswegen ist dieses Kapitel auch nur sehr kurz geraten.

Die Beziehung zwischen euklidischer, affiner und projektiver Geometrie versteht man am besten von dem Standpunkt aus, den Felix Klein in seinem „Erlanger Programm“ (1872) einnahm. Er brachte hier nämlich den Gesichtspunkt ins Gespräch, daß jede Art von Geometrie etwas mit einer Transformationsgruppe zu tun habe. Die *Geometrie* ist *die Gesamtheit der Eigenschaften, welche sich bei den Transformationen der Gruppe nicht ändern*. Für die drei erwähnten Arten von Geometrie sind dies die folgenden Gruppen und Räume, auf denen sie operieren:

Geometrie	Raum	Gruppe
euklidische	\mathbb{R}^n	Bewegungsgruppe
affine	\mathbb{K}^n	affine Gruppe
projektive	$\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$	projektive Gruppe

Wir werden in dieser Vorlesung die Kenntnis der betreffenden Gruppen nicht voraussetzen, sondern diese Gruppen parallel zu unseren geometrischen Untersuchungen einführen.

Felix Klein hat mit seinem Erlanger Programm den Namen der Stadt Erlangen bei Mathematikern unsterblich gemacht. Er selbst blieb allerdings nur wenige Jahre hier, bevor er im damaligen Land Preußen sehr viel Einfluß auf die Kultus-Bürokratie, und damit auf die Lehrerausbildung gewann. Sein Erlanger Programm ist unter dem Titel „Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen“ in Band 43 der Mathematischen Annalen (1893) und in seinen Gesammelten Werken abgedruckt. Etwas ausführlicher sind seine Darstellungen im zweiten der drei Bände

F. Klein: Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus. Dritte Auflage, Springer-Verlag (Nachdruck 1968)

Neben diesem Buch habe ich bei meiner Darstellung der euklidischen und affinen Geometrie, die ich vor der Behandlung der projektiven Geometrie geben möchte, noch die folgenden Bücher zu Rate gezogen:

- H.S.M Coxeter, S.L. Greitzer: Geometry Revisited, The Mathem. Assoc. of America (1967),
- G. Fischer: Analytische Geometrie, Vieweg (1979),
- W. Klingenberg: Lineare Algebra und Geometrie, Springer Hochschultext (1984),
- M. Koecher: Lineare Algebra und analytische Geometrie, Springer Grundwissen (1985),
- M. Koecher, A. Krieg: Ebene Geometrie, Springer Lehrbuch (1993).

Bei meiner Darstellung der projektiven Geometrie habe ich sehr von holländischen Vorlesungsskripten des Kollegen *J. Simonis* profitiert, der zu Beginn der 70er Jahre an der Universität Leiden diese Vorlesung mehrmals hielt, als ich auch gerade dort war. Simonis selbst hat offenbar intensiv das Buch

J.G. Semple, G.T. Kneebone: Algebraic Projective Geometry, Oxford, Clarendon Press (1952) zu Rate gezogen. Ein sehr schönes, und erfreulich dünnes Buch ist auch

P. Samuel: Projective Geometry, Springer (1988).

Einige der Aufgaben habe ich dem Buch

Fukagawa, H., Pedoe, D.: Japanese Temple Geometry Problems - San Gaku. Winnipeg 1989 entnommen. Sie sind mit [Fu-Pe] gekennzeichnet. Dieses Buch gibt, soweit ich weiß, einen vollständigen Überblick über die japanische Tempelgeometrie, die in der Zeit der japanischen Isolation (1603-1867) entstanden ist. Diese Geometrie übt auf mich einen eigenartigen Reiz aus. Sie ist das beste Beispiel das wir haben, dafür, wie eine Geometrie aussehen könnte, die auf einem anderen Planeten entstanden ist.

Als erstes möchte ich F. Kleins Prinzip der Gruppen und ihrer Invarianten an einigen elementaren Beispielen erläutern.

0.1 Gruppen und Invarianten

Die Gruppe der Linearen Algebra ist die allgemeine lineare Gruppe

$$GL(n, \mathbb{K}) = \{M \in M(n \times n, \mathbb{K}) : \det(M) \neq 0\}.$$

Ihr neutrales Element ist die Einheitsmatrix $\mathbb{1}$, die Gruppenoperation ist die Matrizenmultiplikation, und wegen $\det(M) \neq 0$ besitzt jede dieser Matrizen eine Inverse. Alle Aussagen der Linearen Algebra im \mathbb{K}^n , soweit sie nicht ein Skalarprodukt benötigen, sind invariant unter der $GL(n, \mathbb{K})$. Insbesondere wird der Nullvektor $\mathbf{0} \in \mathbb{K}^n$ unter allen linearen Transformationen fest gelassen. Das werden wir jetzt ändern:

Definition 0.1 Eine affine Transformation $F : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ ist eine Abbildung

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{t} + A \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{t} \in \mathbb{K}^n, A \in GL(n, \mathbb{K})$$

Der Vektor \mathbf{t} verschiebt den Nullpunkt aus seiner Sonderlage. Die affinen Transformationen bilden eine Gruppe:

$$F_1(\mathbf{x}) = \mathbf{t}_1 + A_1 \cdot \mathbf{x}, F_2(\mathbf{x}) = \mathbf{t}_2 + A_2 \cdot \mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad F_1(F_2(\mathbf{x})) = \mathbf{t}_1 + A_1 \cdot \mathbf{t}_2 + A_1 \cdot A_2 \cdot \mathbf{x},$$

und

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{t} + A \cdot \mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad F^{-1}(\mathbf{x}) = -A^{-1} \cdot \mathbf{t} + A^{-1} \cdot \mathbf{x}.$$

Die affine Gruppe des \mathbb{R}^n enthält die beiden folgenden Untergruppen: die Gruppe der *Bewegungen*

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{t} + U \cdot \mathbf{x}, \quad U \text{ orthogonal},$$

und die etwas größere *konforme Gruppe*

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{t} + c \cdot U \cdot \mathbf{x}, \quad U \text{ orthogonal und } 0 \neq c \in \mathbb{R}.$$

Bewegungen heißen in der Schule *Kongruenzabbildungen*, während die Transformationen der konformen Gruppe *Ähnlichkeitsabbildungen* heißen.

Dabei erinnern wir uns: Eine Matrix $U \in M(n \times n, \mathbb{R})$ heißt *orthogonal*, wenn $U \cdot U^T = \mathbb{1}$. Sind U und V orthogonal, so ist wegen

$$UV \cdot (UV)^T = U \cdot V \cdot V^T \cdot U^T = U \cdot U^T = \mathbb{1}$$

auch ihr Produkt UV orthogonal. Und wegen

$$U^{-1} \cdot (U^{-1})^T = U^T \cdot U = \mathbb{1}$$

ist auch U^{-1} orthogonal. Deswegen bilden die orthogonalen $n \times n$ -Matrizen eine Gruppe, und dann auch die eben beschriebenen Teilmengen in der Gruppe der Bewegungen des \mathbb{R}^n .

An diesen drei Beispielen von Gruppen kann man jetzt sehr schön sehen, welche Größen unter deren Transformationen invariant bleiben:

Orthogonale Abbildungen U erhalten das euklidische Skalarprodukt

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Deswegen erhalten Bewegungen alle Größen die man auf Skalarprodukte von Differenzen von Vektoren zurückführen kann. Zum Beispiel den Abstand

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y})}$$

zweier Vektoren oder den Cosinus eines Winkels

$$\cos \angle(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{y}) = \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{a}, \mathbf{y} - \mathbf{a})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|}.$$

Eine Figur (z.B. ein Dreieck) ist *kongruent* zu der Figur, welche nach einer Bewegung daraus entsteht.

Eine Lineare Abbildung mit einer Matrix $c \cdot U$, wo U orthogonal und $0 \neq c \in \mathbb{R}$ ist, streckt alle Längen mit demselben Faktor $|c|$. Längen bleiben unter der konformen Gruppe also nicht

erhalten. Dagegen ändern sich Winkel nicht. Und auch Verhältnisse von Abständen bleiben gleich. Das Bild einer Figur unter einer konformen Abbildung (mit $c \neq \pm 1$) ist nicht mehr kongruent zur ursprünglichen Figur, sondern dazu nur noch *ähnlich*.

Eine lineare Abbildung mit einer Matrix $A \in GL(n, \mathbb{R})$ streckt Vektoren auch, aber i.A. nicht alle mit dem gleichen Faktor. Deswegen bleiben bei affinen Transformationen nicht einmal Verhältnisse von Abständen erhalten. Aber: Verhältnisse von Abständen auf derselben Geraden ändern sich nicht. Das kann man, sogar über einem beliebigen Körper \mathbb{K} , wie folgt präzisieren.

Zwei Punkte $\mathbf{u} \neq \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n$ spannen die Gerade

$$\mathbf{uv} = \{\mathbf{u} + \lambda(\mathbf{v} - \mathbf{u}), \lambda \in \mathbb{K}\} = \{(1 - \lambda)\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}, \lambda \in \mathbb{K}\}$$

auf. Jedem Punkt \mathbf{x} auf dieser Geraden ordnet man ein Teilverhältnis zu:

Definition 0.2 (Teilverhältnis) Sei

$$\mathbf{x} = (1 - \lambda)\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$$

ein Punkt auf der Geraden \mathbf{uv} . Dann heißt

$$TV(\mathbf{x}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) := \frac{\lambda}{\lambda - 1}$$

das Teilverhältnis von \mathbf{x} in Bezug auf \mathbf{u} und \mathbf{v} .

Dieses Teilverhältnis ist eine affine Invariante: Für jede affine Transformation $F : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ gilt

$$TV(\mathbf{x}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = TV(F(\mathbf{x}); F(\mathbf{u}), F(\mathbf{v})).$$

Beweis. Sei $\mathbf{x} = (1 - \lambda)\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$. Wir beweisen die Invarianz des Teilverhältnisses erst für eine lineare Abbildung $F : \mathbf{x} \mapsto A \cdot \mathbf{x}$ und dann für eine Translation $F : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{t} + \mathbf{x}$. Dann ändert sich das Teilverhältnis auch nicht bei Zusammensetzungen dieser Arten von Abbildungen.

Für eine lineare Abbildung F mit Matrix A ist

$$F(\mathbf{x}) = A \cdot ((1 - \lambda)\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}) = (1 - \lambda)A \cdot \mathbf{u} + \lambda A \cdot \mathbf{v} = (1 - \lambda)F(\mathbf{u}) + \lambda F(\mathbf{v}).$$

Die Zahl λ ändert sich nicht, und deswegen auch nicht das Teilverhältnis.

Für eine Translation $F : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{t} + \mathbf{x}$ ist

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{t} + (1 - \lambda)\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v} = (1 - \lambda)(\mathbf{t} + \mathbf{u}) + \lambda(\mathbf{t} + \mathbf{v}) = (1 - \lambda)F(\mathbf{u}) + \lambda F(\mathbf{v}).$$

Auch hier bleibt λ und damit das Teilverhältnis erhalten. □

Im \mathbb{R}^n kann man das Teilverhältnis wie folgt als einen Quotient von Abständen auf der Geraden \mathbf{uv} interpretieren:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} - \mathbf{u}\| &= \|\lambda\mathbf{v} - \lambda\mathbf{u}\| = |\lambda| \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|, \\ \|\mathbf{x} - \mathbf{v}\| &= \|(1 - \lambda)\mathbf{u} + (\lambda - 1)\mathbf{v}\| = |\lambda - 1| \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|, \end{aligned}$$

$$|TV(\mathbf{x}; \mathbf{u}, \mathbf{v})| = \frac{|\lambda|}{|\lambda - 1|} = \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{u}\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{v}\|}.$$

Der Absolutbetrag $|TV|$ ist ein Abstandsquotient. Aber TV hat noch ein Vorzeichen! Es ist (anders als in der Schule) positiv, wenn \mathbf{x} außerhalb der Strecke $\mathbf{u}\mathbf{v}$ liegt ($\lambda < 0$ oder $\lambda > 1$), da sind die Vektoren $\mathbf{x} - \mathbf{u}$ und $\mathbf{x} - \mathbf{v}$ gleich gerichtet, und TV ist negativ, wenn der Punkt \mathbf{x} auf der Strecke $\mathbf{u}\mathbf{v}$ liegt ($0 < \lambda < 1$), da sind die Vektoren $\mathbf{x} - \mathbf{u}$ und $\mathbf{x} - \mathbf{v}$ entgegengesetzt gerichtet. Insbesondere hat der *Mittelpunkt*

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{v})$$

der Strecke $\mathbf{u}\mathbf{v}$ das Teilverhältnis

$$TV(\mathbf{m}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = -1.$$

Ein kleines Problem habe ich bis jetzt unter den Teppich gekehrt: Wenn $\lambda = 1$, also $\mathbf{x} = \mathbf{v}$ ist, dann ist das Teilverhältnis

$$TV(\mathbf{x}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = TV(\mathbf{v}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\lambda}{0}$$

nicht definiert. Das ist nicht sehr schlimm, weil es ja nur diesen einen Punkt $\mathbf{x} = \mathbf{v}$ betrifft. Aber wenn man nicht will, dass dieser Punkt eine Sonderrolle auf der Geraden $\mathbf{u}\mathbf{v}$ spielt, müsste man ihm das Teilverhältnis

$$TV(\mathbf{v}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \infty$$

zuordnen. Das sollte man auch tun. Denn es gibt ein ganz ähnliches Problem, wenn man sich die Werte anschaut, die bei TV herauskommen:

Satz 0.1 *Das Teilverhältnis definiert eine bijektive Abbildung*

$$\mathbf{u}\mathbf{v} \setminus \{\mathbf{v}\} \ni \mathbf{x} \quad \mapsto \quad TV(\mathbf{x}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{K} \setminus \{1\}.$$

Beweis. Ein Punkt $\mathbf{x} = (1 - \lambda)\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$ ist durch $\lambda \in \mathbb{K}$ eindeutig festgelegt. Und für $\lambda \neq 1$ ist dieses λ vermöge

$$TV = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{TV}{TV - 1}$$

durch das Teilverhältnis eindeutig bestimmt. Dies zeigt, dass die oben angegebene Abbildung injektiv ist.

Umgekehrt kann man für jedes $TV \neq 1$ die letzte Gleichung nach $\lambda = TV/(TV - 1)$ auflösen. Die Abbildung ist auch surjektiv. \square

Der einzige Ausnahme-Wert, der nicht als ein Teilverhältnis vorkommt ist $TV = 1$. Dazu würde ein Punkt außerhalb der Strecke $\mathbf{u}\mathbf{v}$ gehören, der von \mathbf{u} und \mathbf{v} denselben Abstand besitzt. Diesen Punkt gibt es halt nicht. Wenn es ihn gäbe, wäre das der Punkt ∞ . Mit diesem Punkt könnten wir Satz 0.1 so formulieren:

Die gebrochen-rationale Funktion

$$\mathbb{K} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{K} \cup \{\infty\}, \quad \lambda \mapsto \frac{\lambda}{\lambda - 1}$$

ist bijektiv.

In diesem einführenden Abschnitt kann ich leider nicht die projektive Gruppe erklären und den projektiven Raum, auf dem sie wirkt. Das wäre für diesen Paragraphen zu aufwendig. Aber im eindimensionalen Fall möchte ich es doch tun, weil dann nämlich noch zwei ganz interessante Gruppen zu unserer Liste hinzukommen.

Dazu definieren wir die eindimensionale projektive Gruppe $PGL(1, \mathbb{K})$ als die Gruppe der gebrochen-linearen Transformationen

$$\mathbb{K} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{K} \cup \{\infty\}, \quad x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{K}.$$

Hier müssen wir den Fall

$$ad - bc = 0$$

ausschließen, weil sonst die gebrochen lineare Transformation eine konstante Funktion wäre. Mit dieser Einschränkung bilden die gebrochen-rationalen Funktionen eine Gruppe: Falls

$$F_1(x) = \frac{a_1x + b_1}{c_1x + d_1}, \quad F_2(x) = \frac{a_2x + b_2}{c_2x + d_2},$$

dann ist

$$F_1(F_2(x)) = \frac{a_1 \frac{a_2x + b_2}{c_2x + d_2} + b_1}{c_1 \frac{a_2x + b_2}{c_2x + d_2} + d_1} = \frac{a_1(a_2x + b_2) + b_1(c_2x + d_2)}{c_1(a_2x + b_2) + d_1(c_2x + d_2)} = \frac{(a_1a_2 + b_1c_2)x + a_1b_2 + b_1d_2}{(c_1a_2 + d_1c_2)x + c_1b_2 + d_1d_2}.$$

Die Koeffizienten in der Funktion $F_1(F_2(x))$ sind genau die im Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix}.$$

Jede gebrochen-rationale Funktion wird durch eine invertierbare 2×2 -Matrix beschrieben, und die Hintereinanderausführung der gebrochen-rationalen Funktionen gehört zum Matrizenprodukt. Dann ist klar, dass die Identität

$$F(x) = x = \frac{1 \cdot x + 0}{0 \cdot x + 1}$$

zur Einheitsmatrix gehört, und die Umkehrung einer gebrochen-rationalen Funktion zur Umkehrmatrix.

Affine Transformationen

$$F(x) = ax + b = \frac{a \cdot x + b}{0 \cdot x + 1}$$

sind spezielle gebrochen lineare Transformationen zu Matrizen der Bauart

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

So wird die eindimensionale affine Gruppe eine Untergruppe der projektiven Gruppe $PGL(1, \mathbb{K})$.

Nachdem wir uns jetzt auf den eindimensionalen Vektorraum K beschränken, können wir seine Elemente als Zahlen in \mathbb{K} ansehen und das Teilverhältnis als

$$TV(x; u, v) = \frac{x - u}{x - v}$$

definieren. Das Teilverhältnis ist unter projektiven Transformationen nicht mehr invariant. Aber es gibt auch dafür eine Invariante:

Definition 0.3 Sind x, y, u, v vier verschiedene Zahlen in \mathbb{K} , dann heißt

$$DV(x, y; u, v) := \frac{x - u}{x - v} : \frac{y - u}{y - v}$$

ihre Doppelverhältnis.

Dass dieses Doppelverhältnis in der Tat invariant unter projektiven Transformationen ist, sieht man am einfachsten, wenn man seine Schreibweise der Matrizenrechnung anpasst. Dazu gehen wir von der Zahl $x \in \mathbb{K}$ über zum Vektor

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2.$$

Und jedem Vektor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } x_0 \neq 0$$

ordnen wir die Zahl $x = x_1/x_0 \in \mathbb{K}$ zu. Der gebrochen linearen Funktion

$$\frac{ax + b}{cx + d} \quad \text{entspricht so} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix},$$

die Multiplikation mit der zugehörigen Matrix.

Wegen

$$\det(\mathbf{x}', \mathbf{u}') = \det \begin{pmatrix} x & u \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = x - u$$

können wir das Doppelverhältnis umschreiben

$$DV(x, y; u, v) = \frac{\det \begin{pmatrix} x & u \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} x & v \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} : \frac{\det \begin{pmatrix} y & u \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} y & v \\ 1 & 1 \end{pmatrix}},$$

und die Invarianz des Doppelverhältnisses unter projektiven Transformationen folgt unmittelbar aus dem Determinantenmultiplikationssatz.

Jetzt gehen wir über zu $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Die Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$$

mit Determinante

$$a\bar{a} - b\bar{b} = 1$$

bilden eine Untergruppe der $GL(2, \mathbb{C})$. (Das ist leicht nachzurechnen.) Die Transformationen dieser Untergruppe führen den komplexen Einheitskreis

$$z \in \mathbb{C} : |z| < 1$$

in sich über: Für $z\bar{z} < 1$ ist wegen $a\bar{a} > b\bar{b}$

$$\begin{aligned} a\bar{a}(1 - z\bar{z}) &> b\bar{b}(1 - z\bar{z}) \\ a\bar{a} \cdot z\bar{z} + b\bar{b} &< b\bar{b} \cdot z\bar{z} + a\bar{a} \\ a\bar{a} \cdot z\bar{z} + a\bar{b} \cdot z + b\bar{a} \cdot \bar{z} + b\bar{b} &< b\bar{b} \cdot z\bar{z} + a\bar{b} \cdot z + b\bar{a} \cdot \bar{z} + a\bar{a} \\ \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}} \cdot \frac{\bar{a}z + \bar{b}}{\bar{b}\bar{z} + a} &= \frac{a\bar{a} \cdot z\bar{z} + a\bar{b} \cdot z + b\bar{a} \cdot \bar{z} + b\bar{b}}{b\bar{b} \cdot z\bar{z} + a\bar{b} \cdot z + b\bar{a} \cdot \bar{z} + a\bar{a}} \\ &< 1. \end{aligned}$$

Diese Gruppe auf dem Einheitskreis ist die Gruppe der berühmten *nicht-euklidischen Geometrie*.

Aufgabe 0.1 Zeigen Sie: $U \in GL(2, \mathbb{R})$ ist genau dann orthogonal, wenn

$$U = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad U = \begin{pmatrix} c & s \\ s & -c \end{pmatrix}$$

mit $c^2 + s^2 = 1$.

Aufgabe 0.2 Bestimmen Sie alle Bewegungen $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $F \circ F = id_{\mathbb{R}^2}$.

Aufgabe 0.3 Ist $F : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{t} + U \cdot \mathbf{x}$, $U \in O(2)$, eine Bewegung, so heißt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ Fixpunkt von F , wenn $F(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. Zeigen Sie:

- Wenn $\det(U) = 1$, dann ist die Menge der Fixpunkte von F entweder leer, ein einziger Punkt, oder die ganze Ebene.
- Wenn $\det(U) = -1$, dann ist die Menge der Fixpunkte von F entweder leer oder eine Gerade.

Aufgabe 0.4 Zeigen Sie, dass das Teilverhältnis $TV(\mathbf{x}; \mathbf{u}, \mathbf{v})$ folgendermaßen von der Reihenfolge der drei Punkte \mathbf{x} , \mathbf{u} und \mathbf{v} abhängt:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{x}; \mathbf{u}, \mathbf{v} : & TV \\ \mathbf{u}; \mathbf{v}, \mathbf{x} : & 1 - 1/TV \\ \mathbf{v}; \mathbf{x}, \mathbf{u} : & 1/(1 - TV) \end{array} \quad \begin{array}{ll} \mathbf{x}; \mathbf{v}, \mathbf{u} : & 1/TV \\ \mathbf{u}; \mathbf{x}, \mathbf{v} : & TV/(TV - 1) \\ \mathbf{v}; \mathbf{u}, \mathbf{x} : & 1 - TV \end{array}$$

Aufgabe 0.5 a) Zeigen Sie für je drei verschiedene Punkte $\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{K}$

$$TV(\mathbf{x}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) \cdot TV(\mathbf{u}; \mathbf{v}, \mathbf{x}) \cdot TV(\mathbf{v}; \mathbf{x}, \mathbf{u}) = -1.$$

b) Zeigen Sie für je vier verschiedene Punkte $\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{K}$

$$TV(\mathbf{x}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) \cdot TV(\mathbf{x}; \mathbf{v}, \mathbf{w}) \cdot TV(\mathbf{x}; \mathbf{w}, \mathbf{u}) = 1.$$

0.2 Affine Unterräume

Wir betrachten Vektoren $\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n$. Die Komponenten des Vektors \mathbf{v} nennen wir v_ν ($\nu = 1, \dots, n$), also $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$.

Die Fundamentalaufgabe der linearen Algebra besteht darin, ein lineares Gleichungssystem zu lösen. Ein *homogenes* lineares Gleichungssystem hat die Form

$$\sum_{\nu=1}^n a_\mu^\nu v_\nu = 0 \quad (\mu = 1, \dots, m).$$

Jeder Untervektorraum $V \subset \mathbb{K}^n$ ist der Lösungsraum eines linearen Gleichungssystems. Es gibt somit zwei prinzipiell verschiedene Methoden, einen Untervektorraum $V \subset \mathbb{K}^n$ zu beschreiben:

- *Explizit*, d.h., durch ein Erzeugendensystem $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d$

$$V = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n : \mathbf{v} = \sum_{\mu=1}^d c^\mu \mathbf{v}_\mu, c^1, \dots, c^d \in \mathbb{K} \right\}.$$

- *Implizit*, d.h. durch ein Gleichungssystem

$$V = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n : \sum_{\nu=1}^n a_\mu^\nu v_\nu = 0 \text{ für } \mu = 1, \dots, m \right\}.$$

Der Übergang von einer impliziten Beschreibung zu einer expliziten Beschreibung eines Untervektorraums besteht in der Lösung des Gleichungssystems. Aber auch der Übergang von einer expliziten Beschreibung zu einer impliziten Beschreibung besteht in der Lösung eines homogenen Gleichungssystems: Sind nämlich Erzeugende $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d \in V$ gegeben, so sucht man Zeilenvektoren $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$ die den Raum

$$\left\{ \mathbf{a} \in \mathbb{K}^n : \sum_{\nu=1}^n v_{\mu,\nu} a_\nu = 0 \text{ für } \mu = 1, \dots, d \right\}$$

erzeugen.

Die Fundamentaloperationen beim Umgang mit Untervektorräumen sind die Bildung des Durchschnitts $V_1 \cap V_2$ und des Verbindungsraums $V_1 + V_2$ zweier Untervektorräume $V_1, V_2 \subset \mathbb{K}^n$. Die *Dimensionsformel*

$$\dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$$

gibt den Zusammenhang zwischen den Dimensionen dieser Räume.

Entsprechend der Beschreibung der Untervektorräume V_1, V_2 ist die Ermittlung von Durchschnitt oder Verbindungsraum entweder einfach (Zusammenfügen der Gleichungen, bzw. Erzeugendensysteme) oder führt auf Lösung eines linearen Gleichungssystems (LGS):

Beschreibung	$V_1 \cap V_2$	$V_1 + V_2$
implizit	einfach	LGS
explizit	LGS	einfach.

Neben homogenen linearen Gleichungssystemen löst man in der linearen Algebra auch *inhomogene* lineare Gleichungssysteme

$$\sum_{\nu=1}^n a_{\mu}^{\nu} v_{\nu} = b_{\mu}, \quad \mu = 1, \dots, m.$$

Falls der Spaltenvektor \mathbf{b} auf der rechten Seite $\neq \mathbf{0}$ ist, so ist der Nullvektor $\mathbf{0}$ keine Lösung des Systems, und die Lösungsmenge V kein Untervektorraum mehr. Man hat den Struktursatz: *Die Lösungsmenge V des inhomogenen Systems erhält man, indem man zu einer speziellen Lösung \mathbf{t} des inhomogenen Systems alle Vektoren aus dem Lösungsraum V^0 des homogenen Systems addiert:*

$$V = \mathbf{t} + V^0 = \{\mathbf{t} + \mathbf{v} : \mathbf{v} \in V^0\}.$$

Den Lösungsraum $V \subset \mathbb{K}^n$ eines (homogenen oder) inhomogenen Systems nennt man *affinen Unterraum* des \mathbb{K}^n , den zugehörigen Untervektorraum $V^0 \subset \mathbb{K}^n$ mit $V = \mathbf{t} + V^0$ nennen wir den *zugehörigen parallelen Untervektorraum* zum affinen Unterraum V . Die *Dimension* eines affinen Unterraums ist die Dimension des zugehörigen Untervektorraums. Affine Unterräume der Dimension

$$\left. \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n-1 \end{array} \right\} \text{ heißen } \left\{ \begin{array}{l} \text{Punkte,} \\ \text{Geraden,} \\ \text{Ebenen,} \\ \vdots \\ \text{Hyperebenen.} \end{array} \right.$$

Die Gerade durch die beiden Punkte $\mathbf{u} \neq \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n$ besteht aus allen Punkten

$$\mathbf{x} = \mathbf{u} + s \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) = (1 - s)\mathbf{u} + s\mathbf{v}, \quad s \in \mathbb{K}.$$

Diese symmetrische Beschreibung $\mathbf{x} = (1 - s)\mathbf{u} + s\mathbf{v}$ einer Geraden verallgemeinern wir jetzt auf affine Unterräume beliebiger Dimension.

Satz 0.2 Für eine Teilmenge $A \subset \mathbb{K}^n$ sind äquivalent:

i) A ist ein affiner Unterraum.

ii) Es gibt Punkte $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_d \in \mathbb{K}^n$ so, dass $d \geq 0$ und

$$A = \{a_0\mathbf{a}_0 + \dots + a_d\mathbf{a}_d \in \mathbb{K}^n : a_0, \dots, a_d \in \mathbb{K}, a_0 + \dots + a_d = 1\}.$$

iii) A ist nicht leer und mit je zwei Punkten $\mathbf{u} \neq \mathbf{v} \in A$ gehört auch die ganze Gerade \mathbf{uv} zu A .

Beweis. i) \Rightarrow ii): Es sei $A = \mathbf{t} + A^0$ ein affiner Unterraum mit dem dazu parallelen Untervektorraum A^0 . Wir wählen eine Basis $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d \in A^0$. Dann besteht A^0 aus allen Vektoren $\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_d\mathbf{v}_d$, $c_1, \dots, c_d \in \mathbb{K}$. Und A besteht aus allen Vektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{t} + \mathbf{x} &= \mathbf{t} + c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_d\mathbf{v}_d \\ &= (1 - c_1 - \dots - c_d)\mathbf{t} + c_1(\mathbf{v}_1 + \mathbf{t}) + \dots + c_d(\mathbf{v}_d + \mathbf{t}) \\ &= a_0\mathbf{a}_0 + a_1\mathbf{a}_1 + \dots + a_d\mathbf{a}_d \end{aligned}$$

mit

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{t}, \mathbf{a}_1 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{t}, \dots, \mathbf{a}_d = \mathbf{v}_d + \mathbf{t}, \quad a_0 = 1 - c_1 - \dots - c_d, a_1 = c_1, \dots, a_d = c_d.$$

ii) \Rightarrow iii): Seien $\mathbf{u} = \sum_0^d u_k \mathbf{a}_k \neq \mathbf{v} = \sum_0^d v_k \mathbf{a}_k$ Punkte in A , wobei $\sum u_k = \sum v_k = 1$. Dann gehört auch jeder Punkt

$$(1-s)\mathbf{u} + s\mathbf{v} = (1-s) \sum_0^d u_k \mathbf{a}_k + s \sum_0^d v_k \mathbf{a}_k = \sum_0^d ((1-s)u_k + sv_k) \mathbf{a}_k$$

auf der Geraden \mathbf{uv} wegen

$$\sum_0^d ((1-s)u_k + sv_k) = (1-s) \sum_0^d u_k + s \sum_0^d v_k = (1-s) + s = 1$$

wieder zu A .

iii) \Rightarrow i): Sei $\mathbf{t} \in A$ und $A = \mathbf{t} + A^0$ mit

$$A^0 = \{\mathbf{x} - \mathbf{t} : \mathbf{x} \in A\}.$$

Zu zeigen ist, dass $A^0 \subset \mathbb{K}^n$ ein Untervektorraum ist. Seien also $\mathbf{x}_1 - \mathbf{t}, \mathbf{x}_2 - \mathbf{t} \in A^0$ mit $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in A$. Für alle $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$ müssen wir $c_1(\mathbf{x}_1 - \mathbf{t}) + c_2(\mathbf{x}_2 - \mathbf{t}) \in A^0$ beweisen, oder äquivalent

$$\mathbf{x} := \mathbf{t} + c_1(\mathbf{x}_1 - \mathbf{t}) + c_2(\mathbf{x}_2 - \mathbf{t}) = (1 - c_1 - c_2)\mathbf{t} + c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 \in A.$$

Falls $c_1 + c_2 \neq 0$, können wir schreiben

$$\mathbf{x} = (1 - c_1 - c_2)\mathbf{t} + (c_1 + c_2) \cdot \left(\frac{c_1}{c_1 + c_2} \mathbf{x}_1 + \frac{c_2}{c_1 + c_2} \mathbf{x}_2 \right).$$

Nach Voraussetzung gehören zu A

$$\begin{array}{ll} \text{die Gerade} & \text{und damit der Punkt} \\ \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 & \mathbf{y} := c_1/(c_1 + c_2)\mathbf{x}_1 + c_2/(c_1 + c_2)\mathbf{x}_2 \\ \mathbf{t}\mathbf{y} & \mathbf{x} = (1 - c_1 - c_2)\mathbf{t} + (c_1 + c_2)\mathbf{y}. \end{array}$$

Falls aber $c_1 + c_2 = 0$ ist, etwa $c_1 = c$ und $c_2 = -c$, so schreiben wir

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2}((1 - 2c)\mathbf{t} + 2c\mathbf{x}_1) + \frac{1}{2}((1 + 2c)\mathbf{t} - 2c\mathbf{x}_2).$$

Nach Voraussetzung gehören die beiden Geraden $\mathbf{t}\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{t}\mathbf{x}_2$ zu A und damit auch die beiden Punkte

$$\mathbf{y}_1 := (1 - 2c)\mathbf{t} + 2c\mathbf{x}_1, \quad \mathbf{y}_2 := (1 + 2c)\mathbf{t} - 2c\mathbf{x}_2.$$

Die Gerade $\mathbf{y}_1\mathbf{y}_2$ gehört ebenfalls zu A und damit der Punkt $\mathbf{x} = \mathbf{y}_1/2 + \mathbf{y}_2/2$. □

Definition 0.4 Eine Affinkombination von Punkten $\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_d \in \mathbb{K}^n$ ist eine Linearkombination

$$c_0\mathbf{v}_0 + \dots + c_d\mathbf{v}_d \quad \text{mit} \quad c_0, \dots, c_d \in \mathbb{K} \quad \text{und} \quad c_0 + \dots + c_d = 1.$$

Diese Definition ermöglicht uns etwas kürzere Formulierungen: Eine Gerade L besteht aus allen Affinkombinationen von zwei verschiedenen Punkten aus L . Zu einem affinen Unterraum A der Dimension d gibt es Punkte $\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_d \in A$ so, dass A aus allen Affinkombinationen dieser Punkte besteht.

Ebenso wie bei Untervektorräumen stellt sich auch für affine Unterräume $V_1, V_2 \subset \mathbb{K}^n$ die Aufgabe, ihren Durchschnitt $V_1 \cap V_2$ und ihren Verbindungsraum (den kleinsten affinen Unterraum $V \subset \mathbb{K}^n$, der V_1 und V_2 enthält) zu bestimmen. Schlimmstenfalls führen diese Probleme auf lineare Gleichungssysteme, aber, weil sie jetzt inhomogen sind, brauchen sie nicht immer lösbar zu sein.

Wir wollen hier keine abstrakten allgemeinen Aussagen formulieren (hierzu s. etwa das Buch von Fischer), sondern den wichtigsten Spezialfall betrachten: zwei Geraden

$$\begin{aligned} L_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{K}^2 : a_1x + b_1y = c_1\} \\ L_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{K}^2 : a_2x + b_2y = c_2\} \end{aligned}$$

in der Ebene. Die Bestimmung ihres Durchschnitts führt auf die Lösung des inhomogenen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2. \end{aligned}$$

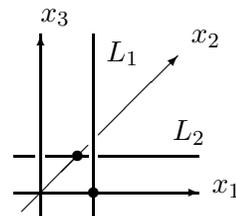
Ist die Koeffizientendeterminante $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, so ist das System mit der Cramerschen Regel lösbar:

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Ist die Koeffizientendeterminante allerdings $= 0$, so haben wir Probleme: Wir wollen ausschließen, daß einer der Koeffizientenvektoren $(a_\mu, b_\mu) = (0, 0)$ ist. Dann verschwindet die Determinante, wenn beide Geraden parallel sind. In diesem Fall ist der Durchschnitt leer, oder beide Geraden stimmen überein.

Allgemein nennt man zwei affine Unterräume $V_1, V_2 \subset \mathbb{K}^n$ *parallel*, wenn ihre zugehörigen parallelen Untervektorräume V_1^0 und V_2^0 gleich sind.

Aber $V_1 \cap V_2$ kann auch dann leer sein, wenn V_1 und V_2 nicht parallel sind. Dann heißen die affinen Unterräume *windschief*. So sind etwa die beiden Geraden $L_1 : x_1 = 1, x_2 = 0$ und $L_2 : x_2 = 1, x_3 = 0$ im \mathbb{K}^3 windschief.



Im \mathbb{R}^n müssen wir unterscheiden zwischen der Gerade $\mathbf{v}_0\mathbf{v}_1$ und der *Strecke*

$$\overline{\mathbf{v}_0\mathbf{v}_1} = \{\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + c \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0) : c \in \mathbb{R}, 0 \leq c \leq 1\} = \{\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + c \cdot (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_1) : c \in \mathbb{R}, 0 \leq c \leq 1\}$$

zwischen \mathbf{v}_0 und \mathbf{v}_1 . Diese Strecke kann man auch symmetrisch in \mathbf{v}_0 und \mathbf{v}_1 schreiben, als die Menge

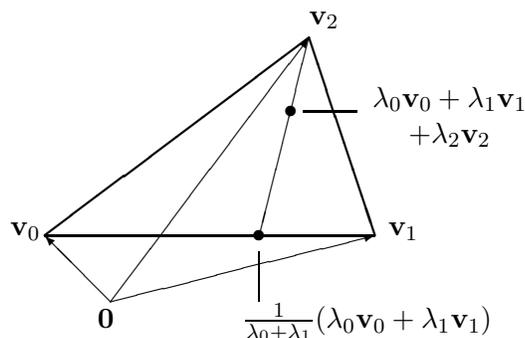
$$\overline{\mathbf{v}_0\mathbf{v}_1} = \{\mathbf{v} = \lambda_0\mathbf{v}_0 + \lambda_1\mathbf{v}_1 : 0 \leq \lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}, \lambda_0 + \lambda_1 = 1\}$$

der *Konvexkombinationen* von \mathbf{v}_0 und \mathbf{v}_1 .

Hat man $m + 1$ Vektoren $\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^n$, so heißt die Menge

$$\{\mathbf{v} = \lambda_0\mathbf{v}_0 + \dots + \lambda_m\mathbf{v}_m : \lambda_0 + \dots + \lambda_m = 1, \lambda_\mu \geq 0\}$$

der Konvex-Kombinationen, das von $\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_m$ *aufgespannte Simplex*. Dies Simplex ist ein echtes, m -dimensionales Simplex, wenn die m Vektoren $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_m - \mathbf{v}_0$ linear unabhängig sind. Ein zweidimensionales Simplex heißt *Dreieck*.



Aufgabe 0.6 Im \mathbb{K}^2 seien zwei Geraden gegeben, die Gerade L mit der Gleichung $ax + by = c$, die Gerade M aufgespannt von den Vektoren $(p_1, p_2) \neq (q_1, q_2)$. Wann sind L und M parallel, wann sind sie gleich?

Aufgabe 0.7 Im \mathbb{K}^3 seien zwei Geraden gegeben, die Gerade L durch die Gleichungen

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \quad a_2x + b_2y + c_2z = d_2,$$

die Gerade M aufgespannt von den Vektoren $(p_1, p_2, p_3) \neq (q_1, q_2, q_3)$. Wann sind L und M parallel, wann schneiden sie sich?

Aufgabe 0.8 Die m Punkte $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{K}^n$ liegen genau dann auf einer Geraden, wenn

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \leq 2.$$

1 Euklidische Geometrie

In diesem ganzen Kapitel setzen wir $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ voraus, weil wir das euklidische Skalarprodukt im \mathbb{R}^n benötigen.

1.1 Das euklidische Skalarprodukt

Aus der linearen Algebra brauchen wir die Vertrautheit mit dem „euklidischen“ Skalarprodukt auf dem Zahlenraum \mathbb{R}^n . Wir benutzen folgende Notation:

Das Skalarprodukt zweier Vektoren

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \text{ und } \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

ist

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Die *Länge* oder *Norm* des Vektors \mathbf{x} ist

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}.$$

Die bilinearen Eigenschaften dieses Skalarprodukts sind aus der linearen Algebra wohlbekannt. Damit beweist man sehr schnell die

Polarisationsformel	$2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \ \mathbf{x} + \mathbf{y}\ ^2 - \ \mathbf{x}\ ^2 - \ \mathbf{y}\ ^2$
Cauchy-Schwarz-Ungleichung	$ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \ \mathbf{x}\ \cdot \ \mathbf{y}\ $
Dreiecks-Ungleichung	$\ \mathbf{x} + \mathbf{y}\ \leq \ \mathbf{x}\ + \ \mathbf{y}\ $

Mit dem Skalarprodukt werden die beiden folgenden Grundgrößen definiert:

Der *Abstand* zwischen zwei Vektoren \mathbf{x} und $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ist

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|,$$

der *Cosinus des Winkels* $\angle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ zwischen zwei Vektoren $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \neq \mathbf{y}$ ist

$$\cos \angle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|}.$$

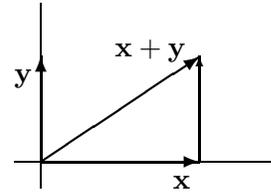
Aufgrund der Cauchy-Schwarz-Ungleichung ist die rechte Seite betragsmäßig immer ≤ 1 , und die Definition ist sinnvoll. Im \mathbb{R}^3 erhalten wir daraus (bis aufs Vorzeichen) den aus der Schule bekannten Winkel zwischen zwei Vektoren.

Der Cosinus definiert den Winkel eindeutig bis auf das Vorzeichen. Anders ausgedrückt, wir können mit Hilfe des Skalarprodukts nicht unterscheiden, ob wir den Winkel in Richtung von \mathbf{x} nach \mathbf{y} oder umgekehrt, von \mathbf{y} nach \mathbf{x} messen. Unser Winkel ist „nicht orientiert“. Wenn wir wollen, können wir vereinbaren, daß unsere Winkel nur die Werte zwischen 0 und π annehmen.

Der Cosinus ist = 0, falls das Skalarprodukt $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ ist. In diesem Fall sagt man, die Vektoren stehen aufeinander senkrecht, \mathbf{x} und \mathbf{y} sind *orthogonal*. Für orthogonale Vektoren gilt der bekannte *Satz von Pythagoras*:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \implies$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &= (\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) \\ &= (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{y}, \mathbf{y}) \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 \end{aligned}$$



In dieser Form, als Aussage über Zahlen- n -tupel ist dieser Satz natürlich eine Tautologie. Dies entspricht keineswegs der enormen Erkenntnis, die der Satz auf dem Weg zur Entwicklung der Geometrie bedeutete. Bei den Babyloniern und den alten Ägyptern entstand die Geometrie aus der Feldmessung, und es war natürlich von großem praktischen Wert, einen rechten Winkel an einer Ecke eines Feldes herzustellen, und nichts anderes dazu zu benutzen, als eine Schnur, auf der drei, vier, und fünf gleichlange Stücke markiert waren.

Wir können diese Bedeutung des Pythagoras noch am ehesten ermessen, wenn wir sie als eine Bestätigung dafür sehen, daß die euklidische Geometrie die räumlichen Verhältnisse unserer Welt mit ausreichender Präzision widerspiegelt. Dies gilt natürlich nicht für sehr große Distanzen, wo die relativistische Geometrie zuständig ist, und für sehr kleine Distanzen, wo man - soweit ich weiß - noch nicht über eine zufriedenstellende Theorie des Raums verfügt.

Irgendwie habe ich das Gefühl, dass diese Formulierung des Pythagoras mit Hilfe des Skalarproduktes ein Betrug ist. Bei der Definition von $\|\mathbf{x}\|$ als Länge steckt doch eigentlich die Aussage des Pythagoras schon in der Definition drin. Oder was ist da sonst los?

Jeder Untervektorraum $V \subset \mathbb{R}^n$ besitzt ein orthogonales Komplement

$$V^\perp = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : (\mathbf{w}, \mathbf{v}) = 0 \text{ für alle } \mathbf{v} \in V\}.$$

Auch wenn $V \subset \mathbb{R}^n$ ein *affiner* Unterraum ist, kann man ein orthogonales Komplement definieren, allerdings erst nach Auswahl eines Fußpunktes $\mathbf{v}_0 \in V$:

$$V^\perp(\mathbf{v}_0) := \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : (\mathbf{w} - \mathbf{v}_0, \mathbf{v} - \mathbf{v}_0) = 0 \text{ für alle } \mathbf{v} \in V\}.$$

Falls $V^0 \subset \mathbb{R}^n$ der Untervektorraum parallel zu V ist, dann ist $V = \mathbf{v}_0 + V^0$ und $V^\perp(\mathbf{v}_0) = \mathbf{v}_0 + (V^0)^\perp$.

Behauptung. Zu jedem affinen Unterraum $V \subset \mathbb{R}^n$ und jedem Vektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ gibt es genau einen Fußpunktvektor $\mathbf{v}_0 \in V$ mit $\mathbf{w} \in V^\perp(\mathbf{v}_0)$.

Beweis. Eindeutigkeit: Sei $\mathbf{w} \in V^\perp(\mathbf{v}_0)$ und $\mathbf{w} \in V^\perp(\mathbf{v}_1)$. Dann sind $V^\perp(\mathbf{v}_0)$ und $V^\perp(\mathbf{v}_1)$ zwei parallele affine Unterräume (beide sind zum Untervektorraum $(V^0)^\perp$ parallel) und haben nichtleeren Durchschnitt (beide enthalten den Vektor \mathbf{w}). Deswegen stimmen sie überein. Daraus folgt

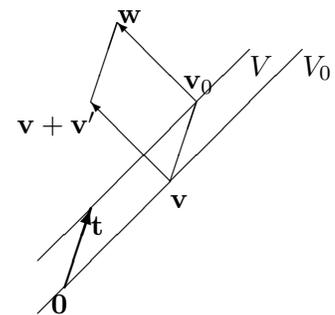
$$\{\mathbf{v}_1\} = V \cap V^\perp(\mathbf{v}_1) = V \cap V^\perp(\mathbf{v}_0) = \{\mathbf{v}_0\}.$$

Existenz: Es sei $V = \mathbf{t} + V^0$ und $\mathbf{w} - \mathbf{t} = \mathbf{v} + \mathbf{v}'$ mit $\mathbf{v} \in V^0$ und $\mathbf{v}' \in (V^0)^\perp$. Dann ist

$$\mathbf{w} = (\mathbf{t} + \mathbf{v}) + \mathbf{v}' \in V^\perp(\mathbf{v}_0)$$

mit $\mathbf{v}_0 := \mathbf{t} + \mathbf{v}$.

□



Durch die soeben bewiesene Behauptung wird also zu jedem Vektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ eindeutig ein Vektor $\mathbf{v}_0 \in V$ definiert. Dieser Vektor \mathbf{v}_0 hat die Eigenschaft, daß für alle Vektoren $\mathbf{v} \in V$ gilt

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|^2 &= (((\mathbf{w} - \mathbf{v}_0) - (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)) \cdot ((\mathbf{w} - \mathbf{v}_0) - (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0))) \\ &= \|\mathbf{w} - \mathbf{v}_0\|^2 - 2((\mathbf{w} - \mathbf{v}_0) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)) + \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_0\|^2 \\ &= \|\mathbf{w} - \mathbf{v}_0\|^2 + \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_0\|^2 \quad (\text{weil } \mathbf{w} - \mathbf{v}_0 \in V^\perp(\mathbf{v}_0) \text{ und } \mathbf{v} - \mathbf{v}_0 \in V) \\ &> \|\mathbf{w} - \mathbf{v}_0\|^2 \quad \text{falls } \mathbf{v} \neq \mathbf{v}_0. \end{aligned}$$

Somit ist \mathbf{v}_0 derjenige Vektor in V , der den kleinsten Abstand zu \mathbf{w} hat. Dieser kleinste Abstand $\|\mathbf{w} - \mathbf{v}_0\|$ heißt der *Abstand des Punktes \mathbf{w} vom affinen Unterraum V* .

Man nennt die Abbildung $\mathbf{w} \mapsto \mathbf{v}_0$ auch die *Orthogonalprojektion* des \mathbb{R}^n auf den affinen Raum V .

Beispiele: 1) Wir berechnen die Orthogonalprojektion \mathbf{v}_0 eines Vektors $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ auf eine implizit gegebene Hyperebene

$$H : (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) = c$$

des \mathbb{R}^n . Das orthogonale Komplement H^\perp wird von \mathbf{n} aufgespannt. Deswegen ist $\mathbf{v}_0 = \mathbf{w} + t\mathbf{n}$, wo der Koeffizient $t \in \mathbb{R}$ durch

$$\mathbf{v}_0 \in H, \quad \text{d.h.} \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{w} + t\mathbf{n}) = c$$

bestimmt ist. Es folgt

$$t = \frac{c - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n})}{\|\mathbf{n}\|^2} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_0 = \mathbf{w} + \frac{c - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n})}{\|\mathbf{n}\|^2} \cdot \mathbf{n}.$$

Der Abstand des Vektors \mathbf{w} von der Hyperebene H ist

$$\|\mathbf{v}_0 - \mathbf{w}\| = \frac{|c - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n})|}{\|\mathbf{n}\|}.$$

2) Die Orthogonalprojektion \mathbf{v}_0 eines Vektors \mathbf{w} auf eine explizit gegebene Gerade

$$L : \{\lambda\mathbf{v}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{v}_2, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

kann man wie folgt ausrechnen: Es ist $\mathbf{v}_0 = \lambda\mathbf{v}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{v}_2$ mit

$$\begin{aligned} (\mathbf{w} - \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) &= 0 \\ (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) &= (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \\ &= (\lambda\mathbf{v}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \\ &= \lambda(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) + (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) - \lambda(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \\ &= (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) + \lambda(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2), \\ (\mathbf{w} - \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) &= \lambda \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|^2 \\ \lambda &= \frac{(\mathbf{w} - \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)}{\|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|^2}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
 1 - \lambda &= \frac{\| \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \|^2 - (\mathbf{w} - \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)}{\| \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \|^2} \\
 &= \frac{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)}{\| \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \|^2} \\
 &= \frac{(\mathbf{w} - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)}{\| \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \|^2}.
 \end{aligned}$$

(Dies hätte man auch durch Vertauschen von \mathbf{v}_1 und \mathbf{v}_2 gesehen.) Die Orthogonalprojektion ist also

$$\mathbf{v}_0 = \frac{(\mathbf{w} - \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)}{\| \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \|^2} \cdot \mathbf{v}_1 + \frac{(\mathbf{w} - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)}{\| \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \|^2} \cdot \mathbf{v}_2.$$

Speziell für eine Gerade durch den Nullpunkt mit Richtungsvektor \mathbf{v} wird daraus, indem wir $\mathbf{v}_1 = 0$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}$ setzen

$$\mathbf{v}_0 = \frac{(\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})}{\| \mathbf{v} \|^2} \cdot \mathbf{v}.$$

Ist $\mathbf{v}_0 \in V$ die Orthogonalprojektion von $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ in den affinen Unterraum $V \subset \mathbb{R}^n$, so gehört mit $\mathbf{w} - \mathbf{v}_0$ auch der entgegengesetzte Vektor $-(\mathbf{w} - \mathbf{v}_0)$ zu $V^\perp(\mathbf{v}_0)$. Der Vektor

$$\mathbf{v}_0 - (\mathbf{w} - \mathbf{v}_0) = 2\mathbf{v}_0 - \mathbf{w}$$

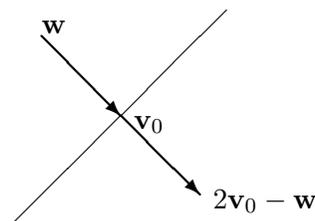
hat von V denselben Abstand $\| \mathbf{w} - \mathbf{v}_0 \|$ wie \mathbf{w} . Nur liegt er auf dem Projektionsstrahl von \mathbf{w} nach \mathbf{v}_0 „auf der anderen Seite“ von V . Dieser Punkt heißt der *an V gespiegelte Punkt \mathbf{w}* und die lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\mathbf{w} \mapsto 2\mathbf{v}_0 - \mathbf{w}$$

heißt die *Spiegelung an dem affinen Unterraum V* .

Beispiel. Die Spiegelung an der Hyperebene $H : \{ \mathbf{x} : (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) = 0 \} \subset \mathbb{R}^n$ ist die Abbildung

$$\mathbf{w} \mapsto \mathbf{w} - 2 \frac{(\mathbf{w} \cdot \mathbf{n})}{\| \mathbf{n} \|^2} \cdot \mathbf{n}.$$



Aufgabe 1.1 Bestimmen Sie den Abstand eines Punktes $\mathbf{w} = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$ von der Geraden $a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$.

Aufgabe 1.2 Im \mathbb{R}^3 seien zwei Geraden gegeben

$$L : \mathbf{x} + \mathbb{R} \cdot \mathbf{v}, \quad M : \mathbf{y} + \mathbb{R} \cdot \mathbf{w}.$$

Zeigen Sie, dass deren euklidischer Abstand

$$d = \frac{1}{\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|} (\mathbf{v} \times \mathbf{w} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{y})$$

ist.

Aufgabe 1.3 Bestimmen Sie die Orthogonal-Projektion \mathbf{v}_0 des Vektors $\mathbf{w} = (1, 1, 1, 1)$ in den affinen Unterraum

$$V : x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = -2, \quad x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 6$$

des \mathbb{R}^4 .

Aufgabe 1.4 Es seien $L_1 = \{t\mathbf{a} : t \in \mathbb{R}\}$ und $L_2 = \{t\mathbf{b} : t \in \mathbb{R}\}$ zwei Geraden in der Ebene \mathbb{R}^2 und S_1 , bzw. S_2 die Spiegelungen an diesen Geraden. Zeigen Sie:

$$S_1 S_2 = S_2 S_1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{entweder } L_1 = L_2 \text{ oder } (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0.$$

1.2 Abstände, Winkel, Flächen

Die folgenden geometrischen „Konstruktionen“ in der Ebene \mathbb{R}^2 sind invariant gegenüber der Bewegungsgruppe der Ebene, und gehören - nach Felix Kleins Prinzip - deshalb zur euklidischen Geometrie:

Konstruktion von	zu gegebenen
Verbindungsgerade	zwei verschiedenen Punkten
Schnittpunkt	zwei verschiedenen, nicht parallelen Geraden
Lot	Punkt und Gerade
Mittelpunkt	zwei verschiedenen Punkten
Winkelhalbierenden	zwei verschiedenen, nicht parallelen Geraden

Das bedeutet, dass zu gegebenen Objekten (z.B. zu zwei verschiedenen Punkten) ein eindeutig bestimmtes Objekt in der Ebene (z.B. die Verbindungsgerade) existiert, und dass die Beziehung zwischen Ausgangsobjekten und konstruiertem Objekt sich unter einer Bewegung nicht ändert.

Bei den ersten vier, oben angegebenen Konstruktionen ist dies klar. So erhält man z.B. das Lot von einem Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ auf eine Gerade $L \subset \mathbb{R}^2$ als orthogonales Komplement $L^\perp(\mathbf{y})$, wo $\mathbf{y} \in L$ das Bild von \mathbf{x} unter der Orthogonalprojektion auf L ist.

Nur bei der Winkelhalbierenden ist dies nicht so ganz klar, vor allem deswegen, weil wir den Winkel zwischen zwei Geraden nur auf dem Umweg über die transzendente \cos -Funktion definieren können.

Wir wollen die Winkelhalbierende aber auch nicht über den halben Winkel definieren, sondern wie folgt: Seien $L, M \subset \mathbb{R}^2$ zwei Geraden mit Schnittpunkt \mathbf{t} . Seien \mathbf{a}, \mathbf{b} Vektoren gleicher Länge (z.B. Einheitsvektoren), derart, dass \mathbf{t} , sowie die Punkte $\mathbf{t} + \mathbf{a}$ und $\mathbf{t} + \mathbf{b}$ die beiden Geraden aufspannen:

$$\mathbf{t} + \mathbf{a} \in L, \quad \mathbf{t} + \mathbf{b} \in M.$$

Der Mittelpunkt der Strecke zwischen $\mathbf{t} + \mathbf{a}$ und $\mathbf{t} + \mathbf{b}$ ist dann $\mathbf{t} + (\mathbf{a} + \mathbf{b})/2$. Und die Verbindungsgerade von \mathbf{t} mit diesem Mittelpunkt soll die Winkelhalbierende sein. Dies ist natürlich die Gerade $\mathbf{t} + \mathbb{R} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})$.

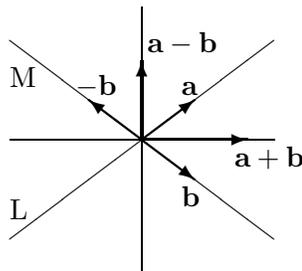
Damit ergeben sich aber sofort zwei Probleme:

a) Existenz: Die Verbindungsgerade existiert nur, wenn \mathbf{t} nicht mit dem Mittelpunkt $\mathbf{t} + (\mathbf{a} + \mathbf{b})/2$ zusammenfällt. Die Konstruktion geht also genau dann schief, wenn $\mathbf{b} = -\mathbf{a}$ ist. Dann fallen aber die beiden Geraden L und M zusammen. Wir können sagen, dass dann die Winkelhalbierende nicht existieren soll. Wir können aber auch den konstruktiveren Standpunkt einnehmen, dass sie dann das orthogonale Komplement $L^\perp(\mathbf{t})$ sein soll.

b) Eindeutigkeit: Der Vektor $-\mathbf{b}$ spannt dieselbe Gerade M durch \mathbf{t} auf wie \mathbf{b} . Benutzen wir diesen Vektor, so wird die Winkelhalbierende die Verbindungsgerade von \mathbf{t} mit $\mathbf{t} + (\mathbf{a} - \mathbf{b})/2$. Wegen

$$\left(\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}), \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \right) = \frac{1}{4} \left(\|\mathbf{a}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) - \|\mathbf{b}\|^2 \right) = 0$$

stehen die beiden möglichen Winkelhalbierenden aufeinander senkrecht. Wieder können wir zwei Standpunkte einnehmen. Entweder sagen wir: So ist es halt im Leben, zu zwei sich schneidenden Geraden gibt es immer zwei Winkelhalbierende. Oder wir sagen, etwas konstruktiver, die Winkelhalbierende ist eben nicht durch die beiden Geraden allein bestimmt, sondern auch durch die Auswahl der aufspannenden Vektoren, die einen *Winkelraum* zwischen den Geraden festlegen.



Behauptung: Die Vereinigung beider Winkelhalbierenden $\mathbf{t} + \mathbb{R} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})$ und $\mathbf{t} + \mathbb{R} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b})$ ist der „geometrische Ort“ aller Punkte $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$, die von den beiden Geraden L und M gleichen Abstand haben.

Beweis. Da die Aussage unter Bewegungen invariant ist, nehmen wir der Einfachheit halber $\mathbf{t} = \mathbf{0}$ an. Der Abstand von \mathbf{w} zu L ist der Abstand zur Orthogonalprojektion

$$\mathbf{w}_L = \frac{(\mathbf{w} \cdot \mathbf{a})}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a},$$

also (Pythagoras)

$$\| \mathbf{w} - \mathbf{w}_L \|^2 = \| \mathbf{w} \|^2 - \| \mathbf{w}_L \|^2 = \| \mathbf{w} \|^2 - \frac{(\mathbf{w} \cdot \mathbf{a})^2}{\| \mathbf{a} \|^2}$$

und ähnlich für M . Der Vektor \mathbf{w} hat denselben Abstand zu L und M , falls

$$(\mathbf{w} \cdot \mathbf{a})^2 = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{b})^2, \quad (\mathbf{w} \cdot \mathbf{a}) = \pm (\mathbf{w} \cdot \mathbf{b}), \quad (\mathbf{w} \cdot (\mathbf{a} \pm \mathbf{b})) = 0.$$

Dies heißt, \mathbf{w} liegt im orthogonalen Komplement der beiden Geraden, die durch die beiden Vektoren $\mathbf{a} \pm \mathbf{b}$ aufgespannt werden. Dies sind aber gerade die beiden Winkelhalbierenden. Und diese stehen aufeinander senkrecht. \square

Zwei Punkte $x, y \in \mathbb{R}$ haben den Abstand $|y - x|$. Dies ist die Länge $|[x, y]|$ des Intervalls

$$[x, y] = \{r \in \mathbb{R} : x \leq r \leq y\},$$

allerdings nur, wenn $x \leq y$ ist. Sonst muss man nämlich das Intervall anders schreiben:

$$[y, x] = \{r \in \mathbb{R} : y \leq r \leq x\}.$$

Die Darstellung

$$\{r = (1 - t) \cdot x + t \cdot y : 0 \leq t \leq 1\}$$

ist dagegen unabhängig davon, ob $x \leq y$ oder $y \leq x$ ist. Genauso unabhängig davon ist der Abstand $|y - x|$.

Die Differenz (ohne Absolutstriche) $y - x$ hat ein Vorzeichen. Dieses Vorzeichen misst, in welcher Richtung der Punkt

$$r = x + t \cdot (y - x) = (1 - t) \cdot x + t \cdot y, \quad t \in [0, 1]$$

dieses Intervall durchläuft. Ist $y - x > 0$, so läuft der Punkt r von links nach rechts, andernfalls von rechts nach links. Man nennt diese Durchlaufrichtung eine *Orientierung* des Intervalls und die Zahl $y - x$ die *orientierte Länge* des Intervalls.

Der orientierte Abstand bestimmt die Koeffizienten λ, μ einer *Affinkombination*

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda + \mu = 1,$$

im folgenden Sinn: Es ist

$$\mathbf{x} - \mathbf{a} = (\lambda - 1)\mathbf{a} + (1 - \lambda)\mathbf{b} = \mu(\mathbf{b} - \mathbf{a}),$$

$$\mathbf{x} - \mathbf{b} = \lambda \mathbf{a} + (\mu - 1)\mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} - \mathbf{b}).$$

Daraus folgt

$$|\lambda| = \frac{\| \mathbf{x} - \mathbf{b} \|}{\| \mathbf{a} - \mathbf{b} \|}, \quad |\mu| = \frac{\| \mathbf{x} - \mathbf{a} \|}{\| \mathbf{a} - \mathbf{b} \|}.$$

Das Vorzeichen von λ ergibt sich daraus, ob die Strecken $\overline{\mathbf{x}\mathbf{b}}$ und $\overline{\mathbf{a}\mathbf{b}}$ gleichgerichtet sind oder nicht.

In der Analysis-Vorlesung verallgemeinert man die Länge eines eindimensionalen Intervalls $[a, b] \subset \mathbb{R}$ auf das n -dimensionale Maß (Volumen) einer Menge im \mathbb{R}^n . Der Ausgangspunkt ist dabei, dass ein Quader

$$Q = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : a_1 \leq x_1 \leq b_1, \dots, a_n \leq x_n \leq b_n\}$$

im \mathbb{R}^n das n -dimensionale Volumen

$$|Q| = (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n)$$

hat, bzw. haben soll. Andere Mengen als Quader schöpft man irgendwie durch Quader aus, über deren Volumina man dann summiert. Falls diese Mengen krumme, oder auch nur schiefe, Ränder haben, geht das nicht anders als mit einem Grenzprozess.

Der erste Mathematiker, der Volumina durch Grenzprozesse ausrechnetete, war wohl Archimedes. Er tat dies, obwohl Grenzprozesse dem Wesen der griechischen Mathematik total fremd waren, und erst eineinhalb Jahrtausende später langsam hoffähig wurden, nachdem genügend Engel auf einer Nadelspitze getanzt hatten. Jedenfalls rechnete Archimedes die Fläche eines Kreises, und das Volumen einer Kugel mit einer Präzision aus, die allen praktischen Anforderungen genügte. Natürlich ist das euklidische Geometrie, uns führt dies aber zu weit. Wir wollen das Volumen krummliniger Figuren nicht behandeln. Aber das Volumen eines Parallelotops würden wir schon gerne berechnen.

Ein *Parallelotop* im \mathbb{R}^n wird von n Vektoren $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^n$ aufgespannt, es ist die Menge

$$P(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = \{\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{x}_n, 0 \leq \lambda_\nu \leq 1\}.$$

Wegen der schiefen Ränder ist es schwierig, das Volumen durch ein mehrfaches Integral auszurechnen. Es gibt noch zwei andere Methoden:

- a) Das Cavalierische Prinzip (siehe z.B. Koecher): Man macht Induktion über die Dimension n . Mit dem Cavalierischen Prinzip zeigt man, dass das n -dimensionale Volumen $|P(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)|$ das Produkt aus dem $(n - 1)$ -dimensionalen Volumen $|P(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1})|$ mit dem Abstand des Punktes \mathbf{a}_n von der Hyperebene ist, die von den $n - 1$ Vektoren $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}$ aufgespannt wird.
- b) Man zeigt, dass das Volumen dieselben Eigenschaften wie der Absolutbetrag $|\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)|$ der Determinante aus den Spaltenvektoren $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ hat.

Das Resultat ist immer das gleiche:

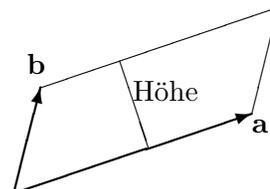
$$|P(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)| = |\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)|.$$

Beispiel: Das Parallelogramm im \mathbb{R}^2 , das von zwei Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} aufgespannt wird, hat nach der Determinantenformel die Fläche

$$|\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})| = |a_1 b_2 - a_2 b_1|.$$

Wenn man die Produktformel Grundseite \times Höhe benutzt, erhält man

$$\begin{aligned}
 \text{Grundseite} &= \|\mathbf{a}\| \\
 \text{Höhe} &= \text{Abstand von } \mathbf{b} \text{ zur Geraden } \mathbb{R} \cdot \mathbf{a} \\
 &= \left\| \mathbf{b} - \frac{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a} \right\| \quad (1.2) \\
 &= \sqrt{\|\mathbf{b}\|^2 - \frac{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})^2}{\|\mathbf{a}\|^2}} \\
 &= \|\mathbf{b}\| \sqrt{1 - \frac{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})^2}{\|\mathbf{b}\|^2 \|\mathbf{a}\|^2}} \\
 \text{Fläche} &= \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|} \right)^2}.
 \end{aligned}$$



Beide Ergebnisse stimmen überein, dazu quadrieren wir:

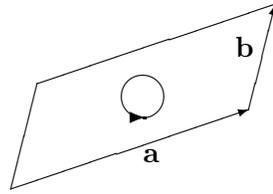
$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{a}\|^2 \cdot \|\mathbf{b}\|^2 \cdot \left(1 - \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}{\|\mathbf{a}\|^2 \cdot \|\mathbf{b}\|^2} \right) &= \|\mathbf{a}\|^2 \cdot \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \\
 &= (a_1^2 + a_2^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \\
 &= a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 \\
 &= (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2.
 \end{aligned}$$

Natürlich müssen wir checken, dass das Volumen des Parallelotops ein Begriff der euklidischen Geometrie, d.h., unter Bewegungen invariant ist. Bei einer Translation ist das klar: Auch wenn der Anfangspunkt des Parallelotops nach einer Translation nicht mehr der Nullvektor ist, sondern irgend ein Verschiebungsvektor $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$, bleiben die aufspannenden Vektoren doch die gleichen. Bei einer orthogonalen Transformation folgt das einfach aus dem Determinanten-Multiplikationssatz:

$$\begin{aligned}
 U(P(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)) &= P(U(\mathbf{a}_1), \dots, U(\mathbf{a}_n)) \\
 |P(U(\mathbf{a}_1), \dots, U(\mathbf{a}_n))| &= |\det(U(\mathbf{a}_1), \dots, U(\mathbf{a}_n))| \\
 &= |\det(U \cdot (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n))| \\
 &= |\det(U)| \cdot |\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)| \\
 &= |\pm 1| \cdot |P(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)|.
 \end{aligned}$$

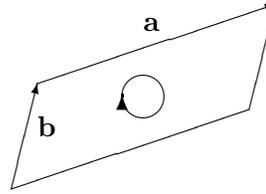
Jetzt wird es allerdings Zeit, sich einige Gedanken über die Absolutstriche am Volumen zu machen, genauer über die Rolle des Vorzeichens, das aus der Volumenformel $\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ kommt, wenn man diese Absolutstriche weglässt. Wenn wir am Parallelogramm, das von den Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} aufgespannt wird, die Reihenfolge der Vektoren vertauschen, ändert sich das Vorzeichen der Determinante:

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) > 0$$



positiv orientiert

$$\det(\mathbf{b}, \mathbf{a}) < 0$$



negativ orientiert

Man interpretiert dies so, dass die Determinante (ohne Absolutstriche) ein *orientiertes Volumen* ist. Was das allerdings sein soll, ist schwer zu erklären. Im Eindimensionalen, bei einer Strecke, ist es die Durchlaufrichtung. Beim Parallelogramm ist es die Durchlaufrichtung des Randes. Die Orientierung eines n -dimensionalen Volumens ist die Orientierung seines Randes, der die Dimension $n - 1$ hat. So kann man den Begriff der Orientierung in der Dimension n auf diesen Begriff in Dimension $n - 1$ zurückführen.

