

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

W.P. Barth, P. Knabner

Sommersemester 09

Department Mathematik der Universität
Erlangen, Bismarckstraße 1 $\frac{1}{2}$
e-mail: barth@mi.uni-erlangen.de

Version vom 24. Juni 2009

Inhaltsverzeichnis

	5.1	Bilinearformen	68
	5.1.1	Orthogonales Komplement	72
	5.1.2	Symmetrietypen	77
4 Koordinatentransformationen und Ähnlichkeit von Matrizen	5.2	Symmetrische Bilinearformen . . .	80
4.1 Basiswechsel und Koordinatentransformationen	5.2.1	Definitheit	84
4.2 Eigenwerttheorie	5.2.2	Die Weierstraßsche Normalform	89
4.2.1 Definitionen und Beispiele	5.3	Quadriken	94
4.2.2 Diagonalisierbarkeit	5.3.1	Die affine Normalform	96
4.2.3 Dynamische Systeme	5.3.2	Die euklidische Normalform	102
4.3 Cayley-Hamilton	5.4	Alternierende Bilinearformen	106
4.3.1 Trigonalisierung	5.5	Hermitesche Formen	111
4.3.2 Der Satz von Cayley-Hamilton	6 Einführung in die Lineare Optimierung		118
4.3.3 Haupträume	6.1	Elementare affine und konvexe Geometrie	118
4.4 Die Jordansche Normalform	6.1.1	Elementare affine Geometrie	118
4.4.1 Der komplexe Fall	6.1.2	Elementare konvexe Geometrie	123
4.4.2 Beispiele und Berechnung	6.2	Polyeder	127
4.4.3 Der reelle Fall	6.2.1	Seiten	131
4.5 Die Hauptachsentransformation	6.2.2	Ecken	134
4.5.1 Selbstadjungierte Matrizen	6.3	Beschränkte Polyeder	138
4.5.2 Normale Matrizen	6.4	Das Optimierungsproblem	141
4.5.3 Simultane Diagonalisierbarkeit	6.5	Ecken und Basislösungen	149
4.6 Singulärwertzerlegung	6.6	Das Simplex-Verfahren	158
5 Bilinearformen			

4 Koordinatentransformationen und Ähnlichkeit von Matrizen

4.1 Basiswechsel und Koordinatentransformationen

In diesem Abschnitt ist K ein beliebiger Körper. „Vektorraum“ bedeutet stets „ K -Vektorraum“.

Ist $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ eine Basis des Vektorraums V , so lässt sich jeder Vektor $\mathbf{x} \in V$ als Linearkombination

$$\mathbf{x} = x^1 \mathbf{v}_1 + \dots + x^n \mathbf{v}_n$$

mit (durch $\mathbf{x}$) eindeutig bestimmten $x^1, \dots, x^n \in K$ darstellen. Diese Körperelemente $x^1, \dots, x^n$ heißen *Komponenten von $\mathbf{x}$* , oder *Koordinaten von $\mathbf{x}$ in der Basis $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$* . (Dass die Indizes jetzt oben angebracht sind, ist mathematisch bedeutungslos, mnemotechnisch aber hoffentlich von Vorteil: Über oben und unten auftretende Indizes wird summiert.) Wir wollen hier der Frage nachgehen, wie sich diese Koordinaten des Vektors $\mathbf{x}$ ändern, wenn wir ihn in einer anderen Basis $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n \in V$ entwickeln.

Dazu schreiben wir zuerst die *neuen Basisvektoren als Linearkombinationen der alten*:

$$\mathbf{w}_1 = \sum_{\nu} a_1^{\nu} \mathbf{v}_{\nu}, \dots, \mathbf{w}_n = \sum_{\nu} a_n^{\nu} \mathbf{v}_{\nu}.$$

Die Koordinaten a_{μ}^{ν} der neuen Basisvektoren $\mathbf{w}_{\mu}$ in der alten Basis bilden die Spalten einer Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix} \in M(n \times n, K).$$

Diese Matrix A ist unsere *Übergangsmatrix*. Als i -te Spalte enthält sie die Koordinaten des i -ten neuen Basisvektors bezüglich der alten Basis.

Die oberen Indizes sind also die Zeilenindizes.

Die Matrix A stellt aber auch eine lineare Abbildung dar. Sie stellt bezüglich der Basis $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ diejenige Abbildung dar, welche

$$\mathbf{v}_1 \mapsto \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{v}_n \mapsto \mathbf{w}_n$$

abbildet (und dadurch eindeutig bestimmt ist). Da die $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ eine Basis von V bilden, ist $\text{rang}(A) = n$, die Übergangsmatrix A ist invertierbar.

Ein Vektor $\mathbf{x} \in V$ schreibt sich nun auf zwei Weisen:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{x} & = & \sum_1^n x^{\nu} \mathbf{v}_{\nu} \\ & \text{alte Koordinaten:} & \\ & \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} \\ & & \text{neue Koordinaten:} \end{array}$$

die aber durch folgende Beziehung verknüpft sind:

$$\sum_{\nu=1}^n x^{\nu} \mathbf{v}_{\nu} = \mathbf{x} = \sum_{\mu=1}^n y^{\mu} \left(\sum_{\nu=1}^n a_{\mu}^{\nu} \mathbf{v}_{\nu} \right) = \sum_{\nu=1}^n \left(\sum_{\mu=1}^n a_{\mu}^{\nu} y^{\mu} \right) \mathbf{v}_{\nu}.$$

Daraus folgt für die Koordinaten:

$$\text{Alte Koordinaten} = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

anders formuliert:

$$\text{alte Koordinaten} = A \cdot \text{neue Koordinaten}$$

$$\text{neue Koordinaten} = A^{-1} \cdot \text{alte Koordinaten}$$

Dieses Transformationsverhalten, welches die Koordinaten eines Vektors $\mathbf{x} \in V$ aufweisen, heißt *kontravariantes Transformationsverhalten*. (Die Koordinaten transformieren sich „gegenläufig“ zur Übergangsmatrix.)

Ein anderes Transformationsverhalten besitzen die *Vektoren des Dualraums* V^* . Um das zu bestimmen wählen wir Dualbasen

$$\begin{array}{ll} f^1, \dots, f^n & \text{mit } f^\mu(\mathbf{v}_\nu) = \delta_\nu^\mu \quad (\text{alt}) \\ g^1, \dots, g^n & \text{mit } g^j(\mathbf{w}_i) = \delta_i^j \quad (\text{neu}) \end{array}$$

Jetzt entwickeln wir die *alte* Dualbasis in der *neuen*

$$f^\mu = \sum_{j=1}^n c_j^\mu g^j.$$

Hier wird also anders als eben bei den Koordinaten über den unteren Index summiert, und der Index der Basisvektoren steht oben. Der Grund dafür ist, dass wir die hier auftretende Matrix (c_j^μ) sehr leicht bestimmen können:

$$\begin{aligned} f^\mu(\mathbf{w}_j) &= \sum_{k=1}^n c_k^\mu g^k(\mathbf{w}_j) = \sum_{k=1}^n c_k^\mu \delta_j^k = c_j^\mu \\ f^\mu(\mathbf{w}_j) &= f^\mu\left(\sum_{\nu=1}^n a_j^\nu \mathbf{v}_\nu\right) = \sum_{\nu=1}^n a_j^\nu f^\mu(\mathbf{v}_\nu) = \sum_{\nu=1}^n a_j^\nu \delta_\nu^\mu = a_j^\mu \\ c_j^\mu &= a_j^\mu \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Zur linearen Abbildung } g^\mu \mapsto f^\mu & \text{gehört die Matrix } A^t, \\ \text{zur linearen Abbildung } f^\mu \mapsto g^\mu & \text{gehört die Matrix } (A^t)^{-1}. \end{array}$$

Im Vektorraum V^* gehört also zum Übergang von der alten Basis $f^1, \dots, f^n$ zur neuen Basis $g^1, \dots, g^n$ die Übergangsmatrix $(A^t)^{-1}$. Jetzt wenden wir für diesen Basiswechsel das an, was wir soeben ganz allgemein über Koordinatentransformationen und Übergangsmatrizen gesehen haben:

$$\begin{aligned} \text{alte duale Koordinaten} &= (A^t)^{-1} \cdot \text{neue duale Koordinaten} \\ \text{neue duale Koordinaten} &= A^t \cdot \text{alte duale Koordinaten.} \end{aligned}$$

Richtig schön wird diese Formel erst, wenn wir die Koordinaten eines Vektors im Dualraum als Zeilenvektor schreiben und dann die letzte Gleichung transponieren:

$\text{neue duale Koordinaten} = \text{alte duale Koordinaten} \cdot A.$
--

Dieses Transformationsverhalten heißt *kovariant*.

Jetzt ist es wohl angebracht, einige - hoffentlich klärende - Worte zur Notation zu verlieren:

- Vektoren, in ihrer ganzen Allgemeinheit, sind Elemente eines Vektorraums. Dieser kann ziemlich gefährlich (=unanschaulich) sein: ein Dualraum, ein Quotientenraum, ein Funktionenraum, usw. Jede Veranschaulichung solcher Vektoren versagt. Nur über die abstrakte Theorie der Vektorräume gelingt es, solche Vektoren zu beschreiben.
- Ein Vektor des Anschauungsraums, mit einem Pfeilchen vorne dran, ist ein Element des Zahlenraums $\mathbb{R}^n$, und wird durch ein n -tupel reeller Zahlen gegeben. Dieses n -tupel können wir wahlweise als Spalte oder als Zeile schreiben. Darauf, auf die Systematik der Indizes, kommt es nicht an. Wir haben uns dafür entschieden, solche Vektoren als Spaltenvektoren zu schreiben. Und zumindest momentan schreiben wir an ihren Koordinaten die Indizes oben.
- Hat man einen endlichdimensionalen Vektorraum und darin eine Basis, so gehört zu jedem Vektor des Vektorraums sein Koordinatenvektor, ein n -tupel von Körperelementen (=Zahlen.) Um die Koordinaten von den Vektoren zu unterscheiden, bekommen die Koordinaten ihren Index oben hin:

$$\mathbf{x} = \sum_{\nu=1}^n x^{\nu} \mathbf{v}_{\nu}.$$

Einen Koordinatenvektor wollen wir uns immer als Spaltenvektor vorstellen, sodass seine oberen Indizes die Zeile angeben.

- Den Koordinatenvektor eines Vektors im Dualraum, bezüglich der Dualbasis, wollen wir uns immer als Zeilenvektor vorstellen. Die Dualkoordinaten bekommen ihre Indizes unten, weil sie sich kovariant transformieren, so wie die Übergangsmatrix die ursprünglichen Basisvektoren. Untere Indizes geben somit die Spalte an.

Eine gewisse Logik bekommt dieses System, wenn man sich folgende Version der *Einsteinschen Summenkonvention* zu eigen macht: Kommen in einer Formel zwei gleiche Indizes vor, einer unten und einer oben, so muss darüber automatisch summiert werden, auch wenn kein Summenzeichen da steht. Damit ist also $\sum x^{\nu} \mathbf{v}_{\nu}$ dasselbe wie $x^{\nu} \mathbf{v}_{\nu}$. Das Skalarprodukt eines Zeilenvektors mit einem Spaltenvektor schreibt sich dann

$$(c_1, \dots, c_n) \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = c_{\nu} x^{\nu}.$$

Nicht nur Koordinaten von Vektoren, oder von Vektoren im Dualraum, ändern sich bei Koordinatentransformationen, sondern auch Matrizen zu linearen Abbildungen. Dies müssen wir als Nächstes untersuchen.

Sei dazu $\Phi : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung des Vektorraums V in den Vektorraum W , seien $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ und $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m \in W$ Basen, sei

$$C = \begin{pmatrix} c_1^1 & \cdots & c_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ c_1^m & \cdots & c_n^m \end{pmatrix}$$

die Matrix, welche die Abbildung Φ in diesen Basen beschreibt, d.h.

$$\Phi(\mathbf{v}_\nu) = \sum_{i=1}^m c_\nu^i \mathbf{w}_i.$$

Jetzt wechseln wir zu neuen Basen

neue Basis	Beziehung zur alten Basis	Übergangsmatrix
$\mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_n$	$\mathbf{v}'_\mu = \sum_{\nu=1}^n a_\mu^\nu \mathbf{v}_\nu$	$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$
$\mathbf{w}'_1, \dots, \mathbf{w}'_m$	$\mathbf{w}'_j = \sum_{i=1}^m b_j^i \mathbf{w}_i$	$B = \begin{pmatrix} b_1^1 & \dots & b_m^1 \\ \vdots & & \vdots \\ b_1^m & \dots & a_m^m \end{pmatrix}$

und berechnen die neue Matrix C' für die Abbildung Φ :

$$\Phi(\mathbf{v}'_\mu) = \sum_{j=1}^m (c')_\mu^j \mathbf{w}'_j = \sum_{i,j=1}^m (c')_\mu^j b_j^i \mathbf{w}_i;$$

$$\mathbf{v}'_\mu = \sum_{\nu=1}^n a_\mu^\nu \mathbf{v}_\nu \quad \Rightarrow \quad \Phi(\mathbf{v}'_\mu) = \sum_{\nu=1}^n a_\mu^\nu \Phi(\mathbf{v}_\nu) = \sum_{\nu=1}^n \sum_{i=1}^m a_\mu^\nu c_\nu^i \mathbf{w}_i.$$

Durch Koeffizientenvergleich findet man hieraus

$$\sum_{\nu=1}^n a_\mu^\nu c_\nu^i = \sum_{j=1}^m (c')_\mu^j b_j^i,$$

oder in Form eines Matrizenprodukts

$$C \cdot A = B \cdot C'$$

neue Matrix $C' = B^{-1} \cdot C \cdot A$

Hier sind $C, C' \in M(m \times n, K)$, $B \in M(m \times m, K)$ und $A \in M(n \times n, K)$. Man kann diese Formel als kommutatives Diagramm schreiben:

$$\begin{array}{ccccc} & K^n & \xrightarrow{C} & K^m & \\ A \uparrow \downarrow & & & & \uparrow \downarrow B^{-1} \\ & K^n & \xrightarrow{C'} & K^m & \end{array}$$

Satz 4.1 Es sei $\Phi : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung vom Rang r . Dann gibt es Basen in V und W , in denen Φ die beschreibende Matrix

$$\underbrace{\dim(W) \left\{ \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}}_{\dim(V)}$$

hat.

Beweis. Es sei $C \in M(m \times n, K)$ die Matrix für Φ bezüglich irgend welcher Basen von V und W . Es ist zu zeigen, dass es invertierbare Matrizen $A \in GL(n, K)$ und $B \in GL(m, K)$ gibt, derart, dass das Produkt $B^{-1} \cdot C \cdot A$ die angegebene Form hat. Zunächst benützen wir elementare Zeilentransformationen, um C auf Zeilenstufenform zu bringen:

$$B^{-1} \cdot C = \left(\begin{array}{cccccc} 0 & \dots & 1 & * & * & \\ & & 0 & \dots & 1 & * & * \\ & & & & 0 & \dots & 1 & * \\ & & & & 0 & & & \end{array} \right\}^r.$$

Durch *elementare Spaltenumformungen* kann man alle Einträge der ersten r Zeilen, bis auf die führenden Einsen, auf 0 transformieren. Elementare Spaltenumformungen erhält man als Produkt mit Elementarmatrizen von rechts. Ist A' das Produkt all dieser Elementarmatrizen, so haben wir also

$$B^{-1} \cdot C \cdot A' = \left(\begin{array}{cccccc} 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \\ & & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & \dots & 1 & 0 \\ & & & & 0 & & & \end{array} \right\}^r.$$

Jetzt vertauschen wir nur noch die Spalten so, dass die Spalten mit den Einsen in ihrer richtigen Reihenfolge ganz nach links kommen. Auch dies ist zu erreichen durch Multiplikation mit einem Produkt von Elementarmatrizen von rechts. Bezeichnen wir mit A das Produkt aller Elementarmatrizen, mit denen wir insgesamt von rechts multiplizierten, so hat $B^{-1} \cdot C \cdot A$ die angegebene Form. $\square$

Dieser Satz ist eine Formulierung des Homomorphiesatzes 3.7 in der Sprache der Matrizen. Der Sinn seiner Aussage besteht darin, dass lineare Abbildungen eines endlich-dimensionalen Vektorraums in einen anderen wenig vor dem forschenden Auge des Mathematikers verbergen können. Man kann ihre Matrizen auf eine ganz einfache *Normalform* bringen, die nur vom Rang der linearen Abbildung abhängt.

Völlig anders ist die Situation für lineare Abbildungen eines Vektorraums *in sich selbst*. Dann ist nämlich der Bildraum W gleich dem Urbildraum V , wir haben nur eine einzige Basis, die wir wechseln können, es ist in obiger Formel $B = A$ zu setzen. Bei einem Basiswechsel des Vektorraums V mit Übergangsmatrix A wird die Matrix C zu einer linearen Abbildung $\Phi : V \rightarrow V$ in

$$C' = A^{-1} \cdot C \cdot A$$

transformiert. Im Rest dieses Kapitels behandeln wir vor allem die Frage nach einer möglichst einfachen Form C' , auf welche wir die Matrix C transformieren können.

Definition 4.1 Zwei Matrizen $C, C' \in M(n \times n, K)$ heißen *ähnlich* oder *äquivalent*, wenn es eine invertierbare Matrix $A \in GL(n, K)$ gibt, so dass

$$C' = A^{-1} \cdot C \cdot A.$$

Das zugehörige kommutative Diagramm sieht jetzt so aus:

$$\begin{array}{ccccc} K^n & & \xrightarrow{C} & & K^n \\ A \updownarrow & A^{-1} & & A & \updownarrow A^{-1} \\ K^n & & \xrightarrow{C'} & & K^n \end{array}$$

Diese Ähnlichkeit von Matrizen ist eine Äquivalenzrelation im Sinne von Abschnitt 3.4:

- Reflexivität: $A = \mathbb{1}_n \Rightarrow C = \mathbb{1}_n^{-1} \cdot C \cdot \mathbb{1}_n$,
- Symmetrie: $C' = A^{-1} \cdot C \cdot A \Rightarrow C = (A^{-1})^{-1} \cdot C' \cdot A^{-1}$,
- Transitivität: Aus $C' = A^{-1} \cdot C \cdot A$ und $C'' = B^{-1} \cdot C' \cdot B$ folgt $C'' = B^{-1} A^{-1} \cdot C \cdot AB = (AB)^{-1} \cdot C \cdot AB$.

Eigenschaften von $n \times n$ -Matrizen, welche unter Ähnlichkeit invariant sind, können also auf lineare Abbildungen $\Phi : V \rightarrow V$, $\dim V = n$, übertragen werden. Wir definieren sie über die Darstellungsmatrix bezüglich einer gewählten Basis und merken an, dass sie von der Wahl der Basis unabhängig sind. Hierzu ein Beispiel:

Definition 4.2 *Es sei V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum und $\Phi : V \rightarrow V$ K -linear. Wir definieren die Determinante von Φ als*

$$\det(\Phi) := \det(C),$$

wobei C die darstellende Matrix von Φ bezüglich irgend einer Basis von V ist.

Damit diese Definition sinnvoll ist, müssen wir zeigen, dass sie von der gewählten Basis unabhängig ist. Sei als C' die darstellende Matrix von Φ bezüglich einer anderen Basis. Dann gibt es eine invertierbare Matrix A so, dass $C' = A^{-1} \cdot C \cdot A$. Damit folgt

$$\det(C') = \det(A^{-1} \cdot C \cdot A) = \det(A^{-1}) \cdot \det(C) \cdot \det(A) = \det(C) \cdot \det(A^{-1} \cdot A) = \det(C).$$

Definition 4.3 *Es sei V ein K -Vektorraum. Dann bilden die bijektiven K -linearen Abbildungen $\Phi : V \rightarrow V$ eine Gruppe, die wir in Verallgemeinerung von Beispiel 3.7 mit $GL(V)$ bezeichnen. Ist V endlich-dimensional, so bildet*

$$SL(V) = \{\Phi \in GL(V) : \det(\Phi) = 1\}$$

eine Untergruppe von $GL(V)$.

Aufgabe 4.1 *Der Homomorphismus $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ werde bezüglich der kanonischen Basen durch die Matrix*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Man berechne die Matrixdarstellung von φ bezüglich der Basis

$$\mathbf{a}_1 = (0, 1, 1), \quad \mathbf{a}_2 = (1, 0, 3), \quad \mathbf{a}_3 = (1, 0, 1)$$

des $\mathbb{R}^3$ und der Basis

$$\mathbf{b}_1 = (1, 1), \quad \mathbf{b}_2 = (1, -1)$$

des $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 4.2 Es sei V der Vektorraum der reellen, symmetrischen zweireihigen Matrizen und

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in V.$$

Der Endomorphismus $\varphi : V \rightarrow V$ sei definiert durch $\varphi(S) := A^t S A$. Man berechne die Matrix von φ bezüglich der Basis

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

von V .

Aufgabe 4.3 Für $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ definiert

$$\varphi(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot A$$

einen Endomorphismus von $\mathbb{R}^{2 \times 2}$. Bestimmen Sie die Matrix von φ bezüglich der Standardbasis

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4.4 Geben Sie die darstellende Matrix der linearen Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$ an und bezüglich der Basis

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Aufgabe 4.5 Im $\mathbb{R}^4$ seien die Vektoren

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Weiter sei $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ eine lineare Abbildung mit

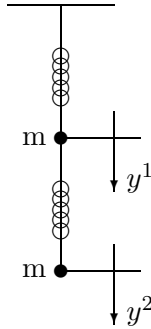
$$f(\mathbf{a}_1) = \mathbf{a}_2, \quad f(\mathbf{a}_2) = \mathbf{a}_1, \quad f(\mathbf{a}_3) = f(\mathbf{a}_4) = \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4.$$

Geben Sie die darstellende Matrix von f in der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^4$ an.

4.2 Eigenwerttheorie

4.2.1 Definitionen und Beispiele

Das Problem, eine möglichst einfache Normalform für ähnliche Matrizen zu finden, hat eine Bedeutung, die weit über die lineare Algebra, ja weit über die Mathematik hinausgeht. Dies soll an einem einfachen Differentialgleichungs-System aus der Mechanik illustriert werden. (Wie eine solche Differentialgleichung aufgestellt wird, ist ein Problem der mathematischen Modellierung. Lösungsmethoden dafür brauchen Analysis, Numerik, aber auch Lineare Algebra.) Wir betrachten die Schwingung zweier gekoppelter Federn:



Ruhelagen der Federn seien $y^1 = 0$ und $y^2 = 0$,
beide Federkonstanten seien k ,
beide Massen seien m ,

dann gelten die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} m\ddot{y}^1 &= -ky^1 + k(y^2 - y^1) = k(y^2 - 2y^1), \\ m\ddot{y}^2 &= -k(y^2 - y^1). \end{aligned}$$

Für den Spaltenvektor

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

ist dies, nachdem wir noch zur Vereinfachung $k = m = 1$ normieren, die folgende Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} \ddot{y}^1 \\ \ddot{y}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}.$$

Das Problem besteht in der *Kopplung* der beiden Gleichungen für die beiden Koordinaten y^1 und y^2 . Falls die Koeffizientenmatrix

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ähnlich zu einer Diagonalmatrix wäre, etwa

$$C = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot A,$$

dann hätten wir für den Vektor

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} := A \cdot \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}$$

die Gleichung

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}^1 \\ \ddot{x}^2 \end{pmatrix} = A \cdot C \cdot \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = A \cdot C \cdot A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}.$$

Dies sind *zwei entkoppelte* Differentialgleichungen

$$\ddot{x}^1 = \lambda_1 x^1, \quad \ddot{x}^2 = \lambda_2 x^2$$

für die beiden Komponenten. In den einschlägigen Vorlesungen behandelt man deren Lösung durch Exponential- und Winkelfunktionen.

Sei also jetzt V ein K -Vektorraum und $\Phi : V \rightarrow V$ eine K -lineare Abbildung. Wir fragen, wann es eine Basis $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ von V gibt, in der Φ durch eine Diagonalmatrix

$$C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \\ \vdots & 0 & \lambda_3 & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}$$

beschrieben wird. Wenn das so ist, dann gilt für die Basisvektoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$:

$$\Phi(\mathbf{v}_\nu) = \lambda_\nu \cdot \mathbf{v}_\nu, \quad \nu = 1, \dots, n.$$

(Diese Vektoren werden durch Φ also nur gestreckt, um den Faktor λ_ν , ihre Richtung wird nicht geändert.)

Definition 4.4 Ein Vektor $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in V$ heißt Eigenvektor der linearen Abbildung $\Phi : V \rightarrow V$, wenn ein Skalar $\lambda \in K$ existiert, so, dass

$$\Phi(\mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{v}.$$

Analog heißt $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in K^n$ ein Eigenvektor zur Matrix $C \in M(n \times n, K)$, wenn

$$C \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x} \quad (\text{Eigenvektorgleichung}).$$

Der Streckungsfaktor λ ist durch den Eigenvektor $\mathbf{v}$ und die lineare Abbildung Φ eindeutig bestimmt, denn wenn $\Phi(\mathbf{v}) = \lambda_1 \cdot \mathbf{v} = \lambda_2 \cdot \mathbf{v}$, dann folgt $(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$, und wenn tatsächlich $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sein sollte, so würde hieraus folgen

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Aber ein Eigenvektor ist kein Nullvektor, Widerspruch!

Definition 4.5 a) Der durch den Eigenvektor $\mathbf{v}$ eindeutig bestimmte Streckungsfaktor $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt der Eigenwert zum Eigenvektor $\mathbf{v}$.

b) Ist λ ein Eigenwert einer $n \times n$ -Matrix C (oder einer linearen Abbildung) so heißt der Untervektorraum

$$\{\mathbf{x} \in K^n : C \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x}\} = \text{Kern}(C - \lambda \mathbb{1}_n)$$

der Eigenraum von C zum Eigenwert λ .

c) Die Dimension des Eigenraums zum Eigenwert λ heißt die geometrische Vielfachheit dieses Eigenwerts.

Wenn λ ein Eigenwert ist, dann gibt es Eigenvektoren, d.h. Vektoren $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ für λ . Der Eigenraum hat also eine Dimension > 0 , die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts ist also immer ≥ 1 . Der Nullvektor $\mathbf{0} \in \text{Kern}(C - \lambda \mathbb{1}_n)$ ist kein Eigenvektor, aber alle anderen Vektoren in diesem Eigenraum sind Eigenvektoren zu λ .

Satz 4.2 (Tautologie) Die Matrix $C \in M(n \times n, K)$ ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix, dann, und nur dann, wenn der Vektorraum K^n eine Basis besitzt, die aus lauter Eigenvektoren für C besteht.

Dies braucht nicht mehr bewiesen zu werden, da es nur eine Zusammenfassung der obigen Diskussion ist.

Der zweifelhafte Wert von Satz 4.2 zeigt sich sofort, wenn man beginnt Eigenvektoren zur Matrix C tatsächlich zu suchen. Die entscheidende Idee besteht darin, zuerst Eigenwerte zu suchen:

Satz 4.3 Ein Skalar $\lambda \in K$ ist genau dann Eigenwert der Matrix C (zu einem Eigenvektor $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in K^n$), wenn gilt:

$$\det(C - \lambda \cdot \mathbb{1}_n) = 0 \quad (\text{Eigenwertgleichung})$$

Beweis. Für einen Vektor $\mathbf{v} \in V$ ist

$$C \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad (C - \lambda \cdot \mathbb{1}_n) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Und es gibt eine Vektor $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in V$ mit dieser Eigenschaft, genau dann, wenn

$$\text{Rang}(C - \lambda \cdot \mathbb{1}_n) < n \quad (\text{Satz 1.26}),$$

und dies ist äquivalent mit

$$\det(C - \lambda \cdot \mathbb{1}_n) = 0 \quad (\text{Satz 2.41}). \quad \square$$

Weiter sieht man, dass die Eigenwerte eines Homomorphismus $\Phi : V \rightarrow V$ übereinstimmen mit den Eigenwerten der darstellenden Matrix C von Φ bezüglich irgend einer Basis von V .

Beweis. Es sei $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ eine Basis und $C \in M(n \times n, K)$ die darstellende Matrix von Φ bezüglich dieser Basis. D.h., für $\mathbf{x} = (x^\nu) \in K^n$ gilt

$$\Phi\left(\sum_{\nu} x^\nu \mathbf{v}_\nu\right) = \sum_{\nu} y^\nu \mathbf{v}_\nu \quad \text{mit} \quad \mathbf{y} = C \cdot \mathbf{x}.$$

Ist nun $\mathbf{v} = \sum x^\nu \mathbf{v}_\nu$ ein Eigenvektor von Φ zum Eigenwert λ , so gilt

$$\sum_{\nu} y^\nu \mathbf{v}_\nu = \lambda \cdot \sum_{\nu} x^\nu \mathbf{v}_\nu$$

und $C \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y} = \lambda \cdot \mathbf{x}$. $\square$

Beispiel 4.1 Wir suchen Eigenwerte der Matrix

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

vom Beginn dieses Paragraphen. Die Eigenwertgleichung für diese Matrix ist

$$\det(C - \lambda \cdot \mathbb{1}_2) = \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (-2-\lambda)(-1-\lambda) - 1 = \lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0.$$

Die Wurzeln

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{5})$$

dieser quadratischen Gleichung sind die Eigenwerte. Die zugehörigen Eigenvektoren v berechnet man aus den linearen Gleichungssystemen

$$\begin{aligned}(C - \lambda_1 \cdot \mathbb{1}_2) \cdot \mathbf{v} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})v^1 & + & v^2 \\ v^1 & + & \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} &= s_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 + \sqrt{5} \end{pmatrix}, s_1 \in K, \\ (C - \lambda_2 \cdot \mathbb{1}_2) \cdot \mathbf{v} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})v^1 & + & v^2 \\ v^1 & + & \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} &= s_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 - \sqrt{5} \end{pmatrix}, s_2 \in K.\end{aligned}$$

Diese Eigenvektoren bilden zusammen zwei Geraden.

Beim Suchen der Eigenwerte kommt es also darauf an, die Nullstellen λ der Funktion $\lambda \mapsto \det(C - \lambda \cdot \mathbb{1}_n)$ zu finden.

Satz 4.4 Es sei $C \in M(n \times n, K)$. Die Funktion

$$\chi_C : K \ni \lambda \mapsto \det(C - \lambda \mathbb{1}_n) \in K$$

ist ein Polynom vom Grad n . Mit der Abkürzung

$$sp(C) := c_1^1 + c_2^2 + \dots + c_n^n \quad (\text{Spur von } C)$$

gilt

$$\chi_C(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \cdot sp(C) \cdot \lambda^{n-1} + \dots + \det(C).$$

Beweis. Die Leibnizformel

$$\chi_C(\lambda) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \text{sign}(\sigma) \cdot (c_{1,\sigma(1)} - \lambda \delta_{1,\sigma(1)}) \cdot \dots \cdot (c_{n,\sigma(n)} - \lambda \delta_{n,\sigma(n)})$$

zeigt, daß $\chi_C(\lambda)$ ein Polynom in λ vom Grad $\leq n$ ist. Man findet auch als Koeffizienten

$$\begin{array}{lll} \text{bei } \lambda^n & (\sigma = id :) & (-1)^n \\ \text{bei } \lambda^{n-1} & (\sigma = id :) & (-1)^{n-1}(c_1^1 + \dots + c_n^n) \\ \text{bei } \lambda^0 & (\lambda = 0 :) & \det(C). \end{array}$$

□

Definition 4.6 Das Polynom $\chi_C(\lambda) = \det(C - \lambda \mathbb{1}_n)$ heißt charakteristisches Polynom der Matrix C . Der folgende Satz 4.5 zeigt, dass alle Matrizen, welche dieselbe lineare Abbildung Φ beschreiben, dasselbe charakteristische Polynom haben. Man kann dieses Polynom dann also auch charakteristisches Polynom der Abbildung Φ nennen.

Satz 4.5 Ähnliche Matrizen haben dasselbe charakteristische Polynom.

Beweis. Wenn $C' = A^{-1} \cdot C \cdot A$, dann ist

$$\begin{aligned}\chi_{C'}(\lambda) &= \det(A^{-1} \cdot C \cdot A - \lambda \cdot \mathbb{1}_n) \\ &= \det(A^{-1} \cdot (C - \lambda \cdot \mathbb{1}_n) \cdot A) \\ &= \det(A)^{-1} \cdot \det(C - \lambda \cdot \mathbb{1}_n) \cdot \det(A) \quad (\text{Determinantenmultiplikationssatz}) \\ &= \chi_C(\lambda).\end{aligned}$$

□

Satz 4.6 (Korollar zu Satz 4.5) a) Ähnliche Matrizen haben

die gleiche Determinante (folgt schon aus dem Determinantenmultiplikationssatz),
die gleiche Spur,
die gleichen Eigenwerte.

b) Ist $C \in M(n \times n, K)$ diagonalisierbar mit den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, so gilt

$$\det(C) = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n, \quad \text{sp}(C) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n.$$

Ziemlich offensichtlich sind die im folgenden Satz formulierten Beziehungen für Eigenwerte und Eigenvektoren. In a) benutzen wir die Notation $C^k, k \in \mathbb{N}$, für die k -te Potenz der Matrix C . Man kann sie induktiv definieren durch

$$C^0 := \mathbb{1}_n, \quad C^{k+1} = C \cdot C^k.$$

Satz 4.7 Die $n \times n$ -Matrix $C \in M(n \times n, K)$ habe den Eigenvektor $\lambda \in K$ mit zugehörigem Eigenvektor $\mathbf{x} \in K^n$.

a) Dann ist $\mathbf{x}$ auch Eigenvektor

- für $\alpha C, \alpha \in K$, zum Eigenwert $\alpha \lambda$,
- für $\alpha \mathbb{1}_n + C, \alpha \in K$, zum Eigenwert $\alpha + \lambda$,
- für C^k zum Eigenwert λ^k ,
- für C^{-1} zum Eigenwert $1/\lambda$, falls C invertierbar ist.

b) Auch die transponierte Matrix C^t besitzt den Eigenwert λ .

c) Falls $K = \mathbb{C}$, dann ist $\bar{\lambda}$ Eigenwert für $\bar{C}$ zum Eigenvektor $\bar{\mathbf{x}}$. Und $\bar{\lambda}$ ist auch Eigenwert für $C^\dagger$.

d) Ist $C = (c_{i,j})$ eine obere (oder untere) Dreiecksmatrix, dann sind ihre Eigenwerte gerade die Diagonaleinträge $c_{i,i}$.

Beweis. Die Formeln in a) sind offensichtliche Umformungen der Eigenwertgleichung $C \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x}$. Mit Satz 2.45 b) hat die transponierte Matrix das gleiche charakteristische Polynom

$$\det(C^t - \lambda \mathbb{1}_n) = \det(C - \lambda \mathbb{1}_n)^t = \det(C - \lambda \mathbb{1}_n)$$

wie C . Damit folgt b). Konjugieren der Eigenwertgleichung

$$C \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad \bar{C} \cdot \bar{\mathbf{x}} = \bar{\lambda} \cdot \bar{\mathbf{x}}$$

führt auf die erste Aussage in c). Und die zweite Aussage folgt mit b). Schließlich ist mit C auch $C - \lambda \mathbb{1}_n$ eine Dreiecksmatrix und deren Determinante ist das Produkt

$$(c_{1,1} - \lambda) \cdot \dots \cdot (c_{n,n} - \lambda)$$

ihrer Diagonaleinträge.

Beispiel 4.2 Es sei $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Projektion. Dann ist $P^2 = P$ und aus Satz 4.7 a) folgt für jeden Eigenwert λ von P , dass $\lambda^2 = \lambda$, also $\lambda = 1$ oder $= 0$. Alle Vektoren im Kern von P sind Eigenvektoren zum Eigenwert 0, alle Vektoren im Bild von P sind Eigenvektoren zum Eigenwert 1. Nach Satz 2.15 a) ist $\mathbb{R}^n = \text{Kern}(P) \oplus \text{Bild}(P)$. Somit ist P diagonalisierbar (was wir aber in Satz 2.15 c) schon bewiesen haben). Speziell für $\|\mathbf{a}\| = 1$ und $P = \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}$, die Projektion auf $\mathbb{R} \cdot \mathbf{a}$, ist der Eigenraum

zum Eigenwert	der Unterraum
$\lambda = 0$	$\mathbf{a}^\perp$
$\lambda = 1$	$\mathbb{R} \cdot \mathbf{a}$

Beispiel 4.3 Es sei $\mathbf{a} \in K^n$ mit $\mathbf{a}^t \cdot \mathbf{a} = 1$. Dann ist $S = \mathbb{1}_n - 2\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}$ die Matrix der Spiegelung an der Hyperebene $\mathbf{a}^\perp$. Aus $S^2 = \mathbb{1}_n$ folgt mit Satz 4.7 a) für jeden Eigenwert λ von S , dass $\lambda^2 = 1$, also $\lambda = \pm 1$. Und der Eigenraum

zum Eigenwert	ist der Unterraum
$\lambda = -1$	$K \cdot \mathbf{a}$
$\lambda = +1$	$\mathbf{a}^\perp$

Spezielle Matrizen haben gelegentlich spezielle Eigenwerte. Wir erinnern an die folgenden Arten spezieller Matrizen $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$:

- A heißt hermitesch, wenn $A^\dagger = \bar{A}^t = A$. Eine reelle Matrix ist hermitesch, genau dann, wenn sie symmetrisch ist.
- U heißt unitär, wenn $U \cdot U^t = \mathbb{1}_n$. Eine reelle Matrix ist unitär, genau dann, wenn sie orthogonal ist.