Nach diesem Exkurs müssen wir noch einmal auf die Flächenformel für das Parallelogramm zurückkommen. Wir schreiben sie

$$|P(\mathbf{a}, \mathbf{b})| = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|} \right)^2}.$$

Wenn wir an die Definition von $\cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ denken, erkennen wir unter der Wurzel den Ausdruck

$$1 - \cos^2 \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Jeder weiß:

$$\sqrt{1 - \cos^2(\alpha)} = \sin(\alpha),$$

nur, wie ist es mit dem Vorzeichen? Es stimmt! Wenn die Determinante $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ positiv ist, dann ist der Winkel $\alpha = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ mathematisch positiv orientiert. Wir können die Flächenformel für das Parallelogramm also schreiben:

$$F = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \sin \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Diese Formel können wir auch auffassen als eine Definition von $\sin \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$: Bis auf das Vorzeichen wird $\sin(\alpha)$ festgelegt durch

$$\sin^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha).$$

Oben haben wir ausgerechnet

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})^2 = \|\mathbf{a}\|^2 \cdot \|\mathbf{b}\|^2 \cdot (1 - \cos^2 \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})).$$

Und das Vorzeichen von $\sin \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ wird festgelegt durch das Vorzeichen der Determinante $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Zu bemerken ist, dass diese Methode, den Sinus zu definieren, nur in der Ebene funktioniert. Die Ebene \mathbb{R}^2 hat eine natürliche Orientierung (die mathematisch positive). Diese vererbt sich auf Winkel zwischen zwei Vektoren in der Ebene. Die Ebene, welche zwei Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n, n \geq 3$, aufspannen hat keine solche natürliche Orientierung. Das äußert sich auch darin, dass $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ für Vektoren im $\mathbb{R}^n, n \geq 3$, nicht sinnvoll zu definieren ist, jedenfalls nicht mit Vorzeichen.

Orientierte Winkel kann man addieren. Und dann kann man den Satz beweisen:

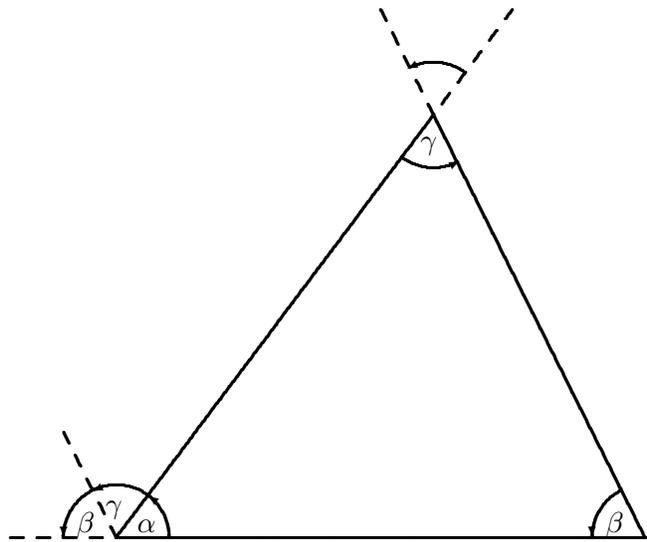
Satz 1.1 (Winkelsumme im Dreieck) *Die drei Winkel in einem Dreieck addieren sich zu $\pi = 180^\circ$.*

Beweis. Ein gestreckter Winkel ist ein Winkel ω zwischen einem Vektor \mathbf{a} und dem Vektor $-\mathbf{a}$. Deswegen ist

$$\cos(\omega) = -1, \quad \sin(\omega) = 0.$$

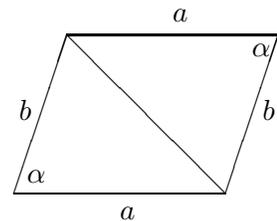
Daraus folgt $\omega = \pi$ für den gestreckten Winkel.

Winkel zwischen parallelen, gleichgerichteten Vektoren sind gleich. Wendet man dies auf die nebenstehende Figur an, so folgt die Behauptung. \square



Ein Parallelogramm setzt sich zusammen aus zwei kongruenten Dreiecken mit den Seitenlängen $a = \|\mathbf{a}\|$ und $b = \|\mathbf{b}\|$. Dies führt auf die Formel für die Fläche des Dreiecks

$$F = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\alpha),$$



wie sie aus der Schule bekannt ist.

Natürlich ist eine Fläche in der Schule immer positiv, nicht orientiert. Vom Vorzeichen des Sinus in dieser Formel sieht man meist ab.

Wir haben bisher stillschweigend eine Ecke des Dreiecks, oder des Parallelogramms in den Nullpunkt gelegt. Dadurch ist beim Dreieck eine Ecke ausgezeichnet. Man braucht das nicht zu tun. Es gibt für die orientierte Fläche eines Dreiecks $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ im \mathbb{R}^2 die folgende, in Bezug auf die

Ecken symmetrische Formel

$$F = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{pmatrix}$$

in Form einer 3×3 -Determinante. Zieht man eine Spalte der Determinante, etwa die erste, von den anderen ab, so berechnet man sie zu

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{a} & \mathbf{b} - \mathbf{a} & \mathbf{c} - \mathbf{a} \end{pmatrix} = \det(\mathbf{b} - \mathbf{a}, \mathbf{c} - \mathbf{a}).$$

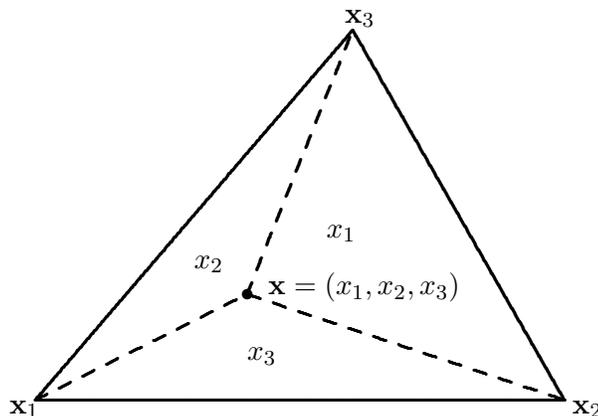
Das ist die alte Formel, wenn man \mathbf{a} als Nullpunkt nimmt.

Für drei Vektoren $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ im \mathbb{R}^2 möchte ich jetzt abkürzen

$$[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3] := \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 \end{pmatrix},$$

das ist also die doppelte Fläche des Dreiecks, dessen Ecken diese drei Vektoren sind. Ich möchte nämlich damit die Koeffizienten einer Affinkombination

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{x}_1 + x_2 \mathbf{x}_2 + x_3 \mathbf{x}_3, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$



interpretieren. Dazu bedarf es nur der Rechnung

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3] &= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 \mathbf{x}_1 + x_2 \mathbf{x}_2 + x_3 \mathbf{x}_3 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} x_1 & 1 & 1 \\ x_1 \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 \end{pmatrix} \\ &= x_1 \cdot [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3]. \end{aligned}$$

Wir sehen

$$x_1 = \frac{[\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3]}{[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3]} = \frac{F_{\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)}}{F_{\Delta(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)}}$$

ist die Fläche des von $\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ aufgespannten Dreiecks ausgeteilt durch die Fläche des Dreiecks mit den Ecken $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$. Und das gilt sogar mit Vorzeichen!

Ich möchte hier noch eine andere elementare Formel für die Dreiecksfläche angeben, weil sie sich sehr leicht auf die Formel

$$4 \cdot F_{\Delta}^2 = \|\mathbf{a}\|^2 \cdot \|\mathbf{b}\|^2 \sin^2 \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

zurückführen lässt. Es ist also eine Formel für das Quadrat der Dreiecksfläche, d.h. für die *nicht-orientierte* Fläche.

Dazu geben wir uns ein Dreieck in der Ebene durch seine drei Ecken $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vor und führen die folgenden Konventionen ein:

- Die Länge einer Dreiecksseite bezeichnen wir mit dem Kleinbuchstaben, der zur gegenüberliegenden Ecke gehört, also

$$a = \|\mathbf{b} - \mathbf{c}\|, \quad b = \|\mathbf{c} - \mathbf{a}\|, \quad c = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|.$$

- Die Winkel an den Dreiecksseiten bezeichnen wir wie üblich mit den griechischen Kleinbuchstaben, also sind die Winkel α, β, γ der Reihe nach die Winkel bei $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.
- Den halben Dreiecksumfang bezeichnen wir nach Euler wie üblich mit s , also

$$s = \frac{a + b + c}{2}.$$

Satz 1.2 (Heronische Formel) *Das Quadrat der Dreiecksfläche ist*

$$F_{\Delta}^2 = s(s - a)(s - b)(s - c).$$

Beweis. Wir wissen

$$F_{\Delta}^2 = \frac{1}{4} \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot \sin^2 \gamma = \frac{1}{4} \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot (1 - \cos^2 \gamma).$$

Nun gilt der sogenannte Cosinus-Satz

$$c^2 = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 = \|(\mathbf{a} - \mathbf{c}) - (\mathbf{b} - \mathbf{c})\|^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma),$$

oder

$$a \cdot b \cdot \cos \gamma = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2).$$

Damit wird

$$\begin{aligned} a^2 \cdot b^2 \cdot (1 - \cos^2 \gamma) &= a^2 \cdot b^2 - \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - c^2)^2 \\ &= \frac{1}{4}(4a^2 b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}(2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2) \\
&= \frac{1}{4}((a + b)^2 - c^2)(c^2 - (a - b)^2) \\
&= \frac{1}{4}(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c) \\
&= 4 \cdot s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c). \quad \square
\end{aligned}$$

Aufgabe 1.5 Für zwei Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ werde definiert: $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] := a_1b_2 - a_2b_1$. Zeigen Sie

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] + [\mathbf{b}, \mathbf{c}] + [\mathbf{c}, \mathbf{a}].$$

Aufgabe 1.6 Die drei Punkte $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ seien nicht kollinear, und die Punkte $\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}' \in \mathbb{R}^2$ seien gegeben als Affinkombinationen

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}' &= \lambda_1 \mathbf{a} + \mu_1 \mathbf{b} + \nu_1 \mathbf{c}, \\
\mathbf{b}' &= \lambda_2 \mathbf{a} + \mu_2 \mathbf{b} + \nu_2 \mathbf{c}, \\
\mathbf{c}' &= \lambda_3 \mathbf{a} + \mu_3 \mathbf{b} + \nu_3 \mathbf{c}
\end{aligned}$$

mit $\lambda_i + \mu_i + \nu_i = 1$ für $i = 1, 2, 3$. Zeigen Sie

$$\frac{F_{\Delta(\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}')}}{F_{\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}} = \left| \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{pmatrix} \right|.$$

Aufgabe 1.7 Zeigen Sie: Ein Dreieck wird durch jede Seitenhalbierende in zwei Teildreiecke gleicher Fläche zerlegt.

Aufgabe 1.8 Zeigen Sie: Die Fläche eines Polygons im \mathbb{R}^2 mit den Ecken $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ ist

$$\frac{1}{2} |[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] + [\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3] + \dots + [\mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{a}_n] + [\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_1]|.$$

Aufgabe 1.9 Zeigen Sie: Für die Fläche F des Dreiecks mit den Seiten a, b, c gilt

$$F^2 = -\frac{1}{16} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.3 Dreiecke

Hier behandeln wir noch einmal die merkwürdigen Punkte und Linien am Dreieck. Das Wort „merkwürdig“ entstammt hier dem Sprachgebrauch des vorletzten Jahrhunderts. Es bedeutet soetwas wie bemerkenswert. Heute bezeichnet dieses Wort ja etwas, das ungewöhnlich, geradezu komisch ist. Das ist, historischem Sprachgebrauch folgend, hier nicht gemeint. Es handelt sich um die folgenden vier Arten merkwürdiger Linien:

Die *Seitenhalbierenden* sind die Geraden, welche eine Dreiecksecke mit dem Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite verbinden.

Die *Mittelsenkrechte* $M_{\mathbf{ab}}$ auf einer Strecke \mathbf{ab} ist die Gerade durch den Mittelpunkt $(\mathbf{a}+\mathbf{b})/2$ dieser Strecke senkrecht zur Geraden \mathbf{ab} . Ist \mathbf{n} ein Vektor senkrecht auf $\mathbf{b}-\mathbf{a}$, so wird $M_{\mathbf{ab}}$ also parametrisiert durch

$$\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbb{R} \cdot \mathbf{n}.$$

Für jeden Punkt

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + t \cdot \mathbf{n} \in M_{\mathbf{ab}}$$

ist der Abstand zu \mathbf{a} und \mathbf{b} gleich: Nach Pythagoras gilt

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2 = t^2 \|\mathbf{n}\|^2 + \frac{1}{4} \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2.$$

Davon gilt auch die Umkehrung: Aus $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$ folgt

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2 &= \|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2, \\ \|\mathbf{x}\|^2 - 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}) + \|\mathbf{a}\|^2 &= \|\mathbf{x}\|^2 - 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}) + \|\mathbf{b}\|^2, \\ 2(\mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) &= \|\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a}\|^2 \\ &= (\mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a}), \\ (\mathbf{x} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a}) &= \left(\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a}\right), \\ \mathbf{x} - \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &\perp \mathbf{b} - \mathbf{a}. \end{aligned}$$

Die *Mittelsenkrechte* $M_{\mathbf{ab}}$ ist der geometrische Ort aller Punkte, die von \mathbf{a} und \mathbf{b} denselben Abstand haben.

Die *Winkelhalbierenden* halbieren die Dreieckswinkel. In 1.2 haben wir die beiden Winkelhalbierenden zu zwei sich schneidenden Geraden betrachtet und sie als geometrischen Ort aller Punkte charakterisiert, welche von diesen beiden Geraden denselben Abstand haben. Unter einer Winkelhalbierenden am Dreieck versteht man allerdings nur die Geraden, welche durchs Innere des Dreiecks gehen. So hat die Winkelhalbierende durch die Ecke \mathbf{a} den Richtungsvektor

$$\frac{\mathbf{b} - \mathbf{a}}{\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|} + \frac{\mathbf{c} - \mathbf{a}}{\|\mathbf{c} - \mathbf{a}\|}.$$

Die andere der beiden Winkelhalbierenden durch \mathbf{a} heißt jetzt *Halbierende der Nebenwinkel*.

Die Höhe H_a im Dreieck abc ist das Lot von der Ecke a auf die Gegenseite bc .

In der Schule lernt man auch den

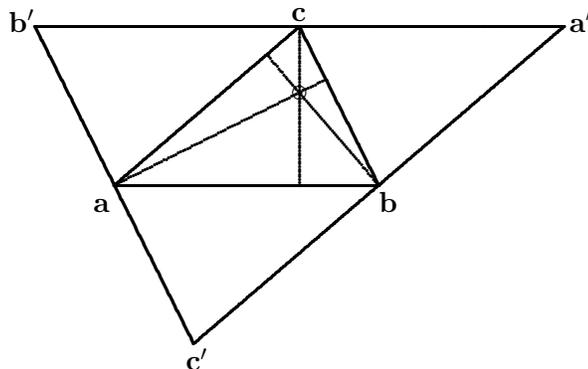
Satz 1.3 (Schnittpunktsatz) *An einem Dreieck schneiden sich die Mittelsenkrechten der Dreiecksseiten, die Winkelhalbierenden der Dreieckswinkel, die Höhen und die Seitenhalbierenden je in einem Punkt $\mathbf{m}, \mathbf{w}, \mathbf{h}$ bzw. \mathbf{s} .*

Ich möchte diese vier Aussagen auf zwei Arten beweisen, synthetisch (= ohne Rechnung) und analytisch (= algebraisch), um einmal die Unterschiede beider Methoden klarzumachen.

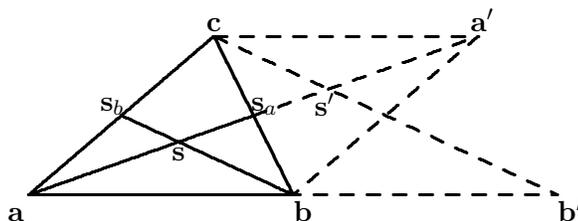
Synthetische Beweise. Mittelsenkrechte: Die Mittelsenkrechte M_{ab} ist der geometrische Ort aller Punkte, die von a und b denselben Abstand haben, ebenso wie die Mittelsenkrechte M_{bc} der geometrische Ort aller Punkte mit gleichem Abstand von b und c ist. Der Schnittpunkt $\mathbf{m} = M_{ab} \cap M_{bc}$ hat also den gleichen Abstand zu allen drei Ecken a, b und c . Deswegen liegt er auch auf der Mittelsenkrechten M_{ca} .

Winkelhalbierende: Alle Punkte auf der Winkelhalbierenden W_a haben denselben Abstand von den Dreiecksseiten b und c , alle Punkte auf W_b denselben Abstand von den Seiten c und a . Ihr Schnittpunkt \mathbf{w} hat deswegen denselben Abstand von den Seiten a und b . Er liegt auf einer der beiden Winkelhalbierenden zu den Geraden a und b . Weil er von der Ecke c aus ins Innere des Dreiecks zeigt, liegt er auch auf der Winkelhalbierenden W_c .

Höhen: Die Höhen haben wir nicht als einen geometrischen Ort charakterisiert. Ein Beweis wie bei Mittelsenkrechten und Winkelhalbierenden ist deswegen nicht offensichtlich. Und das ist genau der Punkt bei der synthetischen Methode: Man muss sich was einfallen lassen. Und zwar ziehen wir durch die Ecke a die Parallele a' zur Gegenseite a , durch b die Parallele b' zur Seite b und durch c die Parallele c' zur Seite c . Wir erhalten Schnittpunkte $\mathbf{a}' = b' \cap c'$, $\mathbf{b}' = c' \cap a'$ und $\mathbf{c}' = a' \cap b'$. Es sind drei neue Dreiecke $ab'c'$, $a'bc$ und abc' entstanden, die alle drei parallele Seiten zu den ursprünglichen Dreiecksseiten a, b, c haben, und in einer Seite mit dem ursprünglichen Dreieck übereinstimmen. Alle drei neuen Dreiecke sind kongruent zum Ausgangsdreieck. Daraus folgt: \mathbf{a} ist die Mitte der Strecke $\mathbf{b}'c'$, \mathbf{b} die von $\mathbf{a}'c'$ und \mathbf{c} die von $\mathbf{a}'b'$. Die Höhen des Ausgangsdreiecks sind deswegen die Mittelsenkrechten des großen Dreiecks $\mathbf{a}'b'c'$, und schneiden sich damit in einem Punkt.



Seitenhalbierende: Wir benutzen einen Teil der letzten Zeichnung:



Seien s_a und s_b die Mitten der Seiten a und b , und sei s der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden S_a und S_b . Wir drehen das Dreieck abc um 180° um den Punkt s_a und überführen es so in das kongruente Dreieck $a'bc'$. Dabei geht die Seitenhalbierende S_a in sich selbst über, während die Seitenhalbierende S_b in die Gerade durch c parallel zu S_b gedreht wird. Der Schnittpunkt dieser Geraden mit S_a sei der Punkt s' . Das Dreieck $ab'c'$ ist ähnlich zu abs_b mit dem Streckungsfaktor 2. Deswegen ist

$$\|s' - a\| = 2 \cdot \|s - a\| \quad \text{und} \quad \|s' - s\| = \|s - a\|.$$

Wegen der Kongruenz ist

$$\|s' - s_a\| = \|s_a - s\|.$$

Es folgt

$$\|s - a\| = 2 \cdot \|s - s_a\|.$$

Der Schnittpunkt s von S_b mit S_a teilt die Strecke as_a im Verhältnis $2 : 1$. Ganz analog könnte man das mit dem Schnittpunkt von S_c mit S_a beweisen. Also stimmen beide Schnittpunkte überein, und alle drei Seitenhalbierende schneiden sich in einem Punkt. \square

Analytische Beweise. Mittelsenkrechte: Die Mittelsenkrechte M_{ab} ist die Menge aller Punkte x mit

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{2}(a + b) &\perp a - b, \\ (x \cdot a - b) &= \frac{1}{2}(a + b \cdot a - b) \\ &= \frac{1}{2}(\|a\|^2 - \|b\|^2). \end{aligned}$$

Die Gleichungen aller drei Mittelsenkrechten sind also

$$\begin{aligned} (x \cdot a - b) &= \frac{1}{2}(\|a\|^2 - \|b\|^2), \\ (x \cdot b - c) &= \frac{1}{2}(\|b\|^2 - \|c\|^2), \\ (x \cdot c - a) &= \frac{1}{2}(\|c\|^2 - \|a\|^2). \end{aligned}$$

Summiert man alle drei Gleichungen, so entsteht die immer richtige Gleichung $0 = 0$. Anders ausgedrückt: Die Summe von zweien dieser Gleichungen ist, bis auf das Vorzeichen, die dritte Gleichung. Erfüllt ein Punkt x zwei der Gleichungen, so auch die dritte.

Winkelhalbierende: Zwei gleichlange Vektoren auf den beiden von \mathbf{a} ausgehenden Dreiecksseiten, mit der richtigen Orientierung sind $(\mathbf{b} - \mathbf{a})/c$ und $(\mathbf{c} - \mathbf{a})/b$ oder auch $\mathbf{v} = b(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ und $\mathbf{w} = c(\mathbf{c} - \mathbf{a})$. Die Winkelhalbierende $W_{\mathbf{a}}$ enthält deswegen alle Punkte

$$\mathbf{a} + tb \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) + tc \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = (1 - tb - tc) \cdot \mathbf{a} + tb \cdot \mathbf{b} + tc \cdot \mathbf{c}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Für

$$t = \frac{1}{a + b + c}$$

erhält man insbesondere den Punkt

$$\mathbf{w} = \frac{1}{a + b + c} \cdot (a \cdot \mathbf{a} + b \cdot \mathbf{b} + c \cdot \mathbf{c}).$$

Dieser Punkt ist sehr schön symmetrisch in Bezug auf die Notation der Ecken und Seiten des Dreiecks. Deswegen liegt er auch auf den Winkelhalbierenden $M_{\mathbf{b}}$ und $M_{\mathbf{c}}$.

Höhen: Der Punkt \mathbf{x} liegt genau dann auf der Höhe $H_{\mathbf{a}}$, wenn $(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \perp (\mathbf{b} - \mathbf{c})$. Die Gleichung dieser Höhe ist deswegen

$$(\mathbf{x} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{c}) = 0.$$

Die Gleichungen aller drei Höhen

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{c}) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}), \\ (\mathbf{x} \cdot \mathbf{c}) - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}) &= (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}), \\ (\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}) - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}) &= (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}), \end{aligned}$$

addieren sich wieder sehr schön zur Gleichung $0 = 0$. Wie bei den Mittelsenkrechten folgt daraus, dass sich auch die drei Höhen in einem Punkt schneiden.

Seitenhalbierende: Der Mittelpunkt \mathbf{s}_a der Strecke \mathbf{bc} ist $\frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c})$. Auf der Seitenhalbierenden S_a liegen deswegen alle Punkte

$$\lambda \cdot \mathbf{a} + \frac{1 - \lambda}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}).$$

Setzt man hier $\lambda := 1/3$, so sieht man: der Punkt

$$\mathbf{s} := \frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$$

liegt auf der Seitenhalbierenden S_a . Die Formel ist symmetrisch in Bezug auf die Ecken des Dreiecks, deswegen liegt \mathbf{s} auch auf den beiden anderen Seitenhalbierenden. \square

Der analytische Beweis ergab eine Formel für \mathbf{s} und \mathbf{w} , nicht aber für die beiden anderen Schnittpunkte. Eine solche Formel für den Höhenschnittpunkt lässt sich unter Verwendung der Tangens-Werte der Dreieckswinkel leicht angeben. Um Schreibarbeit zu sparen, und der Übersichtlichkeit halber, (oder wie eine Studentin im nichtvertieften Studiengang es einmal formulierte: weil die Formeln sonst nicht in eine Zeile passen) möchte ich abkürzen

$$t_a := \tan(\alpha), \quad t_b := \tan(\beta), \quad t_c := \tan(\gamma).$$

Ist h_c die Länge der Höhe H_c , und sind c_a , bzw. c_b die Abschnitte, in welche der Fußpunkt dieser Höhe die Seite c teilt, so gilt

$$t_a = \frac{h_c}{c_a}, \quad t_b = \frac{h_c}{c_b}.$$

(Diese Formel ist auch richtig, wenn das Dreieck nicht spitzwinklig, und einer der Tangens-Werte negativ ist). Die Höhe H_c ist also die Gerade

$$\frac{t}{t_a + t_b}(t_a \mathbf{a} + t_b \mathbf{b}) + (1 - t)\mathbf{c}, t \in \mathbb{R}.$$

Insbesondere für

$$t = \frac{t_a + t_b}{t_a + t_b + t_c}, \quad 1 - t = \frac{t_c}{t_a + t_b + t_c},$$

ist der zugehörige Punkt

$$\mathbf{h} = \frac{1}{t_a + t_b + t_c} \cdot (t_a \cdot \mathbf{a} + t_b \cdot \mathbf{b} + t_c \cdot \mathbf{c})$$

symmetrisch in Bezug auf die verwendete Notation. Er liegt deswegen auf allen drei Höhen und ist der Höhenschnittpunkt.

Eine Formel für den Schnittpunkt \mathbf{m} der Mittelsenkrechten bekommt man jetzt am schnellsten mit

Satz 1.4 (Euler) *Für die Schnittpunkte von Seitenhalbierenden, Höhen und Mittelsenkrechten gilt*

$$\mathbf{s} = \frac{1}{3}\mathbf{h} + \frac{2}{3}\mathbf{m}.$$

Beweis. Nach \mathbf{h} aufgelöst ist diese Formel

$$\mathbf{h} = 3\mathbf{s} - 2\mathbf{m}.$$

Es genügt also zu zeigen, dass der Punkt

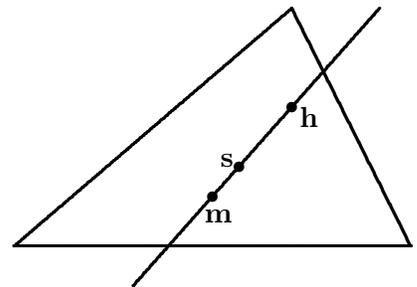
$$\mathbf{p} := 3\mathbf{s} - 2\mathbf{m} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} - 2\mathbf{m}$$

auf der Höhe

$$H_c: (\mathbf{x} - \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a}) = 0$$

(und ebenso auch auf den beiden anderen Höhen) liegt. Wir setzen ein:

$$\begin{aligned} (\mathbf{p} - \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a}) &= (\mathbf{a} + \mathbf{b} - 2\mathbf{m} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a}) \\ &= \|\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a}\|^2 - 2(\mathbf{m} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a}) \\ &= 0, \end{aligned}$$



denn \mathbf{m} hat denselben Abstand zu \mathbf{a} und \mathbf{b} :

$$\begin{aligned}\|\mathbf{m} - \mathbf{a}\| &= \|\mathbf{m} - \mathbf{b}\|, \\ \|\mathbf{m}\|^2 - 2(\mathbf{m} \cdot \mathbf{a}) + \|\mathbf{a}\|^2 &= \|\mathbf{m}\|^2 - 2(\mathbf{m} \cdot \mathbf{b}) + \|\mathbf{b}\|^2 \\ 2(\mathbf{m} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a}) &= \|\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a}\|^2.\end{aligned}$$

□

Die drei Punkte \mathbf{s} , \mathbf{h} und \mathbf{m} liegen also auf einer Geraden. Sie heißt die *Eulergerade* des Dreiecks. Das ist wohl die erste interessante Gerade am Dreieck, die in der Schule i.A. nicht mehr behandelt wird.

Jetzt können wir eine Formel für den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten angeben:

$$\begin{aligned}\mathbf{m} &= \frac{3}{2} \cdot \mathbf{s} - \frac{1}{2} \cdot \mathbf{h} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) - \frac{1}{2(t_a + t_b + t_c)} \cdot (t_a \cdot \mathbf{a} + t_b \cdot \mathbf{b} + t_c \cdot \mathbf{c}) \\ &= \frac{1}{2(t_a + t_b + t_c)} \cdot ((t_b + t_c) \cdot \mathbf{a} + (t_a + t_c) \cdot \mathbf{b} + (t_a + t_b) \cdot \mathbf{c}).\end{aligned}$$

Zur Übersichtlichkeit fassen wir unsere Formeln für die Schnittpunkte der vier Sorten merkwürdiger Linien am Dreieck noch einmal zusammen:

Seitenhalbierende:	$\mathbf{s} = \frac{1}{3} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}),$
Winkelhalbierende:	$\mathbf{w} = \frac{1}{a + b + c} \cdot (a \cdot \mathbf{a} + b \cdot \mathbf{b} + c \cdot \mathbf{c}),$
Höhen:	$\mathbf{h} = \frac{1}{t_a + t_b + t_c} \cdot (t_a \cdot \mathbf{a} + t_b \cdot \mathbf{b} + t_c \cdot \mathbf{c}),$
Mittelsenkrechten:	$\mathbf{m} = \frac{1}{2(t_a + t_b + t_c)} \cdot ((t_b + t_c) \cdot \mathbf{a} + (t_a + t_c) \cdot \mathbf{b} + (t_a + t_b) \cdot \mathbf{c}).$

Aufgabe 1.10 (Mittendreieck) *Es seien*

$$\mathbf{a}' = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}), \quad \mathbf{b}' = \frac{1}{2}(\mathbf{c} + \mathbf{a}), \quad \mathbf{c}' = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$$

Die Seitenmitten des Dreiecks \mathbf{abc} . Zeigen Sie:

- Der Schwerpunkt \mathbf{s}' des Dreiecks $\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}'$ ist der Schwerpunkt \mathbf{s} des Dreiecks \mathbf{abc} .*
- Der Höhenschnittpunkt \mathbf{h}' des Dreiecks $\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}'$ ist der Schnittpunkt \mathbf{m} der Mittelsenkrechten des Dreiecks \mathbf{abc} .*
- Die Eulergeraden der Dreiecke \mathbf{abc} und $\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}'$ stimmen überein.*

Aufgabe 1.11 (Nagelpunkt) Zeigen Sie:

a) Der Punkt

$$\mathbf{n}_a := \frac{s-b}{a}\mathbf{b} + \frac{s-c}{a}\mathbf{c}$$

halbiert, von \mathbf{a} aus gesehen, den Dreiecksumfang, d.h.

$$\|\mathbf{n}_a - \mathbf{b}\| + c = \|\mathbf{n}_a - \mathbf{c}\| + b = s.$$

b) Die Punkte \mathbf{n}_b und \mathbf{n}_c seien analog definiert. Dann treffen sich die Geraden $\mathbf{a}\mathbf{n}_a$, $\mathbf{b}\mathbf{n}_b$ und $\mathbf{c}\mathbf{n}_c$ im Nagelpunkt

$$\mathbf{n} = \frac{s-a}{s} \cdot \mathbf{a} + \frac{s-b}{s} \cdot \mathbf{b} + \frac{s-c}{s} \cdot \mathbf{c}.$$

Aufgabe 1.12 (Fu-Pe 4.1.4) Ein Punkt \mathbf{p} liege im Dreieck \mathbf{abc} derart, dass die Dreiecke \mathbf{abp} , \mathbf{bcp} und \mathbf{cap} die gleiche Fläche haben. Zeigen Sie:

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{p}\| = \frac{1}{3}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}.$$

1.4 Kreise

Ein *Kreis* vom Radius r in der Ebene \mathbb{R}^2 mit Mittelpunkt \mathbf{m} ist der geometrische Ort aller Punkte \mathbf{x} , die von \mathbf{m} den Abstand r haben. Seine Gleichung ist $\|\mathbf{x} - \mathbf{m}\| = r$. Wenn wir diese Gleichung quadrieren, ändert sich an ihren reellen Lösungen nichts, aber die hässliche Wurzel bei $\|\mathbf{x} - \mathbf{m}\|$ verschwindet. Die *Kreisgleichung* nimmt dann die bekannte Form an:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{m}\|^2 = (x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 = r^2.$$

Den Schnitt eines solchen Kreises mit einer Geraden L berechnet man am besten, wenn die Gerade explizit gegeben ist: $L: \mathbf{x} = \mathbf{a} + s \cdot \mathbf{v}$. Man erhält dann die quadratische Gleichung

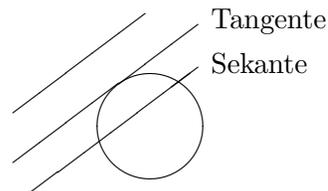
$$\|\mathbf{a} + s \cdot \mathbf{v} - \mathbf{m}\|^2 - r^2 = s^2 \|\mathbf{v}\|^2 + 2s \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{m} \cdot \mathbf{v}) + \|\mathbf{a} - \mathbf{m}\|^2 - r^2 = 0.$$

Die Diskriminante dieser Gleichung ist

$$((\mathbf{a} - \mathbf{m}) \cdot \mathbf{v})^2 - (\|\mathbf{a} - \mathbf{m}\|^2 - r^2) \cdot \|\mathbf{v}\|^2.$$

Ist die Diskriminante > 0 , so hat die quadratische Gleichung zwei verschiedene reelle Lösungen $s_{1,2}$.

Diese Parameterwerte bestimmen dann zwei Schnittpunkte der Geraden mit dem Kreis. Ist die Diskriminante negativ, dann hat die quadratische Gleichung keine reelle Lösung, die Gerade schneidet den Kreis nicht. Es bleibt noch der Fall, wenn die Diskriminante verschwindet, und



die Gerade nur einen Schnittpunkt mit dem Kreis hat. Solche Geraden heißen *Tangenten* an den Kreis.

Nach dem Satz von Vieta gilt für die beiden Lösungen s_1, s_2 dieser quadratischen Gleichung

$$s_1 \cdot s_2 = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|^2} \cdot (\|\mathbf{a} - \mathbf{m}\|^2 - r^2)$$

oder

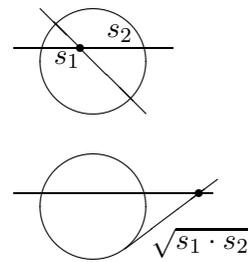
$$(s_1 \mathbf{v} \cdot s_2 \mathbf{v}) = \|\mathbf{a} - \mathbf{m}\|^2 - r^2.$$

Dies ist das (orientierte) Produkt der Abstände $\|s_i \mathbf{v}\|$, $i = 1, 2$, von \mathbf{a} zu den beiden Schnittpunkten (falls diese reell sind).

Satz 1.5 (Sekantensatz) *Der Punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ sei fest gewählt. Für jede Gerade L durch \mathbf{a} , die den gegebenen Kreis in zwei Punkten schneidet, ist das Produkt der Entfernungen von \mathbf{a} zu diesen beiden Punkten konstant gleich*

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{m}\|^2 - r^2.$$

Ist L eine Tangente, so wird dieses Produkt das Quadrat t^2 des Tangentenabschnitts t .



Definition 1.1 *Die Funktion*

$$p : \mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x} - \mathbf{m}\|^2 - r^2$$

heißt die Potenz des Punktes \mathbf{x} in Bezug auf den Kreis mit Mittelpunkt \mathbf{m} und Radius r .

Diese Potenz $p(\mathbf{x})$ ist nichts anderes als die Kreisgleichung, aufgefasst als Ortsfunktion von $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Der Sekantensatz gibt ihre geometrische Deutung.

Jetzt nehmen wir an, der Anfangspunkt \mathbf{a} der Geraden L liege auf dem Kreis. Die Schnittpunktgleichung wird dann

$$s^2 \|\mathbf{v}\|^2 + 2s \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{m} \cdot \mathbf{v}) = 0.$$

Zu $s = 0$ gehört der Schnittpunkt \mathbf{a} . Und dieser ist der einzige Schnittpunkt, genau dann, wenn

$$(\mathbf{a} - \mathbf{m} \cdot \mathbf{v}) = 0.$$

Wie nicht anders zu erwarten, steht der Richtungsvektor \mathbf{v} der Tangente senkrecht auf dem Radiusvektor $\mathbf{a} - \mathbf{m}$. Ein Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ liegt auf dieser Tangente, genau dann, wenn $\mathbf{x} - \mathbf{a}$ dieselbe Richtung wie \mathbf{v} besitzt. Daraus bekommen wir die Tangentengleichung

$$(\mathbf{x} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{m}) = 0$$

oder

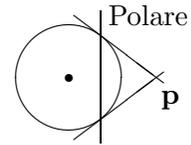
$$(\mathbf{x} - \mathbf{m} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{m}) = (\mathbf{a} - \mathbf{m} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{m}) = r^2.$$

In dieser Gleichung können wir die Rolle von \mathbf{x} und \mathbf{a} vertauschen: Für festes \mathbf{x} ist sie eine lineare Gleichung, welche die Berührungspunkte der Kreistangenten durch \mathbf{x} erfüllen. Um anzudeuten, dass wir den Punkt \mathbf{x} jetzt festhalten, nennen wir ihn in der folgenden Definition \mathbf{p} . Den Punkt \mathbf{a} lassen wir laufen, und nennen ihn deswegen \mathbf{x} .

Definition 1.2 Die Polare eines Punktes $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ in Bezug auf den Kreis mit Mittelpunkt \mathbf{m} und Radius r ist die Gerade mit der Gleichung

$$(\mathbf{x} - \mathbf{m} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{m}) = r^2.$$

Auf dieser Polaren liegen die Berührungspunkte der Tangenten durch \mathbf{p} . Damit gibt es höchstens zwei Berührungspunkte, und also höchstens zwei Tangenten. Durch einen Punkt \mathbf{p} im Innern des Kreises gibt es keine Tangente. Die beiden Tangenten fallen genau dann zusammen, wenn $\|\mathbf{p} - \mathbf{m}\| = r$, d.h., wenn der Punkt \mathbf{p} auf dem Kreis liegt. Die Polare ist dann die Tangente in diesem Punkt.



Durch drei Punkte \mathbf{a}, \mathbf{b} und $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$, die nicht auf einer Geraden liegen, kann man immer genau einen Kreis zeichnen. Der Kreismittelpunkt ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten auf den drei Verbindungsstrecken dieser Punkte. Überlegen wir es uns anders, und geben auch gleich eine Formel für die Kreisgleichung an! Die Formel ist

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \|\mathbf{x}\|^2 & \|\mathbf{a}\|^2 & \|\mathbf{b}\|^2 & \|\mathbf{c}\|^2 \\ x^1 & a^1 & b^1 & c^1 \\ x^2 & a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} = 0.$$

Das sieht aber böse aus! Entwickeln wir mal diese Determinante nach der ersten Spalte. Das Ergebnis ist eine Gleichung

$$A^1 - \|\mathbf{x}\|^2 \cdot A^2 + x^1 \cdot A^3 - x^2 \cdot A^4 = 0.$$

Die Koeffizienten A^1, \dots, A^4 sind dabei die zugehörigen Streichungsdeterminanten. Insbesondere ist der Koeffizient bei $\|\mathbf{x}\|^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2$

$$-A^2 = -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} = -2 \cdot F_{\Delta(\mathbf{abc})} \neq 0,$$

weil die drei Punkte nicht kollinear vorausgesetzt sind. Wir können also durch diesen Faktor dividieren, und dann nimmt die Gleichung eine Form

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + 2p^1 x^1 + 2p^2 x^2 + q = 0, \quad p^1, p^2, q \in \mathbb{R},$$

an. Nach der Translation $\xi^1 = x^1 + p^1$, $\xi^2 = x^2 + p^2$, wird daraus eine schöne Kreisgleichung

$$(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 = (p^1)^2 + (p^2)^2 - q.$$

Wir müssten nur sicher sein, dass die Konstante auf der rechten Seite > 0 ist. Wäre sie negativ, würde diese Gleichung die leere Menge beschreiben, wäre sie $= 0$, nur einen Punkt. Beides kann aber nicht eintreten, weil die drei verschiedenen Punkte \mathbf{a} , \mathbf{b} und \mathbf{c} die ursprüngliche Gleichung erfüllen: Setzen wir für \mathbf{x} einen dieser Punkte in die Determinante ein, so hat sie zwei gleiche Spalten.

Der durch diese Gleichung beschriebene Kreis ist auch der einzige Kreis durch die gegebenen drei Punkte, es gibt nur einen einzigen. Das sieht man am besten mit folgendem Hilfssatz ein:

Satz 1.6 *Zwei verschiedene Kreise schneiden sich höchstens in zwei verschiedenen Punkten.*

Beweis. Seien die beiden Kreisgleichungen

$$\begin{aligned}(x^1)^2 + (x^2)^2 + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) + q &= 0, \\ (x^1)^2 + (x^2)^2 + (\mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}) + q' &= 0.\end{aligned}$$

In jedem Schnittpunkt beider Kreise ist auch die Differenz beider Gleichungen

$$(\mathbf{p} - \mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}) + q - q' = 0$$

erfüllt. Diese Gleichung kann nicht identisch auf ganz \mathbb{R}^2 gelten, weil sonst $\mathbf{p} = \mathbf{p}'$ und $q = q'$ gelten müsste, und beide Kreise identisch wären. Natürlich könnte $\mathbf{p} = \mathbf{p}'$ sein, und zwar wenn die Kreise konzentrisch sind. Wegen $q \neq q'$ beschreibt die Gleichung dann die leere Menge, die Kreise haben keinen Schnittpunkt. Aber wenn $\mathbf{p} \neq \mathbf{p}'$ ist, haben wir die Gleichung einer Geraden A . Und diese Gerade kann jeden der beiden Kreise in höchstens zwei Punkten treffen. Dies sind dann auch die Schnittpunkte der beiden Kreise. \square

Sind vier Punkte $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ und $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^2$ vorgegeben, so geht da i.A. kein Kreis durch: Ein solcher Kreis wäre durch die ersten drei Punkte eindeutig bestimmt, und wenn \mathbf{d} auf diesem eindeutig bestimmten Kreis nicht draufliegt, dann hilft alles nichts.

Definition 1.3 *Ein Viereck heißt Sehnenviereck, wenn seine vier Ecken auf einem Kreis liegen.*

Satz 1.7 *Ein Viereck \mathbf{abcd} ist genau dann ein Sehnenviereck, wenn sich die Paare gegenüberliegender Innenwinkel zu 180° ergänzen:*

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = \pi.$$

Beweis. „ \Rightarrow “: Sei \mathbf{m} der Mittelpunkt des Kreises durch die gegebenen vier Punkte. Dann sind alle vier Dreiecke $\mathbf{abm}, \dots, \mathbf{dam}$ gleichschenkelig. An jeder der vier Ecken wird der Innenwinkel durch die Verbindungsgerade zum Kreiszentrum \mathbf{m} in zwei Winkel

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha, \dots, \delta_1 + \delta_2 = \delta,$$

zerlegt. Wegen der gleichschenkligen Dreiecke ist

$$\alpha_2 = \beta_1, \beta_2 = \gamma_1, \gamma_2 = \delta_1, \delta_2 = \alpha_1.$$

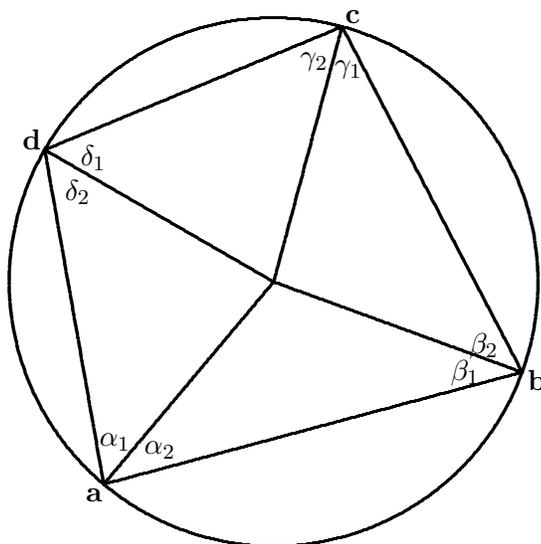
Daraus folgt

$$\alpha + \gamma = \alpha_1 + \alpha_2 + \gamma_1 + \gamma_2 = \beta_1 + \beta_2 + \delta_1 + \delta_2 = \beta + \delta.$$

Weil die Winkelsumme im Viereck

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\pi$$

ist, folgt daraus $\alpha + \gamma = \pi = \beta + \delta$.



Bevor wir die andere Richtung beweisen, erst eine Folgerung aus dieser Aussage:

Satz 1.8 (Peripheriewinkel) *Es seien $a \neq b$ zwei verschiedene Punkte auf einem Kreis K . Die Sehne ab teilt den Kreis in zwei Zusammenhangskomponenten.*

a) *Für alle Punkte c in derselben Zusammenhangskomponente ist der Winkel $\angle acb$ gleich. Die Winkel zu Punkten c und c' in beiden verschiedenen Zusammenhangskomponenten ergänzen sich zu 180° .*

b) *Umgekehrt liegen alle Punkte c auf derselben Seite der Geraden ab mit gleichem Winkel $\angle acb$ auf demselben Kreisbogen über der Sehne ab .*

Beweis. a) Liegt c auf dem einen Kreisbogen und c' auf dem anderen, so ist $acbc'$ ein Sehnenviereck und wegen der soeben bewiesenen Eigenschaft

$$\angle acb + \angle ac'b = \pi.$$

Insbesondere ist $\angle acb$ unabhängig von der Wahl des Punktes c in seinem Kreisbogen.

b) Seien c_1 und c_2 zwei Punkte auf derselben Seite der Geraden $L = ab$ mit

$$\angle ac_1b = \angle ac_2b.$$

Sei K_1 der Kreis durch a, b und c_1 , sowie K_2 der Kreis durch a, b und c_2 . Weiter seien M die Mittelsenkrechte zur Strecke ab , sowie $x_i \in M \cap K_i, i = 1, 2$, die Schnittpunkte auf derselben Seite der Geraden L wie die Punkte c_1 und c_2 . Nach a) ist

$$\angle ax_1b = \angle ac_1b = \angle ac_2b = \angle ax_2b.$$

Weil die Dreiecke $\mathbf{ax}_i\mathbf{b}$ gleichschenkelig sind, folgt daraus, dass die Winkel $\angle \mathbf{x}_1\mathbf{ab}$ und $\angle \mathbf{x}_2\mathbf{ab}$ gleich sind. Deswegen sind auch die Geraden \mathbf{ax}_i und damit die Punkte \mathbf{x}_i , $i = 1, 2$, identisch. Die Kreise K_1 und K_2 schneiden sich in den drei Punkten \mathbf{a}, \mathbf{b} und $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$. Nach Satz 1.6 müssen die Kreise übereinstimmen. \square

Aus Satz 1.8 b) folgt nun auch die Umkehrung von Satz 1.7 a)

Aufgabe 1.13 Es sei $L \subset \mathbb{R}^2$ eine Gerade, $\mathbf{a} \in L$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{b} \notin L$. Zeigen Sie: Es gibt genau einen Kreis durch \mathbf{b} , der L in \mathbf{a} berührt.

Aufgabe 1.14 Im \mathbb{R}^2 seien der Kreis K mit der Gleichung

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$$

und der Punkt $\mathbf{p} = (6, 6)$ gegeben. Berechnen Sie die Gleichungen der Tangenten von \mathbf{p} an den Kreis K und die Gleichung der Polare von \mathbf{p} bezüglich K .

Aufgabe 1.15 Es seien K und K' zwei konzentrische Kreise mit den Radien $0 < r < r'$. Berechnen Sie die Länge einer Sehne von K' , welche K berührt.

Aufgabe 1.16 Im \mathbb{R}^2 seien drei Punkte \mathbf{a}, \mathbf{b} und \mathbf{c} gegeben. Für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ sei

$$s(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|^2$$

die Summe der Abstandsquadrate. Bestimmen Sie $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ so, dass $s(\mathbf{p})$ minimal wird. Zeigen Sie, dass die Mengen $\{s(\mathbf{x}) = \text{const}\}$ Kreise mit Mittelpunkt \mathbf{p} sind.

Aufgabe 1.17 (Tangentenviereck) Die Seiten a, b, c und d eines Vierecks berühren (in dieser Reihenfolge) einen Kreis. Zeigen Sie:

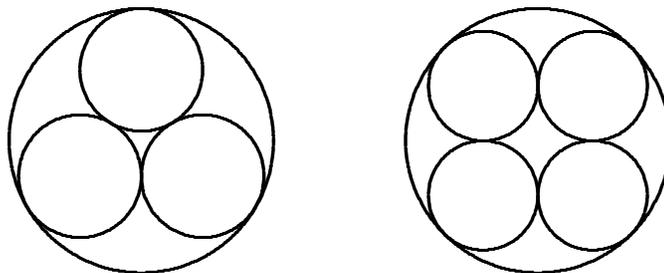
$$a + c = b + d.$$

Aufgabe 1.18 Es seien K_1, \dots, K_n Kreise vom gleichen Radius r , die alle den Kreis K vom Radius R von innen berühren. Dabei berühre K_ν den Kreis $K_{\nu+1}$, sowie K_n den Kreis K_1 von außen (vgl. Abbildungen). Zeigen Sie:

a) $r = \frac{\cos(\pi/n)}{1 + \cos(\pi/n)} \cdot R$;

b) für $n = 3$ ist $r = (2\sqrt{3} - 3)R$;

c) für $n = 4$ ist $r = (\sqrt{2} - 1)R$.



Aufgabe 1.19 Zeigen Sie: Zwei Kreise

$$\begin{aligned} K_1 : & x^2 + y^2 + 2a_1x + 2b_1y + c_1 = 0, \\ K_2 : & x^2 + y^2 + 2a_2x + 2b_2y + c_2 = 0, \end{aligned}$$

berühren sich genau dann, wenn

$$4 \cdot (c_1 - a_1^2 - b_1^2) \cdot (c_2 - a_2^2 - b_2^2) = (c_1 + c_2 - 2a_1a_2 - 2b_1b_2)^2.$$

Aufgabe 1.20 Es seien K_1, K_2, K_3 drei Kreise derart, dass sich je zwei davon in zwei verschiedenen Punkten schneiden: Für $i \neq j$ ist $K_i \cap K_j = \{\mathbf{p}_{ij}, \mathbf{q}_{ij}\}$. Zeigen Sie: die drei Geraden $\mathbf{p}_{ij}\mathbf{q}_{ij}$ schneiden sich in einem Punkt.

Aufgabe 1.21 (Vier-Kreise-Satz von Descartes) Gegeben seien vier Kreise mit den Radien r_1, r_2, r_3, r_4 , die sich paarweise berühren. Dann gilt

$$\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4}\right)^2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} + \frac{1}{r_4^2}\right).$$

Aufgabe 1.22 Gegeben seien drei Kreise mit den Radien r_1, r_2, r_3 , die sich paarweise gegenseitig berühren. Außerdem sollen alle drei Kreise die gleiche Gerade berühren. r_3 sei der kleinste der drei Radien.

a) Zeigen Sie

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}.$$

b) Folgern sie a) aus dem Vier-Kreise-Satz durch einen Grenzübergang.

Aufgabe 1.23 (Satz von Miquel) Auf den Seiten eines Dreiecks \mathbf{abc} seien Punkte $\mathbf{a}' \in \overline{\mathbf{bc}}$, $\mathbf{b}' \in \overline{\mathbf{ca}}$ und $\mathbf{c}' \in \overline{\mathbf{ab}}$ gewählt, keiner davon eine Dreiecksecke. Es seien K_a der Kreis durch $\mathbf{a}, \mathbf{b}', \mathbf{c}'$, K_b der Kreis durch $\mathbf{b}, \mathbf{c}', \mathbf{a}'$ und K_c der Kreis durch $\mathbf{c}, \mathbf{a}', \mathbf{b}'$. Zeigen Sie: K_a, K_b und K_c schneiden sich in einem Punkt. (Hinweis: Winkelsumme im Dreieck und der Satz vom Sehnenviereck.)

Aufgabe 1.24 Im Dreieck \mathbf{abc} teilt der Höhenschnittpunkt \mathbf{h} jede Höhe zwischen Ecke und Höhenfußpunkt in zwei Abschnitte. Zeigen Sie: Das Produkt dieser beiden Abschnitte ist für alle drei Höhen gleich. (Hinweis: Benutzen Sie die Kreise, deren Durchmesser die Dreiecksseiten sind, und verwenden Sie den Sekantensatz.)

Aufgabe 1.25 Mit den Ecken $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ eines Dreiecks als Mittelpunkten werden drei Kreise gezeichnet. Zeigen Sie: Wenn sich alle drei Kreise von außen berühren, dann haben sie die Radien $s - a, s - b$ und $s - c$.

Aufgabe 1.26 (Siebenkreisesatz) Gegeben sei ein Kreis K , sowie sechs Kreise $K_i, i = 1, \dots, 6$, die alle den Kreis K von außen berühren mögen. Außerdem sollen sich die K_i gegenseitig von außen berühren: K_2 die Kreise K_1 und K_3, \dots, K_5 die Kreise K_4 und K_6 , sowie K_6 den Kreis K_1 . Die Berührungspunkte der Kreise K_i mit dem Kreis K seien die Punkte $\mathbf{p}_i, i = 1, \dots, 6$. Dann schneiden sich die drei Geraden $\mathbf{p}_1\mathbf{p}_4, \mathbf{p}_2\mathbf{p}_5$ und $\mathbf{p}_3\mathbf{p}_6$ in einem Punkt. (Hinweis: Ich kenne keinen Beweis. Eine Lösung dieses Problems, oder ein Hinweis darauf, wo man eine Lösung finden könnte, bringen also Extrapunkte.)

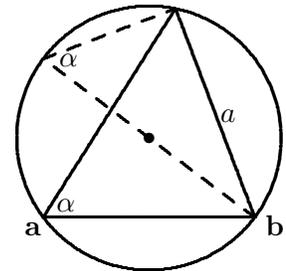
1.5 Kreise am Dreieck

Der *Umkreis* eines Dreiecks \mathbf{abc} ist der Kreis durch seine drei Ecken \mathbf{a} , \mathbf{b} und \mathbf{c} . Der Umkreismittelpunkt hat von allen drei Ecken denselben Abstand. Deswegen ist er der Schnittpunkt \mathbf{m} der Mittelsenkrechten. Für den Umkreisradius R gilt der

Satz 1.9 (Umkreisradius) *Ist α ein Winkel des Dreiecks und a die Länge der gegenüberliegenden Seite, so ist*

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{2R}.$$

Beweis. Da auf dem Umkreis alle Winkel über der Sekante a gleich sind, können wir die Ecke \mathbf{a} des Winkels α auf dem Umkreis verschieben, ohne dass sich dieser Winkel ändert. Verschieben wir die Ecke so weit, dass \mathbf{ab} ein Kreisdurchmesser wird, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse $2R$. Daraus folgt die Behauptung. \square



Eine in der Notation symmetrische Formel für R ergibt sich daraus leicht:

Satz 1.10 *Der Umkreisradius eines Dreiecks mit den Seiten a, b, c und der Fläche F_{Δ} ist*

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot F_{\Delta}}.$$

Beweis. Satz 1.9 gibt für den Umkreisradius

$$R = \frac{a}{2 \cdot \sin(\alpha)}.$$

Außerdem wissen wir

$$F_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\alpha), \quad \frac{1}{\sin(\alpha)} = \frac{b \cdot c}{2 \cdot F_{\Delta}}.$$

Setzen wir dies in die Formel für R ein, so erhalten wir die Behauptung. \square

Für später brauchen wir noch eine Abstandsformel:

Satz 1.11 (Abstand zum Umkreismittelpunkt) *Der Punkt \mathbf{x} der Ebene sei gegeben als Affinkombination*

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} + \nu \mathbf{c}, \quad \lambda + \mu + \nu = 1,$$

der Ecken. Dann gilt

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{m}\|^2 = R^2 - (\mu\nu \cdot a^2 + \lambda\nu \cdot b^2 + \lambda\mu \cdot c^2).$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x} - \mathbf{m}\|^2 &= \|(\lambda(\mathbf{a} - \mathbf{m}) + \mu(\mathbf{b} - \mathbf{m}) + \nu(\mathbf{c} - \mathbf{m}))\|^2 \\ &= (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)R^2 + \\ &\quad 2\lambda\mu \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{m} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{m}) + 2\lambda\nu \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{m} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{m}) + 2\mu\nu \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{m} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{m}).\end{aligned}$$

Die Skalarprodukte in dieser Formel hängen wie folgt mit den Seitenlängen zusammen:

$$c^2 = \|(\mathbf{a} - \mathbf{m}) - (\mathbf{b} - \mathbf{m})\|^2 = 2R^2 - 2(\mathbf{a} - \mathbf{m} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{m}).$$

Setzen wir die Beziehungen für alle drei Seiten

$$\begin{aligned}2(\mathbf{a} - \mathbf{m} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{m}) &= 2R^2 - c^2, \\ 2(\mathbf{b} - \mathbf{m} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{m}) &= 2R^2 - a^2, \\ 2(\mathbf{c} - \mathbf{m} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{m}) &= 2R^2 - b^2,\end{aligned}$$

in die letzte Formel ein, so finden wir

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x} - \mathbf{m}\|^2 &= (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) \cdot R^2 + 2(\lambda\mu + \lambda\nu + \mu\nu) \cdot R^2 - \lambda\mu \cdot c^2 - \lambda\nu \cdot b^2 - \mu\nu \cdot a^2 \\ &= (\lambda + \mu + \nu)^2 \cdot R^2 - (\mu\nu \cdot a^2 + \lambda\nu \cdot b^2 + \lambda\mu \cdot c^2).\end{aligned}$$

Wegen $\lambda + \mu + \nu = 1$ ist dies die Behauptung. \square

Der Schnittpunkt \mathbf{w} der drei Winkelhalbierenden hat von allen drei Seiten des Dreiecks den gleichen Abstand. Deswegen gibt es einen Kreis mit \mathbf{w} als Mittelpunkt, der alle drei Seiten berührt. Dieser Kreis heißt *Inkreis* des Dreiecks. Seinen Radius bezeichnen wir mit r .

Zu jeder Ecke eines Dreiecks gibt es zwei Winkelhalbierende: eine innere, die ins Innere des Dreiecks geht, und insbesondere \mathbf{w} enthält, und eine darauf senkrecht stehende äußere, die das Dreieck nur in dieser Ecke trifft. Die beiden äußeren Winkelhalbierenden durch die Ecken \mathbf{b} und \mathbf{c} treffen sich in einem Punkt \mathbf{w}_a außerhalb des Dreiecks, der aber auch von allen drei Seiten denselben Abstand hat. Es gibt deswegen einen Kreis mit Mittelpunkt \mathbf{w}_a , der auch alle drei Seiten berührt, die Seite a dabei von außen. Dieser Kreis heißt *Ankreis* des Dreiecks. Analog gibt es noch zwei andere Ankreise mit Mittelpunkten \mathbf{w}_b und \mathbf{w}_c , die jeweils die Seiten b und c von außen berühren.

Die Ankreismittelpunkte bestimmt man genauso, wie den Inkreismittelpunkt

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2s} \cdot (a \cdot \mathbf{a} + b \cdot \mathbf{b} + c \cdot \mathbf{c}).$$

Satz 1.12 (Ankreismittelpunkte) *Die Mittelpunkte der drei Ankreise sind*

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_a &= \frac{1}{2(s-a)} \cdot (-a \cdot \mathbf{a} + b \cdot \mathbf{b} + c \cdot \mathbf{c}), \\ \mathbf{w}_b &= \frac{1}{2(s-b)} \cdot (a \cdot \mathbf{a} - b \cdot \mathbf{b} + c \cdot \mathbf{c}), \\ \mathbf{w}_c &= \frac{1}{2(s-c)} \cdot (a \cdot \mathbf{a} + b \cdot \mathbf{b} - c \cdot \mathbf{c}).\end{aligned}$$

Beweis. Die äußere Winkelhalbierende durch \mathbf{b} wird aufgespannt vom Vektor

$$\frac{1}{c} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) + \frac{1}{a} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{b}) \sim a \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) + c \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{b}).$$

Sie ist also die Gerade

$$\mathbf{b} + ta \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) + tc \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{b}) = -ta \cdot \mathbf{a} + (1 + t(a - c)) \cdot \mathbf{b} + tc \cdot \mathbf{c}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

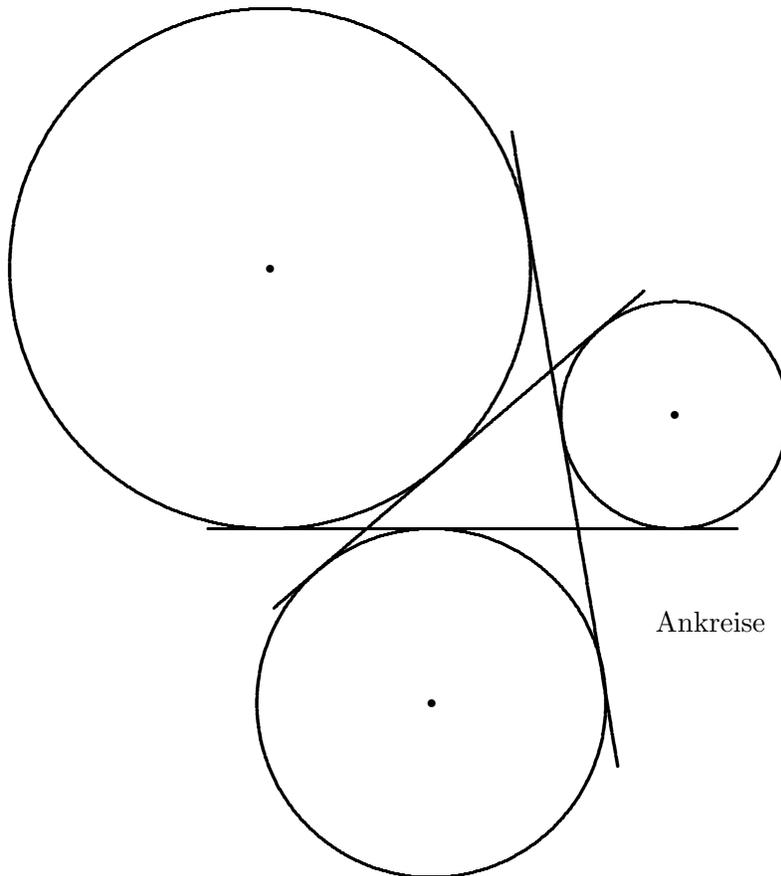
Zum Parameter

$$t = \frac{1}{-a + b + c} = \frac{1}{2(s - a)}$$

gehört ihr Punkt

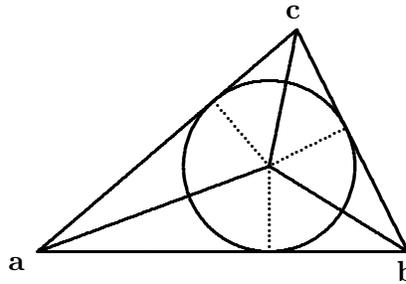
$$\frac{1}{2(s - a)} \cdot (-a \cdot \mathbf{a} + b \cdot \mathbf{b} + c \cdot \mathbf{c}).$$

Diese Formel ist symmetrisch in b, \mathbf{b} und c, \mathbf{c} . Deswegen liegt dieser Punkt auch auf der äußeren Winkelhalbierenden durch die Ecke \mathbf{c} . Der Punkt muss also der Ankreismittelpunkt \mathbf{w}_a sein. \square



Satz 1.13 (Inkreisradius) *Der Inkreisradius ist*

$$r = \frac{F_{\Delta}}{s} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$



Beweis. Der Inkreismittelpunkt **m** zerlegt das Dreieck in drei Teildreiecke mit den Flächen

$$\frac{r \cdot a}{2}, \quad \frac{r \cdot b}{2}, \quad \frac{r \cdot c}{2}.$$

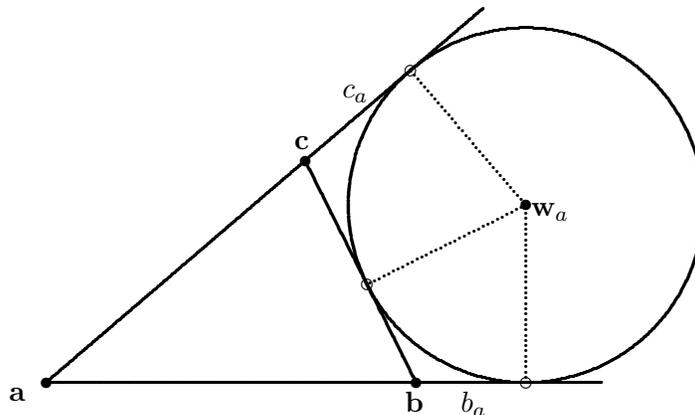
Ihre Summe ist die Dreiecksfläche

$$F_{\Delta} = r \cdot s.$$

Dies ist die erste Gleichung für r . Die zweite erhält man, wenn man den Wert von F_{Δ} aus der Heronischen Formel einsetzt. \square

Die Ankreisradien r_a, r_b und r_c erhält man durch einen ähnlichen Schluss, nur brauchen wir dafür die Berührpunkte des jeweiligen Ankreises mit den Dreiecksseiten. Dazu dient

Satz 1.14 (Hilfssatz) *Der Ankreis mit Mittelpunkt w_a berührt die Dreiecksseiten b und c in Punkten, die von der Ecke a den Abstand s haben.*



Beweis. Wie in der Zeichnung seien b_a und c_a die Abstände der Berührpunkte von den Ecken **b** und **c**. Aus Symmetriegründen hat der Berührpunkt mit der Seite a von **b** auch den Abstand b_a und von **c** auch den Abstand b_c . Daraus folgt

$$b_a + c_a = a.$$

Und aus Symmetriegründen gilt

$$c + b_a = b + c_a.$$

Es folgt

$$b_a - c_a = b - c, \quad 2b_a = a + b - c, \quad b_a = s - c. \quad \square$$

Satz 1.15 (Ankreisradius) *Der Radius des Ankreises, der die Seite a von außen berührt, ist*

$$r_a = \frac{F_\Delta}{s - a} = \sqrt{\frac{s \cdot (s - b) \cdot (s - c)}{s - a}}.$$

Beweis. Zusammen mit den Seiten b und c bestimmt der Ankreismittelpunkt zwei rechtwinklige Dreiecke der Flächen

$$\frac{r_a \cdot s}{2}.$$

Die Summe dieser Flächen ist die Dreiecksfläche F_Δ zusammen mit den drei Dreiecksflächen

$$\frac{r_a \cdot b_a}{2} = \frac{r_a \cdot (s - c)}{2}, \quad \frac{r_a \cdot a}{2}, \quad \frac{r_a \cdot c_a}{2} = \frac{r_a \cdot (s - b)}{2}.$$

Daraus folgt

$$F_\Delta = r_a \cdot s - \frac{r_a}{2} \cdot ((s - c) + a + (s - b)) = r_a \cdot (s - a).$$

Das ist die erste Gleichung, und die zweite erhält man wieder aus der Heronischen Formel. \square

Wir ziehen hieraus die Folgerung

$$R \cdot r = \frac{a \cdot b \cdot c}{4s}.$$

Satz 1.16 (Euler) *Der Abstand d zwischen den Mittelpunkten \mathbf{m} und \mathbf{w} von Um- und Inkreis eines Dreiecks erfüllt zusammen mit Um- und Inkreisradius die folgende Gleichung:*

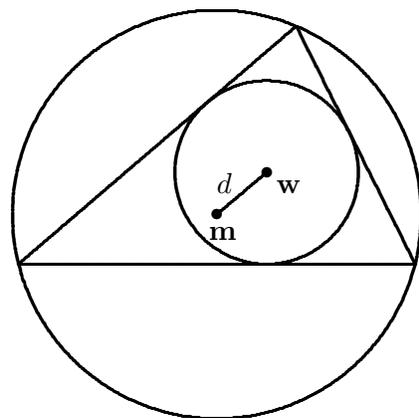
$$d^2 = R \cdot (R - 2r).$$

Daraus folgt insbesondere

$$R \geq 2r.$$

Beweis. In der Formel aus Satz 1.11 für den Abstand vom Umkreismittelpunkt \mathbf{m} nehmen wir als Punkt \mathbf{x} den Inkreismitelpunkt

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2s}(a \cdot \mathbf{a} + b \cdot \mathbf{b} + c \cdot \mathbf{c})$$



und finden

$$\begin{aligned}
 d^2 &= \|\mathbf{w} - \mathbf{m}\|^2 \\
 &= R^2 - \frac{1}{4s^2}(abc^2 + acb^2 + bca^2) \\
 &= R^2 - \frac{a \cdot b \cdot c}{2s} \\
 &= R^2 - 2Rr.
 \end{aligned}$$

□

Diese unscheinbare Formel von Euler hat es in sich. *Erstens* ist sie umkehrbar: Wenn zwei Kreise die Radien R und r haben, und die Distanz zwischen ihren Zentren $= d$ ist, und wenn die Eulersche Beziehung gilt, dann gibt es ein Dreieck, dessen Inkreis der Kreis mit Radius r ist, und dessen Umkreis der andere Kreis. *Zweitens* gibt es, wenn die Beziehung erfüllt ist, nicht nur ein solches Dreieck, nein - und das ist faszinierend - jeder Punkt auf dem äußeren Kreis kann als Ecke eines derartigen Dreiecks hergenommen werden. *Drittens* verallgemeinert sich diese Tatsache auf Vierecke, Fünfecke, Polygone mit beliebig vielen Ecken. Ein Zeitgenosse und Freund Eulers, Fuss, hat die Beziehungen zwischen den Radien zweier Kreise und der Distanz ihrer Mittelpunkte gefunden, dafür, dass ein n -Eck existiert, dessen Ecken auf dem einen Kreis liegen, und dessen Seiten den anderen berühren, für $n = 4, 5, 6, 7, 8$. Die Situation für $n = 5$ ist auf meiner Home-Page zu bewundern. *Viertens* kann man die Kreise durch beliebige Kegelschnitte ersetzen. Das ist dann der sogenannte Satz von Poncelet.

Die Seitenmitten

$$\mathbf{a}' = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}), \quad \mathbf{b}' = \frac{1}{2}(\mathbf{c} + \mathbf{a}), \quad \mathbf{c}' = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}),$$

sind die Ecken des sogenannten *Mittendreiecks*. Das Mittendreieck ist ähnlich zum Ausgangsdreieck mit dem Ähnlichkeitsfaktor $1/2$. Insbesondere ist sein Umkreisradius

$$R' = \frac{R}{2}.$$

Der Umkreis des Mittendreiecks heißt in der deutschen Literatur *Feuerbachkreis*, sonst *Neunpunktekreis*.

Satz 1.17 *Für den Mittelpunkt \mathbf{f} des Feuerbachkreises gilt*

$$\mathbf{f} = \frac{3}{2} \cdot \mathbf{s} - \frac{1}{2} \cdot \mathbf{m} = \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{h} + \mathbf{m}).$$

Beweis. Der Umkreismittelpunkt des Mittendreiecks ist nach unseren Formeln für die merkwürdigen Punkte des Dreiecks

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f} &= \mathbf{m}' \\
 &= \frac{1}{2(t_a + t_b + t_c)} \cdot ((t_b + t_c) \cdot \mathbf{a}' + (t_a + t_c) \cdot \mathbf{b}' + (t_a + t_b) \cdot \mathbf{c}') \\
 &= \frac{1}{4(t_a + t_b + t_c)} \cdot ((t_a + t_b) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + (t_a + t_c) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{c}) + (t_b + t_c) \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4(t_a + t_b + t_c)} \cdot ((2t_a + t_b + t_c) \cdot \mathbf{a} + (t_a + 2t_b + t_c) \cdot \mathbf{b} + (t_a + t_b + 2t_c) \cdot \mathbf{c}) \\
&= \frac{3}{2}\mathbf{s} - \frac{1}{2}\mathbf{m}.
\end{aligned}$$

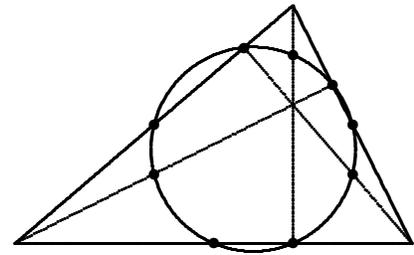
Das ist die erste Identität. Die zweite ist eine Anwendung der Eulerschen Gleichung Satz 1.4. \square

Der Mittelpunkt \mathbf{f} des Feuerbachkreises ist also eine Affinkombination der Punkte \mathbf{s} und \mathbf{m} . Damit liegt auch er auf der Eulergeraden. Die zweite Gleichung in Satz 1.17 bedeutet, dass er der Mittelpunkt der Strecke zwischen dem Höhenschnittpunkt \mathbf{h} und dem Umkreismittelpunkt \mathbf{m} ist.

Der Feuerbachkreis heißt auch Neunpunktekreis, weil auf ihm neun bemerkenswerte Punkte des Dreiecks liegen.

Satz 1.18 (Feuerbach, Brianchon, Poncelet)

Auf dem Feuerbachkreis liegen außer den drei Seitenmitten des Ausgangsdreiecks auch noch dessen drei Höhenfußpunkte und die Mittelpunkte der drei Strecken zwischen dem Höhenschnittpunkt \mathbf{h} und den drei Eckpunkten.



Beweis. Höhenfußpunkte: Der Feuerbachpunkt \mathbf{f} ist der Mittelpunkt der Strecke zwischen \mathbf{h} und \mathbf{m} . Unter der Orthogonalprojektion auf die Seite c geht \mathbf{h} auf den Höhenfußpunkt \mathbf{h}_c auf dieser Seite, \mathbf{m} auf die Seitenmitte \mathbf{c}' , und \mathbf{f} auf die Mitte der Strecke zwischen diesen beiden Punkten. Nach Pythagoras, oder wegen ähnlicher Dreiecke folgt

$$\|\mathbf{f} - \mathbf{h}_c\| = \|\mathbf{f} - \mathbf{c}'\|.$$

Und weil \mathbf{c}' auf dem Feuerbachkreis liegt, liegt auch \mathbf{h}_c drauf. Mit den anderen beiden Höhenfußpunkten geht es natürlich genauso.

Mittelpunkte zwischen \mathbf{h} und den Ecken: Wir eliminieren

$$\mathbf{m} = \frac{3}{2}\mathbf{s} - \frac{1}{2}\mathbf{h} = 3\mathbf{s} - 2\mathbf{f}$$

aus der Euler- und der Feuerbachgleichung und erhalten

$$2\mathbf{f} = \frac{3}{2}\mathbf{s} + \frac{1}{2}\mathbf{h} = \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{h}).$$

Daraus folgt

$$\mathbf{f} - \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{h} + \mathbf{c}) - \mathbf{f}.$$

Der Mittelpunkt $(\mathbf{h} + \mathbf{c})/2$ der Strecke zwischen \mathbf{h} und \mathbf{c} liegt also auf derselben Geraden durch \mathbf{f} , wie die Seitenmitte $\mathbf{c}' = (\mathbf{a} + \mathbf{b})/2$, im selben Abstand, aber auf der anderen Seite von \mathbf{f} . Weil \mathbf{c}' auf dem Feuerbachkreis liegt, liegt auch $(\mathbf{h} + \mathbf{c})/2$ drauf. \square

Die folgende Tatsache geht auf Feuerbach alleine zurück.

Satz 1.19 (Feuerbach) *Der Feuerbachkreis berührt den Inkreis und die drei Ankreise des Dreiecks.*

Beweis. Ich möchte hier nur die Berühr-Eigenschaft für den Inkreis beweisen. Für die Ankreise geht es ziemlich analog. Den Beweis findet man im Koecher-Krieg, wo ich auch den Beweis für den Inkreis abgeschrieben habe.

Zu zeigen ist

$$\| \mathbf{w} - \mathbf{m}' \| = \frac{R}{2} - r.$$

Zuerst drücken wir den Inkreismittelpunkt \mathbf{w} als Affinkombination der Ecken des Mittendreiecks dar:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \frac{1}{2s} \cdot (a \cdot \mathbf{a} + b \cdot \mathbf{b} + c \cdot \mathbf{c}) \\ &= \frac{1}{s} \cdot \left(a \cdot \frac{\mathbf{a}}{2} + b \cdot \frac{\mathbf{b}}{2} + c \cdot \frac{\mathbf{c}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{s} \cdot \left((2s - b - c) \cdot \frac{\mathbf{a}}{2} + (2s - a - c) \cdot \frac{\mathbf{b}}{2} + (2s - a - b) \cdot \frac{\mathbf{c}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{s} \cdot \left((s - c) \cdot \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2} + (s - b) \cdot \frac{\mathbf{a} + \mathbf{c}}{2} + (s - a) \cdot \frac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{s} \cdot ((s - a) \cdot \mathbf{a}' + (s - b) \cdot \mathbf{b}' + (s - c) \cdot \mathbf{c}'). \end{aligned}$$

Diesen Punkt \mathbf{w} geben wir in die Formel für den Abstand zum Umkreismittelpunkt \mathbf{m}' des Mittendreiecks ein und erhalten

$$\begin{aligned} \left(\frac{R}{2} \right)^2 - \| \mathbf{w} - \mathbf{m}' \|^2 &= \frac{1}{s^2} \cdot \left((s - a)(s - b) \frac{c^2}{4} + (s - a)(s - c) \frac{b^2}{4} + (s - b)(s - c) \frac{a^2}{4} \right) \\ &= \frac{1}{16s^2} \cdot \left((a - b + c)(a + b - c)a^2 + (-a + b + c)(a + b - c)b^2 \right. \\ &\quad \left. + (-a + b + c)(a - b + c)c^2 \right) \\ &= \frac{1}{16s^2} \cdot \left((a^2 - (b - c)^2)a^2 + (b^2 - (a - c)^2)b^2 + (c^2 - (a - b)^2)c^2 \right) \\ &= \frac{1}{16s^2} \cdot \left(a^4 + b^4 + c^4 - 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) + 2(a^2bc + ab^2c + abc^2) \right). \end{aligned}$$

Jetzt benützen wir die geradezu sensationelle Identität

$$\begin{aligned} &a^4 + b^4 + c^4 - 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) \\ &= (a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2 \\ &= (a^2 + b^2 - c^2 + 2ab)(a^2 + b^2 - c^2 - 2ab) \\ &= ((a + b)^2 - c^2)((a - b)^2 - c^2) \\ &= -(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c) \end{aligned}$$

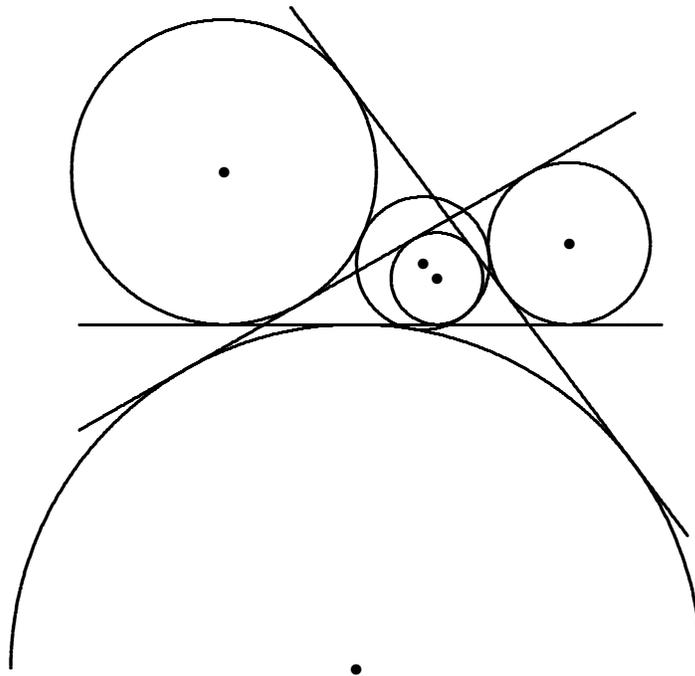
und formen um

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{R}{2}\right)^2 - \|\mathbf{w} - \mathbf{m}'\|^2 &= \frac{1}{16s^2} \cdot (a+b+c) \cdot (2abc - 8(s-a)(s-b)(s-c)) \\
 &= \frac{1}{8s} (2abc - 8(s-a)(s-b)(s-c)) \\
 &= \frac{abc}{4s} - \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s} \\
 &= \frac{abc}{4F_{\Delta}} \cdot \frac{F_{\Delta}}{s} - \left(\frac{F_{\Delta}}{s}\right)^2 \\
 &= R \cdot r - r^2.
 \end{aligned}$$

Für das Abstandsquadrat haben wir also gefunden

$$\|\mathbf{w} - \mathbf{m}'\|^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{R}{2} \cdot r + r^2 = \left(\frac{R}{2} - r\right)^2.$$

Das ist wegen $R/2 > r$ die Behauptung in quadrierter Form. □



Aufgabe 1.27 Zeigen Sie:

- a) Das Dreieck \mathbf{abc} ist das Höhenfußpunktdreieck des Dreiecks $\mathbf{w}_a\mathbf{w}_b\mathbf{w}_c$.
- b) Der Umkreis des Dreiecks \mathbf{abc} ist der Feuerbachkreis des Dreiecks $\mathbf{w}_a\mathbf{w}_b\mathbf{w}_c$.

Aufgabe 1.28 Zeigen Sie

$$4R \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) = s.$$

Aufgabe 1.29 Zeigen Sie für den Inkreisradius r und die Radien der drei Ankreise

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}.$$

Aufgabe 1.30 Zeigen Sie

a) $\| \mathbf{w}_a - \mathbf{m} \|^2 = R^2 + 2Rr_a.$

b) $\| \mathbf{w}_a - \mathbf{f} \| = \frac{R}{2} + r_a.$

Aufgabe 1.31 (Fu-Pe 1.1.4) In zwei Punkten $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ des Kreises K werden Tangenten an K gezogen, die sich in \mathbf{c} treffen. Zeigen Sie: Der Inkreismittelpunkt des Dreiecks \mathbf{abc} liegt auf K .

Aufgabe 1.32 (Fu-Pe 2.2.5) Auf der Seite \mathbf{ab} des Dreiecks \mathbf{abc} sei ein Punkt \mathbf{c}' gewählt derart, dass die beiden Dreiecke $\mathbf{ac}'\mathbf{c}$ und $\mathbf{c}'\mathbf{bc}$ den gleichen Inkreisradius haben. Zeigen Sie:

$$\| \mathbf{c} - \mathbf{c}' \| = \sqrt{s(s-c)}.$$

Aufgabe 1.33 (Fu-Pe 2.2.6) Im Dreieck \mathbf{abc} sei \mathbf{h}_c der Fußpunkt der Höhe durch \mathbf{c} . Weiter sei K der Kreis mit Durchmesser \mathbf{ch}_c . Er treffe die Seite \mathbf{bc} in \mathbf{a}' und die Seite \mathbf{ac} in \mathbf{b}' . Zeigen Sie: der Inkreisradius des Dreiecks $\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}$ ist

$$\frac{c \cdot \| \mathbf{c} - \mathbf{h}_c \|^3}{ab \cdot (a + b + c)}.$$

Aufgabe 1.34 (Fu-Pe 2.4) Im Dreieck \mathbf{abc} werden drei Kreise gezeichnet, die jeweils zwei Seiten berühren, sowie den Inkreis des Dreiecks von außen berühren. Zeigen Sie für deren Radien:

$$\sqrt{r_a r_b} + \sqrt{r_b r_c} + \sqrt{r_c r_a} = r.$$

Aufgabe 1.35 (Fu-Pe 3.1.3) Das Viereck \mathbf{abcd} sei ein Quadrat mit Seitenlänge a . Der Mittelpunkt der Seite \mathbf{ab} sei \mathbf{m} . Der Schnittpunkt der Diagonale \mathbf{ac} mit der Geraden \mathbf{dm} sei \mathbf{e} . Zeigen Sie: der Inkreisradius des Dreiecks \mathbf{cde} ist

$$\frac{2a}{3 + \sqrt{5} + \sqrt{8}}.$$

Aufgabe 1.36 (Satz von Carnot) Am Dreieck \mathbf{abc} seien $\mathbf{m}_a, \mathbf{m}_b, \mathbf{m}_c$ die Mittelpunkte der Seiten $\mathbf{bc}, \mathbf{ca}, \mathbf{ab}$. Dann gilt

$$\| \mathbf{m} - \mathbf{m}_a \| + \| \mathbf{m} - \mathbf{m}_b \| + \| \mathbf{m} - \mathbf{m}_c \| = R + r.$$

Aufgabe 1.37 Betrachten Sie das Dreieck in der affinen Ebene \mathbb{R}^2 mit den Ecken $\mathbf{a} = (0, 0)$, $\mathbf{b} = (4, 0)$, $\mathbf{c} = (0, 3)$. Bestimmen Sie für dieses Dreieck den halben Umfang s , die Fläche F , den Schnittpunkt \mathbf{w} der Winkelhalbierenden, den Schnittpunkt \mathbf{m} der Mittelsenkrechten, den Inkreisradius r und den Umkreisradius R . Verifizieren Sie die Eulersche Beziehung zwischen r, R und dem Abstand d der Mittelpunkte von In- und Umkreis.

Aufgabe 1.38 Betrachten Sie das Dreieck in der affinen Ebene \mathbb{R}^2 mit den Ecken $\mathbf{a} = (0, 0)$, $\mathbf{b} = (12, 0)$, $\mathbf{c} = (0, 5)$. Bestimmen Sie für dieses Dreieck den halben Umfang s , die Fläche F , den Ankreismittelpunkt \mathbf{w}_a , den Mittelpunkt \mathbf{m}' des Feuerbachkreises, den Ankreisradius r_a und den Radius R' des Feuerbachkreises. Verifizieren Sie den Satz von Feuerbach: Der Feuerbachkreis berührt den Ankreis mit Mittelpunkt \mathbf{w}_a .

Aufgabe 1.39 Betrachten Sie in der affinen Ebene \mathbb{R}^2 das Dreieck mit den Ecken $\mathbf{a} = (0, 6)$, $\mathbf{b} = (8, 0)$, $\mathbf{c} = (8, 6)$. Bestimmen Sie für dieses Dreieck den halben Umfang s , die Fläche F und verifizieren Sie die Heronische Formel. Bestimmen Sie den Inkreismittelpunkt \mathbf{w} und den Inkreisradius r , den Mittelpunkt \mathbf{m}' und den Radius R' des Feuerbachkreises. Verifizieren Sie den Satz von Feuerbach: Der Feuerbachkreis berührt den Inkreis.

2 Affine Geometrie

Die Gruppe der affinen Transformationen haben wir schon in 0.1 charakterisiert. Diese Transformationen lassen i.A. das Skalarprodukt (\mathbf{x}, \mathbf{y}) nicht mehr invariant. Wir dürfen also jetzt das Skalarprodukt und seine Eigenschaften nicht mehr benutzen. Deswegen gibt es auch keinen Grund, der uns daran hindern könnte, statt des affinen Raums \mathbb{R}^n gleich einen Raum \mathbb{K}^n , \mathbb{K} ein beliebiger Körper, für unsere Geometrie zugrunde zu legen.

2.1 Affine Transformationen

Affine Transformationen sind Abbildungen $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ der Form $F(\mathbf{x}) = \mathbf{t} + M \cdot \mathbf{x}$ mit einem Translationsvektor $\mathbf{t} \in \mathbb{K}^n$ und einer Matrix $M \in GL(n, \mathbb{K})$. Auch diese Abbildungen kann man als Multiplikation mit einer Matrix schreiben: Man muss dazu vom Vektor \mathbf{x} zum erweiterten Vektor

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}$$

übergehen und die erweiterte Matrix

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^t \\ \mathbf{t} & M \end{pmatrix}$$

verwenden. Es ist ja

$$M' \cdot \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^t \\ \mathbf{t} & M \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{t} + M \cdot \mathbf{x} \end{pmatrix} = (F(\mathbf{x}))'.$$

Manchmal ist es rechentechnisch etwas (aber nicht sehr) vorteilhaft, statt des Vektors \mathbf{x} den erweiterten Vektor \mathbf{x}' zu verwenden. Aber in Wirklichkeit steckt hinter dieser Notation die ganze Philosophie der affinen Geometrie. Und das kommt so:

Der Vektor \mathbf{x}' liegt im \mathbb{K}^{n+1} . Damit wir die Bezeichnung für die Koordinaten x_1, \dots, x_n des Vektors \mathbf{x} nicht verändern müssen, nennen wir die zusätzliche, erste Koordinate x_0 . Dann liegen die erweiterten Vektoren \mathbf{x}' alle in der affinen Hyperebene

$$A := \{\mathbf{x} \in \mathbb{K}^{n+1} : x_0 = 1\} \subset \mathbb{K}^{n+1}.$$

Und die erweiterten Matrizen M' sind genau die Matrizen derjenigen linearen Abbildungen $F' : \mathbb{K}^{n+1} \rightarrow \mathbb{K}^{n+1}$, welche diese affine Hyperebene auf sich selbst abbilden. Die affinen Transformationen in $\mathbb{K}^n = A$ sind genau die Einschränkungen der linearen Abbildungen $\mathbb{K}^{n+1} \rightarrow \mathbb{K}^{n+1}$ auf A , welche A auf sich überführen. Und den affinen Raum A kann man auffassen als ein Exemplar des Vektorraums \mathbb{K}^n , nur hat er jetzt keinen Nullvektor mehr, und ist auch kein Vektorraum mehr.

Einer der Grundbegriffe der Linearen Algebra ist die Linearkombination

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K},$$

von Vektoren $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{K}^n$. Eine Linearkombination

$$\mathbf{x}' = \lambda_1 \mathbf{x}'_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{x}'_k = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \dots + \lambda_k \\ \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k \end{pmatrix}$$

von Vektoren $\mathbf{x}'_1, \dots, \mathbf{x}'_k \in A$ gehört genau dann wieder zum affinen Raum A , wenn

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1.$$

Im \mathbb{K}^n führt dies auf die folgende Definition

Definition 2.1 (= Definition 0.4) Eine Linearkombination $\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k$ von Vektoren $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{K}^n$ heißt Affinkombination, falls $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$ ist.

Affinkombinationen spielen in der affinen Geometrie dieselbe wichtige Rolle, wie Linearkombinationen in der Linearen Algebra. Das liegt an

Satz 2.1 Es sei $F : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ eine affine Abbildung. Dann gilt für jede Affinkombination $\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k \in \mathbb{K}^n$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$, dass

$$F(\mathbf{x}) = \lambda_1 F(\mathbf{x}_1) + \dots + \lambda_k F(\mathbf{x}_k).$$

Der Beweis ist wörtlich derselbe, wie für die Invarianz des Teilverhältnisses in 0.1, und wir wollen ihn uns deshalb hier sparen.

Die Koeffizienten einer Linearkombination $\mathbf{x}' = \lambda_1 \mathbf{x}'_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{x}'_k \in \mathbb{K}^{n+1}$ sind durch \mathbf{x}' genau dann eindeutig bestimmt, wenn die Vektoren $\mathbf{x}'_1, \dots, \mathbf{x}'_k \in \mathbb{K}^{n+1}$ linear unabhängig sind, oder äquivalent dazu

$$\text{Rg} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \mathbf{x}_1 & \dots & \mathbf{x}_k \end{pmatrix} = k.$$

Zieht man in dieser Matrix die erste Spalte von allen anderen ab, so ändert sich dieser Rang nicht:

$$\text{Rg} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \mathbf{x}_1 & \dots & \mathbf{x}_k \end{pmatrix} = \text{Rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 & \dots & \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_1 \end{pmatrix} = 1 + \text{Rg} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 & \dots & \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_1 \end{pmatrix}.$$

Die k Vektoren $\mathbf{x}'_1, \dots, \mathbf{x}'_k \in A \subset \mathbb{K}^{n+1}$ sind genau dann linear unabhängig, wenn es die $k - 1$ Vektoren $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_1 \in \mathbb{K}^n$ sind.

Definition 2.2 Die k Punkte $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ im affinen Raum \mathbb{K}^{n+1} heißen affin unabhängig wenn die $k - 1$ Vektoren $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_1$ linear unabhängig sind.

Natürlich spielt hier der Vektor \mathbf{x}_1 keine Sonderrolle, man hätte auch jeden anderen Vektor an seiner Stelle von den restlichen Vektoren abziehen können.

Aus dieser Diskussion folgt:

Satz 2.2 Sind die Punkte $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ affin unabhängig, so sind die Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ einer Affinkombination $\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$, durch \mathbf{x} eindeutig bestimmt.

Im Folgenden werden wir uns praktisch ausschließlich auf die affine Geometrie der Ebene \mathbb{K}^2 konzentrieren. Dies liegt nicht daran, dass die affine Geometrie im \mathbb{K}^n , $n > 2$, uninteressant wäre. Im Gegenteil! So ist z.B. die affine Geometrie des \mathbb{R}^3 die Grundlage der darstellenden Geometrie, bzw. ihres Gegenstückes in den Ingenieurwissenschaften, des Technischen Zeichnens. Aber um die Charakteristika der verschiedenen Sorten von Geometrie kennen zu lernen, genügt die ebene Geometrie durchaus. Sie ist sehr reichhaltig, und aus Zeitgründen werden wir uns auf sie konzentrieren.

In der affinen Ebene \mathbb{K}^2 gibt es als affine Unterräume Punkte und Geraden. Jede Gerade $L \subset \mathbb{K}^2$ ist eine Kopie des affinen Raums \mathbb{K} . Zwei Geraden $L, M \subset \mathbb{K}^2$ schneiden sich immer, wenn sie nicht parallel sind (d.h., wenn ihre zugehörigen parallelen Untervektorräume übereinstimmen, s. 1.1). In praktisch jeder Aussage der affinen Geometrie tritt dieser Fall von Parallelität als Sonderfall auf. Dies wird noch viel Aufmerksamkeit erfordern.

Natürlich werden wir affine Abbildungen einer Geraden $L \simeq \mathbb{K}$ auf eine andere $M \simeq \mathbb{K}$ betrachten. Die wichtigste derartige affine Abbildung ist die Parallelprojektion.

Definition 2.3 (Parallelprojektion) *Es seien $L, M \subset \mathbb{K}^2$ zwei affine Geraden. Außerdem sei $P \subset \mathbb{K}^2$ eine weitere Gerade, nicht parallel zu L oder zu M . Die Parallelprojektion $\pi : L \rightarrow M$ in Richtung von P ist folgende Abbildung: Durch jeden Punkt $\mathbf{x} \in L$ gibt es genau eine Gerade $P_{\mathbf{x}}$ parallel zu P . Weil diese nicht parallel zu M ist, gibt es genau einen Schnittpunkt von $P_{\mathbf{x}}$ mit M . Dies ist der Bildpunkt $\pi(\mathbf{x})$ von \mathbf{x} .*

Satz 2.3 *Unter den Voraussetzungen von Definition 2.3 ist die Parallelprojektion $\pi : L \rightarrow M$ eine affine, insbesondere eine bijektive Abbildung.*

Beweis. Die Aussage ist unabhängig von den Koordinaten, welche wir im \mathbb{K}^2 wählen. Wir können deswegen als Nullpunkt den Schnittpunkt von P mit M wählen, als P die x_2 -Achse und als M die x_1 -Achse. Ein Punkt $(x_1, x_2) \in L$ wird dann auf $(x_1, 0) \in M$ abgebildet. Wir parametrisieren L durch

$$\mathbb{K} \ni s \mapsto \mathbf{a} + s \cdot \mathbf{v} = (a_1, a_2) + s \cdot (v_1, v_2) = (a_1 + sv_1, a_2 + sv_2).$$

Die zusammengesetzte Abbildung

$$\mathbb{K} \rightarrow L \rightarrow M \quad \text{wird somit} \quad s \mapsto a_1 + sv_1.$$

Weil P nicht parallel zu L ist, ist $v_1 \neq 0$. Die zusammengesetzte Abbildung ist also affin, und damit ist auch π selbst eine affine Abbildung. \square

Insbesondere bleiben Teilverhältnisse unter Parallelprojektionen invariant. Dies ist eine Version des aus der Schule bekannten Strahlensatzes.

Satz 2.4 *Es seien $L, M \subset \mathbb{K}^2$ zwei Geraden, die sich in einem Punkt \mathbf{a} schneiden. Eine affine Abbildung $\pi : L \rightarrow M$ ist genau dann eine Parallelprojektion, wenn $\pi(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$.*

Beweis. Für eine Parallelprojektion $\pi : L \rightarrow M$ ist natürlich immer $\pi(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$. Wir brauchen also nur die Umkehrrichtung zu zeigen.

Wir parametrisieren $L : \mathbf{a} + \mathbb{K} \cdot \mathbf{v}$ mit einem Richtungsvektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Wegen $\pi(\mathbf{a} + \mathbf{v}) \neq \mathbf{a}$ ist $\pi(\mathbf{a} + \mathbf{v}) = \mathbf{a} + \mathbf{w} \in M$ mit $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$. Wegen der Invarianz des Teilverhältnisses unter π gilt für jeden Punkt

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + s\mathbf{v} = (1 - s)\mathbf{a} + s(\mathbf{a} + \mathbf{v}) \in L$$

dass

$$\pi(\mathbf{x}) = (1 - s)\mathbf{a} + s(\mathbf{a} + \mathbf{w}) = \mathbf{a} + s\mathbf{w}.$$

Jeder Vektor

$$\pi(\mathbf{x}) - \mathbf{x} = s(\mathbf{w} - \mathbf{v})$$

ist also parallel zum festen Vektor $\mathbf{w} - \mathbf{v}$ und die Abbildung ist eine Parallelprojektion. \square

Satz 2.5 (Folgerung) *Es seien $L \neq M \subset \mathbb{K}^2$ zwei verschiedene Geraden. Dann ist jede affine Abbildung $F : L \rightarrow M$ eine Parallelprojektion oder eine Zusammensetzung von zwei Parallelprojektionen.*

Beweis. Wie eben bezeichne \mathbf{a} den Schnittpunkt der Geraden L und M . Wegen Satz 2.4 können wir o.B.d.A. annehmen $\mathbf{b} := F(\mathbf{a}) \in M$ ist von \mathbf{a} verschieden. Sei N eine Gerade durch \mathbf{b} , von M verschieden. Die Parallelprojektion $\pi_1 : N \rightarrow L$ in Richtung von M bildet dann $\mathbf{b} \mapsto \mathbf{a}$ ab. Die affine Abbildung

$$\pi_2 := F \circ \pi_1 : N \rightarrow M$$

lässt den Punkt \mathbf{b} fest und ist nach Satz 2.4 eine Parallelprojektion. Dann ist $F = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$ eine Zusammensetzung von zwei Parallelprojektionen. \square

Am Dreieck haben wir uns vier verschiedene Sorten merkwürdiger Linien angeschaut. Von diesen brauchen drei Sorten (Winkelhalbierende, Mittelsenkrechte, Höhen) zu ihrer Definition den Begriff des Winkels, diese Linien gehören deswegen zur euklidischen Geometrie. Um die Seitenhalbierenden zu definieren braucht man nur den Mittelpunkt $\mathbf{m} = (\mathbf{a} + \mathbf{b})/2$ einer Strecke $\overline{\mathbf{a}\mathbf{b}}$. Dazu braucht man nicht unbedingt den Begriff des Abstands, es geht auch durch die Festlegung $TV(\mathbf{m}; \mathbf{a}, \mathbf{b}) = -1$ oder einfach durch $\mathbf{m} := (\mathbf{a} + \mathbf{b})/2$. Deswegen sind die Seitenhalbierenden und ihr Schnittpunkt $\mathbf{s} = (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})/3$ ein Begriff der affinen Geometrie. Aber aufgepasst: Hier spielt der Grundkörper \mathbb{K} eine Rolle! Zunächst einmal darf in \mathbb{K} nicht $2 = 0$ sein, wie es etwa im Körper \mathbb{F}_2 aus zwei Elementen der Fall ist. Denn dann gäbe es den Mittelpunkt einer Strecke nicht. Um die Seitenhalbierenden zu definieren, müssen wir also $2 \neq 0 \in \mathbb{K}$ voraussetzen.

Aber selbst dann gibt es $\mathbf{s} = (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})/3$ nicht, falls $3 = 0 \in \mathbb{K}$. Was ist dann los mit den Seitenhalbierenden?

Satz 2.6 *Falls $3 \neq 0 \in \mathbb{K}$, dann sind die Seitenhalbierenden in jedem Dreieck parallel.*

Beweis. Der Richtungsvektor der Seitenhalbierenden durch \mathbf{a} ist

$$\frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) - \mathbf{a} = 2(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$$

(wegen $1/2 \neq 0$) und ändert sich nicht beim Vertauschen von \mathbf{a} , \mathbf{b} und \mathbf{c} . Alle drei Seitenhalbierenden sind parallel. \square

Ein anderer Satz der elementaren affinen Geometrie ist der Satz über die Diagonalen im Parallelogramm. Ein Viereck \mathbf{abcd} ist ein Parallelogramm, falls

$$\mathbf{b} - \mathbf{a} = \mathbf{c} - \mathbf{d} \quad \text{oder äquivalent dazu} \quad \mathbf{c} - \mathbf{b} = \mathbf{d} - \mathbf{a}.$$

Satz 2.7 Falls $2 \neq 0 \in \mathbb{K}$ ist, halbieren sich die Diagonalen im Parallelogramm gegenseitig. Wenn $2 = 0 \in \mathbb{K}$ ist, dann sind die beiden Diagonalen parallel.

Beweis. Der Mittelpunkt der Diagonale \mathbf{ac} ist $(\mathbf{a} + \mathbf{c})/2$. Wegen $\mathbf{d} = \mathbf{c} + \mathbf{a} - \mathbf{b}$ ist dies auch der Mittelpunkt $(\mathbf{b} + \mathbf{d})/2$ der anderen Diagonale. Natürlich ist dieser Mittelpunkt nur definiert, wenn $2 \neq 0 \in \mathbb{K}$ ist.

Betrachten wir den Fall $2 = 0 \in \mathbb{K}$: Der Richtungsvektor der Diagonale \mathbf{ac} ist $\mathbf{c} - \mathbf{a}$ und der Richtungsvektor der anderen Diagonale

$$\mathbf{d} - \mathbf{b} = \mathbf{c} + \mathbf{a} - 2\mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{c},$$

wegen $2\mathbf{b} = \mathbf{0}$. □

Aufgabe 2.1 (Satz von Varignon) Es sei $2 \neq 0 \in \mathbb{K}$. Im affinen \mathbb{R}^n sei ein Viereck \mathbf{abcd} gegeben. Zeigen Sie, dass die Mittelpunkte der Strecken $\overline{\mathbf{ab}}$, $\overline{\mathbf{bc}}$, $\overline{\mathbf{cd}}$, $\overline{\mathbf{da}}$ ein Parallelogramm bilden.

2.2 Baryzentrische Koordinaten

Wenn wir von einem Dreieck \mathbf{abc} reden, nehmen wir immer stillschweigend an, dass es nicht-entartet ist. D.h., die Vektoren $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ und $\mathbf{c} - \mathbf{a}$ müssen linear unabhängig sein. Die drei Eckpunkte sind dann affin unabhängig im Sinn von Definition 2.2. Wegen Satz 2.2 ist dann jeder Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^2$ eine Affinkombination

$$\mathbf{x} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c}, \quad \lambda + \mu + \nu = 1,$$

der Ecken, und die Koeffizienten λ, μ, ν sind durch den Punkt \mathbf{x} eindeutig bestimmt. Diese Koeffizienten heißen auch die *baryzentrischen Koordinaten* des Punktes \mathbf{x} . (Der Punkt \mathbf{x} ist der Schwerpunkt (= Baryzentrum) einer Konfiguration von drei Massenpunkten, welche in den drei Ecken liegen, und die Größe λ, μ und ν besitzen.)

Wenn \mathbf{x} auf einer Seite des Dreiecks, etwa \mathbf{bc} , liegt, dann ist eine baryzentrische Koordinate (hier λ) = 0, und $\mathbf{x} = \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c}$ ist eine Affinkombination der beiden Ecken auf dieser Seite. Das Teilverhältnis

$$TV(\mathbf{x}; \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -\frac{\nu}{\mu}$$

ist dann sehr einfach aus den baryzentrischen Koordinaten abzulesen.

Aber auch, wenn \mathbf{x} auf keiner Seite des Dreiecks liegt, haben die baryzentrischen Koordinaten sehr viel mit Teilverhältnissen zu tun.

Satz 2.8 *Der Punkt $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c}$ liege auf keiner Seite des Dreiecks \mathbf{abc} .*

a) *Die Gerade \mathbf{ax} ist genau dann parallel zur Seite \mathbf{bc} , wenn $\lambda = 1$, bzw. (äquivalent dazu) $\mu + \nu = 0$.*

b) *Schneidet die Gerade \mathbf{ax} die Seite \mathbf{bc} in einem Punkt \mathbf{a}' , so gilt*

$$TV(\mathbf{a}'; \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -\frac{\nu}{\mu}.$$

Beweis. a) Die Gerade \mathbf{ax} ist genau dann parallel zur Seite \mathbf{bc} , wenn

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + t \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{b}) \quad \text{mit } t \in \mathbb{K}.$$

Die baryzentrischen Koordinaten des Punktes \mathbf{x} sind dann $\lambda = 1$ und $\mu = -t$, $\nu = t$.

b) Wenn $\mu + \nu \neq 0$ ist, kann man schreiben

$$\mathbf{x} = \lambda\mathbf{a} + (\mu + \nu) \cdot \left(\frac{\mu}{\mu + \nu}\mathbf{b} + \frac{\nu}{\mu + \nu}\mathbf{c} \right).$$

Wir betrachten den Punkt

$$\mathbf{a}' := \frac{\mu}{\mu + \nu}\mathbf{b} + \frac{\nu}{\mu + \nu}\mathbf{c}$$

auf der Seite \mathbf{bc} . Mit diesem Punkt schreibt sich \mathbf{x} als Affinkombination

$$\mathbf{x} = \lambda\mathbf{a} + (1 - \lambda)\mathbf{a}'.$$

Also liegt \mathbf{x} auf der Geraden $\mathbf{aa}' = \mathbf{ax}$ und \mathbf{a}' ist der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Seite \mathbf{bc} . Und weiter ist

$$TV(\mathbf{a}'; \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -\frac{\nu/(\mu + \nu)}{\mu/(\mu + \nu)} = -\frac{\nu}{\mu}. \quad \square$$

Dieser Satz hat eine einfache Folgerung:

Satz 2.9 (Ceva, erste Version) *Der Punkt \mathbf{x} liege auf keiner Seite des Dreiecks \mathbf{abc} . Die Geraden \mathbf{ax} , \mathbf{bx} und \mathbf{cx} mögen die Seiten \mathbf{bc} , \mathbf{ca} und \mathbf{ab} in den Punkten $\mathbf{a}' \in \mathbf{bc}$, $\mathbf{b}' \in \mathbf{ca}$ und $\mathbf{c}' \in \mathbf{ab}$ treffen. Dann gilt*

$$TV(\mathbf{a}'; \mathbf{b}, \mathbf{c}) \cdot TV(\mathbf{b}'; \mathbf{c}, \mathbf{a}) \cdot TV(\mathbf{c}'; \mathbf{a}, \mathbf{b}) = -1.$$

Beweis. $TV(\mathbf{a}'; \mathbf{b}, \mathbf{c}) \cdot TV(\mathbf{b}'; \mathbf{c}, \mathbf{a}) \cdot TV(\mathbf{c}'; \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \left(-\frac{\nu}{\mu}\right) \cdot \left(-\frac{\lambda}{\nu}\right) \cdot \left(-\frac{\mu}{\lambda}\right). \quad \square$

Etwas komplizierter ist es, wenn wir noch die Sonderfälle beachten, die mit Parallelität zu tun haben:

Satz 2.10 (Ceva, zweite Version) *Es seien \mathbf{abc} ein Dreieck und L, M, N Geraden durch die Ecken $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, welche die Gegenseiten in den Punkten $\mathbf{a}' \in \mathbf{bc}$, $\mathbf{b}' \in \mathbf{ca}$ und $\mathbf{c}' \in \mathbf{ab}$ treffen. Dann ist*

$$TV(\mathbf{a}'; \mathbf{b}, \mathbf{c}) \cdot TV(\mathbf{b}'; \mathbf{c}, \mathbf{a}) \cdot TV(\mathbf{c}'; \mathbf{a}, \mathbf{b}) = -1,$$

genau dann, wenn L, M und N sich in einem Punkt treffen, oder parallel sind.

Beweis. „ \Leftarrow “: Wenn die drei Geraden sich in einem Punkt treffen, dann folgt die behauptete Formel aus Satz 2.9. Nehmen wir also an, die drei Geraden seien parallel. Wir betrachten die Parallelprojektion in Richtung dieser drei Geraden und finden (Satz 2.3)

$$r := TV(\mathbf{a}'; \mathbf{b}, \mathbf{c}) = TV(\mathbf{a}; \mathbf{b}, \mathbf{c}') = TV(\mathbf{a}; \mathbf{b}', \mathbf{c}).$$

Wegen Aufgabe 0.2 ist

$$TV(\mathbf{b}'; \mathbf{c}, \mathbf{a}) = 1 - \frac{1}{r}, \quad TV(\mathbf{c}'; \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{1-r}.$$

Und das Produkt aller drei Teilverhältnisse ist

$$r \cdot \left(1 - \frac{1}{r}\right) \cdot \frac{1}{1-r} = -1.$$

„ \Rightarrow “: Die Annahme ist jetzt, dass das Produkt der drei Teilverhältnisse $= -1$ ist. Falls zwei Geraden, etwa L und M parallel sind, so können sie nicht parallel zur Seite \mathbf{ab} sein. Die Parallele N' durch \mathbf{c} zu L und M schneidet deswegen die Seite \mathbf{ab} in einem Punkt \mathbf{c}'' . Nach der schon bewiesenen Richtung des Satzes ist

$$TV(\mathbf{a}'; \mathbf{b}, \mathbf{c}) \cdot TV(\mathbf{b}'; \mathbf{c}, \mathbf{a}) \cdot TV(\mathbf{c}''; \mathbf{a}, \mathbf{b}) = -1,$$

und daraus folgt

$$TV(\mathbf{c}'; \mathbf{a}, \mathbf{b}) = TV(\mathbf{c}''; \mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

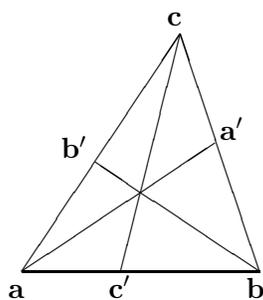
Und mit Satz 0.1 finden wir $\mathbf{c}'' = \mathbf{c}'$, $N' = N$.

Wir dürfen also annehmen, die zwei Geraden L und M treffen sich in einem Punkt \mathbf{x} . Der liegt natürlich auf keiner Seite des Dreiecks. Deswegen fällt er nicht mit \mathbf{c} zusammen, und die Gerade $N' := \mathbf{cx}$ ist wohldefiniert. Zuerst wollen wir ausschließen, dass diese Gerade N' parallel zur Seite \mathbf{ab} ist. In diesem Fall wäre (Satz 2.8)

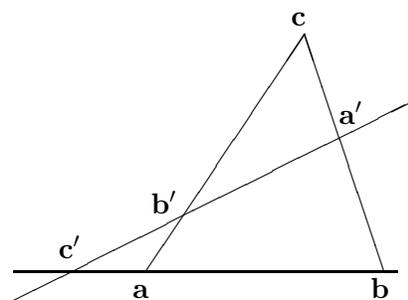
$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{a} - \lambda \mathbf{b} + \mathbf{c}, \quad TV(\mathbf{a}'; \mathbf{bc}) = \frac{1}{\lambda}, \quad TV(\mathbf{b}'; \mathbf{c}, \mathbf{a}) = \lambda.$$

Aus der Voraussetzung würde $TV(\mathbf{c}'; \mathbf{a}, \mathbf{b}) = 1$ folgen. Einen solchen Punkt \mathbf{c}' gibt es aber nicht. Also schneidet N' die Seite \mathbf{ab} , etwa im Punkt \mathbf{c}'' . Mit demselben Argument wie im Fall der parallelen Geraden sehen wir $\mathbf{c}'' = \mathbf{c}'$. \square

Der Satz von Ceva stammt aus der Renaissance. Er besitzt ein Gegenstück, das schon in der Antike bekannt war.



Ceva



Menelaos

Satz 2.11 (Menelaos) *Es seien \mathbf{abc} ein Dreieck in der affinen Ebene \mathbb{K}^2 und L eine Gerade, die nicht durch eine Ecke des Dreiecks geht und zu keiner Seite parallel ist. Diese Gerade schneidet dann jede Dreiecksseite in einem Punkt, etwa*

$$\mathbf{a}' \in \mathbf{bc}, \quad \mathbf{b}' \in \mathbf{ca}, \quad \mathbf{c}' \in \mathbf{ab}.$$

Dann gilt

$$TV(\mathbf{a}'; \mathbf{b}, \mathbf{c}) \cdot TV(\mathbf{b}'; \mathbf{c}, \mathbf{a}) \cdot TV(\mathbf{c}'; \mathbf{a}, \mathbf{b}) = 1.$$

Und umgekehrt: Seien $\mathbf{a}' \in \mathbf{bc}$, $\mathbf{b}' \in \mathbf{ca}$ und $\mathbf{c}' \in \mathbf{ab}$ drei Punkte auf den Seiten des Dreiecks, nicht gerade Eckpunkte. Wenn ihre Teilverhältnisse der obigen Beziehung genügen, dann sind diese Punkte kollinear.

Beweis. „ \Rightarrow “: Wir betrachten die Parallelprojektion in Richtung der Gerade L auf die Seite \mathbf{ab} . Der Bildpunkt der Ecke \mathbf{c} sei \mathbf{d} . Diese Parallelprojektion definiert affine Abbildungen $\mathbf{bc} \rightarrow \mathbf{ab}$ und $\mathbf{ca} \rightarrow \mathbf{ab}$, die

$$\mathbf{bc} \ni \mathbf{b} \mapsto \mathbf{b}, \mathbf{c} \mapsto \mathbf{d}, \mathbf{a}' \mapsto \mathbf{c}', \quad \mathbf{ca} \ni \mathbf{c} \mapsto \mathbf{d}, \mathbf{a} \mapsto \mathbf{a}, \mathbf{b}' \mapsto \mathbf{c}'$$

abbilden. Wegen Satz 2.3 gilt

$$TV(\mathbf{a}'; \mathbf{b}, \mathbf{c}) = TV(\mathbf{c}'; \mathbf{b}, \mathbf{d}), \quad TV(\mathbf{b}'; \mathbf{c}, \mathbf{a}) = TV(\mathbf{c}'; \mathbf{d}, \mathbf{a}),$$

und mit Aufgabe 0.3 b)

$$\begin{aligned} TV(\mathbf{a}'; \mathbf{b}, \mathbf{c}) \cdot TV(\mathbf{b}'; \mathbf{c}, \mathbf{a}) \cdot TV(\mathbf{c}'; \mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \\ TV(\mathbf{c}'; \mathbf{b}, \mathbf{d}) \cdot TV(\mathbf{c}'; \mathbf{d}, \mathbf{a}) \cdot TV(\mathbf{c}'; \mathbf{a}, \mathbf{b}) &= 1. \end{aligned}$$

„ \Leftarrow “: Jetzt ist die Produkt-Relation für die Punkte \mathbf{a}' , \mathbf{b}' und \mathbf{c}' vorausgesetzt. Wenn die Gerade $\mathbf{a}'\mathbf{b}'$ parallel zur Seite \mathbf{ab} wäre, dann würde aus Satz 2.3 folgen

$$TV(\mathbf{a}'; \mathbf{b}, \mathbf{c}) = TV(\mathbf{b}'; \mathbf{a}, \mathbf{c}),$$

und mit Aufgabe 0.2

$$TV(\mathbf{a}'; \mathbf{b}, \mathbf{c}) \cdot TV(\mathbf{b}'; \mathbf{c}, \mathbf{a}) = 1.$$

Aus der Voraussetzung erhielten wir $TV(\mathbf{c}'; \mathbf{a}, \mathbf{b}) = 1$, ein Widerspruch. Also muss die Gerade $\mathbf{a}'\mathbf{b}'$ die Seite \mathbf{ab} schneiden, etwa im Punkt $\mathbf{c}'' \neq \mathbf{a}, \mathbf{b}$. Aus der Richtung des Satzes, die wir schon bewiesen haben, folgt

$$TV(\mathbf{a}'; \mathbf{b}, \mathbf{c}) \cdot TV(\mathbf{b}'; \mathbf{c}, \mathbf{a}) \cdot TV(\mathbf{c}''; \mathbf{a}, \mathbf{b}) = 1.$$

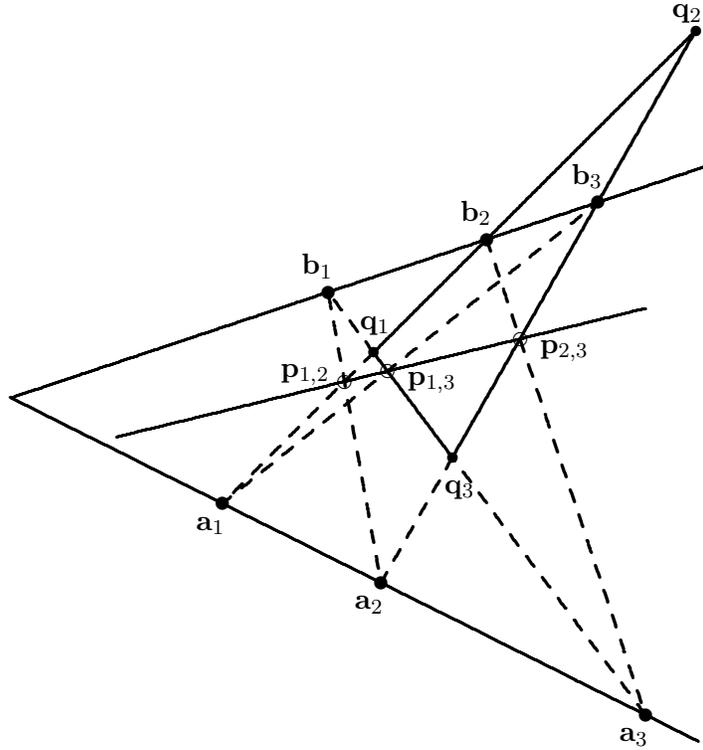
Damit schließen wir

$$TV(\mathbf{c}''; \mathbf{a}, \mathbf{b}) = TV(\mathbf{c}'; \mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad \text{also} \quad \mathbf{c}'' = \mathbf{c}'.$$

Die Punkte \mathbf{a}' , \mathbf{b}' und \mathbf{c}' sind also tatsächlich kollinear. \square

Wir wollen jetzt den Satz von Menelaos benutzen um affine Versionen zweier klassischer Sätze aus der Projektiven Geometrie zu beweisen.

Satz 2.12 (Pappos) *Es seien $L \neq M$ zwei Geraden in der affinen Ebene \mathbb{K}^2 , die sich in einem Punkt $\mathbf{0}$ treffen. Auf diesen Geraden seien zwei Tripel $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in L$ und $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \in M$ von Punkten gegeben, die alle voneinander, und auch vom Punkt $\mathbf{0}$ verschieden sind. Wir betrachten die sechs Verbindungsgeraden $L_{i,j} := \mathbf{a}_i \mathbf{b}_j$, $i \neq j$. Dann sind entweder die beiden Geraden $L_{1,2}$ und $L_{2,1}$, bzw. $L_{1,3}$ und $L_{3,1}$, bzw. $L_{2,3}$ und $L_{3,2}$ parallel, oder die drei Punkte $\mathbf{p}_{i,j} := L_{i,j} \cap L_{j,i}$, $i \neq j$, sind kollinear.*



Beweis. Alle fixierten Punkte liegen auf den drei Geraden $L_{1,2}$, $L_{2,3}$ und $L_{3,1}$. Diese Geraden sind die Seiten eines Dreiecks mit den Ecken

$$\mathbf{q}_1 := L_{3,1} \cap L_{1,2}, \quad \mathbf{q}_2 := L_{1,2} \cap L_{2,3}, \quad \mathbf{q}_3 := L_{2,3} \cap L_{3,1}.$$

An diesem Dreieck wenden wir den Satz von Menelaos auf die folgenden fünf Geraden an:

$$\begin{aligned} L_{2,1} : & TV(\mathbf{p}_{1,2}; \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \cdot TV(\mathbf{a}_2; \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) \cdot TV(\mathbf{b}_1; \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_1) = 1, \\ L_{3,2} : & TV(\mathbf{p}_{2,3}; \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) \cdot TV(\mathbf{a}_3; \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_1) \cdot TV(\mathbf{b}_2; \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = 1, \\ L_{1,3} : & TV(\mathbf{p}_{3,1}; \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_1) \cdot TV(\mathbf{a}_1; \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \cdot TV(\mathbf{b}_3; \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) = 1, \\ \hline L : & TV(\mathbf{a}_1; \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \cdot TV(\mathbf{a}_2; \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) \cdot TV(\mathbf{a}_3; \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_1) = 1, \\ M : & TV(\mathbf{b}_2; \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \cdot TV(\mathbf{b}_3; \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) \cdot TV(\mathbf{b}_1; \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_1) = 1. \end{aligned}$$

Wenn wir die ersten drei Gleichungen multiplizieren und durch das Produkt der letzten beiden teilen, finden wir:

$$TV(\mathbf{p}_{1,2}; \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \cdot TV(\mathbf{p}_{2,3}; \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) \cdot TV(\mathbf{p}_{3,1}; \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_1) = 1.$$

Aus dem Satz von Menelaos folgt, dass die drei Punkte $\mathbf{p}_{1,2}$, $\mathbf{p}_{2,3}$ und $\mathbf{p}_{3,12}$ tatsächlich kollinear sind. \square

Dieser Beweis war algebraisch, wunderschön, kurz und übersichtlich. (Ich habe ihn aus dem Buch Coxeter-Greitzer abgeschrieben.) Leider ist er unvollständig: Die drei Geraden $L_{1,2}$, $L_{2,3}$ und $L_{3,1}$ brauchen kein Dreieck zu bilden! Zwei davon, oder sogar alle drei könnten parallel sein. Um den Beweis zu vervollständigen müssten wir diese Möglichkeiten analysieren. Das möchte ich hier aber nicht tun, weil wir den Satz von Pappos in völliger Allgemeinheit in der Projektiven Geometrie noch einmal beweisen werden. Hier möchte ich nur darauf hinweisen, dass parallele Geraden schöne Beweise ruinieren können.

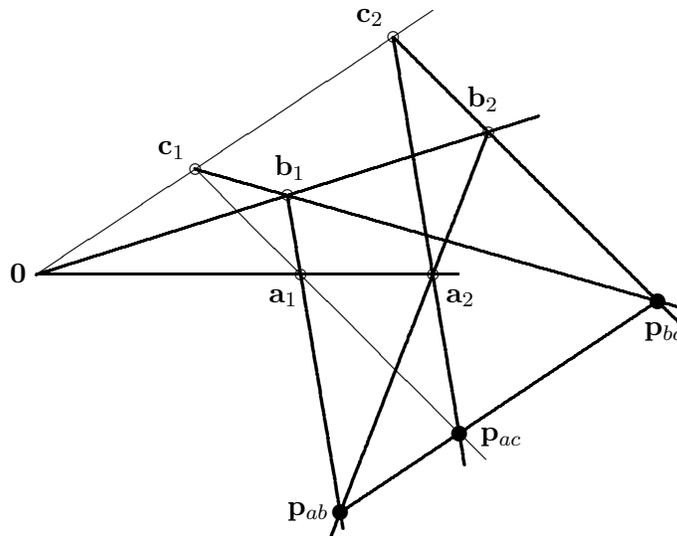
Satz 2.13 (Desargues) *In der affinen Ebene \mathbb{K}^2 seien drei, paarweise voneinander verschiedene Geraden gegeben, die sich alle drei im Punkt $\mathbf{0}$ treffen mögen. Auf diesen Geraden seien je zwei Punkte*

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in L, \quad \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in M, \quad \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \in N$$

gewählt, die voneinander und von $\mathbf{0}$ verschieden sein sollen. Diese sechs Punkte definieren zwei Dreiecke mit den korrespondierenden Seiten

$$\mathbf{a}_i \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i \mathbf{c}_i, \mathbf{c}_i \mathbf{a}_i, \quad (i = 1, 2).$$

Dann sind entweder zwei korrespondierende Seiten parallel oder die drei Schnittpunkte $\mathbf{p}_{a,b}$, $\mathbf{p}_{b,c}$, $\mathbf{p}_{c,a}$ korrespondierender Seitenpaare sind kollinear.



Beweis. Wieder benutzen wir den Satz von Menelaos, und zwar für

Dreieck	Gerade	Relation
$\mathbf{0a}_1\mathbf{b}_1$	$\mathbf{a}_2\mathbf{b}_2\mathbf{p}_{a,b}$	$TV(\mathbf{a}_2; \mathbf{0}, \mathbf{a}_1) \cdot TV(\mathbf{p}_{a,b}; \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) \cdot TV(\mathbf{b}_2; \mathbf{b}_1, \mathbf{0}) = 1,$
$\mathbf{0b}_1\mathbf{c}_1$	$\mathbf{b}_2\mathbf{c}_2\mathbf{p}_{b,c}$	$TV(\mathbf{b}_2; \mathbf{0}, \mathbf{b}_1) \cdot TV(\mathbf{p}_{b,c}; \mathbf{b}_1, \mathbf{c}_1) \cdot TV(\mathbf{c}_2; \mathbf{c}_1, \mathbf{0}) = 1,$
$\mathbf{0c}_1\mathbf{a}_1$	$\mathbf{c}_2\mathbf{a}_2\mathbf{p}_{c,a}$	$TV(\mathbf{c}_2; \mathbf{0}, \mathbf{c}_1) \cdot TV(\mathbf{p}_{c,a}; \mathbf{c}_1, \mathbf{a}_1) \cdot TV(\mathbf{a}_2; \mathbf{a}_1, \mathbf{0}) = 1.$

Wir multiplizieren die drei Gleichungen und kürzen

$$\begin{aligned} TV(\mathbf{a}_2; \mathbf{0}, \mathbf{a}_1) \cdot TV(\mathbf{a}_2; \mathbf{a}_1, \mathbf{0}) &= 1, \\ TV(\mathbf{b}_2; \mathbf{0}, \mathbf{b}_1) \cdot TV(\mathbf{b}_2; \mathbf{b}_1, \mathbf{0}) &= 1, \\ TV(\mathbf{c}_2; \mathbf{0}, \mathbf{c}_1) \cdot TV(\mathbf{c}_2; \mathbf{c}_1, \mathbf{0}) &= 1. \end{aligned}$$

Übrig bleibt die Gleichung

$$TV(\mathbf{p}_{a,b}; \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) \cdot TV(\mathbf{p}_{b,c}; \mathbf{b}_1, \mathbf{c}_1) \cdot TV(\mathbf{p}_{c,a}; \mathbf{c}_1, \mathbf{a}_1) = 1,$$

und Menelaos am Dreieck $\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1\mathbf{c}_1$ zeigt, dass die drei Punkte $\mathbf{p}_{a,b}$, $\mathbf{p}_{b,c}$ und $\mathbf{p}_{c,a}$ kollinear sind. \square

Wieder ein wunderschöner kurzer Beweis, und wieder habe ich ihn aus Coxeter-Greitzer übernommen.

Aufgabe 2.2 Auf den Seiten eines Dreiecks \mathbf{abc} seien Punkte $\mathbf{a}' \in \mathbf{bc}$, $\mathbf{b}' \in \mathbf{ca}$, $\mathbf{c}' \in \mathbf{ab}$ (keine Eckpunkte) so ausgewählt, dass sich die Verbindungsgeraden in einem Punkt schneiden. Die Punkte $\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b, \mathbf{q}_c$ seien die Mitten der Strecken $\overline{\mathbf{aa}'}$, $\overline{\mathbf{bb}'}$, $\overline{\mathbf{cc}'}$. Weiter seien $\mathbf{m}_a, \mathbf{m}_b, \mathbf{m}_c$ die Mittelpunkte der Dreiecksseiten $\overline{\mathbf{bc}}$, $\overline{\mathbf{ca}}$, $\overline{\mathbf{ab}}$. Zeigen Sie, dass sich die Verbindungsgeraden $\mathbf{m}_a\mathbf{q}_a$, $\mathbf{m}_b\mathbf{q}_b$ und $\mathbf{m}_c\mathbf{q}_c$ in einem Punkt schneiden.

Aufgabe 2.3 Ein Kreis berühre die drei Seiten eines Dreiecks in den Punkten $\mathbf{a}' \in \mathbf{bc}$, $\mathbf{b}' \in \mathbf{ca}$, $\mathbf{c}' \in \mathbf{ab}$. Zeigen Sie, dass sich die drei Verbindungsgeraden \mathbf{aa}' , \mathbf{bb}' und \mathbf{cc}' in einem Punkt schneiden.

Aufgabe 2.4 Es seien $\mathbf{a}' \in \mathbf{bc}$, $\mathbf{b}' \in \mathbf{ca}$ und $\mathbf{c}' \in \mathbf{ab}$ die Berührungspunkte der drei Ankreise des Dreiecks \mathbf{abc} . Zeigen Sie, dass sich die drei Verbindungsgeraden \mathbf{aa}' , \mathbf{bb}' und \mathbf{cc}' in einem Punkt treffen.

Aufgabe 2.5 In einem nicht-gleichschenkligen Dreieck trifft die äußere Winkelhalbierende einer jeden Ecke die gegenüberliegende Seite. Die drei Schnittpunkte seien $\mathbf{a}' \in \mathbf{bc}$ usw. Zeigen Sie, dass diese drei Punkte \mathbf{a}' , \mathbf{b}' und \mathbf{c}' kollinear sind.

Aufgabe 2.6 In einem Dreieck \mathbf{abc} möge die Winkelhalbierende zur Ecke \mathbf{a} die Seite \mathbf{bc} in \mathbf{a}' schneiden, die Winkelhalbierende zur Ecke \mathbf{b} die Seite \mathbf{ca} im Punkt \mathbf{b}' . Die äußere Winkelhalbierende der Ecke \mathbf{c} treffe die Seite \mathbf{ab} im Punkt \mathbf{c}' . Zeigen Sie, dass \mathbf{a}' , \mathbf{b}' und \mathbf{c}' kollinear sind.

2.3 Ellipsen

Weil es in diesem und dem nächsten Paragraphen auf Vorzeichen ankommt, werden wir hier $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ setzen.

Was wäre die euklidische Geometrie ohne Kreise? Langweilig! Leider gehören Kreise nicht zu den Gegenständen der affinen Geometrie. Betrachten wir etwa das Bild des Kreises

$$K : x^2 + y^2 = 1$$

unter der linearen Abbildung

$$U : (x, y) \mapsto (a \cdot x, b \cdot y).$$

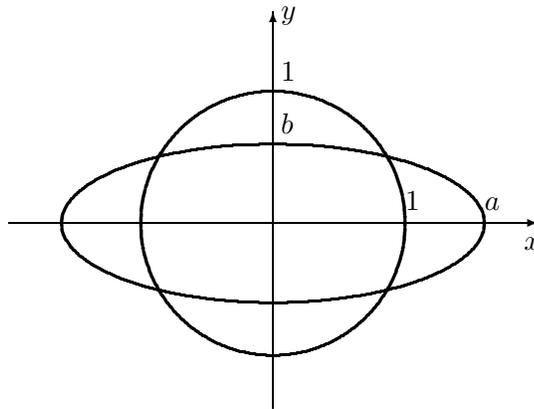
Das ist also die Menge

$$U(K) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : U^{-1}(x, y) \in K\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1\}.$$

Es ist ein Kreis, der in x -Richtung mit dem Streckungsfaktor a und in y -Richtung mit dem Streckungsfaktor b gedehnt wurde. So ein veredelter Kreis heißt (achsenparallele) *Ellipse* mit den Halbachsen a und b , ihre Gleichung ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

und sie sieht so aus:



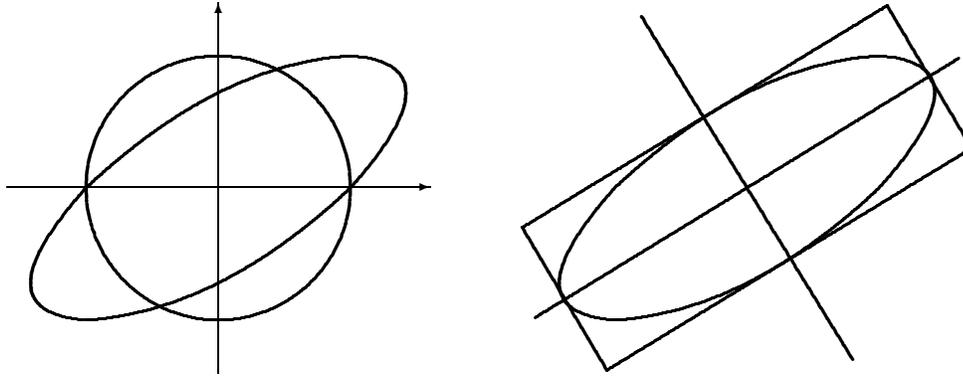
Nun war unsere lineare Abbildung U noch ziemlich moderat. Dem Kreis kann noch viel schlimmeres passieren, etwa unter der linearen Abbildung

$$U : (x, y) \mapsto (x + y, y).$$

Jetzt ist $U^{-1}(x, y) = (x - y, y)$, das Bild $U(K)$ hat die Gleichung

$$(x - y)^2 + y^2 = x^2 - 2xy + 2y^2 = 1$$

und sieht so aus:



Das sieht eigentlich immer noch wie eine Ellipse aus, nur keine achsenparallele! Der Grund ist einfach: Jede affine Transformation der Ebene bildet Kreise immer auf Ellipsen ab. Genauer gesagt: Unter einer Ellipse verstehen wir das Bild einer achsenparallelen Ellipse unter einer *Bewegung*. Dann gilt:

Satz 2.14 (Affine Bilder von Kreisen) Sei $K \subset \mathbb{R}^2$ ein Kreis und $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine affine Transformation. Dann ist das Bild $F(K)$ des Kreises unter F eine Ellipse.