Diesen beiden Arten spezieller Matrizen fügen wir noch eine dritte Art hinzu:

Definition 4.7 Die Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ heißt anti-hermitesch, wenn $A^\dagger = -A$. Das ist genau dann der Fall, wenn $A = i \cdot H$ mit einer hermiteschen Matrix H . Eine reelle Matrix A ist genau dann anti-hermitesch, wenn $A^t = -A$. Eine solche Matrix heißt antisymmetrisch oder schiefsymmetrisch.

Satz 4.8 (Eigenwerte spezieller Matrizen) a) Jeder Eigenwert einer hermiteschen $n \times n$ -Matrix H ist reell.

b) Jeder Eigenwert λ einer unitären Matrix U hat den Betrag $|\lambda| = 1$.

c) Jeder Eigenwert einer anti-hermiteschen Matrix A ist rein imaginär.

Beweis. Wir verwenden das hermitesche Standard-Skalarprodukt $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^t \cdot \bar{\mathbf{y}}$ auf dem $\mathbb{C}^n$.

a) Falls $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor der hermiteschen Matrix H zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ ist, dann gilt also

$$\lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \lambda \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle H \cdot \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, H \cdot \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, \lambda \mathbf{x} \rangle = \bar{\lambda} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle.$$

Daraus folgt

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0.$$

$\mathbf{x}$ ist ein Eigenvektor, deswegen ist $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ und damit $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \neq 0$. Also folgt $\lambda = \bar{\lambda}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) Jetzt ist

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle U \cdot \mathbf{x}, U \cdot \mathbf{x} \rangle = \langle \lambda \mathbf{x}, \lambda \mathbf{x} \rangle = \lambda \bar{\lambda} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle.$$

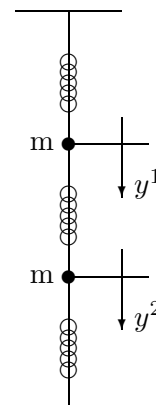
Wegen $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \neq 0$ folgt jetzt $\lambda \bar{\lambda} = 1$.

c) Die Matrix iA ist hermitesch und hat nur reelle Eigenwerte. Die Behauptung folgt aus a). $\square$

Aufgabe 4.6 Gekoppelte Federn, wie am Anfang dieses Paragraphen, kann man sehr schön experimentell aufbauen. Die senkrechten Schwingungen kann man aber sehr schlecht beobachten, weil die Federn schnell horizontal ins Wackeln kommen. Einfacher ist das, wenn man die untere Masse mit einer dritten Feder (wie in nebenstehender Zeichnung) stabilisiert. Die Bewegungsgleichungen lauten dann

$$\begin{aligned} m\ddot{y}^1 &= -ky^1 + k(y^2 - y^1) = k(y^2 - 2y^1), \\ m\ddot{y}^2 &= -k(y^2 - y^1) - ky^2 = k(y^1 - 2y^2). \end{aligned}$$

Bestimmen Sie (für $k = m = 1$) Eigenwerte und Eigenvektoren der Koeffizientenmatrix dieses Systems (und verifizieren Sie, dass dieses System auch mathematisch einfacher zu behandeln ist).



Aufgabe 4.7 Bestimmen Sie alle Eigenwerte und die Dimensionen aller Eigenräume für die Matrizen

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 4 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

und entscheiden Sie, ob M und N ähnlich sind.

Aufgabe 4.8 Entscheiden Sie, ob die Matrizen

$$M = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -10 \\ -4 & 1 & -4 \\ 5 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

ähnlich sind.

Aufgabe 4.9 Berechnen Sie die (möglicherweise komplexen) Eigenwerte und Eigenvektoren der reellen Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4.10 Es sei $\varphi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ die lineare Abbildung, welche die Vektoren $\mathbf{e}_k$, $k = 1, \dots, n$ der Standardbasis folgendermaßen abbildet:

$$\varphi(\mathbf{e}_k) = \mathbf{e}_{k+1} \text{ für } k = 1, \dots, n-1, \quad \varphi(\mathbf{e}_n) = \mathbf{e}_1.$$

Berechnen Sie das charakteristische Polynom von φ und bestimmen Sie im Fall $n = 4$ alle Eigenwerte und Eigenvektoren von φ .

Aufgabe 4.11 a) Es sei $\mathbf{v} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$ so, dass alle λ_ν paarweise voneinander verschieden sind. Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\mathbf{v}_k := (\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k), \quad k = 1, \dots, n,$$

linear unabhängig sind. (Hier ist λ_ν^k die k -te Potenz von λ_ν .)

b) Es sei $A \in M(n \times n, K)$ mit n verschiedenen Eigenwerten. Zeigen Sie für $B \in M(n \times n, K)$ die Äquivalenz der beiden folgenden Eigenschaften:

i) $AB = BA$,

ii) $B = b_0 \mathbb{1} + b_1 A + b_2 A^2 + \dots + b_{n-1} A^{n-1}$ mit $b_0, b_1, \dots, b_{n-1} \in K$.

Aufgabe 4.12 Im $\mathbb{R}$ -Vektorraum aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ betrachte man den von den Funktionen

$$f(x) = e^x, \quad g(x) = xe^x, \quad h(x) = e^{-x}$$

aufgespannten Unterraum $V = \mathbb{R}f + \mathbb{R}g + \mathbb{R}h$ und den Endomorphismus

$$\varphi : V \rightarrow V, \quad F \mapsto F' \quad (\text{Differentiation})$$

von V . Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von φ .

Aufgabe 4.13 Für $n \geq 1$ sei V der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$ mit reellen Koeffizienten. Sei $A : V \rightarrow V$ die lineare Abbildung mit

$$(Af)(X) = f(X+1) - f''(X)$$

wobei f'' die zweite Ableitung von f ist. Zeigen Sie, dass $\lambda = 1$ der einzige Eigenwert von A ist, und bestimmen Sie den zugehörigen Eigenraum.

Aufgabe 4.14 Entscheiden Sie, welche der folgenden Matrizen zueinander ähnlich sind und welche nicht, und begründen Sie Ihre Antwort:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 8 \\ 4 & -7 & 4 \\ 8 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$

Aufgabe 4.15 Seien a und b reelle Zahlen mit $a^2 + b^2 = 1$. Ermitteln Sie alle Eigenwerte und Eigenräume der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -ab & \frac{1}{2}(a^2 - b^2) & 0 \\ \frac{1}{2}(a^2 - b^2) & ab & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4.16 Seien $V = \mathbb{R}^3$ und $f : V \rightarrow V$ die lineare Abbildung mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle Unterräume $U \subset V$, für die $f(U) \subset U$.

Aufgabe 4.17 Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Man beweise oder widerlege:

a) Es gibt eine invertierbare Matrix T mit $A = T^{-1}BT$.

b) Es gibt eine invertierbare Matrix T mit $A = T^{-1}CT$.

Aufgabe 4.18 Für die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

zeige man, dass ihre Eigenwerte samt algebraischer Vielfachheit übereinstimmen, aber nur eine diagonalisierbar ist.

Aufgabe 4.19 Sei $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ eine reelle Matrix mit $b > 0$ und $c > 0$. Zeigen Sie:

a) A hat zwei reelle Eigenwerte.

b) Kein Quadrant der Ebene $\mathbb{R}^2$ enthält Eigenvektoren zu beiden Eigenwerten von A .

Aufgabe 4.20 Gegeben seien die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 8 & -5 & -8 \\ -8 & 4 & 7 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q}).$$

a) Zeigen Sie, dass sowohl A als auch B diagonalisierbar sind.

b) Zeigen Sie, dass A und B simultan diagonalisierbar sind, d.h., dass es ein invertierbares $T \in M_3(\mathbb{Q})$ gibt, derart dass TAT^{-1} und TBT^{-1} beide Diagonalgestalt haben.

Aufgabe 4.21 Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ eine reelle Matrix. Geben Sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$ an, die aus Eigenvektoren von A besteht.

Aufgabe 4.22 Betrachten Sie eine reelle 3×3 -Matrix $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,3}$. Zeigen Sie

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + \text{sp}(A) \cdot \lambda^2 - \text{sp}(A^{\text{adj}}) \cdot \lambda + \det(A).$$

Dabei ist A^{adj} die Adjunkte von A aus 2.6.2.

4.2.2 Diagonalisierbarkeit

Definition 4.8 Eine Matrix heißt diagonalisierbar, wenn sie ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist.

Wir geben hier Kriterien für Diagonalisierbarkeit. Zur Vorbereitung formulieren wir

Satz 4.9 Es sei $C \in M(n \times n, K)$ mit paarweise voneinander verschiedenen Eigenwerten $\lambda_i \in K$, $i = 1, \dots, l$ und den zugehörigen Eigenräumen $V_i = \text{Kern}(C - \lambda_i \mathbb{1}_n)$. Dann ist die Summe dieser Eigenräume

$$V_1 + \dots + V_l = V_1 \oplus \dots \oplus V_l$$

direkt.

Beweis. Mit Satz 2.16 a) ist zu zeigen: Sind $\mathbf{0} \neq \mathbf{v}_i \in V_i$, $i = 1, \dots, l$, Eigenvektoren (zu verschiedenen Eigenwerten), dann sind die $\mathbf{v}_i$ linear unabhängig. Diese Aussage beweisen wir durch Induktion nach l .

Der Induktionsanfang $l = 1$ ist trivial. Sei deswegen $l \geq 1$ und die Aussage für l bewiesen. Wir müssen sie für $l + 1$ zeigen. Wie üblich nehmen wir an

$$\sum_{i=1}^{l+1} \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}.$$

Diese Gleichung multiplizieren wir mit C und erhalten

$$\sum_{i=1}^{l+1} \alpha_i \lambda_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}.$$

Hiervon subtrahieren wir die triviale Gleichung

$$\sum_{i=1}^{l+1} \alpha_i \lambda_{l+1} \mathbf{v}_i = \lambda_{l+1} \sum_{i=1}^l \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

und finden

$$\sum_{i=1}^l \alpha_i (\lambda_i - \lambda_{l+1}) \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{l+1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_{l+1}) \mathbf{v}_i = \mathbf{0}.$$

Nach Induktionsannahme sind hier alle Koeffizienten

$$\alpha_i (\lambda_i - \lambda_{l+1}) = 0, \quad i = 1, \dots, l.$$

Wegen $\lambda_i \neq \lambda_{l+1}$ für $i \leq l$ sind auch die

$$\alpha_i = 0, \quad i = 1, \dots, l.$$

Die ursprüngliche Gleichung lautet dann nur noch $\alpha_{l+1} \mathbf{v}_{l+1} = \mathbf{0}$, und wegen $\mathbf{v}_{l+1} \neq \mathbf{0}$ folgt hieraus auch $\alpha_{l+1} = 0$. $\square$

Satz 4.10 (Diagonalisierbarkeitskriterien) a) (notwendig) Wenn eine Matrix C diagonalisierbar ist, dann zerfällt ihr charakteristisches Polynom χ_C in ein Produkt von Linearfaktoren:

$$\chi_C(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \cdot \dots \cdot (\lambda_n - \lambda), \quad \lambda_k \in K.$$

b) (hinreichend) Wenn χ_C in Linearfaktoren zerfällt und alle seine Wurzeln $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ paarweise verschieden sind, dann ist C diagonalisierbar.

Beweis. a) ist klar, man braucht nur die Determinante einer Diagonalmatrix $C' - \lambda \mathbb{1}_n$ hinzuschreiben, wo C' eine zu C ähnliche Diagonalmatrix ist.

b) Zu den n paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ finden wir als Lösungen der linearen Gleichungssysteme $(C - \lambda_k \mathbb{1}_n) \mathbf{v} = \mathbf{0}$ Eigenvektoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$. Wir müssen zeigen, dass die $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ linear unabhängig sind. Das ist aber ein Spezialfall von Satz 4.9. $\square$

Über $K = \mathbb{C}$ ist Bedingung a) aus Satz 4.10 immer erfüllt. Das folgt durch Iteration aus

Satz 4.11 (Vieta) Es sei $p(\lambda) \in K[\lambda]$ ein Polynom mit der Nullstelle $\lambda_1 \in K$. Dann spaltet p den Linearfaktor $\lambda_1 - \lambda$ ab.

Beweis. Wir benutzen die aus der Schule bekannte Polynom-Division mit Rest. Damit dividieren wir $p(\lambda)$ durch $\lambda - \lambda_1$ und erhalten

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdot q(\lambda) + r.$$

Dabei ist q ein Polynom vom Grad $\deg(p) - 1$ und r ein Polynom von einem Grad $< \deg(\lambda - \lambda_1) = 1$. Somit hat r hier den Grad 0 und ist eine Konstante. Wir lösen nach r auf

$$r = p(\lambda) - (\lambda - \lambda_1) \cdot q(\lambda)$$

und setzen hier $\lambda = \lambda_1$ ein. Wegen $p(\lambda_1) = 0$ folgt

$$r = p(\lambda_1) - (\lambda_1 - \lambda_1) \cdot q(\lambda_1) = 0.$$

Also ist $p(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \cdot (-q(\lambda))$, und das ist die Behauptung. $\square$

Satz 4.12 (Korollar) a) Jedes komplexe Polynom $p(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$ ist ein Produkt

$$p(\lambda) = c \cdot (\lambda_1 - \lambda) \cdot \dots \cdot (\lambda_n - \lambda)$$

von Linearfaktoren und einer Konstanten $c \in \mathbb{C}$. Dabei sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ die Nullstellen von p .

b) Jedes reelle Polynom $p(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]$ ist ein Produkt

$$p(\lambda) = c \cdot (\lambda_1 - \lambda) \cdot \dots \cdot (\lambda_{n-2k} - \lambda) \cdot q_1(\lambda) \cdot \dots \cdot q_k(\lambda)$$

von reellen Linearfaktoren, einer Konstante $c \in \mathbb{R}$ und quadratischen Faktoren

$$q_j = \lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + b^2 = (\lambda - a)^2 + b^2, \quad a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0,$$

ohne reelle Nullstelle.

Beweis von b). Wir zerlegen $p(\lambda)$ nach a) in komplexe Linearfaktoren. Ist etwa $\lambda_1 = a + bi \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$, nicht reell, so ist auch $\bar{\lambda} = a - bi$ eine Nullstelle von $p(\lambda)$. In der Zerlegung kommt also das reelle Produkt

$$q_1(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \cdot (\bar{\lambda}_1 - \lambda) = \lambda_1 \bar{\lambda}_1 - (\lambda_1 + \bar{\lambda}_1)\lambda + \lambda^2 = \lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + b^2$$

als Faktor vor. Jedes Paar komplexe-konjugierter Nullstellen führt auf diese Weise zu einem quadratischen Faktor. $\square$

Natürlich ist jedes reelle Polynom auch ein komplexes Polynom. Satz 4.12a) gilt also auch für reelle Polynome. Allerdings können deren Nullstellen komplex sein.

Beispiel 4.4 (Drehmatrix) Wir betrachten die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix},$$

welche eine Drehung um den Winkel φ in der Ebene $\mathbb{R}^2$ beschreibt. Ihr charakteristisches Polynom

$$\chi_C(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \cos(\varphi) - \lambda & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) - \lambda \end{pmatrix} = (\cos(\varphi) - \lambda)^2 + \sin(\varphi)^2$$

hat die Nullstelle $\lambda \in \mathbb{R}$, für welche $\lambda = \cos(\varphi)$ während $\sin(\varphi) = 0$. Es gibt nur die Fälle

Winkel φ	Eigenwert λ	Drehung
0	1	Identität
π	-1	Punktspiegelung

Dies ist auch anschaulich völlig klar: Bei einer echten Drehung (nicht um den Winkel 0 oder π) ändert jeder Vektor seine Richtung.

Ganz anders ist die Situation, wenn man C als Matrix komplexer Zahlen auffasst, und Eigenwerte in $\mathbb{C}$ sucht. Diese sind Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\lambda^2 - 2 \cos(\varphi) \lambda + 1 = 0,$$

also

$$\lambda_{1,2} = \cos(\varphi) \pm i \cdot \sin(\varphi).$$

Definition 4.9 Die Nullstellen des Polynoms p in Satz 4.12a) brauchen nicht alle verschieden zu sein. Aber gleiche Linearfaktoren kann man zu Potenzen zusammenfassen, um

$$p(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{r_1} \cdot \dots \cdot (\lambda_k - \lambda)^{r_k}, \quad r_1 + \dots + r_k = \deg(p) = n,$$

zu erreichen, wo die Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ paarweise voneinander verschieden sind. Hier heißt die Potenz r_i die algebraische Vielfachheit der Nullstelle λ_i .

Beispiel 4.5 (Jordan-Block) Wir werden uns im übernächsten Abschnitt 4.4 ausführlich mit $n \times n$ -Matrizen der Form

$$C = \begin{pmatrix} c & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & c \end{pmatrix}, \quad c \in K$$

beschäftigen. Eine solche Matrix heißt Jordan-Block zum Eigenwert c . Ihr charakteristisches Polynom

$$\chi_C(\lambda) = (c - \lambda)^n$$

hat nur die einzige Nullstelle c , diese mit der algebraischen Vielfachheit n . Wenn wir alle Eigenvektoren des Jordan-Blocks bestimmen wollen, müssen wir das lineare Gleichungssystem

$$C \cdot \mathbf{x} = c \cdot \mathbf{x}, \quad \text{d.h.} \quad (C - c \cdot \mathbb{1}_n) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

lösen. Nun ist

$$(C - c \mathbb{1}_n) \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^{n-1} \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ x^3 \\ \vdots \\ x^n \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dies ist der Nullvektor, falls $x^2 = \dots = x^n = 0$, d.h. alle Eigenvektoren liegen auf der Geraden, welche vom ersten Koordinatenvektor $\mathbf{e}_1$ aufgespannt wird. Die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts c ist also $= 1$.

Dies ist (bei $n \geq 2$) ein typisches Beispiel für folgende Tatsache.

Satz 4.13 Für jeden Eigenwert $\mu \in K$ einer Matrix $C \in M(n \times n, K)$ ist

$$1 \leq \text{geometrische Vielfachheit} \leq \text{algebraische Vielfachheit} \leq n.$$

Beweis. Hier haben wir nur zu zeigen, dass die algebraische Vielfachheit $\geq l$ ist, wenn die geometrische Vielfachheit $= l$ ist. Sei also $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l \in K^n$ eine Basis des Eigenraums zum Eigenwert μ . Wir ergänzen sie mit Vektoren $\mathbf{v}_{l+1}, \dots, \mathbf{v}_n$ zu einer Basis des ganzen K^n . Nach Übergang zu dieser Basis stellt sich C als ähnlich zu einer Matrix

$$C' = \left(\begin{array}{c|c} \mu \mathbb{1}_l & A \\ \hline 0 & B \end{array} \right), \quad A \in M(l \times (n-l), K), B \in M((n-l) \times (n-l), K)$$

heraus. Mit der Kästchenregel sehen wir

$$\chi_C(\lambda) = \chi_{C'}(\lambda) = \det \left(\begin{array}{c|c} (\mu - \lambda) \mathbb{1}_l & A \\ \hline 0 & B - \lambda \mathbb{1}_{n-l} \end{array} \right) = (\mu - \lambda)^l \cdot \chi_B(\lambda).$$

Somit hat die algebraische Vielfachheit von μ einen Wert $\geq l$. □

Wir formulieren jetzt ein Diagonalisierbarkeitskriterium, welches sowohl hinreichend als auch notwendig ist. Theoretisch ist dies eine sehr befriedigende Beschreibung der Diagonalisierbarkeit, praktisch für das Problem, eine konkret gegebene Matrix zu diagonalisieren jedoch oft unbrauchbar.

Satz 4.14 (Notwendiges und hinreichendes Diagonalisierbarkeitskriterium) Eine Matrix $C \in M(n \times n, K)$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn

(1) das charakteristische Polynom χ_C in Linearfaktoren zerfällt, etwa

$$\chi_C(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{r_1} \cdot \dots \cdot (\lambda_k - \lambda)^{r_k}, \quad r_1 + \dots + r_k = n,$$

wo die Wurzeln $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ alle paarweise verschieden sein sollen, aber mit ihren algebraischen Vielfachheiten $r_1, \dots, r_k$ zu Potenzen zusammengefasst, und

(2) für die verschiedenen Wurzeln $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ gilt

$$\text{Rang}(C - \lambda_j \mathbb{1}_n) = n - r_j \quad (j = 1, \dots, k).$$

Beweis „ $\Rightarrow$ “ Sei C diagonalisierbar, also etwa ähnlich zur Matrix

$$C' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_1 & & \\ & & & \lambda_2 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix},$$

und seien $r_1, \dots, r_k$ die Vielfachheiten, mit denen die verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ in C' auftreten. Dann zerfällt das charakteristische Polynom $\chi_C(\lambda) = \chi_{C'}(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{r_1} \cdot \dots \cdot (\lambda_k - \lambda)^{r_k}$ in Linearfaktoren. Für $j = 1, \dots, k$ ist

$$C - \lambda_j \mathbb{1}_n = A^{-1} \cdot C' \cdot A - \lambda_j \mathbb{1}_n = A^{-1} \cdot (C' - \lambda_j \mathbb{1}_n) \cdot A$$

und deswegen $\text{Rang}(C - \lambda_j \mathbb{1}_n) = \text{Rang}(C' - \lambda_j \mathbb{1}_n)$. Schließlich fallen in $C' - \lambda_j \mathbb{1}_n$ genau die r_j Diagonaleinträge weg, die gleich λ_j sind, während an den anderen Stellen der Diagonale die Zahlen $\lambda_i - \lambda_j$ für $i \neq j$ stehen. Diese sind ungleich Null. So ist etwa

$$C' - \lambda_1 \mathbb{1}_n = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \lambda_2 - \lambda_1 & \\ & & & & \lambda_2 - \lambda_1 & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Der Rang von $C' - \lambda_j \mathbb{1}_n$ ist die Zahl der Diagonaleinträge $\neq 0$, und damit $= n - r_j$.

„ $\Leftarrow$ “ Für $j = 1, \dots, k$ sei

$$V_j := \text{Kern}(C - \lambda_j \cdot \mathbb{1}_n)$$

der Eigenraum zu λ_j . Nach (2) ist $\dim(V_j) = n - (n - r_j) = r_j$. Mit Satz 4.8 folgt

$$\dim(V_1 + \dots + V_k) = r_1 + \dots + r_k = n, \quad \text{also} \quad V_1 + \dots + V_k = K^n.$$

Basen der einzelnen Eigenräume setzen sich also zu einer Basis des K^n zusammen. $\square$

Das Diagonalisierbarkeitskriterium Satz 4.14 kann man dann sehr griffig folgendermaßen formulieren: Für jeden Eigenwert ist

$$\text{algebraische Vielfachheit} = \text{geometrische Vielfachheit}.$$

Was sagt Satz 4.14 über einen Jordanblock? Der einzige Eigenwert c hat Vielfachheit n , während der zugehörige Eigenraum Dimension $=1$ hat. Ein Jordanblock ist (für $n \geq 2$) nicht diagonalisierbar. Er ist geradezu im höchstmöglichen Maß un-diagonalisierbar.

Wenn wir eine Matrix diagonalisieren wollen, kommt es nach Satz 4.10a), zunächst darauf an, die Nullstellen des charakteristischen Polynoms dieser Matrix zu suchen. Der Erfolg dieser Suche hängt nun in viel geringerem Maß von unseren rechnerischen Fähigkeiten ab, als von *Eigenschaften des Grundkörpers* K , denen wir bisher kaum Beachtung schenkten: Es gibt reelle Polynome (etwa das charakteristische Polynom einer Drehmatrix), welche keine reellen Nullstellen haben. *Komplexe Nullstellen* haben reelle oder komplexe Polynome aber immer wegen des Fundamentalsatzes der Algebra (Satz 3.2).

Satz 4.15 a) Eine $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung eines endlich-dimensionalen komplexen Vektorraums in sich hat immer mindestens einen komplexen Eigenwert, also auch immer mindestens einen Eigenvektor.
b) Eine $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung eines reellen Vektorraums ungerader Dimension hat immer mindestens einen reellen Eigenwert, also auch mindestens einen reellen Eigenvektor.

Beweis. Aussage a) folgt aus dem Fundamentalsatz der Algebra. Zum Beweis von b) verwenden wir, dass für das (reelle) charakteristische Polynom einer reellen Matrix C gilt

$$\chi_C(\bar{\lambda}) = \overline{\chi_C(\lambda)} = 0,$$

falls λ ein Eigenwert von C ist. Mit $\lambda \in \mathbb{C}$ ist also auch $\bar{\lambda} \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von χ_C . Wenn alle Nullstellen komplex, nicht reell wären, wäre ihre Anzahl gerade. Wenn der Vektorraum ungerade Dimension hat, geht das nicht. $\square$

Aufgabe 4.23 Entscheiden Sie, ob die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar sind.

Aufgabe 4.24 In einem vierdimensionalen Vektorraum V sei $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4\}$ eine Basis. Eine lineare Abbildung $f : V \rightarrow V$ habe die Eigenschaft

$$\begin{aligned} f(\mathbf{b}_1) &= \mathbf{0}, & f(\mathbf{b}_2) &= \mathbf{b}_1 + 4\mathbf{b}_4, \\ f(\mathbf{b}_3) &= \mathbf{b}_2 - 8\mathbf{b}_4, & f(\mathbf{b}_4) &= \mathbf{b}_3 + 5\mathbf{b}_4. \end{aligned}$$

Ist f diagonalisierbar?

Aufgabe 4.25 Man betrachte die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ist A diagonalisierbar? Falls ja, geben Sie eine Matrix S an, so dass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.

Aufgabe 4.26 Bestimmen Sie eine Basis für den Kern sowie die Eigenwerte der linearen Abbildung

$$f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad \text{mit} \quad X \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ist f diagonalisierbar?

Aufgabe 4.27 Gegeben sei die reelle Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

- Berechnen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von A .
- Untersuchen Sie, ob A zu einer reellen Diagonalmatrix ähnlich ist.

Aufgabe 4.28 Seien r, s reelle Zahlen mit $0 \leq r, s \leq 1$, und sei

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ r & 0 & 1-r & 0 \\ 0 & 1-s & 0 & s \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Ermitteln Sie alle Eigenwerte von P .
- Geben Sie alle Parameterpaare (r, s) an, für die P diagonalisierbar ist.

Aufgabe 4.29 Der Endomorphismus $f \in \text{End}(\mathbb{R}^4)$ habe bezüglich der kanonischen Basis die Abbildungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Man prüfe, ob A diagonalisierbar ist, und bestimme gegebenenfalls eine Basis des $\mathbb{R}^4$, bezüglich der f als Abbildungsmatrix eine Diagonalmatrix besitzt.

Aufgabe 4.30 a) Zeigen Sie, dass für eine 2×2 -Matrix A über einem beliebigen Körper gilt: A ist genau dann diagonalisierbar, wenn A entweder verschiedene Eigenwerte besitzt, oder wenn A ein Vielfaches der Einheitsmatrix ist.

b) Die reelle 2×2 -Matrix A habe den Vektor $(3, 4)^t$ als Eigenvektor zum Eigenwert 2 und den Vektor $(4, -3)^t$ zum Eigenwert -1 . Bestimmen Sie die Matrix A .

Aufgabe 4.31 Sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 5 \\ -5 & -1 & 5 \\ -5 & -5 & 9 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie das charakteristische Polynom an. Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren von A , und geben Sie die Eigenräume an.

b) Zeigen Sie, dass es eine Matrix $B \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ mit $B^2 = A$ gibt.

Aufgabe 4.32 Sei A eine reelle 3×3 -Matrix mit charakteristischem Polynom $\det(\lambda \mathbb{1} - A) = \lambda^3 - \lambda$.

(i) Man begründe, dass A über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar ist.

(ii) Man gebe den Rang der Matrizen A , A^2 , $A^2 + \mathbb{1}$, $A^2 - \mathbb{1}$ an.

(iii) Man bestimme alle $r, s, t \in \mathbb{R}$ mit $r\mathbb{1} + sA + tA^2 = 0$.

(iv) Man zeige, dass $A^{1994} = A^2$ ist.

(v) Man gebe eine solche reelle Matrix A an.

Aufgabe 4.33 Ist die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 1 \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar? Wenn ja, berechne man eine Basis aus Eigenvektoren.

Aufgabe 4.34 Bestimmen Sie alle Eigenvektoren und Eigenwerte der reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -3 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

und entscheiden Sie, ob A und B diagonalisierbar sind. Hinweis: beide Matrizen haben ganzzahlige Eigenwerte.

4.2.3 Dynamische Systeme

Was ein System im Sinn der Überschrift dieses Abschnitts ist, möchte ich lieber nicht erklären. Ein dynamisches System ist ein System, dessen zeitliche Veränderung nach einem festen Zeitpunkt t nur vom Zustand zu diesem Zeitpunkt abhängt. Ohne Beweis (wird in der Vorlesung 'Gewöhnliche Differentialgleichungen' erbracht) ein Beispiel:

Beispiel 4.6 *Ein homogenes autonomes System ist ein System*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,n}x_n\end{aligned}$$

von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Bei den gekoppelten Federn am Anfang dieses Kapitels waren die Differentialgleichungen von zweiter Ordnung. Aber einen wesentlichen Unterschied macht das nicht. Die Eigenwerttheorie hängt sehr eng zusammen mit der Theorie dynamischer Systeme.

Das einfachste (1×1)-autonome System sieht so aus:

$$\dot{x} = a \cdot x.$$

Jede Funktion $x = c \cdot e^{at}$, $c \in \mathbb{R}$, ist eine Lösung. Und mit etwas Analysis (Mittelwertsatz der Differentialrechnung) sieht man auch, dass alle Lösungen diese Form haben. Dies wollen wir jetzt auf Systeme mit $n > 1$ verallgemeinern.

Zunächst schreiben wir das System komprimiert

$$\dot{\mathbf{x}} = A \cdot \mathbf{x}$$

mit der $n \times n$ -Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$. Eine Lösung dieses Systems ist eine vektorwertige Funktion $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^t$. Motiviert durch den 1×1 -Fall machen wir den Ansatz

$$\mathbf{x}(t) = e^{c \cdot t} \cdot \mathbf{v}, \quad c \in \mathbb{R}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{e-hoch Ansatz}).$$

Dafür sehen wir

$$\dot{\mathbf{x}} = c \cdot e^{c \cdot t} \cdot \mathbf{v}, \quad A \cdot \mathbf{x} = A \cdot e^{c \cdot t} \cdot \mathbf{v}.$$

Das System stellt also folgende Bedingung

$$c \cdot e^{c \cdot t} \cdot \mathbf{v} = A \cdot e^{c \cdot t} \cdot \mathbf{v}, \quad A \cdot \mathbf{v} = c \cdot \mathbf{v}.$$

Wir sehen: Der Ansatz $\mathbf{x}(t) = e^{c \cdot t} \cdot \mathbf{v}$ liefert genau dann eine Lösung des Systems von Differentialgleichungen, wenn $\mathbf{v}$ ein Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert c ist.

Wenn A reell diagonalisierbar ist, etwa $D = T^{-1} \cdot A \cdot T$ eine Diagonalmatrix, so lautet unser System

$$\dot{\mathbf{x}} = T \cdot D \cdot T^{-1} \cdot \mathbf{x}$$

und für $\mathbf{y} = T^{-1} \cdot \mathbf{x}$

$$\dot{\mathbf{y}} = D \cdot \mathbf{y}.$$

Im y -System sind alle Koordinatenvektoren $\mathbf{e}_i$ Eigenvektoren, und mit den zugehörigen Eigenwerten λ_i erhalten wir die Lösungen

$$\mathbf{y}_1(t) = e^{\lambda_1 \cdot t} \cdot \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{y}_n(t) = e^{\lambda_n \cdot t} \mathbf{e}_n.$$

Die Eigenwerte λ_i haben entscheidenden Einfluss auf die zeitliche Entwicklung des Systems:

λ_i	für $t \rightarrow \infty$
> 0	$\ \mathbf{y}(t)\ \rightarrow \infty$
$= 0$	$\ \mathbf{y}(t)\ = \text{const}$
< 0	$\ \mathbf{y}(t)\ \rightarrow 0$

Diskrete dynamische Systeme erhält man, wenn man in den autonomen Systemen die kontinuierliche Zeit t und die von ihr bewirkte Änderung d/dt ersetzt durch eine diskrete Zeit

$$t_k = k \cdot \Delta t, \quad k \in \mathbb{N},$$

und die davon bewirkte diskrete Änderung

$$\frac{\Delta \mathbf{x}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k}{t_{k+1} - t_k} = \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k).$$

Im linearen Fall erhält man eine Differenzengleichung

$$\frac{\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k}{\Delta t} = C \cdot \mathbf{x}^k, \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \Delta t \cdot C \cdot \mathbf{x}^k.$$

Setzt man hier

$$A := \mathbb{1}_n + \Delta t \cdot C,$$

so bringt man die Differenzengleichung auf die Form einer Fixpunktgleichung

$$\mathbf{x}^{k+1} = A \cdot \mathbf{x}^k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{x}^0 \text{ gegeben.}$$

Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ diagonalisierbar mit den paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ und den zugehörigen Eigenräumen $V_1, \dots, V_l \in \mathbb{K}^n$. Jeder Vektor $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{K}^n$ hat die eindeutige Darstellung

$$\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_l, \quad \mathbf{x}_i \in V_i.$$

Dann ist

$$\mathbf{x}^1 = A \cdot \mathbf{x}^0 = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_l \mathbf{x}_l.$$

Durch Iteration wird

$$\mathbf{x}^k = (\lambda_1)^k \mathbf{x}_1 + \dots + (\lambda_l)^k \mathbf{x}_l.$$

Hier hängt das Verhalten der einzelnen Summanden für $k \rightarrow \infty$ folgendermaßen von den $|\lambda_i|$ ab:

$ \lambda_i $	$\ (\lambda_i)^k \mathbf{x}_i\ $
< 1	$\rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$
$= 1$	$= \ \mathbf{x}_i\ = \text{const}$
> 1	$\rightarrow \infty$ für $k \rightarrow \infty$

Beispiel 4.7 (Fibonacci-Zahlen) Die Folge der Fibonacci-Zahlen F_k ist rekursiv definiert durch

$$F_0 := 0, F_1 := 1, F_{k+2} := F_{k+1} + F_k \text{ für } k \geq 0.$$

Für die Vektorfolge

$$\mathbf{x}^k := \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

bedeutet die Rekursionsformel

$$\mathbf{x}^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}^k.$$

Dies ist ein diskretes dynamisches System mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sie hat das charakteristische Polynom

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}_2) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1$$

und die Eigenwerte

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

mit den zugehörigen Eigenvektoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Startvektor $\mathbf{x}^0 = (1, 0)^t$ hat in dieser Basis die Darstellung

$$\mathbf{x}^0 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = \frac{1}{\sqrt{5}} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) =: \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2.$$

Die Rekursionsformel lautet

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^k &= (\lambda_1)^k \mathbf{x}_1 + (\lambda_2)^k \mathbf{x}_2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left((\lambda_1)^k \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} - (\lambda_2)^k \cdot \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\begin{pmatrix} (\lambda_1)^{k+1} \\ (\lambda_1)^k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (\lambda_2)^{k+1} \\ (\lambda_2)^k \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Für F_k , als erste Komponente von $\mathbf{x}^{k-1}$ erhält man damit

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k \right).$$

Wegen $|\lambda_2| < 1$ geht hier die rechte Potenz gegen 0 für $k \rightarrow \infty$. Für große k ist also näherungsweise

$$\frac{F_{k+1}}{F_k} \simeq \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \simeq 1.681,$$

das Verhältnis des goldenen Schnitts.

4.3 Cayley-Hamilton

4.3.1 Trigonalisierung

Eine Trigonal-Matrix ist eine (obere oder untere) Dreiecksmatrix.

Definition 4.10 Eine Matrix $C \in M(n \times n, K)$ heißt (über K) trigonalisierbar, wenn sie (über K) zu einer Trigonalmatrix D ähnlich ist.

Das charakteristische Polynom einer Trigonalmatrix $D = (d_{i,j})$ ist ein Produkt von Linearfaktoren

$$\chi_D(\lambda) = (d_{1,1} - \lambda) \cdot \dots \cdot (d_{n,n} - \lambda),$$

vgl. Satz 4.7d). Nach Satz 4.5 gilt dies dann auch für jede über K trigonalisierbare Matrix C .

Diese Tatsache ist auch umkehrbar:

Satz 4.16 (Trigonalisierung) Eine Matrix $C \in M(n \times n, K)$ ist (über K) ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix

$$D = \begin{pmatrix} c_1 & * & \cdots & * \\ 0 & c_2 & & \vdots \\ \vdots & . & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & c_n \end{pmatrix}$$

genau dann, wenn ihr charakteristisches Polynom (über K) in Linearfaktoren zerfällt.

Beweis. Dass das charakteristische Polynom einer trigonalisierbaren Matrix in Linearfaktoren zerfällt, das haben wir soeben angemerkt. Die Umkehrung dieser Aussage beweisen wir durch Induktion nach n .