Beweis. Translationen T sind Bewegungen, deshalb ist das Bild einer Ellipse unter einer Translation immer wieder eine Ellipse. Wir können also o.B.d.A. annehmen, dass $F = U$ eine invertierbare lineare Abbildung ist. Und außerdem reicht es, den Kreis $K : \mathbf{x}^t \cdot \mathbf{x} = 1$ zu behandeln. Sein Bild unter U hat die Gleichung

$$(U^{-1} \cdot \mathbf{x})^t \cdot (U^{-1} \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{x}^t \cdot (U^{-1})^t U^{-1} \cdot \mathbf{x} = 1.$$

Die Matrix $(U^{-1})^t U^{-1}$ ist symmetrisch und positiv definit. Nach dem Satz von der Hauptachsentransformation gibt es also eine orthogonale Matrix S derart, dass

$$S \cdot (U^{-1})^t U^{-1} \cdot S^{-1} = ((SU)^{-1})^t \cdot (SU)^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix mit Einträgen $\alpha, \beta > 0$ ist. Dazu gehört die achsenparallele Ellipse

$$E : \alpha x^2 + \beta y^2 = 1.$$

Und wir haben die Beziehung

$$S(U(K)) = E, \quad U(K) = S^{-1}(E).$$

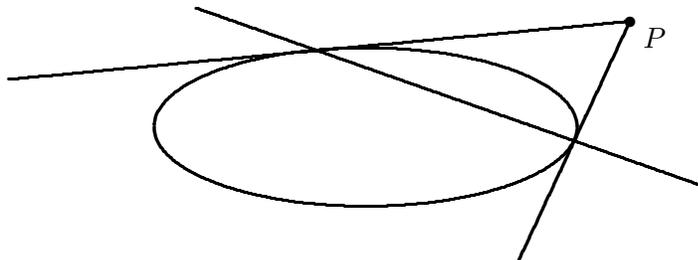
Mit der Hauptachsentransformation ist alles bewiesen. □

Natürlich folgt aus diesem Satz, durch Hintereinanderanwendung der linearen Transformationen, dass jedes affine Bild einer Ellipse wieder eine Ellipse ist. Damit sind Ellipsen Objekte der affinen Geometrie des \mathbb{R}^2 und wir dürfen sie uns anschauen.

Wir listen jetzt noch einige geometrische Eigenschaften von Ellipsen auf, die sich vom Kreis auf seine affinen Bilder übertragen:

Eine Gerade kann zum Kreis drei verschiedene Beziehungen haben. Entweder schneidet sie ihn nicht, oder sie schneidet ihn in zwei Punkten (Sekante), oder sie berührt ihn in einem Punkt (Tangente). Eine affine Transformation ändert daran nichts. Also kann eine Gerade eine gegebene Ellipse entweder nicht schneiden, in zwei Punkten schneiden (Sekante der Ellipse) oder in einem Punkt berühren (Tangente an die Ellipse). Ist die Ellipse $E = F(K)$ ein affines Bild des Kreises K , so sind die Tangenten an E gerade die affinen Bilder $F(L)$ der Tangenten L an den Kreis K .

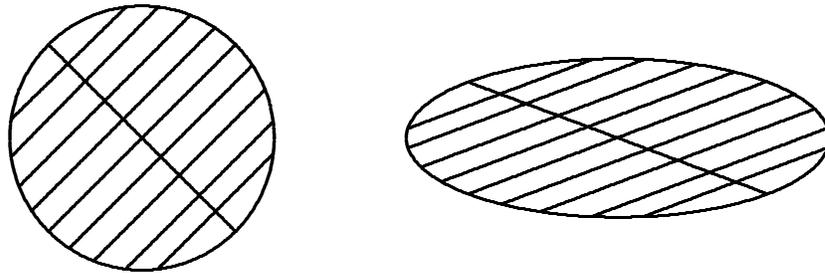
Durch einen Punkt P , der außerhalb der Ellipse E liegt, gibt es genau zwei verschiedene Tangenten an E . Die Verbindungsgerade der beiden zugehörigen Berührungspunkte heißt die *Polare* von P bezüglich E .



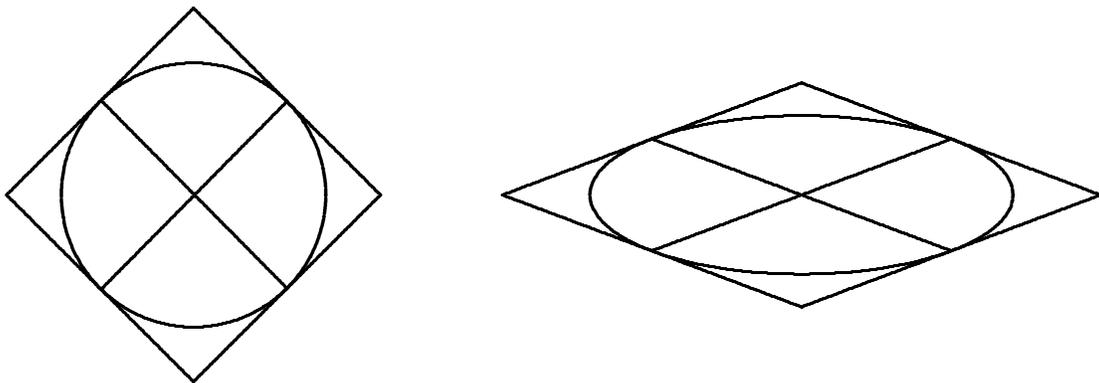
Ein Kreis hat einen Mittelpunkt. Unter der affinen Abbildung F geht der Mittelpunkt des Kreises K auf den Mittelpunkt der Ellipse $F(K)$. Wie kann man den Mittelpunkt der Ellipse mit den Spielregeln der affinen Geometrie definieren? Dazu müsste man den Mittelpunkt des Kreises affin definieren: Der Mittelpunkt des Kreises ist der Punkt, wo sich alle Durchmesser treffen. Was ist ein Durchmesser? Eine Gerade, die durch den Mittelpunkt geht. So geht's nicht. Probieren wir es anders:

Betrachten wir eine Schar paralleler Sekanten. Ihre Mittelpunkte liegen alle auf einer Geraden, und die ist ein Durchmesser! So geht's. Wenn wir jetzt die affine Abbildung F anwenden, bekommen wir eine Schar paralleler Sekanten der Ellipse. Ihre Mittelpunkte liegen alle auf einer Geraden. So eine Gerade heißt *Durchmesser* der Ellipse. Alle Durchmesser der Ellipse treffen sich in einem Punkt (weil sie das im Kreis tun), dieser Punkt heißt *Mittelpunkt* der Ellipse.

Im Bild des Kreises sieht man ganz deutlich, dass der Durchmesser, der von den Mittelpunkten der parallelen Sekanten überstrichen wird, senkrecht auf diesen Sekanten steht. (Beweisen kann man dies, nachdem man den Kreis so dreht, dass die Sekanten z.B. die Parallelen zur x -Achse sind. Der Durchmesser ist dann die y -Achse.) In der Parallelschar gibt es natürlich auch einen Durchmesser, und der steht auf dem anderen Durchmesser senkrecht.



Die Bilder zweier aufeinander senkrecht stehenden Durchmesser des Kreises stehen in der Ellipse i.a. nicht mehr senkrecht aufeinander. Trotzdem gibt man ihnen einen besonderen Namen: Zwei Durchmesser der Ellipse heißen *konjugiert*, wenn sie Bilder zweier aufeinander senkrecht stehender Durchmesser des Kreises sind. Sie haben ein besonderes Verhältnis zueinander: *Die beiden Tangenten der Ellipse, in den zwei Punkten, wo der Durchmesser die Ellipse schneidet, sind parallel zum konjugierten Durchmesser.* Das ist so, weil es am Kreis so ist, und weil sich diese Eigenschaft bei affinen Transformationen nicht ändert.



Was wir hier in Worten gesagt haben, kann man natürlich auch alles in Formeln ausrechnen. Wir wollen dies hier aber noch nicht tun, weil wir in einer allgemeineren Situation noch einmal darauf zurück kommen werden.

Aufgabe 2.7 *Eine Ellipse berühre die drei Seiten eines Dreiecks. Zeigen Sie, dass die drei Verbindungsgeraden der Ecken des Dreiecks mit den Berührungspunkten auf den gegenüberliegenden Seiten sich in einem Punkt treffen.*

Aufgabe 2.8 *Gegeben sei eine Ellipse E mit den Hauptachsen a und b . Berechnen Sie die Fläche eines Quadrats, dessen Seiten parallel zu den Achsen der Ellipse sind, und dessen Ecken auf E liegen.*

Aufgabe 2.9 Bestimmen Sie die maximale Fläche eines Rechtecks, dessen Seiten parallel zu den Achsen einer Ellipse E sind, und dessen Ecken auf E liegen.

Aufgabe 2.10 (Fu-Pe 5.1) Eine Ellipse habe die Halbachsen a und b mit $a > b\sqrt{2}$. Durch einen Punkt \mathbf{p} der Ellipse werde die Normale an die Ellipse gezeichnet. Diese treffe die Ellipse außerdem noch im Punkt \mathbf{q} . Zeigen Sie: Die kleinstmögliche Distanz $\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|$ ist

$$\frac{\sqrt{27}a^2b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Aufgabe 2.11 (Fu-Pe 6A) Auf der großen Halbachse a einer Ellipse mit Mittelpunkt \mathbf{o} und den Halbachsen a und b sei ein Punkt \mathbf{m} fest gehalten. Der Kreis mit Mittelpunkt \mathbf{m} , der die Ellipse von innen berührt, habe den Radius r . Zeigen Sie:

$$\|\mathbf{m} - \mathbf{o}\| = \frac{1}{b}\sqrt{(a^2 - b^2)(b^2 - r^2)}.$$

2.4 Kegelschnitte

Die Gleichung einer Ellipse erhält man aus einer quadratischen Funktion $q(x, y)$ der Variablen x und y . Im einfachsten Fall, achsenparallel und mit Mittelpunkt im Ursprung, sieht die Gleichung so aus:

$$q(x, y) = \frac{1}{a^2}x^2 + \frac{1}{b^2}y^2 - 1 = 0.$$

In diesem Paragraphen wollen wir ganz allgemein solche quadratischen Ausdrücke

$$q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f, \quad a, b, \dots, f \in \mathbb{R}$$

betrachten und fragen:

- Wann ist die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : q(x, y) = 0\}$ eine Ellipse?
- Wenn sie keine Ellipse ist, was ist sie dann?

Wenn $d = e = 0$ ist, hat q die schöne Symmetrie $q(-x, -y) = q(x, y)$. Solche Gleichungen wollen wir zuerst behandeln.

Wir gehen genauso vor, wie bei den Ellipsen: Die Matrix der quadratischen Form

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = (x, y) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

können wir, nach dem Satz über die Hauptachsentransformation, durch eine orthogonale Matrix U diagonalisieren:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = (x, y) \cdot U \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \cdot U^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Die orthogonale Matrix U kann eine Drehmatrix sein ($\det(U) = 1$) oder eine Drehspiegelung ($\det(U) = -1$). Wem eine Drehspiegelung zu unheimlich ist, der kann von U übergehen zu

$$U' := U \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Falls $\det(U) = -1$ war, dann ist $\det(U') = 1$, und U' ist eine Drehung. Die Matrix U' diagonalisiert unsere quadratische Form genauso wie es die Matrix U tat. Wir können also annehmen, dass die Hauptachsentransformation durch eine Drehung U geschieht. Nach der Drehung ist die Form diagonalisiert. Bis auf diese Drehung haben wir es also mit einer Funktion

$$q(x, y) = \alpha x^2 + \beta y^2 + f = 0$$

zu tun.

Wir müssen jetzt eine ganze Menge von Fällen unterscheiden. Um deren Anzahl möglichst klein zu halten, werden wir die Fälle nicht unterscheiden, die durch Vertauschen von x und y auseinander hervorgehen. Dieses Vertauschen kann man ja durch eine Drehung $(x, y) \mapsto (y, -x)$ um 90 Grad erreichen. Außerdem kommt es uns nicht auf die Gleichung, sondern auf deren Nullstellenmenge an. Wir können deshalb die Gleichung mit einem beliebigen Skalar $\neq 0$ durchmultiplizieren, und falls $f \neq 0$ ist z.B. $f = 1$ annehmen. Außerdem wollen wir α und β stets ≥ 0 annehmen, und die quadratische Form dafür mit Vorzeichen

$$\pm \alpha x^2 \pm \beta y^2$$

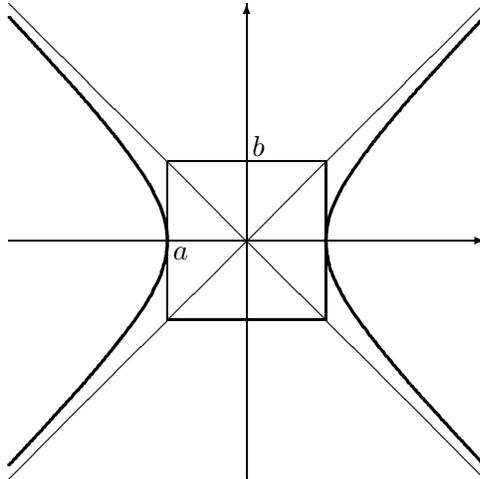
schreiben. Es gibt dann die folgenden Fälle:

f	q	Fall	Gleichung	Nullstellenmenge
0	0		$0 = 0$	die ganze Ebene
0	Rang 1		$x^2 = 0$	eine Gerade
0	positiv definit		$\alpha x^2 + \beta y^2 = 0$	ein Punkt
0	indefinit vom Rang 2		$\alpha x^2 - \beta y^2 = 0$	zwei schneidende Geraden
1	0		$0 = 1$	die leere Menge
1	Rang 1		$\alpha x^2 = 1$	zwei parallele Geraden
1			$-\alpha x^2 = 1$	die leere Menge
1	positiv definit		$\alpha x^2 + \beta y^2 = 1$	Ellipse
1	indefinit vom Rang 2		$\alpha x^2 - \beta y^2 = 1$	Hyperbel
1	negativ definit		$-\alpha x^2 - \beta y^2 = 1$	die leere Menge

Das sind insgesamt neun Fälle. Wirklich interessant für uns sind nur die echten, nicht entarteten Kegelschnitte. Außer der Ellipse, die wir schon kennen, ist das nur die Hyperbel. In Analogie zur Ellipse schreiben wir ihre Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Sie sieht so aus:



Es bleiben noch die Fälle, wo die Konstanten d und e nicht beide $= 0$ sind. Die Behandlung dieser Fälle wird etwas übersichtlicher, wenn wir die Funktion $q(x, y)$ in Matrixschreibweise angeben. Dazu kürzen wir ab:

$$\begin{aligned} Q &:= \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \\ ax^2 + 2bxy + cy^2 &= \mathbf{x} \cdot Q \cdot \mathbf{x}^t \\ \mathbf{u} &:= (d, e) \\ dx + ey &= (\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}) \\ q(x, y) &= \mathbf{x} \cdot Q \cdot \mathbf{x}^t + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}) + f. \end{aligned}$$

Wir versuchen den Vektor \mathbf{u} durch eine Translation $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}' = \mathbf{t} + \mathbf{x}$ zu beseitigen. Unsere Funktion wird dann

$$\begin{aligned} q(\mathbf{x}') &= (\mathbf{x}' - \mathbf{t}) \cdot Q \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{t})^t + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}' - \mathbf{t}) + f \\ &= \mathbf{x}' \cdot Q \cdot \mathbf{x}'^t + 2(\mathbf{u} - Q \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{x}') + f + \mathbf{t} \cdot Q \cdot \mathbf{t}. \end{aligned}$$

Wir sehen: Der lineare Anteil hebt sich weg, und wir sind in einem der schon behandelten Fälle, wenn es uns gelingt, \mathbf{t} so zu wählen, dass

$$Q \cdot \mathbf{t} = \mathbf{u}.$$

Das geht sicher immer dann, wenn die Matrix Q invertierbar ist: $\mathbf{t} := Q^{-1} \cdot \mathbf{u}$. Aber das braucht die Matrix Q ja nicht zu sein! Den Fall der Nullmatrix $Q = 0$ wollen wir weglassen, weil dann die Funktion $q(x, y)$ nur den Grad eins hat. Es bleibt also zu untersuchen:

$$\text{Rang}(Q) = 1.$$

Nach einer Drehung können wir annehmen

$$\mathbf{x} \cdot Q \cdot \mathbf{x} = \alpha x^2, \quad \alpha \neq 0.$$

Wenn wir die Gleichung durch α dividieren, und die Koeffizienten neu benennen, haben wir

$$q(x, y) = x^2 + 2dx + 2ey + f = 0.$$

Hier machen wir die quadratische Ergänzung mit $x' = x + d$. Dann wird

$$q(x', y) = (x')^2 + 2ey + f' = 0, \quad \text{mit } f' = f - d^2.$$

Wir können $e \neq 0$ annehmen. Wenn wir durch e teilen, und die Koeffizienten wieder ein wenig umbenennen, erhalten wir schließlich die *Parabelgleichung*

$$y = \alpha x^2 + \beta.$$

Wir fassen zusammen:

Satz 2.15 (Klassifikation der reellen Kegelschnitte) *Es sei*

$$q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

die Gleichung eines Kegelschnittes in der reellen Ebene. Durch eine Bewegung kann die Gleichung in eine der oben erwähnten entarteten Gleichungen oder in eine der drei folgenden Gleichungen transformiert werden:

$$\begin{array}{ll} \text{Ellipse} & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ \text{Hyperbel} & \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ \text{Parabel} & y = a \cdot x^2. \end{array}$$

Kegelschnitte heißen Kegelschnitte, weil man sie erhalten kann, indem man einen Kegel im dreidimensionalen Raum mit einer Ebene schneidet. Das hat schon ein alter Grieche herausgefunden. Folgendes ist darunter zu verstehen: Nehmen wir etwa den Rotationskegel

$$C: \quad z^2 = x^2 + y^2$$

her und schneiden ihn mit einer Ebene

$$E: \quad z = u \cdot x + v \cdot y + w.$$

Die Schnittkurve hat dann die Gleichung

$$(u \cdot x + v \cdot y + w)^2 = x^2 + y^2$$

$$(u^2 - 1) \cdot x^2 + 2uv \cdot xy + (v^2 - 1) \cdot y^2 + 2uw \cdot x + 2vw \cdot y + w^2 = 0.$$

Wir wissen, die Art des erhaltenen Kegelschnittes hängt ganz wesentlich von der Definitheit der symmetrischen Matrix

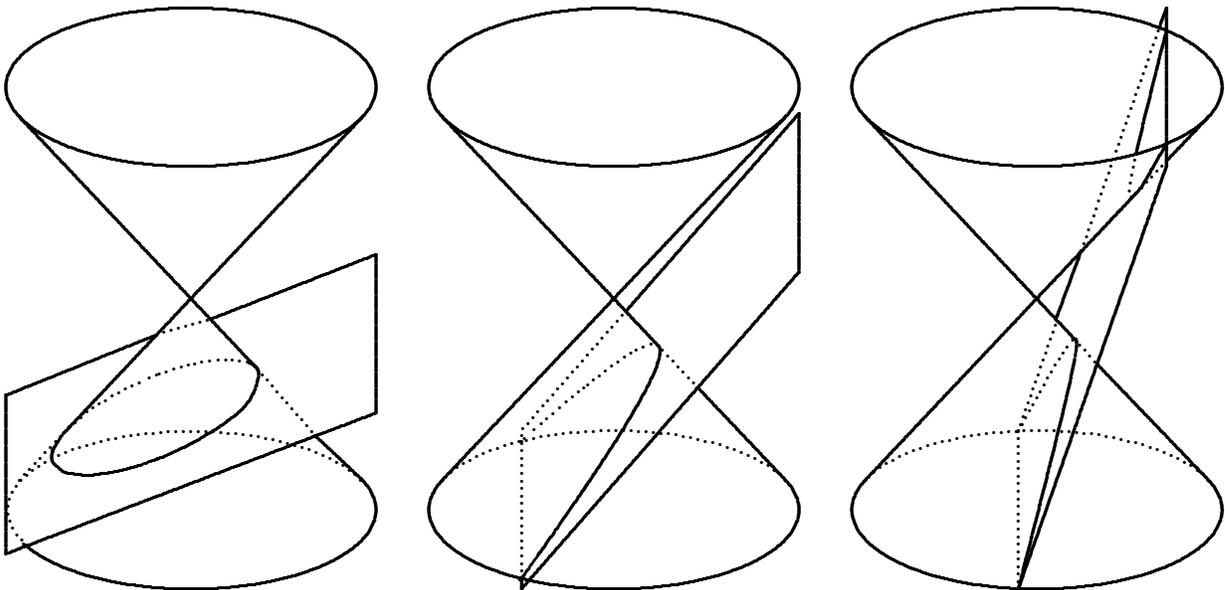
$$Q := \begin{pmatrix} u^2 - 1 & uv \\ uv & v^2 - 1 \end{pmatrix}$$

ab. Ihre Determinante ist

$$\det(Q) = (u^2 - 1)(v^2 - 1) - (uv)^2 = 1 - u^2 - v^2.$$

Der Kegelschnitt kann einer der Entartungsfälle sein, oder er ist eine

Ellipse	⇒	Q definit	⇒	$\det(Q) > 0$	⇔	$u^2 + v^2 < 1$
Hyperbel	⇒	Q indefinit	⇒	$\det(Q) < 0$	⇔	$u^2 + v^2 > 1$
Parabel	⇒	$\text{Rang}(Q) = 1$	⇒	$\det(Q) = 0$	⇔	$u^2 + v^2 = 0$



Aufgabe 2.12 Es seien $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e} \in \mathbb{R}^2$ fünf Punkte der affinen Ebene. Zeigen Sie: Es gibt einen Kegelschnitt, der durch diese fünf Punkte geht.

Aufgabe 2.13 Es seien $\mathbf{a} = (a_1, a_2), \dots, \mathbf{f} = (f_1, f_2)$ sechs Punkte der affinen Ebene. Zeigen Sie: Diese sechs Punkte liegen genau dann auf einem Kegelschnitt, wenn

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ a_1 & & & & & f_1 \\ a_2 & & & & & f_2 \\ a_1^2 & & & & & f_1^2 \\ a_1 a_2 & & & & & f_1 f_2 \\ a_2^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & f_2^2 \end{pmatrix} = 0.$$

Aufgabe 2.14 Welche Kegelschnitte (Ellipsen, Hyperbeln, ...) werden durch folgende Gleichungen gegeben:

- a) $x^2 + 4xy + y^2 + 3x + 3y + 1 = 0$,
- b) $2x^2 + 2xy + 2y^2 - 3x - 6y - 15 = 0$,
- c) $2x^2 + 2xy + 2y^2 - 3x - 6y - 13 = 0$,
- d) $x^2 + 2xy + y^2 + x - y = 0$,
- e) $x^2 + 2xy + y^2 + 4x + 4y = 0$.

Aufgabe 2.15 (Gärtnerkonstruktion) Es seien $\mathbf{f}_1 = (d, 0)$ und $\mathbf{f}_2 = (-d, 0)$ mit $0 < d \in \mathbb{R}$ zwei Punkte der euklidischen Ebene \mathbb{R}^2 . Für $0 < a \in \mathbb{R}$ sei

$$\begin{aligned} E_a &:= \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{p} - \mathbf{f}_1\| + \|\mathbf{p} - \mathbf{f}_2\| = a\}, \\ H_a &:= \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{p} - \mathbf{f}_1\| - \|\mathbf{p} - \mathbf{f}_2\| = a\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Für $a > 2d$ ist E_a eine Ellipse, für $a < 2d$ ist H_a Ast einer Hyperbel.

Aufgabe 2.16 Es sei $\mathbf{f} = (d, 0)$ mit $0 < d \in \mathbb{R}$ ein Punkt der euklidischen Ebene. Für $0 < a \in \mathbb{R}$ sei $D_a \subset \mathbb{R}^2$ der geometrische Ort der Punkte $\mathbf{p} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit

$$\|\mathbf{p} - \mathbf{f}\| = a \cdot x.$$

Zeigen Sie: D_a ist eine

$$\begin{aligned} \text{Ellipse} &\Leftrightarrow a < 1 \\ \text{Parabel} &\Leftrightarrow a = 1 \\ \text{Hyperbel} &\Leftrightarrow a > 1. \end{aligned}$$

Aufgabe 2.17 Gegeben seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $c \neq 0$. Zeigen Sie, dass

$$(x + a)(y + b) = c$$

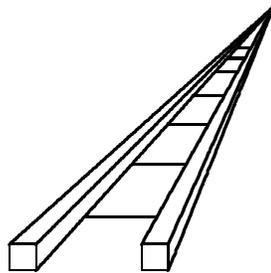
die Gleichung einer Hyperbel ist. Bestimmen Sie deren Mittelpunkt und ihre Halbachsen.

3 Projektive Geometrie

3.1 Die projektive Ebene

Dieser Abschnitt dient vor allem der Motivierung. Die exakten Definitionen kommen im nächsten Abschnitt.

Seit der Renaissance gibt es in der Malerei eine Theorie der Perspektive. An einem Griechischen Tempel, beispielsweise, gibt es jede Menge paralleler Mauerkanten (jedenfalls dann, wenn der Tempel noch gut erhalten ist). Will man den Tempel zeichnen, so erhöht es den räumlichen Eindruck, wenn sich auf dem Papier die Bilder dieser Linien in einem „Fluchtpunkt“ schneiden. Man stellt sich dabei vor, dass das Bild aus dem dreidimensionalen Gegenstand durch eine richtige schöne, geometrische Projektion entstanden ist. Will man Eisenbahnschienen zeichnen, so sieht das Resultat vielleicht so aus:



(Ganz stimmen kann das nicht, denn auch die Schwellen sind Teile paralleler Geraden, die sich in einem Fluchtpunkt schneiden sollen. Und der Fluchtpunkt kann nicht in der Richtung liegen, wie sie die von mir gezeichneten Schwellen haben, er muss irgendwie senkrecht zum Fluchtpunkt der Schienen liegen. Wie man solche Fluchtpunkte ausrechnet, das ist ein Teil der Theorie der Perspektive. Hierzu gibt es in der Bibliothek des Mathematischen Instituts das schöne Buch:

F. Rehbock, Geometrische Perspektive, Springer 1979.

Darin findet sich auch, auf p. 17, ein Bild mit Eisenbahnschwellen, korrekt gezeichnet.)

Auf dem Papier kann man die Fluchtpunkte einzeichnen, in der dreidimensionalen Realität gibt es sie nicht, denn überall sind da ja schon die richtigen Punkte. Wenn man also mit den Fluchtpunkten arbeiten möchte, dann muss man sie zum vorhandenen Raum hinzufügen. Man nennt die hinzugefügten Fluchtpunkte das „Unendliche“. Das hat nichts mit Spiritismus zu tun, sondern es ist nur so eine mathematische Redensart (Definition).

In diesem Abschnitt wollen wir uns genau überlegen, wie man die Ebene \mathbb{R}^2 durch Punkte im Unendlichen zur *projektiven Ebene* ergänzt. Es kommen also unendlich-ferne Punkte hinzu. Und zwar sollen dies die Schnittpunkte aller parallelen Geraden gleicher Richtung sein. Hier könnte man verschiedener Meinung sein, und sagen, jede Gerade hat zwei Enden, sie geht in zwei Richtungen nach Unendlich, sie hat zwei Schnittpunkte im Unendlichen mit allen ihren parallelen Mitgeraden. Diese Meinung hat sich nicht durchgesetzt. Man möchte, dass sich je zwei verschiedene Geraden, parallel oder nicht, in genau einem einzigen Punkt schneiden. Also soll es im Unendlichen für jede Sorte paralleler Geraden nur einen einzigen Schnittpunkt geben.

Geht man auf einer Geraden nach Unendlich, erreicht man ihren Fluchtpunkt, geht man weiter, kommt man auf der gleichen Geraden, aus der anderen Richtung aus dem Unendlichen zurück.

Es hat große praktische Vorteile, wenn sich zwei parallele Geraden in einem Punkt im Unendlichen schneiden. Beispielsweise haben wir bei der Formulierung der Sätze von

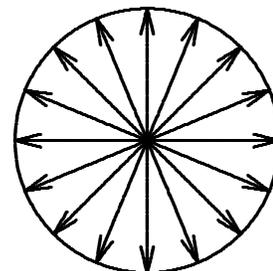
- Ceva,
- Pappos,
- Desargues

immer auf Ausnahmen Rücksicht nehmen müssen, die sich aus der Parallelität von Geraden ergaben. Diese Sätze werden eine projektive Version haben, wo parallele Geraden keine Sonderrolle mehr spielen werden. (Deswegen habe ich den Fällen paralleler Geraden beim Beweis der affinen Version dieser Sätze auch keine zu große Aufmerksamkeit geschenkt.)

Wir wollen die reelle projektive Ebene $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ nennen. Man kann sich davon ein topologisches Modell machen, das allerdings ein wenig kompliziert ist. Es gibt eine bijektive und in beiden Richtungen stetige Abbildung der affinen Ebene \mathbb{R}^2 auf die Kreisscheibe:

$$(x, y) \mapsto \frac{\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot (x, y).$$

Geraden durch den Nullpunkt gehen bei dieser Abbildung in Kreisdurchmesser über, und treffen dann in zwei diametral gegenüberliegenden Punkten auf den Kreisrand. Das topologische Modell der reellen projektiven Ebene ist also die Kreisscheibe, auf deren Rand man diametral gegenüberliegende Punkte identifizieren muss.



Diese Beschreibung der projektiven Ebene ist uns zu qualitativ, wir müssen rechnen. Dazu brauchen wir Koordinaten. Ausgangspunkt sind die baryzentrischen Koordinaten aus §2.2. Wir haben drei Koordinaten (x, y, z) mit $x + y + z = 1$ zur Beschreibung eines Punktes \mathbf{x} der Ebene benutzt. Wenn wir diese drei Koordinaten im (x, y, z) -Raum \mathbb{R}^3 auftragen, erhalten wir alle Punkte der Ebene $x + y + z = 1$. Jeder Punkt $\mathbf{x} = (x, y, z)$ dieser Ebene liegt auf einer Geraden $\mathbb{R} \cdot \mathbf{x}$ durch den Nullpunkt. Und umgekehrt: Jede Gerade $L \subset \mathbb{R}^3$ durch den Nullpunkt schneidet diese Ebene in genau einem Punkt. D.h., alle Geraden L tun dies, bis auf diejenigen, die es nicht tun und parallel zur Ebene $x + y + z = 1$ liegen. Dies sind die Geraden in der Ebene $x + y + z = 0$. Jede dieser Geraden gehört aber zu einer Richtung in der Ebene $x + y + z = 1$ und definiert dort einen Punkt im Unendlichen.

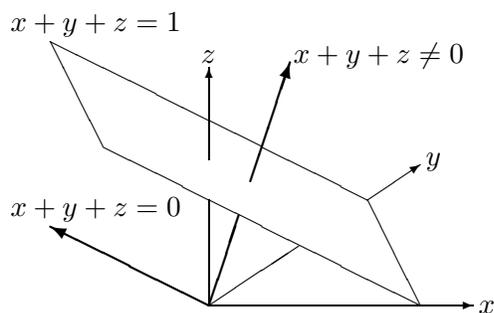
Jeder Vektor $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ bestimmt eine Gerade $L = \mathbb{R} \cdot \mathbf{x}$. Und jede dieser Geraden bestimmt einen Punkt der projektiven Ebene:

- Entweder ist $x + y + z \neq 0$, dann ist es der Punkt mit den baryzentrischen Koordinaten

$$\frac{x}{x + y + z}, \frac{y}{x + y + z}, \frac{z}{x + y + z},$$

also der Schnittpunkt von L mit der Ebene $x + y + z = 1$,

- oder es gilt $x + y + z = 0$, und dann ist es ein unendlich ferner Punkt.



Auf diese Weise parametrisieren die Geraden des \mathbb{R}^3 durch den Nullpunkt alle Punkte der projektiven Ebene, endliche oder unendlich ferne, je nachdem, ob sie die Ebene $x + y + z = 1$ schneiden, oder dazu parallel sind.

Wir haben gesehen: Die Geraden im \mathbb{R}^3 durch den Nullpunkt kann man benutzen, um alle Punkte der projektiven Ebene zu parametrisieren. Geraden haben aber keine Koordinaten, und somit haben wir noch keine Koordinaten auf der projektiven Ebene, in denen wir rechnen können. Jetzt geben wir den Geraden $L \subset \mathbb{R}^3$, und damit den Punkten der projektiven Ebene, Koordinaten: Eine Gerade wird aufgespannt durch einen Vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, es ist $L = \mathbb{R} \cdot \mathbf{x}$. Wir nehmen einfach die drei Koordinaten x, y, z von \mathbf{x} als Koordinaten von L . Richtige Koordinaten sind dies aber eigentlich nicht, denn das Tripel (x, y, z) ist durch die Gerade L nicht eindeutig festgelegt. Jedes andere Tripel

$$(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y, \lambda \cdot z) \text{ mit } \lambda \neq 0$$

reeller Zahlen gehört zur selben Geraden. Wir drücken dies so aus, dass wir das Tripel nicht (x, y, z) sondern $(x : y : z)$ schreiben. Damit meinen wir nicht nur das Tripel (x, y, z) , sondern die Menge aller Tripel $(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y, \lambda \cdot z)$ mit $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$. Die Doppelpunkte stehen da, weil nicht die Werte x, y, z der einzelnen Koordinaten wichtig sind, sie ändern sich ja beim Multiplizieren mit λ , sondern ihre gegenseitigen Quotienten, die sich dabei nicht ändern. Diese Koordinaten, bei denen nicht die Zahlenwerte wichtig sind, sondern deren gegenseitige Proportionen, heißen *homogene Koordinaten*.

Die homogenen Koordinaten auf der reellen projektiven Ebene sind also Zahlentripel

$$(x : y : z) \text{ mit } (x, y, z) \neq \mathbf{0} \text{ und } (\lambda x : \lambda y : \lambda z) = (x : y : z) \text{ für } \lambda \neq 0.$$

Sie hängen mit baryzentrischen Koordinaten der affinen Ebene folgendermaßen zusammen:

- Wenn $x + y + z \neq 0$ ist, dann ist $(x : y : z)$ der Punkt in der affinen Ebene mit den baryzentrischen Koordinaten

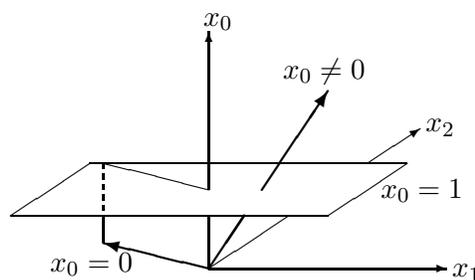
$$\frac{x}{x + y + z}, \frac{y}{x + y + z}, \frac{z}{x + y + z}.$$

- Wenn $x + y + z = 0$ ist, dann bedeutet $(x : y : z)$ einen unendlichfernen Punkt. Und zwar bedeutet dies den Punkt in Richtung der vom Vektor (x, y, z) aufgespannten Geraden parallel zur Ebene $x + y + z = 1$.

Ich habe versucht, den Übergang von baryzentrischen zu homogenen Koordinaten zu erklären, denn schon in Dimension zwei sind die baryzentrischen Koordinaten drei Koordinaten. Weil die benutzte Ebene $x + y + z = 1$ nicht parallel zu einer Koordinatenebene ist, ist die Geometrie der Situation aber etwas unübersichtlich. Insbesondere sollte ein Student in einer mündlichen Prüfung nicht diese Einführung der homogenen Koordinaten erklären, sondern die folgende, weil sie geometrisch übersichtlicher ist:

Wie in Abschnitt 2.1 ergänzen wir Vektoren $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ rein formal um einen nullten Eintrag $= 1$ zu Vektoren $\mathbf{x}' = (1, x_1, x_2)$. In diesem Fall gehört ein Punkt $(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$

- zum Vektor $\mathbf{x}' = (1, x_1/x_0, x_2/x_0)$, d.h. zum Punkt $\mathbf{x} = (x_1/x_0, x_2/x_0)$ der affinen Ebene, falls $x_0 \neq 0$,
- zum unendlich fernen Punkt in Richtung der Geraden $\mathbb{R} \cdot (x_1, x_2) \subset \mathbb{R}^2$, falls $x_0 = 0$.



Aufgabe 3.1 In der projektiven Ebene $\mathbb{P}_2(\mathbb{K})$ mit den homogenen Koordinaten $(x_0 : x_1 : x_2)$ seien

- zwei verschiedene Punkte $\mathbf{p}_1 = (a_1 : b_1 : c_1) \neq \mathbf{p}_2 = (a_2 : b_2 : c_2)$ gegeben. Bestimmen Sie die Gleichung ihrer Verbindungsgeraden.
- zwei verschiedene Geraden $L_1 : \alpha_1 x_0 + \beta_1 x_1 + \gamma_1 x_2 = 0$ und $L_2 : \alpha_2 x_0 + \beta_2 x_1 + \gamma_2 x_2 = 0$ gegeben. Bestimmen sie deren Schnittpunkt.

Aufgabe 3.2 a) Es seien $\mathbf{p}_i = (a_i : b_i : c_i)$, $i = 1, 2, 3$, drei Punkte in der projektiven Ebene $\mathbb{P}_2(\mathbb{K})$. Zeigen Sie: diese drei Punkte sind genau dann kollinear, wenn es $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0, 0, 0)$ gibt mit

$$\lambda_1 \hat{\mathbf{p}}_1 + \lambda_2 \hat{\mathbf{p}}_2 + \lambda_3 \hat{\mathbf{p}}_3 = \mathbf{0}.$$

(Hier meine ich mit $\hat{\mathbf{p}} \in \mathbb{K}^3$ einen Vektor, der zum Punkt $\mathbf{p} \in \mathbb{P}_2(\mathbb{K})$ gehört.)

b) Es seien

$$L_i : \alpha_i x_0 + \beta_i x_1 + \gamma_i x_2 = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

drei Geraden in der projektiven Ebene $\mathbb{P}_2(\mathbb{K})$. Zeigen Sie: diese drei Geraden haben genau dann einen Punkt gemeinsam, wenn es $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0, 0, 0)$ gibt mit

$$\lambda_1 L_1(\mathbf{x}) + \lambda_2 L_2(\mathbf{x}) + \lambda_3 L_3(\mathbf{x}) \equiv 0.$$

3.2 Der projektive Raum $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$

Im letzten Abschnitt haben wir eingesehen, dass man die projektive Ebene $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ erklären kann als die Menge der eindimensionalen Untervektorräume im \mathbb{R}^3 . Diese Einsicht bestand aus drei Schritten, die wir allerdings nicht in der folgenden Reihenfolge ausführten:

1. Der Definition von $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ als diese Menge;
2. der Einführung von homogenen Koordinaten $(x_0 : x_1 : x_2)$ auf dieser Menge;
3. der Deutung von Punkten $(x_0 : x_1 : x_2)$ mit $x_0 \neq 0$ als Punkte $(x_1/x_0, x_2/x_0)$ der affinen Ebene und von Punkten $(0 : x_1 : x_2)$ als unendlich ferne Punkte.

Diese drei Schritte führen wir jetzt in beliebiger Dimension n und über jedem beliebigen Körper \mathbb{K} durch.

1. *Definition des n -dimensionalen projektiven Raums $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$:* Der n -dimensionale projektive Raum $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ ist die Menge aller eindimensionalen Unterräume L (= Geraden L durch den Nullpunkt) im $(n + 1)$ -dimensionalen Vektorraum \mathbb{K}^{n+1} .

2. *Einführung homogener Koordinaten auf $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$:* Jeder eindimensionale Unterraum $L \subset \mathbb{K}^{n+1}$ wird aufgespannt durch einen Vektor $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$. Wir nennen $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ die homogenen Koordinaten des Punktes in $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$, der von L repräsentiert wird. Weil $\lambda \cdot \mathbf{x}$ dieselbe Gerade L aufspannt, gilt

$$(x_0 : x_1 : \dots : x_n) = (\lambda x_0 : \lambda x_1 : \dots : \lambda x_n)$$

für alle $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$. Natürlich gibt es keinen Punkt im projektiven Raum mit homogenen Koordinaten $(0 : 0 : \dots : 0)$, *der projektive Raum hat keinen Nullpunkt.*

Noch eine Notation: Später werde ich, wenn sich alle an diese Notation gewöhnt haben, keinen so großen Unterschied mehr zwischen der Bezeichnung für den Vektor $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ und dem Punkt $(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ machen. Vorläufig will ich versuchen, mich an folgende Regelung zu halten:

$$\begin{array}{ll} \text{Vektor} & \hat{\mathbf{x}} = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}, \\ \text{Punkt} & \mathbf{x} = (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{K}). \end{array}$$

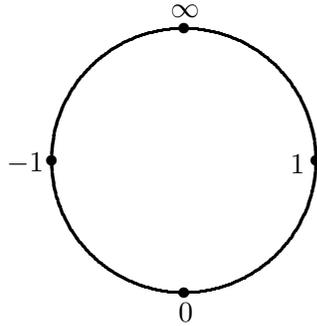
3. *Affine und unendlich ferne Punkte:* Die Menge der Punkte $\mathbf{x} = (x_0 : x_1 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ mit $x_0 \neq 0$ nennen wir den *affinen Teil* des projektiven Raums. Dieser affine Teil kann mit dem affinen Raum \mathbb{K}^n identifiziert werden durch die bijektive Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & & \mathbb{P}_n(\mathbb{K}) \\ \hline (x_1, \dots, x_n) & \rightarrow & (1 : x_1 : \dots : x_n) \\ \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) & \leftarrow & (x_0 : x_1 : \dots : x_n). \end{array}$$

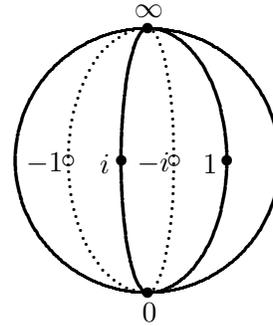
Die Menge der Punkte $\mathbf{x} = (0 : x_1 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ nennen wir die *unendlich ferne Hyperebene*. Was eine Hyperebene im projektiven Raum ist, erklären wir gleich. Der Punkt \mathbf{x} repräsentiert im \mathbb{K}^n den Fluchtpunkt aller Geraden, die zur Geraden $\mathbb{K} \cdot (x_1, \dots, x_n) \subset \mathbb{K}^n$ parallel sind.

Beispiel: $n = 1$. Der eindimensionale projektive Raum über \mathbb{K} heißt *projektive Gerade*. Er besteht aus allen Punkten $\mathbf{x} = (x_0 : x_1)$. Darunter gibt es einen einzigen Punkt $\infty := (0 : x_1) = (0 : 1)$ mit $x_0 = 0$. Dies ist der *unendlich ferne Punkt*. Die projektive Gerade $\mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ besteht also aus der affinen Geraden \mathbb{K} , an die der unendlich ferne Punkt angefügt wurde:

$$\mathbb{P}_1(\mathbb{K}) = \mathbb{K} \cup \infty.$$



$\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$



$\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$

Die projektive Gerade $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \infty$ heißt auch *Riemannsche Zahlenkugel*.

Der projektive Raum $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ verallgemeinert den affinen Raum \mathbb{K}^n im folgenden Sinn:

- Jeder affine Unterraum $A \subset \mathbb{K}^n$ lässt sich fortsetzen zu einem projektiven Unterraum $\bar{A} \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$.
- Jede affine Transformation $F : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ lässt sich fortsetzen zu einer projektiven Transformation $\bar{F} : \mathbb{P}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$.

Natürlich müssen wir erst noch definieren, was ein projektiver Unterraum und was eine projektive Transformation ist.

Definition 3.1 Ein projektiver Unterraum $U \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ ist eine Menge von Geraden $L \subset \mathbb{K}^{n+1}$ derart, dass es einen Untervektorraum $\hat{U} \subset \mathbb{K}^{n+1}$ gibt mit $U = \{L \subset \hat{U}\}$. Die Dimension von U ist

$$\dim(U) = \dim(\hat{U}) - 1.$$

Beispiele: a) jede Gerade $L \subset \mathbb{K}^{n+1}$ repräsentiert einen Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$. Punkte sind also 0-dimensionale projektive Unterräume.

b) Eine nicht-triviale Linearform $\sum_0^n a_\nu x_\nu$ definiert eine Hyperebene $\hat{H} = \{\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{K}^{n+1} : \sum a_\nu x_\nu = 0\}$ in \mathbb{K}^{n+1} . Die Dimension dieser Hyperebene ist n . Die in dieser Hyperebene \hat{H} liegenden Geraden bilden einen projektiven Raum der Dimension $n - 1$ im $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$. Dieser projektive Unterraum heißt *projektive Hyperebene*. Ist insbesondere die Linearform gerade x_0 , so erhält man die unendlich ferne Hyperebene $x_0 = 0$.

Satz 3.1 (Projektiver Abschluss affiner Unterräume) *Jeder affine Unterraum $A \subset \mathbb{K}^n$ ist fortsetzbar zu einem projektiven Unterraum $\bar{A} \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ gleicher Dimension. Es ist $\bar{A} \cap \mathbb{K}^n = A$.*

Beweis: Es sei $d := \dim(A)$ und $A \subset \mathbb{K}^n$ definiert durch $n-d$ linear unabhängige Gleichungen

$$A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n : \sum_{\nu=1}^n a_{\mu,\nu} x_\nu = b_\mu, \mu = 1, \dots, n-d\}.$$

Dieselben Gleichungen, gelesen als homogene Gleichungen für Vektoren $\mathbf{x}' = (1, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, nämlich

$$-b_\mu x_0 + a_{\mu,1} x_1 + \dots + a_{\mu,n} x_n = 0, \mu = 1, \dots, n-d$$

definieren einen Untervektorraum $\hat{U} \subset \mathbb{K}^{n+1}$ der Codimension $n-d$, also von der Dimension $d+1$. $U \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ sei der zugehörige projektive Unterraum. Er hat Dimension d .

Nach Definition ist

$$U = \{(x_0 : x_1 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{K}) : \sum_{\nu=1}^n a_{\mu,\nu} x_\nu = b_\mu x_0, \mu = 1, \dots, n-d\}.$$

Die Punkte von $U \cap \mathbb{K}^n$ haben $x_0 \neq 0$, und die zugehörigen affinen Punkte $(x_1/x_0, \dots, x_n/x_0) \in \mathbb{K}^n$ bilden gerade den Lösungsraum der gegebenen $n-d$ Gleichungen. \square

Beispiel: Eine Gerade in der affinen Ebene hat die Gleichung $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 = b$. Die entsprechende Gerade in der projektiven Ebene hat die Gleichung $-bx_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$. Wenn wir zwei Geraden in der projektiven Ebene schneiden wollen, etwa

$$\{a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0\} \cap \{b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 = 0\}$$

berechnen wollen, dann müssen wir das homogene Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 &= 0 \\ b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 &= 0 \end{aligned}$$

lösen. Falls die Gleichungen linear unabhängig sind (d.h., falls die Geraden verschieden sind), wird der Lösungsraum aufgespannt vom Kreuzprodukt der Koeffizientenvektoren

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_2 - a_2 b_1 \\ a_2 b_0 - a_0 b_2 \\ a_0 b_1 - a_1 b_0 \end{pmatrix}.$$

Der Schnittpunkt der beiden Geraden hat also die homogenen Koordinaten

$$(x_0 : x_1 : x_2) = (a_1 b_2 - a_2 b_1 : a_2 b_0 - a_0 b_2 : a_0 b_1 - a_1 b_0).$$

Der Vorteil der projektiven Theorie ist, dass alle Gleichungen homogen werden, und man keinen Unterschied zwischen homogenen und inhomogenen Gleichungen zu machen braucht. Natürlich ist die triviale Lösung homogener Gleichungen immer verboten.

Ein projektiver Unterraum $U \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ ist für sich selbst genommen wieder ein d -dimensionaler projektiver Raum. Es gibt ja einen Untervektorraum $\hat{U} \subset \mathbb{K}^{n+1}$, derart, dass U aus allen Geraden $L \subset \hat{U}$ besteht. In \hat{U} kann man eine Basis $\hat{\mathbf{u}}_0, \dots, \hat{\mathbf{u}}_d \in \hat{U}$ wählen. Diese definiert einen Vektorraum-Isomorphismus $\mathbb{K}^{d+1} \rightarrow \hat{U}$ und damit eine bijektive Abbildung $\mathbb{P}_d(\mathbb{K}) \rightarrow U$. Hätten wir eine andere Basis in \hat{U} gewählt, so hätten wir einen anderen Vektorraum-Isomorphismus erhalten. Doch beide Isomorphismen unterscheiden sich nur um einen Vektorraum-Automorphismus des \mathbb{K}^{d+1} .

Der Begriff des *Verbindungsraums* verallgemeinert sich wörtlich vom Affinen ins Projektive: Ist $M \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ eine beliebige Menge, so sei $\text{span}(M)$ der Durchschnitt aller projektiven Unterräume, die M enthalten. Ist $\hat{M} \subset \mathbb{K}^{n+1}$ die zu M gehörende Menge im Vektorraum \mathbb{K}^{n+1} , so ist $\text{span}(M)$ der projektive Raum zum Untervektorraum $\text{span}(\hat{M})$. Insbesondere ist für zwei projektive Unterräume $U_1, U_2 \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ der Verbindungsraum $U_1 + U_2 := \text{span}(U_1 \cup U_2)$ definiert.

Es gibt auch die Möglichkeit, $\text{span}(\hat{M})$ zu definieren als die Menge

$$\left\{ \sum_{\nu=1}^k c_\nu \hat{\mathbf{v}}_\nu : c_\nu \in \mathbb{K}, \hat{\mathbf{v}}_\nu \in \hat{M} \right\}$$

aller Linearkombinationen von Vektoren $\hat{\mathbf{v}}_\nu \in \hat{M}$. Deswegen besteht der projektive Unterraum $\text{span}(M)$ in $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ aus allen Punkten $\mathbf{x} = (x_0 : \dots : x_n)$ derart, dass der Vektor $\hat{\mathbf{x}} = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ eine Linearkombination

$$\hat{\mathbf{x}} = c_1 \hat{\mathbf{v}}_1 + \dots + c_k \hat{\mathbf{v}}_k$$

von Vektoren $\hat{\mathbf{v}}_\nu \in \mathbb{K}^{n+1}$ ist, die zu Punkten $\mathbf{v}_\nu \in M$ gehören. Wir wollen uns Schreibarbeit sparen, und auch die Punkte \mathbf{x} im projektiven Raum als Linearkombinationen schreiben.

Beispiel: Seien $\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \in \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ zwei verschiedene Punkte mit den homogenen Koordinaten $(x_0 : \dots : x_n)$ und $(y_0 : \dots : y_n)$. Sie spannen eine projektive Gerade $L \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ auf. Die Punkte dieser Geraden sind die Linearkombinationen

$$s \cdot (x_0 : \dots : x_n) + t \cdot (y_0 : \dots : y_n) = (sx_0 + ty_0 : \dots : sx_n + ty_n), \quad s, t \in \mathbb{K}.$$

Hätten wir andere homogene Koordinaten $(\lambda x_0 : \dots : \lambda x_n)$ für den Punkt \mathbf{x} genommen, so hätten wir genau dieselbe Menge von Linearkombinationen bekommen, nur in anderer Reihenfolge.

Mit dem Begriff des Verbindungsraums können wir folgenden Satz formulieren, der die Tatsache verallgemeinert, dass sich zwei Geraden in der projektiven Ebene unter allen Umständen schneiden.

Satz 3.2 (Dimensionsatz) *Für zwei projektive Unterräume $U_1, U_2 \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ gilt*

$$\dim(U_1) + \dim(U_2) = \dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2).$$

Beweis. Es seien $\hat{U}_1, \hat{U}_2 \subset \mathbb{K}^{n+1}$ die zugehörigen Vektorräume. Zum projektiven Unterraum $U_1 + U_2$ gehört nach Definition der Untervektorraum $\hat{U}_1 + \hat{U}_2$ und zu $U_1 \cap U_2$ der Untervektorraum

$\hat{U}_1 \cap \hat{U}_2$. Wir haben

$$\begin{aligned}
 \dim(\hat{U}_i) &= \dim(U_i) + 1 \\
 \dim(\hat{U}_1 + \hat{U}_2) &= \dim(U_1 + U_2) + 1 \\
 \dim(\hat{U}_1 \cap \hat{U}_2) &= \dim(U_1 \cap U_2) + 1 \\
 \dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2) &= \dim(\hat{U}_1 + \hat{U}_2) + \dim(\hat{U}_1 \cap \hat{U}_2) - 2 \\
 &= \dim(\hat{U}_1) + \dim(\hat{U}_2) - 2 \\
 &= \dim(U_1) + \dim(U_2). \quad \square
 \end{aligned}$$

Damit dieser Satz auch wirklich in allen Fällen stimmt, muss man für die leere Menge $\emptyset \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ setzen:

$$\begin{aligned}
 \hat{\emptyset} &:= \{\mathbf{0}\} \\
 \dim(\emptyset) &:= -1.
 \end{aligned}$$

Dann hat man beispielsweise für zwei Geraden $L_1, L_2 \subset \mathbb{P}_2$

$$\begin{aligned}
 \dim(L_1 + L_2) &\leq \dim(\mathbb{P}_2) \\
 &= 2 \\
 \dim(L_1 \cap L_2) &= \dim(L_1) + \dim(L_2) - \dim(L_1 + L_2) \\
 &= 2 - \dim(L_1 + L_2) \\
 &\geq 0.
 \end{aligned}$$

Also ist der Durchschnitt zweier Geraden in der projektiven Ebene nie leer.

Einen Punkt $\mathbf{x} = (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ kann man der Multiplikation mit einer $(n+1) \times (n+1)$ -Matrix unterziehen:

$$M \in M((n+1) \times (n+1), \mathbb{K}) : \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto M \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Wenn man alle homogenen Koordinaten von \mathbf{x} mit einem gemeinsamen Faktor $\lambda \in \mathbb{K}$ durchmultipliziert, werden die Einträge von $M \cdot \hat{\mathbf{x}}$ mit demselben Faktor λ multipliziert. Multiplikation mit der Matrix M bildet den Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ wieder auf einen Punkt $M \cdot \mathbf{x} \in \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ ab.

Etwas kann dabei allerdings schiefgehen: $\hat{\mathbf{x}}$ könnte im Kern der Matrix M liegen und $M \cdot \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ sein. Wenn das passiert ist der Bildpunkt $M \cdot \mathbf{x} \in \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ nicht definiert. Aber falls die Matrix $M \in GL(n, \mathbb{K})$ invertierbar ist, kann das ja nicht passieren!

Definition 3.2 Eine projektive Abbildung (oder Projektivität) $P : \mathbb{P}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ ist eine Abbildung, die auf den homogenen Koordinaten durch Multiplikation mit einer invertierbaren $(n+1) \times (n+1)$ -Matrix definiert ist.

Eine Projektivität wird also durch einen Automorphismus $\hat{\mathbf{x}} \mapsto M \cdot \hat{\mathbf{x}}$ des \mathbb{K}^{n+1} induziert. Weil Automorphismen bijektiv sind, sind auch Projektivitäten bijektiv. Weil Automorphismen Untervektorräume des \mathbb{K}^{n+1} auf Untervektorräume gleicher Dimension abbilden, bilden Projektivitäten projektive Unterräume des $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ wieder auf projektive Unterräume derselben Dimension ab.

Satz 3.3 (Projektive Fortsetzung affiner Transformationen) *Jede affine Transformation $F : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ lässt sich zu einer projektiven Transformation $P : \mathbb{P}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ fortsetzen.*

Beweis. Die affine Transformation sei

$$F : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{t} + A \cdot \mathbf{x}$$

mit der invertierbaren Matrix $A \in GL(n, \mathbb{K})$. In (2.1) sahen wir bereits, dass die $(n+1) \times (n+1)$ -Matrix

$$M := \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{t} & A \end{pmatrix}$$

diese affine Transformation durch Multiplikation auf den trivial um den Eintrag 1 verlängerten Vektoren \mathbf{x}' beschreibt. Weil A invertierbar ist, ist auch die $(n+1) \times (n+1)$ -Matrix M invertierbar. Multiplikation mit M definiert also eine Projektivität $P : \mathbb{P}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$. Auf den Punkten $(1 : x_1 : \dots : x_n)$ des affinen Teils von $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ ist dies genau die gegebene affine Transformation. \square

Alle projektiven Transformationen $P : \mathbb{P}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ bilden eine Gruppe, die *projektive Gruppe* $\mathbf{PGL}(n, \mathbb{K})$. Diese Gruppe $\mathbf{PGL}(n, \mathbb{K})$ enthält die affine Gruppe $\mathbf{Aff}(n, \mathbb{K})$, aber sie enthält noch weit mehr Transformationen.

Beispiel: Die projektive Gruppe $\mathbf{PGL}(1, \mathbb{K})$ in Dimension 1 (vgl. 0.1). Seien $(x_0 : x_1)$ homogene Koordinaten auf $\mathbb{P}_1(\mathbb{K})$, die affinen Punkte also $(x_0 : x_1) = x_1/x_0$ mit $x_0 \neq 0$ und $\infty = (0 : x_1)$. Eine Projektivität P des $\mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ wird definiert durch eine invertierbare 2×2 -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad ad - bc \neq 0.$$

Auf den homogenen Koordinaten ist $P : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}$ mit

$$\begin{aligned} y_0 &= ax_0 + bx_1 \\ y_1 &= cx_0 + dx_1 \end{aligned}$$

Falls $ax_0 + bx_1 \neq 0$, ist der Bildpunkt

$$P(x_1/x_0) = y_1/y_0 = \frac{cx_0 + dx_1}{ax_0 + bx_1} = \frac{c + d \cdot \frac{x_1}{x_0}}{a + b \cdot \frac{x_1}{x_0}}$$

affin. Die Projektivität ist also eine ganz gewöhnliche gebrochen rationale Funktion

$$x \mapsto \frac{c + dx}{a + bx}$$

mit zwei Ausnahmewerten wegen Unendlich:

$$\begin{aligned}\infty &\mapsto d/b \\ -a/b &\mapsto \infty\end{aligned}$$

Ähnlich wie im Eindimensionalen, kann man auch in beliebiger Dimension n projektive Transformationen als rationale Abbildungen in affinen Koordinaten schreiben:

$$\begin{aligned}y_1 &= \frac{a_{1,0} + a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n}{a_{0,0} + a_{0,1}x_1 + \dots + a_{0,n}x_n} \\ y_2 &= \frac{a_{2,0} + a_{2,1}x_1 + \dots + a_{2,n}x_n}{a_{0,0} + a_{0,1}x_1 + \dots + a_{0,n}x_n} \\ &\vdots \\ y_n &= \frac{a_{n,0} + a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,n}x_n}{a_{0,0} + a_{0,1}x_1 + \dots + a_{0,n}x_n}.\end{aligned}$$

Schließlich sei noch daran erinnert, dass projektive Transformationen, genau wie lineare Transformationen in Vektorräumen, ein Janus-Gesicht haben: Man kann sie einerseits auffassen als eine Abbildung $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}$, wo Vektoren (bzw. Punkte des projektiven Raums) wirklich bewegt und abgebildet werden, es passiert was. Das ist der „aktive Standpunkt“. Man kann mit derselben Formel aber auch eine Koordinatentransformation meinen. Alle Vektoren (bzw. Punkte des projektiven Raums) bleiben, wo sie waren, nur ihre Koordinaten ändern sich. Das ist der „passive Standpunkt“. Dieser passive Standpunkt wird vor allem von Anwendern der Mathematik (z.B. in der Physik) eingenommen. Für einen Mathematiker gibt es aber keinen so großen Unterschied zwischen diesen beiden Standpunkten. Koordinaten auf einem Vektorraum sind ja Linearformen, also Elemente im Dualraum, und damit wieder irgendwo Vektoren. Diese Sichtweise in der projektiven Geometrie heißt „Dualitätsprinzip“ und wird noch eine große Rolle spielen.

Aufgabe 3.3 (Stereographische Projektion) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\varphi : (u, v) \mapsto \frac{1}{u^2 + v^2 + 1}(2u, 2v, u^2 + v^2 - 1)$$

die komplexe Zahlenebene $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ bijektiv auf die Riemannsche Zahlenkugel $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ ohne den Nordpol $(0, 0, 1)$ abbildet.

Aufgabe 3.4 a) Setzen Sie die affinen Transformationen $\varphi_i : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ mit

$$\varphi_1(x) = x + c, \quad \varphi_2(x) = c \cdot x \quad (c \neq 0)$$

zu projektiven Transformationen $\phi_i : \mathbb{P}_1(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ fort und geben Sie zugehörige 2×2 -Matrizen an.

b) Finden Sie 2×2 -Matrizen zu den rationalen Funktionen

$$z \mapsto \frac{-1}{z}, \quad 1 + \frac{1}{z}, \quad \frac{z}{z-1}.$$

Bestimmen sie jedesmal den Bildpunkt des Punktes ∞ .

Aufgabe 3.5 Ein Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ heißt Fixpunkt der projektiven Transformation $P : \mathbb{P}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$, wenn $P(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ gilt.

a) Zeigen Sie: $\mathbf{x} \in \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ ist genau dann Fixpunkt einer Projektivität mit der $(n+1) \times (n+1)$ -Matrix A , wenn $\hat{\mathbf{x}}$ ein Eigenvektor der Matrix A ist.

b) Zeigen Sie: Eine Projektivität $P : \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, $P \neq id$, hat entweder einen oder zwei Fixpunkte, eine Projektivität $P : \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ hat entweder einen oder zwei, oder gar keinen Fixpunkt.

Aufgabe 3.6 Bestimmen Sie die Fixpunkte der Projektivität

$$y_0 = x_0 + 2x_1, \quad y_1 = 2x_0 - x_1$$

in $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$. Welche rationale Funktion wird durch diese Projektivität beschrieben?

Aufgabe 3.7 Eine Projektivität P hat die Ordnung $k \in \mathbb{N}$, wenn $P^k = id$ gilt (und k mit dieser Eigenschaft minimal ist). Sei $P : \mathbb{P}_1(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ eine Projektivität mit Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:

a) P hat die Ordnung 2 (ist eine Involution), genau dann, wenn $a + d = 0$.

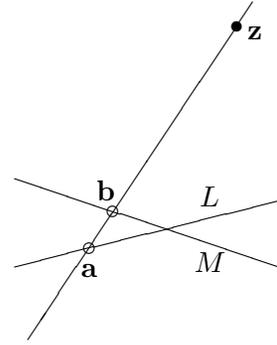
b) P hat die Ordnung 3, genau dann, wenn $a^2 + d^2 + ad + bc = 0$.

3.3 Projektivitäten

Der Begriff der Projektivität hat sich historisch aus dem Begriff der Perspektivität entwickelt. Eine Perspektivität in der Ebene ist folgendes:

Es seien zwei Geraden $L, M \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{K})$ und ein Punkt $\mathbf{z} \in \mathbb{P}_2(\mathbb{K})$ in der projektiven Ebene gegeben. Wir nennen \mathbf{z} das *Perspektivitäts-Zentrum* und die Geraden $S \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{K})$ durch \mathbf{z} die *Perspektivitäts-Strahlen*. Jeder Strahl S schneidet die Geraden L und M in genau einem Punkt. Umgekehrt gibt es zu jedem Punkt $\mathbf{a} \in L$ genau einen Strahl $S_{\mathbf{a}}$, nämlich die von \mathbf{z} und \mathbf{a} aufgespannte Gerade. Dieser Strahl schneidet die Gerade M im Punkt $\mathbf{b} = S_{\mathbf{a}} \cap M$. Dadurch ist eine Abbildung

$$L \rightarrow M, \quad \mathbf{a} \mapsto \mathbf{b} = S_{\mathbf{a}} \cap M$$



definiert. Sie heißt die *Perspektivität mit Zentrum z*.

Diese Definition der Perspektivität geht genauso für zwei Hyperebenen $L, M \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ im n -dimensionalen Raum. Man muss nur darauf achten, dass das Perspektivitäts-Zentrum auf keiner dieser beiden Hyperebenen liegt.

Satz 3.4 *Jede Perspektivität $L \rightarrow M$ zwischen zwei Hyperebenen ist eine projektive Transformation*

$$\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{K}) = L \rightarrow M = \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{K}).$$

Beweis. Es seien $\hat{L}, \hat{M} \subset \mathbb{K}^{n+1}$ die zu den Hyperebenen $L, M \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ gehörenden n -dimensionalen Unterräume und $\hat{\mathbf{z}} \in \mathbb{K}^{n+1}$ ein Vektor zum Punkt $\mathbf{z} \in \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$. Wir wählen eine Basis $\hat{\mathbf{z}}_1, \dots, \hat{\mathbf{z}}_n \in \hat{M}$. Dann sind $\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{z}}_1, \dots, \hat{\mathbf{z}}_n \in \mathbb{K}^{n+1}$ linear unabhängig, bilden also eine Basis des \mathbb{K}^{n+1} . Wir benutzen die Koordinaten zu dieser Basis als unsere Koordinaten, mit denen wir arbeiten. Dann hat \mathbf{z} die homogenen Koordinaten $\mathbf{z} = (1 : 0 : \dots : 0)$ und M hat die Gleichung $z_0 = 0$.

Jede Basis von \hat{L} definiert eine bijektive Abbildung

$$\mathbb{K}^n \rightarrow \hat{L}, \quad (u_1, \dots, u_n) \mapsto (x_0, \dots, x_n)^t = \left(\sum p_{\mu,\nu} u_\nu \right)_{\mu=0,\dots,n}$$

mit einer $(n+1) \times n$ -Matrix

$$P = (p_{\mu,\nu})_{\mu=0,\dots,n,\nu=1,\dots,n}.$$

Weil $\hat{\mathbf{z}} = (1, 0, \dots, 0)$ nicht zu \hat{L} gehört, gibt es keinen Vektor $(u_1, \dots, u_n) \neq (0, \dots, 0)$ mit

$$\sum p_{\mu,\nu} u_\nu = 0 \text{ für } \mu = 1, \dots, n.$$

Die Teilmatrix

$$P' := (p_{\mu,\nu})_{\mu,\nu=1,\dots,n}$$

hat also maximalen Rang $= n$.

Ist $\mathbf{x} \in L$, so ist $\lambda \mathbf{x} + \mu (1 : 0 : \dots : 0)$ die von \mathbf{x} und \mathbf{z} aufgespannte Gerade. Sie schneidet $M = \{x_0 = 0\}$ in

$$\mathbf{x} - x_0 \cdot \mathbf{z} = (0 : x_1 : \dots : x_n).$$

Also ist die Perspektivität

$$P : L \rightarrow M, \quad (x_0 : \dots : x_n) \mapsto (x_1 : \dots : x_n).$$

Die Abbildung $\mathbb{P}_{n-1} = L \rightarrow M$ schreibt sich in Koordinaten

$$(u_1, \dots, u_n) \mapsto \left(\sum_{\nu=1}^n p_{\mu,\nu} u_\nu \right)_{\mu=1, \dots, n}.$$

Sie gehört also zur linearen Abbildung mit der Matrix P' und ist deswegen eine Projektivität. \square

In der linearen Algebra gibt es folgendes Prinzip der linearen Ausdehnung: Sei $\hat{\mathbf{x}}_0, \hat{\mathbf{x}}_1, \dots, \hat{\mathbf{x}}_n \in \mathbb{K}^{n+1}$ eine Basis und seien $\hat{\mathbf{y}}_0, \hat{\mathbf{y}}_1, \dots, \hat{\mathbf{y}}_n \in \mathbb{K}^{n+1}$ beliebige Vektoren. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\phi : \mathbb{K}^{n+1} \rightarrow \mathbb{K}^{n+1}$ mit $\phi(\hat{\mathbf{x}}_\nu) = \hat{\mathbf{y}}_\nu$ für $\nu = 0, \dots, n$. Diese Abbildung ϕ gehört zur Matrix

$$(\hat{\mathbf{y}}_0, \hat{\mathbf{y}}_1, \dots, \hat{\mathbf{y}}_n) \cdot (\hat{\mathbf{x}}_0, \hat{\mathbf{x}}_1, \dots, \hat{\mathbf{x}}_n)^{-1}.$$

(Die Vektoren sind hier als Spaltenvektoren in die Matrizen geschrieben.) Wir wollen uns jetzt mit der projektiven Version dieses Prinzips beschäftigen.

Zuerst müssen wir klären, wann Punkte $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{P}_n$ zu einer Basis $\hat{\mathbf{x}}_0, \dots, \hat{\mathbf{x}}_n \in \mathbb{K}^{n+1}$ gehören:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_0, \dots, \hat{\mathbf{x}}_n \in \mathbb{K}^{n+1} \text{ bilden eine Basis} &\Leftrightarrow \\ \hat{\mathbf{x}}_0, \dots, \hat{\mathbf{x}}_n \text{ spannen den } \mathbb{K}^{n+1} \text{ auf} &\Leftrightarrow \\ \mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_n \text{ spannen den } \mathbb{P}_n \text{ auf.} & \end{aligned}$$

Definition 3.3 Ein $(n+1)$ -Tupel von Punkten $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{P}_n$ heißt projektiv unabhängig, wenn diese Punkte den Raum \mathbb{P}_n aufspannen.

Weiter müssen wir beachten, dass eine lineare Abbildung $\phi : \mathbb{K}^{n+1} \rightarrow \mathbb{K}^{n+1}$ nur dann eine Projektivität definiert, wenn sie invertierbar ist. Wir erhalten folgendes *Prinzip der projektiven Ausdehnung*:

Die Punkte $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{P}_n$ seien projektiv unabhängig, ebenso die Punkte $\mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{y}_n \in \mathbb{P}_n$. Dann existiert eine Projektivität $P : \mathbb{P}_n \rightarrow \mathbb{P}_n$, die für $\nu = 0, \dots, n$ den Punkt \mathbf{x}_ν auf den Punkt \mathbf{y}_ν abbildet.

Beweis. Wir wählen Vektoren $\hat{\mathbf{x}}_0, \dots, \hat{\mathbf{x}}_n, \hat{\mathbf{y}}_0, \dots, \hat{\mathbf{y}}_n \in \mathbb{K}^{n+1}$ zu den Punkten $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{y}_n$. Wegen der Voraussetzung der projektiven Unabhängigkeit bilden die beiden $(n+1)$ -Tupel $\hat{\mathbf{x}}_0, \dots, \hat{\mathbf{x}}_n$ und $\hat{\mathbf{y}}_0, \dots, \hat{\mathbf{y}}_n$ Basen des \mathbb{K}^{n+1} . Also gibt es eine invertierbare lineare Abbildung $\phi : \mathbb{K}^{n+1} \rightarrow \mathbb{K}^{n+1}$ mit $\phi(\hat{\mathbf{x}}_\nu) = \hat{\mathbf{y}}_\nu$ für $\nu = 0, \dots, n$. Diese lineare Abbildung ϕ definiert eine Projektivität $P : \mathbb{P}_n \rightarrow \mathbb{P}_n$ mit $P(\mathbf{x}_\nu) = \mathbf{y}_\nu$ für $\nu = 0, \dots, n$. \square

Die eben bewiesene Aussage ist eine reine Existenz-Aussage: Die Eindeutigkeit gilt nicht! Das liegt daran, dass wir statt der Vektoren $\hat{\mathbf{y}}_0, \dots, \hat{\mathbf{y}}_n$ auch beliebige Vielfache $\lambda_0 \cdot \hat{\mathbf{y}}_0, \dots, \lambda_n \cdot \hat{\mathbf{y}}_n$ mit $\lambda_0, \dots, \lambda_n \neq 0$ hätten nehmen können.

Beispiel ($n = 1$): Es seien

$$\mathbf{x}_0 = (a : b), \quad \mathbf{x}_1 = (c : d) \in \mathbb{P}_1(\mathbb{K})$$

und

$$\mathbf{y}_0 = (t : u), \quad \mathbf{y}_1 = (v : w) \in \mathbb{P}_1(\mathbb{K})$$

Paare projektiv unabhängiger Vektoren. Zu ihnen gehören Basen

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \hat{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

und

$$\hat{\mathbf{y}}_0 = \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} \quad \hat{\mathbf{y}}_1 = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$$

des \mathbb{K}^2 . Weil die Determinante $ad - bc \neq 0$ ist, können wir $\hat{\mathbf{x}}_0$ durch diese Determinante dividieren und deswegen o.B.d.A. annehmen: $ad - bc = 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{y}}_0, \hat{\mathbf{y}}_1) \cdot (\hat{\mathbf{x}}_0, \hat{\mathbf{x}}_1)^{-1} &= \begin{pmatrix} t & v \\ u & w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} t & v \\ u & w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} td - vb & -tc + va \\ ud - wb & -uc + wa \end{pmatrix} \end{aligned}$$

die Matrix einer Projektivität mit $\mathbf{x}_0 \mapsto \mathbf{y}_0, \mathbf{x}_1 \mapsto \mathbf{y}_1$.

Wählen wir andere Vektoren $\lambda_0 \cdot \hat{\mathbf{y}}_0, \lambda_1 \cdot \hat{\mathbf{y}}_1$ statt $\hat{\mathbf{y}}_0, \hat{\mathbf{y}}_1$, so erhalten wir eine andere Projektivität. So wird beispielsweise der Vektor $\hat{\mathbf{x}}_2 := \hat{\mathbf{x}}_0 + \hat{\mathbf{x}}_1$ zunächst auf den Vektor $\hat{\mathbf{y}}_0 + \hat{\mathbf{y}}_1$ abgebildet, aber nach der Multiplikation auf den Vektor $\hat{\mathbf{y}}_2 := \lambda_0 \hat{\mathbf{y}}_0 + \lambda_1 \hat{\mathbf{y}}_1$. Für $(\lambda : \mu) \neq (1 : 1)$ ist dieser Bildvektor kein Vielfaches von $\hat{\mathbf{y}}_0 + \hat{\mathbf{y}}_1$.

Wir sehen: Man kann noch einen dritten Punkt \mathbf{x}_2 , bzw. \mathbf{y}_2 wählen, und dann immer noch eine Projektivität $P : \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1$ finden mit $P(\mathbf{x}_\nu) = \mathbf{y}_\nu$ für $\nu = 0, 1, 2$. Man muss nur sicherstellen, dass $\lambda_0 \neq 0$ und $\lambda_1 \neq 0$, d.h., nicht nur \mathbf{y}_0 und \mathbf{y}_1 müssen projektiv unabhängig sein, sondern auch noch die beiden Punktepaare $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_2$, sowie $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$.

Satz 3.5 (Prinzip der projektiven Ausdehnung) *Es seien $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{n+1}$ und $\mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{y}_{n+1}$ zwei $(n + 2)$ -tupel von Punkten im $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ mit der Eigenschaft, dass in jedem $(n + 2)$ -tupel jedes $(n + 1)$ -tupel projektiv unabhängig ist. Dann existiert eine Projektivität $P : \mathbb{P}_n \rightarrow \mathbb{P}_n$ mit $P(\mathbf{x}_\nu) = \mathbf{y}_\nu$ für $\nu = 0, \dots, n + 1$, und hierdurch ist diese Projektivität eindeutig bestimmt.*

Beweis. Wir wählen Vektoren $\hat{\mathbf{x}}_0, \dots, \hat{\mathbf{x}}_{n+1}, \hat{\mathbf{y}}_0, \dots, \hat{\mathbf{y}}_{n+1} \in \mathbb{K}^{n+1}$ zu den gegebenen Punkten. Weil $\hat{\mathbf{x}}_0, \dots, \hat{\mathbf{x}}_n$ eine Basis des \mathbb{K}^{n+1} ist, haben wir

$$\hat{\mathbf{x}}_{n+1} = c_0 \hat{\mathbf{x}}_0 + \dots + c_n \hat{\mathbf{x}}_n.$$

Hier ist jedes $c_\nu \neq 0$, denn jedes $(n+1)$ -tupel $\hat{\mathbf{x}}_0, \dots, \hat{\mathbf{x}}_{\nu-1}, \hat{\mathbf{x}}_{\nu+1}, \dots, \hat{\mathbf{x}}_n, \hat{\mathbf{x}}_{n+1}$ ist nach Voraussetzung linear unabhängig. Ohne die Punkte $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_n$ zu ändern, ersetzen wir nun die Vektoren $\hat{\mathbf{x}}_0, \dots, \hat{\mathbf{x}}_n$ durch die Vektoren $c_0 \hat{\mathbf{x}}_0, \dots, c_n \hat{\mathbf{x}}_n$. Dadurch erreichen wir

$$\hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \hat{\mathbf{x}}_0 + \dots + \hat{\mathbf{x}}_n.$$

Diese $n+1$ Vektoren $\hat{\mathbf{x}}_0, \dots, \hat{\mathbf{x}}_n$ nehmen wir als neue Basis. In den zugehörigen Koordinaten haben wir

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \hat{\mathbf{x}}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrizen zu Projektivitäten P mit $P(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0, \dots, P(\mathbf{x}_n) = \mathbf{y}_n$ sind in diesem Koordinatensystem gerade diejenigen Matrizen mit den Spaltenvektoren

$$\lambda_0 \cdot \hat{\mathbf{y}}_0, \dots, \lambda_n \cdot \hat{\mathbf{y}}_n, \quad 0 \neq \lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}.$$

Der Bildpunkt von \mathbf{x}_{n+1} ist dabei der Punkt $\lambda_0 \mathbf{y}_0 + \dots + \lambda_n \mathbf{y}_n$.

Jetzt schreiben wir auch

$$\hat{\mathbf{y}}_{n+1} = b_0 \hat{\mathbf{y}}_0 + \dots + b_n \hat{\mathbf{y}}_n,$$

wobei aus der Voraussetzung wieder folgt $b_0, \dots, b_n \neq 0$. Wenn $P(\mathbf{x}_{n+1}) = \mathbf{y}_{n+1}$ gelten soll, dann müssen die beiden Vektoren

$$b_0 \hat{\mathbf{y}}_0 + \dots + b_n \hat{\mathbf{y}}_n \quad \text{und} \quad \lambda_0 \hat{\mathbf{y}}_0 + \dots + \lambda_n \hat{\mathbf{y}}_n$$

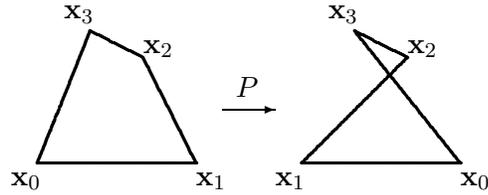
dieselbe Gerade im \mathbb{K}^{n+1} aufspannen. Weil die Vektoren $\hat{\mathbf{y}}_0, \dots, \hat{\mathbf{y}}_n$ linear unabhängig sind, ist dies genau dann der Fall, wenn

$$(\lambda_0 : \dots : \lambda_n) = (b_0 : \dots : b_n).$$

Dadurch sind die Faktoren $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ bis auf einen gemeinsamen Faktor eindeutig bestimmt. Also sind die Spalten der Abbildungsmatrix, d.h., es ist die ganze Matrix bis auf einen gemeinsamen Faktor bestimmt. Dieser Faktor ändert die zugehörige Projektivität nicht. \square

Wir wollen dieses Prinzip der projektiven Ausdehnung an einem einfachen Beispiel in der Ebene $\mathbb{P}_2(\mathbb{K})$ demonstrieren, das uns noch öfter beschäftigen wird: Vier Punkte $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ erfüllen die Voraussetzung von Satz 4, wenn keine drei davon projektiv abhängig sind, d.h., wenn keine drei kollinear sind. Seien also $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_3$ so gewählt. Dann bilden sie die vier Ecken eines ebenen *Vierecks*. Satz 4 sagt, dass alle derartigen Vierecke durch projektive Transformationen ineinander überführt werden können. Bis auf projektive Äquivalenz gibt es nur ein einziges ebenes Viereck!

Insbesondere ist unser Viereck $\mathbf{x}_0 \dots \mathbf{x}_3$ projektiv äquivalent zum Viereck $\mathbf{x}_{\sigma(0)} \dots \mathbf{x}_{\sigma(3)}$, wo wir die Ecken mit einer Permutation $\sigma \in \Sigma_4$ vertauscht haben. Zu jeder Permutation $\sigma \in \Sigma_4$ gibt es genau eine Projektivität $P \in \mathbf{PGL}(2, \mathbb{K})$, die die vier Ecken genau wie σ vertauscht. Z.B. für $\sigma = (0, 1)$ sieht das so aus:



Aus einem Viereck entsteht ein *vollständiges Viereck*, wenn man es durch die beiden Geraden x_0x_2 und x_1x_3 vervollständigt. Das vollständige Viereck besteht aus sechs Geraden, aus allen sechs Verbindungsgeraden zweier Ecken. Diese sechs Geraden kann man in drei Paare *gegenüberliegender* Seiten einteilen:

$$\begin{aligned} x_0x_1 & \text{ und } x_2x_3 \\ x_0x_2 & \text{ und } x_1x_3 \\ x_0x_3 & \text{ und } x_1x_2 \end{aligned}$$

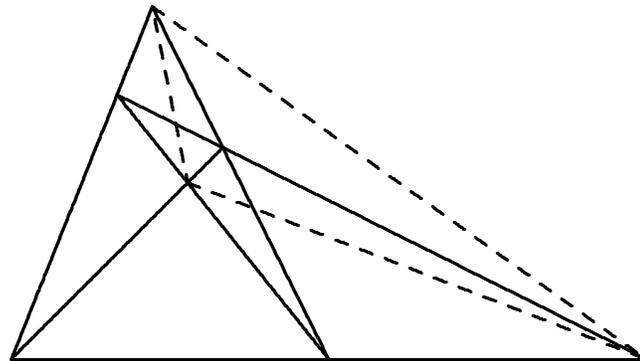
Diese drei Paare gegenüberliegender Seiten haben drei Schnittpunkte, die sogenannten *Diagonalpunkte* des vollständigen Vierecks.

Jede Projektivität P , welche die vier Ecken ineinander abbildet, bildet auch das vollständige Viereck auf sich ab, und damit auch die drei Diagonalpunkte auf sich. P bewirkt eine Permutation der drei Diagonalpunkte. Lassen wir P die Gruppe Σ_4 durchlaufen, welche die vier Ecken permutiert, so erhalten wir eine Abbildung von Σ_4 in die Permutationsgruppe Σ_3 der drei Diagonalpunkte. Dies ist ein Gruppenhomomorphismus

$$\Sigma_4 \rightarrow \Sigma_3.$$

Sein Kern ist die *Kleinsche Vierergruppe*

$$V_4 = \{id, (01)(23), (02)(13), (03)(12)\}.$$



Aufgabe 3.8 Bestimmen Sie eine Projektivität $F : \mathbb{P}_1(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{K})$, welche

$$1 \mapsto \infty, \quad 2 \mapsto 2, \quad \infty \mapsto 1$$

abbildet. Geben Sie die Abbildung in homogenen Koordinaten und als rationale Funktion an.

Aufgabe 3.9 Finden Sie die Fixpunkte der Projektivität

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}$$

in $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$.

Aufgabe 3.10 Bestimmen Sie eine Projektivität des $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, die den Fixpunkt $(1 : 1)$ hat und die Punkte $(0 : 1)$ und $(2 : 0)$ vertauscht.

Aufgabe 3.11 Die Involution $z \mapsto z'$ auf der projektiven Geraden sei definiert durch

$$z \cdot z' + 1 = 0.$$

Zeigen Sie, dass alle Projektivitäten, die mit dieser Involution kommutieren, von der Form

$$zz' + b(z + z') - 1 = 0 \quad \text{oder} \quad zz' + b(z - z') + 1 = 0$$

sind.

Aufgabe 3.12 Gegeben seien die Projektivitäten $P_1, P_2 : \mathbb{P}_1(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{K})$. Zeigen Sie, dass es Involutionen $I, I_1, I_2 : \mathbb{P}_1(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ gibt mit

$$P_1 = I_1 \circ I, \quad P_2 = I \circ I_2.$$

Aufgabe 3.13 $P : \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, $P \neq id$, sei eine Projektivität mit zwei verschiedenen Fixpunkten \mathbf{a}, \mathbf{b} . Zeigen Sie: Es gibt genau zwei Projektivitäten S_1, S_2 mit $S_i^2 = P$. Und $S_1 \circ S_2^{-1}$ ist eine Involution mit den Fixpunkten \mathbf{a} und \mathbf{b} .

3.4 Das Doppelverhältnis

In Dimension 1 sagt der soeben bewiesene Satz: Es seien $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ und $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ zwei Tripel paarweise verschiedener Punkte. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Projektivität $P : \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1$ mit $P(\mathbf{x}_\nu) = \mathbf{y}_\nu$ für $\nu = 0, 1, 2$. Zwei Tripel paarweise verschiedener Punkte auf der projektiven Geraden sind also immer *projektiv äquivalent*. Wir wollen jetzt untersuchen,

wann zwei *Quadrupel* $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ und $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3 \in \mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ projektiv äquivalent sind. Der Schlüssel dazu ist das Doppelverhältnis $DV(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \mathbf{u}, \mathbf{v})$ von vier Punkten $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{P}_1(K)$.

In 0.1 haben wir das Doppelverhältnis kennen gelernt. Wir haben es als Quotient von Teilverhältnissen definiert und mit Hilfe von 2×2 -Matrizen geschrieben. Für vier Punkte

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{P}_1(\mathbb{K})$$

ist es in Determinantenform

$$DV(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\det \begin{pmatrix} x_0 & u_0 \\ x_1 & u_1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} x_0 & v_0 \\ x_1 & v_1 \end{pmatrix}} : \frac{\det \begin{pmatrix} y_0 & u_0 \\ y_1 & u_1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} y_0 & v_0 \\ y_1 & v_1 \end{pmatrix}}.$$

In dieser Form ist das Doppelverhältnis nicht nur für Punkte im affinen Teil $\mathbb{K} \subset \mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ definiert, sondern auch, wenn einer der vier Punkte $= \infty = (0 : 1)$ ist. So wird z.B. für $\mathbf{x} = \infty$

$$\det(\infty, \mathbf{u}) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & u \end{pmatrix} = -1, \quad \det(\infty, \mathbf{v}) = -1,$$

$$DV(\infty, \mathbf{y}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{-1}{-1} \cdot \frac{y - u}{y - v} = \frac{y - u}{y - v}.$$

Aus dem Determinanten-Multiplikationssatz folgt die Invarianz des Doppelverhältnisses von vier Punkten auf einer projektiven Geraden unter projektiven Transformationen.

Satz 3.6 (Doppelverhältnis und Projektivitäten) *Zwei Quadrupel $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ und $\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{u}', \mathbf{v}' \in \mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ von paarweise verschiedenen Punkten der projektiven Geraden sind genau dann unter der Gruppe $\mathbf{PGL}(1, \mathbb{K})$ äquivalent, wenn*

$$DV(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = DV(\mathbf{x}', \mathbf{y}'; \mathbf{u}', \mathbf{v}').$$

Beweis. Wir brauchen nur noch zu zeigen, dass die beiden Quadrupel projektiv äquivalent sind, wenn ihre Doppelverhältnisse übereinstimmen. Nach dem Prinzip der projektiven Ausdehnung existiert eine Projektivität $F : \mathbb{P}_1(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ mit

$$F(\mathbf{y}) = \mathbf{y}', \quad F(\mathbf{u}) = \mathbf{u}', \quad F(\mathbf{v}) = \mathbf{v}'.$$

Der Bildpunkt von \mathbf{x} unter dieser Projektivität sei $F(\mathbf{x}) = \mathbf{x}''$. Wir müssen $\mathbf{x}' = \mathbf{x}''$ zeigen. Wegen der Invarianz des Doppelverhältnisses unter der Projektivität F und wegen der vorausgesetzten Gleichheit des gestrichenen und des ungestrichenen Doppelverhältnisses ist

$$DV(\mathbf{x}', \mathbf{y}'; \mathbf{u}', \mathbf{v}') = DV(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = DV(\mathbf{x}'', \mathbf{y}'; \mathbf{u}', \mathbf{v}').$$

Wählen wir die Koordinaten so, dass keiner der beteiligten Punkte der Punkt ∞ ist (wegen der schon bewiesenen Invarianz des Doppelverhältnissen dürfen wir das tun), so finden wir für die Teilverhältnisse

$$\begin{aligned}\frac{TV(\mathbf{x}'; \mathbf{u}', \mathbf{v}')}{TV(\mathbf{y}'; \mathbf{u}', \mathbf{v}')} &= \frac{TV(\mathbf{x}''; \mathbf{u}', \mathbf{v}')}{TV(\mathbf{y}'; \mathbf{u}', \mathbf{v}')} \\ TV(\mathbf{x}'; \mathbf{u}', \mathbf{v}') &= TV(\mathbf{x}''; \mathbf{u}', \mathbf{v}')\end{aligned}$$

und $\mathbf{x}' = \mathbf{x}''$, weil ein Punkt durch sein Teilverhältnis eindeutig festgelegt ist. \square

Schließlich wollen wir uns von der Einschränkung befreien, dass alle vier Punkte voneinander verschieden sein sollen. Wenn zwei (*aber nicht mehr*) zusammenfallen, kann folgendes passieren:

- a) $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ oder $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Dann ist $DV(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 1$.
- b) $\mathbf{x} = \mathbf{u}$ oder $\mathbf{y} = \mathbf{v}$. Dann ist eine Determinante im Zähler = 0 und $DV(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$.
- c) $\mathbf{x} = \mathbf{v}$ oder $\mathbf{y} = \mathbf{u}$. Dann ist eine Determinante im Nenner = 0. Das ist kein allzu großes Unglück. Wir setzen in diesem Fall $DV(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \infty$. Jetzt ist unser Doppelverhältnis allerdings keine Zahl $\in \mathbb{K}$ mehr, sondern ein Punkt in $\mathbb{P}_1(\mathbb{K})$.

Mit diesen Vereinbarungen ist das Doppelverhältnis auch für vier Punkte auf einer Geraden $L \in \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ in einem projektiven Raum definiert: Es gibt ja eine bijektive Abbildung $\mathbb{P}_1(\mathbb{K}) \rightarrow L$. Wir nehmen einfach das Doppelverhältnis der vier Urbilder unter dieser Abbildung. Je zwei solche Abbildungen unterscheiden sich um eine Projektivität von $\mathbb{P}_1(\mathbb{K})$. Deswegen hängt das Doppelverhältnis nicht von der Wahl der Abbildung $\mathbb{P}_1(\mathbb{K}) \rightarrow L$ ab.

Das Doppelverhältnis $DV(\mathbf{v}, \mathbf{w}; \mathbf{x}, \mathbf{y})$ hängt, ähnlich wie das Teilverhältnis in 0.1, von der Reihenfolge der vier beteiligten Punkte ab. Wir wollen uns jetzt überlegen, wie es davon abhängt. Dazu wenden wir Permutationen $\sigma \in \Sigma_4$ auf die vier beteiligten Punkte an. Am einfachsten geht das, wenn wir die Punkte umbenennen

$$\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3,$$

durch vier Indizes unterscheiden, und die Permutationen $\sigma \in \Sigma_4$ auf die vier Indizes 0, 1, 2, 3 anwenden:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_i &\mapsto \mathbf{x}_{\sigma(i)} \\ DV(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1; \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) &= \frac{x_0 - x_2}{x_0 - x_3} : \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3} \\ &\mapsto \frac{x_{\sigma(0)} - x_{\sigma(2)}}{x_{\sigma(0)} - x_{\sigma(3)}} : \frac{x_{\sigma(1)} - x_{\sigma(2)}}{x_{\sigma(1)} - x_{\sigma(3)}}\end{aligned}$$

Man sieht, dass die folgenden vier Permutationen das Doppelverhältnis nicht ändern:

$$id, (01)(23), (02)(13), (03)(12).$$

Diese vier Permutationen bilden die Kleinsche Vierer-Gruppe V_4 , einen Normalteiler in der Σ_4 mit Restklassengruppe $\Sigma_4/V_4 \simeq \Sigma_3$. Die Restklassenabbildung $\Sigma_4 \rightarrow \Sigma_3$ haben wir am Ende des Abschnitts 3.3 geometrisch beschrieben.

Wegen des Satzes über das Doppelverhältnis und Projektivitäten hat diese Invarianz des Doppelverhältnisses unter der Kleinschen Vierer-Gruppe folgende bemerkenswerte Konsequenz: *Es seien $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_3 \in \mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ vier verschiedene Punkte. Weiter sei σ eine Permutation, die diese vier Punkte paarweise vertauscht. Dann gibt es eine (eindeutig bestimmte) Projektivität $P : \mathbb{P}_1(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ mit $P(\mathbf{x}_i) = \mathbf{x}_{\sigma(i)}$ für $i = 0, \dots, 3$.*

Zu jeder Permutation $\tau \in \Sigma_4$ gibt es ein $\sigma \in V_4$ mit $\tau(0) = \sigma(0)$. Dann hat die Permutation $\tau' := \tau \circ \sigma = \tau \circ \sigma^{-1}$ die Eigenschaften:

1. $\tau'(0) = 0$,
2. τ' ändert das Doppelverhältnis genauso wie τ .

Wir brauchen also nur Permutationen $\tau' \in \Sigma_4$ zu untersuchen, welche die Zahl 0 fest lassen. Diese Permutationen bilden eine Gruppe Σ_3 der Ordnung sechs mit den Elementen

$$id, (12), (23), (31), (123), (132).$$

Bevor wir uns ansehen, was die fünf nicht-trivalen Permutationen hieraus mit dem Doppelverhältnis von vier Punkten $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_3$ machen, vereinfachen wir uns das Leben etwas, indem wir die homogenen Koordinaten auf \mathbb{P}_1 so wählen, dass

$$\mathbf{x}_1 = 1, \quad \mathbf{x}_2 = 0, \quad \mathbf{x}_3 = \infty.$$

Setzen wir $\lambda := \mathbf{x}_0$, dann wird

$$DV(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1; \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = \frac{\lambda}{\lambda - \infty} : \frac{1}{1 - \infty} = \lambda.$$

Jetzt wenden wir der Reihe nach unsere Permutationen an:

Permutation	permutierte Punkte	geändertes Doppelverhältnis
(12)	$\lambda, 0, 1, \infty$	$\frac{\lambda - 1}{\lambda - \infty} : \frac{-1}{-\infty} = 1 - \lambda$
(23)	$\lambda, 1, \infty, 0$	$\frac{\lambda - \infty}{\lambda} : \frac{1 - \infty}{1} = 1/\lambda$
(31)	$\lambda, \infty, 0, 1$	$\frac{\lambda}{\lambda - 1} : \frac{\infty}{\infty - 1} = \lambda/(\lambda - 1)$
(123)	$\lambda, 0, \infty, 1$	$\frac{\lambda - \infty}{\lambda - 1} : \frac{\infty}{-1} = 1/(1 - \lambda)$
(132)	$\lambda, \infty, 1, 0$	$\frac{\lambda - 1}{\lambda} : \frac{\infty - 1}{\infty} = (\lambda - 1)/\lambda$

Dies sind genau die sechs Werte, wie beim Teilverhältnis in 0.1!

Die sechs erhaltenen Werte sind übrigens nicht immer voneinander verschieden. Es kann vorkommen, dass einige übereinstimmen. Das geschieht bei Quadrupeln von Punkten, die außer der Kleinschen Vierergruppe noch mehr Projektivitäten zulassen. Das ist interessant, und wir wollen es uns genau ansehen. Wir stellen eine Liste der Möglichkeiten dafür auf, dass λ mit einem der angegebenen fünf Werte übereinstimmt:

zusätzliche Permutation	Bedingung	Doppelverhältnis
(12)	$\lambda = 1 - \lambda$	$\lambda = \frac{1}{2}$
(23)	$\lambda = 1/\lambda, \lambda^2 = 1$	$\lambda = \pm 1$
(31)	$\lambda = \lambda/(\lambda - 1)$	$\lambda = 0$ oder 2
(123)	$\lambda = 1/(1 - \lambda), \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$	$\lambda = e^{2\pi i/6}$ oder $e^{-2\pi i/6}$
(132)	$\lambda = (\lambda - 1)/\lambda, \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$	$\lambda = e^{2\pi i/6}$ oder $e^{-2\pi i/6}$

Die beiden letzten Fälle können wir so nur behandeln, wenn unser Grundkörper $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist. Die quadratische Gleichung hat die beiden primitiven sechsten Einheitswurzeln

$$\omega := e^{2\pi i/6} \text{ und } \omega^{-1} = e^{-2\pi i/6}$$

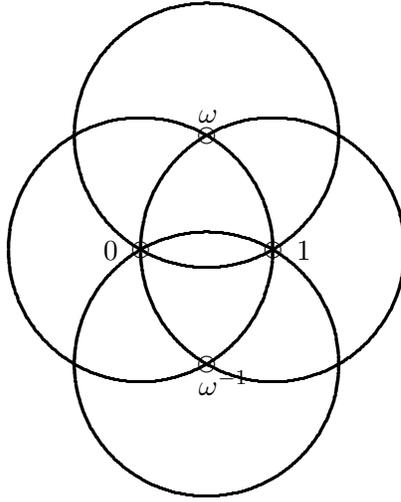
als Lösungen. Ob es Lösungen der quadratischen Gleichung gibt, hängt vom Körper \mathbb{K} ab. In $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gibt es z.B. keine.

Wir fassen jetzt noch die Doppelverhältnisse aus der erhaltenen Tabelle zusammen, die sich nur um Permutationen der vier Punkte unterscheiden:

Doppelverhältnisse	Quadrupel
$-1, \frac{1}{2}, 2$	harmonisch
$0, 1, \infty$	entartet
ω, ω^2	äqui-anharmonisch

Es gibt also drei wesentlich voneinander verschiedene Fälle. Davon interessiert uns der Entartungsfall, wo zwei Punkte zusammenfallen am wenigsten, wir haben ihn ja oben schon abgehandelt.

Der *äqui-anharmonische* Fall liegt vor, wenn man im Quadrupel $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_3$ drei Punkte durch eine Projektivität zyklisch vertauschen kann. Dann kann man *je drei* Punkte zyklisch vertauschen. Die Untergruppe von $\mathbf{PGL}(1, \mathbb{C})$, welche eine solche Konfiguration von Punkten permutiert, ist die Untergruppe $A_4 \subset \Sigma_4$ der Ordnung zwölf. Die Punkte $0, 1, \omega, \infty \in \mathbb{C}$ z.B. liegen äqui-anharmonisch:



Der wichtigste Fall ist allerdings der eines *harmonischen* Quadrupels $DV(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = -1, \frac{1}{2}$ oder 2. Wir sagen, die Punktepaare \mathbf{x}, \mathbf{y} und \mathbf{u}, \mathbf{v} *trennen sich harmonisch*, wenn

$$DV(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{TV(\mathbf{x}; \mathbf{u}, \mathbf{v})}{TV(\mathbf{y}; \mathbf{u}, \mathbf{v})} = -1.$$

In diesem Fall trennt \mathbf{x} die Strecke $\overline{\mathbf{u}\mathbf{v}}$ im (bis auf das Vorzeichen) gleichen Verhältnis, wie \mathbf{y} . Nur, der eine Punkt liegt im Innern der Strecke, der andere im Äußeren. Wenn wir \mathbf{x} mit \mathbf{y} vertauschen, ändert sich das Doppelverhältnis nicht. Und umgekehrt: Ändert sich beim Vertauschen von \mathbf{x} und \mathbf{y} das Doppelverhältnis nicht, so gilt

$$\begin{aligned} \frac{TV(\mathbf{x}; \mathbf{u}, \mathbf{v})}{TV(\mathbf{y}; \mathbf{u}, \mathbf{v})} &= \frac{TV(\mathbf{y}; \mathbf{u}, \mathbf{v})}{TV(\mathbf{x}; \mathbf{u}, \mathbf{v})}, \\ \frac{TV(\mathbf{x}; \mathbf{u}, \mathbf{v})^2}{TV(\mathbf{y}; \mathbf{u}, \mathbf{v})^2} &= 1, \\ DV(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \pm 1. \end{aligned}$$

Wenn alle vier Punkte verschieden sind, kann das Doppelverhältnis nicht = 1 sein, so dass es also = -1 ist. Hieraus folgt der

Satz 3.7 (Harmonie-Kriterium) *Es seien $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ vier verschiedene Punkte. Das Paar \mathbf{x}, \mathbf{y} trennt das Paar \mathbf{u}, \mathbf{v} harmonisch, genau dann, wenn es eine Projektivität $P : \mathbb{P}_1(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ gibt, die \mathbf{u} und \mathbf{v} fest lässt, und \mathbf{x}, \mathbf{y} vertauscht.*

Beweis. Die Punktepaare trennen sich harmonisch, genau dann wenn Vertauschen von \mathbf{x} und \mathbf{y} das Doppelverhältnis nicht ändert. Wegen des Satzes über das Doppelverhältnis ist dies aber genau dann der Fall, wenn es eine Projektivität gibt, die dieses Vertauschen bewirkt, und \mathbf{u}, \mathbf{v} fest lässt. \square

Eine Anwendung ist der

Satz 3.8 (Doppelverhältnis am vollständigen Viereck) *Auf jeder Seite eines vollständigen Vierecks trennen sich*

- die beiden Ecken des Vierecks sowie
- der Diagonalpunkt auf dieser Seite, und der Schnittpunkt der Seite mit der gegenüberliegenden Diagonale

harmonisch.

Beweis. Die Ecken des vollständigen Vierecks seien $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ und seine Diagonalpunkte

$$\mathbf{x} := \mathbf{ab} \cap \mathbf{cd}, \mathbf{y} := \mathbf{bc} \cap \mathbf{da}, \mathbf{z} := \mathbf{ac} \cap \mathbf{bd}.$$

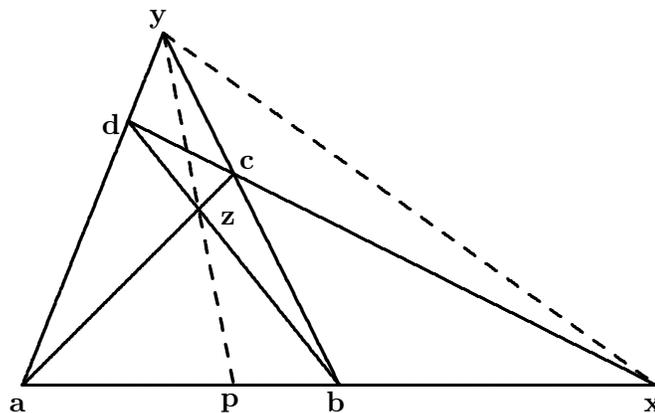
Der Schnittpunkt von \mathbf{ab} und \mathbf{yz} sei \mathbf{p} . Die Behauptung ist, daß sich die Punktepaare \mathbf{a}, \mathbf{b} und \mathbf{p}, \mathbf{x} harmonisch trennen. Dazu betrachten wir die beiden Perspektivitäten mit Zentrum \mathbf{y} und mit Zentrum \mathbf{z} . Beide definieren projektive Abbildungen $\phi : \mathbf{ab} \rightarrow \mathbf{cd}$ (Zentrum \mathbf{y}) und $\psi : \mathbf{ab} \rightarrow \mathbf{cd}$ (Zentrum \mathbf{z}) der Seiten des Vierecks. Wir verfolgen die Punkte $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{p}, \mathbf{x}$ unter der Projektivität $\psi^{-1} \circ \phi$:

$$\phi : \begin{cases} \mathbf{a} \mapsto \mathbf{d} \\ \mathbf{b} \mapsto \mathbf{c} \\ \mathbf{p} \mapsto \mathbf{q} := \mathbf{cd} \cap \mathbf{yz} \\ \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} \end{cases} \quad \psi^{-1} : \begin{cases} \mathbf{d} \mapsto \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \mapsto \mathbf{a} \\ \mathbf{q} \mapsto \mathbf{p} \\ \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} \end{cases}$$

Wir sehen: Die Projektivität $\psi^{-1} \circ \phi$ läßt \mathbf{x} und \mathbf{p} fest, und vertauscht \mathbf{a} mit \mathbf{b} . Es folgt

$$DV(\mathbf{a}, \mathbf{b}; \mathbf{p}, \mathbf{x}) = -1.$$

□



Aus diesem Satz erhält man folgende *Konstruktion des vierten harmonischen Punktes*: Es sei eine Strecke \mathbf{ab} gegeben, und darauf ein Punkt \mathbf{p} . Gesucht ist der Punkt \mathbf{x} , der zusammen mit \mathbf{p} die Strecke \mathbf{ab} harmonisch teilt.

Lösung: Wir wählen einen beliebigen Punkt \mathbf{y} in der Ebene, der nicht auf der Geraden \mathbf{ab} liegt, und verbinden \mathbf{a}, \mathbf{b} und \mathbf{p} mit \mathbf{y} . Weiter legen wir eine Gerade durch \mathbf{a} , nicht die Gerade \mathbf{ab} oder \mathbf{ay} . Es sei \mathbf{c} der Schnittpunkt dieser Geraden mit \mathbf{by} und \mathbf{z} der Schnittpunkt mit \mathbf{py} . \mathbf{d} sei der Schnittpunkt $\mathbf{ay} \cap \mathbf{bz}$. Dann ist $\mathbf{x} = \mathbf{ab} \cap \mathbf{cd}$.

In der Tat: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ sind die Ecken eines vollständigen Vierecks mit den Diagonalmittelpunkten $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$. Nach dem Satz trennt das Paar \mathbf{p}, \mathbf{x} die beiden Punkte \mathbf{a}, \mathbf{b} harmonisch.

Aufgabe 3.14 Zeigen Sie für sechs Punkte $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_6 \in \mathbb{P}_1(\mathbb{K})$:

a) $DV(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) \cdot DV(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5) = DV(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_5)$.

b) $DV(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) = DV(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_6) \Rightarrow DV(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_5) = DV(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_6)$.

Aufgabe 3.15 Es seien $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_4$ vier verschiedene Punkte der affinen Geraden \mathbb{K} mit den Koordinaten x_1, \dots, x_4 . Zeigen Sie:

a) $DV(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) = -1 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = 2(x_1x_2 + x_3x_4)$.

b) Es seien x_1, x_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung $ax^2 + 2bx + c = 0$ und x_3, x_4 die Wurzeln der Gleichung $a'x^2 + 2b'x + c' = 0$. Dann gilt

$$DV(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) = -1 \Leftrightarrow 2bb' - ac' - a'c = 0.$$

Aufgabe 3.16 Es seien $P_1, P_2 : \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ Projektivitäten mit $P_1, P_2 \neq id$. Zeigen Sie: Es ist $P_1P_2 = P_2P_1$ genau dann, wenn gilt

entweder: P_1 und P_2 haben dieselben Fixpunkte,

oder: P_1 und P_2 sind Involutionen, deren Paare von Fixpunkten sich harmonisch trennen.

Aufgabe 3.17 Es sei \mathbf{abc} ein Dreieck in $\mathbb{P}_2(\mathbb{K})$ und \mathbf{p} ein Punkt, der auf keiner Dreiecks-Seite liegt. Weiter seien

$$\mathbf{a}' := \mathbf{ap} \cap \mathbf{bc}, \quad \mathbf{b}' := \mathbf{bp} \cap \mathbf{ca}, \quad \mathbf{c}' := \mathbf{cp} \cap \mathbf{ab}.$$

Der Punkt $\mathbf{a}'' \in \mathbf{bc}$ (bzw. $\mathbf{b}'' \in \mathbf{ca}$, $\mathbf{c}'' \in \mathbf{ab}$) sei harmonisch konjugiert zu \mathbf{a}' (bzw. \mathbf{b}' , \mathbf{c}') bezüglich \mathbf{b} und \mathbf{c} (bzw. \mathbf{c} und \mathbf{a} , \mathbf{a} und \mathbf{b}).

a) Zeigen Sie: $\mathbf{a}'', \mathbf{b}'', \mathbf{c}''$ liegen auf einer Geraden (der sogenannten harmonischen Polare des Punktes \mathbf{p} in Bezug auf das Dreieck \mathbf{abc}).

b) Berechnen Sie die harmonische Polare des Punktes $\mathbf{p} = (a : b : c)$ in Bezug auf das Koordinatendreieck mit den Ecken $\mathbf{a} = (1 : 0 : 0)$, $\mathbf{b} = (0 : 1 : 0)$, $\mathbf{c} = (0 : 0 : 1)$.

Aufgabe 3.18 Die Gerade \mathbf{uv} treffe die Seiten des Dreiecks \mathbf{abc} in den Punkten $\mathbf{a}' \in \mathbf{bc}$, $\mathbf{b}' \in \mathbf{ca}$, $\mathbf{c}' \in \mathbf{ab}$. Die Punkte $\mathbf{a}'', \mathbf{b}'', \mathbf{c}''$ seien harmonisch konjugiert zu $\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}'$ bezüglich \mathbf{u} und \mathbf{v} . Zeigen Sie, dass sich die Geraden $\mathbf{aa}'', \mathbf{bb}''$ und \mathbf{cc}'' in einem Punkt treffen.

Aufgabe 3.19 Es seien $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_4$ vier verschiedene Punkte auf der projektiven Geraden mit $DV(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) = \lambda$. Zeigen Sie:

a) $\sigma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) := \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2 \cdot (\lambda - 1)^2}$ ändert sich nicht bei Permutationen der vier Punkte \mathbf{x}_i .

b) Es gibt genau dann eine Projektivität P mit

$$P(\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4\}) = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_4\},$$

wenn $\sigma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) = \sigma(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_4)$.

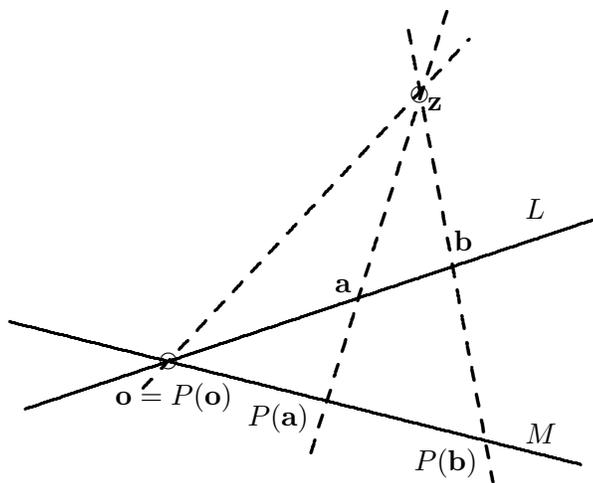
3.5 Lineare Geometrie der projektiven Ebene

Zunächst wollen wir Projektivitäten $P : L \rightarrow M$ zwischen zwei Geraden $L, M \subset \mathbb{IP}_2(\mathbb{K})$ betrachten. Wenn nichts anderes gesagt wird, setzen wir $L \neq M$ voraus. Dann nennen wir den Schnittpunkt $L \cap M = \mathbf{o}$.

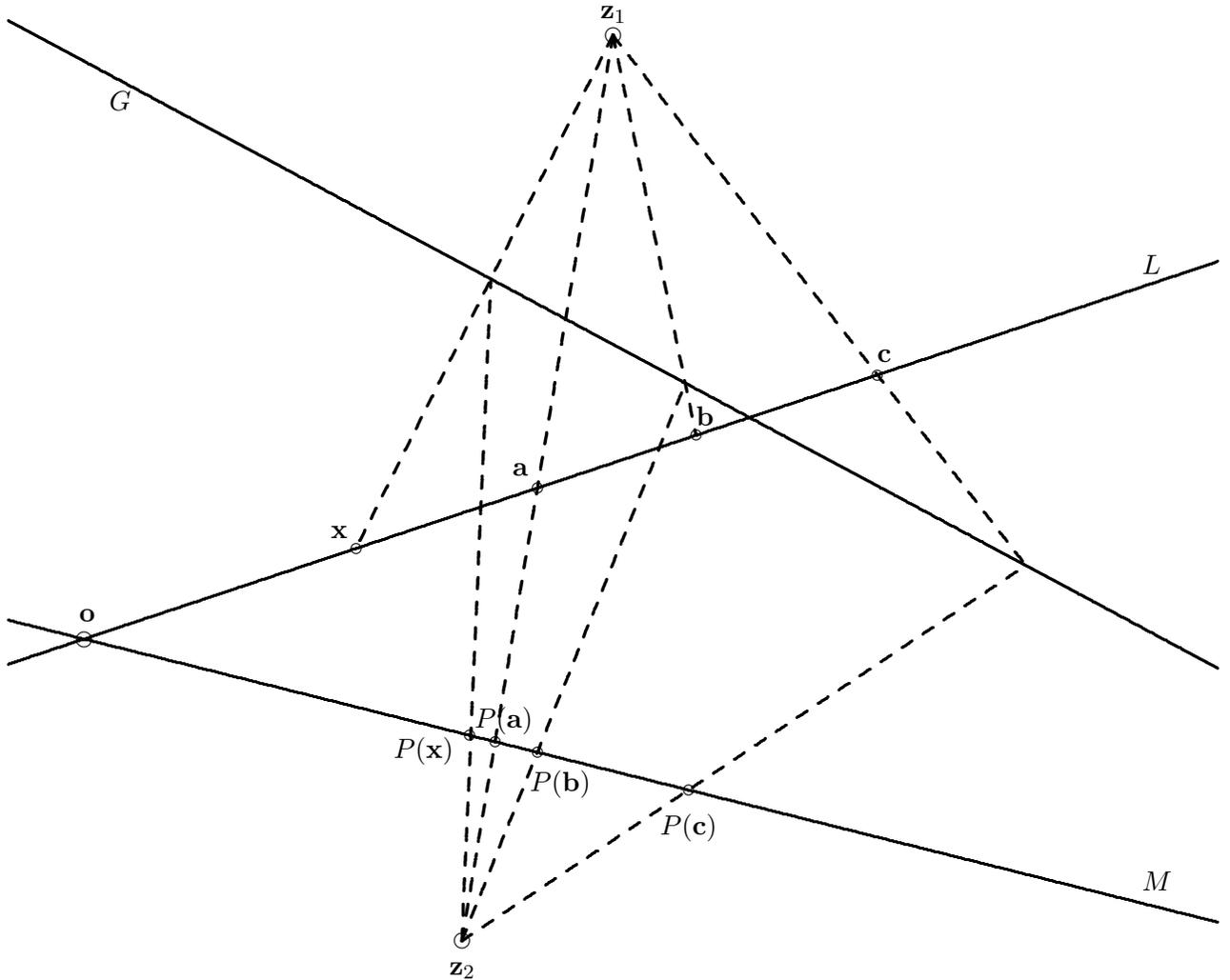
Satz 3.9 (Projektivitäten und Perspektivitäten) a) Eine Projektivität $P : L \rightarrow M$ ist eine Perspektivität genau dann, wenn $P(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$.

b) Jede Projektivität $P : L \rightarrow M$ ist ein Produkt von höchstens zwei (falls $L \neq M$) oder drei (falls $L = M$) Perspektivitäten.

Beweis. a) Sei $P(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$. Wir wählen zwei Punkte $\mathbf{o} \neq \mathbf{a} \neq \mathbf{b} \neq \mathbf{o}$ auf der Geraden L . Dann sind ihre Bilder $P(\mathbf{a}), P(\mathbf{b}) \in M$ voneinander und von \mathbf{o} verschieden. Als Projektionszentrum wählen wir den Schnittpunkt \mathbf{z} der Geraden $\mathbf{a}P(\mathbf{a})$ und $\mathbf{b}P(\mathbf{b})$. Die Perspektivität mit Zentrum \mathbf{z} bildet, ebenso wie die Projektivität P , die drei Punkte $\mathbf{o}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ auf $\mathbf{o}, P(\mathbf{a}), P(\mathbf{b})$ ab. Aus der Eindeutigkeit im Prinzip der projektiven Ausdehnung folgt, dass P die Perspektivität mit Zentrum \mathbf{z} ist.



b) Auf L wählen wir drei Punkte $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, die untereinander und von \mathbf{o} , sowie $P^{-1}(\mathbf{o})$ verschieden seien. Dann sind ihre Bildpunkte $P(\mathbf{a}), P(\mathbf{b}), P(\mathbf{c}) \in M$ voneinander und von \mathbf{o} verschieden. Auf der Verbindungsgeraden von \mathbf{a} und $P(\mathbf{a})$ wählen wir zwei beliebige Punkte $\mathbf{z}_1 \neq \mathbf{z}_2$, die von \mathbf{a} und $P(\mathbf{a})$ verschieden sein sollen. Weil die Punkte $\mathbf{b}, \mathbf{c}, P(\mathbf{b})$ und $P(\mathbf{c})$ nicht auf der Verbindungsgeraden von \mathbf{a} und $P(\mathbf{a})$ liegen, sind die Geraden $\mathbf{z}_1\mathbf{b}$ und $\mathbf{z}_2P(\mathbf{b})$, sowie $\mathbf{z}_1\mathbf{c}$ und $\mathbf{z}_2P(\mathbf{c})$ verschieden, und schneiden sich jeweils in einem Punkt. Die Gerade durch diese beiden Schnittpunkte nennen wir G . Sei $P_1 : L \rightarrow G$ durch die Perspektivität mit Zentrum \mathbf{z}_1 gegeben und $P_2 : G \rightarrow M$ durch die Perspektivität mit Zentrum \mathbf{z}_2 . Wir verfolgen die Punkte \mathbf{a}, \mathbf{b} und \mathbf{c} unter $P_2 \circ P_1$:



$$P_1 : \begin{cases} \mathbf{a} \mapsto G \cap \mathbf{a}P(\mathbf{a}) \\ \mathbf{b} \mapsto G \cap \mathbf{z}_1\mathbf{b} = G \cap \mathbf{z}_2P(\mathbf{b}) \\ \mathbf{c} \mapsto G \cap \mathbf{z}_1\mathbf{c} = G \cap \mathbf{z}_2P(\mathbf{c}) \end{cases} \quad P_2 : \begin{cases} G \cap \mathbf{a}P(\mathbf{a}) \mapsto P(\mathbf{a}) \\ G \cap \mathbf{z}_2P(\mathbf{b}) \mapsto P(\mathbf{b}) \\ G \cap \mathbf{z}_2P(\mathbf{c}) \mapsto P(\mathbf{c}) \end{cases}$$

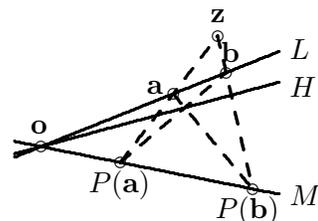
Wir sehen: Die Projektivität $P_2 \circ P_1$ bildet die drei Punkte $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ genauso ab, wie P . Wieder muss nach dem Prinzip der projektiven Ausdehnung die Projektivität P mit $P_2 \circ P_1$ übereinstimmen.

Falls $L = M$ gewesen sein sollte, bilden wir zuerst L auf eine Gerade $L' \neq L$ durch eine Perspektivität ab, und dann $L' \rightarrow M$ durch ein Produkt von zwei Perspektivitäten. \square

Satz 3.10 (Achsensatz) *Es seien $L \neq M \subset \mathbb{P}_2$ zwei Geraden und $P : L \rightarrow M$ eine Projektivität. Dann gibt es eine Gerade $H \subset \mathbb{P}_2$ (die Achse), auf der, für alle Punkte $\mathbf{a} \neq \mathbf{b} \in L$, die Schnittpunkte der Geraden $\mathbf{a}P(\mathbf{b})$ und $\mathbf{b}P(\mathbf{a})$ liegen.*

Beweis. Sei $\mathbf{o} = L \cap M$ der Schnittpunkt der beiden Geraden.

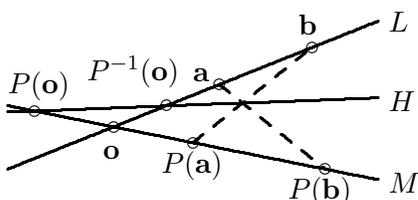
Fall 1: Sei $P(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$, also P eine Perspektivität mit einem Zentrum $\mathbf{z} \in \mathbb{P}_2$. Die Geraden $\mathbf{a}P(\mathbf{b})$ und $\mathbf{b}P(\mathbf{a})$ sind dann Diagonalen im Viereck $\mathbf{a}, \mathbf{b}, P(\mathbf{b}), P(\mathbf{a})$. Ihr Schnittpunkt ist also ein Diagonalschnittpunkt dieses Vierecks. Die Gerade H durch \mathbf{o} und diesen Schnittpunkt trifft deswegen die Seite $\mathbf{a}P(\mathbf{a})$ in einem Punkt, der zusammen mit \mathbf{z} die Ecken \mathbf{a} und $P(\mathbf{a})$ harmonisch trennt. Deswegen hängt dieser Punkt nicht von der Wahl von $\mathbf{b} \in M$ ab. Für alle $\mathbf{b} \in M$ liegen also die Schnittpunkte $\mathbf{a}P(\mathbf{b}) \cap \mathbf{b}P(\mathbf{a})$ auf der Geraden H .



Genauso sieht man, dass für jede Wahl des Punktes \mathbf{b} die Verbindungsgerade von \mathbf{o} mit $\mathbf{b}P(\mathbf{a}) \cap \mathbf{a}P(\mathbf{b})$ unabhängig von \mathbf{a} ist, und deswegen $= H$ ist. Daraus folgt die Behauptung in diesem Fall.

Fall 2: Sei $P(\mathbf{o}) \neq \mathbf{o}$. Dann ist natürlich auch $P^{-1}(\mathbf{o}) \neq \mathbf{o}$. Die Transformation P bildet die vier verschiedenen Punkte $P^{-1}(\mathbf{o}), \mathbf{o}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in L$ auf das Viertupel $\mathbf{o}, P(\mathbf{o}), P(\mathbf{a}), P(\mathbf{b})$ ab. Also gilt

$$DV(P^{-1}(\mathbf{o}), \mathbf{o}; \mathbf{a}, \mathbf{b}) = DV(\mathbf{o}, P(\mathbf{o}); P(\mathbf{a}), P(\mathbf{b})) = DV(P(\mathbf{o}), \mathbf{o}; P(\mathbf{b}), P(\mathbf{a})).$$



Es gibt daher eine projektive Abbildung $P' : L \rightarrow M$ mit $P'P^{-1}(\mathbf{o}) = P(\mathbf{o})$, $P'(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$, $P'(\mathbf{a}) = P(\mathbf{b})$, $P'(\mathbf{b}) = P(\mathbf{a})$. Wegen $P'(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$ ist diese eine Perspektivität mit einem Zentrum $\mathbf{z} \in \mathbb{P}_2$. Die drei Geraden $\mathbf{a}P(\mathbf{b})$, $\mathbf{b}P(\mathbf{a})$ und $P^{-1}(\mathbf{o})P(\mathbf{o})$ gehen durch dieses Zentrum. Anders ausgedrückt: der Schnittpunkt $\mathbf{a}P(\mathbf{b}) \cap \mathbf{b}P(\mathbf{a})$ liegt auf der Geraden $H := P^{-1}(\mathbf{o})P(\mathbf{o})$. Diese Gerade ist unabhängig von der Wahl der Punkte \mathbf{a} und $\mathbf{b} \in L$. Dies ist die Behauptung. \square

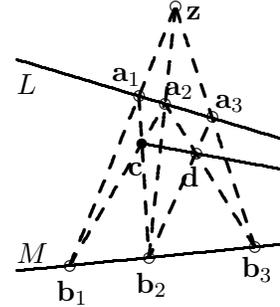
Satz 3.11 (Korollar 1: Satz von Pappos) *Es seien $L \neq M \subset \mathbb{P}_2$ zwei Geraden. Die drei Punkte $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in L$ und $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \in M$ seien voneinander und vom Schnittpunkt $L \cap M$ verschieden. Dann sind die drei Schnittpunkte $\mathbf{a}_i\mathbf{b}_j \cap \mathbf{a}_j\mathbf{b}_i, i \neq j = 1, 2, 3$ kollinear.*

Beweis. Nach dem Prinzip der projektiven Ausdehnung gibt es eine Projektivität $P : L \rightarrow M$ mit $P(\mathbf{a}_i) = \mathbf{b}_i$ für $i = 1, 2, 3$. Die Achse dieser Projektivität enthält alle Punkte $\mathbf{a}P(\mathbf{b}) \cap \mathbf{b}P(\mathbf{a}), \mathbf{a}, \mathbf{b} \in L$, und damit auch unsere drei Schnittpunkte. \square

Dieses Korollar ist genau der Satz von Pappos aus dem letzten Kapitel, nur, dass parallele Geraden jetzt keine Ausnahmefälle mehr sind, weil sie sich im Unendlichen schneiden.

Satz 3.12 (Korollar 2: Zwei Geraden schneiden sich außerhalb des Zeichenblattes) *Es seien zwei Geraden $L \neq M$ gezeichnet, deren Schnittpunkt außerhalb des Zeichenblattes liegt. Es sei die Verbindungslinie eines gegebenen Punktes \mathbf{c} mit diesem Schnittpunkt zu zeichnen.*

Lösung: Durch den Punkt c werden zwei Geraden gezeichnet, die L in zwei Punkten a_1 und a_2 , sowie M in zwei Punkten b_1 und b_2 schneiden. Dies soll so geschehen, dass sich die beiden Geraden a_1b_1 und a_2b_2 in einem Punkt z des Zeichenblattes schneiden. Durch z werde eine dritte Gerade gezeichnet, die L in a_3 und M in b_3 trifft. Die Perspektivität mit Zentrum z bildet dann $a_i \mapsto b_i, i = 1, 2, 3$ ab. Ihre Achse ist die Verbindungslinie von c mit dem Schnittpunkt $a_2b_3 \cap a_3b_2$. Da die Achse einer Perspektivität durch den Schnittpunkt $L \cap M$ geht, ist sie die Verbindungsgerade von c mit diesem Schnittpunkt. \square



Satz 3.13 (von Desargues) Die Dreiecke $a_1a_2a_3$ und $b_1b_2b_3$ seien perspektiv, d.h., es gebe eine Perspektivität mit Zentrum $z \neq a_1, \dots, b_3$, welche für $i = 1, 2, 3$ die Ecken a_i auf die Ecken b_i abbildet. Dann sind die Schnittpunkte

$$t_1 := a_2a_3 \cap b_2b_3, \quad t_2 := a_3a_1 \cap b_3b_1, \quad t_3 := a_1a_2 \cap b_1b_2$$

kollinear.

Beweis. Falls zwei der Ecken a_i und b_i zusammenfallen, wird die Aussage trivial: Sei etwa $a_1 = b_1$. Dann wird

$$t_2 = t_3 = a_1 = b_1$$

.

Deswegen können wir o.B.d.A. $a_i \neq b_i$ für $i = 1, 2, 3$ annehmen. Wir bezeichnen mit $\hat{o} \neq \hat{a}_1, \dots, \hat{b}_3, \hat{z} \in \mathbb{K}^3$ Vektoren, die zu den Punkten $a_1, \dots, b_3, z \in \mathbb{P}_2(\mathbb{K})$ gehören. Weil a_i, b_i und z kollinear sind, sind die Vektoren \hat{a}_i, \hat{b}_i und \hat{z} linear abhängig. Es gibt deswegen Zahlen $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{K}$ mit $\hat{z} = \lambda_i \hat{a}_i + \mu_i \hat{b}_i$ für $i = 1, 2, 3$. Aus

$$\hat{z} = \lambda_1 \hat{a}_1 + \mu_1 \hat{b}_1 = \lambda_2 \hat{a}_2 + \mu_2 \hat{b}_2 = \lambda_3 \hat{a}_3 + \mu_3 \hat{b}_3$$

folgen die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} \lambda_1 \hat{a}_1 - \lambda_2 \hat{a}_2 &= \mu_2 \hat{b}_2 - \mu_1 \hat{b}_1 =: \hat{t}_3 \\ \lambda_2 \hat{a}_2 - \lambda_3 \hat{a}_3 &= \mu_3 \hat{b}_3 - \mu_2 \hat{b}_2 =: \hat{t}_1 \\ \lambda_3 \hat{a}_3 - \lambda_1 \hat{a}_1 &= \mu_1 \hat{b}_1 - \mu_3 \hat{b}_3 =: \hat{t}_2. \end{aligned}$$

Weil \hat{a}_i und \hat{a}_j für $i \neq j$ linear unabhängig sind, sind die Vektoren $\hat{t}_1, \hat{t}_2, \hat{t}_3 \in \mathbb{K}^3$ nicht $\mathbf{0}$. Sie sind deshalb Vektoren zu den Schnittpunkten t_1, t_2, t_3 der Geraden $a_i b_j$ und $a_j b_i$. Nun sind die drei Vektoren $\hat{t}_1, \hat{t}_2, \hat{t}_3$ linear abhängig, denn

$$\hat{t}_1 + \hat{t}_2 + \hat{t}_3 = (\lambda_1 \hat{a}_1 - \lambda_2 \hat{a}_2) + (\lambda_2 \hat{a}_2 - \lambda_3 \hat{a}_3) + (\lambda_3 \hat{a}_3 - \lambda_1 \hat{a}_1) = \mathbf{0}.$$

Deswegen sind die drei Punkte t_1, t_2, t_3 kollinear. \square

Aufgabe 3.20 Es seien $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$, sowie $\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}', \mathbf{d}'$ vier kollineare Punkte. Zeigen Sie: Die Geraden \mathbf{bb}' , \mathbf{cc}' , \mathbf{dd}' treffen sich genau dann in einem Punkt, wenn

$$DV(\mathbf{a}, \mathbf{b}; \mathbf{c}, \mathbf{d}) = DV(\mathbf{a}, \mathbf{b}'; \mathbf{c}', \mathbf{d}').$$

Aufgabe 3.21 Gegeben sei ein Dreieck mit den Ecken

$$\mathbf{p} = (1 : p : p'), \quad \mathbf{q} = (q' : 1 : q), \quad \mathbf{r} = (r : r' : 1) \quad \text{wobei} \quad p \cdot p' \cdot q \cdot q' \cdot r \cdot r' \neq 0.$$

Zeigen Sie:

a) Dieses Dreieck liegt genau dann perspektiv zum Koordinatendreieck $\mathbf{a} = (1 : 0 : 0)$, $\mathbf{b} = (0 : 1 : 0)$, $\mathbf{c} = (0 : 0 : 1)$, wenn

$$pqr = p'q'r'.$$

b) Ist das Dreieck \mathbf{abc} perspektiv mit \mathbf{pqr} und \mathbf{qrp} , dann auch mit \mathbf{rpq} .

Aufgabe 3.22 Das Dreieck $\mathbf{a'b'c'}$ sei dem Dreieck \mathbf{abc} einbeschrieben (d.h., $\mathbf{a}' \in \mathbf{bc}$, $\mathbf{b}' \in \mathbf{ca}$, $\mathbf{c}' \in \mathbf{ab}$, aber keine Ecken fallen zusammen) und das Dreieck $\mathbf{a''b''c''}$ sei dem Dreieck \mathbf{abc} umbeschrieben (d.h., das Dreieck \mathbf{abc} sei dem Dreieck $\mathbf{a''b''c''}$ einbeschrieben). Zeigen Sie: Wenn $\mathbf{a'b'c'}$ und $\mathbf{a''b''c''}$ beide zum Dreieck \mathbf{abc} perspektiv sind, dann sind sie auch zueinander perspektiv.

Aufgabe 3.23 Gegeben seien zwei Dreiecke \mathbf{abc} und $\mathbf{a'b'c'}$ so, dass sich die Geraden \mathbf{aa}' und \mathbf{bc} , \mathbf{bb}' und \mathbf{ca} , sowie \mathbf{cc}' und \mathbf{ab} in drei kollinearen Punkten treffen. Zeigen Sie dass sich die drei Verbindungsgeraden von

$$\mathbf{a}' \text{ mit } \mathbf{bc} \cap \mathbf{b'c}', \quad \mathbf{b}' \text{ mit } \mathbf{ca} \cap \mathbf{c'a}', \quad \mathbf{c}' \text{ mit } \mathbf{ab} \cap \mathbf{a'b}'$$

in einem Punkt treffen.

Aufgabe 3.24 Drei Dreiecke seien zueinander paarweise perspektiv, mit demselben Perspektivitätszentrum. Zeigen Sie, dass sich dann die drei Perspektivitäts-Achsen (Desargues-Geraden) in einem Punkt treffen.

Aufgabe 3.25 Zeigen Sie, dass die beiden Dreiecke

$$\Delta_1 : (0 : 1 : 1), (1 : 0 : 1), (1 : 1 : 0), \quad \Delta_2 : (1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1)$$

perspektiv sind und bestimmen Sie für diese Dreiecke die Gerade von Desargues.

Aufgabe 3.26 Es seien a_0, \dots, c_2 reelle Zahlen $\neq 0$. Zeigen Sie: Die beiden Dreiecke

$$\Delta_1 : (a_0 : a_1 : a_2), (b_0 : b_1 : b_2), (c_0 : c_1 : c_2), \quad \Delta_2 : (1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1)$$

sind genau dann perspektiv, wenn

$$\frac{a_1 \cdot b_2 \cdot c_0}{a_2 \cdot b_0 \cdot c_1} = 1.$$

Bestimmen Sie in diesem Fall das Perspektivitätszentrum.