Für den Induktionsanfang $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Sei also $n \geq 2$. Nach Voraussetzung existiert ein Eigenwert $c_1 \in K$ mit einem zugehörigen Eigenvektor $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$. Wir ergänzen $\mathbf{v}_1$ zu einer Basis $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ des Vektorraums K^n . Bei Übergang in diese Basis stellt sich die Matrix C als ähnlich zu einer Matrix

$$D_1 = \begin{pmatrix} c_1 & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & C_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

mit einer Matrix $C_1 \in M((n-1) \times (n-1), K)$ heraus. Auch deren charakteristisches Polynom

$$\chi_{C_1}(\lambda) = \chi_D(\lambda)/(c_1 - \lambda)$$

zerfällt in Linearfaktoren. Nach Induktionsannahme existiert dann eine Matrix $A \in GL(n-1, K)$ so, dass $A^{-1} \cdot C_1 \cdot A$ eine obere Dreiecksmatrix ist. Dann hat auch die zu D_1 ähnliche Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & A^{-1} & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & C_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & A^{-1} \cdot C_1 \cdot A & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

obere Dreiecksgestalt. □

Bemerkung zum Beweis von Satz 4.16: Die induktiv gesuchten Eigenvektoren können zunächst alle zum gleichen Eigenwert λ_1 , dann zum nächsten Eigenwert λ_2 der Matrix C , und so weiter, gewählt werden. Dann erhält man als Diagonaleinträge in der zu C ähnlichen Matrix:

$$\left. \begin{array}{ccccccc} c_1 & = & \dots & = & c_{r_1} & = & \lambda_1 \\ c_{r_1+1} & = & \dots & = & c_{r_1+r_2} & = & \lambda_2 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ c_{n-r_k+1} & = & \dots & = & c_n & = & \lambda_k \end{array} \right\} \text{ paarweise voneinander verschieden.}$$

Aufgabe 4.35 Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

über $\mathbb{R}$ nicht diagonalisierbar, aber trigonalisierbar (d.h. ähnlich zu einer Dreiecksmatrix) ist. geben Sie ein $S \in GL(3, \mathbb{R})$ an, so dass SAS^{-1} eine Dreiecksmatrix ist.

Aufgabe 4.36 Zeigen sie: Jede obere Dreiecksmatrix ist ähnlich zu einer unteren Dreiecksmatrix.

4.3.2 Der Satz von Cayley-Hamilton

Cayley und Hamilton lebten beide in der Mitte des 19. Jahrhunderts. Der Ire Hamilton erfand die Hamiltonschen Quaternionen, gründete zu deren Pflege einen Geheimbund, der nach mancherlei Irrwegen den Weg zur Matrizenrechnung fand. Der Engländer Cayley war einer der produktivsten Mathematiker aller Zeiten. Als er von Matrizen erfuhr, bewies er schnell den Satz, um den es in diesem Abschnitt geht.

Wir werden jetzt in großem Stil Matrizen in Polynome einsetzen und damit rumrechnen. Über den Grundkörper K werden wir zunächst nichts voraussetzen. Sei also

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

ein Polynom mit Koeffizienten $a_\nu \in K$. Eine $k \times k$ Matrix C setzt man folgendermaßen in das Polynom $p(\lambda)$ ein: Man schreibt ganz formal

$$p(\lambda) = \sum_0^n a_\nu \lambda^\nu,$$

$$p(C) = \sum_0^n a_\nu C^\nu = a_n C^n + a_{n-1} C^{n-1} + \dots + a_1 C + a_0 \mathbb{1}_k.$$

Was die Matrix C^k bedeutet, das haben wir ja schon in vor Satz 4.7 definiert. Das funktioniert im Übrigen problemlos. Das einzige, was man sich merken muss, ist die Vereinbarung

$$C^0 = \mathbb{1}_k.$$

Beispiel 4.8 Sei etwa $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$. Dann ist

$$p(C) = C^2 - \mathbb{1}.$$

Und die Faktorisierung

$$p(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 1)$$

schlägt durch auf das Matrizenpolynom:

$$(C + \mathbb{1})(C - \mathbb{1}) = C^2 + C - C - \mathbb{1} = C^2 - \mathbb{1}.$$

Diese Produktformel gilt ganz allgemein:

Satz 4.17 Ist

$$p(\lambda) = q_1(\lambda) \cdot q_2(\lambda)$$

ein Polynom-Produkt, so gilt für jede $k \times k$ -Matrix C

$$p(C) = q_1(C) \cdot q_2(C).$$

Zum Beweis setzt man C in das Produkt $q_1(\lambda) \cdot q_2(\lambda)$ ein und multipliziert aus. Dann sammelt man nach Potenzen von C . Am Schluss kommen dieselben Koeffizienten heraus, wie wenn man die Polynome $q_1(\lambda)$ und $q_2(\lambda)$ ausmultipliziert und nach Potenzen von λ gesammelt hätte. Ob wir die Potenzen einer Unbekannten λ aufsammeln, oder die Potenzen einer quadratischen Matrix C , das läuft auf dieselben Koeffizienten hinaus. $\square$

Ein ganz wesentlicher Punkt ist dabei, dass man im obigen Produkt die Faktoren vertauschen darf:

$$q_1(C) \cdot q_2(C) = p(C) = q_2(C) \cdot q_1(C).$$

Obwohl Matrizen i.a. nicht kommutieren, kommutieren Matrizen, die Polynome der gleichen Matrix C sind, immer. Das ist eine sehr hilfreiche Tatsache. Ein zweiter hilfreicher Punkt ist, dass sich Polynome und konjugierte Matrizen sehr gut vertragen:

Satz 4.18 Die Matrix $C' = A^{-1} \cdot C \cdot A$ sei konjugiert zur Matrix C . Dann gilt für jedes Polynom $p(\lambda)$

$$p(C') = A^{-1} \cdot p(C) \cdot A.$$

Beweis. Wegen

$$\begin{aligned} (C')^\nu &= (A^{-1} \cdot C \cdot A) \cdot (A^{-1} \cdot C \cdot A) \cdot \dots \cdot (A^{-1} \cdot C \cdot A) \\ &= A^{-1} \cdot C \cdot C \cdot \dots \cdot C \cdot A \\ &= A^{-1} \cdot C^\nu \cdot A \end{aligned}$$

kann man einfach ausmultiplizieren

$$p(C') = \sum_0^n a_\nu (C')^\nu = \sum_0^n a_\nu \cdot A^{-1} \cdot C^\nu \cdot A = A^{-1} \cdot \sum_0^n a_\nu C^\nu \cdot A = A^{-1} \cdot p(C) \cdot A. \quad \square$$

Das ist ja alles sehr schön, aber in welches Polynom soll man denn eine Matrix C einsetzen? Zum Beispiel in ihr eigenes charakteristisches Polynom $\chi_C(\lambda)$.

Beispiel 4.9 (Drehmatrix) Aus persönlicher Faulheit kürze ich jetzt ab

$$\cos(\varphi) = c, \quad \sin(\varphi) = s,$$

und betrachte eine Drehmatrix

$$C = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}.$$

Ihr charakteristisches Polynom ist

$$\chi_C(\lambda) = (c - \lambda)^2 + s^2.$$

Und wenn wir hier die Matrix C einsetzen, finden wir

$$\begin{aligned} \chi_C(C) &= (c \cdot \mathbb{1}_2 - C)^2 + s^2 \cdot \mathbb{1}_2 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & s \\ -s & 0 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -s^2 & 0 \\ 0 & -s^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s^2 \end{pmatrix} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Es ist die Null-Matrix herausgekommen.

Beispiel 4.10 (Nilpotente Matrix) Es sei

$$N = \begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

eine obere $n \times n$ -Dreiecksmatrix, die auch auf der Diagonale nur Nulleinträge aufweist. Sie hat den einzigen Eigenwert $\lambda = 0$ mit der Vielfachheit n . Ihr charakteristisches Polynom ist also

$$\chi_N(\lambda) = (-\lambda)^n.$$

Wir setzen die Matrix N ein:

$$\chi_N(N) = (-1)^n \cdot N^n.$$

Und was kommt dabei heraus? Multiplizieren wir aus!

Sei etwa $N = (a_k^l)$. Dann ist also $a_k^l = 0$ für $k \leq l$. Und $N^2 = (\sum_m a_m^l a_k^m)$ hat für $k \leq l+1$ die Einträge

$$\sum_m a_m^l a_k^m = \sum_{m=1}^l 0 \cdot a_k^m + \sum_{m=l+1}^n a_m^l \cdot 0 = 0.$$

In der Matrix N^2 sind die Nulleinträge bereits in die erste Parallele oberhalb der Diagonale eingedrungen. Entsprechend vergrößert sich bei jeder Multiplikation mit N die Anzahl dieser Parallelen aus Nulleinträgen um 1. Die Matrix N^n enthält dann nur noch Nulleinträge:

$$\chi_N(N) = 0.$$

Hinter diesen Beispielen steckt System:

Satz 4.19 (Cayley-Hamilton) Für jede komplexe $n \times n$ -Matrix C gilt

$$\chi_C(C) = 0.$$

Beweis. Wir müssen $K = \mathbb{C}$ voraussetzen, weil wir beim Beweis benützen, dass C trigonalisierbar ist. Nach Satz 4.16 ist also C ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix C' . Mit Satz 4.5 ist

$$\chi_{C'}(\lambda) = \chi_C(\lambda),$$

und wegen Satz 4.18 gilt mit der Transformationsmatrix A

$$\chi_{C'}(C') = \chi_C(C') = A^{-1} \cdot \chi_C(C) \cdot A.$$

Es würde also genügen, die Aussage für die obere Dreiecksmatrix C' zu beweisen. Mit anderen Worten: Wir können o.B.d.A. annehmen, C selbst ist eine obere Dreiecksmatrix.

Auf der Diagonale von C stehen dann die Eigenwerte, etwa in der Reihenfolge

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n.$$

Wir beweisen jetzt durch Induktion nach $k = 1, \dots, n$ die folgende Aussage:

$$(\lambda_1 \cdot \mathbb{1}_n - C) \cdot (\lambda_2 \cdot \mathbb{1}_n - C) \cdot \dots \cdot (\lambda_k \cdot \mathbb{1}_n - C) \cdot \mathbf{e}_i = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, k.$$

Etwas anders ausgedrückt: Die ersten k Spalten der Matrix

$$(\lambda_1 \cdot \mathbb{1}_n - C) \cdot \dots \cdot (\lambda_k \cdot \mathbb{1}_n - C)$$

sind Null-Spalten. Für $k = n$ ist dies die Behauptung unseres Satzes.

Induktionsanfang ($k = 1$): Die Matrix $\lambda_1 \cdot \mathbb{1}_n$ hat, ebenso wie die Matrix C in ihrer linken oberen Ecke den Eintrag λ_1 . Alle anderen Einträge dieser beiden Matrizen in der ersten Spalte sind $= 0$, wie sich das für obere Dreiecksmatrizen gehört. Also sind alle Einträge $= 0$ in der ersten Spalte der Matrix $\lambda_1 \cdot \mathbb{1}_n - C$.

Induktionsannahme: Die Behauptung gelte für alle $i < k$.

Induktionsschluss: Für jedes $i < k$ ist (Vertauschbarkeit von Polynomen derselben Matrix)

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 \cdot \mathbb{1}_n - C) \cdot \dots \cdot (\lambda_k \cdot \mathbb{1}_n - C) \cdot \mathbf{e}_i \\ = & (\lambda_{i+1} \cdot \mathbb{1}_n - C) \cdot \dots \cdot (\lambda_k \cdot \mathbb{1}_n - C) \cdot [(\lambda_1 \cdot \mathbb{1}_n - C) \cdot \dots \cdot (\lambda_i \cdot \mathbb{1}_n - C) \cdot \mathbf{e}_i] \\ = & (\lambda_{i+1} \cdot \mathbb{1}_n - C) \cdot \dots \cdot (\lambda_k \cdot \mathbb{1}_n - C) \cdot \mathbf{0} \\ = & \mathbf{0} \end{aligned}$$

nach Induktionsannahme. Und für $i = k$ ist der (k, k) -Diagonal-Eintrag der Matrix $\lambda_k \cdot \mathbb{1}_n - C$ gerade $\lambda_k - \lambda_k = 0$. Deswegen stehen in der k -ten Spalte dann höchstens Einträge $c_1, \dots, c_{k-1}$ auf den ersten $k - 1$ Positionen. Das heißt

$$(\lambda_k \cdot \mathbb{1}_n - C) \cdot \mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^{k-1} c_i \mathbf{e}_i$$

ist eine Linearkombination der Vektoren $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{k-1}$. Und daraus folgt auch für $i = k$

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 \cdot \mathbb{1}_n - C) \cdot \dots \cdot (\lambda_k \cdot \mathbb{1}_n - C) \cdot \mathbf{e}_k \\ & (\lambda_1 \cdot \mathbb{1}_n - C) \cdot \dots \cdot (\lambda_{k-1} \cdot \mathbb{1}_n - C) \cdot (c_1 \mathbf{e}_1 + \dots + c_{k-1} \mathbf{e}_{k-1}) \\ = & 0. \end{aligned}$$

□

Dieser Satz von Cayley-Hamilton gilt natürlich nicht nur für komplexe Matrizen C , sondern auch für reelle. Man kann ja jede reelle Matrix auch als eine komplexe Matrix auffassen. Mit anderen Methoden kann man zeigen, dass der Satz allgemein über jedem Körper gilt, z.B. mit Rückgriff auf die Matrix der Adjunkten, oder durch Übergang zum sogenannten algebraischen Abschluss des Körpers K .

Man kann Cayley-Hamilton von Matrizen auf Homomorphismen übertragen: Es sei V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum und $\Phi : V \rightarrow V$ linear. Mit Φ^k bezeichnet man die lineare Abbildung $\Phi \circ \Phi \circ \dots \circ \Phi$ (k -mal) und wenn $p(\lambda) = \sum c_i \lambda^i$ ein Polynom in $K[\lambda]$ ist, so setzt man $p(\Phi) = \sum c_i \Phi^i$. Nach Wahl einer Basis bekommen wir eine darstellende Matrix C für Φ . Weil Φ^k die darstellende Matrix C^k hat, deswegen hat die lineare Abbildung $p(\Phi)$ die darstellende Matrix $p(C)$. Nach Definition 4.6 ist $\chi_\Phi(\lambda) = \chi_C(\lambda)$. Somit hat $\chi_\Phi(\Phi)$ die darstellende Matrix

$$\chi_\Phi(C) = \chi_C(C) = 0$$

und ist die Nullabbildung $\chi_\Phi(\Phi) = 0$.

Also, Cayley-Hamilton sagt aus: Wenn man eine Matrix in ihr eigenes charakteristisches Polynom einsetzt, kommt die Null-Matrix raus. Aber das charakteristische Polynom ist nicht das einzige Polynom mit dieser Eigenschaft. Dazu ein simples Beispiel.

Beispiel 4.11 *Das charakteristische Polynom der Einheitsmatrix $\mathbb{1}_n$ ist $\chi_{\mathbb{1}}(\lambda) = (1 - \lambda)^n$. Aber nicht nur für dieses Polynom, sondern sogar schon für*

$$p(\lambda) = 1 - \lambda$$

gilt

$$p(\mathbb{1}_n) = 1 \cdot \mathbb{1}_n - \mathbb{1}_n = 0.$$

Satz 4.20 (Minimalpolynom) *Ist $\mu(\lambda) \neq 0$ ein Polynom vom kleinstmöglichen Grad mit $\mu(C) = 0$, so teilt μ jedes andere Polynom $p(\lambda)$ mit der Eigenschaft $p(C) = 0$.*

Beweis. Sei $p = p(\lambda)$ irgend ein Polynom mit $p(C) = 0$. Wenn μ das Polynom p teilt, also wenn

$$p(\lambda) = \mu(\lambda) \cdot q(\lambda)$$

mit einem Polynom $q(\lambda)$ gilt, dann sind wir fertig. Andernfalls teilen wir p trotzdem durch μ . Das geht natürlich nicht: Wenn wir die aus der Schule bekannte Polynomdivision verwenden, dann bleibt ein Rest r übrig:

$$p(\lambda) = \mu(\lambda) \cdot q(\lambda) + r(\lambda).$$

Das Wesentliche dabei ist: der Rest r hat einen Grad kleiner als $\text{Grad}(\mu)$.

Andererseits folgt aus $p(C) = \mu(C) = 0$, dass

$$r(C) = p(C) - \mu(C) \cdot q(C) = 0.$$

Weil aber μ das Polynom kleinsten Grades sein sollte, mit der Eigenschaft $\mu(C) = 0$, kann das nicht gut gehen. D.h., die Polynomdivision liefert keinen Rest r , sondern sie muss aufgehen. $\square$

Das Polynom μ kleinsten Grades mit der Eigenschaft $\mu(C) = 0$ ist bis auf einen Normierungsfaktor eindeutig bestimmt. Denn ist etwa μ' ein anderes solches Polynom, notwendig vom selben Grad wie μ , dann folgt aus Satz 4.20

$$\mu = q \cdot \mu',$$

wo q ein Polynom vom Grad $\text{Grad}(\mu) - \text{Grad}(\mu') = 0$ ist. Also ist q eine Konstante.

Diese letzte Aussage rechtfertigt die folgende Definition:

Definition 4.11 Sei $C \in M(k \times k, K)$ eine quadratische Matrix. Das normierte Polynom

$$\mu_C(\lambda) = \lambda^\nu + a_{\nu-1}\lambda^{\nu-1} + \dots \neq 0$$

kleinsten Grades mit $\mu_C(C) = 0$ heißt Minimalpolynom der Matrix C .

Dieses Minimalpolynom ist tatsächlich für Matrizen über einem beliebigen Körper K definiert. Dazu muss man nur sicherstellen, dass ein Polynom $0 \neq p(\lambda) \in K[\lambda]$ mit $p(C) = 0$ existiert. Aber die $n^2 + 1$ Matrizen

$$C^k \in M(n \times n, K), k = 0, \dots, n^2,$$

im K -Vektorraum $M(n \times n, K)$ der Dimension n^2 sind linear abhängig. Deswegen gibt es Koeffizienten $c_0, \dots, c_{n^2} \in K$, nicht alle $= 0$, derart, dass

$$\sum_{\nu=0}^{n^2} c_\nu C^\nu = 0.$$

Aus dem Satz von Hamilton-Cayley folgt: Das Minimalpolynom μ_C teilt das charakteristische Polynom χ_C . Jede Wurzel von $\mu_C(\lambda)$ ist also auch eine Wurzel von $\chi_C(\lambda)$, d.h. ein Eigenwert. Davon gilt aber auch die Umkehrung:

Satz 4.21 Jeder Eigenwert der komplexen Matrix C ist auch eine Wurzel ihres Minimalpolynoms $\mu_C(\lambda)$.

Beweis. Die Eigenwerte von C seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Wir gehen über in eine Basis, in der C obere Dreiecksform hat (Satz 4.16). Auf der Diagonale von C stehen dann die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ mit ihren entsprechenden Vielfachheiten. Jede Potenz C^ν ist wieder eine obere Dreiecksmatrix mit den Diagonaleinträgen $\lambda_1^\nu, \dots, \lambda_k^\nu$. Für jedes Polynom $p(\lambda) = \sum a_\nu \lambda^\nu$ ist deswegen $p(C)$ auch eine obere Dreiecksmatrix mit den Diagonaleinträgen

$$\sum a_\nu \lambda_1^\nu = p(\lambda_1), \dots, \sum a_\nu \lambda_k^\nu = p(\lambda_k).$$

Weil für das Minimalpolynom μ_C gilt $\mu_C(C) = 0$, müssen für $p(\lambda) = \mu_C(\lambda)$ die Diagonaleinträge $\mu_C(\lambda_1) = \dots = \mu_C(\lambda_k) = 0$ sein. $\square$

Die Nullstellen von χ_C und μ_C stimmen also überein. Der Unterschied zwischen beiden Polynomen liegt nur darin, dass diese Nullstellen in χ_C mit einer höheren Vielfachheit vorkommen können, als in μ_C .

Aufgabe 4.37 Verifizieren Sie den Satz von Cayley-Hamilton für die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4.38 Es sei D eine $n \times n$ -Matrix mit n verschiedenen Eigenwerten. Zeigen Sie für jede $n \times n$ -Matrix C

$$C \cdot D = D \cdot C \quad \Leftrightarrow \quad C = p(D)$$

mit einem Polynom $p(\lambda)$.

Aufgabe 4.39 Der Matrizenraum $M(2 \times 2, \mathbb{R})$ werde aufgefasst als vier-dimensionaler Vektorraum $\mathbb{R}^4$. Zeigen Sie für jede Matrix $C \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$, dass alle ihre Potenzen $\mathbb{1}_2, C, C^2, C^3, \dots$ in einer Ebene liegen.

4.3.3 Haupträume

Wir wollen noch etwas mehr mit Polynomen von Matrizen rumspielen. Dazu brauchen wir aber noch ein wenig mehr Informationen über Polynome.

Satz 4.22 (C-Hilfssatz) *Es seien $p_1(\lambda)$ und $p_2(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$ zwei komplexe Polynome ohne gemeinsame Nullstelle. Dann gibt es komplexe Polynome $f_1(\lambda)$ und $f_2(\lambda)$ mit*

$$p_1(\lambda) \cdot f_1(\lambda) + p_2(\lambda) \cdot f_2(\lambda) = 1.$$

Beweis. O.B.d.A. habe das Polynom p_2 einen Grad $\leq \text{Grad}(p_1)$. Wenn p_2 das Nullpolynom wäre, müsste $p_1 = c$ eine Konstante $c \neq 0$ sein, denn jedes Polynom von einem Grad > 0 hätte ja eine Nullstelle (Fundamentalsatz der Algebra). Dann können wir $f_1 = 1/c$, f_2 beliebig nehmen. Das war natürlich ein Trivialfall. Nehmen wir also jetzt an $p_2(\lambda) \not\equiv 0$.

Die Methode, welche wir anwenden, heißt *euklidischer Algorithmus*. Die Idee besteht darin, die Division mit Rest immer weiter zu iterieren. Also:

$$\begin{aligned} p_1(\lambda) &= p_2(\lambda) \cdot q_2(\lambda) + p_3(\lambda), \\ p_2(\lambda) &= p_3(\lambda) \cdot q_3(\lambda) + p_4(\lambda), \\ p_3(\lambda) &= p_4(\lambda) \cdot q_4(\lambda) + p_5(\lambda), \\ &\vdots \end{aligned}$$

mit

$$\text{Grad}(p_2) > \text{Grad}(p_3) > \text{Grad}(p_4) > \text{Grad}(p_5) > \dots$$

Weil der Grad der beteiligten Polynome immer kleiner wird, kann das nicht auf Dauer gut gehen. Es wird eine harte Landung geben. Die sieht etwa so aus:

$$\begin{aligned} &\vdots \\ p_{k-3}(\lambda) &= p_{k-2}(\lambda) \cdot q_{k-2}(\lambda) + p_{k-1}(\lambda) \\ p_{k-2}(\lambda) &= p_{k-1}(\lambda) \cdot q_{k-1}(\lambda) + p_k(\lambda) \\ p_{k-1}(\lambda) &= p_k(\lambda) \cdot q_k(\lambda) + c. \end{aligned}$$

Dabei ist $p_k(\lambda)$ noch ein echtes Polynom mit $\text{Grad}(p_k) > 0$, aber der letzte Rest c ist ein Polynom vom Grad 0, eine Konstante.

Wenn $c = 0$ wäre, würde jede Nullstelle von p_k auch eine von p_{k-1} sein. (Und wegen des F.S.d.A. hat p_k eine Nullstelle.) Aus der vorletzten Zeile sieht man, dass die dann auch eine Nullstelle von p_{k-2} wäre. Und hangelt man sich auf diese Weise Zeile für Zeile weiter nach oben, bis in die allererste Zeile der ganzen Gleichungen, so wird diese Nullstelle von p_k auch eine gemeinsame Nullstelle von p_1 und p_2 . Widerspruch! Das beweist $c \neq 0$.

Setzen wir jetzt $f_{k-1} := 1/c$, $f_k := -q_k/c$, so können wir die letzte Zeile umschreiben in

$$f_{k-1} \cdot p_{k-1} + f_k \cdot p_k = 1.$$

Mit der vorletzten Zeile können wir p_k raus- und p_{k-2} reinschmeißen. Mit einem abgeänderten Polynom f_{k-1} erhalten wir dann

$$f_{k-2} \cdot p_{k-2} + f_{k-1} \cdot p_{k-1} = 1.$$

Wieder kann man sich auf diese Weise ganz nach oben hangeln, und am Schluss steht die Behauptung da. $\square$

Obwohl das in der Praxis etwas mühsam ist, kann man diesen euklidischen Algorithmus doch konkret anwenden. Das einfachste Beispiel dafür, das mir eingefallen und nicht ganz trivial ist, ist folgendes:

$$p_1(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1, \quad p_2(\lambda) = \lambda^2 - 1.$$

Man sieht sofort, die Nullstellen ± 1 von p_2 sind keine Nullstellen von p_1 . Der euklidische Algorithmus läuft so:

$$\begin{aligned} \lambda^2 + \lambda + 1 &= (\lambda^2 - 1) \cdot 1 + (\lambda + 2), \\ \lambda^2 - 1 &= (\lambda + 2) \cdot (\lambda - 2) + 3. \end{aligned}$$

Mit $c = 3$ bricht der euklidische Algorithmus ab. Es folgt

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{3}(\lambda^2 - 1) - \frac{1}{3}(\lambda - 2) \cdot (\lambda + 2) \\ &= \frac{1}{3}(\lambda^2 - 1) - \frac{1}{3}(\lambda - 2) \cdot [(\lambda^2 + \lambda + 1) - (\lambda^2 - 1)] \\ &= \frac{1}{3}(2 - \lambda) \cdot (\lambda^2 + \lambda + 1) + \frac{1}{3}(\lambda - 1) \cdot (\lambda^2 - 1). \end{aligned}$$

Wenn zwei komplexe Polynome p_1 und $p_2 \in \mathbb{C}[\lambda]$ keine gemeinsame Nullstelle haben, dann haben sie auch kein nicht-konstantes Polynom als gemeinsamen Faktor, denn dieser Faktor würde ja wieder in Linearfaktoren zerfallen und zu gemeinsamen Nullstellen führen. Anders ist es bei reellen Polynomen p_1 und $p_2 \in \mathbb{R}[\lambda]$. Sie können eine gemeinsame komplexe, nicht-reelle Nullstelle $c = a + bi$ haben. Aber dann haben sie nach Satz 4.12 b) den quadratischen Faktor

$$q(\lambda) = (c - \lambda)(\bar{c} - \lambda) = (\lambda - a)^2 + b^2 \in \mathbb{R}[\lambda]$$

gemeinsam. Damit bekommen wir folgende reelle Version von Satz 4.22

Satz 4.23 (IR-Hilfssatz) *Es seien $p_1(\lambda)$ und $p_2(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]$ zwei reelle Polynome ohne gemeinsamen reellen Linearfaktor oder quadratischen Faktor. Dann gibt es reelle Polynome $f_1(\lambda)$ und $f_2(\lambda)$ mit*

$$p_1(\lambda) \cdot f_1(\lambda) + p_2(\lambda) \cdot f_2(\lambda) = 1.$$

Beweis. Nach Voraussetzung haben p_1 und p_2 keine reelle oder komplexe Nullstelle gemeinsam. Wir können deswegen den Beweis von Satz 4.22 wiederholen. Jede Division mit Rest liefert aber jetzt stets einen reellen Quotienten q_j und einen reellen Rest p_{j+1} . Und genau wie in Satz 4.22 ist der letzte Rest c eine - allerdings jetzt reelle - Konstante. Und wenn wir den Beweis bis ganz zu seinem Ende wiederholen finden wir, dass die Polynome f_1 und f_2 jetzt reell sind. $\square$

Die Formel aus vorstehendem Hilfssatz gehört in die (nicht-lineare) Algebra, mit linearer Algebra hat sie nichts zu tun. Aber mit ihr kann man zaubern. Wenden wir sie auf das charakteristische Polynom einer Matrix C an! Dabei nehmen wir als Grundkörper $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oder $= \mathbb{R}$.

Satz 4.24 *Es sei $C \in M(n \times n, \mathbb{K})$ und $\Phi : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ die zugehörige lineare Abbildung. Das charakteristische Polynom von C*

$$\chi_C(\lambda) = p_1(\lambda) \cdot p_2(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$$

sei Produkt zweier Polynome $p_1(\lambda)$ und $p_2(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$ ohne gemeinsame Faktoren. Dann gibt es $\mathbb{K}$ -Untervektorräume $U_1, U_2 \subset \mathbb{K}^n$ mit

i) $U_1 \oplus U_2 = \mathbb{K}^n$,

ii) $\mathbf{u} \in U_i \Rightarrow C \cdot \mathbf{u} \in U_i$ ($i = 1, 2$), d.h., der Unterraum U_i ist invariant unter der Abbildung Φ ,

iii) Sind $\Phi_i := \Phi|_{U_i} : U_i \rightarrow U_i$, $i = 1, 2$, die Einschränkungen von Φ auf die Unterräume U_i , so gilt

$$p_2(\Phi_1) = 0, \quad p_1(\Phi_2) = 0.$$

Beweis. Wir wählen Polynome $f_i \in \mathbb{K}[\lambda]$, $i = 1, 2$, wie im Hilfssatz 4.22 bzw 4.23 mit

$$f_1(\lambda) \cdot p_1(\lambda) + f_2(\lambda) \cdot p_2(\lambda) = 1.$$

Weiter definieren wir die Matrizen

$$C_i := f_i(C) \cdot p_i(C), \quad i = 1, 2,$$

und wählen als Unterräume $U_i \subset \mathbb{K}^n$ die Bilder der linearen Abbildungen

$$\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n, \quad \mathbf{x} \mapsto C_i \cdot \mathbf{x}.$$

Jetzt müssen wir die drei behaupteten Eigenschaften nachweisen:

i) Nach Konstruktion der Polynome f_i ist

$$C_1 + C_2 = f_1(C) \cdot p_1(C) + f_2(C) \cdot p_2(C) = \mathbb{1}_n.$$

Jeder Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ schreibt sich also

$$\mathbf{x} = \mathbb{1}_n \mathbf{x} = C_1 \cdot \mathbf{x} + C_2 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$$

als Summe zweier Vektoren $\mathbf{u}_i := C_i \mathbf{x} \in U_i$, $i = 1, 2$. Dies zeigt $\mathbb{K}^n = U_1 + U_2$. Dass diese Summe direkt ist, das beweisen wir unten nach dem Beweis von Aussage iii).

ii) Es sei etwa

$$\mathbf{u}_i = f_i(C) p_i(C) \cdot \mathbf{v} \in U_i.$$

Wegen der Vertauschbarkeit von Polynomen derselben Matrix folgt

$$C \cdot \mathbf{u}_i = C \cdot f_i(C) p_i(C) \cdot \mathbf{v} = f_i(C) p_i(C) \cdot C \mathbf{v} \in U_i.$$

iii) Jeder Vektor $\mathbf{x} \in U_1$ ist von der Form $\mathbf{x} = f_1(C) p_1(C) \cdot \mathbf{v}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n$. Wegen der Vertauschbarkeit von Polynomen der Matrix C gilt deswegen

$$p_2(C) \cdot \mathbf{x} = p_2(C) \cdot f_1(C) p_1(C) \cdot \mathbf{v} = f_1(C) \cdot p_1(C) p_2(C) \cdot \mathbf{v} = f_1(C) \cdot 0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Jetzt noch zum Beweis von $U_1 \cap U_2 = \{\mathbf{0}\}$. Sei also $\mathbf{x} \in U_1 \cap U_2$. Dann ist

$$\mathbf{x} = C_1 \cdot \mathbf{x} + C_2 \cdot \mathbf{x} = f_1(C) \cdot p_1(C) \cdot \mathbf{x} + f_2(C) \cdot p_2(C) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

□

Satz 4.24 hat gravierende Konsequenzen für die Matrix C . Wegen Satz 4.24 a) gibt es eine Basis $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ des $\mathbb{K}^n$, welche aus einer Basis $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ für U_1 und $\mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n$ für U_2 zusammengesetzt ist. In dieser Basis hat Φ eine darstellende Matrix

$$C' = \left(\begin{array}{c|c} C'_1 & 0 \\ \hline 0 & C'_2 \end{array} \right), \quad C'_1 \in M(k \times k, \mathbb{K}), \quad C'_2 \in M((n-k) \times (n-k), \mathbb{K}).$$

Und für jedes Polynom $p \in \mathbb{K}[\lambda]$ ist $p(C)$ ähnlich zu

$$p(C') = \left(\begin{array}{c|c} p(C'_1) & 0 \\ \hline 0 & p(C'_2) \end{array} \right).$$

Damit lässt sich die Aussage iii) auch schreiben als

$$p_2(C'_1) = 0 \quad \text{und} \quad p_1(C'_2) = 0.$$

Wir verallgemeinern dies auf mehr als zwei direkte Summanden.

Definition 4.12 *Es sei $\Phi : V \rightarrow V$ linear und $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_k$ eine direkte Summen-Zerlegung. Diese Zerlegung heißt Φ -invariant, wenn $\Phi(U_j) \subset U_j$ für $j = 1, \dots, k$.*

Für jedes $j = 1, \dots, k$ ist $\Phi_j := \Phi|_{U_j}$ eine lineare Abbildung $U_j \rightarrow U_j$. Man kann folgendermaßen eine an die Zerlegung angepasste Basis von V wählen:

- 1) Basis von U_1 : $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{r_1}$
- 2) Basis von U_2 : $\mathbf{v}_{r_1+1}, \dots, \mathbf{v}_{r_1+r_2}$
- $\vdots$
- k) Basis von U_k : $\mathbf{v}_{n-r_k+1}, \dots, \mathbf{v}_n$

In dieser Basis hat Φ eine darstellende Matrix

$$\begin{pmatrix} C_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & C_k \end{pmatrix}$$

mit quadratischen Matrizen C_j der Größe $r_j \times r_j$, wo $r_j = \dim(U_j)$. Eine solche Blockmatrix wollen wir eine *direkte Matrizensumme* der Blöcke $C_1, \dots, C_k$ nennen. Aus der Kästchenregel folgt in dieser Situation

$$\det(C) = \det(C_1) \cdot \dots \cdot \det(C_k) \quad \text{und} \quad \chi_C(\lambda) = \chi_{C_1}(\lambda) \cdot \dots \cdot \chi_{C_k}(\lambda).$$

Für jedes Polynom $p(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$ gilt allgemein

$$p(C) = \begin{pmatrix} p(C_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p(C_2) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & p(C_k) \end{pmatrix}.$$

Sind etwa $\mu_{C_1}, \dots, \mu_{C_k}$ die Minimalpolynome der Blöcke $C_1, \dots, C_k$, so folgt damit

$$\mu_{C_1}(C) \cdot \dots \cdot \mu_{C_k}(C) = 0.$$

Also teilt das Minimalpolynom μ_C das Produkt $\mu_{C_1} \cdot \dots \cdot \mu_{C_k}$. Natürlich gilt hier die Gleichheit

$$\mu_C(\lambda) = \mu_{C_1}(\lambda) \cdot \dots \cdot \mu_{C_k}(\lambda).$$

Beweis. Es sei $\mu_{C_1}(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1}$. Es genügt zu zeigen, dass das Minimalpolynom $\mu_C(\lambda)$ die Potenz $(\lambda_1 - \lambda)^{m_1}$ als Faktor enthält. Aber wäre das nicht so, dann hätten wir

$$\mu_C(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^m \cdot (\lambda_2 - \lambda)^{m_2} \cdot (\lambda_k - \lambda)^{m_k} \quad \text{mit} \quad m < m_1.$$

Dann wäre $(\lambda_1 \mathbb{I}_{r_1} - C_1)^m \neq 0$. Und weil $\lambda_2, \dots, \lambda_k$ keine Eigenwerte von C_1 sind, wäre die Matrix $(\lambda_2 \mathbb{I}_{r_1} - C_1) \cdot \dots \cdot (\lambda_k \mathbb{I}_{r_1} - C_1)$ invertierbar. Und $\mu_C(C)$ wäre $\neq 0$, weil seine erste linke obere Blockmatrix $\neq 0$ wäre. $\square$

Satz 4.25 (Invariante direkte Summen-Zerlegung, $K = \mathbb{C}$) *Es sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$ -Vektorraum und $\Phi : V \rightarrow V$ eine $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung mit dem charakteristischen Polynom*

$$\chi_\Phi(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{r_1} \cdot \dots \cdot (\lambda_k - \lambda)^{r_k}, \quad r_1 + \dots + r_k = n, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C} \text{ paarweise verschieden.}$$

Dann gibt es eine Φ -invariante direkte Summen-Zerlegung $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$ mit $\dim(U_j) = r_j$ und so, dass $\Phi|_{U_j}$ das charakteristische Polynom $(\lambda_j - \lambda)^{r_j}$ hat.

Beweis (Induktion nach k). Für $k = 1$, den Induktionsanfang ist wieder einmal nichts zu zeigen. Induktionsschluss: Sei $k \geq 2$. Wir zerlegen $\chi_\Phi(\lambda)$ in zwei Faktoren

$$p_1(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{r_1} \quad \text{und} \quad p_2(\lambda) = (\lambda_2 - \lambda)^{r_2} \cdot \dots \cdot (\lambda_k - \lambda)^{r_k}$$

ohne gemeinsame Nullstelle. Wir können Satz 4.24 anwenden und finden eine Φ -invariante direkte Summen-Zerlegung $V = U_1 \oplus U_2$.