Aufgabe 3.27 Gegeben seien die beiden Dreiecke

$$\Delta_1 : (1 : 0 : 0), (1 : 3 : 4), (1 : 1 : 1), \quad \Delta_2 : (1 : 1 : 0), (1 : 0 : 4), (1 : 3 : 1).$$

a) Zeigen Sie: Die beiden Dreiecke sind perspektiv bezüglich $(0 : 1 : 0)$, aber auch in Bezug auf $(0 : 0 : 1)$.

b) Finden Sie einen dritten Punkt, in Bezug auf den beide Dreiecke perspektiv sind.

3.6 Das Dualitätsprinzip

Wir kommen jetzt zu einem ganz wichtigen Prinzip der projektiven Geometrie, dem *Dualitätsprinzip*. Ausgangspunkt ist folgende Bemerkung: Genauso, wie ein Punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{P}_2$ durch seine drei homogenen Koordinaten $(a_0 : a_1 : a_2)$ festgelegt ist, so ist auch eine Gerade

$$L : \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$$

durch drei Zahlen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ festgelegt. Und ändert man diese drei Zahlen um einen gemeinsamen Faktor $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$ ab, so ändert sich zwar die Geradengleichung (um ebendiesen Faktor), aber nicht die Gerade selbst. Man kann also auch die Gerade L durch ein Tripel $(\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2)$ homogener Koordinaten charakterisieren. Die Inzidenz eines Punktes \mathbf{a} mit der Geraden L kann man den homogenen Koordinaten von \mathbf{a} und L ansehen:

$$\mathbf{a} \in L \iff \alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = 0.$$

In dieser Inzidenz-Gleichung kann man die Rollen des Punktes \mathbf{a} und der Geraden L vertauschen:

Nimmt man die Koordinaten des Punktes \mathbf{a} , um eine Gerade

$$\mathbf{a}^* : a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0 \subset \mathbb{P}_2$$

zu definieren, und die Koordinaten von L , um einen Punkt

$$L^* := (\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2) \in \mathbb{P}_2$$

zu definieren, so gilt

$$\mathbf{a} \in L \iff \mathbf{a}^* \ni L^*.$$

Man nennt $\mathbf{a}^* \subset \mathbb{P}_2$ die *duale Gerade* zum Punkt \mathbf{a} und $L^* \in \mathbb{P}_2$ den dualen Punkt zur Geraden L . Diese Dualitätsbeziehung ist symmetrisch:

$$L = \mathbf{a}^* \iff L^* = \mathbf{a}.$$

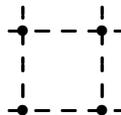
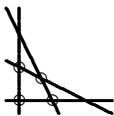
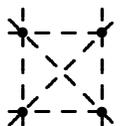
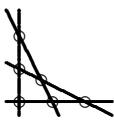
Weil man die Rollen von Punkt und Gerade bei der Inzidenz vertauschen kann, bleibt eine Inzidenz zwischen einem Punkt und einer Geraden beim Übergang zur dualen Geraden und dem dualen Punkt erhalten. Dies ist das

Dualitätsprinzip: *Gilt eine Aussage über Punkte und Geraden, die nur mit Hilfe von Inzidenzen formuliert ist (z.B. der Satz von Pappos, der Satz von Desargues), so gilt auch die duale Aussage, die man erhält, wenn man alle*

Punkte durch *die dualen Geraden*
Geraden durch *die dualen Punkte*
Inzidenzen durch *die Inzidenzen zwischen den dualen Objekten*

ersetzt.

Als Beispiele stellen wir eine kleine Liste der einfachsten Figuren in der projektiven Ebene und ihrer dualen Figuren zusammen:

Figur	Dual
 Punkt	 Gerade
 Punkt auf einer Geraden	 Gerade durch einen Punkt
 zwei Punkte auf einer Geraden	 zwei Geraden durch einen Punkt
 Dreieck	 Dreieck
 Viereck	 Viereck
 vollständiges Viereck	 vollständiges Viereck

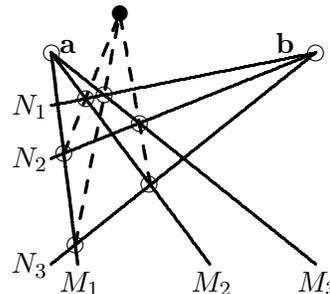
Als Beispiel einer nicht ganz trivialen Aussage dualisieren wir den Satz von Pappos:

Satz 3.14 (Dual zum Satz von Pappos)

Es seien \mathbf{a} und $\mathbf{b} \in \mathbb{P}_2$ zwei verschiedene Punkte. Durch jeden der Punkte seien drei Geraden $M_1, M_2, M_3 \ni \mathbf{a}$ und $N_1, N_2, N_3 \ni \mathbf{b}$ gewählt, die voneinander und von der Verbindungsgeraden \mathbf{ab} verschieden sein mögen. Dann treffen sich die drei Verbindungsgeraden der Punktepaare

$$M_i \cap N_j \text{ und } N_i \cap M_j, \quad i \neq j = 1, 2, 3$$

in einem Punkt.



Diesen Satz brauchen wir nicht zu beweisen. Er gilt, weil er durch das Dualitätsprinzip aus dem Satz von Pappos hervorgeht.

Durch das Dualitätsprinzip entsteht allerdings nicht immer etwas neues. So ist die duale Figur zu einem Dreieck $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3$ ein Dreieck mit den Seiten $\mathbf{a}_1^*\mathbf{a}_2^*\mathbf{a}_3^*$. Sind zwei Dreiecke $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3$ und $\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3$ perspektiv mit dem Zentrum \mathbf{z} (wie im Satz von Desargues), so liegen die Schnittpunkte $\mathbf{a}_i^* \cap \mathbf{b}_i^*$ korrespondierender Seiten der dualen Dreiecke auf der Geraden \mathbf{z}^* . Dual zu den Schnittpunkten $\mathbf{a}_i\mathbf{a}_j \cap \mathbf{b}_i\mathbf{b}_j$ korrespondierender Seiten sind die Verbindungsgeraden von Paaren $\mathbf{a}_i^* \cap \mathbf{a}_j^*$ und $\mathbf{b}_i^* \cap \mathbf{b}_j^*$ korrespondierender Eckpunkte. Und dual zur Aussage des Satzes von Desargues ist die Tatsache, dass diese drei Verbindungsgeraden durch einen Punkt gehen.

Die Figur zum dualen Satz von Desargues ist die gleiche wie die zum Satz von Desargues selbst, denn die duale Aussage ist nichts anderes, als die Umkehrung des Satzes von Desargues:

Satz 3.15 (Dual und Umkehrung des Satzes von Desargues) *Liegen die drei Schnittpunkte der drei Paare korrespondierender Seiten in zwei Dreiecken auf einer Geraden, so sind die Dreiecke perspektiv.*

In der Koordinaten-gebundenen Form, in der ich das Dualitätsprinzip bis jetzt erklärt habe, ist es nicht verträglich mit Koordinatentransformationen oder Projektivitäten. Aber man kann das Dualitätsprinzip auch koordinatenfrei formulieren. Dazu braucht man allerdings zwei *wesentlich verschiedene* Exemplare der projektiven Ebene:

Wir ersetzen den Vektorraum \mathbb{K}^3 durch einen koordinatenfreien drei-dimensionalen Vektorraum V über \mathbb{K} und unsere bisher definierte Ebene $\mathbb{P}_2(\mathbb{K})$ durch die projektive Ebene $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}_2(V)$ der Geraden in V . Diese neue Ebene sieht nicht viel anders aus als die alte projektive Ebene, wir haben bloß keine homogenen Koordinaten. Wenn wir welche wollen, müssen wir einen Isomorphismus $V \simeq \mathbb{K}^3$ auswählen.

Die projektive Ebene $\mathbb{P}_2^* := \mathbb{P}_2(V^*)$, die zum dualen Vektorraum V^* gehört, nennt man *die duale projektive Ebene*. Was sind die Punkte der dualen projektiven Ebene? Sie werden repräsentiert durch Geraden im dualen Vektorraum V^* . Was aber ist eine Gerade in V^* ? So eine Gerade wird aufgespannt durch ein Element $0 \neq l \in V^*$, d.h. durch eine Linearform $0 \neq l : V \rightarrow \mathbb{K}$. Diese Linearform verschwindet auf der Ebene $\{\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{K}^3 : l(\hat{\mathbf{x}}) = 0\}$ und definiert eine Gerade $L := \{\mathbf{x} \in \mathbb{P}_2 : l(\hat{\mathbf{x}}) = 0\}$ in der projektiven Ebene \mathbb{P}_2 . Ersetzt man die Linearform l durch ein Vielfaches $\lambda \cdot l, \lambda \neq 0$, so ändert dies weder die Ebene in V , noch die Gerade $L \subset \mathbb{P}_2$. Jeder

Punkt $\{\lambda \cdot l\} \in \mathbb{P}_2^*$ definiert auf diese Weise eine Gerade $L \subset \mathbb{P}_2$. Die Linearform ist durch die Ebene in V eindeutig bestimmt, bis auf konstante Faktoren. Damit haben wir eine Bijektion

$$\text{Geraden } L = \{l(\mathbf{x}) = 0\} \subset \mathbb{P}_2 \quad \leftrightarrow \quad \text{Punkte } L^* = \mathbb{K} \cdot l \in \mathbb{P}_2^*.$$

Die Geraden L der projektiven Ebene \mathbb{P}_2 sind genau die Punkte L^* der dualen projektiven Ebene \mathbb{P}_2^* .

Diese Dualität ist im folgenden Sinn verträglich mit Projektivitäten: sei eine Projektivität $P : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$ gegeben. Dazu gehört eine invertierbare lineare Abbildung $\Phi : V \rightarrow V$. Wie das in der projektiven Geometrie halt so ist, ist diese lineare Abbildung Φ nur bis auf einen konstanten Faktor durch P eindeutig bestimmt. Zu Φ gehört kanonisch eine transponierte Abbildung $\Phi^t : V^* \rightarrow V^*$. Diese Abbildung ist durch die Formel

$$l(\Phi(\mathbf{x})) = (\Phi^t(l))(\mathbf{x}) \text{ für alle } l \in V^*, \mathbf{x} \in V$$

definiert. Bezeichnet man die Auswertung der Linearform l auf dem Vektor \mathbf{x} mit (l, \mathbf{x}) , so nimmt diese Gleichung die etwas vertrautere Form

$$(l, \Phi(\mathbf{x})) = (\Phi^t(l), \mathbf{x})$$

an. Wir möchten aber gerne eine *duale Abbildung* $\Phi^* : \mathbb{P}_2^* \rightarrow \mathbb{P}_2^*$, für die gilt

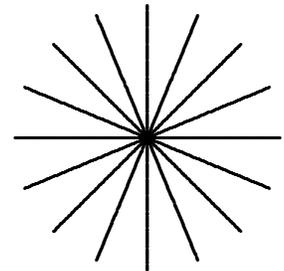
$$(\Phi^*(l), \Phi(\mathbf{x})) = (l, \mathbf{x}).$$

Inzidenzen sollen erhalten bleiben. Dies bedeutet nämlich gerade: Wenn die Punkte der Geraden $l(\mathbf{x}) = 0$ mit Φ abgebildet werden, dann transformiert sich diese Geradengleichung $l = 0$ in die Gleichung $\Phi^*(l) = 0$. Also müssen wir halt

$$\Phi^* := (\Phi^t)^{-1}$$

definieren!

Was gehört nun zu einer Geraden in der dualen Ebene, was ist eine duale Gerade? Dazu sei die duale Gerade aufgespannt durch zwei linear unabhängige Linearformen $l, m : V \rightarrow \mathbb{K}$. Ihre Punkte werden also repräsentiert durch die Linearformen $\lambda l + \mu m$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Die Nullstellen dieser Linearformen sind Geraden in der richtigen Ebene \mathbb{P}_2 . Sei etwa L die Gerade $\{\mathbf{x} \in \mathbb{P}_2 : l(\mathbf{x}) = 0\}$ und M die Gerade $\{\mathbf{x} \in \mathbb{P}_2 : m(\mathbf{x}) = 0\}$. Dann schreiben wir die Gerade mit der Gleichung $\lambda \cdot l(\mathbf{x}) + \mu \cdot m(\mathbf{x}) = 0$, etwas symbolisch, als $\lambda L + \mu M$. Alle diese Geraden gehen durch den Schnittpunkt $L \cap M$. Tatsächlich schreibt sich jede Gerade durch $L \cap M$ in der Form $\lambda l + \mu m = 0$. Wir sehen: Eine Gerade in \mathbb{P}_2^* besteht genau aus allen Geraden in \mathbb{P}_2 , die durch einen festen Punkt gehen. Eine solche Menge von Geraden in \mathbb{P}_2 heißt ein *Geradenbüschel*.



Der Punkt $\mathbf{z} = L \cap M \in \mathbb{P}_2$, in dem sich alle Geraden eines Geradenbüschels $\lambda L + \mu M$ schneiden, heißt *Zentrum* des Büschels. Die Büschelgeraden sind dann genau die Projektionsstrahlen

der Perspektivität mit Zentrum \mathbf{z} . Ist $N \subset \mathbb{P}_2$ eine feste Gerade, nicht durch \mathbf{z} , so schneidet jede Büschelgerade auf N genau einen Punkt aus. Dadurch ist eine bijektive Abbildung

$$\mathbb{P}_1^* = \{\lambda L + \mu M : (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}_1\} \rightarrow N$$

definiert.

Satz 3.16 *Diese Abbildung ist eine Projektivität.*

Beweis. Seien $l, m, n \in V^*$ Linearformen, welche die Geraden L, M, N als Nullstellenmengen haben. Weil L, M und N keinen Punkt gemeinsam haben, sind l, m und n linear unabhängig. Sie bilden also eine Basis von V^* , d.h., ein Koordinatensystem auf V . Wir wählen l und m als Koordinaten auf der Ebene $\{n = 0\} \subset V$, d.h. als homogene Koordinaten auf $\mathbb{P}_1 \simeq N$. In diesen Koordinaten schreibt sich unsere Abbildung

$$(\lambda : \mu) \mapsto (\lambda L + \mu M) \cap N = \{\lambda l + \mu m \mid N = 0\} = (-\mu : \lambda).$$

Dies ist eine lineare Abbildung in diesen homogenen Koordinaten. □

Weil V^* genau so ein drei-dimensionaler Vektorraum wie V ist, ist das Doppelverhältnis $DV(L_1, L_2; M_1, M_2)$ auch für vier Punkte $L_1, L_2, M_1, M_2 \in \mathbb{P}_2^*$ auf einer dualen Geraden definiert. (Dass die vier Geraden L_1, L_2, M_1, M_2 zu einer dualen Geraden gehören, bedeutet, dass sie zu einem Geradenbüschel gehören, d.h., dass sie einen Punkt gemeinsam haben.) Aus dem letzten Satz folgt dann der

Satz 3.17 (Doppelverhältnisse von Geraden und Punkten) *Es seien L_1, L_2, M_1, M_2 vier Geraden eines Geradenbüschels in \mathbb{P}_2 . Ist $N \subset \mathbb{P}_2$ eine Gerade, welche nicht zu diesem Büschel gehört, so gilt*

$$DV(L_1, L_2; M_1, M_2) = DV(L_1 \cap N, L_2 \cap N; M_1 \cap N, M_2 \cap N).$$

Insbesondere trennen sich die Geradenpaare L_1, L_2 und M_1, M_2 harmonisch, genau dann, wenn sich die von ihnen auf der Geraden N ausgeschnittenen Punktepaare harmonisch trennen. Der Satz über harmonische Quadrupel am vollständigen Viereck kann dann auch so formuliert werden:

Satz 3.18 (Doppelverhältnis am vollständigen Viereck) *In jedem Diagonalepunkt eines vollständigen Vierecks trennen sich die beiden dort hindurchgehenden Seiten und die beiden Verbindungslinien mit den zwei anderen Diagonalepunkten harmonisch.*

Aufgabe 3.28 *Dualisieren Sie die Figuren zum Satz von Ceva und zum Satz von Menelaos.*

Aufgabe 3.29 *Dualisieren Sie den Achsensatz.*

Aufgabe 3.30 *Dualisieren Sie Aufgabe 3.17 a) (harmonische Polare).*

Aufgabe 3.31 *Dualisieren Sie Aufgabe 3.24 (drei perspektive Dreiecke).*

4 Kegelschnitte in der projektiven Ebene

4.1 Projektive Klassifikation der Kegelschnitte

Ein Kegelschnitt in der affinen Ebene \mathbb{K}^2 mit den Koordinaten x, y wird gegeben durch eine Gleichung

$$q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0, \quad a, b, \dots, f \in \mathbb{K}.$$

Genau wie Geraden in der affinen Ebene kann man auch Kegelschnitte aus der affinen Ebene in die projektive Ebene $\mathbb{P}_2(\mathbb{K})$ fortsetzen:

Sei etwa

$$Q(x_0, x_1, x_2) := ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + 2dx_0x_1 + 2ex_0x_2 + fx_0^2$$

ein *homogenes* Polynom zweiten Grades in den drei Variablen x_0, x_1, x_2 . Dann gilt also für alle $\lambda \in \mathbb{K}$

$$Q(\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^2 Q(x_0, x_1, x_2),$$

und die Menge

$$C := \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{K}) : Q(x_0, x_1, x_2) = 0\}$$

ist wohldefiniert. Denn, wenn $Q(x_0, x_1, x_2) = 0$ ist, dann ist auch für alle $\lambda \in \mathbb{K}$

$$Q(\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^2 Q(x_0, x_1, x_2) = 0.$$

Also hängt es nur vom Punkt $(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{K})$ ab, ob $Q(x_0, x_1, x_2) = 0$ ist oder nicht.

Der Durchschnitt von C mit der affinen Ebene $\{(1 : x : y)\}$ ist die Menge der Punkte (x, y) mit

$$\begin{aligned} Q(1, x, y) &= ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f \\ &= q(x, y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

D.h., der Durchschnitt von $C \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{K})$ mit der affinen Ebene ist gerade der affine Kegelschnitt $q(x, y) = 0$. Dies ist der Grund für folgende

Definition 4.1 Sei $Q(x_0, x_1, x_2)$ ein homogenes Polynom zweiten Grades, nicht das Null-Polynom. Dann heißt die Menge

$$C := \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{K}) : Q(x_0, x_1, x_2) = 0\} \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{K})$$

ein Kegelschnitt.

Ein homogenes Polynom zweiten Grades kann auch in Matrix-Form, als quadratische Form

$$\begin{aligned} Q(x_0, x_1, x_2) &= ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + 2dx_0x_1 + 2ex_0x_2 + fx_0^2 \\ &= (x_0, x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} f & d & e \\ d & a & b \\ e & b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{x}^t \cdot A_Q \cdot \mathbf{x} \end{aligned}$$

geschrieben werden. Das Polynom Q transformiert sich wie eine Bilinearform: Ist

$$\mathbf{x} = T \cdot \mathbf{y}$$

eine Koordinatentransformation, so transformiert sich Q in

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t \cdot A_Q \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}^t \cdot T^t A_Q T \cdot \mathbf{y}.$$

Aus der linearen Algebra weiß man, dass quadratische Formen diagonalisiert werden können: Es gibt eine invertierbare 3×3 -Matrix T derart, dass $T^t A_Q T$ eine Diagonalmatrix ist. Unter der projektiven Klassifikation der Kegelschnitte versteht man die Einteilung der Kegelschnitte in Äquivalenzklassen bezüglich derartiger Transformationen. Jeder Kegelschnitt ist deswegen äquivalent zu einem mit einer Gleichung in Diagonalform

$$q_0 x_0^2 + q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2 = 0.$$

Jetzt kann man immer noch weiter transformieren. Die Diagonalform zerstört man nicht, wenn man mit diagonalen Transformationsmatrizen

$$T = \begin{pmatrix} t_0 & & \\ & t_1 & \\ & & t_2 \end{pmatrix}$$

transformiert. Dabei wird der Eintrag q_i mit dem Quadrat $t_i^2 \in \mathbb{K}$ multipliziert. Was man dabei erreichen kann, hängt sehr stark vom Körper \mathbb{K} ab. In $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ beispielsweise ist jede Zahl ein Quadrat, und man kann jedes q_i auf 0 oder 1 transformieren. In $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sind nur die Zahlen ≥ 0 Quadrate. Hier kann man jedes q_i auf 0, 1 oder -1 transformieren.

Satz 4.1 (Projektive Klassifikation der Kegelschnitte über \mathbb{C} und \mathbb{R}) *Durch eine projektive Koordinatentransformation kann die Gleichung eines Kegelschnitts in der projektiven Ebene auf eine der folgenden Normalformen gebracht werden:*

			Rang	
über \mathbb{C} :	$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$	<i>nicht-entartet</i>	3	
	$x_0^2 + x_1^2 = 0$	<i>Geradenpaar</i>	2	
	$x_0^2 = 0$	<i>Doppelgerade</i>	1	
			<i>Signatur</i>	
über \mathbb{R} :	$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$	\emptyset	3	3,0
	$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$	<i>nicht-entartet</i>	3	2,1
	$x_0^2 + x_1^2 = 0$	<i>Punkt</i>	2	2,0
	$x_0^2 - x_1^2 = 0$	<i>Geradenpaar</i>	2	1,1
	$x_0^2 = 0$	<i>Doppelgerade</i>	1	1

Beweis: Über \mathbb{C} ist die Anzahl der Diagonal-Einträge = 1 gerade der Rang der Matrix A_Q . Es gibt deswegen genau die drei angegebenen Fälle $\text{Rang}(A_Q) = 3, 2$ oder 1.

Über \mathbb{R} ist $\text{Rang}(A_Q)$ die Anzahl der Einträge $= \pm 1$. Weil man die Gleichung mit -1 durchmultiplizieren kann, ohne die Menge $C : Q(\mathbf{x}) = 0$ zu ändern, gibt es genau die fünf angegebenen Fälle. \square

Bemerkungen: 1) Der Rang der Matrix A_Q heißt *Rang* des Kegelschnittes $Q(\mathbf{x}) = 0$. Die Normalformen über \mathbb{C} sind durch den Rang eindeutig bestimmt. Über \mathbb{R} ist die Normalform eindeutig durch den Rang und die Signatur von A_Q bestimmt (Sylvesterscher Trägheitssatz).

2) Die Gleichungen $x_0^2 + x_1^2 = 0$ über \mathbb{C} und $x_0^2 - x_1^2 = 0$ über \mathbb{R} sind tatsächlich die Gleichung von zwei verschiedenen Geraden, weil man sie auch $(x_0 + ix_1)(x_0 - ix_1) = 0$, bzw. $(x_0 + x_1)(x_0 - x_1) = 0$ schreiben kann. Die Rang-1-Gleichung $x_0^2 = 0$ dagegen beschreibt nur die einzige Gerade $x_0 = 0$, allerdings verschwindet sie dort von zweiter Ordnung. Dies rechtfertigt den Namen Doppelgerade.

Kegelschnitte vom Rang drei heißen *nicht-entartet*, oder *glatt*, oder *nicht-singulär*. Kegelschnitte vom Rang ≤ 2 heißen *entartet*.

Satz 4.2 (Entartete Kegelschnitte über \mathbb{C}) Für einen Kegelschnitt in der komplex-projektiven Ebene $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ sind äquivalent:

- 1) Der Kegelschnitt C ist entartet.
- 2) Der Kegelschnitt C spaltet in Geraden, d.h., es gibt Linearformen $L(\mathbf{x})$, $L'(\mathbf{x})$ mit $Q(\mathbf{x}) \equiv L(\mathbf{x}) \cdot L'(\mathbf{x})$.
- 3) Es gibt eine Gerade $L \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ mit $L \subset C$.

Die Richtung 3) \Rightarrow 1) gilt nicht nur über \mathbb{C} , sondern über jedem Körper \mathbb{K} mit unendlich vielen Elementen.

Beweis: Die Richtung „1) \Rightarrow 2)“ ist klar, weil dann die Gleichung $Q(\mathbf{x}) = 0$ auf die Form

$$x_0^2 + x_1^2 = (x_0 + ix_1)(x_0 - ix_1) = 0$$

oder

$$x_0^2 = 0$$

gebracht werden kann. Auch „2) \Rightarrow 3)“ ist klar.

„3) \Rightarrow 1)“: Nach einer Koordinatentransformation können wir $L : x_0 = 0$ annehmen. Das Polynom

$$Q|L = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$$

verschwindet nach Voraussetzung identisch. Wenn \mathbb{K} unendlich viele Elemente enthält, folgt daraus $a = b = c = 0$, und zu C gehört eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} f & d & e \\ d & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat Rang ≤ 2 . □

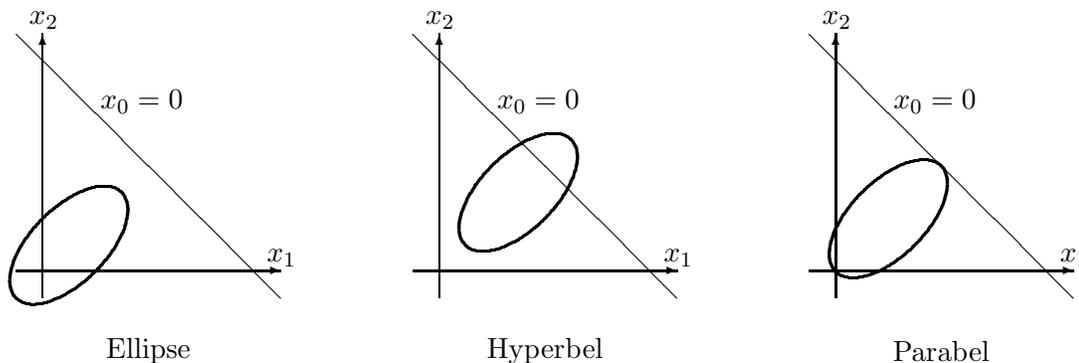
In der reellen projektiven Ebene gibt es außer Entartungsfällen nur eine einzige Klasse von Kegelschnitten. In der affinen Ebene \mathbb{R}^2 gab es deren drei: Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln. Wie kommt das? Bzw., wie unterscheiden sich Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln projektiv?

Um das herauszufinden schreiben wir die Gleichungen der affinen reellen Kegelschnitte projektiv:

	affin	projektiv
Ellipse	$x^2 + y^2 - 1 = 0$	$x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0$
Hyperbel	$x^2 - y^2 - 1 = 0$	$-(-x_1^2 + x_2^2 + x_0^2) = 0$
Parabel	$4y - x^2 = 0$	$4x_0x_2 - x_1^2 = 0$ $(x_0 + x_2)^2 - (x_0 - x_2)^2 - x_1^2 = 0$

In allen drei Fällen ist die projektive Normalform gleich. (Sonst wäre der Klassifikationsatz ja auch in Zweifel zu ziehen.) Aber die drei Klassen affiner reeller Kegelschnitte unterscheiden sich durch ihre Beziehung zur unendlich fernen Geraden. Der Durchschnitt mit der Geraden $x_0 = 0$ ist in den drei Fällen:

Ellipse	$x_0 = x_1^2 + x_2^2 = 0$	\emptyset
Hyperbel	$x_0 = x_1^2 - x_2^2 = 0$	zwei Punkte $(0 : 1 : \pm 1)$
Parabel	$x_0 = x_1 = 0$	ein Punkt $(0 : 0 : 1)$



Aufgabe 4.1 a) Bestimmen Sie den Rang der Kegelschnitte

$$\begin{aligned}
 C_1 : & x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 2x_0x_2 + 2x_0x_1 = 0, \\
 C_2 : & 4x_0^2 + 6x_1^2 - 2x_2^2 - x_1x_2 - 7x_0x_2 + 14x_0x_1 = 0, \\
 C_3 : & x_0^2 + 3x_1^2 - 5x_2^2 - 7x_1x_2 - 13x_0x_2 + 8x_0x_1 = 0.
 \end{aligned}$$

b) Geben Sie Gleichungen für die Geraden an, aus denen die Kegelschnitte C_1 und C_2 bestehen.
 c) Finden Sie eine Koordinatentransformation $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x})$ so, dass C_3 in den Koordinaten y_1, y_2, y_3 durch eine Diagonalmatrix gegeben wird.

Aufgabe 4.2 Es seien $\mathbf{u} = (u_0 : u_1 : u_2)$ und $\mathbf{v} = (v_0 : v_1 : v_2) \in \mathbb{P}_2$. Zeigen Sie: Die Geraden $L : (\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}) = 0$ und $M : (\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}) = 0$ schneiden sich genau dann auf dem Kegelschnitt $\mathbf{x}^t \cdot A \cdot \mathbf{x} = 0$ wenn

$$\det \begin{pmatrix} A & \mathbf{u} & \mathbf{v} \\ \mathbf{u}^t & 0 & 0 \\ \mathbf{v}^t & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Aufgabe 4.3 In der projektiven Ebene seien ein Dreieck \mathbf{abc} und zwei Geraden L, M , die durch keine Ecke des Dreiecks gehen, gegeben. Zeigen Sie: Die Ecke \mathbf{x} eines jeden Dreiecks \mathbf{xyz} , bei dem

- die Ecke \mathbf{y} auf L , die Ecke \mathbf{z} auf M liegt,
- die Seite \mathbf{xy} durch \mathbf{a} , die Seite \mathbf{yz} durch \mathbf{b} und die Seite \mathbf{zx} durch \mathbf{c} geht,

liegt auf einem Kegelschnitt C . Wann ist C entartet?

4.2 Sekanten, Tangenten und Polaren

In diesem Abschnitt wollen wir nur nicht-entartete Kegelschnitte betrachten, also Kegelschnitte

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{P}_2(\mathbb{K}) : \mathbf{x}^t \cdot A \cdot \mathbf{x} = 0\},$$

deren Matrix A den Rang drei hat.

Meistens werden wir $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ voraussetzen müssen, weil sonst nicht sicher ist, dass unser Kegelschnitt nicht vielleicht leer ist. Aber, nachzuschauen, welche Voraussetzungen an den Körper \mathbb{K} jetzt wirklich notwendig sind, das hat weniger mit Geometrie, mehr mit Zahlentheorie zu tun. Für uns ist der *geometrische Fall* der Körper \mathbb{C} . Weil $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ für die Veranschaulichung unendlich wichtig ist, interessiert uns natürlich auch dieser Körper.

Wir gehen aus von dem Problem, die Schnittpunkte einer Geraden mit dem Kegelschnitt zu berechnen. Ähnlich wie in 0.1 parametrisieren wir die Gerade

$$L : \mathbf{x} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}, (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}_1(\mathbb{K}).$$

Jetzt sind allerdings \mathbf{a} und \mathbf{b} Punkte in der projektiven Ebene, und für den Parameter $(\lambda : \mu)$ ist auch der Wert $(0 : 1) = \infty \in \mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ zugelassen. (Dazu gehört der Punkt $\mathbf{x} = \mathbf{b}$.) Setzen wir \mathbf{x} in die Gleichung von C ein, so erhalten wir

$$(\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b})^t \cdot A \cdot (\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}) = \lambda^2 \cdot \mathbf{a}^t A \mathbf{a} + 2\lambda\mu \cdot \mathbf{a}^t A \mathbf{b} + \mu^2 \cdot \mathbf{b}^t A \mathbf{b} = 0.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für die Parameter $(\lambda : \mu)$, die zu den Schnittpunkten von L und C gehören.

Ob diese quadratische Gleichung Wurzeln in \mathbb{K} hat, hängt vom Körper \mathbb{K} ab. In \mathbb{C} gibt es immer Wurzeln, in \mathbb{R} nicht immer. Über dem Körper \mathbb{C} gibt es die folgenden drei Möglichkeiten:

- Die Gleichung hat zwei verschiedene Wurzeln.
- Die Gleichung hat nur eine, doppelte, Wurzel.
- Die Gleichung hat unendlich viele Wurzeln, aber dann ist L eine Teilmenge von C und nach dem letzten Satz aus 4.1 ist C entartet.

Die beiden Wurzeln fallen zusammen (und ihr gemeinsamer Wert liegt in \mathbb{K}), genau dann, wenn die Diskriminante der quadratischen Gleichung

$$(\mathbf{a}^t A \mathbf{b})^2 - (\mathbf{a}^t A \mathbf{a})(\mathbf{b}^t A \mathbf{b}) = 0$$

ist. In diesem Fall ist die Gerade L eine *Tangente* an den Kegelschnitt C .

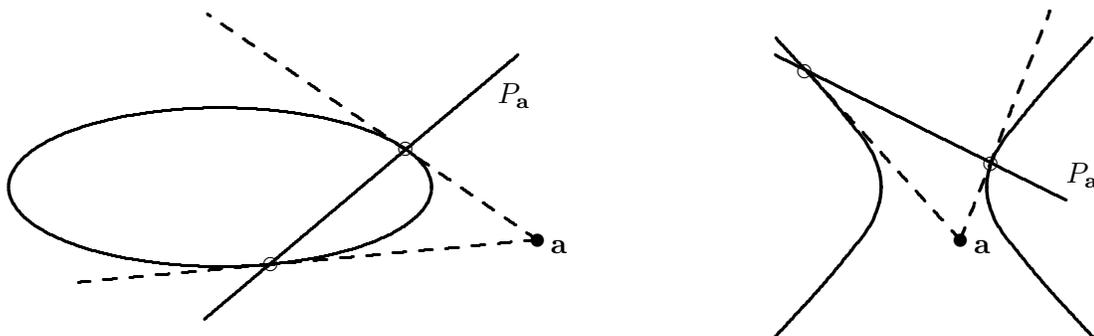
Jetzt fixieren wir \mathbf{a} und suchen die Berührungspunkte $\mathbf{b} \in C$ aller Tangenten an C durch \mathbf{a} . Weil dann $\mathbf{b}^t A \mathbf{b} = 0$ ist, wird die Diskriminante einfach

$$\mathbf{a}^t \cdot A \cdot \mathbf{b} = 0.$$

Dies ist eine lineare Gleichung in \mathbf{b} : Die Berührungspunkte \mathbf{b} der Tangenten an C durch \mathbf{a} liegen auf der Geraden

$$P_{\mathbf{a}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{P}_2(\mathbb{K}) : \mathbf{a}^t \cdot A \cdot \mathbf{x} = 0\}.$$

Diese Gerade heißt die *Polare* des Punktes \mathbf{a} bezüglich des Kegelschnittes C . Ihre Schnittpunkte mit C sind die Berührungspunkte der Tangenten durch \mathbf{a} . Ob sie Schnittpunkte hat, hängt wieder vom Körper \mathbb{K} ab. Die Berechnung der Schnittpunkte $P_{\mathbf{a}} \cap C$ ist das praktischste Verfahren, um die Tangenten von \mathbf{a} an den Kegelschnitt C zu ermitteln.



Als Beispiele berechnen wir die Polare eines Punktes $\mathbf{a} = (1 : c_1 : c_2)$ der affinen Ebene zu den nicht-entarteten affinen Kegelschnitten in Normalform:

Ellipse/Hyperbel:	affine Gleichung	$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$
	homogene Gleichung	$\frac{x_1^2}{a^2} \pm \frac{x_2^2}{b^2} - x_0^2 = 0$
	Matrix A	$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1/a^2 & \\ & & \pm 1/b^2 \end{pmatrix}$
	Polare $P_{\mathbf{a}}$	$-x_0 + c_1 x_1/a^2 \pm c_2 x_2/b^2 = 0$
	affine Form	$\frac{c_1 x}{a^2} \pm \frac{c_2 y}{b^2} = 1$
<hr/>		
Parabel :	affine Gleichung	$y = px^2$
	homogene Gleichung	$px_1^2 - x_0 x_2 = 0$
	Matrix A	$\begin{pmatrix} & & -1/2 \\ & p & \\ -1/2 & & \end{pmatrix}$
	Polare $P_{\mathbf{a}}$	$-c_2 x_0/2 + pc_1 x_1 - x_2/2$
	affine Form	$y = 2pc_1 x - c_2$

Wir sehen insbesondere: Die Polare des Nullpunkts $(1 : 0 : 0)$ bei der Ellipse und der Hyperbel ist die unendlich ferne Gerade $x_0 = 0$, während sie bei der Parabel die Tangente $x_2 = 0$ ist. Die Polare für den Kreis vom Radius r stimmt mit der Gleichung $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) = r^2$ aus Definition 1.2 überein.

Satz 4.3 (Polare und Harmonie) *Die Polare $P_{\mathbf{a}}$ eines Punktes \mathbf{a} zum Kegelschnitt C ist der geometrische Ort aller Punkte \mathbf{b} , die zusammen mit \mathbf{a} die beiden Schnittpunkte der Geraden \mathbf{ab} mit dem Kegelschnitt C harmonisch trennen.*

Beweis. Wir parametrisieren die Gerade \mathbf{ab} wieder durch $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}$. Wenn $\mathbf{b} \in P_{\mathbf{a}}$, also $\mathbf{a}^t \mathbf{A} \mathbf{b} = 0$ gilt, dann ist die Gleichung für die Parameter der Schnittpunkte

$$\lambda^2 \cdot \mathbf{a}^t \mathbf{A} \mathbf{a} + \mu^2 \cdot \mathbf{b}^t \mathbf{A} \mathbf{b} = 0.$$

Sie hat zwei Lösungen $(\lambda : \pm \mu)$, die sich um das Vorzeichen unterscheiden. Also vertauscht die Involution

$$\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} \mapsto \lambda \mathbf{a} - \mu \mathbf{b}$$

die beiden Schnittpunkte, während sie die Punkte \mathbf{a} und \mathbf{b} fest lässt. Nach dem Harmonie-Kriterium in 3.4 trennen sich die beiden Schnittpunkte der Geraden \mathbf{ab} mit C und die beiden Punkte \mathbf{a} und \mathbf{b} harmonisch.

Ist umgekehrt \mathbf{b} ein Punkt, der zusammen mit \mathbf{a} die beiden Schnittpunkte harmonisch trennt, so ist (nach dem soeben Bewiesenen) der Schnittpunkt von \mathbf{ab} mit der Polaren $P_{\mathbf{a}}$ auch so ein Punkt. Da es nur einen einzigen solchen Punkt gibt, muss \mathbf{b} auf der Polaren liegen. \square

Einschränkung: Die Koordinaten der Schnittpunkte von C mit der Geraden \mathbf{ab} brauchen nicht immer in \mathbb{K} zu liegen. Wenn dies nicht der Fall ist, macht der Satz natürlich keine Aussage. Außerdem darf \mathbf{a} nicht auf C und \mathbf{b} nicht auf einer der beiden Tangenten von \mathbf{a} an C gewählt werden, weil sonst zu viele Punkte zusammenfallen.

Die Abbildung, die jedem $\mathbf{a} \in \mathbb{P}_2$ seine Polare $P_{\mathbf{a}}$ zuordnet, ist in der Tat für alle \mathbf{a} ohne Ausnahme definiert, auch wenn über \mathbb{K} die Tangenten von \mathbf{a} an C nicht existieren. Diese Abbildung bildet \mathbb{P}_2 *bijektiv* auf \mathbb{P}_2^* ab, denn sie wird durch die invertierbare Matrix von C gegeben. Sie ist also so etwas ähnliches, wie eine Projektivität, nur, dass Urbild- und Bildebene dual zueinander sind. Dies stimmt mit folgender Tatsache aus der linearen Algebra überein: Eine Bilinearform $Q(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ auf einem Vektorraum V kann man auch auffassen als eine lineare Abbildung

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v} \mapsto Q(\mathbf{v}, -) \\ V \rightarrow V^* \end{array} \right.$$

Diese Projektivität $\mathbf{a} \mapsto P_{\mathbf{a}}$ von \mathbb{P}_2 auf \mathbb{P}_2^* heißt die *durch C definierte Polarität*.

Weil die Abbildung $\mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2^*$, $\mathbf{a} \mapsto P_{\mathbf{a}}$ bijektiv ist, gibt es zu jeder Geraden $L \subset \mathbb{P}_2$ genau einen Punkt \mathbf{a} , dessen Polare die Gerade L ist. Dieser Punkt heißt *Pol* der Geraden L bezüglich C . Hat beispielsweise L die Gleichung $(\mathbf{u}, \mathbf{x}) = u_0x_0 + u_1x_1 + u_2x_2 = 0$, so hat der Pol \mathbf{a} die homogenen Koordinaten $A^{-1} \cdot \mathbf{u}$.

Definition 4.2 *Zwei Punkte \mathbf{a} und $\mathbf{b} \in \mathbb{P}_2(\mathbb{K})$ heißen konjugiert in Bezug auf den (nicht-entarteten) Kegelschnitt C mit der (invertierbaren) Matrix A , wenn $\mathbf{a}^t \cdot A \cdot \mathbf{b} = 0$. Dies ist also genau dann der Fall, wenn der eine Punkt auf der Polaren des anderen liegt.*

Weil die Matrix A symmetrisch ist, ist auch die Konjugiertheits-Relation symmetrisch: \mathbf{a} ist konjugiert zu \mathbf{b} , genau dann, wenn \mathbf{b} konjugiert zu \mathbf{a} ist. Die Polare $P_{\mathbf{a}}$ geht durch den Punkt \mathbf{b} , genau dann, wenn \mathbf{a} auf der Polaren $P_{\mathbf{b}}$ liegt. Den Satz über Polare und Harmonie können wir auch so formulieren: Zwei in Bezug auf den Kegelschnitt C konjugierte Punkte $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ trennen die beiden Schnittpunkte der Geraden \mathbf{ab} mit dem Kegelschnitt (falls diese existieren) harmonisch.

Der Punkt \mathbf{a} liegt auf seiner eigenen Polaren $P_{\mathbf{a}}$, genau dann, wenn $\mathbf{a}^t \cdot A \cdot \mathbf{a} = 0$, d.h., wenn \mathbf{a} auf dem Kegelschnitt C liegt. In diesem Fall ist eine Gerade $L : \mathbf{a} + s\mathbf{b}$ Tangente, falls die Diskriminante $(\mathbf{a}^t A \mathbf{b})^2 - (\mathbf{a}^t A \mathbf{a})(\mathbf{b}^t A \mathbf{b})$ verschwindet. Weil $\mathbf{a}^t A \mathbf{a} = 0$ ist, bedeutet dies: $\mathbf{a}^t A \mathbf{b} = \mathbf{a}^t A(\mathbf{a} + s\mathbf{b}) = 0$. Wir sehen: Die Tangente an C in einem Punkt $\mathbf{a} \in C$ ist gerade die Polare $P_{\mathbf{a}}$ von \mathbf{a} .

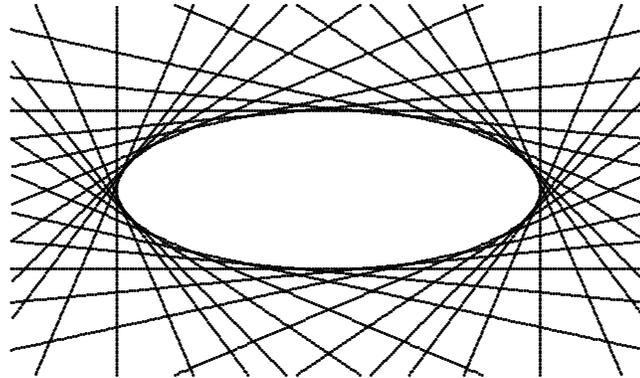
Alle Tangenten T an C stimmen überein mit allen Polaren $P_{\mathbf{a}}$ von Punkten $\mathbf{a} \in C$. Eine Geradengleichung $L : \mathbf{u}^t \cdot \mathbf{x} = 0$ beschreibt eine Tangente, genau dann wenn ein $\mathbf{a} \in C$ existiert mit $\mathbf{u}^t = \mathbf{a}^t A$, d.h., $\mathbf{u} = A\mathbf{a}$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\mathbf{a} = A^{-1}\mathbf{u} \in C$, also wenn

$$(A^{-1}\mathbf{u})^t \cdot A \cdot A^{-1}\mathbf{u} = \mathbf{u}^t \cdot A^{-1} \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Dies ist wieder eine Kegelschnitt-Gleichung. Die symmetrische 3×3 -Matrix ist A^{-1} . Der Kegelschnitt liegt im Raum der Geraden, d.h. in der dualen projektiven Ebene \mathbb{P}_2^* . Er heißt der *duale Kegelschnitt* C^* .

Damit haben wir den

Satz 4.4 (Dualer Kegelschnitt) *Die Tangenten an den nicht-entarteten Kegelschnitt C sind genau die Geraden $\mathbf{u} \in \mathbb{P}_2^*$, die auf dem dualen Kegelschnitt C^* mit der Matrix A^{-1} liegen.*



Dualer Kegelschnitt

Bemerkung 1: Die Inverse Matrix zu A^{-1} ist $(A^{-1})^{-1} = A$. Deswegen ist der duale Kegelschnitt $(C^*)^* \subset \mathbb{P}_2$ zum dualen Kegelschnitt $C^* \subset \mathbb{P}_2^*$ wieder der Ausgangskegelschnitt C :

$$C^{**} = C.$$

Bemerkung 2: Die durch C definierte Polarität $\mathbf{a} \mapsto P_{\mathbf{a}}$, die jeden Punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{P}_2$ auf seine Polare bezüglich C abbildet, bildet jeden Punkt $\mathbf{a} \in C$ auf seine Tangente an C ab. Also ist das Bild von $C \subset \mathbb{P}_2$ unter dieser Polarität der duale Kegelschnitt $C^* \subset \mathbb{P}_2^*$.

Bei der kanonischen Dualität zwischen \mathbb{P}_2 und \mathbb{P}_2^* dualisiert sich die Beziehung zwischen einem Punkt $\mathbf{c} \in \mathbb{P}_2$, den beiden Tangenten T_1 und T_2 an C durch \mathbf{c} und der Polaren $P_{\mathbf{c}}$ wie folgt:

Aus	wird (werden)
dem Punkt $\mathbf{c} \in \mathbb{P}_2$	die Gerade $\mathbf{c}^* \subset \mathbb{P}_2^*$,
den Tangenten T_i an C durch \mathbf{c}	die Punkte $T_i^* \in \mathbf{c}^* \cap C^*$,
den Berührungspunkten $\mathbf{t}_i = C \cap T_i$	die Tangenten \mathbf{t}_i^* an C^* in T_i^* ,
der Polaren $P_{\mathbf{c}}$	der Schnittpunkt $t_1^* \cap t_2^*$ der Tangenten.

Die entstehende, duale Figur im \mathbb{P}_2^* ist jedoch wieder die gleiche: Ein Punkt, mit den beiden Tangenten an den Kegelschnitt und seine Polare.

Wir sehen insbesondere: Eine Gerade $L : \mathbf{u}^t \cdot \mathbf{x} = 0$ ist die Polare eines Punktes \mathbf{c} bezüglich C , genau dann, wenn der Punkt $L^* \in \mathbb{P}_2^*$ der Pol der Geraden $\mathbf{c}^* \subset \mathbb{P}_2^*$ bezüglich C^* ist. Dies

sieht man auch einfach aus der Matrix-Gleichung für die homogenen Koordinaten der Geraden L (aufgefasst als Spaltenvektor):

$$\mathbf{u}^t = (A \cdot \mathbf{c})^t \Leftrightarrow \mathbf{u}^t = \mathbf{c}^t \cdot A \Leftrightarrow \mathbf{c}^t = \mathbf{u}^t \cdot A^{-1}.$$

Auch die Beziehung zwischen zwei konjugierten Punkten \mathbf{a} und \mathbf{b} lässt sich dualisieren:

Aus	wird (werden)
den Punkten \mathbf{a} und \mathbf{b}	Geraden \mathbf{a}^* und $\mathbf{b}^* \subset \mathbb{P}_2^*$,
der Verbindungsgeraden $L = \mathbf{ab}$	der Schnittpunkt $L^* = \mathbf{a}^* \cap \mathbf{b}^*$,
den Schnittpunkten von L mit C	die Tangenten durch L^* an C^* .

Dass die Punkte \mathbf{a} und \mathbf{b} die beiden Schnittpunkte $\mathbf{ab} \cap C$ harmonisch trennen, diese Eigenschaft dualisiert sich in die folgende Eigenschaft: Die beiden Geraden \mathbf{a}^* und \mathbf{b}^* im Geradenbüschel mit Zentrum L^* trennen die beiden Tangenten an C^* durch dieses Zentrum harmonisch. Sehen wir jetzt C^* als den ursprünglichen Kegelschnitt an, so werden wir auf den Begriff der konjugierten Geraden geführt:

Definition 4.3 *Zwei Geraden $L \neq M \subset \mathbb{P}_2$ heißen konjugiert in Bezug auf den (nicht-entarteten) Kegelschnitt C , wenn ihr Schnittpunkt \mathbf{c} nicht auf C liegt, und die beiden Tangenten durch \mathbf{c} an C im Geradenbüschel mit Zentrum \mathbf{c} die beiden Geraden L und M harmonisch trennen.*

Haben die Geraden L und M die Gleichungen $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}) = 0$ und $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}) = 0$, so sind sie konjugiert, genau dann, wenn $\mathbf{u}^t \cdot A^{-1} \cdot \mathbf{v} = 0$. Weil $\mathbf{a} = A^{-1} \mathbf{u}$ der Pol der Geraden L ist, ist die Konjugiertheit von L und M damit äquivalent, dass der Pol der einen Geraden auf der anderen Geraden liegt.

Satz 4.5 (Konjugierte Geraden und Tangenten) *Es seien $C \subset \mathbb{P}_2$ ein nicht-entarteter Kegelschnitt und $L \neq M \subset \mathbb{P}_2$ zwei Geraden, keine Tangenten an C . Dann sind äquivalent:*

- 1) L und M sind konjugiert bezüglich C .
- 2) Die beiden Tangenten an C in den Schnittpunkten $L \cap C$ treffen sich in einem Punkt auf M .
- 3) Die beiden Tangenten an C in den Schnittpunkten $M \cap C$ treffen sich in einem Punkt auf L .

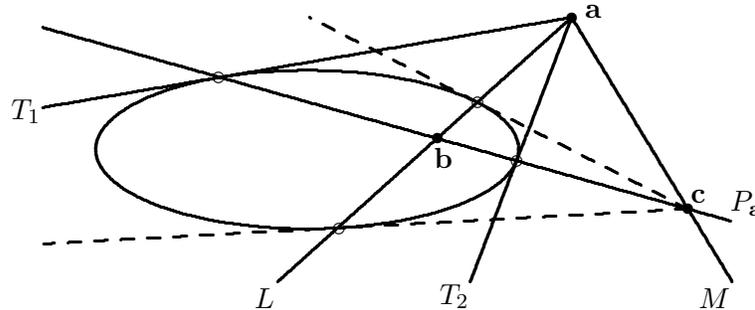
Beweis. Weil die Bedingung 1) symmetrisch in L und M ist, brauchen wir nur die Äquivalenz von 1) und 2) zu zeigen.

Wir bezeichnen mit \mathbf{a} den Schnittpunkt $L \cap M$, mit $P_{\mathbf{a}}$ die Polare von \mathbf{a} bezüglich C , mit $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ die Schnittpunkte $P_{\mathbf{a}} \cap C$, d.h. also die Berührungspunkte der beiden Tangenten T_1, T_2 aus \mathbf{a} an C , mit \mathbf{b} den Schnittpunkt $L \cap P_{\mathbf{a}}$ und mit \mathbf{c} den Schnittpunkt $M \cap P_{\mathbf{a}}$.

„1) \Rightarrow 2)“ : Nach Voraussetzung trennen sich die Geradenpaare L, M und T_1, T_2 durch \mathbf{a} harmonisch. Also trennen \mathbf{b}, \mathbf{c} die Berührungspunkte $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ harmonisch. Somit liegt \mathbf{b} auf der Polaren $P_{\mathbf{c}}$ des Punktes \mathbf{c} . Weil \mathbf{c} konjugiert zu \mathbf{a} ist, liegt auch \mathbf{a} auf dieser Polaren. Deswegen ist $L = \mathbf{ab}$

die Polare P_c . Also treffen sich die beiden Tangenten an C zu den beiden Schnittpunkten $L \cap C$ im Punkt $c \in M$.

„1) \Leftrightarrow 2)“ : Nach Voraussetzung liegt jetzt der Schnittpunkt c der beiden Tangenten an C zu den Schnittpunkten $L \cap C$ auf M . Deswegen ist c der Pol zu L und L die Polare P_c . Also trennen b, c die Schnittpunkte t_1, t_2 von P_a mit C harmonisch. Dann trennen auch die Geraden $L = ab$ und $M = ac$ die beiden Tangenten $T_1 = at_1$ und $T_2 = at_2$ harmonisch. Dies heißt, die Geraden L und M sind konjugiert. \square



Als Beispiel betrachten wir zwei Durchmesser L, M einer Ellipse C , die in affinen Koordinaten x, y durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

gegeben ist. Die unendlich ferne Gerade ist die Polare des Nullpunkts $L \cap M$. Die Tangenten an C in den beiden Schnittpunkten $L \cap C$ treffen M auf dieser unendlich fernen Geraden genau dann, wenn sie parallel zu M sind. Es folgt: Die beiden Durchmesser sind konjugiert genau dann, wenn sie im Sinn von Paragraph 2.4 konjugiert sind.

Gelegentlich ist es vorteilhaft, die homogenen Koordinaten so zu wählen, dass ein gegebener Kegelschnitt durch eine besonders einfache, dem jeweiligen Problem angepasste Gleichung gegeben wird. Wir wollen diese Fälle diskutieren. Dabei erinnern wir uns an das Prinzip der projektiven Ausdehnung: Sind $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_3 \in \mathbb{P}_2$ vier Punkte der Ebene derart, dass keine drei auf einer Geraden liegen, dann gibt es ein homogenes Koordinatensystem, in dem

$$\mathbf{x}_0 = (1 : 0 : 0), \mathbf{x}_1 = (0 : 1 : 0), \mathbf{x}_2 = (0 : 0 : 1), \mathbf{x}_3 = (1 : 1 : 1).$$

Wir nennen $(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1)$ das *Koordinatendreieck* und den Punkt $(1 : 1 : 1)$ den *Einheitspunkt*.

Fall 1: Koordinatendreieck auf dem Kegelschnitt.

In diesem Fall gilt für die drei Koordinatenpunkte $\mathbf{x}_i^t \cdot A \cdot \mathbf{x}_i = 0$. Dies ist äquivalent damit, dass die Matrix A die Form

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & 0 & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

hat und der Kegelschnitt die Gleichung

$$2 \cdot (a_{01}x_0x_1 + a_{12}x_1x_2 + a_{20}x_2x_0) = 0$$

besitzt.

Fall 2: Koordinatendreieck selbst-polar.

Dies bedeutet, dass für die Koordinatenpunkte gilt $\mathbf{x}_i^t \cdot A \cdot \mathbf{x}_j = 0$, ($i \neq j = 0, 1, 2$). Es ist äquivalent damit, dass in der Matrix A alle Einträge a_{ij} , $i \neq j$ verschwinden, d.h., dass A eine Diagonalmatrix ist. Die Gleichung des Kegelschnitts ist dann

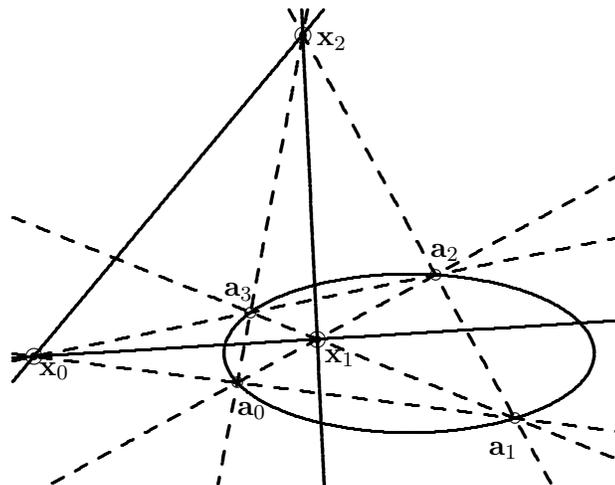
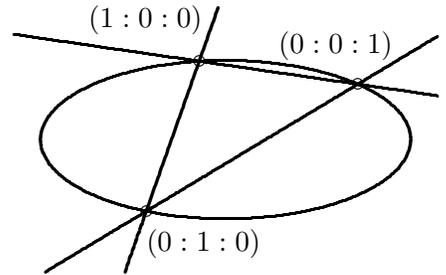
$$a_{00}x_0^2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 = 0.$$

Diese Situation ist beispielsweise folgendermaßen zu erreichen: Es seien $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ vier verschiedene Punkte auf dem Kegelschnitt, und als Koordinatenpunkte \mathbf{x}_i wählen wir die drei Diagonalpunkte des vollständigen Vierecks mit den Ecken $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_3$. Dann ist nämlich \mathbf{x}_i konjugiert zu \mathbf{x}_j für $i \neq j$.

Beweis: Sei etwa

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{a}_0\mathbf{a}_1 \cap \mathbf{a}_2\mathbf{a}_3, \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{a}_0\mathbf{a}_2 \cap \mathbf{a}_1\mathbf{a}_3, \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{a}_0\mathbf{a}_3 \cap \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2.$$

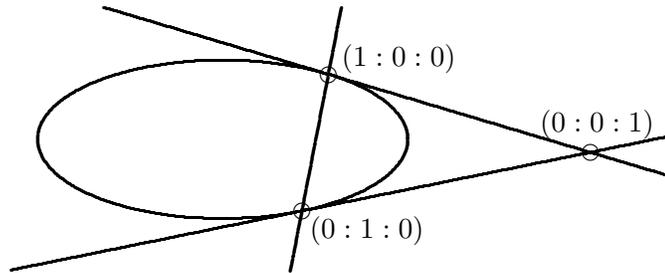
Nach dem Satz über das Doppelverhältnis am vollständigen Viereck aus Kapitel 3 werden die Punkte \mathbf{a}_0 und \mathbf{a}_1 harmonisch getrennt durch \mathbf{x}_0 und den Schnittpunkt der Seite $\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1$ mit der Geraden $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2$. Ebenso werden \mathbf{a}_2 und \mathbf{a}_3 harmonisch getrennt durch \mathbf{x}_0 und den Schnittpunkt der Seite $\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3$ mit der Geraden $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2$. Es folgt, dass \mathbf{x}_0 der Pol zur Geraden $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2$ ist, und dass \mathbf{x}_0 und \mathbf{x}_1 , sowie \mathbf{x}_0 und \mathbf{x}_2 konjugiert sind. \square



Fall 3: Die Koordinatenpunkte $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1$ liegen auf dem Kegelschnitt und \mathbf{x}_2 ist der Schnittpunkt der beiden Tangenten in diesen Punkten.

Wegen $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in C$ verschwinden in der Matrix A die Diagonaleinträge a_{00} und a_{11} . Weil \mathbf{x}_0 und \mathbf{x}_1 zu \mathbf{x}_2 konjugiert sind, verschwinden außerdem die Einträge a_{02} und a_{12} . Der Kegelschnitt hat die Gleichung

$$a_{01}x_0x_1 + a_{22}x_2^2 = 0.$$



Fall 4: Die Koordinatenpunkte wie in Fall 3, aber zusätzlich der Einheitspunkt $\mathbf{x}_3 \in C$.

Jetzt folgt, dass in der letzten Gleichung $a_{01} + a_{22} = 0$ ist. Der Kegelschnitt hat die besonders einfache (kanonische) Gleichung

$$x_0x_1 - x_2^2 = 0.$$

Aufgabe 4.4 Bestimmen Sie die Tangenten an den Kegelschnitt

$$C : x^2 + 2y^2 + z^2 + yz + 3xz + xy = 0$$

durch den Punkt $(1 : 1 : 1)$, sowie deren Berührungspunkte.

Aufgabe 4.5 Bestimmen Sie einen Kegelschnitt, für den das Dreieck $(1 : 0 : 1), (0 : 1 : 1), (1 : 1 : 1)$ selbstpolar ist (d.h., jede Dreiecksseite ist Polare der gegenüberliegenden Ecke), und der die Geraden $x_0 = 2x_2, x_1 = 2x_2$ berührt.

Aufgabe 4.6 Gegeben sei der nicht-entartete Kegelschnitt $C : \mathbf{x}^t \cdot A \cdot \mathbf{x} = 0$ und ein Punkt \mathbf{p} . Zeigen Sie: die beiden Tangenten von \mathbf{p} aus an C bilden einen entarteten Kegelschnitt mit der Gleichung

$$(\mathbf{p}^t \cdot A \cdot \mathbf{x})^2 - (\mathbf{p}^t \cdot A \cdot \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x}^t \cdot A \cdot \mathbf{x}) = 0.$$

Aufgabe 4.7 Gegeben seien ein nicht-entarteter Kegelschnitt C und ein vollständiges Viereck in der projektiven Ebene, so, dass zwei Paare gegenüberliegender Ecken des Vierecks bezüglich C konjugiert sind. Zeigen Sie: Auch das dritte Paar gegenüberliegender Ecken des Vierecks ist bezüglich C konjugiert.

Aufgabe 4.8 (Satz von Hesse) a) Gegeben sei ein nicht-entarteter Kegelschnitt C und ein Dreieck abc in der projektiven Ebene. Zeigen Sie: das Dreieck mit den Seiten $P_a(C), P_b(C)$ und $P_c(C)$ ist perspektiv zum Dreieck abc .

b) Zeigen Sie: Zu zwei Dreiecken in perspektiver Lage gibt es immer einen nicht-entarteten Kegelschnitt C , so dass beide Dreiecke bezüglich C zueinander polar sind.

Aufgabe 4.9 Welcher der beiden Kegelschnitte in $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$

$$C : x_0x_1 + x_0x_2 + x_1^2 + x_1x_2 = 0,$$

$$D : x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + 2x_0x_1 + 2x_0x_2 = 0$$

ist entartet, welcher nicht? Bestimmen Sie für den nicht-entarteten Kegelschnitt den Typ seines Durchschnitts mit der affinen Ebene $x_0 \neq 0$.

Aufgabe 4.10 Welcher der beiden Kegelschnitte in $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$

$$C : x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - x_0x_1 - x_0x_2 = 0, \quad D : x_0^2 + x_0x_1 - x_1x_2 - x_2^2 = 0$$

ist entartet, welcher nicht? Bestimmen Sie für den nicht-entarteten Kegelschnitt den Durchschnitt mit der Geraden $x_0 = 0$ und die Tangenten in den Punkten dieses Durchschnitts.

4.3 Parametrisierung von Kegelschnitten

Geraden im \mathbb{P}_2 kann man implizit, durch ihre Gleichung beschreiben, aber auch explizit, durch eine Parametrisierung. Kegelschnitte haben wir bisher nur implizit, durch ihre Gleichung beschrieben. Man kann aber auch Kegelschnitte explizit beschreiben, und zwar kann man einen Kegelschnitt durch die Punkte einer projektiven Geraden \mathbb{P}_1 parametrisieren. Das bekannteste Beispiel dafür ist die *stereographische Projektion*:

Betrachten wir den Einheitskreis $S : \{x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$. (Man kann das folgende auch mit der Sphäre im \mathbb{R}^3 , oder mit der $n - 1$ -dimensionalen Sphäre im \mathbb{R}^n machen.) Auf S fixieren wir einen Punkt $\mathbf{p} = (0, 1)$ (den ‘‘Nordpol‘‘). Jede Gerade L durch \mathbf{p} schneidet den Kreis S in \mathbf{p} und in einem weiteren Punkt \mathbf{x} . Das gilt ausnahmslos für alle Geraden L durch \mathbf{p} und über jedem Körper \mathbb{K} : Die quadratische Gleichung, welche die Schnittpunkte von S und L beschreibt, hat eine Nullstelle, für den Punkt $\mathbf{p} \in S \cap L$, und muß deswegen auch eine zweite Nullstelle in \mathbb{K} haben. Natürlich kann der dazu gehörende zweite Schnittpunkt mit dem ersten Schnittpunkt \mathbf{p} zusammenfallen. Und zwar genau dann, wenn L die Tangente an S in \mathbf{p} ist.

Um Formeln zu bekommen, parametrisieren wir die Geraden L durch \mathbf{p} mit Hilfe ihrer Schnittpunkte $(u, 0)$ mit der x -Achse. Dann hat L also die Gleichung

$$\frac{x}{u} + y = 1, \quad \text{bzw. } y = 1 \text{ für } u = \infty \text{ (Tangente).}$$

Eliminieren wir $y = 1 - x/u$ aus der Kreisgleichung, so erhalten wir

$$x^2 + \left(1 - \frac{x}{u}\right)^2 = 1, \quad x^2 - \frac{2x}{u} + \frac{x^2}{u^2} = 0, \quad x \cdot \left(1 + \frac{1}{u^2}\right) = \frac{2}{u},$$

und daraus

$$x = \frac{2u}{u^2 + 1}, \quad y = \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}.$$

Diese Formeln für die stereographische Projektion sind ziemlich geläufig. (Für $u \rightarrow \infty$ bekommen wir tatsächlich $(x, y) = (0, 1) = \mathbf{p}$.)

Die stereographische Projektion ist eine bijektive Abbildung des Einheitskreises auf die x -Achse, letztere aufgefaßt als projektive Gerade. Ihre Umkehrung ist die Parametrisierung des Einheitskreises durch die Punkte der projektiven Geraden \mathbb{P}_1

$$(u_0 : u_1) \mapsto (u_0^2 + u_1^2 : 2u_0u_1 : u_1^2 - u_0^2).$$

Und all das liegt nicht am Einheits-Kreis. Die stereographische Projektion funktioniert genauso bei jedem nicht-entarteten Kegelschnitt C , auf dem ein Punkt $\mathbf{p} \in C$ gegeben ist:

Schauen wir uns das noch einmal für den Kegelschnitt in Normalform

$$x_0x_1 - x_2^2 = 0$$

vom Ende des letzten Abschnitts, und den Punkt $\mathbf{p} = (1 : 0 : 0)$ an. (Wir haben dort gesehen, daß man die Koordinaten für einen Punkt \mathbf{p} auf einem nicht-entarteten Kegelschnitt C immer so wählen kann.) Die Geraden L durch \mathbf{p} parametrisieren wir durch ihren Schnittpunkt $(0 : \mu : \lambda)$ mit der Geraden $x_0 = 0$. Dann ist

$$\mathbb{K} \ni s \mapsto (s : \mu : \lambda) \in L$$

eine Parametrisierung der Geraden L , wobei $s = \infty$ dem festen Punkt \mathbf{p} entspricht. Die Schnittpunktsgleichung für $C \cap L$ ist

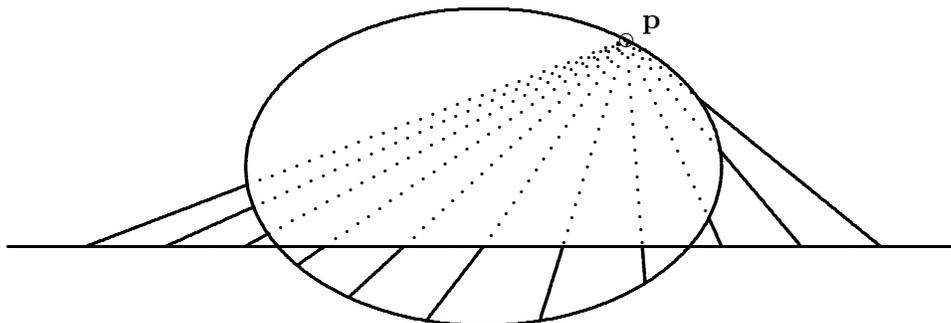
$$s \cdot \mu = \lambda^2, \quad s = \frac{\lambda^2}{\mu},$$

und dazu gehört der Schnittpunkt

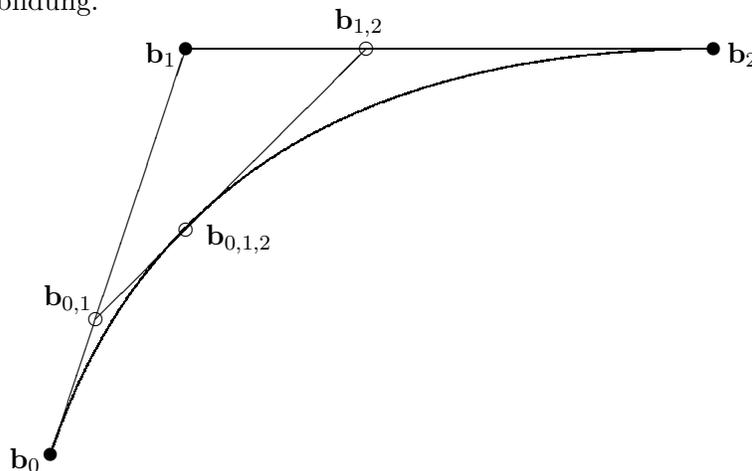
$$\left(\frac{\lambda^2}{\mu} : \mu : \lambda\right) = (\lambda^2 : \mu^2 : \lambda\mu) \in C.$$

(Für $\mu = 0$ bekommen wir hier auch wieder den Punkt \mathbf{p} .) Projektiv geschrieben ist unsere Parametrisierung für den Kegelschnitt in Normalform

$$\mathbb{P}_1 \ni (\lambda : \mu) \mapsto (\lambda^2 : \mu^2 : \lambda\mu) \in C.$$



Auf im Wesentlichen dieselbe Parametrisierung führt ein Problem der graphischen Datenverarbeitung: Man soll zwei Punkte \mathbf{b}_0 und \mathbf{b}_2 durch eine (schöne) Kurve verbinden, deren Richtung in \mathbf{b}_0 und \mathbf{b}_2 vorgegeben ist. Die Richtung sei durch einen dritten Punkt \mathbf{b}_1 bestimmt, so wie in der Abbildung.