Seien $\Phi_i := \Phi|_{U_i}$, $i = 1, 2$, die eingeschränkten Abbildungen mit $p_2(\Phi_1) = p_1(\Phi_2) = 0$. Daraus folgt, dass χ_{Φ_1} nur Nullstellen $\lambda_2, \dots, \lambda_k$ hat und χ_{Φ_2} nur die einzige Nullstelle λ_1 . Weil aber

$$\chi_\Phi(\lambda) = \chi_{\Phi_1}(\lambda) \cdot \chi_{\Phi_2}(\lambda) = p_2(\lambda) \cdot (\lambda_1 - \lambda)^{r_1},$$

muss $\chi_{\Phi_2}(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{r_1}$ sein. Wir haben eine direkte Summen-Zerlegung derart, dass $\Phi|_{U_2}$ das charakteristische Polynom $(\lambda_1 - \lambda)^{r_1}$ hat. Und auf U_1 wenden wir die Induktionsannahme an. $\square$

Satz 4.26 (Invariante direkte Summen-Zerlegung, $K = \mathbb{R}$) *Es sei V ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum und $\Phi : V \rightarrow V$ eine $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung mit dem charakteristischen Polynom*

$$\chi_\Phi(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{r_1} \cdot \dots \cdot (\lambda_k - \lambda)^{r_k} \cdot q_1(\lambda)^{s_1} \cdot \dots \cdot q_l(\lambda)^{s_l}, \quad r_1 + \dots + r_k + 2(s_1 + \dots + s_l) = n.$$

Dabei seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die paarweise voneinander verschiedenen reellen Nullstellen von p und $q_1(\lambda) = (c_1 - \lambda) \cdot (\bar{c}_1 - \lambda), \dots, q_l(\lambda) = (c_l - \lambda) \cdot (\bar{c}_l - \lambda)$ quadratische reelle Faktoren ohne gemeinsame (komplexe) Nullstellen. Dann gibt es eine Φ -invariante reelle direkte Summen-Zerlegung

$$V = U_1 + \dots + U_k + W_1 + \dots + W_l \quad \text{mit} \quad \dim(U_j) = r_j, \dim(W_j) = 2s_j,$$

so, dass $\Phi|_{U_j}$ das charakteristische Polynom $(\lambda_j - \lambda)^{r_j}$ und $\Phi|_{W_j}$ das charakteristische Polynom $q_j^{s_j}$ hat.

Beweis. Wir kopieren den Beweis von Satz 4.25. Beim Induktionsschluss zerlegen wir

$$\chi_\Phi(\lambda) = p_1(\lambda) \cdot p_2(\lambda)$$

in zwei reelle Faktoren ohne gemeinsame lineare oder quadratische Faktoren. Mit Satz 4.24 zerlegen wir $V = U_1 \oplus U_2$ so, dass für $\Phi_1 := \Phi|_{U_1}$ und $\Phi_2 := \Phi|_{U_2}$ gilt $p_2(\Phi_1) = 0$ und $p_1(\Phi_2) = 0$. Jetzt müssen wir aber zwei Fälle unterscheiden.

a) Wenn $p_1(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^r$ mit $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ ist, dann verläuft der Induktionsschluss identisch wie beim Beweis von Satz 4.25.

b) Wenn $p_1(\lambda) = (c_1 - \lambda)^s \cdot (\bar{c}_1 - \lambda)^s$ mit $c_1 \notin \mathbb{R}$ ist, dann hat χ_{Φ_2} nur die Nullstellen c_1 und $\bar{c}_1$, während χ_{Φ_1} nur komplexe Nullstellen $\neq c_1, \bar{c}_1$ besitzt. Aber aus

$$\chi_{\Phi}(\lambda) = \chi_{\Phi_1}(\lambda) \cdot \chi_{\Phi_2}(\lambda) = (c_1 - \lambda)^s (\bar{c}_1 - \lambda)^s \cdot p_2(\lambda)$$

folgt wieder $\chi_{\Phi_2}(\lambda) = (c_1 - \lambda)^s \cdot (\bar{c}_1 - \lambda)^s$.

Satz 4.27 (Korollar) a) Jede komplexe $n \times n$ -Matrix ist ähnlich zu einer direkten Summe von Matrizen $C_1, \dots, C_k$, wo jede Matrix C_j ein charakteristisches Polynom $(\lambda_j - \lambda)^{r_j}$ mit nur einer einzigen Nullstelle hat.

b) Jede reelle $n \times n$ -Matrix ist ähnlich zu einer direkten Summe von Matrizen C_j , wovon jede entweder ein charakteristisches Polynom $(\lambda_j - \lambda)^{r_j}$ mit $\lambda_j \in \mathbb{R}$ hat, oder ein charakteristisches Polynom $p_j^{s_j}$ mit $p_j = (a_j - \lambda)^2 + b_j^2$ und $0 \neq b_j \in \mathbb{R}$.

Satz 4.28 (Eindeutigkeit) Wir betrachten den $\mathbb{K}$ -Vektorraum V und die $\mathbb{K}$ -lineare Abbildung $\Phi : V \rightarrow V$. Die invarianten Unterräume U_j , bzw. $W_j \subset V$ aus Satz Satz 4.25/26 bezeichnen wir einheitlich mit V_j und die charakteristischen Polynome von $\Phi_j := \Phi|_{V_j}$ mit $p_j(\lambda)^{r_j}$. (Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sind alle p_j linear, für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ können sie auch quadratisch sein.) Für diese Unterräume $U_j \subset V$ gilt

$$U_j = \text{Kern}(p_j(\Phi))^{r_j}.$$

Insbesondere sind diese Unterräume durch Φ eindeutig bestimmt.

Beweis. Für Φ_j gilt nach Cayley-Hamilton $p_j(\Phi_j)^{r_j} = 0$. Das bedeutet $U_j \subset \text{Kern}(p_j(\Phi)^{r_j})$. Wenn hier $U_j \neq \text{Kern}(p_j(\Phi)^{r_j})$ wäre, dann müsste dieser Kern die Summe

$$U := \bigoplus_{i \neq j} U_i$$

In einem Untervektorraum $\neq \{0\}$ schneiden. Es gäbe also einen Vektor

$$\mathbf{u} \in U_j \cap U, \quad \mathbf{u} \neq 0.$$

Das charakteristische Polynom von Φ ist

$$\chi_{\Phi}(\lambda) = p_j(\lambda)^{r_j} \cdot p(\lambda),$$

wo $p(\lambda)$ das charakteristische Polynom von $\Phi|_U$ ist. Die Polynome $p_j(\lambda)$ und $p(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$ haben keine gemeinsame Nullstelle, auch keine komplexe. Nach Satz 4.22/23 gibt es also Polynome $f_j(\lambda)$ und $f(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$ mit

$$f_j(\lambda) \cdot p_j(\lambda)^{r_j} + f(\lambda) \cdot p(\lambda) = 1.$$

Wegen $\mathbf{u} \in \text{Kern}(p_j(\Phi)^{r_j}) \cap U$ ist

$$p_j(\Phi)^{r_j}(\mathbf{u}) = p(\Phi)(\mathbf{u}) = 0$$

im Widerspruch zu

$$\mathbf{u} = (f_j \cdot p_j + f \cdot p)(\Phi)(\mathbf{u}) = f_j(\Phi)p_j(\Phi)(\mathbf{u}) + f(\Phi)p(\Phi)(\mathbf{u}) = 0.$$

□

Definition 4.13 Die durch Satz 4.28 eindeutig bestimmten Untervektorräume $U_j \subset V$ heißen die Haupträume der linearen Abbildung $\Phi : V \rightarrow V$, bzw. einer jeden darstellenden Matrix C für Φ .

Machmal werden diese Haupträume in der Literatur auch verallgemeinerte Eigenräume genannt, und ihre Vektoren $\neq \mathbf{0}$ verallgemeinerte Eigenvektoren. Wir möchten diesem Sprachgebrauch wegen seiner Schwerfälligkeit nicht folgen. Die Vektoren $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ aus einem Hauptraum nennen wir deswegen Hauptvektoren.

Um die Haupträume konkret zu bestimmen, muss man also den Kern jeder Matrix $p_j(C)^{r_j}$ bestimmen, wo p_j ein linearer bzw. quadratischer Faktor des charakteristischen Polynoms ist und r_j seine algebraische Vielfachheit. Diese Rechnung besteht darin, ein homogenes lineares Gleichungssystem zu lösen. Allerdings muss man vorher für die Matrix $p_j(C)$ die r_j -te Potenz berechnen. Etwas Arbeit kann man sich sparen, wenn man hier nicht die algebraische Vielfachheit r_j im charakteristischen Polynom χ_C nimmt, sondern die algebraische Vielfachheit $m_j \leq r_j$ dieses Faktors im Minimalpolynom μ_C . Es ist ja

$$U_j = \text{Kern}(p_j(C)^{r_j}) = \text{Kern}(p_j(C)^{m_j}).$$

Beispiel 4.12 Jeder Eigenvektor $\mathbf{v}$ einer $n \times n$ -Matrix A zum Eigenwert λ_1 liegt im zu λ_1 gehörigen Hauptraum. Ist A diagonalisierbar, so gibt es eine Basis aus Eigenvektoren, die also alle in Haupträumen liegen. Jede Basis aus Eigenvektoren für A ist der Zerlegung des $\mathbb{K}^n$ in Haupträume angepasst.

Wenn A diagonalisierbar ist, dann ist sein charakteristisches Polynom

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{r_1} \cdot \dots \cdot (\lambda_k - \lambda)^{r_k},$$

wo r_i auch die geometrische Vielfachheit des Eigenwert λ_i ist. Das Minimalpolynom ist aber

$$\mu_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \cdot \dots \cdot (\lambda_k - \lambda)$$

ein Produkt von voneinander verschiedenen Linearfaktoren. Davon gilt auch die Umkehrung:

Ist $\mu_A(\lambda)$ Produkt von voneinander verschiedenen Linearfaktoren, dann ist A diagonalisierbar.

Beweis. Sei $\Phi : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ die lineare Abbildung mit Matrix A . Wir betrachten den Hauptraum $U_i \subset \mathbb{K}^n$ zum Eigenwert λ_i . Das charakteristische Polynom von $\Phi|_{U_i}$ ist $(\lambda_i - \lambda)^{r_i}$ mit $r_i = \dim(U_i)$. Das Minimalpolynom von $\Phi|_{U_i}$ ist ein Teiler dieses charakteristischen Polynoms und hat lauter verschiedene Linearfaktoren. Dann muss $\lambda_i - \lambda$ dieses Minimalpolynom sein. Das heißt, $\Phi|_{U_i}$ ist die Multiplikation mit λ_i . Der Hauptraum ist gleichzeitig Eigenraum. $\square$

Aufgabe 4.40 Finden Sie die Haupträume U_i für die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.41 Finden Sie Basen für die Haupträume der Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

4.4 Die Jordansche Normalform

4.4.1 Der komplexe Fall

Nach Satz 4.27 ist jede komplexe $n \times n$ -Matrix C über $\mathbb{C}$ ähnlich zu einer Block-Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} C_1 & & & \\ & C_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_k \end{pmatrix},$$

wo jede $(r_j \times r_j)$ -Matrix C_j ein charakteristisches Polynom $(\lambda_j - \lambda)^{r_j}$ hat. Um eine noch einfachere Form für eine zu C ähnliche Matrix anzugeben, analysieren wir jetzt die Matrizen C_j . Mit anderen Worten: Wir betrachten hier komplexe Matrizen C_j mit einem charakteristischen Polynom $\chi_{C_j}(\lambda) = (c - \lambda)^{r_j}$. Die Matrix C_j ist genau dann ähnlich zu einer Matrix C'_j , wenn $N_j = C_j - c\mathbb{1}_{r_j}$ ähnlich ist zu $N'_j = C'_j - c\mathbb{1}_{r_j}$. Dabei hat die Matrix N_j das charakteristische Polynom

$$\det(N_j - \lambda\mathbb{1}_{r_j}) = \det(C_j - (c + \lambda)\mathbb{1}_{r_j}) = \chi_{C_j}(c + \lambda) = (-\lambda)^{r_j}.$$

Mit Cayley-Hamilton folgt

$$(-1)^{r_j} \cdot N_j^{r_j} = 0, \quad \text{bzw.} \quad N_j^{r_j} = 0.$$

Deswegen konzentrieren wir uns jetzt auf die folgende Sorte von Matrizen, bzw. linearen Abbildungen:

Definition 4.14 Eine $n \times n$ -Matrix N (bzw. eine lineare Abbildung $\Phi : V \rightarrow V$) heißt nilpotent, wenn es eine natürliche Zahl r gibt mit $N^r = 0$, (bzw. $\Phi^r = 0$).

Ist $\Phi : V \rightarrow V$ nilpotent, so definiert jeder Vektor $\mathbf{v} \in V$ eine endliche Kette von Bildvektoren

$$\mathbf{v}, \Phi(\mathbf{v}), \Phi^2(\mathbf{v}), \dots, \Phi^{p-1}(\mathbf{v}) \neq \mathbf{0}, \quad \Phi^p(\mathbf{v}) = \mathbf{0}.$$

Spätestens für $p = r$ ist $\Phi^p(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ und wir brechen die Kette ab. (Zur Kette sollen nur die Vektoren $\Phi^k(\mathbf{v})$ gehören, welche $\neq \mathbf{0}$ sind.) Ist p die Länge der Kette, so ist $\Phi^{p-1}(\mathbf{v})$ ein Eigenvektor von Φ zum Eigenwert 0.

Satz 4.29 Ist $\Phi : V \rightarrow V$ eine nilpotente K -lineare Abbildung des endlich-dimensionalen K -Vektorraums V in sich, so gibt es eine Basis von V , die sich nur aus Ketten für Φ zusammensetzt. In einer solchen Basis wird die Abbildung Φ durch eine Matrix beschrieben, welche die direkte Matrizensumme von Blöcken

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Jordanblock zum Eigenwert } 0)$$

ist.

Beweis. Weil Φ nilpotent ist, gibt es ein p mit $\Phi^p = 0$ aber $\Phi^{p-1} \neq 0$. Wir beweisen die Behauptung durch Induktion nach p . Der Induktionsanfang ist $p = 1$. Dann ist $\Phi = 0$ die Nullabbildung. Jeder

Vektor $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in V$ stellt eine - wenn auch kurze - Kette dar. Und jede Basis von V besteht aus derartigen Ketten der Länge 1.

Sei jetzt $p \geq 2$. Wir betrachten den Bildraum $B := \Phi(V) \subset V$. Die Einschränkung $\Phi|_B$ bildet auch B in das Bild $\Phi(V)$ ab, definiert also eine Abbildung $\Phi|_B : B \rightarrow B$. Für jeden Vektor $\mathbf{b} = \Phi(\mathbf{v}) \in B$ ist

$$\Phi^{p-1}(\mathbf{b}) = \Phi^{p-1}(\Phi(\mathbf{v})) = \Phi^p(\mathbf{v}) = \mathbf{0}.$$

Deswegen ist $(\Phi|_B)^{p-1} = 0$, und wir können auf $\Phi|_B$ die Induktionsannahme anwenden. Es gibt also eine Basis von B , die aus Ketten besteht:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{b}_1 & \rightarrow & \Phi(\mathbf{b}_1) & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \Phi^{r_1}(\mathbf{b}_1), \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ \mathbf{b}_k & \rightarrow & \Phi(\mathbf{b}_k) & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \Phi^{r_k}(\mathbf{b}_k). \end{array}$$

Hier soll jeweils $\Phi^{r_i}(\mathbf{b}_i) \neq \mathbf{0}$ sein, aber $\Phi^{r_i+1}(\mathbf{b}_i) = \mathbf{0}$.

Zuerst verlängern wir unsere Ketten etwas: Jedes $\mathbf{b}_i \in B$ ist ein Bild $\Phi(\mathbf{v}_i)$. Wir können zu jeder Kette einen solchen Vektor $\mathbf{v}_i$ hinzunehmen und ihre Länge um 1 vergrößern:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{v}_i & \rightarrow & \Phi(\mathbf{v}_i) & \rightarrow & \Phi^2(\mathbf{v}_i) & \rightarrow & \dots \rightarrow \Phi^{r_i+1}(\mathbf{v}_i), \\ & & \parallel & & \parallel & & \dots & \parallel \\ & & \mathbf{b}_i & \rightarrow & \Phi(\mathbf{b}_i) & \rightarrow & \dots & \rightarrow \Phi^{r_i}(\mathbf{b}_i). \end{array}$$

Dann vermehren wir unsere Ketten auch noch: Die Vektoren $\Phi^{r_i}(\mathbf{b}_i) = \Phi^{r_i+1}(\mathbf{v}_i)$, $i = 1, \dots, k$, gehören zum Kern von Φ . Als Teil der gewählten Basis von B sind sie linear unabhängig. Wir können sie durch Vektoren $\mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_l$ zu einer Basis des Kerns ergänzen. Jeden dieser ergänzenden Vektoren im Kern fassen wir als eine kurze Kette auf.

Jetzt schreiben wir mal alle unsere Ketten zusammen:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{v}_1 & \Phi(\mathbf{v}_1) & \dots & \Phi^{r_1+1}(\mathbf{v}_1) & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \\ \mathbf{v}_k & \Phi(\mathbf{v}_k) & \dots & \Phi^{r_k+1}(\mathbf{v}_k) & & & \\ \mathbf{v}_{k+1} & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ \mathbf{v}_l & & & & & & \end{array}$$

Die Anzahl aller Vektoren in unserer Kettenbasis von B war $= \dim(B)$. Hier haben wir insgesamt k Vektoren hinzugenommen um jede Kette etwas zu verlängern. Schließlich haben wir unsere Ketten um

$$l - k = \dim(\text{Kern}(\Phi)) - k$$

kurze Ketten vermehrt. Damit ist die Anzahl aller Vektoren in unseren Ketten

$$\dim(\text{Bild}(\Phi)) + \dim(\text{Kern}(\Phi)) = \dim V$$

geworden. Wir müssen also nur noch zeigen, dass alle Vektoren unserer Ketten linear unabhängig sind, dann haben wir eine Kettenbasis von V .

Wie wir die lineare Unabhängigkeit testen, ist klar, nur etwas mühselig hinschreiben: Sei also

$$\sum_{i=1}^k (c_i \mathbf{v}_i + \sum_{j_i=1}^{r_i+1} c_{i,j_i} \Phi^{j_i}(\mathbf{v}_i)) + \sum_{i=k+1}^l c_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}.$$

Auf diese Gleichung wenden wir Φ an. Dabei fällt aus jeder Kette der letzte Vektor heraus. Und die ersten Vektoren werden genau die Kettenvektoren der Basis von B , mit der wir angefangen haben. Weil die linear unabhängig waren, folgt

$$c_i = c_{i,1} = \dots = c_{i,r_i} = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, k.$$

Übrig bleibt eine lineare Relation zwischen den letzten Vektoren aus jeder Kette. Die sind aber linear unabhängig, weil sie eine Basis von $\text{Kern}(\Phi)$ bilden. Dann müssen auch deren Koeffizienten in der linearen Relation alle $= 0$ sein.

Ist eine Kette $\mathbf{v}, \Phi(\mathbf{v}), \dots, \Phi^p(\mathbf{v})$ als Teil der Basis gewählt, so gehört hierzu eine Blockmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das ist die Transponierte eines Jordan-Blocks. Kehrt man in der Basis die Reihenfolge der Vektoren in der Kette um, so wird daraus ein echter Jordan-Block. $\square$

Definition 4.15 Ein Vektor $\mathbf{u}$ im Hauptraum U_i heißt Hauptvektor der Stufe k , wenn

$$N^k \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{aber} \quad N^{k-1} \cdot \mathbf{u} \neq \mathbf{0}.$$

Hauptvektoren der Stufe 1 sind genau die Eigenvektoren (zum einzigen Eigenwert $= 0$ von N), d.h., die Vektoren $\neq \mathbf{0}$ im Kern von N . Jede Kette enthält als letzten Vektor einen solchen Eigenvektor. Aus der Jordanschen Normalform von N entnimmt man, dass diese letzten Kettenvektoren eine Basis des Eigenraums $\text{Kern}(N)$ bilden. Die Anzahl aller Ketten stimmt also mit der algebraischen Vielfachheit des Eigenwerts 0, der Dimension von $\text{Kern}(N)$ überein.

Ist $r \in \mathbb{N}$ die kleinste Zahl mit $N^r = 0$, so sind alle Vektoren $\mathbf{u} \in U_i \setminus \text{Kern}(N^{r-1})$ Hauptvektoren der maximalen Stufe r . Aus der Jordanschen Normalform entnimmt man, dass die Anzahl der Ketten maximaler Länge R gerade

$$\dim(U_i) - \dim(\text{Kern}(N^{r-1})) = \text{Rang}(N^{r-1})$$

ist. Dies sind Spezialfälle der Anzahlformel im unten folgenden Satz 4.30.

Die in Satz 4.29 auftretenden Ketten sind i.a. nicht eindeutig bestimmt, deswegen sind auch die zur direkten Matrizensumme gehörenden Unterräume durch die lineare Abbildung i.a. nicht eindeutig bestimmt. Ihre *Anzahlen und Dimensionen* dagegen sind sehr wohl eindeutig bestimmt.

Satz 4.30 (Zusatz zu Satz 4.29: Eindeutigkeit) Die Größen der in Satz 4.29 auftretenden Jordanblöcke und die Anzahl der Blöcke einer festen Größe sind durch die Abbildung Φ eindeutig bestimmt.

Die Anzahl z_l der Blöcke einer festen Länge $l, 1 \leq l \leq r$, ist

$$z_l = \text{Rang}(\Phi^{l+1}) + \text{Rang}(\Phi^{l-1}) - 2 \cdot \text{Rang}(\Phi^l).$$

Beweis Die Anzahl der Blöcke ist die Anzahl der Ketten, die Größe eines Blocks ist die Länge der zugehörigen Kette. Wir brauchen also nur die entsprechende Aussage für Ketten zu beweisen.

Jede Kette der Länge l enthält als ihren ersten Vektor einen Hauptvektor der Stufe l . Ketten einer Länge $< l$ enthalten keinen solchen Hauptvektor der Stufe l ; Ketten einer Länge $> l$ enthalten genau einen solchen Hauptvektor der Stufe l , aber nicht am Anfang. Die Hauptvektoren der Stufen $\leq l$ aller Ketten zusammen bilden eine Basis von $\text{Kern}(N^l)$, und ihre Anzahl ist

$$\dim(\text{Kern}(N^l)) = \dim(U_i) - \text{Rang}(N^l).$$

Die Anzahl von Hauptvektoren der Stufe l in allen Ketten ist entsprechend

$$\begin{aligned} \dim(\text{Kern}(N^l)) - \dim(\text{Kern}(N^{l-1})) &= \dim(U_i) - \text{Rang}(N^l) - [\dim(U_i) - \text{Rang}(N^{l-1})] \\ &= \text{Rang}(N^{l-1}) - \text{Rang}(N^l). \end{aligned}$$

Hiervon gehören aber soviele zu Ketten einer Länge $> l$, wie es in den Ketten Hauptvektoren der Stufe $l+1$ gibt. Deren Anzahl ist $\text{Rang}(N^l) - \text{Rang}(N^{l+1})$. Die Anzahl der Ketten von Länge l ist somit die Differenz

$$\text{Rang}(N^{l-1}) - \text{Rang}(N^l) - [\text{Rang}(N^l) - \text{Rang}(N^{l+1})] = \text{Rang}(N^{l+1}) + \text{Rang}(N^{l-1}) - 2 \cdot \text{Rang}(N^l).$$

□

Beispiel 4.13 Wir betrachten die nilpotente Matrix

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und $N^3 = 0$. Die Potenzen von N haben also die Ränge

$$\begin{array}{c|c|c|c} N^0 & N^1 & N^2 & N^3 \\ \hline 5 & 3 & 1 & 0 \end{array}$$

Es gibt keine Ketten der Länge ≥ 4 . Und für Längen $l \leq 3$ bekommen wir mit Satz 4.30 die Anzahlen

$$\begin{array}{c|c} l & \text{Anzahl} \\ \hline 3 & 0 + 1 - 2 \cdot 0 = 1 \\ 2 & 0 + 3 - 2 \cdot 1 = 1 \\ 1 & 1 + 5 - 2 \cdot 3 = 0 \end{array}$$

Damit ist N ähnlich zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

in Jordan-Normalform.

Satz 4.31 (Jordansche Normalform) Jede komplexe $n \times n$ -Matrix ist ähnlich zu einer direkten Matrix-Summe von $k \times k$ -Jordan-Blöcken

$$J_k(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

zu den Eigenwerten λ_i der Matrix. Dabei sind die Anzahlen der Blöcke einer festen Größe zu einem festen Eigenwert durch die Matrix eindeutig bestimmt.

Beweis. Nach Satz 4.25 ist die Matrix ähnlich zu einer direkten Matrix-Summe von Matrizen C_0 mit einem charakteristischen Polynom $(\lambda_0 - \lambda)^k$. Trigonalisieren wir eine solche Matrix C_0 mit Satz 4.16, so sehen wir, dass $C_0 - \lambda_0 \mathbb{1}_k$ nilpotent ist. Wegen Satz 4.29 ist die Matrix $C_0 - \lambda_0 \mathbb{1}_k$ ähnlich zu einer direkten Summe von Jordan-Blöcken mit Eigenwert 0. Dann ist C_0 ähnlich zu einer direkten Summe von Jordan-Blöcken gleicher Größe zum Eigenwert λ_0 .

Die Eindeutigkeitsaussage folgt aus der Eindeutigkeit in Satz 4.28 und Satz 4.30. $\square$

Wegen des Eindeutigkeitsteils in Satz 4.31 können wir von der Jordanschen Normalform einer Matrix sprechen.

Aufgabe 4.42 a) Es sei $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ und f ein Endomorphismus des $\mathbb{R}^n$ mit $f^{n-1}(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$ und $f^n(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$. Man beweise, dass die Vektoren $\mathbf{a}, f(\mathbf{a}), \dots, f^{n-1}(\mathbf{a})$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ bilden und gebe die Matrix von f bezüglich dieser Basis an.

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times n}, A^{n-1} \neq 0, B^{n-1} \neq 0, A^n = B^n = 0$. Man beweise: Die Matrizen A und B sind ähnlich zueinander.

Aufgabe 4.43 Gegeben sei eine $n \times n$ -Matrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & -a_0 \\ 1 & \ddots & -a_1 \\ & \ddots & \vdots \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

mit $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in K$.

i) Man zeige: Das charakteristische Polynom $\chi(X) = \det(X\mathbb{1}_n - A)$ von A ist

$$\chi(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0.$$

ii) Man zeige: Für jeden Eigenwert λ von A hat der zugehörige Eigenraum die Dimension 1.

iii) Man bestimme die Jordansche Normalform von A unter der Annahme, dass $\chi(X)$ in $K[X]$ in Linearfaktoren zerfällt.

Aufgabe 4.44 Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(5 \times 5, K).$$

Man berechne A^i für $i \in \mathbb{N}$ sowie das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom von A , und man bestimme die Jordansche Normalform von A .

Aufgabe 4.45 a) Wie sehen die (komplexen) Jordanschen Normalformen der Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -6 & 8 & -8 \\ -4 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

aus?

b) Bestimmen Sie jeweils das Minimalpolynom der Matrix.

Aufgabe 4.46 Es sei P_n der reelle Vektorraum aller Polynome $f(t) \in \mathbb{R}[t]$ vom Grad $\leq n$. Man bestimme die Jordansche Normalform des Endomorphismus

$$\frac{d}{dt} : P_N \rightarrow P_N, \quad f(t) \mapsto f'(t).$$

Aufgabe 4.47 a) Bestimmen Sie alle $c \in \mathbb{R}$, für die

$$A_c = \begin{pmatrix} 2 & -6c & c \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & c & 3 \end{pmatrix}$$

zu einer reellen Diagonalmatrix ähnlich ist.

b) Bestimmen Sie die beiden Parameterwerte c_1 und c_2 , für die A_c einen zweifachen Eigenwert hat. Bestimmen Sie für $c = c_1$ und $c = c_2$ die Eigenräume von A_c , und bestimmen Sie die Jordansche Normalform dieser A_c .

4.4.2 Beispiele und Berechnung

Beispiel 4.14 (n=2) Die möglichen Jordan-Normalformen für 2×2 -Matrizen sind

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

wo $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Um zu entscheiden, welche Jordan-Normalform eine reelle Matrix

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

hat, berechnen wir das charakteristische Polynom

$$\chi_C(\lambda) = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = \delta - \sigma\lambda + \lambda^2,$$

wo wir $\det(C) = \delta = ad - bc$ und $\text{sp}(C) = \sigma = a + d$ abkürzten. Die beiden Eigenwerte sind dann

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4\delta}),$$

und beide Eigenwerte fallen genau dann zusammen, wenn $\sigma^2 = 4\delta$. Daraus folgt: C ist ähnlich zu

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow sp(C)^2 > 4 \cdot \det(C), \\ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} &\Leftrightarrow sp(C)^2 = 4 \cdot \det(C) \text{ und } b = c = 0, \\ \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} &\Leftrightarrow sp(C)^2 = 4 \cdot \det(C) \text{ und } b \neq 0 \text{ oder } c \neq 0, \end{aligned}$$

Wenn $sp(C)^2 < 4 \cdot \det(C)$ ist, dann hat das charakteristische Polynom von C keine reellen Nullstellen, und die Matrix C ist reell nicht einmal trigonalisierbar.

Beispiel 4.15 (n=3) Die möglichen Jordan-Normalformen für 3×3 -Matrizen sind

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_1$.

Die Bestimmung der Jordanschen Normalform einer gegebenen Matrix C ist praktisch wichtig, z.B. bei Systemen von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Wie geht man dabei vor? Als erstes muss man natürlich das charakteristische Polynom der Matrix C berechnen und dann deren Eigenwerte. Will man die Transformation in die Jordansche Normalform konkret durchführen, braucht man als nächstes die Haupträume $U_i \subset \mathbb{C}^n$ aus Satz 4.25. Dabei ist U_i der Kern der Matrix $(\lambda_i \mathbb{I} - C)^{m_i}$, wenn der Linearfaktor $(\lambda_i - \lambda)$ im Minimalpolynom μ_C mit der Vielfachheit m_i vorkommt. Diese Vielfachheit kriegt man raus, indem man die Matrizenprodukte

$$\lambda_i \mathbb{I} - C, \quad (\lambda_i \mathbb{I} - C)^2, \quad (\lambda_i \mathbb{I} - C)^3, \dots$$

ausrechnet. Deren Rang wird immer kleiner. Die Stelle, ab welcher der Rang sich nicht mehr verringert, liefert die Potenz m_i . Und damit kann man dann U_i berechnen.

Nachdem man zu einer Basis übergeht, welche der Zerlegung $\mathbb{C}^n = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$ angepasst ist und die zugehörige Matrizensumme von Matrizen $C_1, \dots, C_k$ betrachtet, braucht man nur noch die Jordansche Normalform für diese Teilmatrizen C_i zu finden. Nachdem wir von C_i zur nilpotenten Matrix $N := C_i - \lambda_i \mathbb{I}_{r_i}$ übergehen, genügt es die Jordan-Normalform dieser Matrix N zu finden.

Wenn es tatsächlich genügt, diese Normalform zu finden (und nicht eine explizite Kettenbasis), muss man nur die Anzahlen von Ketten einer festen Länge zu berechnen, und das liefert Satz 4.30. Allerdings bekommt man keine Kettenbasis, d.h., keine Transformationsmatrix für den Übergang in Jordan-Normalform.

Für kleine Matrizen (und in Übungsaufgaben kommen nur kleine Matrizen vor) kann man aus der Kenntnis der Matrix-Potenzen mit etwas Geschick eine Kettenbasis basteln. Dazu nehmen wir Beispiel 4.12 wieder auf:

Beispiel 4.16 Eine Kette der Länge 3 beginnt mit einem Hauptvektor $\mathbf{v}_1$ der Stufe 3, d.h., mit einem Vektor, für den $N^2 \cdot \mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$. Wir kennen N^2 und sehen, dass z.B. $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_4$ ein solcher Vektor ist. Dazu gehört die Kette

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_4, \quad N \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \quad N^2 \mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2.$$

Wir brauchen noch einen Hauptvektor $\mathbf{v}_2$ der Stufe 2, um eine Kette der Länge 2 zu erzeugen. Solche Hauptvektoren liegen einerseits im Kern

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^5 : x_4 + x_5 = 0\}$$

von N^2 , andererseits nicht im Kern

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^5 : x_3 + x_4 = x_3 + x_5 = x_4 + x_5 = 0\}.$$

von N . Solche Vektoren sind etwa $\mathbf{e}_3$ und $\mathbf{e}_4$. Aber zur ersten Kette gehört schon der Vektor $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$. Wir brauchen einen Vektor, der zusammen mit ihm und dem Unterraum $\text{Kern}(N)$ den Kern von N^2 erzeugt. Das heißt, die Vektoren

$$N \cdot (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \quad \text{und} \quad N \cdot \mathbf{v}_2$$

müssen linear unabhängig sein. Hierfür bietet sich $\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_4 - \mathbf{e}_5$ an. Dieser führt auf die Kette

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_4 - \mathbf{e}_5, \quad N \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2.$$

Die Transformationsmatrix entsteht, indem wir die Vektoren unserer beiden Ketten (in umgekehrter Reihenfolge) als Spalten verwenden:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wenn man sich weniger auf das eigene Fingerspitzengefühl verlassen will, und lieber ein Rezept anwenden möchte, bleibt wohl nicht viel mehr übrig, als den Beweis von Satz 4.29 mit all seinen Induktionsschritten durchzugehen. Wir beschreiben das allgemeine Verfahren:

Gegeben sei die nilpotente $n \times n$ -Matrix N mit $N^r = 0$ aber $N^{r-1} \neq 0$. Als erstes brauchen wir den Unterraum $Z = \text{Kern}(N) \subset \mathbb{C}^n$, wir berechnen ihn als Lösungsraum des homogenen LGS $N \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$. Seine Elemente sind die Hauptvektoren der Stufe 1.

Dann berechnen wir für $k = 2, \dots, r-1$ die Matrix-Potenzen N^k . Den Spaltenraum der Matrix N^k , also den Bildraum der durch N^k beschriebenen linearen Abbildung bezeichnen wir mit $B_k \subset \mathbb{C}^n$. Dann haben wir die Inklusionen

$$B_r = \{\mathbf{0}\} \subset B_{r-1} \subset \dots \subset B_1 \subset B_0 = \mathbb{C}^n.$$

Sukzessive berechnen wir dann Ketten der Länge $r, r-1, \dots, 1$ deren Vektoren eine Kettenbasis des $\mathbb{R}^n$ bilden. Hilfreich ist hier die folgende Bemerkung:

Es seien

$$\mathbf{v}_1, N\mathbf{v}_1, \dots, N^{r_1}\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, N\mathbf{v}_k, \dots, N^{r_k}\mathbf{v}_k$$

Ketten in $\mathbb{C}^n$ der Längen $r_1 + 1, \dots, r_k + 1$. Dann ist äquivalent:

- a) Die in all diesen Ketten enthaltenen Vektoren sind linear unabhängig.
- b) Die letzten Vektoren $N^{r_1}\mathbf{v}_1, \dots, N^{r_k}\mathbf{v}_k$ dieser Ketten sind linear unabhängig.

Zu zeigen ist nur b) $\Rightarrow$ a). Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach der maximalen Länge der beteiligten Ketten. Sei etwa eine lineare Relation

$$c_{1,1}\mathbf{v}_1 + \dots + c_{1,r_1}N^{r_1}\mathbf{v}_1 + \dots + c_{k,1}\mathbf{v}_k + \dots + c_{k,r_k}N^{r_k}\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

gegeben. Diese Gleichung multiplizieren wir mit der Matrix N . Dann fällt aus jeder Kette der erste Vektor weg. Die letzten Vektoren der verkürzten Ketten sind aber nach wie vor linear unabhängig. Nach Induktionsannahme sind dann alle Vektoren der verkürzten Ketten linear unabhängig und es folgt

$$c_{1,1} = \dots c_{1,r_1-1} = \dots = c_{k,1} = \dots c_{k,r_k-1} = 0.$$

Die ursprüngliche Relation wird eine Relation

$$c_{1,r_1} N^{r_1} \mathbf{v}_1 + \dots + c_{k,r_k} N^{r_k} \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

zwischen den letzten Vektoren der beteiligten Ketten. Diese sind linear unabhängig, und wir sehen $c_{1,r_1} = \dots = c_{k,r_k} = 0$. $\square$

Schritt 1: Wir wählen eine Basis von $B_{r-1} \subset Z$, etwa die Spaltenvektoren von N^{r-1} zu den Indizes $\nu_1, \dots, \nu_l$. Sie sind die Bilder $N^{r-1} \cdot \mathbf{e}_{\nu_i}$ der Einheitsvektoren $\mathbf{e}_{\nu_1}, \dots, \mathbf{e}_{\nu_l}$. Diese Einheitsvektoren sind deswegen Hauptvektoren der Stufe r und erzeugen Ketten der Länge r mit den gewählten Spaltenvektoren als letzten Vektoren. Wie wir eben bewiesen haben sind alle Kettenvektoren linear unabhängig.

Schritt k+1: Wir nehmen an, wir haben Ketten der Längen $r, r-1, \dots, r-k+1$ konstruiert, deren letzte Vektoren eine Basis von $B_{r-k} \cap Z$ sind. Wir ergänzen diese Basis zu einer Basis von $B_{r-k-1} \cap Z$ durch geeignete Linearkombinationen von Spaltenvektoren der Matrix N^{r-k-1} . Sie sind die Bilder unter N^{r-k-1} der entsprechenden Linearkombinationen von Einheitsvektoren, Hauptvektoren der Stufe $r-k$. Die von ihnen erzeugten Ketten der Länge $r-k$ nehmen wir zu unseren Ketten der Länge $> r-k$ hinzu und haben auf diese Weise Ketten der Längen $r, r-1, \dots, r-k$, deren letzte Vektoren eine Basis des Raums $B_{r-k-1} \cap Z$ bilden.

Nach dem Schritt $k = r$ (Ketten der Länge 1) haben wir eine Kettenbasis des $\mathbb{R}^n$ gefunden.

Beispiel 4.17 Wir betrachten die folgende nilpotente Matrix N und rechnen für ihre Potenzen N^i Basen der Bildräume B_i und der Durchschnitte $B_i \cap Z$ aus. Dazu benötigen wir natürlich die Information $Z = \text{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_5 - \mathbf{e}_6)$.

i	N^i	Basis von B_i	Basis von $B_i \cap Z$
1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4$	$\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$
2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$
3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$

Die vierte Potenz ist $N^4 = 0$.

Im ersten Schritt nehmen wir die Basis $\{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\}$ von $\text{Bild}(N^3)$. Wir sehen $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = N^3 \cdot \mathbf{e}_5$. Deswegen ist $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ letzter Vektor einer Kette

$$\mathbf{e}_5, N \cdot \mathbf{e}_5 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4, N^2 \cdot \mathbf{e}_5 = \mathbf{e}_3, N^3 \cdot \mathbf{e}_5 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$$

der Länge 4. Für $i = 2, 1$ enthält $B_i \cap Z$ keine weiteren Hauptvektoren der Stufe 1 als den bereits benutzten Vektor $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$. Anders ist es bei $\text{Bild}(N^0) = \mathbb{R}^6$. Um $\text{Kern}(N) = Z$ ganz zu erzeugen brauchen wir noch zwei Eigenvektoren, etwa $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_6$.

Insgesamt haben wir eine Kette der Länge vier und zwei Ketten der Länge 1. Mit ihnen bekommt man als Transformationsmatrix

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4.48 Sei

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

darstellende Matrix eines Endomorphismus $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ bzgl. der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^5$.

a) Bestimmen Sie Basen der Eigenräume zu den Eigenwerten von f .

b) Geben Sie eine Matrix M in Jordan-Normalform und eine Basis B des $\mathbb{R}^5$ an, so dass M die darstellende Matrix von f bzgl. B ist.

Aufgabe 4.49 Sei φ das Polynom $(t-1)^3(t+1)^2 \in \mathbb{C}[t]$.

a) Welche Jordanschen Normalformen treten bei komplexen 5×5 -Matrizen mit dem charakteristischen Polynom φ auf?

b) Zeigen Sie: Zwei komplexe 5×5 -Matrizen mit dem charakteristischen Polynom φ sind ähnlich, wenn ihre Minimalpolynome übereinstimmen.

4.4.3 Der reelle Fall

Jetzt sei $K = \mathbb{R}$ zugrunde gelegt. Es sei A eine reelle $n \times n$ -Matrix und $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ die zugehörigen $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung. Das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda)$ zerfällt in Linearfaktoren, die zu reellen Eigenwerten gehören, und in quadratische Faktoren $p(\lambda) = (a - \lambda)^2 + b^2$, $b > 0$, welche zu komplexen Nullstellen $a \pm ib$ gehören. In beiden Fällen sind die zugehörigen Haupträume $U_i \subset \mathbb{R}^n$ wohldefiniert (Satz 4.25/26) und führen auf eine direkte Matrizenzerlegung, welche zu A ähnlich ist. Ist λ_i ein reeller Eigenwert von A , so ist $\lambda_i \mathbb{I} - A$ auf dem zugehörigen Hauptraum nilpotent. Genau wie in Satz 4.29 findet man eine Basis von U_i aus reellen Ketten und eine direkte Summe von Jordan-Blöcken, welche die Abbildung $\Phi|_{U_i}$ beschreibt.

Anders ist es bei einem Hauptraum U zu einem Faktor $((a - \lambda)^2 + b^2)^r$. Wir wählen eine reelle Basis von U und identifizieren damit U mit dem $\mathbb{R}^{2r}$. Wir gehen über zu der darstellenden reellen $2r \times 2r$ -Matrix A für $\Phi|U : U \rightarrow U$. Nach der komplexen Theorie ist $\mathbb{C}^{2r} = H \oplus \bar{H}$ die direkte Summe zweier komplexer Haupträume zu komplexen Eigenwerten $a + bi$ und $a - bi$

$$H = \text{Kern}((a + bi)\mathbb{1}_{2r} - A) \quad \text{und} \quad \bar{H} = \text{Kern}((a - bi)\mathbb{1}_{2r} - A).$$

Diese beiden komplexen Haupträume sind konjugiert im folgenden Sinn:

$$\mathbf{v} \in H \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\mathbf{v}} \in \bar{H}.$$

Nach Satz 4.29 gibt es eine komplexe Basis für H , welche sich aus Ketten

$$\mathbf{v}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{v}_{k_1}^{(1)}, \dots, \mathbf{v}_1^{(l)}, \dots, \mathbf{v}_{k_l}^{(l)}, \quad k_1 + \dots + k_l = r,$$

zusammensetzt. Die dazu komplex-konjugierten Vektoren bilden eine Kettenbasis von $\bar{H}$. Die von diesen Ketten aufgespannten $\mathbb{C}$ -Untervektorräume bilden eine Φ -invariante direkte Summen-Zerlegung

$$H_1 \oplus \dots \oplus H_l \oplus \bar{H}_1 \oplus \dots \oplus \bar{H}_l = H \oplus \bar{H} = \mathbb{C}^n.$$

Auf jedem dieser Summanden hat Φ bezüglich der Kettenbasis als darstellende Matrix einen Jordan-Block.

Nimmt man die oben angegebenen n Kettenvektoren aus H als Spalten einer komplexen $2n \times n$ -Matrix, dann ist die komplexe $2n \times 2n$ -Matrix $(V, \bar{V})$ die Übergangsmatrix in die Kettenbasis von $H \oplus \bar{H}$. In diese Basis wird $\Phi : U \rightarrow U$ durch eine direkte Summe

$$\begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & \bar{J} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & J_l & & \\ & & & \bar{J}_1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \bar{J}_l \end{pmatrix}$$

von komplexen Jordan-Blöcken beschrieben.

Wir gehen von der Transformationsmatrix $(V, \bar{V})$ über zu

$$T := (V, \bar{V}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_n & -i \cdot \mathbb{1}_n \\ \mathbb{1}_n & i \cdot \mathbb{1}_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (V + \bar{V}, -i \cdot (V - \bar{V})) = (\sqrt{2} \text{Re}(V), \sqrt{2} \text{Im}(V)).$$

Diese Transformationsmatrix ist rein reell. Mit ihr finden wir

$$\begin{aligned} T^{-1} \cdot A \cdot T &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_n & \mathbb{1}_n \\ i \cdot \mathbb{1}_n & -i \cdot \mathbb{1}_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & \bar{J} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbb{1}_n & -i \mathbb{1}_n \\ \mathbb{1}_n & i \mathbb{1}_n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_n & \mathbb{1}_n \\ i \cdot \mathbb{1}_n & -i \cdot \mathbb{1}_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} J & -iJ \\ \bar{J} & i\bar{J} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} J + \bar{J} & -iJ + i\bar{J} \\ iJ - i\bar{J} & J + \bar{J} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Hier ist

$$\frac{1}{2}(J + \bar{J}) = \text{Re}(J), \quad \frac{1}{2}(-iJ + i\bar{J}) = \text{Im}(J).$$

Ändert man jetzt noch die Reihenfolge der Jordan-Blöcke in der obigen Block-Matrix derart, dass konjugierte Jordan-Blöcke J_k und $\bar{J}_k$ direkt aufeinander folgen, so hat man bewiesen:

Satz 4.32 (Reelle Jordan-Normalform) Jede reelle $n \times n$ -Matrix ist ähnlich zu einer direkten Matrizen­summe von reellen Jordanblöcken und von Summanden

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a & 1 & & & b & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \ddots & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & 1 & & & & b \\ & & & a & & & & \\ \hline -b & & & & a & 1 & & \\ & \ddots & & & & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & & & & \ddots & 1 \\ & & & -b & & & & a \end{array} \right).$$

Aufgabe 4.50 Gegeben sei die von einem Parameter $p \in \mathbb{R}$ abhängige Matrix

$$A(p) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & p \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von $A(p)$.
2. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von p die komplexe und die reelle Jordansche Normalform von $A(p)$.
3. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von p das Minimalpolynom von $A(p)$.

Aufgabe 4.51 Berechnen Sie direkt das charakteristische Polynom der reellen Matrix

$$\begin{pmatrix} a & 1 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ -b & 0 & a & 1 \\ 0 & -b & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.5 Die Hauptachsentransformation

4.5.1 Selbstadjungierte Matrizen

Wir kommen noch einmal zurück auf die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

aus Abschnitt 4.2 mit ihren Eigenvektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 + \sqrt{5} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 - \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Diese beiden Vektoren sind nicht nur linear unabhängig, sondern wegen der Relation

$$4 + (1 + \sqrt{5})(1 - \sqrt{5}) = 0$$

stehen sie sogar senkrecht aufeinander. Damit hat die Matrix C gleich zwei höchst bemerkenswerte Eigenschaften:

- Ihr charakteristisches Polynom hat zwei reelle Nullstellen,
- ihre zwei linear unabhängigen Eigenvektoren stehen aufeinander senkrecht.

Der gemeinsame Grund für beides ist eine Eigenschaft der Matrix C , welche wir bisher bei Matrizen noch nicht beachtet haben: Sie ist symmetrisch!

Unsere 2×2 -Matrix C ist deswegen symmetrisch, weil im System der beiden gekoppelten Federn die untere Masse dieselbe Kraft auf die obere ausübt (Eintrag rechts oben), wie die obere Masse auf die untere (Eintrag links unten in C). Dieses fundamentale Naturprinzip ist der Grund für die Symmetrie der Matrix C , und das hat für uns die genannten erfreulichen Konsequenzen. Weil reelle symmetrische Matrizen hermitesch sind, gilt nämlich nach Satz 4.8 a)

Satz 4.33 *Alle Eigenwerte einer reellen symmetrischen Matrix sind reell. Das charakteristische Polynom einer solchen Matrix zerfällt also in reelle Linearfaktoren.*

Beispiel 4.18 *Wir wollen uns das charakteristische Polynom einer reellen symmetrischen 2×2 -Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

einmal genauer ansehen. Das charakteristische Polynom ist

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - (a + c)\lambda + (ac - b^2).$$

Die quadratische Formel liefert die Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(a + c \pm \sqrt{(a + c)^2 - 4(ac - b^2)}) \in \mathbb{R}.$$

Wegen $(a + c)^2 - 4ac = (a - c)^2$ ist nämlich der Ausdruck unter der Wurzel

$$(a - c)^2 + 4b^2$$

eine Summe zweier Quadrate und damit positiv. Das für diese Argumentation wesentliche Quadrat b^2 steht hier nur deswegen, weil A symmetrisch ist. Wenn $n > 2$ ist, dann sind die Auswirkungen der Nicht-Diagonal-Einträge einer symmetrischen $n \times n$ -Matrix auf deren charakteristisches Polynom nicht mehr so einfach zu verfolgen, obwohl sich das Resultat der Überlegung ja (nach Satz 4.8 a) verallgemeinert.

Mit Satz 4.8 a) beweisen wir jetzt ganz leicht den Satz von der „Hauptachsentransformation“, einen der wichtigsten Sätze der ganzen Mathematik.

Satz 4.34 (Hauptachsentransformation) a) Zu jeder reellen symmetrischen Matrix S gibt es eine reelle orthogonale Matrix T derart, dass $T^{-1} \cdot S \cdot T$ eine Diagonalmatrix ist.

b) Zu jeder hermiteschen Matrix H gibt es eine unitäre Matrix U derart, dass $U^{-1} \cdot H \cdot U$ eine Diagonalmatrix ist.

Beweis. a) Wir beweisen die Behauptung für $n \times n$ -Matrizen S durch Induktion nach n . Für $n = 1$ (Induktionsanfang) ist nichts zu zeigen. Sei also $n \geq 2$.

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra besitzt die Matrix S sicher einen Eigenwert λ_1 , der nach Satz 4.8 a) reell ist. Es gibt also einen dazu gehörigen reellen Eigenvektor $\mathbf{v}_1$. Wir können ihn o.B.d.A. als normiert annehmen. Dann ergänzen wir $\mathbf{v}_1$ zu einer ONB $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}'_2, \dots, \mathbf{v}'_n$ des $\mathbb{R}^n$. Die Matrix

$$T_1 = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}'_2, \dots, \mathbf{v}'_n)$$

ist deswegen orthogonal und insbesondere invertierbar. Wir benutzen sie als Übergangsmatrix und finden

$$\begin{aligned} T_1^{-1} \cdot S \cdot T_1 &= T_1^t \cdot S \cdot T_1 && (\text{da } T_1 \text{ orthogonal}) \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^t \\ (\mathbf{v}'_2)^t \\ \vdots \\ (\mathbf{v}'_n)^t \end{pmatrix} \cdot S \cdot (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}'_2, \dots, \mathbf{v}'_n) \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^t \\ (\mathbf{v}'_2)^t \\ \vdots \\ (\mathbf{v}'_n)^t \end{pmatrix} \cdot (S \cdot \mathbf{v}_1, S \cdot \mathbf{v}'_2, \dots, S \cdot \mathbf{v}'_n) \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^t \cdot \lambda_1 \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1^t \cdot S \cdot \mathbf{v}'_2 & \dots & \mathbf{v}_1^t \cdot S \cdot \mathbf{v}'_n \\ (\mathbf{v}'_2)^t \cdot \lambda_1 \mathbf{v}_1 & (\mathbf{v}'_2)^t \cdot S \cdot \mathbf{v}'_2 & \dots & (\mathbf{v}'_2)^t \cdot S \cdot \mathbf{v}'_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbf{v}'_n)^t \cdot \lambda_1 \mathbf{v}_1 & (\mathbf{v}'_n)^t \cdot S \cdot \mathbf{v}'_2 & \dots & (\mathbf{v}'_n)^t \cdot S \cdot \mathbf{v}'_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & S_2 & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Da S symmetrisch ist, gilt

$$(T_1^t \cdot S \cdot T_1)^t = T_1^t \cdot S^t \cdot T_1 = T_1^t \cdot S \cdot T_1,$$

diese Matrix ist also wieder symmetrisch. Die *-Einträge in ihrer ersten Zeile sind deswegen alle $= 0$, und auch S_2 ist wieder symmetrisch. Nach Induktionsannahme gibt es nun eine orthogonale $(n-1) \times (n-1)$ -Matrix T_2 so, dass $T_2^{-1} \cdot S_2 \cdot T_2$ diagonal ist. Setzen wir

$$T := T_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} \in O(n, \mathbb{R}),$$

so ist $T^{-1} \cdot S \cdot T$ diagonal.

b) Wenn H hermitesch ist, geht der Beweis im Wesentlichen genauso, mit folgenden Modifikationen: Der erste Eigenvektor $\mathbf{v}_1 \in \mathbb{C}^n$ braucht jetzt nicht reell zu sein. Aber wir können ihn genauso als

normiert annehmen und zu einer ONB $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}'_2, \dots, \mathbf{v}'_n$ (bezüglich der Standard-hermiteschen Form auf $\mathbb{C}^n$) ergänzen. Die Matrix $U = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}'_2, \dots, \mathbf{v}'_n)$ ist dann unitär und

$$U^{-1} \cdot H \cdot U = U^\dagger \cdot H \cdot U$$

ist wieder hermitesch. Weiter verläuft die Induktion wie in a). $\square$

Die Spaltenvektoren der orthogonalen, bzw. unitären Matrix T , bzw. U , sind die Vektoren der neuen Basis, in der die Matrix S , bzw. H diagonalisiert ist. Da T orthogonal, bzw. U unitär ist, stehen diese Vektoren alle aufeinander senkrecht. Anscheinend war für die Induktion im Beweis von Satz 4.34 entscheidend, dass

$$T^t \cdot S \cdot T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & S_2 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Blockform hat. Diese Matrix beschreibt die durch S gegebene lineare Abbildung Φ im neuen Koordinatensystem. Man sieht deutlich, dass Φ nicht nur den Unterraum $U = \text{span}(\mathbf{v}_1) \subset \mathbb{K}^n$, sondern auch dessen orthogonales Komplement $U^\perp = \text{span}(\mathbf{v}'_2, \dots, \mathbf{v}'_n)$ invariant lässt. Diesen Gesichtspunkt verwenden wir für einen zweiten, nicht Matrix-basierten sondern strukturellen Beweis von Satz 4.34.

Satz 4.35 *Es sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit innerem Produkt $(\cdot, \cdot)$ und $\Phi : V \rightarrow V$ selbst-adjungiert. Dann gibt es eine ONB für V aus Eigenvektoren von Φ .*

Beweis. Aus dem Fundamentalsatz der Algebra folgt die Existenz eines Eigenwerts λ_1 , und damit auch eines Eigenvektors $\mathbf{v}_1$ für Φ . Im reellen Fall ist λ_1 und damit $\mathbf{v}_1$ reell. Wir setzen $U = \mathbb{K} \cdot \mathbf{v}_1 \subset V$ und müssen für den Induktionsschritt zeigen, dass $U^\perp$ unter Φ in sich selbst abgebildet wird. Sei dazu $\mathbf{u} \in U^\perp$, also $(\mathbf{v}_1, \mathbf{u}) = 0$. Dann ist auch

$$(\mathbf{v}_1, \Phi(\mathbf{u})) = (\Phi(\mathbf{v}_1), \mathbf{u}) = (\lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1, \mathbf{u}) = \lambda_1 \cdot (\mathbf{v}_1, \mathbf{u}) = 0.$$

Nach Induktionsannahme gibt es für die selbstadjungierte Abbildung $\Phi|_{U^\perp} : U^\perp \rightarrow U^\perp$ eine Orthonormalbasis $\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ aus Eigenvektoren, und $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ ist eine ONB für Φ . $\square$

Aufgabe 4.52 *Gegeben sei die Matrix*

$$S := \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{2} & -1 & \sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

- Zeigen Sie, dass die Matrix S den Eigenwert 1 besitzt.*
- Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren für die Matrix S .*

Aufgabe 4.53 *Sei A eine symmetrische, reelle 3×3 -Matrix, deren fünfte Potenz die Einheitsmatrix E ist. Man zeige $A = E$.*

Aufgabe 4.54 *Man zeige, dass genau eine der beiden Matrizen*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

das Quadrat einer reellen Matrix ist.

Aufgabe 4.55 Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A := \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

mittels einer orthogonalen Matrix S auf Diagonalform $D = S^{-1}AS$ gebracht werden kann, und geben Sie die Matrix D explizit an.

Aufgabe 4.56 Üben Sie auf die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

eine Hauptachsentransformation aus, d.h. bestimmen Sie eine Matrix $S \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, so dass $S^t AS$ diagonal ist.

4.5.2 Normale Matrizen

Definition 4.16 Es sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit innerem Produkt. Eine $\mathbb{K}$ -lineare Abbildung $\Phi : V \rightarrow V$ heißt normal, wenn

$$\Phi^\dagger \Phi = \Phi \Phi^\dagger.$$

Entsprechend heißt eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ normal, wenn

$$A^\dagger \cdot A = A \cdot A^\dagger.$$

Beispiel 4.19 Mit A ist auch jede Matrix $c \cdot A$ und $A + c \cdot \mathbb{1}_n$, $c \in \mathbb{C}$, normal. Alle unitären, hermiteschen oder anti-hermiteschen Matrizen sind normal.

Satz 4.36 Es sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit dem inneren Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $\Phi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V)$ normal.

a) Für alle $\mathbf{v} \in V$ gilt

$$\langle \Phi(\mathbf{v}), \Phi(\mathbf{v}) \rangle = \langle \Phi^\dagger(\mathbf{v}), \Phi^\dagger(\mathbf{v}) \rangle.$$

b) Es ist $\text{Kern}(\Phi) = \text{Kern}(\Phi^\dagger)$.

c) Ist $\mathbf{v}$ ein Eigenvektor von Φ zum Eigenwert λ , dann ist $\mathbf{v}$ auch Eigenvektor von $\Phi^\dagger$, und zwar zum Eigenwert $\bar{\lambda}$.

d) Eigenvektoren von Φ zu verschiedenen Eigenwerten stehen aufeinander senkrecht.

Beweis. a) Es ist

$$\langle \Phi(\mathbf{v}), \Phi(\mathbf{v}) \rangle = \langle \mathbf{v}, \Phi^\dagger \Phi(\mathbf{v}) \rangle = \langle \mathbf{v}, \Phi \Phi^\dagger(\mathbf{v}) \rangle = \langle \Phi^\dagger(\mathbf{v}), \Phi^\dagger(\mathbf{v}) \rangle.$$

b) Es ist

$$\mathbf{v} \in \text{Kern}(\Phi) \Leftrightarrow \langle \Phi(\mathbf{v}), \Phi(\mathbf{v}) \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \Phi^\dagger(\mathbf{v}), \Phi^\dagger(\mathbf{v}) \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} \in \text{Kern}(\Phi^\dagger).$$

c) Der Eigenvektor $\mathbf{v}$ gehört zum Kern der linearen Abbildung $\Phi - \lambda \text{id}$. Deren adjungierte Abbildung ist $\Phi^\dagger - \bar{\lambda} \text{id}$. Wegen b) gehört $\mathbf{v}$ zum Kern dieser Abbildung und ist ein Eigenvektor von $\Phi^\dagger$ zum Eigenwert $\bar{\lambda}$.

d) Es seien $\Phi(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$ und $\Phi(\mathbf{w}) = \mu \mathbf{w}$ mit $\lambda \neq \mu$. Damit folgt

$$\lambda \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \Phi(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \Phi^\dagger(\mathbf{w}) \rangle = \langle \mathbf{v}, \bar{\mu} \mathbf{w} \rangle = \bar{\mu} \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle,$$

und wegen $\lambda \neq \mu$ daraus $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$. □

Satz 4.37 (Hauptachsentransformation) *Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Für eine $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung $\Phi : V \rightarrow V$ sind äquivalent:*

- a) Φ ist normal.
- b) Es gibt eine ONB von V aus Eigenvektoren für Φ .

Beweis a) $\Rightarrow$ b): Wie im selbstadjungierten Fall machen wir Induktion nach $\dim(V)$. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra besitzt Φ einen Eigenwert λ und dazu einen Eigenraum $U \subset V$. Nach Satz 4.36 c) sind alle Vektoren $\mathbf{u} \in U$ Eigenvektoren von $\Phi^\dagger$, der Unterraum $U \subset V$ ist also auch $\Phi^\dagger$ -invariant.

Damit zeigen wir, dass $U^\perp$ unter Φ invariant ist. Sei also $\mathbf{v} \in U^\perp$. Dann ist $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = 0$ für alle $\mathbf{u} \in U$ und

$$\langle \Phi(\mathbf{v}), \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v}, \Phi^\dagger(\mathbf{u}) \rangle = 0$$

wegen $\Phi^\dagger(\mathbf{u}) \in U$. Vertauschen wir die Rollen von Φ und $\Phi^\dagger$, so sehen wir, dass $U^\perp$ auch unter $\Phi^\dagger$ invariant ist. Daraus folgt dann

$$(\Phi|_U)^\dagger = \Phi^\dagger|_U,$$

und weiter, dass $\Phi|_U$ normal ist.

Nach Induktionsannahme hat $U^\perp$ eine ONB aus Eigenvektoren für Φ . Mit einer ONB von U ergänzen wir sie zu einer ONB von V aus Eigenvektoren für Φ .

b) $\Rightarrow$ a): Wir gehen über zu einer ONB von V aus Eigenvektoren für Φ . In dieser Basis hat Φ als darstellende Matrix eine Diagonalmatrix D . Dann hat $\Phi^\dagger$ in dieser Basis die darstellende Matrix $\bar{D}$. Als Diagonalmatrizen kommutieren D und $\bar{D}$, und damit auch die von ihnen dargestellten linearen Abbildungen Φ und $\Phi^\dagger$. □

Satz 4.37 lautet für Matrizen:

Satz 4.38 *Die komplexe $n \times n$ -Matrix S ist genau dann normal, wenn es eine unitäre $n \times n$ -Matrix U und eine komplexe Diagonalmatrix D gibt mit*

$$S = T^{-1} \cdot D \cdot T.$$

Unitäre, bzw. hermitesche Operatoren $\Phi : V \rightarrow V$ sind spezielle normale Operatoren. Satz 4.37 zeigt

Satz 4.39 *Die Abbildung $\Phi : V \rightarrow V$ ist genau dann*

- a) *unitär, wenn es eine ONB aus Eigenvektoren für Φ gibt und alle Eigenwerte λ den Betrag $|\lambda| = 1$ haben;*
- b) *hermitesch, wenn es eine ONB aus Eigenvektoren für Φ gibt und alle Eigenwerte $\lambda = \bar{\lambda}$ reell sind.*

Satz 4.40 (Invariante Unterräume) *Es sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$ -Vektorraum mit innerem Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, und $\Phi : V \rightarrow V$ sei $\mathbb{C}$ -linear und normal. Nach Satz 4.37 ist V die orthogonale direkte Summe $E_1 \oplus \dots \oplus E_k$ der Eigenräume von Φ . Wir betrachten einen Φ -invarianten $\mathbb{C}$ -Unterraum $U \subset V$. Dann gilt*

- a) U ist die orthogonale direkte Summe der Eigenräume $U \cap E_i$ von $\Phi|_U$.*
- b) Mit U ist auch $U^\perp \subset V$ ein Φ -invarianter Unterraum. Die Unterräume U und $U^\perp$ sind auch unter $\Phi^\dagger$ invariant.*
- c) Die Einschränkung $\Phi|_U$ ist normal mit $(\Phi|_U)^\dagger = \Phi^\dagger|_U$.*

Beweis a) Weil V direkte Summe von Eigenräumen E_i ist, hat Φ als Minimalpolynom ein Produkt einfacher Linearfaktoren $(\lambda_1 - \lambda) \cdot \dots \cdot (\lambda_k - \lambda)$. Auch $\Phi|_U$ hat dann als Minimalpolynom ein Produkt einfacher Linearfaktoren. Die Haupträume aus Satz 4.25 für $\Phi|_U$ sind damit Eigenräume. Dies zeigt, dass U direkte Summe von Eigenräumen für $\Phi|_U$ ist. Jeder davon ist ein Durchschnitt $U \cap E_i$ mit einem Eigenraum $E_i \subset V$ von Φ . Deswegen ist dann auch die direkte Summe $\bigoplus U \cap E_i$ orthogonal.

b) Wir schreiben jeden Eigenraum $E_i \subset V$ als orthogonale direkte Summe $E_i = (U \cap E_i) \oplus F_i$. Dann ist

$$V = ((U \cap E_1) \oplus F_1) \oplus \dots \oplus ((U \cap E_k) \oplus F_k) = U \oplus (F_1 \oplus \dots \oplus F_k)$$

eine orthogonale direkte Summe, und $U^\perp = F_1 \oplus \dots \oplus F_k$ als direkte Summe von Eigenräumen für $\Phi|_{U^\perp}$ wieder Φ -invariant.

Weiter genügt es zu zeigen, dass U ein $\Phi^\dagger$ -invarianter Unterraum ist. Aber mit Satz 4.36 c) folgt dies, weil U orthogonale direkte Summe von Eigenräumen ist.

c) Nach b) ist U invariant unter $\Phi^\dagger$. Für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ ist aber

$$\langle \Phi|_U(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \langle \Phi(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \Phi^\dagger(\mathbf{v}) \rangle = \langle \mathbf{u}, \Phi^\dagger|_U(\mathbf{v}) \rangle.$$

Dies zeigt $(\Phi|_U)^\dagger = \Phi^\dagger|_U$. □

Es sei $\Phi : V \rightarrow V$ diagonalisierbar, d.h., es gebe eine Basis $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ aus Eigenvektoren. Die zugehörigen Eigenwerte seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Weiter sei $P_i, i = 1, \dots, n$, die Projektion $V \rightarrow \mathbb{K} \cdot \mathbf{v}_i$, deren Kern die direkte Summe $\text{span}\{\mathbf{v}_j\}_{j \neq i}$ ist. Dann gilt

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i.$$

Entsprechend gilt für die Eigenräume V_j mit zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ und die Projektionen $P_{V_j} : V \rightarrow V_j$ mit Kern $\bigoplus_{l \neq j} V_l$

$$\Phi = \sum_{j=1}^k \lambda_j P_{V_j}.$$

Definition 4.17 *Die eben angegebenen Summendarstellungen der diagonalisierbaren Abbildung Φ heißen Spektraldarstellung*

Bilden die Eigenvektoren sogar eine ONB, so sind die Projektionen P_i und P_{V_i} orthogonal. Die Spektraldarstellung verallgemeinert also die Orthogonalprojektion auf einen Unterraum U , wo nur die Eigenwerte 1 und 0 auftreten.

Aufgabe 4.57 Für welche Werte von $c \in \mathbb{C}$ ist die Matrix

$$M := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ c & 1 \end{pmatrix}$$

hermitesch, unitär bzw. normal?

Aufgabe 4.58 Entscheiden Sie, welche der folgenden drei Matrizen unitär, hermitesch, bzw. normal sind:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4.59 Zeigen Sie: Die komplexe 2×2 -Matrix

$$\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

ist genau dann normal, wenn $c = 0$.

4.5.3 Simultane Diagonalisierbarkeit

Satz 4.41 (Simultane Diagonalisierbarkeit) Für zwei normale $n \times n$ -Matrizen S_1 und S_2 sind äquivalent:

- a) Es gibt eine Orthonormalbasis des $\mathbb{K}^n$, deren Vektoren Eigenvektoren sowohl für S_1 als auch für S_2 sind.
- b) $S_1 \cdot S_2 = S_2 \cdot S_1$.

Beweis. a) $\Rightarrow$ b): Ist T die Übergangsmatrix in diese Orthonormalbasis, so sind also $D_1 := T^{-1}S_1T$ und $D_2 := T^{-1}S_2T$ beides Diagonalmatrizen. Diese kommutieren, und daraus folgt

$$S_1 \cdot S_2 = TD_1T^{-1} \cdot TD_2T^{-1} = T \cdot D_1D_2 \cdot T^{-1} = T \cdot D_2D_1 \cdot T^{-1} = TD_2T^{-1} \cdot TD_1T^{-1} = S_2 \cdot S_1.$$

„b) $\Rightarrow$ a)“ Nach dem Satz von der Hauptachsentransformation, Satz 4.37, gibt es eine Orthonormalbasis des $\mathbb{K}^n$ aus Eigenvektoren für S_1 . Die zugehörigen Eigenwerte brauchen nicht alle verschieden zu sein. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ die Verschiedenen unter den Eigenvektoren und $V_k := \{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n : S_2 \cdot \mathbf{v} = \lambda_k \cdot \mathbf{v}\} \subset \mathbb{K}^n, k = 1, \dots, m$, die zugehörigen Eigenräume. Es gibt also eine direkte Summenzerlegung

$$\mathbb{K}^n = V_1 \oplus \dots \oplus V_m$$

in paarweise orthogonale Eigenräume von S_1 .

Sei $\mathbf{v} \in V_k$. Aus b) folgt

$$S_1 \cdot (S_2 \cdot \mathbf{v}) = S_2 \cdot (S_1 \cdot \mathbf{v}) = S_2 \cdot \lambda_k \mathbf{v} = \lambda_k \cdot S_2 \cdot \mathbf{v}.$$

In Worten: Der Vektor $S_2 \cdot \mathbf{v}$ ist auch Eigenvektor von S_1 zum selben Eigenwert λ_k , also $S_2 \cdot \mathbf{v} \in V_k$. Da dies für beliebige Vektoren $\mathbf{v} \in V_k$ gilt, ist der Eigenraum V_k invariant unter der linearen Abbildung mit Matrix S_2 . Unsere orthogonale direkte Summen-Zerlegung ist also auch unter der linearen Abbildung $\mathbf{v} \mapsto S_2 \cdot \mathbf{v}$ invariant. Ist T eine Übergangsmatrix in eine Orthonormalbasis, welche dieser Zerlegung angepasst ist, so ist $T^{-1} \cdot S_2 \cdot T$ eine entsprechende Block-Diagonal-Matrix. Dabei sind

die Kästchen in dieser Matrix normal nach Satz 4.40, während die Kästchen in $T^{-1} \cdot S_1 \cdot T$ Vielfache der Einheitsmatrix sind. Jetzt wenden wir Satz 4.38 auf die einzelnen Kästchen in $T^{-1} \cdot S_2 \cdot T$ an und erhalten Orthonormalbasen der einzelnen Eigenräume V_k aus Eigenvektoren für S_2 . Die Vereinigung dieser Orthonormalbasen ist eine Orthonormalbasis des ganzen $\mathbb{K}^n$ aus Eigenvektoren für S_2 , die gleichzeitig Eigenvektoren für S_1 sind. $\square$

Nicht jede diagonalisierbare Matrix kann mit einer unitären Basistransformation diagonalisiert werden. Deswegen ist nicht jede diagonalisierbare Matrix normal. Satz 4.41 gilt aber allgemeiner für diagonalisierbare Matrizen, auf die Orthogonalität der Basen muss allerdings dabei verzichtet werden:

Satz 4.42 *Für zwei diagonalisierbare $n \times n$ -Matrizen S_1 und S_2 sind äquivalent:*

- a) *Es gibt eine Basis des $\mathbb{K}^n$ deren Vektoren Eigenvektoren sowohl für S_1 als auch für S_2 sind.*
- b) $S_1 \cdot S_2 = S_2 \cdot S_1$

Beweis. Die Richtung a) $\Rightarrow$ b) geht genau so, wie bei Satz 4.41. Sei also b) vorausgesetzt. Wir gehen über zu einer Basis aus Eigenvektoren für S_1 . Wie im Beweis von Satz 4.41 zeigt man auch hier, dass die Eigenräume für S_1 invariant sind unter der Multiplikationsabbildung Φ_2 mit Matrix S_2 .

Wir betrachten einen solchen Eigenraum V_i zum Eigenwert λ_i und die Einschränkung $\Phi_2|_{V_i}$. Nach Beispiel 4.12 besteht das Minimalpolynom von Φ_2 aus lauter verschiedenen Linearfaktoren. Das Minimalpolynom von $\Phi_2|_{V_i}$ teilt das Minimalpolynom von Φ_2 und enthält auch lauter verschiedene Linearfaktoren. Mit Beispiel 4.12 ist also $\Phi_2|_{V_i}$ diagonalisierbar. Jeder Eigenraum U_i von S_1 besitzt also eine Basis aus Eigenvektoren für S_2 . Alle diese Basen der U_i zusammen bilden eine Basis des $\mathbb{K}^n$ aus Eigenvektoren sowohl für S_1 als auch für S_2 . $\square$

Satz 4.42 kann man noch weiter verallgemeinern, von zwei kommutierenden diagonalisierbaren Matrizen auf beliebig viele. Dazu formulieren wir die Eigenschaft der simultanen Diagonalisierung etwas um:

Satz 4.43 (Lemma) *Für Matrizen $S_1, \dots, S_m \in M(n \times n, \mathbb{K})$ sind äquivalent:*

- a) *Es gibt eine Basis $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ von $\mathbb{K}^n$ aus Vektoren, welche Eigenvektoren für jedes $S_\mu, \mu = 1, \dots, m$, sind.*
- b) $\mathbb{K}^n = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$ ist die direkte Summe von Unterräumen $V_i = V_{i,1} \cap \dots \cap V_{i,m}$, welche Durchschnitte von Eigenräumen $V_{\mu,i}$ für S_μ sind.

Beweis a) $\Rightarrow$ b) (Induktion nach m): Die Eigenräume von S_1 werden von Eigenvektoren aufgespannt, welche zur gegebenen Basis gehören. Das ist der Induktionsanfang. Nehmen wir also an, $\mathbb{K}^n = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$ ist direkte Summe von Durchschnitten $V_i = V_{i,1} \cap \dots \cap V_{i,m-1}$ von Eigenräumen der Matrizen $S_1, \dots, S_{m-1}$. Hier wird jeder Unterraum V_i von Vektoren $\mathbf{v}_\nu$ aufgespannt, welche auch Eigenvektoren für S_m sind. Fasst man hier diejenigen Vektoren zusammen, welche zum gleichen Eigenwert für S_m gehören, so wird V_i eine direkte Summe von Durchschnitten des Unterraums V_i mit Eigenräumen von S_m . Fasst man alle diese Zerlegungen aller V_i zusammen, so erhält man eine Zerlegung der Art, wie sie in b) beschrieben ist.

b) $\Rightarrow$ a) ist klar, denn eine Basis von $\mathbb{K}^n$, welche an die Zerlegung angepasst ist, besteht aus Eigenvektoren für jede Matrix S_μ . $\square$

Satz 4.44 *Es sei $M \subset M(n \times n, \mathbb{K})$ eine Menge von Matrizen, welche alle diagonalisierbar sind. Dann sind äquivalent:*

- a) *Es gibt eine Basis von $\mathbb{K}^n$ aus Vektoren, welche Eigenvektoren für jedes $S \in M$ sind.*
- b) *Je zwei Matrizen $S_1, S_2 \in M$ kommutieren: $S_1 \cdot S_2 = S_2 \cdot S_1$.*

Beweis. Die Richtung a) $\Rightarrow$ b) geht genauso, wie in Satz 4.41 und 4.42. Nach Übergang in die Eigenvektor-Basis werden alle linearen Abbildungen mit darstellenden Matrizen $S \in M$ durch Diagonalmatrizen beschrieben und kommutieren. Dann kommutieren auch ihre darstellenden Matrizen bezüglich der ursprünglichen kanonischen Basis des $\mathbb{K}^n$.

b) $\Rightarrow$ a): Es sei $\text{span}(M) \subset M(n \times n, \mathbb{K})$ der von den Matrizen aus M aufgespannte $\mathbb{K}$ -Untervektorraum. Wir beweisen die Aussage a) durch Induktion nach $m := \dim(\text{span}(M))$. Ein simultaner Eigenvektor für jede Matrix $S \in M$ ist auch eine Eigenvektor für jede Matrix $S \in \text{span}(M)$.