Mit einem Hilfspunkt

$$\mathbf{b}_{0,1} = (1-t)\mathbf{b}_0 + t\mathbf{b}_1, \quad 0 \leq t \leq 1$$

durchläuft man die Strecke $\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1$, während gleichzeitig ein zweiter Hilfspunkt

$$\mathbf{b}_{1,2} = (1-t)\mathbf{b}_1 + t\mathbf{b}_2, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

die Strecke $\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2$ durchläuft. Die Kurve wird dann definiert durch die Parametrisierung

$$\begin{aligned} t &\mapsto (1-t)\mathbf{b}_{0,1} + t\mathbf{b}_{1,2} \\ &= (1-t)^2\mathbf{b}_0 + 2(1-t)t\mathbf{b}_1 + t^2\mathbf{b}_2. \end{aligned}$$

Dies ist der einfachste Fall einer sogenannten Bézier-Kurve (zu den Kontroll-Punkten \mathbf{b}_0 , \mathbf{b}_1 und \mathbf{b}_2). Transformieren wir

$$\mathbf{b}_0 = (1 : 0 : 0), \quad \mathbf{b}_2 = (0 : 1 : 0), \quad \mathbf{b}_1 = (0 : 0 : \frac{1}{2}), \quad 1-t = \lambda, \quad t = \mu,$$

so wird dies genau unsere Parametrisierung für einen Teilbogen unseres Standard-Kegelschnitts $x_0x_1 = x_2^2$.

Erinnern wir uns jetzt an den Begriff des Geradenbüschels aus 3.6. Sind $L \neq M$ zwei verschiedene Geraden eines Geradenbüschels, so besteht das Büschel genau aus allen Geraden $\lambda L + \mu M$ mit $(\lambda : \mu) \in \mathbb{P}_1$. Die Gerade \mathbb{P}_1 , mit der wir oben den Kegelschnitt C parametrisierten, war ziemlich beliebig gewählt. Sie durfte nur nicht durch das Projektionszentrum $\mathbf{p} \in C$ gehen. Wir hätten sie auch gar nicht zu spezifizieren brauchen, statt ihrer hätten wir das Geradenbüschel \mathbf{p}^* mit Zentrum \mathbf{p} nehmen können. Dieses Büschel ist auch eine Kopie der projektiven Geraden \mathbb{P}_1 , und jede Büschelgerade entspricht genau einem Punkt von C , ihrem zweiten Schnittpunkt mit C , wobei die Tangente $T_{\mathbf{p}}(C) \in \mathbf{p}^*$ dem Zentrum $\mathbf{p} \in C$ entspricht. So ist die Parametrisierung

$$\mathbb{P}_1 = \mathbf{p}^* \rightarrow C$$

kanonisch. Außer dem Projektionszentrum \mathbf{p} brauchen wir nichts mehr zu wählen, keine Hilfsgerade.

Also: Jeder Punkt \mathbf{p} auf einem nicht-entarteten Kegelschnitt C definiert eine Identifikation $\mathbb{P}_1 = \mathbf{p}^* \simeq C$ des Kegelschnitts mit der projektiven Geraden. Wir können also auch nicht-entartete Kegelschnitte als Kopien der projektiven Geraden ansehen. Das ist schön! Jeder andere Punkt $\mathbf{q} \in C$ definiert aber auch eine Identifikation $\mathbb{P}_1 = \mathbf{q}^* \simeq C$. Die Aussage des folgenden Satzes ist, daß sich beide Identifikationen $\mathbb{P}_1 \simeq C$ nur unwesentlich, d.h., um eine Projektivität, unterscheiden. Das ist noch schöner!

Fixieren wir also jetzt folgende Situation: *Es seien C ein nicht-entarteter Kegelschnitt und $\mathbf{p} \neq \mathbf{q} \in C$ zwei Punkte auf diesem Kegelschnitt. Der Kegelschnitt C definiert folgendermaßen eine Abbildung $F : \mathbf{p}^* \rightarrow \mathbf{q}^*$ des Geradenbüschels mit Zentrum \mathbf{p} in das Geradenbüschel mit Zentrum \mathbf{q} : Sei $L \in \mathbf{p}^*$ eine Gerade durch \mathbf{p} . Sie schneidet C in einem zweiten Punkt \mathbf{c}_L (bzw. zweimal in \mathbf{p} , falls L die Tangente an C in \mathbf{p} ist). $F(L) \in \mathbf{q}^*$ sei die Verbindungsgerade von \mathbf{q} mit \mathbf{c}_L (bzw. die Tangente an C in \mathbf{q} , falls $\mathbf{c}_L = \mathbf{q}$).*

Satz 4.6 *Diese Abbildung $F : \mathbf{p}^* \rightarrow \mathbf{q}^*$ ist eine Projektivität.*

Beweis: Wir rechnen die Aussage ganz einfach in Koordinaten nach.

Dazu wählen wir homogene Koordinaten wie am Ende des letzten Abschnitts so, daß $\mathbf{p} = (1 : 0 : 0)$ und $\mathbf{q} = (0 : 1 : 0)$. Außerdem soll $(0 : 0 : 1)$ der Schnittpunkt der Tangenten an C in den Punkten \mathbf{p} und \mathbf{q} sein, und der Einheitspunkt $(1 : 1 : 1)$ auf C liegen. Der Kegelschnitt C hat dann die Gleichung $x_0x_1 = x_2^2$. Die Geraden $L \in \mathbf{p}^*$ parametrisieren wir durch ihren Schnittpunkt $(0 : \mu : \lambda)$ mit der Geraden $x_0 = 0$. Oben haben wir gesehen, daß eine solche Gerade den Kegelschnitt C , außer in \mathbf{p} , noch im Punkt $(\lambda^2 : \mu^2 : \lambda\mu)$ trifft. Die zugehörige Gerade $F(L) \in \mathbf{q}^*$ ist die Verbindungsgerade

$$(\lambda^2 t : \mu^2 t + s : \lambda\mu t), (s : t) \in \mathbb{P}_1$$

dieses Punktes mit $\mathbf{q} = (0 : 1 : 0)$. Ihren Parameter in \mathbf{q}^* bestimmen wir als den Schnittpunkt mit der Geraden $x_1 = 0$:

$$\begin{aligned} \mu^2 t + s &= 0 \\ (s : t) &= (\mu^2 : -1) \\ F(L) \cap \{x_1 = 0\} &= (-\lambda^2 : 0 : -\lambda\mu) \\ &= (\lambda : 0 : \mu) \end{aligned}$$

Die Abbildung F wird also in den gewählten Koordinaten durch $(\lambda : \mu) \mapsto (\lambda : \mu)$ gegeben und ist deswegen eine Projektivität. \square

Aus diesem Satz ziehen wir zunächst eine Folgerung (den Satz von Chasles), dann kehren wir ihn um, und dann dualisieren wir ihn.

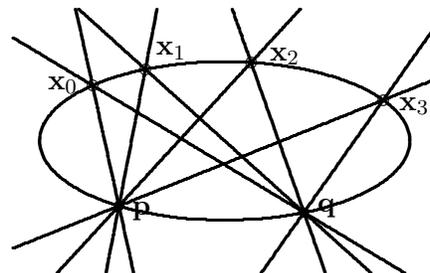
Zu je vier Punkten $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_3 \in C$ auf dem nicht-entarteten Kegelschnitt C ist ein Doppelverhältnis $DV(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1; \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ wie folgt definiert: Wir parametrisieren C durch die Geraden eines Büschels \mathbf{p}^* mit Zentrum $\mathbf{p} \in C$. Zu den vier Punkten \mathbf{x}_i gehören vier Verbindungsgeraden $L_i = \mathbf{p}\mathbf{x}_i \in \mathbf{p}^*$. Wir definieren

$$DV(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1; \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) := DV(L_0, L_1; L_2, L_3).$$

Jede andere Parametrisierung hätte sich wegen unseres letzten Satzes davon nur um eine Projektivität unterschieden, und das Doppelverhältnis wäre gleich gewesen. Dies kann man auch als Satz formulieren:

Satz 4.7 (von Chasles) *Es seien C ein nicht-entarteter Kegelschnitt und $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_3 \in C$ vier Punkte, von denen nicht mehr als zwei zusammenfallen mögen. Für $\mathbf{p} \in C$ und $\mathbf{q} \in C$ seien $L_i := \mathbf{p}\mathbf{x}_i$ und $M_i := \mathbf{q}\mathbf{x}_i$ die Verbindungsgeraden (bzw. die Tangente, falls \mathbf{p} oder \mathbf{q} mit einem der \mathbf{x}_i zusammenfällt). Dann gilt*

$$DV(L_0, L_1; L_2, L_3) = DV(M_0, M_1; M_2, M_3).$$



Jetzt zur Umkehrung des letzten Satzes. Das ist die sogenannte

Steinersche Erzeugung eines Kegelschnitts: *Es seien $\mathbf{p}^* = \{\lambda L + \mu M\}$ und $\mathbf{q}^* = \{\lambda' L' + \mu' M'\}$ zwei verschiedene Geradenbüschel in der projektiven Ebene. Weiter sei eine Projektivität $(\lambda' : \mu') = F(\lambda : \mu)$ gegeben. Dann ist die Menge der Punkte $\mathbf{a} \in \mathbb{P}_2$, in denen sich eine Gerade des ersten Büschels mit der ihr unter F entsprechenden Geraden des zweiten Büschels schneidet, ein Kegelschnitt. Dieser Kegelschnitt geht durch die Zentren beider Büschel.*

Der Kegelschnitt ist genau dann entartet, wenn die Verbindungsgerade $\mathbf{p}\mathbf{q}$ der Zentren beider Büschel unter F auf sich selbst abgebildet wird.

Beweis. Wir ändern die homogenen Koordinaten $(\lambda' : \mu')$ des zweiten Büschels so, daß die Projektivität F durch die Einheitsmatrix gegeben wird, d.h. $F(\lambda : \mu) = (\lambda : \mu)$. Wir sind interessiert an der Menge der Punkte $\mathbf{a} \in \mathbb{P}_2$, in denen sich eine Gerade $\lambda L + \mu M$ des ersten Büschels mit einer Geraden $\lambda L' + \mu M'$ des zweiten Büschels schneidet. Das ist die Menge der Punkte \mathbf{a} , wo das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} L(\mathbf{a}) \cdot \lambda + M(\mathbf{a}) \cdot \mu &= 0 \\ L'(\mathbf{a}) \cdot \lambda + M'(\mathbf{a}) \cdot \mu &= 0 \end{aligned}$$

eine nicht-triviale Lösung $(\lambda : \mu)$ besitzt. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Determinante

$$L(\mathbf{a}) \cdot M'(\mathbf{a}) - M(\mathbf{a}) \cdot L'(\mathbf{a}) = 0$$

ist. Die Funktion

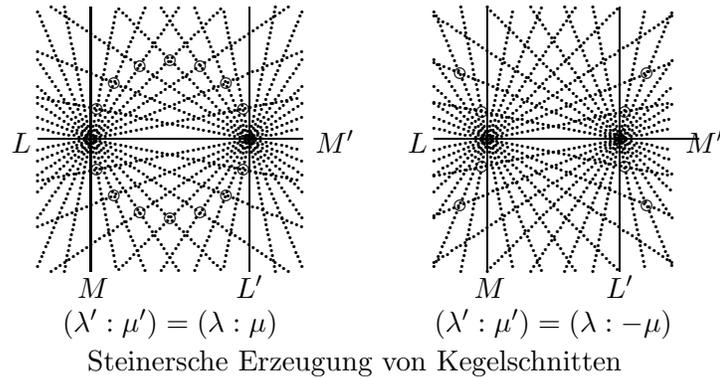
$$Q(\mathbf{x}) := L(\mathbf{x}) \cdot M'(\mathbf{x}) - M(\mathbf{x}) \cdot L'(\mathbf{x})$$

ist homogen vom Grad zwei in \mathbf{x} und ihre Nullstellenmenge ist deswegen eine Kegelschnitt. Er enthält die Zentren $L(\mathbf{x}) = M(\mathbf{x}) = 0$ und $L'(\mathbf{x}) = M'(\mathbf{x}) = 0$ beider Büschel.

Wenn die Verbindungsgerade der Zentren beider Büschel unter der Projektivität auf sich selbst abgebildet wird, so können wir die Koordinaten $(\lambda : \mu)$ derart abändern, daß $L = L'$ diese Verbindungsgerade ist. Die Gleichung des Kegelschnitts ist dann

$$Q(\mathbf{x}) = L(\mathbf{x}) \cdot (M(\mathbf{x}) - M'(\mathbf{x})) = 0$$

und der Kegelschnitt spaltet als Produkt von Geradengleichungen.



Spaltet umgekehrt die Kegelschnittgleichung die Gleichung $N(\mathbf{x}) = 0$ einer Geraden ab, dann bedeutet dies, daß durch jeden Punkt dieser Geraden eine Gerade $\lambda L + \mu M$ des ersten Büschels und die entsprechende Gerade $\lambda L' + \mu M'$ des zweiten Büschels geht.

Falls N selbst eine Gerade im ersten Büschel ist, so ändern wir die Büschelkoordinaten derart, daß $M = N$ ist. Wegen $Q|N \equiv 0$ und $L \neq N$ folgt daraus $N = M'$. Also muß N auch zum zweiten Büschel gehören, d.h. die Büschelzentren verbinden, und entspricht sich selbst unter F .

Falls N keine Büschelgerade ist, so wird die Abbildung F wie folgt gegeben. Jeder Geraden $\lambda L + \mu M$ des ersten Büschels ordnet man den Schnittpunkt $N \cap (\lambda L + \mu M)$ zu, und $F(\lambda L + \mu M)$ ist die Verbindungsgerade dieses Schnittpunkts mit dem Zentrum des zweiten Büschels. (Die Projektivität F ist eine Perspektivität in der dualen Ebene \mathbb{P}_2^* .) Aber dann bildet P offensichtlich die Verbindungsgerade der Büschelzentren auf sich selbst ab. \square

Die beiden letzten Sätze lassen sich wie folgt dualisieren:

Satz 4.8 a) Dual zur Parametrisierung Die Gerade T sei Tangente an einen nicht-entarteten Kegelschnitt C . Dann ist die Abbildung

$$C \ni \mathbf{x} \mapsto T_{\mathbf{x}}(C) \mapsto T_{\mathbf{x}}(C) \cap T \in T$$

bijektiv. (Der Berührungspunkt $\mathbf{x}_0 \in C$ von T wird dabei auf $\mathbf{x}_0 \in T$ abgebildet.) Sind T, T' zwei verschiedene Tangenten an C , so ist die Zusammensetzung der entsprechenden Bijektionen

$$T \mapsto C \mapsto T'$$

eine Projektivität.

b) **Dual zur Steinerschen Erzeugung** Gegeben sei eine Projektivität $F : T \rightarrow T'$ zwischen zwei Geraden $T \neq T' \subset \mathbb{P}_2$, welche den Schnittpunkt $T \cap T'$ nicht auf sich abbildet. Dann bilden die Verbindungsgeraden $\mathbf{a}F(\mathbf{a})$, $\mathbf{a} \in T$, einen dualen Kegelschnitt, der T und T' enthält. Anders ausgedrückt: Es gibt einen nicht-entarteten Kegelschnitt, welcher alle Verbindungsgeraden $\mathbf{a}F(\mathbf{a})$ berührt.

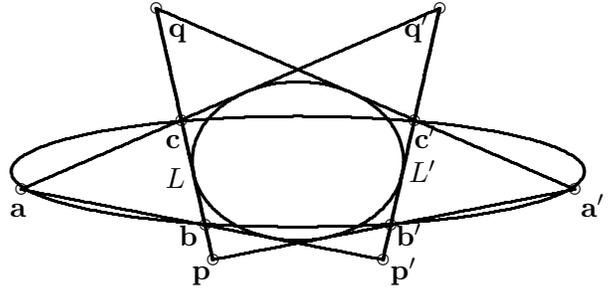
Satz 4.9 (Korollar) *Der nicht-entartete Kegelschnitt $C \subset \mathbb{P}_2$ enthalte die Ecken $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ und $\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}'$ zweier Dreiecke. Dann gibt es einen nicht-entarteten Kegelschnitt D , der die sechs Seiten dieser beiden Dreiecke berührt.*

Beweis (trickreich). Wir bezeichnen die Seite \mathbf{bc} mit L und die Seite $\mathbf{b}'\mathbf{c}'$ mit L' und betrachten die Hintereinander-Ausführung von Perspektivitäten

$$L \rightarrow (\mathbf{a}')^* \rightarrow C \rightarrow \mathbf{a}^* \rightarrow L'.$$

Unter diesen Perspektivitäten verfolgen wir die vier Punkte $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{p} := \mathbf{a}'\mathbf{b}' \cap L$ und $\mathbf{q} := \mathbf{a}'\mathbf{c}' \cap L$ aus L . Diese vier Punkte werden folgendermaßen abgebildet:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{p}, \mathbf{q} \in L &\mapsto \mathbf{a}'\mathbf{b}, \mathbf{a}'\mathbf{c}, \mathbf{a}'\mathbf{p}, \mathbf{a}'\mathbf{q} \in (\mathbf{a}')^* \\ &\mapsto \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{b}', \mathbf{c}' \in C \\ &\mapsto \mathbf{ab}, \mathbf{ac}, \mathbf{ab}', \mathbf{ac}' \in \mathbf{a}^* \\ &\mapsto \mathbf{p}' := \mathbf{ab} \cap L' \\ &\quad \mathbf{q}' := \mathbf{ac} \cap L', \mathbf{b}', \mathbf{c}' \in L' \end{aligned}$$



Nach dem Dual zur Steinerschen Erzeugung gibt es einen nicht-entarteten Kegelschnitt D , der die vier Verbindungslinien \mathbf{bp}' , \mathbf{cq}' , \mathbf{pb}' , \mathbf{qc}' sowie die beiden Geraden L und L' berührt. Dies sind die sechs Seiten beider Dreiecke. \square

Zwei Punkte $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ auf einem Kegelschnitt bestimmen eine Gerade, und diese Gerade schneidet jede feste Gerade L in einem durch \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_2 bestimmten Punkt \mathbf{y} . Die Koordinaten dieses Punktes \mathbf{y} wollen wir jetzt ausrechnen. Dazu wählen wir die homogenen Koordinaten so, daß die Rechnung besonders einfach wird.

Satz 4.10 (Kollinearitätskriterium) *Auf dem nicht-entarteten Kegelschnitt $C : x_0x_1 = x_2^2$ seien zwei Punkte*

$$\mathbf{x}_1 = (\lambda_1^2 : \mu_1^2 : \lambda_1\mu_1) \neq \mathbf{x}_2 = (\lambda_2^2 : \mu_2^2 : \lambda_2\mu_2)$$

gegeben.

a) *Auf der Geraden $L : x_2 = 0$, welche C in den Koordinatenpunkten $\mathbf{a} = (1 : 0 : 0)$ und $\mathbf{b} = (0 : 1 : 0)$ schneidet, ist der Punkt*

$$\mathbf{y}_L := (\lambda_1\lambda_2 : -\mu_1\mu_2 : 0) = (-1 : \frac{\mu_1}{\lambda_1} \cdot \frac{\mu_2}{\lambda_2} : 0)$$

mit \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_2 kollinear.

b) *Auf der Geraden $M : x_0 = 0$, welche C in \mathbf{b} berührt, ist der Punkt*

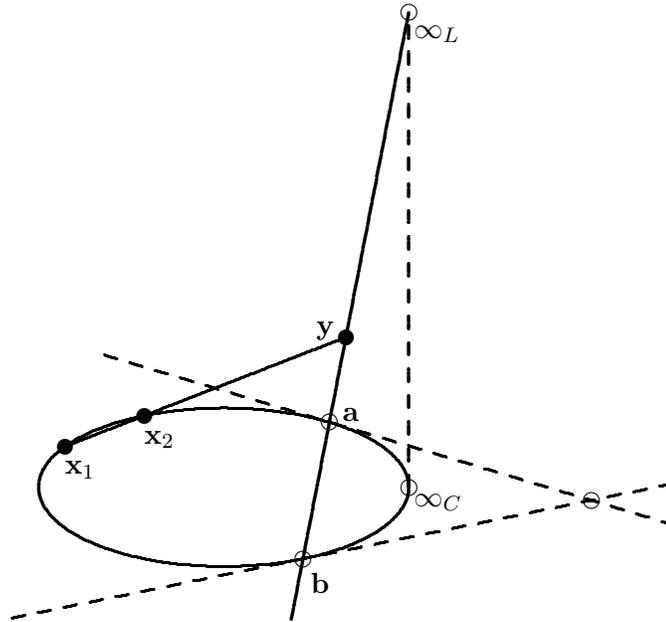
$$\mathbf{y}_M := (0 : \lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1 : \lambda_1\lambda_2) = (0 : \frac{\mu_1}{\lambda_1} + \frac{\mu_2}{\lambda_2} : 1)$$

mit \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_2 kollinear.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}
 \lambda_2 \mu_2 \mathbf{x}_1 - \lambda_1 \mu_1 \mathbf{x}_2 &= (\lambda_2 \mu_2 \lambda_1^2 - \lambda_1 \mu_1 \lambda_2^2 : \lambda_2 \mu_2 \mu_1^2 - \lambda_1 \mu_1 \mu_2^2 : 0) \\
 &= (\lambda_1 \lambda_2 \cdot (\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1) : \mu_1 \mu_2 \cdot (\lambda_2 \mu_1 - \lambda_1 \mu_2) : 0) \\
 &= \mathbf{y}_L, \\
 \lambda_2^2 \mathbf{x}_1 - \lambda_1^2 \mathbf{x}_2 &= (0 : \lambda_2^2 \mu_1^2 - \lambda_1^2 \mu_2^2 : \lambda_2^2 \lambda_1 \mu_1 - \lambda_1^2 \lambda_2 \mu_2) \\
 &= (0 : (\lambda_2 \mu_1 + \lambda_1 \mu_2)(\lambda_2 \mu_1 - \lambda_1 \mu_2) : \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2 \mu_1 - \lambda_1 \mu_2)) \\
 &= \mathbf{y}_M.
 \end{aligned}$$

□



Diese Formeln sehen sehr technisch aus, man kann sie aber verstehen, und als eine Art von Menelaos-Satz am Kegelschnitt auffassen. Natürlich dürfen wir jetzt kein Teilverhältnis mehr verwenden, sondern müssen alles mit Doppelverhältnissen ausdrücken. Dazu erinnern wir uns an

$$DV(\mathbf{x}, \infty; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{TV(\mathbf{x}; \mathbf{u}, \mathbf{v})}{TV(\infty; \mathbf{u}, \mathbf{v})} = TV(\mathbf{x}; \mathbf{u}, \mathbf{v}),$$

wegen $TV(\infty; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 1$. Bezeichnen wir die drei unendlich-fernen Punkte auf den Dreiecks-Seiten a, b, c mit $\infty_a, \infty_b, \infty_c$, so wird die Menelaos-Bedingung am Dreieck

$$DV(\mathbf{a}', \infty_a; \mathbf{b}, \mathbf{c}) \cdot DV(\mathbf{b}', \infty_b; \mathbf{c}, \mathbf{a}) \cdot DV(\mathbf{c}', \infty_c; \mathbf{a}, \mathbf{b}) = 1.$$

Um die Aussage des letzten Satzes in eine Menelaos-ähnliche Form zu bringen, brauchen wir eine Gerade, welche die Rolle der unendlich-fernen Gerade übernehmen muß. Nehmen wir dafür die Tangente an C im Punkt $\infty_C := (1 : 1 : 1)$. Sie hat die Gleichung $x_0 + x_1 - 2x_2 = 0$ und

schneidet die Gerade L in $\infty_L := (1 : -1 : 0)$. Setzen wir noch $\mathbf{a} := (1 : 0 : 0)$ und $\mathbf{b} = (0 : 1 : 0)$, so wird

$$\begin{aligned} DV(\mathbf{x}_1, \infty_C; \mathbf{a}, \mathbf{b}) &= DV\left(\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right) \\ &= \frac{-\mu_1}{\lambda_1} : \frac{-1}{1} \\ &= \frac{\mu_1}{\lambda_1}, \\ DV(\mathbf{x}_2, \infty_C; \mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \frac{\mu_2}{\lambda_2}, \\ DV(\mathbf{y}, \infty_L; \mathbf{a}, \mathbf{b}) &= DV\left(\left(\begin{pmatrix} -1 \\ \mu_1\mu_2/\lambda_1\lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right) \\ &= \frac{-\mu_1\mu_2/\lambda_1\lambda_2}{-1} : \frac{1}{1} \\ &= \frac{\mu_1}{\lambda_1} \cdot \frac{\mu_2}{\lambda_2}. \end{aligned}$$

Als Kollinearitätsbedingung haben wir dann die Gleichung

$$DV(\mathbf{x}_1, \infty_C; \mathbf{a}, \mathbf{b}) \cdot DV(\mathbf{x}_2, \infty_C; \mathbf{a}, \mathbf{b}) \cdot DV(\mathbf{y}, \infty_L; \mathbf{b}, \mathbf{a}) = 1.$$

Hier kommen jetzt keine Koordinaten mehr explizit vor. In dieser Form ist sie also eine Kollinearitätsbedingung für jede Sekante L eines nicht-entarteten Kegelschnitts C , wo eine „unendlich-ferne“ Hilfs-Gerade festgehalten ist, welche C im Punkt ∞_C berührt, und L im Punkt $\infty_L \notin C$ schneidet.

Natürlich kann man auch noch die Kollinearitätsbedingung für eine Tangente M (Fall b)) mit Doppelverhältnissen formulieren. Da muß man dann sicher addieren, statt multiplizieren. Das möchte ich hier aber nicht mehr tun.

Aufgabe 4.11 Parametrisieren Sie den Kegelschnitt

$$C : x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - 2(x_0x_1 + x_1x_2 + x_2x_0) = 0$$

durch $(\lambda : \mu) \in \mathbb{P}_1$ derart, daß $(1 : 0 : 1) \in C$ den Parameter $(1 : 0)$ und $(1 : 1 : 0) \in C$ den Parameter $(0 : 1)$ hat.

Aufgabe 4.12 Bestimmen Sie das Doppelverhältnis der vier Punkte $(-1 : -1 : 1)$, $(-3 : 13 : 4)$, $(5 : 3 : 4)$ und $(6 : -5 : 7)$ auf dem Kegelschnitt

$$C : 3x_0^2 + x_1^2 - 5x_2^2 - 2x_1x_2 + x_0x_2 = 0.$$

Aufgabe 4.13 Bestimmen Sie das Doppelverhältnis der vier Punkte

a) $(1 : -1 : 0)$, $(1 : 1 : 0)$; $(1 : 0 : -1)$, $(1 : 0 : 1)$ auf dem Kegelschnitt $x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0$.

b) $(1 : -1 : -1)$, $(1 : -1 : 1)$; $(1 : 1 : 1)$, $(1 : 1 : -1)$ auf dem Kegelschnitt $2x_1^2 - x_2^2 - x_0^2 = 0$.

c) $(1 : 3 : 4)$, $(1 : -4 : 3)$; $(1 : -3 : -4)$, $(1 : 4 : -3)$ auf dem Kegelschnitt $x_1^2 + x_2^2 - 25x_0^2 = 0$.

4.4 Projektivitäten auf Kegelschnitten

Im letzten Abschnitt sahen wir, wie man nicht-entartete Kegelschnitte C als (zugegeben, etwas gekrümmte) projektive Geraden \mathbb{P}_1 auffassen kann. Deswegen gibt es auf C auch Projektivitäten

$$P : C \simeq \mathbb{P}_1 \xrightarrow{p} \mathbb{P}_1 \simeq C.$$

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit derartigen Projektivitäten $P : C \rightarrow C$ befassen.

Wir parametrisieren den Kegelschnitt C etwa wie oben

$$\mathbb{P}_1 \ni (\lambda : \mu) \mapsto (\lambda^2 : \mu^2 : \lambda\mu) \in C$$

und wenden auf $(\lambda : \mu)$ eine Projektivität

$$p : \lambda' = a\lambda + b\mu, \mu' = c\lambda + d\mu$$

an. Zum Parameter $(\lambda' : \mu')$ gehört auf C der Punkt mit den Koordinaten

$$\begin{aligned} x_0 &= \lambda'^2 &= a^2\lambda^2 + b^2\mu^2 + 2ab\lambda\mu, \\ x_1 &= \mu'^2 &= c^2\lambda^2 + d^2\mu^2 + 2cd\lambda\mu, \\ x_2 &= \lambda'\mu' &= ac\lambda^2 + bd\mu^2 + (ad + bc)\lambda\mu. \end{aligned}$$

Dies ist genau der Punkt mit dem Koordinatenvektor

$$\begin{pmatrix} a^2 & b^2 & 2ab \\ c^2 & d^2 & 2cd \\ ac & bd & ad + bc \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda^2 \\ \mu^2 \\ \lambda\mu \end{pmatrix}.$$

Das heißt also, *jede Projektivität p auf C wird durch eine Projektivität P des \mathbb{P}_2 induziert.* Gehört zu p die Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

dann wird (in den oben gewählten Koordinaten) P durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} a^2 & b^2 & 2ab \\ c^2 & d^2 & 2cd \\ ac & bd & ad + bc \end{pmatrix}$$

gegeben. Damit haben wir insbesondere den Existenz-Teil des folgenden Satzes bewiesen:

Satz 4.11 (Projektivitäten auf Kegelschnitten) *Es sei $C \subset \mathbb{P}_2$ ein nicht-entarteter Kegelschnitt. Jede Projektivität $p : C \rightarrow C$ auf C wird dann durch genau eine Projektivität P des \mathbb{P}_2 induziert.*

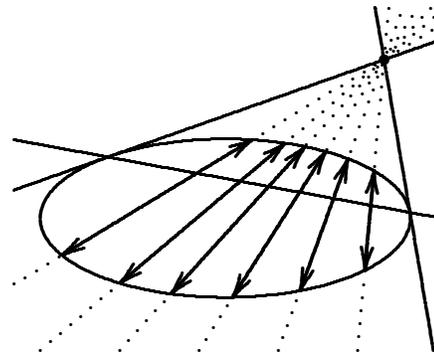
Beweis. Wir brauchen nur noch zu zeigen, dass eine Projektivität $P : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$ mit $P(C) = C$ eindeutig durch $P|_C = p$ bestimmt ist. Dazu fixieren wir vier verschiedene Punkte $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_3$ auf C . (Damit es auf C Punkte gibt, müssen wir eventuell $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ voraussetzen.) Wären drei

dieser Punkte kollinear, so würde ihre Gerade L den Kegelschnitt in ≥ 3 Punkten schneiden. Daraus würde $L \subset C$ folgen, und C wäre entartet, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also sind je drei der vier Punkte projektiv unabhängig, und nach dem Prinzip der projektiven Ausdehnung ist P eindeutig festgelegt durch die vier Bildpunkte $p(\mathbf{x}_i)$, d.h., durch p . \square

Wir betrachten nun insbesondere eine Involution $p : C \rightarrow C$. Wegen der Eindeutigkeit im vorangehenden Satz (angewendet auf $p^2 = id_C$) ist die Fortsetzung $P : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$ auch wieder eine Involution.

Jede Involution $p : C \rightarrow C$ hat zwei Fixpunkte $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2 \in C$. Auch unter der projektiven Fortsetzung P von p bleiben diese beiden Punkte invariant. Dann bildet P außerdem die beiden Tangenten $T_1 := T_{\mathbf{x}_1}(C)$ und $T_2 := T_{\mathbf{x}_2}(C)$ in sich ab. Deren Schnittpunkt $\mathbf{z} := T_1 \cap T_2$ ist dann ein weiterer Fixpunkt von P .

Sei Z die Verbindungsgerade der beiden Fixpunkte \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_2 , die Polare $P_{\mathbf{z}}(C)$. Dann ist $P(Z) = Z$. Wählen wir zwei Punkte $\mathbf{x} \neq p(\mathbf{x}) \in C$, die sich unter der Involution p entsprechen, so ist auch deren Verbindungsgerade L unter P invariant. Sie schneidet Z in einem Fixpunkt von P , der weder \mathbf{x}_1 noch \mathbf{x}_2 sein kann. Damit hat $P|_Z$ mindestens drei Fixpunkte, und muss $= id_Z$ sein. Die ganze Gerade Z besteht aus Fixpunkten. Dann bleibt auch jede Gerade $L \neq T_i$ durch \mathbf{z} unter P fest. (Sie enthält ja die zwei Fixpunkte \mathbf{z} und $L \cap Z$.) Damit schneidet L den Kegelschnitt C in zwei Punkten, die sich unter der Involution p entsprechen, und die beiden Schnittpunkte werden von den beiden Fixpunkten harmonisch getrennt.



Satz 4.12 (Involutionen auf Kegelschnitten) *Jede Involution $p : C \rightarrow C$ auf einem (nicht-entarteten) Kegelschnitt C ist die Einschränkung einer Involution $P : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$, welche eine Gerade Z von Fixpunkten und einen isolierten Fixpunkt \mathbf{z} besitzt. Die Geraden durch \mathbf{z} schneiden auf C genau die Punktepaare aus, welche sich unter der Involution p entsprechen.*

Satz 4.13 (Nocheinmal konjugierte Geraden) *Es seien C ein nicht-entarteter Kegelschnitt und $L, M \subset \mathbb{P}_2$ zwei Geraden, keine Tangenten an C . Dann ist äquivalent:*

- 1) *Die Geraden L und M sind bezüglich C konjugiert.*
- 2) *Die Geraden L und M schneiden auf C zwei Punkte-Paare aus, die sich auf C harmonisch trennen.*

Beweis. Die Paare der Schnittpunkte seien $L \cap C = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ und $M \cap C = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$.

„1) \Rightarrow 2)“: Wenn L und M konjugiert sind, liegt der Pol \mathbf{z} von L bezüglich C auf M . Sei $P : C \rightarrow C$ eine Involution mit den Fixpunkten \mathbf{a}_1 und \mathbf{a}_2 . Sie wird induziert durch die Involution $P : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$ mit Fixpunkt \mathbf{z} und Fixgerade L . Weil M durch \mathbf{z} geht, ist $P(\mathbf{b}_1) =$

\mathbf{b}_2 . Die Involution p hat also die Fixpunkte $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ und vertauscht die Punkte $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$. Es folgt $DV(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = -1$.

„2) \Rightarrow 1)“: Weil sich die Paare $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ und $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ harmonisch trennen, gibt es eine Involution $p : C \rightarrow C$ mit den Fixpunkten $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ und $p(\mathbf{b}_1) = \mathbf{b}_2$. Die zugehörige Involution $P : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$ hat als Fixpunkt \mathbf{z} den Pol von L , und L als Fixgerade. Wegen $P(\mathbf{b}_1) = \mathbf{b}_2$ geht die Gerade M durch diesen Pol. Also sind L und M konjugiert. \square

Falls der Grundkörper $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist, hat jede Projektivität $id \neq p : \mathbb{P}_1(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ entweder zwei Fixpunkte oder einen Fixpunkt (Aufgabe 3.5). Im ersten Fall können wir homogene Koordinaten $(x_0 : x_1)$ so wählen, dass $p(x_0 : x_1) = (x_0 : k \cdot x_1)$, und im zweiten Fall so, dass $p(x_0 : x_1) = (x_0 : x_1 + k \cdot x_0)$. Wir wenden dies jetzt auf Projektivitäten $p : C \rightarrow C$ auf einem Kegelschnitt an. Dazu definieren wir die *Achse der Projektivität* als die Verbindungsgerade der beiden Fixpunkte, falls p zwei Fixpunkte hat, und wenn p nur einen Fixpunkt hat, als die Tangente in diesem Fixpunkt an C .

Damit ist, streng genommen, die Achse nur definiert, wenn wir $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ nehmen. Aber falls $C \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ ein reeller Kegelschnitt und $p : C \rightarrow C$ eine reelle Projektivität ist, dann ist das charakteristische Polynom der Matrix zu p reell. Wenn es keine reelle Nullstelle hat, dann besitzt es zwei konjugiert-komplexe Nullstellen. Dazu gehören dann zwei, voneinander verschiedene, konjugiert-komplexe Eigenvektoren, etwa

$$\mathbf{v} = (v_0, v_1, v_2) \text{ und } \bar{\mathbf{v}} = (\bar{v}_0, \bar{v}_1, \bar{v}_2).$$

Deren Verbindungsgerade hat eine Gleichung

$$(v_1\bar{v}_2 - v_2\bar{v}_1)x_0 + (v_2\bar{v}_0 - v_0\bar{v}_2)x_1 + (v_0\bar{v}_1 - v_1\bar{v}_0)x_2 = 0$$

mit rein imaginären Koeffizienten. Teilt man diese Gleichung durch i , so wird sie reell, und definiert eine reelle Gerade als Achse.

Satz 4.14 (Achsensatz für Kegelschnitte) *Es sei $id \neq p : C \rightarrow C$ eine Projektivität auf dem nicht-entarteten Kegelschnitt $C \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Dann gilt für je zwei Punkte $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2, p(\mathbf{x}_2), p^{-1}(\mathbf{x}_2) \in C$, die keine Fixpunkte von p sind: Die Verbindungsgeraden $\mathbf{x}_1p(\mathbf{x}_2)$ und $\mathbf{x}_2p(\mathbf{x}_1)$ treffen sich auf der Achse von p .*

Beweis. Wir bringen den Kegelschnitt in Normalform

$$x_0x_1 = x_2^2$$

und unterscheiden dann zwei Fälle, je nachdem ob p zwei oder einen Fixpunkt hat.

Fall 1: Die Projektivität p habe zwei verschiedene Fixpunkte auf C . Wir wählen die Koordinaten so, dass dies die Koordinatenpunkte $(1 : 0 : 0)$ und $(0 : 1 : 0)$ sind. Die Achse ist dann die Gerade $L : x_2 = 0$.

Wie üblich parametrisieren wir die Punkte von C durch

$$\mathbb{P}_1 \ni (\lambda : \mu) \mapsto (\lambda^2 : \mu^2 : \lambda\mu).$$

Die Abbildung p wird dann durch $(\lambda : \mu) \mapsto (\lambda : k \cdot \mu)$ gegeben. Bezeichnen wir mit $(\lambda_i : \mu_i)$ den Parameterpunkt zu \mathbf{x}_i , so haben wir also folgende Punkte auf C mit ihren Parametern:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{x}_1 : & (\lambda_1 : \mu_1) & \mathbf{x}_2 : & (\lambda_2 : \mu_2) \\ p(\mathbf{x}_1) : & (\lambda_1 : k \cdot \mu_1) & p(\mathbf{x}_2) : & (\lambda_2 : k \cdot \mu_2) \end{array}$$

Im Kollinearitätskriterium am Ende des Abschnitts 4.3 haben wir in dieser Situation den Schnittpunkt einer Verbindungsgerade zweier Punkte auf C mit der Geraden L berechnet. Wir finden

$$\overline{\mathbf{x}_1 p(\mathbf{x}_2)} \cap L = (\lambda_1 \lambda_2 : -k \cdot \mu_1 \mu_2 : 0) = \overline{\mathbf{x}_2 p(\mathbf{x}_1)} \cap L.$$

Der Schnittpunkt beider Verbindungsgeraden liegt also auf der Achse $x_2 = 0$.

Fall 2: Die Projektivität p habe nur einen Fixpunkt auf C . Wir wählen ihn als Koordinatenpunkt $(0 : 1 : 0)$. Die Achse ist dann also die Gerade $M : x_0 = 0$.

Die Koordinaten $(\lambda : \mu)$ wählen wir so, dass die Projektivität p durch $p(\lambda : \mu) = (\lambda : \mu + k\lambda)$ gegeben wird. Wir haben dann auf C die Punkte

$$\begin{array}{ll} \mathbf{x}_1 : & (\lambda_1 : \mu_1) & \mathbf{x}_2 : & (\lambda_2 : \mu_2) \\ p(\mathbf{x}_1) : & (\lambda_1 : \mu_1 + k\lambda_1) & p(\mathbf{x}_2) : & (\lambda_2 : \mu_2 + k\lambda_2) \end{array}$$

Auch für diesen Fall haben wir im Kollinearitätskriterium berechnet

$$\overline{\mathbf{x}_1 p(\mathbf{x}_2)} \cap M = (0 : \lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1 + k\lambda_1 \lambda_2 : \lambda_1 \lambda_2) = \overline{\mathbf{x}_2 p(\mathbf{x}_1)} \cap M.$$

Und wieder liegt der Schnittpunkt beider Verbindungsgeraden auf der Achse. □

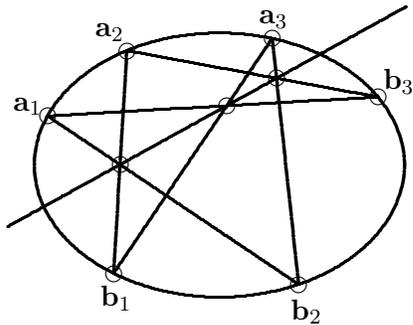
Als Anwendung des Achsensatzes beweisen wir jetzt den Satz von Pascal, der - nicht zu Unrecht - als der schönste Satz der elementaren projektiven Geometrie gilt:

Satz 4.15 (Hexagramma mysticum) *Es seien $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ und $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \in C$ sechs verschiedene Punkte auf dem nicht-entarteten Kegelschnitt C . Dann liegen die drei Schnittpunkte der drei Geradenpaare*

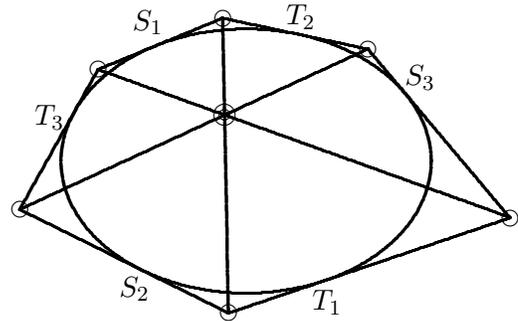
$$\mathbf{a}_1 \mathbf{b}_2 \cap \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_1, \quad \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_3 \cap \mathbf{a}_3 \mathbf{b}_2, \quad \mathbf{a}_3 \mathbf{b}_1 \cap \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_3$$

auf einer Geraden (der Pascal-Geraden).

Beweis: Nach dem Prinzip der projektiven Ausdehnung gibt es eine Projektivität $p : C \rightarrow C$ mit $p(\mathbf{a}_i) = \mathbf{b}_i, i = 1, 2, 3$. Die Pascal-Gerade ist nichts anderes als die Achse dieser Projektivität. □



Pascal



Brianchon

Der Satz von Pascal dualisiert sich folgendermaßen:

Satz 4.16 (von Brianchon) *Es seien S_1, S_2, S_3 und $T_1, T_2, T_3 \in C^*$ sechs verschiedene Tangenten an den nicht-entarteten Kegelschnitt C . Dann gehen die drei Verbindungsgeraden der drei Punktepaare*

$$S_1 \cap T_2 \text{ und } S_2 \cap T_1, \quad S_2 \cap T_3 \text{ und } S_3 \cap T_2, \quad S_3 \cap T_1 \text{ und } S_1 \cap T_3$$

durch einen Punkt.

Der Satz von Pascal ist ein ziemlich zentraler Satz, von ihm ausgehend kann man ziemlich interessante mathematische Fäden spinnen. Eine Richtung, die ich hier nicht weiter verfolgen möchte, beginnt mit der Bemerkung, dass sechs Punkte auf einem nicht-entarteten Kegelschnitt ja nicht nur auf eine Weise ein Sechseck bilden. Unsere Wahl der Verbindungsgeraden gehört zum Sechseck

$$a_1 b_2 a_3 b_1 a_2 b_3.$$

Ich habe diese Bezeichnungen für die Punkte, und ihre Reihenfolge auf dem Kegelschnitt so gewählt, um die Analogie zum Satz von Pappos deutlich zu machen, und damit die Pascal-Gerade schön im Bild liegt.

Man kann die sechs Punkte aber in jeder anderen Reihenfolge als ein Sechseck auffassen. Und jedesmal gibt es eine Pascal-Gerade, auf der sich die drei Paare gegenüberliegender Sechsecks-Seiten schneiden. Insgesamt gibt es $6! = 720$ Permutationen der sechs Punkte. Aber eine Diedergruppe der Ordnung 12 (erzeugt von einer zyklischen Vertauschung der Ordnung sechs und einer Spiegelung) lässt das Sechseck invariant. Damit gibt es

$$\frac{6!}{12} = 60$$

wesentlich verschiedene Sechsecke, und 60 verschiedene Pascal-Geraden. Die Konfiguration dieser 60 Pascal-Geraden hat sehr viel mit der Permutationsgruppe S_6 zu tun. Es gibt darüber eine sehr umfangreiche Literatur (aus dem vorletzten Jahrhundert). Die wesentlichen Resultate sind in

dem wunderschönen, aber leider auch ziemlich unlesbaren Buch „Geometrische Konfigurationen“ von F. Levi (Verlag Hirzel, Leipzig, 1929) zu finden.

Eine andere Bemerkung ist folgende: Der Punkt \mathbf{b}_3 auf dem Kegelschnitt ist festgelegt durch die anderen fünf Punkte $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ und die Gerade $L := \mathbf{a}_2\mathbf{b}_3$. Sind nämlich die anderen fünf Punkte gegeben, und eine Gerade L durch \mathbf{a}_2 (und keinen anderen der gegebenen Punkte), so sind dadurch eindeutig festgelegt:

- der Schnittpunkt $\mathbf{p}_{1,2} = \mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 \cap \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1$,
- der Schnittpunkt $\mathbf{p}_{2,3} = \mathbf{a}_3\mathbf{b}_2 \cap L$,
- die Pascalgerade $\mathbf{p}_{1,2}\mathbf{p}_{2,3}$,
- der Schnittpunkt $\mathbf{p}_{1,3}$ der Pascalgeraden mit der Geraden $\mathbf{a}_3\mathbf{b}_1$,
- die Verbindungsgerade $M := \mathbf{a}_1\mathbf{p}_{1,3}$,
- und schließlich \mathbf{b}_3 selbst als Schnittpunkt $L \cap M$.

Dies liefert eine *Konstruktion des sechsten Punktes* auf einem nicht-entarteten Kegelschnitt, auf dem schon fünf Punkte gegeben sind. Über den Pascalschen Satz legen diese fünf Punkte einen sechsten Punkt fest auf jeder Geraden L durch \mathbf{a}_3 . Im Prinzip liefert dies eine Konstruktion aller Punkte des Kegelschnitts. Ich möchte daraus eine Folgerung ziehen:

Satz 4.17 (Fünf Punkte auf einem Kegelschnitt) *Ein nicht-entarteter Kegelschnitt ist durch fünf seiner Punkte eindeutig festgelegt.*

Eine dritte Gedankenrichtung möchte ich aber noch etwas weiter verfolgen: Was passiert, wenn zwei der Punkte unseres Sechsecks zusammenfallen? Darauf gibt es eine triviale Antwort: Nichts! Wir haben ein Fünfeck, kein Sechseck mehr, und auch keinen Satz von Pascal.

Weitaus kreativer ist aber folgende Antwort: Sehen wir es uns doch einmal an! Nehmen wir also sechs Punkte auf dem Kegelschnitt C , der Übersichtlichkeit möchte ich sie jetzt $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_6$ nennen, so dass auf der Pascalgeraden also die Schnittpunkte

$$\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 \cap \mathbf{p}_4\mathbf{p}_5, \mathbf{p}_2\mathbf{p}_3 \cap \mathbf{p}_5\mathbf{p}_6, \mathbf{p}_3\mathbf{p}_4 \cap \mathbf{p}_6\mathbf{p}_1$$

liegen. So, jetzt fixieren wir die ersten fünf Punkte, und bewegen den Punkt \mathbf{p}_6 auf dem Kegelschnitt. Dabei verändert sich das Sechseck, und auch die Pascalgerade bewegt sich (sie dreht sich um den Punkt $\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 \cap \mathbf{p}_4\mathbf{p}_5$), aber alle Inzidenzen bleiben erhalten. So, und jetzt lassen wir \mathbf{p}_6 gegen \mathbf{p}_1 konvergieren! Aus der Analysis weiß man, dass dabei die Verbindungsgerade $\mathbf{p}_6\mathbf{p}_1$ gegen die Tangente $T_{\mathbf{p}_1}(C)$ konvergiert. Weil alle Inzidenzen erhalten bleiben (??), folgt im Grenzfall der

Satz 4.18 (von Pascal, für fünf Punkte und eine Tangente) *auf dem nicht-entarteten Kegelschnitt seien fünf verschiedene Punkte $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_5$ gegeben. Dann sind die folgenden drei Punkte kollinear:*

$$\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 \cap \mathbf{p}_4\mathbf{p}_5, \mathbf{p}_2\mathbf{p}_3 \cap \mathbf{p}_5\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_3\mathbf{p}_4 \cap T_{\mathbf{p}_5}(C).$$

Dieser Satz stimmt, mein Beweis ist aber nicht wasserdicht. Irgend ein Stetigkeitsargument wird benutzt, das nicht explizit formuliert ist, und keineswegs bewiesen. Mit viel mehr Aufwand, als es in dieser Vorlesung möglich ist, kann man es wasserdicht machen. Einfacher dürfte es sein, den Beweis des Achsensatzes so zu modifizieren, dass auch Punktepaare zusammenfallen dürfen. Das möchte ich hier aber auch nicht tun. In diesem Sinn beweise ich diese Aussage (und die hier noch folgenden Aussagen) also nicht, sondern motiviere sie nur. (Natürlich sind sie richtig, ich erzähle doch nichts Falsches.)

Was man einmal geglaubt hat, muss man auch ein zweites Mal glauben. Ich kann also nochmal zwei Punkte zusammenfallen lassen, etwa \mathbf{p}_4 und \mathbf{p}_5 . Oder \mathbf{p}_2 und \mathbf{p}_3 ? Das scheint zwei verschiedene Aussagen zu ergeben. Damit hatte ich nicht gerechnet. Ich wollte alle Entartungsfälle des Pascalschen Satzes hier anführen. Nun wird mir deren Systematik etwas zu unübersichtlich. Lassen wir es sein. Nur auf den allerspeziellsten Fall möchte ich noch hinweisen: Wenn das Sechseck zu einem Dreieck und drei Tangenten entartet.

Satz 4.19 (von Pascal, für Dreieck und Tangenten) *Auf einem nicht-entarteten Kegelschnitt seien drei verschiedene Punkte $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ gegeben. Dann sind die folgenden drei Schnittpunkte kollinear:*

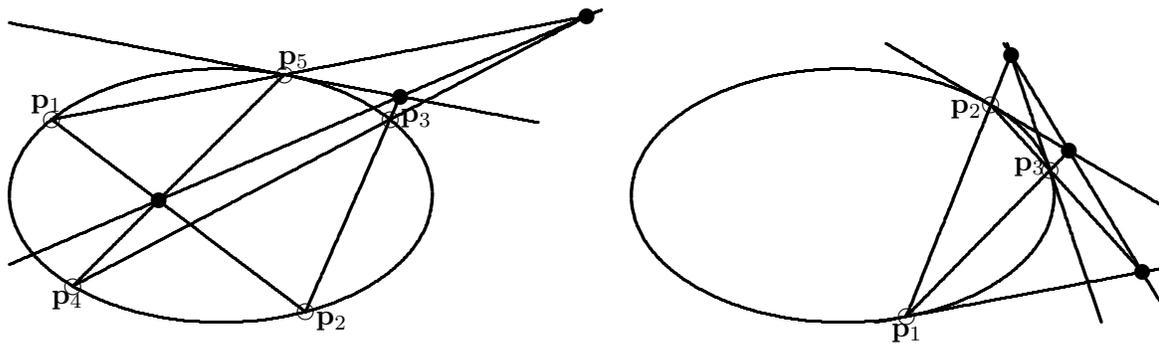
$$\mathbf{p}'_1 = \mathbf{p}_2\mathbf{p}_3 \cap T_{\mathbf{p}_1}(C), \quad \mathbf{p}'_2 = \mathbf{p}_3\mathbf{p}_1 \cap T_{\mathbf{p}_2}(C), \quad \mathbf{p}'_3 = \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 \cap T_{\mathbf{p}_3}(C).$$

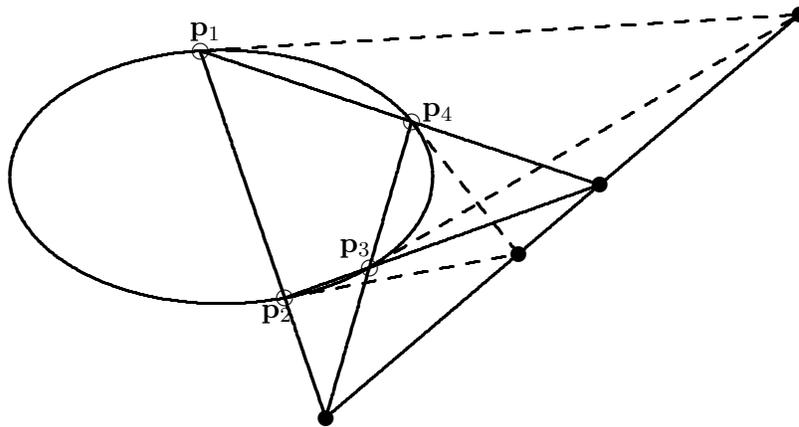
Das muss doch was mit dem Satz von Menelaos zu tun haben? Oder? Dann müsste doch eigentlich auch der folgende Satz am Dreieck richtig sein: Es seien T_a, T_b, T_c die Tangenten an den Umkreis eines Dreiecks $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Dann sind die Punkte

$$T_a \cap \mathbf{bc}, \quad T_b \cap \mathbf{ca}, \quad T_c \cap \mathbf{ab}$$

kollinear.

Variationen des Satzes von Pascal:





Das Zusammenfallen von Punkten kann man natürlich auch dualisieren und erhält Entartungsfälle des Satzes von Brianchon: Sei also ein Tangenten-Sechseck T_1, \dots, T_6 an den Kegelschnitt gegeben. Nach Brianchon laufen dann die Verbindungsgeraden der folgenden Punktepaare (gegenüberliegende Ecken des Sechsecks) durch einen Punkt:

$$T_1 \cap T_2 \text{ und } T_4 \cap T_5, \quad T_2 \cap T_3 \text{ und } T_5 \cap T_6, \quad T_3 \cap T_4 \text{ und } T_6 \cap T_1.$$

Wenn hier die Tangente T_6 gegen T_1 konvergiert, konvergiert der Schnittpunkt $T_6 \cap T_1$ offenbar gegen den Berührungspunkt \mathbf{p}_1 der Tangente $T_6 = T_1$. Jetzt laufen die Verbindungsgeraden der folgenden Punktepaare durch einen Punkt:

$$T_1 \cap T_2 \text{ und } T_4 \cap T_5, \quad T_2 \cap T_3 \text{ und } T_5 \cap T_1, \quad T_3 \cap T_4 \text{ und } \mathbf{p}_1.$$

Das kann man jetzt auch noch iterieren, keine Ahnung, wieviel verschiedene Fälle das liefert.

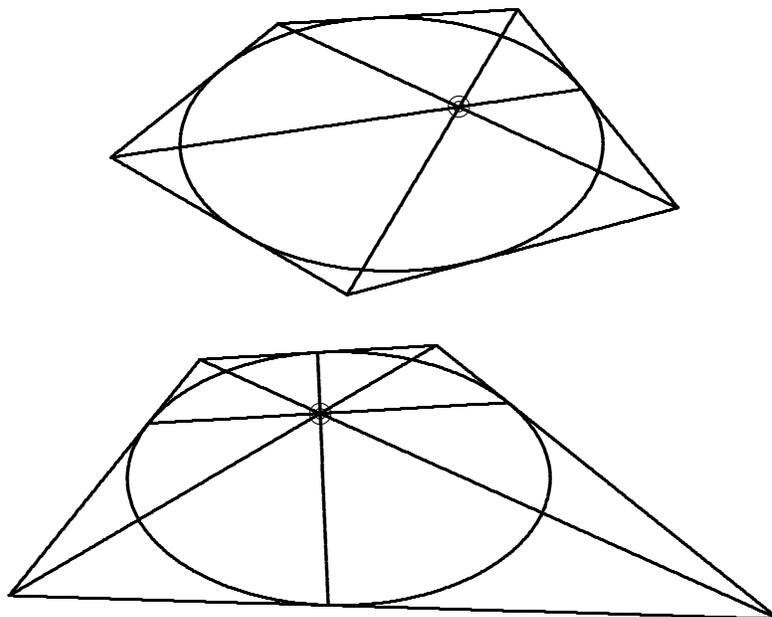
Der Extremfall ist der eines Tangentendreiecks mit seinen Berührungspunkten:

Satz 4.20 (von Brianchon, für Tangentendreieck) *Auf dem nicht-entarteten Kegelschnitt seien drei verschiedene Punkte $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ gegeben. Dann laufen die Verbindungsgeraden der folgenden drei Punktepaare durch einen Punkt*

$$\mathbf{a} \text{ und } T_{\mathbf{b}}(C) \cap T_{\mathbf{c}}(C), \quad \mathbf{b} \text{ und } T_{\mathbf{c}}(C) \cap T_{\mathbf{a}}(C), \quad \mathbf{c} \text{ und } T_{\mathbf{a}}(C) \cap T_{\mathbf{b}}(C).$$

(Das ist Aufgabe 2.7, etwas anders eingekleidet.)

Variationen zum Satz von Brianchon:



Aufgabe 4.14 Es sei C ein nicht-entarteter Kegelschnitt in $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ und $\mathbf{p} \in \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ ein Punkt nicht auf C . Zeigen Sie: Es gibt eine Involution $p : C \rightarrow C$ so, dass die Geraden des Büschels \mathbf{p}^* genau die Paare $\mathbf{x}, p(\mathbf{x})$ mit $\mathbf{x} \in C$ ausschneiden.

Aufgabe 4.15 Zwei Involutionen $p_1 \neq p_2 : C \rightarrow C$ auf dem nicht-entarteten Kegelschnitt C kommutieren genau dann, wenn die Paare ihrer Fixpunkte zwei bezüglich C konjugierte Geraden aufspannen.

Aufgabe 4.16 Es seien $p_1, p_2, p_3 : C \rightarrow C$ drei Involutionen auf dem nicht-entarteten Kegelschnitt C , welche eine Kleinsche Vierergruppe erzeugen. Zeigen Sie: die isolierten Fixpunkte $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3$ der zugehörigen Involutionen $P_1, P_2, P_3 : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$ sind die Ecken eines bezüglich C selbstpolaren Dreiecks.

Aufgabe 4.17 a) Gegeben seien zwei Tripel $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ und $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ paarweise verschiedener Punkte auf dem nicht-entarteten Kegelschnitt C . Konstruieren Sie die Fixpunkte der Projektivität $p : C \rightarrow C$ mit $p(\mathbf{a}_i) = \mathbf{b}_i$ für $i = 1, 2, 3$.

b) Gegeben seien zwei Paare $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{a}_2$ und $\mathbf{b}_1 \neq \mathbf{b}_2$ von Punkten auf C . Konstruieren Sie die Fixpunkte der Involution $p : C \rightarrow C$ mit $p(\mathbf{a}_i) = \mathbf{b}_i$ und $p(\mathbf{b}_i) = \mathbf{a}_i$ für $i = 1, 2$.

Aufgabe 4.18 Auf dem nicht-entarteten Kegelschnitt liegen die Ecken zweier Dreiecke \mathbf{abc} und $\mathbf{a'b'c'}$. Daraus werden zwei weitere Dreiecke gebildet, das erste mit den Seiten $\mathbf{aa'}, \mathbf{bb'}, \mathbf{cc'}$ und das zweite mit den Ecken $\mathbf{ab} \cap \mathbf{a'b'}, \mathbf{bc} \cap \mathbf{b'c'}, \mathbf{ca} \cap \mathbf{c'a'}$. Zeigen Sie, dass diese beiden Dreiecke zueinander perspektiv sind. (Hinweis: Satz von Pascal für das Sechseck $\mathbf{ab'ca'bc'}$.)

Aufgabe 4.19 Der Kegelschnitt C sei parametrisiert durch $(\lambda : \mu) \mapsto (\lambda^2 : \mu^2 : \lambda\mu)$. Bestimmen Sie die Projektivitäten $P : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$, welche die folgenden Projektivitäten auf C induzieren:

- a) $(\lambda : \mu) \mapsto (\lambda : -\mu)$,
- b) $(\lambda : \mu) \mapsto (\mu : \lambda)$,
- c) $(\lambda : \mu) \mapsto (\lambda + \mu : \lambda - \mu)$.

4.5 Systeme von Kegelschnitten

Bisher haben wir immer nur einen einzelnen Kegelschnitt $C \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{K})$ betrachtet. Jetzt wollen wir uns mit zwei oder mehreren simultan befassen.

Betrachten wir zunächst einmal die Menge aller Kegelschnitte. Was das ist, wissen wir noch nicht so recht. Aber wir wissen, dass die homogenen Polynome zweiten Grades in den Variablen x_0, x_1, x_2

$$Q(x_0, x_1, x_2) = a_{0,0}x_0^2 + a_{1,1}x_1^2 + a_{2,2}x_2^2 + 2(a_{0,1}x_0x_1 + a_{1,2}x_1x_2 + a_{2,0}x_2x_0)$$

einen sechs-dimensionalen Vektorraum über \mathbb{K} bilden. Natürlich definiert ein Polynom Q den gleichen Kegelschnitt, wie das Polynom $c \cdot Q$ mit $0 \neq c \in \mathbb{K}$. Die Polynome $c \cdot Q, c \in \mathbb{K}$, bilden eine Gerade im sechs-dimensionalen Vektorraum aller homogenen Polynome vom Grad zwei. Schon diese Gerade bestimmt den Kegelschnitt $Q = 0$.

Das ist bemerkenswert, weil die Menge aller Kegelschnitte offenbar weniger mit dem sechs-dimensionalen Vektorraum zu tun hat, als mit dem fünf-dimensionalen projektiven Raum, der dazu gehört. Jeder Punkt im \mathbb{P}_5 mit den homogenen Koordinaten $a_{0,0} : \dots : a_{2,0}$ bestimmt einen Kegelschnitt. Der kann, abhängig vom Grundkörper \mathbb{K} , bisweilen leer sein, aber:

Satz 4.21 (Gleichung des Kegelschnittes) Ein Kegelschnitt $C \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ bestimmt seine Gleichung eindeutig bis auf einen skalaren Faktor.

Beweis. Falls C entartet ist, also aus zwei oder einer Geraden besteht, sind die Linearformen, welche auf diesen Geraden verschwinden, bis auf einen Skalarfaktor eindeutig. Damit ist auch das Produkt dieser beiden Geradengleichungen bis auf einen Skalarfaktor eindeutig bestimmt.

Sei also jetzt C nicht-entartet. Wir schneiden C mit einer Geraden L . Weil der Grundkörper als \mathbb{C} vorausgesetzt ist, hat die entsprechende quadratische Gleichung immer eine Lösung, und es gibt immer einen Punkt $\mathbf{x}_0 \in C$. Durch \mathbf{x}_0 gibt es auch immer eine Gerade M , die von der Tangente an C in \mathbf{x}_0 verschieden ist. Auf M gibt es dann immer noch einen zweiten Schnittpunkt $\mathbf{x}_1 \in M \cap C$. Wir wählen jetzt die homogenen Koordinaten wie in 4.2, Fall 4: In diesen Koordinaten hat C die Gleichung $x_0x_1 - x_2^2 = 0$. Wie in 4.3 parametrisieren wir C durch

$$\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \ni (\lambda : \mu) \mapsto (\lambda^2 : \mu^2 : \lambda\mu) \in C.$$

Sei jetzt

$$P(x_0, x_1, x_2) = (x_0 : x_1 : x_2) \cdot \begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} \\ a_{0,1} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{0,2} & a_{1,2} & a_{2,2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

ein homogenes Polynom zweiten Grades, das auf C verschwindet. Dann ist also $P(\lambda^2, \mu^2, \lambda\mu) = 0$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Setzen wir $(\lambda, \mu) = (1, 0)$ oder $(0, 1)$ ein, so finden wir schon einmal $a_{0,0} = a_{1,1} = 0$. Dann kann $a_{0,1}$ nicht auch $= 0$ sein, denn sonst wäre der Kegelschnitt C entartet. Indem wir P mit einem Faktor durchmultiplizieren, können wir $a_{0,1} = 1/2$ erreichen. Jetzt setzen wir die beiden etwas komplizierteren Parameter $(\lambda : \mu) = (1 : \pm i)$ ein und finden:

$$\pm 2i(a_{0,2} - a_{1,2}) = 1 + a_{2,2}.$$

Es folgt $a_{0,2} = a_{1,2}$ und $a_{2,2} = -1$. Schließlich nehmen wir noch $(\lambda, \mu) = (1, 1)$ und finden

$$a_{0,2} + a_{1,2} = a_{0,2} + a_{1,2} + 1 + a_{2,2} = 0.$$

Dies zeigt, dass $a_{0,2} = a_{1,2} = 0$, und P ein Vielfaches der Kegelschnittgleichung $x_0x_1 - x_2^2$ ist. \square

Der soeben bewiesene Satz sagt, zumindest über dem Grundkörper \mathbb{C} , dass die Menge aller Kegelschnitte $C \subset \mathbb{IP}_2(\mathbb{C})$ ein bijektives Bild des \mathbb{IP}_5 ist, der zum Vektorraum der homogenen Polynome zweiten Grades gehört. Wir können die Menge aller Kegelschnitte als einen \mathbb{IP}_5 auffassen! (Man sollte dies als Verallgemeinerung der Tatsache sehen, dass man die Menge aller Geraden $L \subset \mathbb{IP}_2$ als einen \mathbb{IP}_2 , nämlich den dualen \mathbb{IP}_2^* auffassen kann.)