Beim Induktionsschluss betrachten wir m linear unabhängige Matrizen $S_1, \dots, S_m \in M$. Nach Induktionsannahme gibt es eine Basis $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{K}^n$, welche aus simultanen Eigenvektoren für $S_1, \dots, S_{m-1}$ besteht und wegen Satz 4.43 auch eine direkte Summen-Zerlegung $\mathbb{K}^n = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$ mit Unterräumen $V_i = V_{i,1} \cap \dots \cap V_{i,m-1}$, welche Durchschnitte von Eigenräumen für die Matrizen $S_1, \dots, S_{m-1}$ sind. Wenn M in $\text{span}(S_1, \dots, S_{m-1})$ enthalten ist, sind wir fertig. Andernfalls gibt es eine Matrix $S_m \in M$, welche nicht zu $\text{span}(S_1, \dots, S_{m-1})$ gehört.

Für $\mu = 1, \dots, m-1$ folgt aus $S_\mu \cdot S_m = S_m \cdot S_\mu$ wie im Beweis von Satz 4.41, dass jeder Eigenraum von S_μ invariant unter S_m ist. Dann ist auch jeder Durchschnitt V_i von solchen Eigenräumen invariant unter S_m . Nach Satz 4.44 gibt es eine Basis von V_i , welche aus Eigenvektoren für S_m besteht. Setzt man alle diesen Basen der V_i zu einer Basis des $\mathbb{K}^n$ zusammen, so erhält man eine Basis aus simultanen Eigenvektoren für $S_1, \dots, S_m$. $\square$

Aufgabe 4.60 Gegeben seien die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:

- a) Beide Matrizen sind diagonalisierbar aber nicht normal.
- b) Die Matrizen A und B sind sogar simultan diagonalisierbar.
- c) Keine simultane Basis aus Eigenvektoren für A und B ist eine ONB.

4.6 Singulärwertzerlegung

Interpretiert man Satz 4.1 als Satz über Matrizen, so sagt er aus: Zu jeder $m \times n$ -Matrix $C \in M(m \times n, K)$ existiert eine invertierbare $m \times m$ -Matrix B und eine invertierbare $n \times n$ -Matrix A so, dass $C' = B^{-1} \cdot C \cdot A$ eine $m \times n$ -Matrix der Form

$$\underbrace{m \left\{ \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}}_n.$$

ist. Die Matrix C' ist ein Spezialfall einer verallgemeinerten Diagonalmatrix.

Definition 4.18 Eine $m \times n$ -Matrix $C = (c_{\mu,\nu})$ heißt verallgemeinerte Diagonalmatrix, wenn $c_{\mu,\nu} = 0$ für $\mu \neq \nu$. Sind die Diagonal-Elemente $\sigma_i, i = 1, \dots, \min\{m, n\}$, so schreiben wir $C = \text{diag}(\sigma_i)$.

Falls $m = n$ ist, dann ist eine solche Matrix eine Diagonalmatrix.

Hier wollen wir $K = \mathbb{R}$ voraussetzen und Satz 4.1 so spezialisieren, dass $B^{-1} = U$ und $A = V^t$ orthogonal sind.

Definition 4.19 Es sei M eine reelle $m \times n$ -Matrix. Eine Singulärwert-Zerlegung (SVD = singular value decomposition) von M ist eine Matrix-Faktorisierung

$$M = U \cdot \Sigma \cdot V^t,$$

wo U eine orthogonale $m \times m$ -Matrix, V eine orthogonale $n \times n$ -Matrix, und Σ eine verallgemeinerte Diagonalmatrix ist.

Ziel dieses Abschnitts ist es zu zeigen, dass eine solche SVD der Form $M = U \cdot \Sigma \cdot V^t$ für jede reelle $m \times n$ -Matrix M existiert. Zuerst aber befassen wir uns mit den Konsequenzen einer SVD. Es besteht ein enger Zusammenhang mit der Hauptachsentransformation der symmetrischen Matrizen $M \cdot M^t$ und $M^t \cdot M$.

In Satz 2.28 wurde gezeigt, dass die symmetrische $n \times n$ -Matrix $M^t \cdot M$ denselben Rang wie M hat. Dabei wurde sogar bewiesen: Die $n \times n$ -Matrix $M^t \cdot M$ und die $m \times n$ -Matrix M haben den gleichen Kern. Wendet man dies an auf die $n \times m$ -Matrix M^t , welche denselben Rang hat wie M , so sieht man: Die $m \times m$ -Matrix $M \cdot M^t$ hat denselben Rang wie M . Die $m \times m$ -Matrix $M \cdot M^t$ und die $n \times m$ -Matrix M^t haben denselben Kern. Es gilt sogar:

Satz 4.45 a) Ist $\mathbf{v}$ ein Eigenvektor von $M^t \cdot M$ zum Eigenwert $\lambda \neq 0$, so ist $M\mathbf{v}$ ein Eigenvektor für $M \cdot M^t$ zum gleichen Eigenwert.

b) Die symmetrischen Matrizen $M^t \cdot M$ und $M \cdot M^t$ haben die gleichen Eigenwerte $\neq 0$.

c) Jeder dieser Eigenwerte $\neq 0$ ist > 0 .

Beweis. a) Nach Voraussetzung ist $M^t \cdot M \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v}$. Daraus folgt

$$(M \cdot M^t) \cdot (M \cdot \mathbf{v}) = M \cdot (M^t \cdot M) \cdot \mathbf{v} = M \cdot (\lambda \cdot \mathbf{v}) = \lambda \cdot (M \cdot \mathbf{v}).$$

Wenn $\lambda \neq 0$ ist, dann ist $M \cdot \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ein Eigenvektor für die Matrix $M \cdot M^t$.

b) Nach a) ist jeder Eigenwert $\lambda \neq 0$ der Matrix $M^t \cdot M$ auch Eigenwert der Matrix $M \cdot M^t$. Ersetzt man M durch M^t , so erhält man die entsprechende Aussage für Eigenwerte $\lambda \neq 0$ der Matrix $M \cdot M^t$.

c) Es sei $(M^t M) \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v}$. Daraus folgt

$$\lambda \cdot (\mathbf{v}^t \mathbf{v}) = \mathbf{v}^t \cdot (M^t M) \cdot \mathbf{v} = (M\mathbf{v})^t \cdot (M\mathbf{v}) \geq 0.$$

Wenn $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ein Eigenvektor ist, folgt daraus $\lambda \geq 0$. □

Es sei $M = U \cdot \Sigma \cdot V^t$ eine SVD wie in Definition 4.19. Dann ist die symmetrische $n \times n$ -Matrix

$$M^t \cdot M = V \Sigma^t U^t \cdot U \Sigma V^t = V \cdot \Sigma^t \Sigma \cdot V^t$$

ähnlich zur Diagonalmatrix $\Sigma^t \Sigma$ und entsprechend die symmetrische $m \times m$ -Matrix $M \cdot M^t$ ähnlich zur Diagonalmatrix $\Sigma \Sigma^t$. Die Diagonaleinträge der Matrix Σ seien $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ mit $k = \min\{m, n\}$, also

$$\Sigma = \begin{matrix} & m \geq n \\ \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_k \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} & \text{oder} & \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \vdots & & 0 \\ & & \sigma_k & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \\ & n \geq m \end{matrix}$$

Es sei r der Rang von M . Dann ist also

$$r = \text{Rang}(M) = \text{Rang}(M^t) = \text{Rang}(\Sigma) = \text{Rang}(M^t \cdot M) = \text{Rang}(M \cdot M^t).$$

Wir können die Diagonalelemente von Σ so vertauschen, dass $\sigma_1, \dots, \sigma_r \neq 0$ und $\sigma_{r+1}, \dots, \sigma_k = 0$. Derartige Vertauschungen können bewirkt werden durch Multiplikation mit orthogonalen Elementarmatrizen vom Typ I von rechts und von links. Ebenso können wir erreichen

$$|\sigma_1| \geq |\sigma_2| \geq \dots \geq |\sigma_r|.$$

Eine Vorzeichen-Änderung bei σ_i wird bewirkt durch eine Multiplikation

$$\Sigma \cdot I, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & -1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist orthogonal, ebenso wie die Matrix $I \cdot V^t$. Wenn man V^t durch derartige Matrizen I abändert, kann man noch

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$$

erreichen.

Definition 4.20 Eine SVD der Form $M = U \cdot \Sigma \cdot V^t$ heißt normiert, wenn für die Diagonalelemente von Σ gilt

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0, \quad \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_k = 0.$$

Wenn M eine SVD zulässt, dann auch eine solche, welche normiert ist. Die Einträge $\neq 0$ in $\Sigma^t \cdot \Sigma$ ebenso wie in $\Sigma \cdot \Sigma^t$ sind deswegen $\sigma_1^2, \dots, \sigma_r^2$. Diese Zahlen sind auch die Eigenwerte $\neq 0$ der Matrix $M^t \cdot M$ bzw. $M \cdot M^t$, weil diese Matrix zu $\Sigma^t \cdot \Sigma$, bzw. $\Sigma \cdot \Sigma^t$ ähnlich ist. Da trifft es sich gut, dass die Eigenwerte $\lambda_i \neq 0$ der beiden Matrizen $M^t \cdot M$ und $M \cdot M^t$ gleich und > 0 sind (Satz 4.45).

Wenn eine SVD existiert, dann sind die Einträge $\neq 0$ von Σ Wurzeln

$$\sigma_i = \pm \sqrt{\lambda_i}$$

der Eigenwerte $\lambda_i \neq 0$. Dann existiert auch eine normierte SVD mit $\sigma_i = +\sqrt{\lambda_i}$.

Damit kennen wir die Zahlen σ_i in einer möglichen Singulärwert-Zerlegung. Aber auch die Transformationsmatrizen U und V können wir beschreiben: Aus

$$V^t \cdot M^t M \cdot V = \Sigma^t \Sigma$$

folgt, dass die Spalten von V Eigenvektoren der Matrix $M^t M$ zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0$ sein müssen, und die Zeilen von U ebensolche Eigenvektoren der Matrix $M M^t$. Wir wissen also, wie die SVD aussehen muss, wenn sie existiert. Jetzt müssen wir damit nur noch beweisen, dass sie existiert.

Satz 4.46 Zu jeder reellen $m \times n$ -Matrix gibt es eine normierte SVD

$$M = U \cdot \Sigma \cdot V^t, \quad U \in O(m \times m), V \in O(n \times n).$$

Beweis. Wir ordnen die (positiven) Eigenwerte von $M^t M$ und $M M^t$ der Größe nach an:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0, \quad \lambda_i = 0 \text{ für } i > r.$$

Wir wählen eine zugehörige ONB $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren für $M^t M$. Dann ist also

$$M^t \cdot M \cdot \mathbf{v}_i = \begin{cases} \lambda_i \mathbf{v}_i & (i = 1, \dots, r) \\ \mathbf{0} & (i = r + 1, \dots, n) \end{cases}$$

Insbesondere ist $M \mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$ für $i = 1, \dots, r$ und nach Satz 4.45 a) ein Eigenvektor für $M \cdot M^t$. Wir definieren

$$\mathbf{u}'_i := M \cdot \mathbf{v}_i \quad \text{für } i = 1, \dots, r.$$

Dann folgt für $i, j = 1, \dots, r$

$$\mathbf{u}_i^t \cdot \mathbf{u}'_j = (M \mathbf{v}_i)^t \cdot M \mathbf{v}_j = \mathbf{v}_i^t \cdot M^t M \mathbf{v}_j = \lambda_j \mathbf{v}_i^t \cdot \mathbf{v}_j = \lambda_i \delta_{i,j}.$$

Dies zeigt

$$\|\mathbf{u}'_i\|^2 = \lambda_i, \quad i = 1, \dots, r.$$

Wir normieren diese Vektoren zu

$$\mathbf{u}_i := \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \mathbf{u}'_i$$

und haben damit $M \cdot \mathbf{v}_i = \sigma \mathbf{u}_i$ für $i = 1, \dots, r$.

Weiter sind die Vektoren $\mathbf{u}'_1, \dots, \mathbf{u}'_r$ orthogonal, und die Vektoren $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$ orthonormal. Wir ergänzen sie zu einer ONB $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$ von $\mathbb{R}^m$. Für $i = r + 1, \dots, k = \min\{m, n\}$ haben wir dann $M \cdot \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \cdot \mathbf{u}_i$. Für die orthogonale $n \times n$ -Matrix $V = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ und die orthogonale $m \times m$ -Matrix $U = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m)$ bedeutet dies

$$M \cdot V = U \cdot \Sigma \quad \text{bzw.} \quad M = U \cdot \Sigma \cdot V^t$$

mit der $m \times n$ -Matrix $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0)$. □

Beispiel 4.20 (einfach) Wir suchen die SVD der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix

$$M^t \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 1$. Ihre positiven Wurzeln sind die Singulärwerte $\sigma_1 = 3$, $\sigma_2 = 2$, $\sigma_3 = 1$. Damit kennen wir die verallgemeinerte 3×4 -Diagonalmatrix $\Sigma = \text{diag}(3, 2, 1)$. Und die Matrix V hat als ihre Spalten die Eigenvektoren

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_4, \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_3, \mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_2,$$

die wir durch $\mathbf{v}_4 = \mathbf{e}_1$ zu einer ONB mit den Vektoren $\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1$ ergänzen. Damit haben wir

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M \cdot V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Weiter berechnen wir

$$\mathbf{u}'_1 = M\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{e}_3, \mathbf{u}'_2 = M\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{e}_2, \mathbf{u}'_3 = M\mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_3.$$

Die zugehörigen normierten Vektoren bilden die Spalten der Matrix

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die SVD unserer Matrix M ist also

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bei der normierten SVD der Matrix M treten wieder deren vier fundamentale Unterräume auf.

Satz 4.47 Ist $M = U \cdot \Sigma \cdot V^t$ eine normierte SVD, so ist

<i>im $\mathbb{R}^n$</i>		<i>im $\mathbb{R}^m$</i>	
$\text{Kern}(M)$	$= \text{span}(\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n)$	$\text{Kern}(M^t)$	$= \text{span}(\mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_m)$
$\text{Bild}(M^t)$	$= \text{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r)$	$\text{Bild}(M)$	$= \text{span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r)$
	$= \text{Zeilenraum}$		$= \text{Spaltenraum}$

Beweis. Für $i = r+1, \dots, n$ ist $V \cdot \mathbf{v}_i = \mathbf{e}_i$ und $\Sigma \cdot V \cdot \mathbf{v}_i = 0$. Die $n-r$ linear unabhängigen Vektoren $\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n$ liegen also im Kern von M , und weil dieser Kern die Dimension $n-r$ hat, spannen sie ihn auf. Wegen

$$U \cdot \Sigma = (\sigma_1 \mathbf{u}_1, \dots, \sigma_r \mathbf{u}_r, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})$$

liegen die r linear unabhängigen Vektoren $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$ im Bild von $U \cdot \Sigma$, und wegen $\text{Rang}(V) = n$ auch im Bild von $U \cdot \Sigma \cdot V^t$. Weil dieses Bild die Dimension r hat, spannen sie es auf. Die beiden anderen Aussagen erhält man aus den beiden bewiesenen Aussagen durch Übergang zu $M^t = V \cdot \Sigma^t \cdot U^t$. $\square$

Kennt man die SVD von M , so kann man leicht die Pseudo-Inverse von M angeben. Zunächst hat die $m \times n$ -Matrix

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

als Pseudoinverse die $n \times m$ -Matrix

$$\Sigma^+ := \begin{pmatrix} \sigma_1^{-1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_r^{-1} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Dies folgt aus der Charakterisierung in Satz 2.35, denn die $m \times m$ -Matrix $\Sigma \cdot \Sigma^+$ und die $n \times n$ -Matrix $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ sind symmetrisch von der Form

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Satz 4.48 *Es sei $M = U \cdot \Sigma \cdot V^t$ die SVD der $m \times n$ -Matrix M . Dann ist die Pseudoinverse dieser Matrix*

$$M^+ = V \cdot \Sigma^+ \cdot U^t.$$

Der Beweis folgt aus Satz 2.35 weil die Matrizen

$$M \cdot M^+ = (U \cdot \Sigma \cdot V^t) \cdot (V \cdot \Sigma^+ \cdot U^t) = U \cdot \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot U^t$$

$$M^+ \cdot M = (V \cdot \Sigma^+ \cdot U^t) \cdot (U \cdot \Sigma \cdot V^t) = V \cdot \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot V^t$$

symmetrisch sind mit

$$M \cdot M^+ \cdot M = U \cdot (\Sigma \Sigma^+) \cdot U^t \cdot U \cdot \Sigma \cdot V^t = U \cdot \Sigma \cdot V^t = M,$$

$$M^t \cdot M \cdot M^t = V \cdot (\Sigma^+ \Sigma) \cdot V^t \cdot V \cdot \Sigma^+ \cdot U^t = V \cdot \Sigma^+ \cdot U^t = M^+.$$

□

Aufgabe 4.61 a) Es sei $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: Die symmetrische $n \times n$ -Matrix $\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}^t$ hat den Eigenvektor $\mathbf{v}$ zum Eigenwert $\|\mathbf{v}\|^2$.

b) Berechnen Sie die SVD der 1×3 -Matrix $(1, 2, 2)$.

Aufgabe 4.62 Berechnen Sie die SVD und die Pseudoinversen der Matrizen

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M = \begin{pmatrix} -2 & 10 & -11 \\ 14 & 5 & 2 \\ 12 & -24 & -24 \\ 5 & -10 & -10 \end{pmatrix}.$$

(Hinweis: Die Berechnung von Matrizenprodukten und Eigenwerten kann durch den Computer erfolgen, nicht aber die Ermittlung der kompletten SVD.)

Aufgabe 4.63 Berechnen Sie die Singulärwerte der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

5 Bilinearformen

In Kapitel 4 wurde die Hauptachsentransformation besprochen. Und zwar unter dem Gesichtspunkt, dass symmetrische reelle Matrizen reell diagonalisiert werden können, und deswegen besonders angenehm sind. Jetzt nehmen wir einen etwas abstrakteren Standpunkt ein und geben der Hauptachsentransformation einen theoretischen Überbau. Wir führen dazu den Begriff der Bilinearform ein, der den Begriff des reellen Skalarprodukts verallgemeinert.

5.1 Bilinearformen

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K . In Abschnitt 3.5 vereinbarten wir, dass eine *Linearform* auf V eine lineare Abbildung

$$f : V \rightarrow K$$

ist.

Definition 5.1 Eine Bilinearform auf V ist eine Abbildung

$$\varphi : \begin{cases} V \times V & \rightarrow K \\ (\mathbf{v}, \mathbf{w}) & \mapsto \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \end{cases}$$

von zwei Argumenten $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, die in beiden Argumenten linear ist. D.h., für alle $c, c' \in K$ und $\mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathbf{w}, \mathbf{w}' \in V$ gelten die Rechenregeln

$$\begin{aligned} \varphi(c \cdot \mathbf{v} + c' \cdot \mathbf{v}', \mathbf{w}) &= c \cdot \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + c' \cdot \varphi(\mathbf{v}', \mathbf{w}) && \text{Linearität im ersten Argument,} \\ \varphi(\mathbf{v}, c \cdot \mathbf{w} + c' \cdot \mathbf{w}') &= c \cdot \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + c' \cdot \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}') && \text{Linearität im zweiten Argument.} \end{aligned}$$

Beispiel 5.1 Jede quadratische $n \times n$ -Matrix $G = (g_{k,l}) \in M(n \times n, K)$ definiert auf $V = K^n$ die Bilinearform

$$\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{v}^t \cdot G \cdot \mathbf{w} = \sum_{k,l=1}^n v^k \cdot g_{k,l} \cdot w^l.$$

Beispiel 5.2 Es sei $V = C^0[a, b]$ der $\mathbb{R}$ -Vektorraum der auf dem abgeschlossenen endlichen Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ stetigen Funktionen und

$$k : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion von zwei Variablen. Dann ist das Doppelintegral mit Integralkern k

$$\varphi(v, w) = \int_a^b \int_a^b v(x) k(x, y) w(y) dx dy$$

eine Bilinearform auf V .

Beispiel 5.3 Auf dem Vektorraum $V = M(r \times s, K)$ der $r \times s$ -Matrizen wird durch

$$\varphi(A, B) = \text{Sp}(A^t \cdot B) = \sum_{k=1}^s (A^t \cdot B)_k^k = \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^r A_l^k \cdot B_l^k$$

eine Bilinearform definiert.

Beispiel 5.4 Sind $f, g \in V^*$ Linearformen auf einem Vektorraum V , so heißt

$$f \otimes g : \begin{cases} V \times V & \rightarrow K \\ (\mathbf{v}, \mathbf{w}) & \mapsto f(\mathbf{v}) \cdot g(\mathbf{w}) \end{cases}$$

das Tensorprodukt der Linearformen f und g . Ein Tensorprodukt zweier Linearformen heißt auch zerfallende Bilinearform auf V .

Beispiel 5.5 Das Skalarprodukt $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ aus Abschnitt 1.5 ist eine Bilinearform auf dem $\mathbb{R}^n$.

Satz 5.1 (Raum der Bilinearformen) a) Die Bilinearformen auf einem K -Vektorraum V bilden wieder einen K -Vektorraum.

b) Ist $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ eine Basis, so ist jede Bilinearform φ auf V eindeutig festgelegt durch ihre Werte $\varphi(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_l)$ auf den Paaren von Basisvektoren.

c) Zu jeder Wahl einer $n \times n$ -Matrix $G = (g_{k,l})$ gibt es bei fixierter Basis $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ auch (genau) eine Bilinearform φ auf V mit $\varphi(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_l) = g_{k,l}$.

Beweis. a) Für zwei Bilinearformen φ, ψ auf V und zwei Skalare $a, b \in K$ definiert man durch

$$(a\varphi + b\psi)(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := a\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + b\psi(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

wieder eine Bilinearform $a\varphi + b\psi$ auf V .

b) Sind

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n x^k \mathbf{v}_k, \quad \mathbf{y} = \sum_{l=1}^n y^l \mathbf{v}_l$$

die Entwicklungen zweier Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ in der Basis so ist der Wert

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi\left(\sum_{k=1}^n x^k \mathbf{v}_k, \sum_{l=1}^n y^l \mathbf{v}_l\right) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n x^k y^l \varphi(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_l)$$

der Bilinearform φ auf dem Paar $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ eindeutig festgelegt durch die Entwicklungskoeffizienten x^k, y^l und die Werte $\varphi(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_l)$.

c) Bei gegebener Matrix $(g_{k,l})$ wird die Bilinearform φ definiert durch bilineare Ausdehnung

$$\varphi\left(\sum_{k=1}^n x^k \mathbf{v}_k, \sum_{l=1}^n y^l \mathbf{v}_l\right) := \sum_{k,l=1}^n x^k y^l g_{k,l}.$$

□

Definition 5.2 Die Matrix G aus Satz 5.1 c) heißt darstellende Matrix der Bilinearform φ bezüglich der Basis B . Ihre Determinante $D_B(G)$ heißt die Diskriminante der Bilinearform φ bezüglich der Basis B .

Die Aussage von Satz 5.1 kann auch so formuliert werden: Durch die Beziehung

$$\varphi\left(\sum_{k=1}^n x^k \mathbf{v}_k, \sum_{l=1}^n y^l \mathbf{v}_l\right) = (x^1, \dots, x^n) \cdot G \cdot \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$$

wird ein K -Vektorraum-Isomorphismus

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Raum der Bilinear-} \\ \text{formen auf } V \end{array} \right\} \rightarrow M(n \times n, K)$$

$$\varphi \mapsto G = (\varphi(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_l))_{k,l=1,\dots,n}$$

definiert.

Beispiel 5.6 Seien f, g Linearformen auf V , bezüglich einer Basis $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ gegeben durch Zeilenvektoren $\mathbf{a}^t = (a_1, \dots, a_n)$ und $\mathbf{b}^t = (b_1, \dots, b_n)$, d.h. also

$$f : \sum_1^n x^\nu \mathbf{v}_\nu \mapsto \sum_1^n a_\nu x^\nu, \quad g : \sum_1^n x^\nu \mathbf{v}_\nu \mapsto \sum_1^n b_\nu x^\nu.$$

Nach Definition ist

$$\begin{aligned} (f \otimes g) \left(\sum_1^n x^\mu \mathbf{v}_\mu, \sum_1^n y^\nu \mathbf{v}_\nu \right) &= f \left(\sum_1^n x^\mu \mathbf{v}_\mu \right) \cdot g \left(\sum_1^n y^\nu \mathbf{v}_\nu \right) \\ &= \left(\sum_1^n a_\mu x^\mu \right) \cdot \left(\sum_1^n b_\nu y^\nu \right) \\ &= \sum_{\mu, \nu=1}^n x^\mu \cdot a_\mu b_\nu \cdot y^\nu, \end{aligned}$$

die darstellende Matrix für $f \otimes g$ ist also

$$G = (a_\mu b_\nu) = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}.$$

Beispiel 5.7 Zum Skalarprodukt $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ auf dem $\mathbb{R}^n$ gehört in einer ONB als beschreibende Matrix die Einheitsmatrix.

Es sei $\dim(V) = n$ endlich. Genau wie jeder Endomorphismus $F : V \rightarrow V$ von V besitzt also auch jede Bilinearform $\varphi : V \times V \rightarrow K$ eine quadratische $n \times n$ -Matrix als darstellende Matrix. Fundamental anders ist aber das Transformationsverhalten der darstellenden Matrizen beim Basiswechsel:

$$\begin{array}{ll} \text{alte Basis:} & \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \\ \text{neue Basis:} & \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n, \quad \mathbf{w}_\mu = \sum_{\nu=1}^n a_\mu^\nu \mathbf{v}_\nu \end{array}$$

$$\text{Übergangsmatrix:} \quad A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} \text{alte darstellende Matrix:} & G = (\varphi(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_l)) \\ \text{neue darstellende Matrix:} & (\varphi(\mathbf{w}_\mu, \mathbf{w}_\nu)) = \left(\varphi \left(\sum_{k=1}^n a_\mu^k \mathbf{v}_k, \sum_{l=1}^n a_\nu^l \mathbf{v}_l \right) \right) \\ & = \left(\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_\mu^k a_\nu^l \cdot \varphi(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_l) \right) = A^t \cdot G \cdot A \end{array}$$

Wir haben also für

Bilinearformen	$A^t \cdot G \cdot A$	zweifach kovariantes
Endomorphismen	$A^{-1} \cdot G \cdot A$	kontravariantes und kovariantes

Transformationsverhalten. Während sich beim Übergang von einer Matrix M zu einer ähnlichen Matrix die Determinante $\det(M)$ nicht ändert, ändert sich die Diskriminante von Bilinearformen sehr wohl. Beim Übergang von der Basis $V = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ in die Basis $W = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$ wird

$$D_W(\varphi) = \det(A) \cdot D_V(\varphi) \cdot \det(A) = \det(A)^2 \cdot D_V(\varphi).$$

Auch Bilinearformen kann man als lineare Abbildungen auffassen, aber - entsprechend dem unterschiedlichen Transformationsverhalten - nicht als Abbildungen $V \rightarrow V$, sondern als Abbildungen $V \rightarrow V^*$:

Satz 5.2 *Es gibt einen kanonischen Vektorraum-Isomorphismus*

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Bilinearformen} \\ \text{auf } V \\ \varphi \end{array} \right\} \rightarrow \text{Hom}_K(V, V^*)$$

$$\varphi \mapsto \{F : \mathbf{v} \mapsto \varphi(\mathbf{v}, -)\}$$

Hierbei soll $\varphi(\mathbf{v}, -) \in V^*$ die Linearform

$$\mathbf{w} \mapsto \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

bedeuten, also die Bilinearform φ aufgefasst als Funktion des zweiten Arguments $\mathbf{w}$ bei festgehaltenem ersten Argument $\mathbf{v}$. Ist $\dim(V) = n$ endlich, dann bedeutet dieser abstrakte Isomorphismus einfach Folgendes: Nach Wahl einer Basis von V wird die Bilinearform φ durch eine Matrix G beschrieben. Die zugehörige lineare Abbildung $F : V \rightarrow V^*$ ordnet jedem Vektor

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in V$$

die Linearform zu, welche als Zeilenvektor

$$(x^1, \dots, x^n) \cdot G$$

geschrieben wird,

$$\varphi(\mathbf{v}, -) : \mathbf{w} \mapsto \mathbf{v}^t \cdot G \cdot \mathbf{w}.$$

Die Umkehrung der Zuordnung $\varphi \mapsto F$ ist

$$\text{Hom}_K(V, V^*) \ni F \mapsto \varphi, \quad \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \underbrace{(F(\mathbf{v}))}_{\in V^*}(\mathbf{w})$$

und damit ist die Abbildung vom Raum der Bilinearformen in den Vektorraum $\text{Hom}_K(V, V^*)$ bijektiv. $\square$

Der Rang der beschreibenden Matrix G ist unabhängig von der vorher ausgewählten Basis für V , da sich G beim Übergang in eine andere Basis in $A^t \cdot G \cdot A$ mit invertierbarer Matrix A ändert. Dies folgt auch daraus, dass er der Rang der - basisunabhängig definierten - Abbildung $F : V \rightarrow V^*$ ist. Dieser Rang heißt *der Rang der Bilinearform* φ .

Beispiel 5.8 Der Rang der zerfallenden Bilinearform $f \otimes g$ ist 1, da je zwei Zeilen der Matrix $(a_\mu b_\nu)$ linear abhängig sind. (Falls nicht f oder $g = 0$ und der Rang auch $= 0$ ist.)

Beispiel 5.9 Das Skalarprodukt $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ auf dem $\mathbb{R}^n$ ist eine Bilinearform mit maximalem Rang n .

Definition 5.3 Es seien φ und φ' Bilinearformen auf den K -Vektorräumen V und V' . Eine K -lineare Abbildung $\Psi : V \rightarrow V'$ heißt Isometrie, wenn

$$\varphi'(\Psi(\mathbf{v}), \Psi(\mathbf{w})) = \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad \text{für alle } \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V.$$

Beispiel 5.10 Die Isometrien $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf dem $\mathbb{R}^n$ mit dem euklidischen Skalarprodukt sind genau die orthogonalen Abbildungen.

Satz 5.3 Es sei V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum mit der nicht-entarteten Bilinearform φ .

a) Die Isometrien $\Psi : V \rightarrow V$ bezüglich φ bilden eine Gruppe. Insbesondere ist jede dieser Isometrien invertierbar.

b) Es sei $B = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ eine Basis von V und G_B die Gramsche Matrix von φ bezüglich dieser Basis. Die lineare Abbildung $\Psi : V \rightarrow V$ ist genau dann eine Isometrie, wenn für ihre darstellende Matrix A bezüglich der Basis B gilt

$$G_B = A^t \cdot G_B \cdot A.$$

Beweis. a) Die Identität ist eine Isometrie, sowie auch die Hintereinanderschaltung von Isometrien. Es reicht also zu zeigen, dass jede Isometrie Ψ invertierbar ist. (Ihre Inverse ist dann auch eine Isometrie.) Sei $\mathbf{v} \in \text{Kern}(\Psi)$. Dann ist

$$\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \varphi(\Psi(\mathbf{v}), \Psi(\mathbf{w})) = (\mathbf{0}, \Psi(\mathbf{w})) = 0 \quad \text{für alle } \mathbf{w} \in V.$$

Weil φ nicht-entartet ist, muss hier $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ sein. Deswegen ist Ψ injektiv und damit bijektiv.

b) Ψ ist genau dann eine Isometrie, wenn

$$\varphi(\Psi(\mathbf{v}_j), \Psi(\mathbf{v}_k)) = \varphi(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k)$$

für $j, k = 1, \dots, n$. Mit den Einträgen $(G_B)_{j,k} = \varphi(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k)$ der Gramschen Matrix und mit $A = (a_{j,k})$ wird für $j, k = 1, \dots, n$

$$\varphi(\Psi(\mathbf{v}_j), \Psi(\mathbf{v}_k)) = \varphi\left(\sum_{r=1}^n a_{r,j} \mathbf{v}_r, \sum_{s=1}^n a_{s,k} \mathbf{v}_s\right) = \sum_{r,s=1}^n a_{r,j} \varphi(\mathbf{v}_r, \mathbf{v}_s) a_{s,k} = (A^t \cdot G_B \cdot A)_{j,k}$$

Dies ist genau dann $(G_B)_{j,k}$, wenn $A^t \cdot G_B \cdot A = G_B$. □

5.1.1 Orthogonales Komplement

Definition 5.4 Sei φ eine feste Bilinearform auf dem Vektorraum V und $M \subset V$ eine beliebige Teilmenge. Wir nennen

$$M^\perp := \{\mathbf{v} \in V : \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0 \text{ für alle } \mathbf{w} \in M\}$$

das orthogonale Komplement von M bezüglich der Bilinearform φ . Speziell heißt

$$V^\perp = \{\mathbf{v} \in V : \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0 \text{ für alle } \mathbf{w} \in V\}$$

der Entartungsraum der Bilinearform φ .

Es ist klar, dass $M^\perp$ ein Untervektorraum von V ist. Mit dieser Definition wird die Definition des orthogonalen Komplements bezüglich des Skalarprodukts aus 1.5 auf beliebige Bilinearformen verallgemeinert.

Definition 5.5 Die Bilinearform φ heißt nicht-entartet (oder auch nicht-ausgeartet, oder regulär), wenn $V^\perp = \{0\}$, d.h., wenn zu jedem $0 \neq \mathbf{v} \in V$ ein $\mathbf{w} \in V$ existiert mit $\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \neq 0$.

Eine Bilinearform φ auf einem Vektorraum V der endlichen Dimension n ist genau dann nicht-entartet, wenn ihre darstellende Matrix G keinen Vektor $0 \neq \mathbf{w} \in K^n$ auf Null multipliziert, d.h., wenn $\text{Rang}(\varphi) = \text{Rang}(G) = n$ maximal ist. Dies ist äquivalent damit, dass die Abbildung $F : V \rightarrow V^*$ injektiv, und dann aus Dimensionsgründen bijektiv ist. Für eine Bilinearform φ auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum V ist also äquivalent:

- a) φ ist nicht entartet,
- b) zu jedem Vektor $0 \neq \mathbf{v} \in V$ existiert ein $\mathbf{w} \in V$ mit $\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \neq 0$,
- c) zu jeder Linearform $f \in V^*$ existiert ein $\mathbf{v} \in V$ mit $f(\mathbf{w}) = \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $\mathbf{w} \in V$,
- d) es gibt eine Basis B von V mit $D_B(\varphi) \neq 0$.
- e) für jede Basis B von V ist $D_B(\varphi) \neq 0$.

Beispiel 5.11 Hat φ als Gramsche Matrix eine Diagonalmatrix $G = \text{diag}(a_{1,1}, \dots, a_{n,n})$, so ist φ genau dann nicht entartet, wenn $a_{i,i} \neq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$. Insbesondere ist im Fall $V = K^n$ und

$$\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^n v_i w_i \quad \text{für} \quad \mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)^t, \mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)^t \in K^n$$

die Form φ nicht entartet.

Beispiel 5.12 Die Form auf dem K^2 mit der Gramschen Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ist nicht-entartet. Ihre Einschränkung auf den Unterraum $U = K \cdot (1, 1)$ ist identisch $= 0$ und deswegen entartet.

Satz 5.4 a) Es sei φ eine Bilinearform auf dem Vektorraum V , die auf dem endlich-dimensionalen Untervektorraum $U \subset V$ nicht-entartet ist. Dann besitzt V eine orthogonale direkte Summen-Zerlegung

$$V = U \oplus U^\perp.$$

b) Es sei φ nicht-entartet auf dem endlich-dimensionalen Vektorraum V und $U \subset V$. Dann ist

$$\dim(U^\perp) = \dim(V) - \dim(U), \quad U^{\perp\perp} = U.$$

c) Ist φ nicht-entartet auf V und auf dem endlich-dimensionalen Unterraum U , dann ist auch φ auf $U^\perp$ nicht entartet.

Beweis. a) Für beliebiges $\mathbf{v} \in V$ ist die Abbildung

$$U \ni \mathbf{u} \mapsto \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \in K$$

eine Linearform auf U . Nach Voraussetzung gibt es deswegen einen Vektor $\mathbf{v}_0 \in U$ mit $\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{v}_0, \mathbf{u})$ für alle $\mathbf{u} \in U$. Also ist $\varphi(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0, \mathbf{u}) = 0$ für alle $\mathbf{u} \in U$, d.h. $\mathbf{v} - \mathbf{v}_0 \in U^\perp$. Somit schreibt sich jeder Vektor $\mathbf{v} \in V$ als $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)$ mit $\mathbf{v}_0 \in U$ und $\mathbf{v} - \mathbf{v}_0 \in U^\perp$. Die beiden Unterräume U und $U^\perp \subset V$ spannen also V auf.

Wir müssen noch zeigen: $U \cap U^\perp = \{\mathbf{0}\}$. Sei daher $\mathbf{v} \in U \cap U^\perp$. Wegen $\mathbf{v} \in U^\perp$ gilt $\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0$ für alle $\mathbf{u} \in U$. Weil φ auf U nicht-entartet ist, folgt daraus $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

b) Weil V endlich-dimensional ist, gibt es eine direkte Summen-Zerlegung $V = U \oplus U'$ und eine zugehörige Projektion $\pi : V \rightarrow U$. Ist $f \in U^*$ eine Linearform auf U , so ist $f \circ \pi \in V^*$ mit $f \circ \pi|_U = f$. Die Einschränkung-Abbildung $V^* \rightarrow U^*$ ist also surjektiv. Der Unterraum $U^\perp \subset V$ ist der Kern der linearen Abbildung

$$V \xrightarrow{F} V^* \rightarrow U^*, \quad \mathbf{v} \mapsto \varphi(\mathbf{v}, -) \mapsto \varphi(\mathbf{v}, -)|_U.$$

Weil diese Abbildung surjektiv ist, folgt

$$\dim(U^\perp) = \dim(V) - \dim(U)$$

aus der Dimensionsformel.

Die Inklusion $U \subset U^{\perp\perp}$ ist offensichtlich. Zweimalige Anwendung der bewiesenen Dimensionsformel zeigt

$$\dim(U^{\perp\perp}) = \dim(V) - \dim(U^\perp) = \dim(U),$$

und damit folgt $U^{\perp\perp} = U$.

c) Es sei $\mathbf{w} \in U^\perp$ mit $\varphi(\mathbf{w}, \mathbf{v}_1) = 0$ für alle $\mathbf{v}_1 \in U^\perp$. Jedes $\mathbf{v} \in V$ schreibt sich aber nach a) als $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ mit $\mathbf{v}_1 \in U^\perp$ und $\mathbf{v}_2 \in U$. Daraus folgt

$$\varphi(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{w}, \mathbf{v}_1) + \varphi(\mathbf{w}, \mathbf{v}_2) = 0$$

für alle $\mathbf{v} \in V$. Weil φ auf V nicht-entartet vorausgesetzt ist, muss $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ gelten. □

Als wichtiges Beispiel orthogonaler Unterräume diskutieren wir die Haupträume aus 4.3.3 für spezielle komplexe Matrizen. Sei also $K = \mathbb{C}$ und φ eine Bilinearform auf $\mathbb{C}^n$.

Definition 5.6 Die komplexe $n \times n$ -Matrix A heißt bezüglich φ

- symmetrisch, wenn

$$\varphi(A \cdot \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}, A \cdot \mathbf{v})$$

- orthogonal, wenn A invertierbar ist und

$$\varphi(A \cdot \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}, A^{-1} \cdot \mathbf{v})$$

für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$.

Beispiel 5.13 Die Standard-Bilinearform auf $\mathbb{C}^n$ ist

$$\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{\nu=1}^n u_\nu v_\nu.$$

Hierfür ist A genau dann symmetrisch, wenn $A = A^t$ und A orthogonal, wenn $A \cdot A^t = \mathbb{1}_n$.

Wir betrachten also ein komplexe $n \times n$ -Matrix A . Ihr charakteristisches Polynom ist Produkt von Linearfaktoren

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{r_1} \cdot (\lambda_k - \lambda)^{r_k}, \quad r_1 + \dots + r_k = n,$$

Mit voneinander verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Nach Satz 4.25 ist $\mathbb{C}^n = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$ direkte Summe der Haupträume

$$U_i = \{\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n : (\lambda_i \mathbb{1}_n - A)^{r_i} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}\}.$$

Ist $\mathbf{u} \in U_i$ ein Hauptvektor der Stufe $m > 1$, so ist $(\lambda_i - A) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}_1$ ein Hauptvektor der Stufe $m - 1$, bzw.

$$A \cdot \mathbf{u} = \lambda_i \mathbf{u} - \mathbf{u}_1.$$

Durch Induktion zeigt man für $\mu \geq 1$

$$A^\mu \cdot \mathbf{u} = A \cdot A^{\mu-1} \cdot \mathbf{u} = A \cdot (\lambda_i^{\mu-1} \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mu-1}) = \lambda_i^\mu \mathbf{u} - \lambda_i^{\mu-1} \mathbf{u}_1 - A \cdot \mathbf{u}_{\mu-1} = \lambda_i^\mu \mathbf{u} - \mathbf{u}_\mu$$

mit einem Hauptvektor $\mathbf{u}_\mu = \lambda_i^{\mu-1} \mathbf{u}_1 + A \cdot \mathbf{u}_{\mu-1} \in U_i$ der Stufe $m - 1$. Dies ist das wichtigste Hilfsmittel beim Induktionsbeweis für folgenden Satz

Satz 5.5 (Orthogonale Haupträume) *Die Haupträume U_i und $U_j \subset \mathbb{C}^n$ sind bezüglich φ orthogonal, wenn*

- a) *A symmetrisch und $\lambda_i \neq \lambda_j$, oder*
- b) *A orthogonal und $\lambda_i \neq 1/\lambda_j$.*

Beweis. Es sei $\mathbf{u} \in U_i$ ein Hauptvektor der Stufe m und $\mathbf{v} \in U_j$. Wir beweisen $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ durch Induktion nach m . Wir setzen $r = r_j$. Dann ist also $(\lambda_j - A)^r \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Obwohl die Beweise der Fälle a) und b) sehr ähnlich sind, wollen wir sie hier getrennt darstellen.

a) Sei also A symmetrisch. Dann ist

$$\varphi((\lambda_j \mathbb{1}_n - A) \cdot \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}, (\lambda_j \mathbb{1}_n - A) \cdot \mathbf{v})$$

oder allgemeiner für alle $\rho \geq 1$

$$\varphi((\lambda_j \mathbb{1}_n - A)^\rho \cdot \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}, (\lambda_j \mathbb{1}_n - A)^\rho \cdot \mathbf{v}).$$

Insbesondere ist

$$\varphi((\lambda_j \mathbb{1}_n - A)^r \cdot \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}, (\lambda_j \mathbb{1}_n - A)^r \cdot \mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{0}) = 0.$$

Wir verwenden die binomische Formel

$$(\lambda_j \mathbb{1}_n - A)^r \cdot \mathbf{u} = \sum_{\rho=0}^r \binom{r}{\rho} (-1)^\rho \lambda_j^{r-\rho} A^\rho \cdot \mathbf{u}.$$

Induktionsanfang $m = 1$: Hier ist $(\lambda_i \mathbb{1}_n - A) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$, $A \cdot \mathbf{u} = \lambda_i \cdot \mathbf{u}$, und $A^\rho \cdot \mathbf{u} = \lambda_i^\rho \mathbf{u}$ für alle $\rho \geq 0$. Obige binomische Entwicklung wird

$$(\lambda_j - A)^r \cdot \mathbf{u} = (\lambda_j - \lambda_i)^r \cdot \mathbf{u}.$$

Damit wird

$$(\lambda_j - \lambda_i)^r \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \varphi((\lambda_j \mathbb{1}_n - A)^r \cdot \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}, (\lambda_j \mathbb{1}_n - A)^r \cdot \mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{0}) = 0.$$

Induktionsschluss $m \geq 2$: Jetzt ist

$$A^\rho \cdot \mathbf{u} = \lambda_i^\rho \mathbf{u} - \mathbf{u}_\rho$$

mit einem Hauptvektor $\mathbf{u}_\rho$ der Stufe $m - 1$. Die binomische Entwicklung wird

$$\sum_{\rho=0}^r \binom{r}{\rho} (-1)^\rho \lambda_j^{r-\rho} (\lambda_i^\rho \mathbf{u} - \mathbf{u}_\rho) = (\lambda_j - \lambda_i)^r \mathbf{u} - \mathbf{u}'$$

mit einem Hauptvektor $\mathbf{u}' \in U_i$ der Stufe $m - 1$. Nach Induktionsannahme ist $\varphi(\mathbf{u}', \mathbf{v}) = 0$. Damit folgt

$$(\lambda_j - \lambda_i)^r \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \varphi((\lambda_j \mathbb{1}_n - A)^r \cdot \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \varphi(\mathbf{u}', \mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}, (\lambda_j \mathbb{1}_n - A)^r \cdot \mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{0}) = 0$$

und $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ wegen $(\lambda_j - \lambda_i)^r \neq 0$.

b) Jetzt ist A orthogonal, also $\varphi(A \cdot \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}, A^{-1} \cdot \mathbf{v})$. Das bringt Komplikationen. Aber für $\mathbf{v} \in U_j$ ist jetzt

$$\left(\frac{1}{\lambda_j} \mathbb{1}_n - A^{-1} \right)^r \cdot \mathbf{v} = \left(\frac{1}{\lambda_j} A^{-1} \cdot (A - \lambda_j \mathbb{1}_n) \right)^r \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{\lambda_j^r} A^{-r} \cdot (A - \lambda_j \mathbb{1}_n)^r \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Wir werden also

$$\varphi \left(\left(\frac{1}{\lambda_j} \mathbb{1}_n - A \right)^r \mathbf{u}, \mathbf{v} \right) = \varphi \left(\mathbf{u}, \left(\frac{1}{\lambda_j} \mathbb{1}_n - A^{-1} \right)^r \cdot \mathbf{v} \right) = \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{0}) = 0$$

benutzen. Die binomische Formel dafür ist

$$\left(\frac{1}{\lambda_j} \mathbb{1}_n - A \right)^r \cdot \mathbf{u} = \sum_{\rho=0}^n \binom{r}{\rho} (-1)^\rho \lambda_j^{r-\rho} A^\rho \cdot \mathbf{u}.$$

Induktionsanfang $m = 1$: Wir berechnen

$$\left(\frac{1}{\lambda_j} - \lambda_i \right)^r \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \varphi \left(\left(\frac{1}{\lambda_j} \mathbb{1}_n - A \right)^r \cdot \mathbf{u}, \mathbf{v} \right) = \varphi \left(\left(\mathbf{u}, \frac{1}{\lambda_j} - A^{-1} \right)^r \cdot \mathbf{v} \right).$$

Wegen $1/\lambda_j \neq \lambda_i$ folgt daraus $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$.

Induktionsschluss $m \geq 2$: Die binomische Entwicklung wird

$$\sum_{\rho=1}^r \binom{r}{\rho} (-1)^\rho \lambda_j^{r-\rho} (\lambda_i^\rho \mathbf{u} - \mathbf{u}_\rho) = \left(\frac{1}{\lambda_j} - \lambda_i \right)^r \mathbf{u} - \mathbf{u}'.$$

Damit erhalten wir

$$\left(\frac{1}{\lambda_j} - \lambda_i \right)^r \cdot \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \varphi \left(\left(\frac{1}{\lambda_j} \mathbb{1}_n - A \right)^r \cdot \mathbf{u}, \mathbf{v} \right) + \varphi(\mathbf{u}', \mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}, \left(\frac{1}{\lambda_j} - A^{-1} \right)^r \cdot \mathbf{v}) = 0$$

und $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ wegen $1/\lambda_j \neq \lambda_i$. □

Beispiel 5.14 Die reelle Drehmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

ist orthogonal im üblichen Sinn und damit auch orthogonal bezüglich der Bilinearform $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2$ auf $\mathbb{C}^2$. Ihre Eigenwerte sind $\lambda_{1,2} = \cos(\alpha) \pm i \cdot \sin(\alpha)$ mit den Eigenvektoren $(1, \pm i)^t$. Wegen

$$\varphi((1, i)^t, (1, -i)^t) = 1 - i^2 = 2 \neq 0$$

sind diese Eigenvektoren nicht orthogonal. Aber es ist ja auch $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$. Andererseits ist

$$\varphi((1, i)^t, (1, i)^t) = 1 + i^2 = 0,$$

wie es wegen $\lambda_1 \cdot \lambda_1 \neq 1$ sein muss.

5.1.2 Symmetrietypen

Definition 5.7 Eine Bilinearform auf dem Vektorraum V heißt

$$\begin{array}{ll} \text{symmetrisch, wenn} & \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \varphi(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \\ \text{antisymmetrisch, wenn} & \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\varphi(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \end{array}$$

für alle Vektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

Beispiel 5.15 Ist φ auf K^n durch seine beschreibende Matrix G gegeben, d.h. $\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{v}^t \cdot G \cdot \mathbf{w}$, dann ist φ genau dann symmetrisch, wenn $G = G^t$, und antisymmetrisch genau dann, wenn $G = -G^t$.

Beispiel 5.16 Es sei $V = C^0[a, b]$ der $\mathbb{R}$ -Vektorraum der auf $[a, b] \subset \mathbb{R}$ stetigen reellen Funktionen und $k : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Das Doppelintegral mit Integralkern k

$$\varphi(v, w) = \int_a^b \int_a^b v(x) \cdot k(x, y) \cdot w(y) \, dx dy$$

ist eine Bilinearform auf V . Diese ist (anti-) symmetrisch wenn für ihren Integralkern gilt $k(y, x) = (-)k(x, y)$. Ist k symmetrisch und

$$k(x, y) \geq k_0 > 0 \quad \text{für alle} \quad (x, y) \in [a, b] \times [a, b],$$

so ist diese Form sogar ein Skalarprodukt.

Beispiel 5.17 Für zwei Linearformen $f, g \in V^*$ ist

$$f \wedge g = f \otimes g - g \otimes f : (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto f(\mathbf{v})g(\mathbf{w}) - f(\mathbf{w})g(\mathbf{v})$$

anti-symmetrisch.

Satz 5.6 (Symmetrie-Zerlegung) *Es sei K ein Körper mit $\frac{1}{2} \in K$. Dann schreibt sich jede Bilinearform auf einem K -Vektorraum auf genau eine Weise als*

$$\varphi = S\varphi + \Lambda\varphi$$

mit einer symmetrischen Bilinearform $S\varphi$ und einer antisymmetrischen Bilinearform $\Lambda\varphi$.

Beweis. Existenz: Wir definieren $S\varphi$ und $\Lambda\varphi$ durch

$$S\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \frac{1}{2}(\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \varphi(\mathbf{w}, \mathbf{v})) \quad \text{symmetrisch}$$

$$\Lambda\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \frac{1}{2}(\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) - \varphi(\mathbf{w}, \mathbf{v})) \quad \text{antisymmetrisch}$$

und haben dann

$$\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = S\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \Lambda\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

Eindeutigkeit: Ist $\varphi = \varphi_S + \varphi_\Lambda$ eine Zerlegung von φ in eine symmetrische und eine antisymmetrische Bilinearform, dann ist

$$\frac{1}{2}(\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \varphi(\mathbf{w}, \mathbf{v})) = \frac{1}{2}(\underbrace{\varphi_S(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \varphi_S(\mathbf{w}, \mathbf{v})}_{=2\varphi_S(\mathbf{v}, \mathbf{w})} + \underbrace{\varphi_\Lambda(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \varphi_\Lambda(\mathbf{w}, \mathbf{v})}_{=0})$$

$$\frac{1}{2}(\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) - \varphi(\mathbf{w}, \mathbf{v})) = \frac{1}{2}(\underbrace{\varphi_S(\mathbf{v}, \mathbf{w}) - \varphi_S(\mathbf{w}, \mathbf{v})}_{=0} + \underbrace{\varphi_\Lambda(\mathbf{v}, \mathbf{w}) - \varphi_\Lambda(\mathbf{w}, \mathbf{v})}_{=2\varphi_\Lambda(\mathbf{v}, \mathbf{w})}),$$

und somit ist sowohl φ_S als auch φ_Λ durch φ schon eindeutig festgelegt. $\square$

Für die beschreibende Matrix G einer Bilinearform bedeutet die Aussage von Satz 5.5 nichts anderes als die ziemlich triviale Identität

$$G = \frac{1}{2}(G + G^t) + \frac{1}{2}(G - G^t).$$

Definition 5.8 *Jede Bilinearform φ auf einem K -Vektorraum V definiert eine Funktion von einem Argument $\mathbf{v} \in V$ durch*

$$q_\varphi : V \rightarrow K, \quad q_\varphi(\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v}).$$

Diese Funktion q_φ heißt die quadratische Form zur Bilinearform φ .

Beispiel 5.18 *Das euklidische Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ definiert die quadratische Form*

$$\sum_{\nu=1}^n (x^\nu)^2 = \|\mathbf{x}\|^2.$$

Die Minkowski-Form auf dem $\mathbb{R}^4$ aus der Relativitäts-Theorie

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2$$

ist die quadratische Form zur Bilinearform mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Diese quadratische Form braucht sehr wenig Information über ihre Bilinearform zu enthalten.

Beispiel 5.19 Es sei $2 \neq 0$ in K und φ eine alternierende Bilinearform auf dem Vektorraum K . Dann ist für alle $\mathbf{v} \in V$

$$q_\varphi(\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = -\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0.$$

Aber für eine symmetrische Bilinearform ist der Zusammenhang mit ihrer quadratischen Form sehr eng.

Satz 5.7 (Polarisationsformel) Es sei φ eine symmetrische Bilinearform auf dem K -Vektorraum V über einem Körper K mit $2 \neq 0$. Dann gilt für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

$$\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{1}{2} (q_\varphi(\mathbf{v} + \mathbf{w}) - q_\varphi(\mathbf{v}) - q_\varphi(\mathbf{w})).$$

Insbesondere ist die Bilinearform φ durch ihre quadratische Form q_φ eindeutig bestimmt.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} q_\varphi(\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= \varphi(\mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) \\ &= \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \varphi(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + \varphi(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \\ &= 2 \cdot \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \varphi(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \end{aligned}$$

□

Die gleiche Rechnung haben wir schon einmal benutzt (Satz 2.2), wo wir damit zeigten, dass die Längentreue der orthogonalen Abbildungen deren Winkeltreue impliziert.

Aufgabe 5.1 Es sei V der $\mathbb{R}$ -Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 und φ die Bilinearform

$$\varphi(f, g) := \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$$

auf V . Bestimmen Sie die darstellende Matrix von φ in Bezug auf die Basis $1, x, x^2$.

Aufgabe 5.2 Es sei V der $\mathbb{R}$ -Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 1 . Bestimmen Sie in Bezug auf die Basis $1, x$ die darstellende Matrix der Bilinearform

a) $\varphi(f, g) := \int_0^1 \int_0^1 (x + y)f(x)g(y) dx dy,$

b) $\psi(f, g) := \int_0^1 \int_0^1 (x - y)f(x)g(y) dx dy.$

c) Bestimmen Sie eine Basis von V , bezüglich der φ eine darstellende Matrix in Diagonalform hat.

Aufgabe 5.3 Es sei φ eine Bilinearform auf dem endlich-dimensionalen K -Vektorraum V . Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen:

1) $\text{Rang}(\varphi) \leq k$.

2) Es gibt $f_1, g_1, \dots, f_k, g_k \in V^*$ mit $\varphi = f_1 \otimes g_1 + \dots + f_k \otimes g_k$.

Aufgabe 5.4 Es seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, V ein n -dimensionaler K -Vektorraum und β eine nicht-ausgeartete Bilinearform auf V . Für $v, w \in V$ werde ein Endomorphismus $f_{v,w}$ von V definiert durch

$$f_{v,w}(x) := \beta(v, x)w \quad (x \in V).$$

a) Bestimmen Sie den Rang von $f_{v,w}$.

b) Zeigen Sie: $\text{spur } f_{v,w} = \beta(v, w)$.

c) Beweisen Sie: Für Basen $v_1, \dots, v_n$ und $w_1, \dots, w_n$ von V ist

$$f := \sum_{i=1}^n f_{v_i, w_i}$$

ein Automorphismus von V .

Aufgabe 5.5 Es bezeichne $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^3$ die Standardbasis und

$$\mathbf{a}_1 := (1, 1, 0), \quad \mathbf{a}_2 := (0, 1, 1), \quad \mathbf{a}_3 := (1, 0, 1).$$

a) Es bezeichne φ die Bilinearform auf dem $\mathbb{R}^3$ mit $\varphi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{i,j}$. Bestimmen Sie die darstellende Matrix von φ in der Basis $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$.

b) Es bezeichne ψ die Bilinearform auf dem $\mathbb{R}^3$ mit $\psi(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = \delta_{i,j}$. Bestimmen Sie die darstellende Matrix von ψ in der Standardbasis.

5.2 Symmetrische Bilinearformen

Wir betrachten hier symmetrische Bilinearformen auf dem $\mathbb{K}^n$. Daren Gramsche Matrix G (bezüglich jeder Basis des $\mathbb{K}^n$ ist symmetrisch. Im Fall $K = \mathbb{R}$ haben wir in Satz 4.34 bewiesen: Es gibt eine orthogonale Transformationsmatrix T so, dass $T^{-1} \cdot G \cdot T$ eine Diagonalmatrix ist. Weil T orthogonal ist, gilt $T^{-1} = T^t$ und

$$T^{-1} \cdot G \cdot T = T^t \cdot G \cdot t$$

ist die Gramsche Matrix von φ in der Basis, welche zur Transformationsmatrix T gehört. Nach Übergang zu dieser Basis ist die Bilinearform

$$\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{\nu=1}^n \lambda_{\nu} v^{\nu} w^{\nu}, \quad \mathbf{v} = (v^1, \dots, v^n)^t, \mathbf{w} = (w^1, \dots, w^n)^t.$$

Hier geben wir einen neuen Beweis für diese Diagonalisierungseigenschaft. Er hat den Nachteil, dass er keine Aussage macht über die Art der verwendeten Transformation T . Er hat aber zwei Vorteile:

- 1: Er ist wesentlich einfacher als der Beweis für die Hauptachsentransformation.
- 2: Er funktioniert über jedem Körper K der Charakteristik $\neq 2$.

Satz 5.8 (Diagonalisierung symmetrischer Bilinearformen, $\frac{1}{2} \in K$) Es sei φ eine symmetrische Bilinearform auf dem endlich-dimensionalen K -Vektorraum V , wobei $\frac{1}{2} \in K$. Dann gibt es eine Basis $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ mit $\varphi(\mathbf{v}_{\mu}, \mathbf{v}_{\nu}) = 0$ für $\mu \neq \nu$. In dieser Basis hat φ also die darstellende Matrix

$$\begin{pmatrix} q_{\varphi}(\mathbf{v}_1) & & & \\ & q_{\varphi}(\mathbf{v}_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & q_{\varphi}(\mathbf{v}_n) \end{pmatrix}.$$

Beweis (Induktion nach $\dim(V) = n$). Für $\dim(V) = 1$ (Induktionsanfang) ist nichts zu zeigen.

Sei also $n \geq 2$ und die Behauptung werde als bewiesen angenommen für alle K -Vektorräume W mit $\dim(W) < \dim(V)$. Wenn $\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$ ist für alle Vektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, dann hat φ die Nullmatrix als darstellende Matrix, und da diese Diagonalform besitzt, sind wir fertig. Andernfalls gibt es wegen der Polarisationsformel (Satz 5.7) aber einen Vektor $\mathbf{v}_1 \in V$ mit $q_\varphi(\mathbf{v}_1) = \varphi(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) \neq 0$. Auf dem ein-dimensionalen Unterraum $K \cdot \mathbf{v}_1 \subset V$ ist die Bilinearform φ nicht entartet. Nach Satz 5.4 a) gibt es dann eine orthogonale direkte Summen-Zerlegung

$$V = K \cdot \mathbf{v}_1 \oplus \mathbf{v}_1^\perp$$

mit $\dim(\mathbf{v}_1^\perp) = n-1$. Nach Induktionsannahme gibt es also eine Basis $\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbf{v}_1^\perp$ mit $\varphi(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_l) = 0$ für $2 \leq k < l \leq n$. Da nach Konstruktion $\varphi(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_l) = 0$ für $l = 2, \dots, n$, hat die Basis $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ die gewünschte Diagonalisierungseigenschaft. $\square$

Präzisierungen von Satz 5.8, denen wir uns jetzt zuwenden wollen, hängen vom Grundkörper K ab.

Satz 5.9 (Diagonalisierung symmetrischer Bilinearformen, $K = \mathbb{R}$) *Zu jeder reellen symmetrischen $n \times n$ -Matrix G gibt es eine invertierbare reelle Matrix $A \in GL(n, \mathbb{R})$ so, dass $A^t \cdot G \cdot A$ eine Diagonalmatrix ist, welche auf der Diagonale nur Einträge ± 1 und 0 enthält:*

$$A^t \cdot G \cdot A = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_p & & \\ & -\mathbb{1}_m & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Wegen Satz 5.8 können wir o.B.d.A. annehmen, dass die Matrix

$$G = \begin{pmatrix} g_1 & & \\ & \ddots & \\ & & g_n \end{pmatrix}$$

schon in Diagonalform vorliegt. Durch gleichzeitige Multiplikation von rechts und links mit Elementarmatrizen

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 0 & . & \dots & . & 1 \\ & & & . & 1 & & & . \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & . & & & 1 & . \\ & & & 1 & . & \dots & . & 0 \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} = E^t = E^{-1}$$

kann man die Diagonaleinträge noch vertauschen. Danach können wir

$$g_1 > 0, \dots, g_p > 0, \quad g_{p+1} < 0, \dots, g_{p+m} < 0, \quad g_{p+m+1} = \dots = g_n = 0$$

annehmen. Dann definieren wir eine reelle invertierbare Diagonalmatrix A mit Diagonaleinträgen

$$a_1^1 = \frac{1}{\sqrt{g_1}}, \quad \dots, \quad a_p^p = \frac{1}{\sqrt{g_p}},$$

$$a_{p+1}^{p+1} = \frac{1}{\sqrt{-g_{p+1}}}, \quad \dots, \quad a_{p+m}^{p+m} = \frac{1}{\sqrt{-g_{p+m}}},$$

$$a_{p+m+1}^{p+m+1} = \dots = a_n^n = 1$$

und finden

$$A^t \cdot G \cdot A = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_p & & \\ & -\mathbb{1}_m & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad \square$$

Die Zahl $p+m$ der Diagonaleinträge $\neq 0$ ist der Rang von G . Die Summe $p+m$ ist also unabhängig von der gewählten Diagonalisierung von G stets gleich. Dies gilt aber auch für die Zahlen p und m selbst:

Satz 5.10 (Sylvesterscher Trägheitssatz) *Sei G eine symmetrische reelle $n \times n$ -Matrix. Dann sind die Zahlen p der Einträge $= +1$ und m der Einträge $= -1$ in einer Diagonalisierung von G nach Satz 5.9 unabhängig von der gewählten Diagonalisierung, nur abhängig von der Matrix G selbst.*

Beweis. Da $p+m = \text{Rang}(G)$ unabhängig von der Diagonalisierung ist, genügt es zu zeigen, dass etwa p nicht von der Diagonalisierung abhängt. Seien also $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ und $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ zwei Basen für V , in denen die Bilinearform zu G die Gestalt aus Satz 5.9 hat. Und zwar sei:

in der Basis	Anzahl der Einträge $= +1$	Anzahl der Einträge $= -1$
$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$	p	m
$\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$	p'	m'

Falls nicht $p = p'$ und $m = m'$, dann nehmen wir o.B.d.A. an dass $p > p'$ gelte. Wir betrachten die Untervektorräume

$$U_1 := \text{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p) \quad \dim(U_1) = p$$

$$U_2 := \text{span}(\mathbf{w}_{p'+1}, \dots, \mathbf{w}_n) \quad \dim(U_2) = n - p'$$

Aus der Dimensionsformel folgt

$$\dim(U_1 \cap U_2) \geq \dim(U_1) + \dim(U_2) - n = p - p' \geq 1.$$

Der Durchschnitt $U_1 \cap U_2$ besteht also nicht nur aus dem Nullvektor. Für jeden Vektor $0 \neq \mathbf{v} \in U_1 \cap U_2$ gilt aber

$$\mathbf{v}^t \cdot G \cdot \mathbf{v} > 0 \text{ weil } \mathbf{v} \in U_1 \quad \mathbf{v}^t \cdot G \cdot \mathbf{v} \leq 0 \text{ weil } \mathbf{v} \in U_2$$

Damit haben wir einen Widerspruch zu $p > p'$. $\square$

Definition 5.9 *Das Paar (p, m) heißt die Signatur der symmetrischen reellen Matrix G (bzw. der zugehörigen symmetrischen Bilinearform). Die Differenz $p - m$ heißt Trägheitsindex.*

Die Sätze 5.9 und 5.10 zusammen können auch so formuliert werden: Seien G und H zwei symmetrische reelle Matrizen, dann

$$\begin{array}{l} \text{existiert eine invertierbare} \\ \text{reelle Matrix } A \\ \text{mit } H = A^t \cdot G \cdot A \end{array} \iff G \text{ und } H \text{ haben die gleiche Signatur}$$

Die Zahl p kann auch interpretiert werden als die größte Dimension eines Untervektorraums $U \subset V$ mit der Eigenschaft: für alle Vektoren $0 \neq \mathbf{u} \in U$ ist $\mathbf{u}^t \cdot G \cdot \mathbf{u} > 0$. Analog kann man m charakterisieren.

Über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist die Situation noch einfacher, weil man hier aus jeder Zahl die Wurzel ziehen kann:

Satz 5.11 (Diagonalisierung symmetrischer Matrizen, $K = \mathbb{C}$) Sei G eine symmetrische komplexe $n \times n$ -Matrix vom Rang n . Dann existiert eine invertierbare $n \times n$ -Matrix A mit

$$A^t \cdot G \cdot A = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Beweis verläuft ganz wie der Beweis von Satz 5.9, nur dass wir keine Rücksicht darauf zu nehmen brauchen, ob die Diagonal-Einträge g_ν positiv oder negativ reell, oder komplex sind. Man kann aus jeder komplexen Zahl eine komplexe Wurzel ziehen!

Aufgabe 5.6 a) Finden Sie die symmetrischen Bilinearformen zu den quadratischen Formen

$$q(x, y) = x^2, \quad x^2 - y^2, \quad 2xy, \quad (x + y)^2$$

auf $\mathbb{R}^2$.

b) Zeigen Sie: die quadratische Form

$$q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

gehört genau dann zu einer nicht-entarteten symmetrischen Bilinearform, wenn

$$b^2 \neq ac.$$

Aufgabe 5.7 Bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ sei eine Bilinearform b durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Man gebe eine Basis von $\mathbb{R}^3$ an, bezüglich der b Diagonalform hat.

Aufgabe 5.8 Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{R}).$$

Wieviele negative Eigenwerte hat tSAS ?

Aufgabe 5.9 Auf dem Vektorraum V aller Polynome P des Grades höchstens drei über $\mathbb{R}$ betrachten wir die symmetrische Bilinearform

$$B(P_1, P_2) = P_1(1)P_2(2) + P_1(2)P_2(1).$$

a) Bestimmen Sie den Unterraum $V_0 = \{P \in V \mid B(P, Q) = 0 \text{ für alle } Q \in V\}$ von V .

b) Geben Sie eine bezüglich B orthogonale Basis von V an.

Aufgabe 5.10 Zeigen Sie: Für eine symmetrische Bilinearform φ auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent:

1) $\text{Rang}(\varphi) \leq 2$.

2) $\varphi = S(f \otimes g)$ mit $f, g \in V^*$.

5.2.1 Definitheit

Definition 5.10 Eine symmetrische Bilinearform φ auf dem reellen Vektorraum V heißt

positiv definit	falls	$\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0$ für alle $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in V$
positiv semi-definit	falls	$\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0$ für alle $\mathbf{v} \in V$
negativ definit	falls	$\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) < 0$ für alle $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in V$
negativ semi-definit	falls	$\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \leq 0$ für alle $\mathbf{v} \in V$
indefinit	falls	φ weder positiv noch negativ semi-definit.

Die Form φ ist also genau dann positiv definit, wenn die Form $-\varphi$ negativ definit ist. Ist $\dim(V) = n$ endlich und hat φ die Signatur (p, m) , so ist φ

positiv definit	$\Leftrightarrow$	$p = n$
positiv semi-definit	$\Leftrightarrow$	$m = 0$
negativ definit	$\Leftrightarrow$	$m = n$
negativ semi-definit	$\Leftrightarrow$	$p = 0$
indefinit	$\Leftrightarrow$	$p > 0$ und $m > 0$

Beispiel 5.20 Das euklidische Skalarprodukt $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ auf dem Zahlenraum $\mathbb{R}^n$ ist positiv definit. Die Minkowski-Form auf $\mathbb{R}^4$ hat die Signatur $(3, 1)$ und ist deswegen indefinit.

Für jede Matrix A ist die Matrix $A^t \cdot A$ symmetrisch und positiv semidefinit.

Ist $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ ein System von Vektoren, so ist deren Gramsche Matrix $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle$ symmetrisch und positiv semidefinit. Für jeden Vektor $\mathbf{x}$ ist ja

$$\mathbf{x}^t \cdot (\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle) \cdot \mathbf{x} = \left\langle \sum_{i=1}^k x_i \mathbf{v}_i, \sum_{j=1}^k x_j \mathbf{v}_j \right\rangle = \left\| \sum_{i=1}^k x_i \mathbf{v}_i \right\|^2.$$

Satz 5.12 Es sei $S \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch.

a) S ist genau dann positiv (semi-) definit, wenn alle seine Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ (bzw. ≥ 0) sind.

b) Ist S positiv definit, so ist es invertierbar und auch S^{-1} ist positiv definit.

c) Ist S positiv (semi-) definit, dann gibt es eine eindeutig bestimmte symmetrische positiv (semi-) definite Wurzel R von S , d.h. eine Matrix R mit $R^2 = S$.

Beweis. a) Nach Satz 4.34 a) (Hauptachsentransformation) gibt es eine orthogonale Matrix T so, dass $T^{-1}ST = T^tST = D$ eine Diagonalmatrix ist. S ist genau dann positiv (semi-) definit, wenn D dies ist. Und weil die Eigenwerte von S die Diagonalelemente von D sind, ist dies genau dann der Fall, wenn alle $\lambda_i > 0$, bzw. ≥ 0 sind.

b) Wenn S und damit D positiv definit ist, dann sind all $\lambda_i > 0$, die Matrix D ist invertierbar mit der Inversen $D^{-1} = \text{diag}(1/\lambda_i)$. Diese ist positiv definit und damit auch $S^{-1} = TD^{-1}T^{-1}$.

c) Existenz: Wir definieren $D^{1/2} := \text{diag}(\sqrt{\lambda_i})$. Dann ist $D^{1/2}$ positiv (semi-) definit mit $(D^{1/2})^2 = D$. Wir setzen $R := TD^{1/2}T^{-1}$. Dann ist R symmetrisch positiv (semi-) definit mit

$$R^2 = (TD^{1/2}T^{-1}) \cdot (TD^{1/2}T^{-1}) = T(D^{1/2}D^{1/2})T^{-1} = TDT^{-1} = S.$$

Eindeutigkeit: Die beiden symmetrischen Matrizen R und S sind diagonalisierbar. Wegen $S = R^2$ kommutieren sie und sind nach Satz 4.42 simultan diagonalisierbar. Es gibt also Diagonalmatrizen $D = T^{-1} \cdot S \cdot T = \text{diag}(\lambda_i)$ und $C = T^{-1} \cdot R \cdot T = \text{diag}(\mu_i)$ mit $\mu_i \geq 0$. Aus $S = R^2$ folgt wie üblich $D = C^2$. Für die Zahlen μ_i gibt es nur die Möglichkeit $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$ (Wurzel ≥ 0). Damit ist C und dann auch R eindeutig bestimmt. $\square$

Beispiel 5.21 (Gegen-) Für jedes $0 \neq a \in \mathbb{R}$ ist

$$R := \begin{pmatrix} 0 & 1/a \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

eine Matrix mit $R^2 = \mathbb{1}_2$. Aber für $a \neq \pm 1$ ist R nicht symmetrisch und für $a = \pm 1$ nicht definit.

Die Frage nach der Definitheit reeller symmetrischer Matrizen ist wichtig bei der Untersuchung differenzierbarer Funktionen $f(x^1, \dots, x^n)$ mehrerer Variablen $x^1, \dots, x^n$ auf lokale Extrema. Die *Hessematrix*

$$H_f(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l}(x) \right)$$

ist eine symmetrische reelle Matrix. Wenn $\text{grad}(f)[\mathbf{x}] = \mathbf{0}$, dann gilt:

$$\begin{array}{ll} H_f(\mathbf{x}) \text{ positiv definit} & \Rightarrow \mathbf{x} \text{ lokales Minimum für } f, \\ H_f(\mathbf{x}) \text{ negativ definit} & \Rightarrow \mathbf{x} \text{ lokales Maximum für } f, \\ H_f(\mathbf{x}) \text{ indefinit} & \Rightarrow \mathbf{x} \text{ weder lokales Max. noch Min. für } f. \end{array}$$

Ein handliches Kriterium zum Erkennen der Eigenschaft 'positiv definit' oder 'negativ definit' ist deswegen von beachtlichem praktischen Interesse.

Satz 5.13 (Haupt-Minoren-Kriterium, Hurwitz-Kriterium) Es sei G eine reelle symmetrische $n \times n$ -Matrix mit den linken oberen Untermatrizen

$$G_\nu := (g_{k,l})_{k,l=1,\dots,\nu}.$$

Dann gilt

$$G \text{ positiv definit} \quad \Leftrightarrow \quad \det(G_\nu) > 0 \text{ für alle } \nu = 1, \dots, n.$$

(Die Unterdeterminanten $\det(G_\nu)$ heißen Hauptminoren von G .)