Ein Punkt $\mathbf{z} \in \mathbb{IP}_2$ bestimmt einen projektiven Unterraum $\mathbf{z}^* \subset \mathbb{IP}_2^*$ der Dimension eins im \mathbb{IP}_2^* aller Geraden, nämlich das Geradenbüschel der Geraden die \mathbf{z} enthalten. Ähnlich bestimmt $\mathbf{z} \in \mathbb{IP}_2$ im \mathbb{IP}_5 der Kegelschnitte einen projektiven Unterraum, allerdings jetzt von Dimension vier, nämlich

$$\{C \in \mathbb{IP}_5 : \mathbf{z} \in C\}.$$

In der Tat, wenn $\mathbf{z} = (z_0 : z_1 : z_2)$, dann ist die Bedingung, dass $\mathbf{z} \in C$ liegt, eine homogene lineare Gleichung für die Koeffizienten $a_{0,0}, \dots, a_{2,0}$ von C :

$$z_0^2 \cdot a_{0,0} + z_1^2 \cdot a_{1,1} + z_2^2 \cdot a_{2,2} + 2z_0z_1 \cdot a_{0,1} + 2z_1z_2 \cdot a_{1,2} + 2z_2z_0 \cdot a_{0,2} = 0.$$

Man kann mehr als eine solche Bedingung an Kegelschnitte stellen. Wählt man k Punkte $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_k \in \mathbb{IP}_2$, so sind die k Bedingungen $\mathbf{z}_1 \in C, \dots, \mathbf{z}_k \in C$ jetzt k homogene lineare Gleichungen für die Koeffizienten von C . Wenn diese Gleichungen linear unabhängig sind, ist die Menge der Kegelschnitte, welche diesen k Bedingungen genügt, ein projektiver Unterraum des \mathbb{IP}_5 der Codimension k , also der Dimension $5 - k$. Wann die linearen Gleichungen linear unabhängig sind, das ist nicht ganz einfach zu entscheiden. Wir benötigen in dieser Richtung nur folgenden

Satz 4.22 a) (Vier Punkte) Es seien $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_4 \in \mathbb{IP}_2$ vier Punkte, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Dann bildet die Menge der Kegelschnitte C , die durch $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_4$ gehen einen projektiven Raum der Dimension eins.

b) (Fünf Punkte) Es seien $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_5 \in \mathbb{IP}_2$ fünf Punkte, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Dann gibt es genau einen Kegelschnitt C , der durch diese fünf Punkte geht. (Den Eindeutigkeitsteil dieser Aussage haben wir schon im Zusammenhang mit Pascals Satz bemerkt.)

Beweis. a) Die vier Punkte $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_4$ erfüllen die Voraussetzung von Satz 4 in 3.4. Wir können also die homogenen Koordinaten auf \mathbb{IP}_2 so wählen, dass

$$\mathbf{z}_1 = (1 : 0 : 0), \mathbf{z}_2 = (0 : 1 : 0), \mathbf{z}_3 = (0 : 0 : 1), \mathbf{z}_4 = (1 : 1 : 1).$$

Die drei Punkte $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3$ liegen genau dann auf dem Kegelschnitt C , wenn in seiner symmetrischen Matrix $A = (a_{i,j})$ die drei Diagonaleinträge $a_{i,i}$ verschwinden. Und der Punkt \mathbf{z}_4 liegt auch noch auf C , wenn gilt

$$a_{0,0} = a_{1,1} = a_{2,2} = a_{0,1} + a_{1,2} + a_{2,0} = 0.$$

Dies sind vier linear unabhängige Gleichungen in den $a_{i,j}$.

b) Sei jetzt noch ein fünfter Punkt $\mathbf{z}_5 \neq \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_4$ festgehalten. Wir wählen die Koordinaten wie in a), so, dass $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_4$ die angegebenen Koordinaten haben. Die Gerade im Raum aller Kegelschnitte, welche durch die vier Bedingungen $\mathbf{z}_i \in C, i = 1, \dots, 4$ definiert wird, wird aufgespannt durch die beiden Kegelschnitte

$$\begin{aligned} C_1 : a_{0,1} + a_{1,2} = a_{2,0} = 0 & \quad Q_1(\mathbf{x}) = a_{0,1}x_0x_1 + a_{1,2}x_1x_2 \sim x_1 \cdot (x_0 - x_2) = 0 \\ C_2 : a_{0,1} = a_{1,2} + a_{2,0} = 0 & \quad Q_2(\mathbf{x}) = a_{1,2}x_1x_2 + a_{2,0}x_2x_0 \sim x_2 \cdot (x_0 - x_1) = 0. \end{aligned}$$

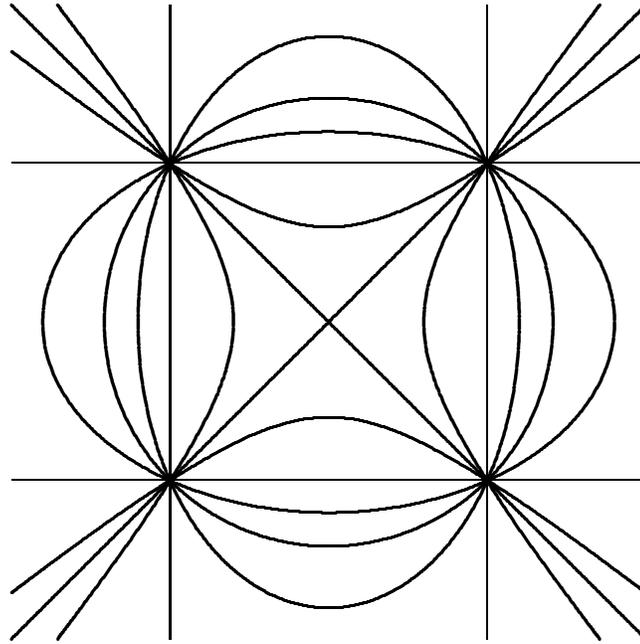
Der Durchschnitt $C_1 \cap C_2$ besteht genau aus den vier Punkten $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_4$. Jeder Kegelschnitt, der durch diese vier Punkte und durch \mathbf{z}_5 geht, hat eine Gleichung $\lambda Q_1 + \mu Q_2 = 0$, wenn $Q_i = 0$ die Gleichung des Kegelschnittes C_i ist. Weil \mathbf{z}_5 nicht zu $C_1 \cap C_2$ gehört, gilt nicht $Q_1(\mathbf{z}_5) = Q_2(\mathbf{z}_5) = 0$. Deswegen ist $(\lambda : \mu) \in \mathbb{IP}_1$ durch

$$(\lambda Q_1 + \mu Q_2)(\mathbf{z}_5) = \lambda Q_1(\mathbf{z}_5) + \mu Q_2(\mathbf{z}_5) = 0$$

eindeutig bestimmt, nämlich als $(\lambda : \mu) = (Q_2(\mathbf{z}_5) : -Q_1(\mathbf{z}_5))$, und damit der Kegelschnitt durch $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_5$. \square

Einen projektiven Raum der Dimension eins in \mathbb{IP}_2^* haben wir ein Geradenbüschel genannt. Ebenso nennen wir einen eindimensionalen projektiven Raum im \mathbb{IP}_5 aller Kegelschnitte ein *Büschel von Kegelschnitten*. Jeder Punkt $\mathbf{z} \in \mathbb{IP}_2$ bestimmt ein Geradenbüschel, nämlich das Büschel mit dem Zentrum \mathbf{z} . Genau so bestimmen vier Punkte, von denen keine drei auf einer Geraden liegen, nach dem letzten Satz, Teil a) ein Büschel von Kegelschnitten, das genau alle Kegelschnitte durch diese vier Punkte enthält.

Von Kegelschnittbüscheln kann man am Computer recht schöne Bilder machen:



Die vier Punkte, in denen sich alle Kegelschnitte schneiden, heißen *die Basispunkte* des Büschels. Jedes Bündel besteht aus allen Kegelschnitten der Form $\lambda Q_1 + \mu Q_2 = 0, (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}_1$. Die Schnittpunkte der beiden Kegelschnitte $Q_1 = 0$ und $Q_2 = 0$ liegen dann auf allen Kegelschnitten des Bündels. Sie sind die Basispunkte. Aber das können weniger als vier sein:

Satz 4.23 (Schnitt zweier Kegelschnitte) *Es seien C_1 ein nicht-entarteter Kegelschnitt, o.B.d.A. $= \{(\lambda^2 : \mu^2 : \lambda\mu) : (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}_1\}$, und C_2 ein davon verschiedener Kegelschnitt. Dann gibt es ein homogenes Polynom vierten Grades*

$$p(\lambda, \mu) = a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3\mu + a_2\lambda^2\mu^2 + a_3\lambda\mu^3 + a_4\mu^4,$$

dessen Wurzeln die Parameter $(\lambda_i : \mu_i)$ der Schnittpunkte $C_1 \cap C_2$ sind. Jedes homogene Polynom $p \neq 0$ vierten Grades tritt hierbei auf.

Beweis. Wenn C_2 die Gleichung

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2(dxy + exz + fyz) = 0$$

hat, dann sind die Parameter $(\lambda_i : \mu_i)$ der Schnittpunkte $C_1 \cap C_2$ genau die Wurzeln der Gleichung vierten Grades

$$\begin{aligned} a\lambda^4 + b\mu^4 + c\lambda^2\mu^2 + 2(d\lambda^2\mu^2 + e\lambda^3\mu + f\lambda\mu^3) &= \\ a\lambda^4 + e\lambda^3\mu + (c + 2d)\lambda^2\mu^2 + f\lambda\mu^3 + b\mu^4 &= 0. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten des Polynoms p sind also

$$a_0 = a, \quad a_1 = e, \quad a_2 = c + 2d, \quad a_3 = f, \quad a_4 = b.$$

Es ist klar, dass man durch geeignete Wahl der a, \dots, f alle möglichen Koeffizienten a_0, \dots, a_4 erhält. \square

Dieser, zugegeben etwas simplistische, fast philosophische Satz hat jedoch zwei erstaunliche Konsequenzen, die ich hier erwähnen möchte:

1. *Das Prinzip des Zusammenfallens:* Ein Polynom vierten Grades hat immer vier komplexe Wurzeln. Diese können jedoch zusammenfallen. Für die Vielfachheiten des Zusammenfallens gibt es folgende fünf Möglichkeiten:

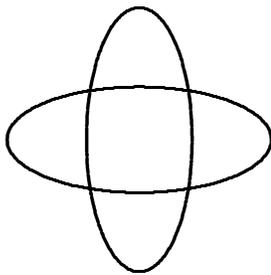
$$1, 1, 1, 1; \quad 2, 1, 1; \quad 2, 2; \quad 3, 1; \quad 4;$$

Was bedeutet Zusammenfallen der Wurzeln für die beiden Kegelschnitte C_1 und C_2 ? Betrachten wir einen Punkt auf C_1 , o.B.d.A. den Punkt $(1 : 0 : 0)$, der zum Parameter $(\lambda : \mu) = (1 : 0)$ gehört. Das Polynom $p(\lambda, \mu)$ hat in diesem Punkt eine Nullstelle, genau dann, wenn $a_0 = a = 0$. Und die Nullstelle ist doppelt, wenn auch $a_1 = e = 0$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn für die Matrix A von C_2 gilt

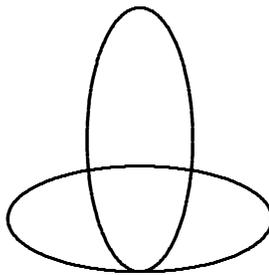
$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ * \\ 0 \end{pmatrix},$$

d.h., wenn die Tangente an C_2 in diesem Punkt die Gerade $x_1 = 0$ ist, und mit der Tangente in C_1 zusammenfällt.

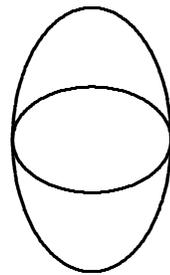
Zusammenfallen höherer Ordnung wollen wir nicht mehr formal untersuchen, sondern nur graphisch andeuten, wie man sich diese fünf Fälle vorstellen muss:



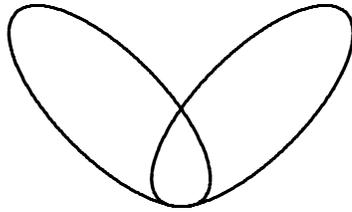
1, 1, 1, 1



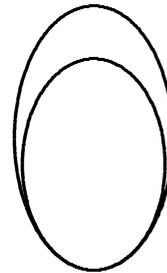
2, 1, 1



2, 2



3,1



4

2. *Die Gleichung vierten Grades.* Nach obigem Satz führt die Berechnung der (i.a. vier) Schnittpunkte zweier nicht-entarteter Kegelschnitte auf das Lösen einer Gleichung vierten Grades. Da bei geeigneter Wahl der Kegelschnitte jedes Polynom vierten Grades auftritt, ist das geometrische Problem, die zwei Kegelschnitte zu schneiden, sogar äquivalent mit dem Lösen der Gleichungen vierten Grades.

Es ist mathematische Folklore (und wird in der Vorlesung Algebra bewiesen), dass man Gleichungen dritten und vierten Grades noch durch Formeln (d.h. Ziehen von Wurzeln) lösen kann. Der wesentliche Schritt beim Lösen der Gleichung vierten Grades besteht im Zurückführen des Problems auf eine Gleichung dritten Grades. Dies kann man sehr schön an den beiden Kegelschnitten sehen.

Die Idee besteht darin, im Büschel $\lambda C_1 + \mu C_2$ nach einem entarteten Kegelschnitt $C_0 = L \cup M$ zu suchen. Die Schnittpunkte in $C_1 \cap C_2$ sind ja genau die gleichen, wie die Punkte in

$$C_1 \cap C_0 = C_1 \cap (L \cup M) = (C_1 \cap L) \cup (C_1 \cap M).$$

Und die Schnittpunkte von C_1 mit den Geraden L und M sind durch quadratische Gleichungen zu ermitteln.

Wie finde ich praktisch einen entarteten Kegelschnitt $C_0 = \lambda C_1 + \mu C_2$? Nun, sei A die Matrix zu C_1 und B die Matrix zu C_2 . Dann hat der Kegelschnitt $\lambda C_1 + \mu C_2$ die Matrix

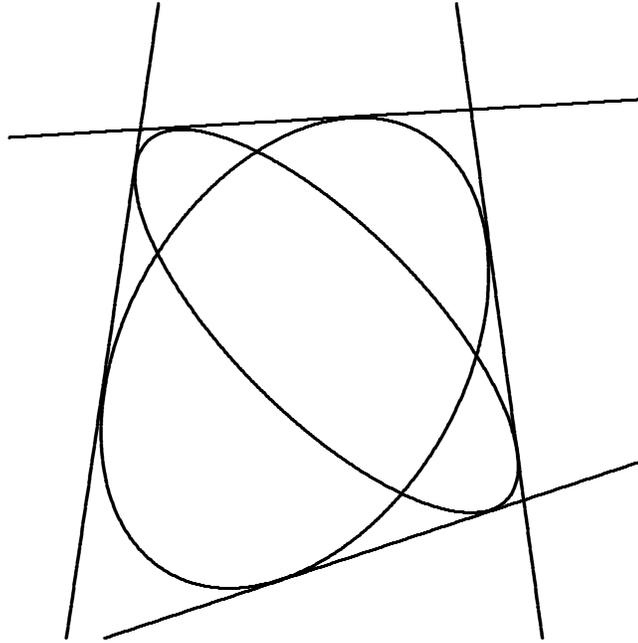
$$\lambda A + \mu B = \begin{pmatrix} \lambda a_{0,0} + \mu b_{0,0} & \lambda a_{0,1} + \mu b_{0,1} & \lambda a_{0,2} + \mu b_{0,2} \\ \lambda a_{1,0} + \mu b_{1,0} & \lambda a_{1,1} + \mu b_{1,1} & \lambda a_{1,2} + \mu b_{1,2} \\ \lambda a_{2,0} + \mu b_{2,0} & \lambda a_{2,1} + \mu b_{2,1} & \lambda a_{2,2} + \mu b_{2,2} \end{pmatrix}.$$

Wir brauchen bloß die Determinante dieser 3×3 -Matrix auszurechnen. Diese ist eine Art homogen gemachtes charakteristisches Polynom, auf jeden Fall ist sie homogen vom Grad drei in λ, μ . Und wenn wir die Determinante $= 0$ setzen, dann haben wir die versprochene Gleichung dritten Grades.

Den letzten Satz kann man auch dualisieren, falls beide Kegelschnitte C_1 und C_2 nicht entartet sind: Die dualen Kegelschnitte C_1^* und C_2^* im \mathbb{IP}_2^* haben dort vier Schnittpunkte, wovon natürlich einige zusammenfallen können. Ein Punkt $L^* \in \mathbb{IP}_2^*$ im Durchschnitt $C_1^* \cap C_2^*$ ist dual zu einer Geraden $L \subset \mathbb{IP}_3$, die sowohl C_1 als auch C_2 berührt. (Wenn zwei ihrer Schnittpunkte zusammenfallen, berühren sich dort die dualen Kegelschnitte C_1^* und C_2^* . Dual: Die Kegelschnitte

C_1 und C_2 schneiden sich in einem Punkt auf der gemeinsamen Tangente L , d.h., berühren sich in einem Schnittpunkt.) Daraus folgt:

Satz 4.24 (Doppeltangenten) *Es seien $C_1 \neq C_2 \subset \mathbb{P}_2$ nicht-entartete Kegelschnitte, die sich in vier verschiedenen Punkten schneiden. Dann gibt es vier gemeinsame Tangenten an beide Kegelschnitte.*



Wir ziehen jetzt noch zwei (typische) Folgerungen aus dem Satz über die fünf Punkte.

Satz 4.25 (Umkehrung des Satzes von Pascal) *Gegeben seien sechs Punkte $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \in \mathbb{P}_2$, keine drei auf einer Geraden, so, dass die drei Schnittpunkte*

$$\mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 \cap \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1, \quad \mathbf{a}_2\mathbf{b}_3 \cap \mathbf{a}_3\mathbf{b}_2, \quad \mathbf{a}_3\mathbf{b}_1 \cap \mathbf{a}_1\mathbf{b}_3$$

auf einer Geraden L liegen. Dann gibt es einen Kegelschnitt C , der durch diese sechs Punkte $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{b}_3$ geht.

Beweis: Nach dem Satz über fünf Punkte gibt es einen Kegelschnitt C , der durch die fünf Punkte $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{b}_2$ geht. C schneidet die Gerade $\mathbf{a}_1\mathbf{b}_3$ in \mathbf{a}_1 und in einem weiteren Punkt \mathbf{b}'_3 . Zu den sechs Punkten $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}'_3 \in C$ gibt eine Pascal-Gerade, auf der die drei Schnittpunkte

$$\mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 \cap \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1, \quad \mathbf{a}_2\mathbf{b}'_3 \cap \mathbf{a}_3\mathbf{b}_2, \quad \mathbf{a}_3\mathbf{b}_1 \cap \mathbf{a}_1\mathbf{b}'_3$$

Weil $\mathbf{a}_1\mathbf{b}'_3 = \mathbf{a}_1\mathbf{b}_3$ ist, liegen der erste und der dritte dieser Punkte auf der Geraden L . Die Pascal-Gerade stimmt daher mit L überein. Weil $\mathbf{a}_2\mathbf{b}'_3$ die Gerade $\mathbf{a}_2\mathbf{b}_3$ auf L schneidet, stimmt auch $\mathbf{a}_2\mathbf{b}'_3$ mit $\mathbf{a}_2\mathbf{b}_3$ überein, und es ist

$$\mathbf{b}'_3 = \mathbf{a}_2\mathbf{b}'_3 \cap \mathbf{a}_1\mathbf{b}'_3 = \mathbf{a}_2\mathbf{b}_3 \cap \mathbf{a}_1\mathbf{b}_3 = \mathbf{b}_3.$$

□

Dual zum Satz über fünf Punkte ist folgende Aussage:

Satz 4.26 (Fünf Geraden) *Es seien $L_1, \dots, L_5 \subset \mathbb{P}_2$ fünf Geraden, keine drei davon durch einen Punkt. Dann gibt es genau einen nicht-entarteten Kegelschnitt C , der diese fünf Geraden berührt.*

Hieraus folgern wir den

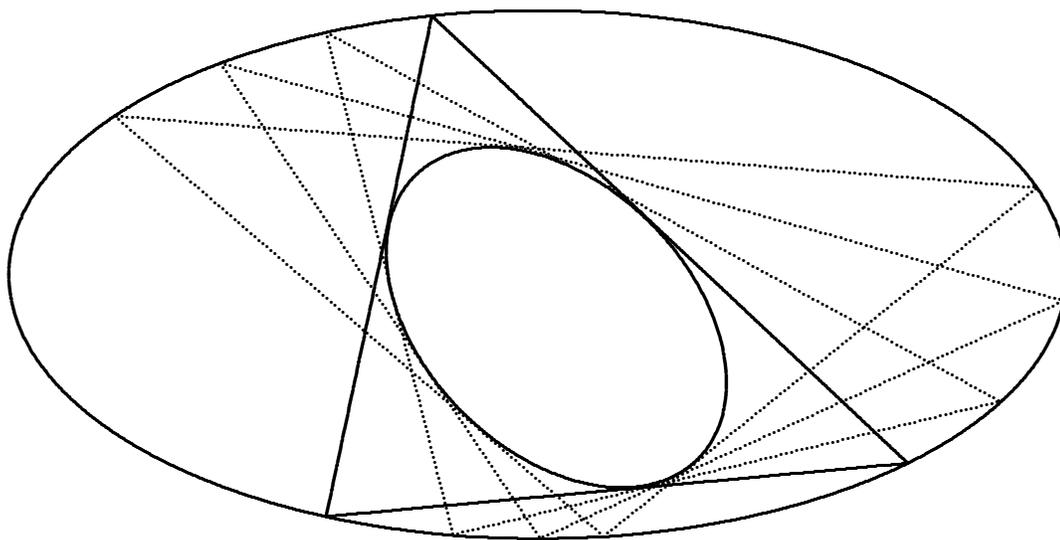
Satz 4.27 (Porismus von Poncelet) *Das Dreieck $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3$ sei dem nicht-entarteten Kegelschnitt C einbeschrieben, und dem nicht-entarteten Kegelschnitt D umbeschrieben. (D.h.: die drei Ecken $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3$ liegen auf C , und die drei Seiten des Dreiecks sind Tangenten an D .) Dann gibt es nicht nur ein einziges solches Dreieck, sondern zu jedem Punkt $\mathbf{b}_1 \in C$ mit*

$\mathbf{b}_1 \notin C \cap D$,

\mathbf{b}_1 nicht auf einer gemeinsamen Tangente von C und D ,

zwei Punkte $\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \in C$, so, daß das C einbeschriebene Dreieck $\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3$ dem Kegelschnitt D umbeschrieben ist.

Beweis. Sei $\mathbf{b}_1 \neq \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ auf C ein beliebiger Punkt, nicht aus $C \cap D$. Dann gibt es durch \mathbf{b}_1 zwei Tangenten an D . Wenn davon keine auch C berührt, hat jede noch einen weiteren Schnittpunkt mit C . Wir nennen diese Punkte \mathbf{b}_2 und \mathbf{b}_3 . Die beiden Dreiecke $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3$ und $\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3$ sind dem Kegelschnitt C einbeschrieben. Nach dem Korollar am Ende von 4.3 gibt es einen nicht-entarteten Kegelschnitt D' , der alle sechs Seiten beider Dreiecke berührt. Fünf davon berührt schon der Kegelschnitt D . Wegen der Eindeutigkeit im Satz über fünf Geraden muss $D = D'$ sein, und D berührt auch die Seite $\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3$. □



Poncelet bewies diesen Satz in seinem Lehrbuch der Projektiven Geometrie: *Traité des propriétés projectives des figures* (Paris 1822). An diesem Buch begann er in russischer Kriegsgefangenschaft (in Saratow) zu schreiben. Er war einer der Ingenieure, welche Napoleon auf

seinem Russlandfeldzug begleitet hatten. Er gelangte aber nach Frankreich zurück, und hatte in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts großen Einfluss auf die Entwicklung der Projektiven Geometrie. Man kann ihn getrost einen ihrer Väter nennen.

Der Ponceletsche Satz gilt nicht nur für Dreiecke, sondern für Polygone (mit beliebig vielen Ecken), deren Ecken auf einem nichtentarteten Kegelschnitt liegen, und deren Seiten einen anderen nichtentarteten Kegelschnitt berühren. Der Beweis dafür ist allerdings wesentlich tiefer als für Dreiecke. Der Kampf um einen (korrekten) Beweis für diesen allgemeineren Satz war wohl Poncelets mathematisches Lebensthema.

Zwei Umstände machten zur damaligen Zeit das Verständnis dieses Satzes besonders schwer:

1) Oft schneiden sich ja die Polygon-Seiten und der Kegelschnitt nicht, d.h. nicht im Reellen. Für ein systematisches Verständnis der Situation war es unerlässlich, auch Punkte mit komplexen Koordinaten zuzulassen. Und es war damals gar nicht klar, ob das in der Geometrie legitim war. Naja, Poncelet hat es gewagt, und das hat der Geometrie nicht geschadet.

2) Hinter dem Ponceletschen Satz steckt ein Mechanismus, den man mit Methoden der Linearen oder bilinearen Algebra (wie wir heute sagen würden - damals gab es diese Begriffe ja nicht) nicht verstehen kann. Im wesentlichen ist der Ponceletsche Satz äquivalent zur Theorie der elliptischen Funktionen. Diese Funktionen kann man ansehen als die allereinfachsten, nicht-elementaren Funktionen. Sie wurden um diese Zeit gerade erfunden. Erst 30-40 Jahre später erkannte Cayley den Zusammenhang dieser Funktionen mit Poncelet-Polygonen. Und dass nicht-triviale, transzendente Funktionen mit geometrischen Situationen zusammenhängen können, das war eine Erkenntnis, die über Plücker, Riemann, Clebsch, Max Noether und Felix Klein zur Entwicklung der Algebraischen Geometrie führte. Für mich sind deswegen Poncelet-Polygone (oder auch andere geometrische Situationen, welche mit elliptischen Funktionen behandelt werden können) so ziemlich der faszinierendste Teil der Mathematik.

Außerdem kann man Poncelet-Polygone so schön visualisieren. Auf meiner Home-Page können Sie ein Poncelet-Fünfeck zwischen zwei Kreisen laufen sehen. (Natürlich nur wenn es funktioniert.) Ich habe dazu mehrere Diplomanden gebraucht.

Aufgabe 4.20 a) *(Desargues, ein weiterer Satz.) Die Punktepaare, in denen die Kegelschnitte eines Büschels eine feste Gerade (nicht durch einen Basispunkt des Büschels) treffen, sind die Paare von Punkten und Bildpunkten einer Involution auf dieser Geraden.*

b) *Es sei $abcd$ ein Viereck in \mathbb{P}_2 und $L \subset \mathbb{P}_2$ eine Gerade, nicht durch eine Ecke des Vierecks. Die Paare von Schnittpunkten dieser Geraden mit gegenüberliegenden Seiten des Vierecks seien*

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &:= L \cap ab & \mathbf{p}' &:= L \cap cd \\ \mathbf{q} &:= L \cap ac & \mathbf{q}' &:= L \cap bd \\ \mathbf{r} &:= L \cap ad & \mathbf{r}' &:= L \cap bc. \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Es gibt eine Involution p auf L mit

$$p(\mathbf{p}) = \mathbf{p}', \quad p(\mathbf{q}) = \mathbf{q}', \quad p(\mathbf{r}) = \mathbf{r}'.$$

Aufgabe 4.21 *In jedem Büschel von Kegelschnitten gibt es zwei Kegelschnitte, welche eine feste Gerade (nicht durch einen Basispunkt des Büschels) berühren.*

Aufgabe 4.22 Es seien vier Geraden in \mathbb{P}_2 gegeben, wovon sich keine drei in einem Punkt schneiden mögen. Zeigen Sie: Die Menge der Kegelschnitte, welche diese vier Geraden berührt, ist im \mathbb{P}_5 der Kegelschnitte ein Kegelschnitt. (Soetwas heißt ein duales Büschel. Es macht viel Spaß, wenn man einen Computer dazu bringen kann, Kegelschnitte eines solchen dualen Büschels zu zeichnen.)

Aufgabe 4.23 In der affinen Ebene \mathbb{R}^2 seien die Kegelschnitte

$$C : x^2 + y^2 = 25, \quad D : 25x^2 + 14xy - 23y^2 = 25$$

gegeben.

- a) Bestimmen Sie den affinen Typ beider Kegelschnitte.
- b) Bestimmen Sie homogene Gleichungen für die Fortsetzungen \bar{C} und \bar{D} dieser Kegelschnitte in die projektive Ebene $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. Finden Sie die zu diesen Gleichungen gehörenden symmetrischen 3×3 -Matrizen.
- c) Finden Sie einen entarteten Kegelschnitt E , der durch alle Schnittpunkte von C und D geht. Bestimmen Sie diese Schnittpunkte.

5 Nichteuklidische Geometrie

Irgendwo habe ich gelesen: Die „Elemente“ des Euklid sind nach der Bibel das am zweithäufigsten gedruckte Buch auf unserer Welt. Ob das stimmt, weiß ich nicht. Auf jeden Fall waren die Elemente über 2000 Jahre hinweg das Standard-Lehrbuch für Geometrie. Euklid beginnt sein Buch mit „Axiomen“, von denen eines das berühmte Parallelenaxiom ist: Durch einen Punkt \mathbf{p} , der nicht auf der Geraden L liegt, gibt es genau eine Parallele zu L , d.h., genau eine Gerade, welche L nicht schneidet. Generationen von Mathematikern bemühten sich zu zeigen, dass dieses Axiom aus Euklids anderen Axiomen folgt. Der Weg, den sie um 1800 herum einschlugen, war ungefähr der folgende: Man nehme an, das Parallelenaxiom wäre falsch. Dann sehen wir uns an was daraus folgt. Und wir hoffen, irgendwann zu einem Widerspruch zu kommen. Das geschah aber nicht. Im Gegenteil, sie entwickelten auf spitzfindige Weise ein System von Aussagen, von dem sich um 1850 herum herausstellte: Diese Geometrien gibt es tatsächlich!

Der erste, der dies merkte war Gauß. Er veröffentlichte seine Gedanken allerdings nicht, weil er vor der Reaktion der mathematischen Öffentlichkeit Angst hatte. Die Mathematiker, welche es taten, waren der Ungar Bolyai und der Russe Lobatschewski. Die Existenz von Modellen für die nichteuklidische Geometrie machte also klar, dass das Parallelenaxiom von den anderen Axiomen Euklids logisch unabhängig sein muss.

Es gibt zwei nichteuklidische Geometrien in der Ebene. Die eine heißt elliptische Geometrie. Da gibt es durch \mathbf{p} keine Parallele. Die andere heißt hyperbolische Geometrie. Da gibt es durch \mathbf{p} unendlich viele Parallelen. Ursprünglich hat man sich nur mit der letzteren beschäftigt. Manchmal versteht man deswegen unter nicht-euklidischer Geometrie auch nur diese hyperbolische Geometrie.

Ich möchte hier noch Modelle für die elliptische und die hyperbolische Geometrie besprechen. Dabei ist es mir nicht gelungen, für meinen Zweck geeignete Literatur zu finden. Es gibt zwar sehr viele Lehrbücher zur nichteuklidischen Geometrie. Etwa das Buch meines Vorgängers im Amt:

Nöbeling, G.: Einführung in die nichteuklidischen Geometrien der Ebene. de Gruyter, 1976.

Alle diese Bücher verstehen als ihr Ziel einen axiomatischen Aufbau dieser Geometrien. Das ist aber keineswegs mein Ziel. Mir liegt an den geometrischen Inhalten. Und der langwierige axiomatische Aufbau versperrt immer den Blick auf diese Inhalte. Weil ich nicht mehr viel Zeit habe, mich hier hinein zu vertiefen, werde ich nur ganz kurz die ebenen Modelle für diese Geometrien skizzieren.

5.1 Elliptische Geometrie

Die elliptische Ebene ist der zwei-dimensionale reelle projektive Raum $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. Nach Definition ist dies die Menge aller reellen Geraden im \mathbb{R}^3 durch den Ursprung. Jede dieser Geraden trifft die Einheits-Sphäre

$$S := \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 : x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

in zwei diametral entgegengesetzten Punkten $\pm\hat{\mathbf{x}}$. Und diese beiden Punkte benutzt man zur Charakterisierung *eines einzigen* Punktes \mathbf{x} der elliptischen Ebene. Die Abbildung

$$S \rightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R}), \quad \pm\hat{\mathbf{x}} \mapsto \mathbf{x}$$

ist 2 : 1.

Die Geraden L in der elliptischen Ebene $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ sind genau die projektiven Geraden. Die zu einer Geraden L gehörenden Punkte $\pm\hat{\mathbf{x}}$ werden auf der Sphäre ausgeschnitten durch eine Ebene $E \subset \mathbb{R}^3$, die den Ursprung enthält. Diese Ebene schneidet auf der Sphäre S einen Großkreis \hat{L} aus. Und die Gerade L in der elliptischen Ebene ist das 2 : 1-Bild dieses Großkreises. Zwei Großkreise \hat{L} und \hat{M} schneiden sich immer in zwei antipodal entgegengesetzten Punkten $\pm\hat{\mathbf{x}}$. Deswegen schneiden sich zwei Geraden L und M in der elliptischen Ebene immer in genau einem Punkt \mathbf{x} . Also gibt es keine parallelen Geraden. Aber zwei (notwendig nicht parallele) Geraden schneiden sich immer in einem Punkt. Das ist eines der ersten Axiome von Euklid. Umgekehrt geht auch durch zwei verschiedene Punkte $\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ der elliptischen Ebene immer genau eine Gerade.

Zu einer Geometrie im Sinn von Euklid gehören immer auch Winkel zwischen zwei Geraden und Längen von Strecken. Die definiert man in der elliptischen Geometrie wie folgt:

Definition 5.1 *Es seien $L \neq M \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ zwei Geraden mit den zugehörigen Großkreisen $\hat{L} \neq \hat{M} \subset S$. Diese Großkreise treffen sich in zwei Punkten $\pm\hat{\mathbf{x}}$. Bei beiden Punkten schließen die Großkreise denselben Winkel ein. Diesen Winkel definiert man als Winkel zwischen den Geraden L und M . Eigentlich muss man hier noch einen der beiden Winkelräume zwischen L und M festlegen, wenn man zwischen dem Winkel und seinem Nebenwinkel unterscheiden will.*

Die Länge einer Strecke $\overline{\mathbf{x}\mathbf{y}}$ ist etwas schwieriger zu definieren. Das liegt daran, dass die Gerade L durch \mathbf{x} und \mathbf{y} „geschlossen“ ist. Sie ist eine Kopie der 1-Sphäre, ein Kreis. Auf diesem gibt es zwei Strecken zwischen \mathbf{x} und \mathbf{y} , die auf dem Großkreis \hat{L} den zwei Kreissegmenten zwischen $\hat{\mathbf{x}}$ und $\hat{\mathbf{y}}$ bzw. $-\hat{\mathbf{x}}$ und $\hat{\mathbf{y}}$ entsprechen. Für eines dieser beiden Segmente muss man sich entscheiden.

Definition 5.2 *Die Länge der Strecke $\overline{\mathbf{x}\mathbf{y}}$ die dem Segment $\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{y}}$ entspricht ist der (Absolutbetrag) des Winkels zwischen $\hat{\mathbf{x}}$ und $\hat{\mathbf{y}}$.*

Die Summe der Längen beider möglichen Segmente ist also π . Eine elliptische Gerade hat immer die Länge π . Die Existenz dieser „absoluten“ Länge hat die Geometer, die sich mit dieser Geometrie beschäftigten, lange gestört.

Die Gruppe $\mathbf{PGL}(2, \mathbb{R})$ der reellen projektiven Ebene ist die Gruppe der Projektivitäten. Eine Projektivität ist eine Abbildung, die von einer linearen Abbildung des \mathbb{R}^3 herkommt. Solche Abbildungen lassen die Sphäre S nicht invariant und auch nicht die eben definierten Winkel und Längen. Damit diese Größen invariant bleiben, müssen wir zu einer kleineren Gruppe übergehen:

Definition 5.3 *Die Gruppe der elliptischen Ebene besteht aus denjenigen Transformationen, die durch orthogonale Abbildungen $U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ induziert werden.*

Diese Transformationen lassen die bisher definierten Begriffe (Punkt, Gerade, Winkel, Länge) invariant. Und es gilt auch wie in der euklidischen Ebene:

Satz 5.1 *In der elliptischen Ebene seien zwei Geraden L und M mit inzidenten Punkten $\mathbf{p} \in L$ und $\mathbf{q} \in M$ gegeben. Dann gibt es eine Bewegung, die $L \rightarrow M$ und $\mathbf{p} \mapsto \mathbf{q}$ abbildet. Und es gibt genau vier verschiedene elliptische Bewegungen mit dieser Eigenschaft.*

Beweis. Existenz: Die zugehörigen Punkte seien $\pm\hat{\mathbf{p}}$ und $\pm\hat{\mathbf{q}} \in S$. Dann gibt es eine orthogonale Transformation R_1 des \mathbb{R}^3 , die $\hat{\mathbf{p}} \mapsto \hat{\mathbf{q}}$ abbildet. Sind \hat{L} und \hat{M} die zugehörigen Großkreise, so bildet R_1 also den Kreis \hat{L} auf einen Kreis \hat{M}' ab, der \hat{M} in $\pm\hat{\mathbf{q}}$ schneidet. Durch eine Drehung R_2 mit Drehachse $\mathbb{R} \cdot \mathbf{q}$ kann man \hat{M}' in \hat{M} überführen. Die orthogonale Transformation $R_2 \circ R_1$ induziert eine Bewegung in der elliptischen Ebene mit den gewünschten Eigenschaften.

Eindeutigkeit: Hier genügt es den Fall $L = M$ und $\mathbf{p} = \mathbf{q}$ zu betrachten. Sei $U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine orthogonale Transformation, die $\hat{L} \rightarrow \hat{L}$ und $\{\pm\hat{\mathbf{p}}\} \rightarrow \{\pm\hat{\mathbf{p}}\}$ abbildet. Nachdem wir eventuell U durch $-U$ ersetzen, können wir o.B.d.A. $\det(U) = 1$ annehmen. Damit ist U eine eigentliche Drehung. Sei $N \subset \mathbb{R}^3$ die Gerade durch den Ursprung senkrecht zur Ebene von \hat{L} . Diese Gerade schneidet S in zwei Punkten $\pm\hat{\mathbf{n}}$, die unter U entweder fest bleiben, oder vertauscht werden. Jetzt gibt es vier Möglichkeiten:

$U(\hat{\mathbf{p}}) = \hat{\mathbf{p}}, U(\hat{\mathbf{n}}) = \hat{\mathbf{n}}$: Dann ist U die Identität.

$U(\hat{\mathbf{p}}) = \hat{\mathbf{p}}, U(\hat{\mathbf{n}}) = -\hat{\mathbf{n}}$. Dann ist U eine Rotation mit Achse durch $\pm\hat{\mathbf{p}}$ um 180° .

$U(\hat{\mathbf{p}}) = -\hat{\mathbf{p}}, U(\hat{\mathbf{n}}) = \hat{\mathbf{n}}$: Jetzt ist U eine Rotation mit Achse durch $\pm\hat{\mathbf{n}}$ um 180° . In der elliptischen Ebene induziert U eine Transformation, die jeden Punkt der Geraden L fest lässt, und die Punkte $\neq \mathbf{n}$ außerhalb L paarweise vertauscht.

$U(\hat{\mathbf{p}}) = -\hat{\mathbf{p}}, U(\hat{\mathbf{n}}) = -\hat{\mathbf{n}}$: Nun ist U die Zusammensetzung der beiden letzten Abbildungen. □

In der elliptischen Ebene kann man zunächst alles machen was man in der reellen projektiven Ebene auch kann. Insbesondere gelten die Sätze von Pappos und Desargues, sowie das Dualitätsprinzip. Das Dualitätsprinzip gilt sogar in einer sehr verschärften Form:

Ist $L \subset \mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$ eine elliptische Gerade mit zugehörigem Großkreis \hat{L} , so gibt es in \mathbb{R}^3 genau eine Gerade \hat{P} durch den Ursprung, die senkrecht zur Ebene des Großkreises \hat{L} ist. Sie definiert in der elliptischen Ebene einen Punkt \mathbf{p} .

Definition 5.4 *Dieser Punkt \mathbf{p} heißt der Punkt dual zur Geraden L oder der Pol von L . Jeder Punkt $\mathbf{p} \in \mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$ ist Pol von genau einer Geraden $L \subset \mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$. Diese Gerade L heißt dual zu \mathbf{p} oder die Polare von \mathbf{p} .*

Jetzt kann man sich auch die Fundamentalkonstruktionen am Anfang des Abschnittes 1.2 ansehen, und schauen, was in der elliptischen Geometrie daraus wird. Verbindungsgerade zweier Punkte und Schnittpunkt zweier Geraden haben wir schon definiert. Der Mittelpunkt einer Strecke $\overline{\mathbf{x}\mathbf{y}}$ bereitet auch keine Probleme: Gehört diese Strecke zum Kreissegment $\overline{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{y}}}$ auf der Sphäre S , so nimmt man den Mittelpunkt $\hat{\mathbf{m}}$ und nennt den zugehörigen Punkt $\mathbf{m} \in \mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$ den Mittelpunkt der Strecke $\overline{\mathbf{x}\mathbf{y}}$.

Ähnlich ist es mit der Winkelhalbierenden: Zu einem Winkelraum zwischen zwei Großkreisen \hat{L} und \hat{M} gibt es genau einen Großkreis durch die beiden Schnittpunkte von \hat{L} und \hat{M} , der diesen

Winkelraum halbiert. Die zugehörige Gerade in der elliptischen Ebene heißt die *Winkelhalbierende* des entsprechenden Winkels zwischen den Geraden L und M .

Und auch Lote kann man fällen: Es sei M eine Gerade mit zugehörigem Großkreis \hat{M} und $\mathbf{p} \notin M$ ein Punkt mit zugehörigen Vektoren $\pm \hat{\mathbf{p}} \in S$. Durch diese beiden Punkte gibt es genau eine Ebene senkrecht auf der Ebene des Großkreises \hat{M} . Diese Ebene schneidet auf der Sphäre S einen Großkreis \hat{L} durch $\pm \hat{\mathbf{p}}$ aus, senkrecht zu \hat{M} . Die zugehörige Gerade L heißt das *Lot* von \mathbf{p} auf M .

Mit diesen Konstruktionen kann man jetzt merkwürdige Linien und Punkte in Dreiecken definieren und nachschauen, was aus den zugehörigen Schnittpunkts-Sätzen wird. Soweit möchte ich es jetzt aber nicht mehr treiben. Allein schon der Begriff des Dreiecks hat in der elliptischen Geometrie seine Tücken:

Drei nicht-kollineare Punkte \mathbf{a} , \mathbf{b} und \mathbf{c} der elliptischen Ebene bestimmen drei Verbindungsgeraden und drei zugehörige Großkreise. Diese Großkreise zerlegen die Sphäre S in acht sphärische Dreiecke, von denen sich je zwei diametral gegenüber liegen. In der elliptischen Ebene gehören dazu vier Dreiecke. Ein Dreieck in der elliptischen Ebene ist also durch Angabe seiner Ecken oder Seiten nicht mehr eindeutig festgelegt!

Es kommt noch schöner: In der elliptischen Ebene gibt es keine ähnlichen Dreiecke mehr! Damit meine ich Folgendes: Zwei Dreiecke Δ und Δ' sollen ähnlich heißen, wenn ihre Winkel α, β, γ und α', β', γ' übereinstimmen. Dann gilt

Satz 5.2 *Ähnliche Dreiecke sind kongruent. D.h., es gibt eine Transformation in der Gruppe der elliptischen Ebene, welche das eine Dreieck mit dem anderen zur Deckung bringt.*

Diesen Satz möchte ich hier nicht mehr beweisen. Man braucht Hilfsmittel der sphärischen Trigonometrie, die ich hier nicht zur Verfügung habe. Bei der Suche nach geeigneter Literatur habe ich übrigens gemerkt, dass es hierzu nur sehr wenige Lehrbücher gibt. Zwei Bücher, die man zu Rate ziehen könnte, sind

Dörrie, H.: Ebene und sphärische Trigonometrie. Oldenbourg, 1950,

Sigl, R.: Ebene und sphärische Trigonometrie. Wichmann, 1977.

Ich möchte aber noch kurz auf den Begriff der Fläche eingehen. Die Fläche eines Polygons P in der elliptischen Ebene definieren wir folgendermaßen: Das Urbild $\hat{P} \subset S$ des Polygons in der Einheitssphäre S hat eine bestimmte Fläche $|\hat{P}|$. Weil die Abbildung $\hat{P} \rightarrow P$ eine 2:1 Abbildung ist, definieren wir die Fläche von P als

$$|P| := \frac{1}{2} |\hat{P}|.$$

Insbesondere bekommen wir damit folgende Spezialfälle:

Nulleck: Damit möchte ich ein Polygon ohne Ecken und Seiten bezeichnen, d.h. die ganze elliptische Ebene. Ihr Urbild ist die ganze Einheitssphäre mit der Fläche 4π . Deswegen ist die Gesamtfläche der elliptischen Ebene

$$\frac{1}{2} \cdot 4\pi = 2\pi.$$

Eineck: Darunter möchte ich einen Winkelraum zwischen zwei Geraden L und M verstehen. Die zugehörigen Großkreise \hat{L} und $\hat{M} \subset S$ begrenzen zwei antipodal gegenüberliegende

Großkreis-Zweiecke. Ist φ der Winkel zwischen L und M , und dann auch zwischen \hat{L} und \hat{M} , so hat jedes dieser Zweiecke die Fläche

$$\frac{\varphi}{2\pi} \cdot 4\pi = 2\varphi.$$

Und der zugehörige Winkelraum zwischen den beiden Geraden in der elliptischen Ebene hat die Fläche

$$\frac{1}{2} \cdot (2 \cdot 2\varphi) = 2\varphi.$$

Dreieck: Drei Geraden L, M und N in der elliptischen Ebene, die nicht durch einen Punkt gehen, treffen sich in drei Punkten $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ und begrenzen vier Dreiecke. Eines dieser Dreiecke mit den Innenwinkeln α, β und γ sei festgehalten. Die anderen drei Dreiecke nennen wir die Nebendreiecke. Wir wollen die Fläche F des festgehaltenen Dreiecks als Funktion dieser Innenwinkel berechnen.

Die beiden Dreiecksseiten, die den Winkel α einschließen, begrenzen ein Eineck der Fläche 2α . Es besteht aus dem Dreieck mit Fläche F und einem Nebendreieck, sagen wir mit Fläche A . Wir finden also

$$F + A = 2\alpha.$$

Ebenso finden wir für die Flächen B und C der beiden anderen Nebendreiecke

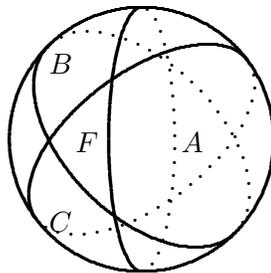
$$F + B = 2\beta, \quad F + C = 2\gamma,$$

also

$$3F + A + B + C = 2(\alpha + \beta + \gamma).$$

Weil aber $F + A + B + C = 2\pi$ die Fläche der ganzen elliptischen Ebene ist, erhalten wir

$$2F = 2(\alpha + \beta + \gamma) - 2\pi, \quad \text{bzw.} \quad F = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$



Das hat Konsequenzen für die Winkelsumme in einem elliptischen Dreieck. Weil die Fläche F immer > 0 ist, ist diese Winkelsumme immer größer als π , die Winkelsumme eines euklidischen Dreiecks. Und weil die Fläche F höchstens $= 2\pi$ (Fläche der ganzen elliptischen Ebene) sein kann, ist diese Winkelsumme immer $< 3\pi$:

$$\pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi.$$

Definition 5.5 Sind α, β, γ die Innenwinkel eines Dreiecks in der elliptischen Ebene, so heißt

$$\epsilon := \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

der Exzess des Dreiecks.

Wir haben bewiesen:

Satz 5.3 Der Exzess ϵ eines Dreiecks in der elliptischen Ebene ist gleich der Fläche dieses Dreiecks.

Aufgabe 5.1 Ein Kreis K in der elliptischen Ebene ist das Bild eines Kreises \hat{K} auf der Einheitskugel. Sein Radius R ist der Abstand des Mittelpunktes von \hat{K} (auf der Kugel) zu \hat{K} . Zeigen Sie für den Umfang u von K :

$$u = 2\pi \cdot \sin(R).$$

Diskutieren Sie die Grenzfälle $R \rightarrow 0$ (Punktkreis) und $R \rightarrow \pi/2$ (Gerade).

Aufgabe 5.2 Zeigen Sie für gleichseitige Dreiecke in der elliptischen Ebene: Zwischen Seitenlängen a und Innenwinkeln α besteht die Beziehung

$$\cos(\alpha) = \frac{\cos(a)}{1 + \cos(a)}.$$

Diskutieren Sie die Grenzfälle $a \rightarrow 0$ und $a \rightarrow 3\pi/2$.

5.2 Hyperbolische Geometrie

Die hyperbolische Ebene ist der komplexe Einheitskreis

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

und die Gruppe der hyperbolischen Bewegungen besteht aus den in 0.1 angegebenen gebrochen rationalen Funktionen

$$z \mapsto \frac{az + b}{bz + \bar{a}}, \quad a\bar{a} - b\bar{b} = 1.$$

Wenn wir wollen, können wir sie auch als Projektivitäten auffassen. Die Winkel der hyperbolischen Geometrie sind die üblichen euklidischen Winkel. Ohne Beweis benutze ich als Anleihe aus der Funktionentheorie: Gebrochen-rationale Transformationen

- lassen Winkel invariant.

- führen reelle Kreise und reelle Geraden wieder in reelle Kreise oder Geraden über.

Satz 5.4 *Die hyperbolischen Bewegungen operieren transitiv auf dem Einheitskreis, d.h., zu je zwei Punkten \mathbf{z}_1 und \mathbf{z}_2 gibt es eine hyperbolische Bewegung, die $\mathbf{z}_1 \mapsto \mathbf{z}_2$ abbildet.*

Beweis. Die hyperbolische Bewegung $\mathbf{z} \mapsto (a\mathbf{z} + b) : (\bar{b}\mathbf{z} + \bar{a})$ bildet den Nullpunkt auf $c := b/\bar{a}$ ab. Wir setzen

$$a := \frac{1}{\sqrt{1 - |c|^2}}, \quad b := \frac{c}{\sqrt{1 - |c|^2}},$$

und finden $|a|^2 - |b|^2 = 1$, $b/\bar{a} = c$. Somit kann man jeden Punkt $\mathbf{z}_2 = c$ des Einheitskreises als Bild des Nullpunkts bekommen. Mit der Umkehrabbildung kann man jeden Punkt \mathbf{z}_1 des Einheitskreises auf den Nullpunkt abbilden. Setzt man $\mathbf{z}_1 \mapsto 0 \mapsto \mathbf{z}_2$ zusammen, so folgt die Behauptung. \square

Die Definition der hyperbolischen Geraden ist in diesem Modell (dem sogenannten Poincaré-Modell) der hyperbolischen Ebene allerdings etwas problematisch. Dazu ein Hilfssatz:

Satz 5.5 (Reelle Kreise und Geraden) *a) Es seien $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3$ drei verschiedene Punkte der komplexen Ebene. Dann ist die Menge*

$$\{\mathbf{z} \in \mathbb{C} : DV(\mathbf{z}, \mathbf{z}_1; \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3) \in \mathbb{R}\}$$

entweder der eindeutig bestimmte Kreis durch $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3$, falls diese drei Punkte nicht auf einer reellen Geraden liegen, oder, falls sie doch auf einer reellen Geraden liegen, dann ist die betrachtete Menge gerade diese reelle Gerade.

b) Ist dieses Doppelverhältnis DV reell, so ist $DV < 0$ genau dann, wenn die Punkte \mathbf{z}, \mathbf{z}_1 die Punkte $\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3$ (auf dem Kreis oder der Geraden) trennen.

Beweis. Wegen der Invarianz von reellen Kreisen und Geraden unter gebrochen linearen Transformationen können wir vor dem Beweis eine solche Transformation durchführen, die

$$\mathbf{z}_1 \mapsto 1, \quad \mathbf{z}_2 \mapsto 0, \quad \mathbf{z}_3 \mapsto \infty$$

abbildet. Dann ist

$$DV(\mathbf{z}, \mathbf{z}_1; \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3) = \frac{\mathbf{z} - 0}{\mathbf{z} - \infty} : \frac{1 - 0}{1 - \infty} = z$$

reell, genau dann wenn \mathbf{z} auf der reellen Achse liegt. Und es ist $DV = \mathbf{z} < 0$ genau dann, wenn \mathbf{z} und $\mathbf{z}_1 = 1$ die Punkte $\mathbf{z}_2 = 0$ und \mathbf{z}_3 auf der reellen Achse trennen. \square

Die Invarianz des Doppelverhältnisses aus 0.1 zeigt jetzt, dass hyperbolische Bewegungen Kreise oder Geraden wieder in Kreise oder Geraden überführen. Jetzt können wir die hyperbolischen Geraden im Einheitskreis definieren:

Definition 5.6 *Eine hyperbolische Gerade ist das im Einheitskreis liegende Stück einer reellen Geraden oder eines reellen Kreises, welche(r) auf dem Rand des Einheitskreises senkrecht steht.*

Unter einer hyperbolischen Bewegung geht eine reelle Gerade oder ein reeller Kreis immer wieder auf eine solche Linie über. Und weil auch die Schnittwinkel mit dem Rand des Einheitskreises erhalten bleiben, führen hyperbolische Bewegungen hyperbolische Geraden immer wieder in hyperbolische Geraden über.

Satz 5.6 (Hyperbolische Geraden) a) Die hyperbolische Gerade L ist genau dann ein reelles Geradenstück, wenn sie durch den Nullpunkt geht.

b) Durch zwei Punkte $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$ des Einheitskreises geht genau eine hyperbolische Gerade.

c) Zwei verschiedene hyperbolische Geraden schneiden sich in höchstens einem Punkt.

d) Sind L und M zwei hyperbolische Geraden und $\mathbf{p} \in L$, $\mathbf{q} \in M$ Punkte darauf, so gibt es eine hyperbolische Bewegung, die $L \rightarrow M$ und $\mathbf{p} \mapsto \mathbf{q}$ abbildet.

Beweis. a) Jede reelle Gerade durch den Nullpunkt schneidet den Rand des Einheitskreises unter einem rechten Winkel. Und umgekehrt: Ist \mathbf{p} ein Punkt auf dem Rand des Einheitskreises, so ist $\mathbb{R} \cdot \mathbf{p}$ die einzige reelle Gerade, die den Rand des Einheitskreises in \mathbf{p} senkrecht schneidet.

b) Wegen der Transitivität der Operation der hyperbolischen Bewegungen auf dem Einheitskreis und der Invarianz der hyperbolischen Geraden unter diesen Bewegungen können wir o.B.d.A. $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ annehmen. Durch $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$ gibt es wegen a) dann nur die hyperbolische Gerade, die von $\mathbb{R} \cdot \mathbf{p}$ im Einheitskreis ausgeschnitten wird.

c) folgt aus b).

d) Wir können o.B.d.A. $\mathbf{p} = \mathbf{q} = \mathbf{0}$ annehmen. Die Geraden L und M sind dann wegen a) reelle Geraden durch den Nullpunkt. Und es gibt eine Rotation $\mathbf{z} \mapsto c \cdot \mathbf{z}$, $|c| = 1$, (eine hyperbolische Bewegung), welche die eine Gerade in die andere überführt. \square

Zwei hyperbolische Geraden brauchen sich nicht zu schneiden! Zu jeder hyperbolischen Geraden L gibt es sogar unendlich viele hyperbolische Geraden, die L nicht schneiden. Damit gilt das euklidische Parallelen-Axiom nicht in der hyperbolischen Geometrie.

Jetzt wollen wir uns um die hyperbolische Länge kümmern.

Definition 5.7 Durch zwei Punkte $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$ im Einheitskreis gibt es wegen Satz 5.6 b) genau eine hyperbolische Gerade L . Sie schneidet den Einheitskreis in zwei Punkten \mathbf{u}, \mathbf{v} . Die vier Punkte seien (eventuell nach Vertauschen von \mathbf{u} und \mathbf{v}) so angeordnet, dass sie in der Reihenfolge $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ auf L zyklisch aufeinander folgen. Nach Satz 5.5 b) ist ihr Doppelverhältnis positiv, und

$$d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) := \ln(DV(\mathbf{p}, \mathbf{q}; \mathbf{u}, \mathbf{v}))$$

ist wohldefiniert. Diese Zahl $d(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ heißt der hyperbolische Abstand von \mathbf{p} und \mathbf{q} .

Aus der Definition folgt sofort, dass sich der hyperbolische Abstand unter hyperbolischen Bewegungen nicht ändert. Weitere triviale Eigenschaften sind:

$$d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{p} = \mathbf{q} \quad \text{und} \quad d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = d(\mathbf{q}, \mathbf{p}).$$

Eine nicht ganz triviale Eigenschaft ist:

Satz 5.7 Die drei Punkte $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ mögen in dieser Reihenfolge auf einer hyperbolischen Geraden liegen. Dann ist

$$d(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + d(\mathbf{q}, \mathbf{r}).$$

Beweis. Aus

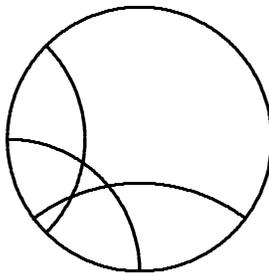
$$DV(\mathbf{p}, \mathbf{q}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\mathbf{p} - \mathbf{u}}{\mathbf{p} - \mathbf{v}} : \frac{\mathbf{q} - \mathbf{u}}{\mathbf{q} - \mathbf{v}}, \quad DV(\mathbf{q}, \mathbf{r}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\mathbf{q} - \mathbf{u}}{\mathbf{q} - \mathbf{v}} : \frac{\mathbf{r} - \mathbf{u}}{\mathbf{r} - \mathbf{v}}$$

folgt

$$DV(\mathbf{p}, \mathbf{q}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) \cdot DV(\mathbf{q}, \mathbf{r}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = DV(\mathbf{p}, \mathbf{r}; \mathbf{u}, \mathbf{v}),$$

und daraus die Behauptung durch Logarithmieren. □

Mit etwas mehr Aufwand kann man für den hyperbolischen Abstand auch noch die Dreiecksungleichung beweisen, und damit zeigen, dass dieser Abstand eine Metrik im üblichen Sinn definiert. Auch kann man anfangen, Flächen zu definieren und die merkwürdigen Linien im Dreieck. Das möchte ich aber jetzt nicht mehr tun.



Aufgabe 5.3 Zeigen Sie: Ein Kreis in der komplexen Ebene \mathbb{C} schneidet den Einheitskreis unter einem rechten Winkel (und definiert eine hyperbolische Gerade) genau dann, wenn er eine Gleichung

$$|z - \mathbf{m}|^2 = |\mathbf{m}|^2 - 1$$

mit $|\mathbf{m}| > 1$ hat. Was wird aus einem solchen Kreis für $|\mathbf{m}| \rightarrow \infty$?

Aufgabe 5.4 a) Es sei $p \in \mathbb{R}$ mit $0 < p < 1$. Zeigen Sie:

$$d(\mathbf{0}, p) = \ln \frac{1+p}{1-p}.$$

b) Es sei $\mathbf{p} \in \mathbb{C}$ mit $0 < |\mathbf{p}| < 1$. Zeigen sie:

$$d(\mathbf{0}, \mathbf{p}) = \ln \frac{1+|\mathbf{p}|}{1-|\mathbf{p}|}.$$

c) Es seien $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{C}$ mit $|\mathbf{p}|, |\mathbf{q}| < 1$. Zeigen Sie:

$$d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \ln \frac{|1 - \bar{\mathbf{p}}\mathbf{q}| + |\mathbf{p} - \mathbf{q}|}{|1 - \bar{\mathbf{p}}\mathbf{q}| - |\mathbf{p} - \mathbf{q}|}.$$

Aufgabe 5.5 Bestimmen sie die Seitenlänge des „hyperbolischen Quadrats“ mit den Ecken $\pm a \pm ia$, $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < \sqrt{2}/2$.

Vor drei Jahren schloss ich diese Vorlesung mit folgenden Formulierungen:

„Es wäre schön, wenn ich diese Vorlesung irgend wann noch einmal halten könnte. Da würde ich dann diese beiden letzten Paragraphen über nicht-euklidische Geometrie weiter ausbauen, vielleicht auch Übungsaufgaben dazu zusammensuchen und Zeichnungen einfügen.

Aber für dieses Mal ist es das jetzt und hier gewesen.“

Leider muss ich es auch diesmal dabei bewenden lassen.

Index

- äqui-anharmonisch, 95
- Abbildung
 - projektive, 82
- Abstand, 15, 21
 - von einem affinen Unterraum, 17
 - zum Umkreismittelpunkt, 42
- Achsensatz, 101
 - für Kegelschnitte, 133
- affin unabhängig, 54
- affine Transformation, 3
- affiner Unterraum, 11
- Affinkombination, 13, 54
- Ankreis, 43
- Ankreismittelpunkte, 43
- Ankreisradius, 46
- Ausdehnung
 - projektive, 87, 88
- Büschel
 - von Kegelschnitten, 142
- Bézier-Kurve, 124
- baryzentrische Koordinaten, 57
- Bewegung, 4
- Diagonalepunkte, 90
- Dimensionssatz, 81
- Doppeltangenten, 146
- Doppelverhältnis, 8, 92
 - am vollständigen Viereck, 97
- Dreieck
 - selbst-polar, 120
- dualer Kegelschnitt, 117
- Dualitätsprinzip, 104
- Durchschnitt
 - von zwei Kreisen, 38
- Eulergerade, 34
- Exzess, 155
- Feuerbachkreis, 47
- Fläche
 - des Dreiecks, 25
 - des Parallelogramms, 22
- Formel
 - Heronische, 27
- Fortsetzung
 - projektive, 83
- Geometrie
 - nichteuklidische, 9
- Geraden
 - konjugierte, 118, 132
- Gleichung
 - der Kreistangente, 37
 - eines Kreises, 35
- Gruppe
 - allgemeine lineare, 3
 - der Bewegungen, 4
 - eindimensionale projektive, 7
 - konforme, 4
- Höhe, 30
- halber Dreiecksumfang s , 27
- harmonisch, 96
- harmonische Polare, 98
- Heronische Formel, 27
- homogene Koordinaten, 78
- Hyperebene, 79
- Inkreis, 43
- Inkreisradius, 43, 45
- Involution
 - auf Kegelschnitt, 132
- Kegelschnitt, 109
 - Achsensatz, 133
 - Büschel, 142
 - Doppeltangenten, 146
 - dualer, 117
 - entartet, 111
 - Gleichung, 140
 - Involution darauf, 132
 - Klassifikation, 110
 - nicht-entartet, 111

- Projektivitäten darauf, 131
- Rang, 111
- Kleinsche Vierergruppe, 90, 94
- Komplement
 - orthogonales, 16
- konjugierte Geraden, 118, 132
- konjugierte Punkte, 116
- Konvexkombination, 14
- Koordinaten
 - baryzentrische, 57
 - homogene, 78
- Kreis, 35
 - durch drei Punkte, 37
- Länge, 15
- Linien
 - merkwürdige, 29
- merkwürdige Linien, 29
- Mittelsenkrechte, 29
- Mittendreieck, 34, 47
- Nagelpunkt, 35
- Neunpunktekreis, 47, 48
- nichteuklidische Geometrie, 9
- Norm, 15
- orthogonal, 15
- orthogonale Matrix, 4
- Orthogonalprojektion, 17
- parallel, 11
- Parallelotop, 22
- Parallelprojektion, 55
- Pascal-Gerade, 134
- Peripheriewinkel, 39
- Perspektivität, 85, 99
 - Strahlen, 86
 - Zentrum, 86
- Pol, 116
- Polare, 114
 - am Kreis, 37
- Polarität, 116
- Porismus von Poncelet, 147
- Potenz, 36

- Potenz eines Kreises, 36
- projektiv unabhängig, 87
- projektive Ausdehnung, 87, 88
- projektive Fortsetzung, 83
- projektiver Abschluss, 80
- projektiver Raum, 78
- projektiver Unterraum, 79
 - Dimension, 79
- Projektivität, 82
 - auf Kegelschnitt, 131
- Pythagoras, 15
- Quadrupel
 - äqui-anharmonisch, 95
 - harmonisch, 96
- Raum
 - projektiver, 78
- Satz
 - von Brianchon, 135, 138
 - von Carnot, 51
 - von Ceva, 58
 - von Chasles, 126
 - von Desargues, 62, 102, 148
 - von Desargues, dualer, 106
 - von Descartes, 41
 - von Euler, 33, 46
 - von Feuerbach, 49
 - von Hesse, 121
 - von Menelaos, 60
 - von Miquel, 41
 - von Pappos, 61, 101
 - von Pappos, dualer, 106
 - von Pascal, 134, 136, 137
 - von Pascal, Umkehrung, 146
 - von Poncelet, 147
 - von Pythagoras, 15
 - von Varignon, 57
- Schnitt
 - von Kreis und Gerade, 35
- Schnittpunktformeln, 34
- Schnittpunktsatz, 30
- Schule, 30
- Sehnenviereck, 38

Seitenhalbierende, 29
Sekantensatz, 36
senkrecht, 15
Siebenkreisesatz, 41
Skalarprodukt, 15
Spiegelung, 18
Steinersche Erzeugung, 126
 Dual, 127
stereographische Projektion, 122
Strahlensatz, 55
Strecke, 14

Tangente, 114
 am Kreis, 36
Tangentenviereck, 40
Teilverhältnis, 5
Transformation
 affine, 3

Umkreis, 42
Umkreisradius, 42
Unterraum
 affiner, 11
 projektiver, 79

Verbindungsraum, 81
Viereck, 89
 vollständiges, 90
Vierergruppe
 Kleinsche, 90
Vierkreisesatz, 41
vollständiges Viereck, 90
 Diagonalepunkte, 90

Winkel, 15
Winkelhalbierende, 19, 29
Winkelsumme
 im elliptischen Dreieck, 154
Winkelsumme im Dreieck, 25