Beweis. „ $\Rightarrow$ “: Die symmetrische $\nu \times \nu$ -Matrix G_ν definiert eine symmetrische quadratische Form auf dem $\mathbb{R}^\nu \subset \mathbb{R}^n$, der von den ersten ν Basisvektoren aufgespannt wird, nämlich

$$\mathbb{R}^\nu \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^t \cdot G_\nu \cdot \mathbf{x}.$$

Diese Form ist die Einschränkung der durch G definierten Form auf $\mathbb{R}^\nu$ und deswegen positiv definit. Es genügt also zu zeigen: Ist die symmetrische Matrix G positiv definit, dann gilt $\det(G) > 0$.

Nach Satz 5.9 gibt es zu der positiv-definiten Matrix G aber eine invertierbare Matrix A so, dass

$$A^t \cdot G \cdot A = \mathbb{1}.$$

Aus dem Determinanten-Multiplikations-Satz folgt daher

$$\det(G) = \frac{1}{\det(A)^2} > 0.$$

„ $\Leftarrow$ “ (Induktion nach n): Da alle Hauptminoren von G_{n-1} positiv sind, ist die Matrix G_{n-1} positiv definit nach Induktionsannahme. Wir bezeichnen mit $U \subset \mathbb{R}^n$ den Unterraum, der von den ersten $n-1$ Basisvektoren aufgespannt wird. Die eingeschränkte Form $\varphi|_{U \times U}$ hat die Gramsche Matrix G_{n-1} , ist positiv definit und insbesondere nicht-entartet.

Nach Satz 5.4 a) ist $\mathbb{R}^n = U \oplus U^\perp$ eine orthogonale direkte Summe. Wir gehen zu einer neuen Basis des $\mathbb{R}^n$ über, indem wir den Vektor $\mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$ ersetzen durch einen erzeugenden Vektor $\mathbf{e}'_n$ von $U^\perp$. In dieser neuen Basis hat φ die Gramsche Matrix

$$G' = \left(\begin{array}{c|c} G_{n-1} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0}^t & g \end{array} \right).$$

Ist T die Übergangsmatrix, so ändert sich zwar $\det(G)$ in $\det(G') = \det(T)^2 \cdot \det(G)$, aber das Vorzeichen der Determinante ändert sich nicht. Also ist auch

$$\det(G') = \det(G_{n-1}) \cdot g > 0.$$

Wegen $\det(G_{n-1}) > 0$ folgt daraus $g > 0$. Dann ist für alle Vektoren $\mathbf{v} = (\mathbf{u}, t \cdot \mathbf{e}'_n)$, $\mathbf{u} \in U, t \in \mathbb{R}$

$$q_\varphi(\mathbf{v}) = q_\varphi(\mathbf{u}) + t^2 \cdot g > 0 \quad \text{falls} \quad \mathbf{v} \neq \mathbf{0}.$$

Also ist q_φ und damit die Matrix G positiv definit. □

Beispiel 5.22 Zur symmetrischen (2×2) -Matrix

$$G = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

gehört die quadratische Form

$$q(x, y) = a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot xy + c \cdot y^2.$$

Die Bedingung für Positiv-Definitheit ist

$$\det(G_1) = a > 0, \quad \det(G_2) = ac - b^2 > 0.$$

Aus dieser Bedingung folgt für alle $(x, y) \neq (0, 0)$

$$a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot xy + c \cdot y^2 = a \cdot \left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{a}\right) \cdot y^2 > 0.$$

In 2.7 haben wir gezeigt, dass jede invertierbare $n \times n$ -Matrix eine LR-Zerlegung der Form $A = P \cdot L \cdot R$ mit einer Permutationsmatrix p , einer normierten unteren Dreiecksmatrix L und einer oberen Dreiecksmatrix R zulässt. Die Permutationsmatrix P tritt nicht auf, wenn bei der Umformung von A in Zeilenstufenform keine Zeilenvertauschungen (Umformungen vom Typ I) notwendig sind. Bei positiv definiten Matrizen sind Zeilenvertauschungen nicht notwendig. Mit Satz 5.13 ist dies ein Spezialfall von

Satz 5.14 Für eine $n \times n$ -Matrix $A \in GL(n, K)$ sind äquivalent:

- a) Bei der Umformung von A in Zeilenstufenform werden keine Zeilenvertauschungen benötigt.
- b) Alle Hauptminoren $\det(A_\nu)$, $\nu = 1, \dots, n-1$, sind $\neq 0$.

Beweis. a) $\Rightarrow$ b): Weil keine Zeilenvertauschungen benötigt werden, kann man für $\nu = 1, \dots, n$ nacheinander die linken oberen Untermatrizen A_ν durch elementare Zeilenumformungen vom Typ III in Dreiecksform R_ν überführen, wobei von der ν -ten Zeile immer nur Vielfache der vorhergehenden Zeilen abgezogen werden. Weil mit A auch seine Dreiecksform R invertierbar ist, sind alle Unterdeterminanten

$\det(R_\nu) \neq 0$. Bei Umformungen vom Typ III ändert sich die Determinante aber nicht. Dies zeigt $\det(A_\nu) = \det(R_\nu) \neq 0$.

b) $\Rightarrow$ a): Wir beweisen durch Induktion nach n : Wenn die Unterdeterminanten $\det(A_1), \dots, \det(A_{n-1}) \neq 0$ sind, dann sind bei der Überführung von A in obere Dreiecksform R keine Zeilenvertauschungen nötig. Der Induktionsanfang ($n = 1$) ist nicht der Rede wert. Nach Induktionsannahme kann man A_{n-1} ohne Zeilenvertauschungen in obere Dreiecksform R_{n-1} überführen. Wir wenden diese Umformungen auf A an und erhalten eine Matrix

$$\begin{pmatrix} & & & * \\ & R_{n-1} & & * \\ & & & * \\ r_{n,1} & \dots & r_{n,n-1} & * \end{pmatrix}.$$

Weil $\det(R_{n-1}) \neq 0$ ist, sind alle Diagonal-Elemente $r_{\nu,\nu} \neq 0$, $\nu = 1, \dots, n-1$. Mit ihnen kann man durch Umformungen vom Typ III die Einträge $r_{n,1}, \dots, r_{n,n-1}$ auf Null bringen. $\square$

Damit ist Aussage a) des folgenden Satzes bewiesen.

Satz 5.15 *Es sei S eine positiv definite, symmetrische, reelle $n \times n$ -Matrix.*

- a) *Die Matrix S hat eine LR-Zerlegung $S = L \cdot R$ ohne Permutationsmatrix wie in Satz 2.50.*
- b) *Die Matrix S hat eine Cholesky-Zerlegung*

$$S = L \cdot L^t$$

mit einer (i.a. nicht normierten) unteren Dreiecksmatrix L .

Beweis von b). Wir zerlegen die rechte obere Dreiecksmatrix R in ein Produkt $R = D \cdot \tilde{R}$, wo $D = \text{diag}(a_i)$ eine Diagonalmatrix und $\tilde{R}$ eine normierte rechte obere Dreiecksmatrix ist. Die Diagonalelemente a_i von D sind die Diagonalelemente von R , deswegen ist diese Zerlegung eindeutig. Damit ist auch die Zerlegung

$$S = L \cdot D \cdot \tilde{R}$$

eindeutig. Aus

$$S = S^t = (\tilde{R})^t \cdot D \cdot L^t$$

und der Eindeutigkeit folgt $\tilde{R} = L^t$, also

$$S = L \cdot D \cdot L^t.$$

Mit S ist auch $D = L^{-1} \cdot S \cdot (L^{-1})^t$ positiv definit. Seine Diagonal-Elemente a_i sind also alle > 0 . Wir schreiben

$$D = (D^{1/2})^2 \quad \text{mit} \quad D^{1/2} = \text{diag}(\sqrt{a_i}).$$

Mit der unteren Dreiecksmatrix $L \cdot D^{1/2}$ erhalten wir die Cholesky-Zerlegung

$$S = (L \cdot D^{1/2}) \cdot (D^{1/2} \cdot L^t) = (L \cdot D^{1/2}) \cdot (L \cdot D^{1/2})^t. \quad \square$$

Aufgabe 5.11 *Es sei $M_2(\mathbb{R})$ der Vektorraum aller reellen 2×2 -Matrizen. Für $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ setze man*

$$F(A, B) := \text{Spur}(AB).$$

- a) *Man zeige, dass F eine symmetrische Bilinearform auf $M_2(\mathbb{R})$ ist.*

b) Für die Basis

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

von $M_2(\mathbb{R})$ berechne man die Matrix $(F(e_i, e_k))_{i,k=1,\dots,4}$.

c) Man gebe eine Basis f_1, f_2, f_3, f_4 von $M_2(\mathbb{R})$ an mit

$$F(f_i, f_k) = 0 \quad \text{für} \quad 1 \leq i < k \leq 4$$

und berechne die Werte $F(f_i, f_i)$ für $i = 1, \dots, 4$.

d) Ist F positiv definit?

Aufgabe 5.12 Für eine Matrix $(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ heißt $\text{Tr } A := \sum_{i=1}^n a_{ii}$ die Spur von A ($n \in \mathbb{N}$).

a) Zeigen Sie: Die Abbildung

$$\varphi_n : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (A, B) \mapsto \text{Tr}(AB)$$

ist eine symmetrische Bilinearform.

b) Sei $S_n^+ \subset M_n(\mathbb{R})$ der Untervektorraum von $M_n(\mathbb{R})$, der aus den symmetrischen Matrizen (d.h. den Matrizen $A \in M_n(\mathbb{R})$ mit $A^t = A$) besteht, und $S_n^- \subset M_n(\mathbb{R})$ der Untervektorraum, der aus den schiefsymmetrischen Matrizen (d.h. den Matrizen $A \in M_n(\mathbb{R})$ mit $A^t = -A$) besteht. Zeigen Sie: $M_n(\mathbb{R}) = S_n^+ \oplus S_n^-$, und S_n^+ und S_n^- sind orthogonal bzgl. φ_n .

c) Zeigen Sie, dass die Beschränkung von φ_n auf S_n^+ positiv definit und die Beschränkung von φ_n auf S_n^- negativ definit ist.

d) Bestimmen sie eine Orthonormalbasis von S_2^+ bzgl. des Skalarprodukts, das man durch Beschränkung von φ_2 auf S_2^+ erhält.

e) Bestimmen Sie die Signatur von φ_n .

Aufgabe 5.13 Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A_n = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & 1 & -2 & 1 \\ 0 & & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in M(n \times n, \mathbb{R})$$

negativ definit ist.

Aufgabe 5.14 Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{R})$$

positiv definit ist.

Aufgabe 5.15 Zeigen Sie: Für eine symmetrische Bilinearform φ auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent:

1) $\text{Rang}(\varphi) \leq 2$.

2) $\varphi = S(f \otimes g)$ mit $f, g \in V^*$.

Aufgabe 5.16 Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegungen der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

5.2.2 Die Weierstraßsche Normalform

In diesem Abschnitt soll eine Normalform angegeben werden, auf die man komplexe symmetrische Matrizen unter alleiniger Verwendung orthogonaler komplexer Transformationsmatrizen bringen kann. Es ist eine Art von Analogon der Jordanschen Normalform für symmetrische Matrizen.

Wir verwenden das Standard-Skalarprodukt

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{\nu=1}^n x_{\nu} y_{\nu}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n.$$

Dieses ist kein inneres Produkt, keine hermitesche Form. Der Nachteil ist, dass $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ sein kann, ohne dass $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ist. Solche Vektoren heißen *isotrop*. Ein Beispiel dafür ist etwa der Vektor $\mathbf{x} = (1, i)^t \in \mathbb{C}^2$. Wegen dieser isotropen Vektoren funktioniert der Beweis der reellen Hauptachsentransformation nicht im Komplexen. Wie üblich nennen wir zwei Vektoren orthogonal, $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, wenn $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. Isotrope Vektoren sind zu sich selbst orthogonal.

Eine komplexe $n \times n$ -Matrix T heißt - genau wie im Reellen - orthogonal, wenn $T^t \cdot T = \mathbb{1}$. Alle diese Matrizen bilden die komplexe orthogonale Gruppe $O(n, \mathbb{C})$. Man darf sie nicht mit der unitären Gruppe $U(n)$ verwechseln.

Wir betrachten also eine komplexe symmetrische $n \times n$ -Matrix S .

Nach Satz 4.25 ist S ähnlich zu einer direkten Matrix-Summe von Blöcken S_i der Größe $r_i \times r_i$ mit den charakteristischen Polynom $(\lambda - \lambda_i)^{r_i}$, welche die lineare Abbildung mit Matrix S auf den Haupträumen U_i beschreiben. Mit Satz 5.5 wissen wir hier jetzt, dass diese Haupträume alle orthogonal zueinander sind. Der Übergang in eine Basis, welche der Zerlegung angepasst ist, kann durch eine orthogonale Matrix erfolgen. Es gibt also ein $T \in O(n, \mathbb{C})$ mit

$$T^{-1} \cdot S \cdot T = T^t \cdot S \cdot T = \begin{pmatrix} S_1 & & \\ & S_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Wir brauchen uns also nur noch die Blöcke S_i anzuschauen. Deshalb betrachten wir jetzt folgende Situation:

S ist eine symmetrische komplexe $n \times n$ -Matrix mit dem charakteristischen Polynom $(\lambda_0 - \lambda)^n$. Ihr Minimalpolynom sei $(\lambda_0 - \lambda)^m$.

Wir möchten $\mathbb{C}^n$ aufspalten in eine S -invariante orthogonale direkte Summe von Unterräumen der Dimension r_i , auf welchen die durch S definierte lineare Abbildung das Minimalpolynom $(\lambda_0 - \lambda)^{r_i}$ hat. Nachdem wir von S zu $S - \lambda_0 \mathbb{1}_n$ übergehen, können wir $\lambda_0 = 0$ annehmen. Das Minimalpolynom von S ist dann λ^m . Deswegen ist $S^{m-1} \neq 0$, und es gibt einen Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ mit $(\mathbf{v}, S^{m-1} \cdot \mathbf{v}) \neq 0$. Wir betrachten den Unterraum

$$V := \text{span}(\mathbf{v}, S \cdot \mathbf{v}, \dots, S^{m-1} \cdot \mathbf{v}).$$

Satz 5.16 Auf V ist die Bilinearform $(\cdot, \cdot)$ nicht entartet.

Beweis. Wir fixieren einen Vektor $\mathbf{w} = \sum_{\mu=0}^{m-1} a_\mu S^\mu \cdot \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, wo also nicht alle $a_\mu = 0$ sind. Wir schreiben

$$\sum_{\mu=0}^{m-1} a_\mu \lambda^\mu = \lambda^k \cdot p(\lambda),$$

wo $\lambda^k, 0 \leq k \leq m-1$, die maximale λ -Potenz ist, welche das Polynom $\sum_{\mu=0}^{m-1} a_\mu \lambda^\mu$ teilt. Damit ist $\mathbf{w} = S^k \cdot p(S) \cdot \mathbf{v}$. Weil das Polynom $p(\lambda)$ nicht durch λ teilbar ist, haben $p(\lambda)$ und λ keine gemeinsame Nullstelle. Nach Satz 4.22 gibt es Polynome $f_1(\lambda)$ und $f_2(\lambda)$ mit

$$p(\lambda \cdot f_1(\lambda) + \lambda \cdot f_2(\lambda)) = 1.$$

Hieraus folgt insbesondere $p(0) \cdot f_1(0) = 1$.

Jetzt setzen wir

$$q(\lambda) := f_1(\lambda) \cdot \lambda^{m-1-k}$$

und betrachten

$$\begin{aligned} (\mathbf{w}, q(S) \cdot \mathbf{v}) &= (S^k \cdot p(S) \cdot \mathbf{v}, q(S) \cdot \mathbf{v}) \\ &= (S^k \cdot p(S) \cdot S^{m-1-k} \cdot f_1(S) \cdot \mathbf{v}, \mathbf{v}) \\ &= (S^{m-1} \cdot p(S) \cdot f_1(S) \cdot \mathbf{v}, \mathbf{v}) \\ &= (S^{m-1} \cdot (\mathbb{1}_n - S \cdot f_2(S)) \cdot \mathbf{v}, \mathbf{v}) \\ &= (S^{m-1} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{v}) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Wegen

$$S^{m-1} \cdot S \cdot f_2(S) = 0.$$

Daraus folgt, der Entartungsraum der Bilinearform $(\cdot, \cdot)$ auf V enthält nur den Vektor $\mathbf{0}$. $\square$

Mit Satz 5.4 a) sehen wir, dass $\mathbb{C}^n = V \oplus V^\perp$ eine orthogonale direkte Summe ist. Indem wir Satz 5.17 iterieren können wir beweisen:

Satz 5.17 Zu jeder komplexen symmetrischen $n \times n$ -Matrix S gibt es eine Matrix $T \in O(n, \mathbb{C})$ so, dass

$$T^t \cdot S \cdot T = \begin{pmatrix} S_1 & & \\ & S_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

eine Block-Matrix aus symmetrischen $r_i \times r_i$ -Blöcken S_i mit einem Minimalpolynom $(\lambda_i - \lambda)^{r_i}$ ist.

Die Jordan-Normalform des Blocks S_i ist ein $r_i \times r_i$ -Jordanblock zum Eigenwert λ_i . Aus der Eindeutigkeit der JNF folgt, dass die Größe r_i der Blöcke S_i in Satz 5.18 und die zugehörigen Eigenwerte, bis auf ihre Reihenfolge, durch die Matrix S eindeutig bestimmt sind.

Wir betrachten jetzt einen einzigen solchen Block.

Satz 5.18 Es seien R und S zwei symmetrische komplexe $n \times n$ -Matrizen, beide mit dem einzigen Eigenwert λ_0 und dem Minimalpolynom $(\lambda_0 - \lambda)^n$. Dann gibt es eine Matrix $T \in O(n, \mathbb{C})$ mit $R = T^t \cdot S \cdot T$.

Beweis. Wir können die beiden Matrizen ersetzen durch $R - \lambda_0 \mathbb{I}_n$, bzw. $S - \lambda_0 \mathbb{I}_n$ und deswegen o.B.d.A. $\lambda_0 = 0$ annehmen und das Minimalpolynom beider Matrizen als λ^n annehmen.

Weil $S^{n-1} \neq 0$ ist, folgt aus Satz 5.7 die Existenz eines Vektors $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ mit $\langle \mathbf{v}, S^{n-1} \cdot \mathbf{v} \rangle \neq 0$. Dieser ist ein Hauptvektor der Stufe n für S und seine Bilder $\mathbf{v}, S \cdot \mathbf{v}, \dots, S^{n-1} \cdot \mathbf{v}$ bilden eine Basis des $\mathbb{C}^n$. Für $i, j = 0, \dots, n-1$ definieren wir

$$a_{i+j} = \langle \mathbf{v}, S^{i+j} \cdot \mathbf{v} \rangle = \langle S^i \cdot \mathbf{v}, S^j \cdot \mathbf{v} \rangle.$$

Dann ist die Matrix der Skalarprodukte unserer Basisvektoren

$$\left((S^i \cdot \mathbf{v}, S^j \cdot \mathbf{v}) \right)_{i,j=0,\dots,n-1} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_1 & & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

mit $a_{n-1} \neq 0$. Diese Matrix ist also invertierbar und es gibt einen Vektor $\mathbf{b} = (b_0, \dots, b_{n-1})^t \in \mathbb{C}^n$ derart, dass

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_1 & & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das heißt also

$$\sum_{\nu=0}^{n-1-i} a_{i+\nu} b_\nu = 1 \quad \text{für } i = 0, \dots, n-1.$$

Insbesondere ist $b_0 \neq 0$.

Das Polynom $p(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} b_\nu x^\nu$ hat also einen Anfangskoeffizienten $b_0 \neq 0$. Nach dem unten folgenden Lemma gibt es deswegen ein Polynom $q(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} c_\nu x^\nu$ mit $p = q^2$ modulo x^n , d.h.,

$$q^2(x) = p(x) + x^n r(x) \quad \text{mit einem Polynom } r.$$

Wir betrachten den Vektor

$$\mathbf{v}' := \sum_{\nu=0}^{n-1} c_\nu S^\nu \cdot \mathbf{v}$$

und seine Bildvektoren $S \cdot \mathbf{v}', \dots, S^{n-1} \cdot \mathbf{v}'$. Deren Skalarprodukte sind

$$\begin{aligned} (S^i \cdot \mathbf{v}', S^j \cdot \mathbf{v}') &= (\mathbf{v}', S^{i+j} \cdot \mathbf{v}') \\ &= \left(\sum_{\nu=0}^{n-1} c_\nu S^\nu \cdot \mathbf{v}, S^{i+j} \cdot \sum_{\nu=0}^{n-1} c_\nu S^\nu \cdot \mathbf{v} \right) \\ &= \left(\left(\sum_{\nu=0}^{n-1} c_\nu S^\nu \right)^2 \cdot \mathbf{v}, S^{i+j} \cdot \mathbf{v} \right) \\ &= \sum_{\nu=0}^{n-1} b_\nu (\mathbf{v}, S^{i+j+\nu} \cdot \mathbf{v}) \\ &= \sum_{\nu=0}^{n-1} b_\nu a_{i+j+\nu} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{falls } i+j \geq n \\ 1 & \text{falls } i+j < n \end{cases} \end{aligned}$$

Die Matrix der Skalarprodukte $(S^i \cdot \mathbf{v}', S^j \cdot \mathbf{v}')$ ist also

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere sind die Vektoren $\mathbf{v}', S \cdot \mathbf{v}', \dots, S^{n-1} \cdot \mathbf{v}'$ linear unabhängig und bilden eine Basis des $\mathbb{C}^n$.

Mit dem gleichen Argument findet man eine Basis $\mathbf{w}', R \cdot \mathbf{w}', \dots, R^{n-1} \cdot \mathbf{w}'$, deren Vektoren genau die gleiche Matrix der Skalarprodukte $(R^i \cdot \mathbf{w}', R^j \cdot \mathbf{w}')$ besitzen. Dann ist die durch

$$\mathbf{v}' \mapsto \mathbf{w}', S \cdot \mathbf{v}' \mapsto R \cdot \mathbf{w}', \dots, S^{n-1} \cdot \mathbf{v}' \mapsto R^{n-1} \cdot \mathbf{w}'$$

definierte lineare Abbildung orthogonal und hat eine darstellende Matrix $T \in O(n, \mathbb{C})$. Die Matrix $T^t \cdot R \cdot T = T^{-1} \cdot R \cdot T$ bildet

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{v}' & \mapsto & \mathbf{w}' & \mapsto & R \cdot \mathbf{w}' & \mapsto & S \cdot \mathbf{v}' \\ S \cdot \mathbf{v}' & \mapsto & R \cdot \mathbf{w}' & \mapsto & R^2 \cdot \mathbf{w}' & \mapsto & S^2 \cdot \mathbf{v}' \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ S^{n-1} \cdot \mathbf{v}' & \mapsto & R^{n-1} \cdot \mathbf{w}' & \mapsto & \mathbf{0} & & \end{array}$$

ab, genau wie die Matrix S . Es folgt

$$T^t \cdot R \cdot T = S. \quad \square$$

Satz 5.19 (Lemma) *Es sei $p(x) = \sum_{\nu=0}^n b_\nu x^\nu$ ein Polynom mit $p(0) = b_0 \neq 0$. Dann gibt es ein Polynom $q = \sum_{\nu=1}^n c_\nu x^\nu$ und ein Polynom r mit*

$$q^2(x) = p(x) + x^{n+1} \cdot r(x).$$

Beweis (Induktion nach n): Beim Induktionsanfang $n = 0$ ist $p = b_0 \neq 0$ konstant, und wir können für q das konstante Polynom $c_0 := \sqrt{b_0}$ wählen.

Induktionsschluss. Die Aussage sei für Polynome p_{n-1} vom Grad $n-1$ bewiesen. Wir betrachten

$$p(x) = b_0 + \dots + b_{n-1}x^{n-1} + b_n x^n = p_{n-1}(x) + b_n x^n.$$

Nach Induktionsannahme gibt es ein Polynom q_{n-1} derart, dass

$$q_{n-1}^2(x) = p_{n-1}(x) + x^n \cdot r(x) = p_{n-1}(x) + x^n \cdot (r_0 + \dots).$$

Wir setzen an $q_n(x) = q_{n-1}(x) + c_n x^n$. Damit wird

$$q_n^2(x) = p_{n-1}(x) + x^n \cdot (r_0 + \dots) + 2 \cdot q_{n-1}(x) \cdot c_n x^n + c_n^2 x^{2n}.$$

Wegen $c_0 = \sqrt{b_0} \neq 0$ können wir

$$c_n := \frac{b_n - r_0}{2c_0}$$

setzen und haben damit die behauptete Gleichung bis zum Grad n . $\square$

Satz 5.20 (Weierstraß) *Es seien R und S zwei symmetrische komplexe $n \times n$ -Matrizen. Die Matrix R sei invertierbar. Dann gibt es eine invertierbare komplexe Matrix T so, dass*

$$T^t \cdot R \cdot T = \begin{pmatrix} R_1 & & \\ & \ddots & \\ & & R_k \end{pmatrix}, \quad T^t \cdot S \cdot T = \begin{pmatrix} S_1 & & \\ & \ddots & \\ & & S_k \end{pmatrix}$$

Blockmatrizen sind mit $r_i \times r_i$ -Blöcken R_i und S_i der Form

$$R_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_i = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \lambda_i \\ \vdots & & \ddots & 1 & \lambda_i & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 1 & \lambda_i & \ddots & & & \vdots \\ \lambda_i & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Beweis. Weil R invertierbar ist, gibt es nach Satz 5.11 eine Transformationsmatrix T derart, dass $T^t \cdot R \cdot T = \mathbb{1}_n$. Wir nehmen deshalb o.B.d.A. gleich $R = \mathbb{1}_n$ an. Ohne die Form von R zu ändern können wir jetzt die Matrix S noch mit orthogonalen Matrizen transformieren. Satz 5.18 zeigt, dass wir damit S auf eine Blockform bringen können, deren $r_i \times r_i$ -Blöcke das Minimalpolynom $(\lambda_i - \lambda)^{r_i}$ haben, und alle Blöcke mit diesem Minimalpolynom sind nach Satz 5.19 orthogonal äquivalent.

Wir brauchen die Aussage nur noch für die genannten Teilblöcke $R = R_i = \mathbb{1}_{r_i}$, $S = S_i$ zu zeigen. Durch invertierbare $r_i \times r_i$ -Matrizen T ändern wir sie ab in

$$T^t \cdot \mathbb{1} \cdot T \quad \text{und} \quad T^t \cdot S \cdot T.$$

Dabei ändern sich natürlich Eigenwerte und das Minimalpolynom von R und S . Die entscheidende Bemerkung ist: Das Minimalpolynom von $S \cdot R^{-1}$ ändert sich nicht. In der Tat, die Matrix $S \cdot R^{-1}$ wird verändert in

$$(T^t \cdot S \cdot T) \cdot (T^t \cdot R \cdot T)^{-1} = T^t \cdot S \cdot T \cdot T^{-1} \cdot R^{-1} \cdot (T^t)^{-1} = T^t \cdot S R^{-1} \cdot (T^t)^{-1}.$$

Insbesondere für die im Satz angegebenen Blöcke ist

$$S_i \cdot R_i^{-1} = S \cdot R^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

ein Jordan-Block. Wir bringen jetzt R auf die Form $R'_i = T^t \cdot R_i \cdot T = \mathbb{1}_{r_i}$. Dabei geht S_i über in eine symmetrische Matrix S'_i , so, dass $S'_i = S'_i \cdot (R'_i)^{-1}$ ähnlich zum Jordan-Block $S_i \cdot R_i^{-1}$ mit dem Eigenwert λ_i ist. Hierbei kann dieser Eigenwert beliebig vorgegeben werden. Dies zeigt, dass je zwei Blöcke R, S simultan ähnlich zu R_i, S_i sind. $\square$

Aufgabe 5.17 Finden Sie die Weierstraß-Normalform des Matrizenpaares

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & -5 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5.18 Zeigen Sie: Die $n \times n$ -Matrix

$$\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & & & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

hat das charakteristische Polynom

$$\begin{array}{ll} (\lambda^2 - 1)^m & \text{falls } n = 2m \text{ gerade,} \\ (1 - \lambda)(\lambda^2 - 1)^m & \text{falls } n = 2m + 1 \text{ ungerade} \end{array}$$

5.3 Quadriken

Heir sei zunächst K ein beliebiger Körper, über den wir nur $1/2 \in K$ voraussetzen wollen.

Definition 5.11 Eine Quadrik im affinen Raum K^n ist eine Teilmenge $Q \subset K^n$, welche durch Polynome

$$\text{vom Grad 2: } \sum_{k \leq l} a_{k,l} x^k x^l \quad \text{und} \quad \text{vom Grad 1: } \sum_{k=1}^n b_k x^k$$

und eine Konstante $c \in K$ beschrieben werden kann:

$$Q = \{\mathbf{x} \in K^n : \sum a_{k,l} x^k x^l + \sum b_k x^k + c = 0\}$$

Die Koeffizienten $a_{k,l}$ wollen wir zu einer quadratischen $n \times n$ -Matrix A zusammenfassen. Dann ist der quadratische Anteil der obigen Gleichung

$$\sum_{k,l} a_{k,l} x^k x^l = \mathbf{x}^t \cdot A \cdot \mathbf{x}$$

die quadratische Form zur Bilinearform mit Matrix A .

Diese Matrix A braucht zunächst nicht symmetrisch zu sein. Aber wegen

$$\mathbf{x}^t \cdot A \cdot \mathbf{x} = (\mathbf{x}^t \cdot A \cdot \mathbf{x})^t = \mathbf{x}^t \cdot A^t \cdot \mathbf{x}$$

ist

$$\mathbf{x}^t \cdot A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}^t \cdot S \cdot \mathbf{x}$$

mit der symmetrischen Matrix $S = (A + A^t)/2$. Wir können (und wollen) deswegen immer $A = S$ symmetrisch annehmen.

Den linearen Anteil $\sum b_k x^k$ können wir als Matrix-Vektorprodukt mit dem Zeilenvektor $\mathbf{b}^t = (b_k)^t$ auffassen. Dabei ist es rechentechnisch vorteilhaft, einen Faktor 2 vorwegzunehmen. Dann sieht unsere Quadriken Gleichung in Matrizenform also so aus:

$$\mathbf{x}^t \cdot A \cdot \mathbf{x} + 2\mathbf{b}^t \cdot \mathbf{x} + c = 0.$$

Definition 5.12 Wir nennen die Matrix A die Koeffizientenmatrix und die symmetrische $(n+1) \times (n+1)$ -Matrix

$$A' := \begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^t & c \end{pmatrix}$$

die erweiterte (oder geränderte) Koeffizientenmatrix.

Mit dieser erweiterten Koeffizientenmatrix können wir die Gleichung der Quadrik etwas kompakter schreiben, wenn wir noch einen *erweiterten Vektor*

$$\mathbf{x}' := \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix} \in K^{n+1}$$

eingeführen. Die Gleichung ist nämlich

$$(\mathbf{x}')^t \cdot A' \cdot \mathbf{x}' = (\mathbf{x}^t, 1) \cdot \begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^t & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{x}^t \cdot A \cdot \mathbf{x} + 2\mathbf{b}^t \cdot \mathbf{x} + c = 0.$$

Definition 5.13 Es seien $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ symmetrisch, $\mathbf{b} \in K^n$ und $c \in K$, sowie $A' \in M(n+1 \times n+1, K)$ die damit definierte erweiterte Koeffizientenmatrix. Ist

$$q(\mathbf{x}) := (\mathbf{x}')^t \cdot A' \cdot \mathbf{x}',$$

so heißt

$$Q = \{\mathbf{x} \in K^n : q(\mathbf{x}) = 0\} \subset K^n$$

die durch q definierte Quadrik.

Unser Ziel in diesem Abschnitt ist die Klassifikation der Quadriken. Das bedeutet Folgendes: Durch eine geeignete Transformation $\mathbf{x} = F(\mathbf{y})$ wollen wir die Gleichung $q(\mathbf{x}) = 0$ der Quadrik Q auf eine möglichst einfache Form bringen. Ein einfaches Beispiel hierfür ist eine Parabel, in Koordinaten (x_1, x_2) etwa

$$x_1^2 + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 + c = 0, \quad b_2 \neq 0.$$

Mit der quadratischen Ergänzung $y_1 := x_1 + b_1$ wird daraus

$$y_1^2 + 2b_2x_2 + c - b_1^2 = 0,$$

und mit

$$y_2 := -2b_2 \cdot \left(x_2 + \frac{c - b_1^2}{2b_2}\right)$$

schließlich

$$y_2 = y_1^2.$$

Das sieht doch ganz manierlich aus, wir kennen die Gleichung aus dem Gymnasium.

So schön das schließlich auch funktionieren wird, es gibt zwei etwas unangenehmere Details. Wir müssen verschiedene Dinge unterscheiden, und uns überlegen, was wir eigentlich wollen:

1) Wir müssen zwischen der transformierten Quadrik $F(Q)$ und der transformierten Gleichung unterscheiden, denn

$$F(Q) = \{F(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in Q\} = \{\mathbf{y} \in K^n : F^{-1}(\mathbf{y}) \in Q\} = \{\mathbf{y} \in K^n : q(F^{-1}(\mathbf{y})) = 0\}$$

würde die Quadrik transformieren. Wenn wir dagegen die Gleichung transformieren, dann wird aus Q die Quadrik

$$\{\mathbf{y} \in K^n : q(F(\mathbf{y})) = 0\} = \{\mathbf{y} \in K^n : F(\mathbf{y}) \in Q\} = F^{-1}(Q).$$

Es sollen zusätzlich noch Skalierungen der Gleichung mit $0 \neq \alpha \in K$ erlaubt sein, welche nur die Gleichung und nicht die Quadrik

$$Q = \{\mathbf{x} \in K^n : q(\mathbf{x}) = 0\} = \{\mathbf{x} \in K^n : \alpha \cdot q(\mathbf{x}) = 0\}$$

ändern.

d) Wir müssen uns genau überlegen, welche Art von Transformationen F wir verwenden wollen. Das oben kurz vorgestellte Beispiel der Parabel zeigt, dass wir um Translationen nicht herumkommen werden. Wir könnten also im $\mathbb{R}^n$ z.B. die Bewegungen

$$\mathbf{y} = F(\mathbf{x}) = \mathbf{t} + U \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n, U \in O(n)$$

aus Abschnitt 2.1 verwenden. Vorher wollen wir allerdings erst noch etwas Allgemeineres probieren.

Definition 5.14 Eine Abbildung $F : K^n \rightarrow K^n$ heißt affin, bzw. eine Affinität, wenn es einen Translationsvektor $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$ und eine invertierbare $n \times n$ -Matrix $C \in GL(n, K)$ gibt so, dass

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{t} + C \cdot \mathbf{x}.$$

Wahrscheinlich heißen diese Abbildungen so, weil sie affine Unterräume (Lösungsräume eines nicht notwendig homogenen linearen Gleichungssystems) wieder auf affine Unterräume abbilden. (Oder ist es umgekehrt?)

Sowohl die Bewegungen, als auch die Affinitäten bilden bezüglich Hintereinanderschaltung eine Gruppe. Für $K = \mathbb{R}$ ist die Gruppe B der Bewegungen eine Untergruppe der Gruppe A der Affinitäten. Beide definieren eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller durch

$$Q \sim Q' \Leftrightarrow Q = F(Q')$$

mit $F \in A$, bzw. $\in B$. Wir suchen in jeder dieser Äquivalenzklassen einen (einzigen) möglichst einfachen Repräsentanten

5.3.1 Die affine Normalform

Wir transformieren die Quadrik

$$Q : \mathbf{x}^t \cdot A \cdot \mathbf{x} + 2\mathbf{b}^t \cdot \mathbf{x} + c = 0$$

unter einer affinen Transformation

$$\mathbf{x} = C \cdot \mathbf{y} + \mathbf{t}.$$

Die transformierte Gleichung ist dann

$$\begin{aligned} & \mathbf{x}^t \cdot A \cdot \mathbf{x} + 2\mathbf{b}^t \cdot \mathbf{x} + c \\ &= (C\mathbf{y} + \mathbf{t})^t \cdot A \cdot (C\mathbf{y} + \mathbf{t}) + 2\mathbf{b}^t \cdot (C\mathbf{y} + \mathbf{t}) + c \\ &= \mathbf{y}^t \cdot (C^t A C) \cdot \mathbf{y} + 2(\mathbf{A}\mathbf{t} + \mathbf{b})^t C \cdot \mathbf{y} + \mathbf{t}^t A \mathbf{t} + 2\mathbf{b}^t \mathbf{t} + c \\ &= 0. \end{aligned}$$

Das ziemlich unübersichtliche Resultat unserer Rechnung wird etwas übersichtlicher wenn wir uns die erweiterte Koeffizientenmatrix der transformierten Quadrik ansehen. Das ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} C^t A C & C^t (A \mathbf{t} + \mathbf{b}) \\ (A \mathbf{t} + \mathbf{b})^t C & c' \end{pmatrix}$$

mit

$$c' := \mathbf{t}^t A \mathbf{t} + 2 \mathbf{b}^t \mathbf{t} + c.$$

Es ist eine Produktmatrix

$$\begin{pmatrix} C & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^t & 1 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^t & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^t & 1 \end{pmatrix}.$$

Definition 5.15 Die erweiterte Matrix zur affinen Transformation

$$F : \mathbf{t} + C \cdot \mathbf{x}$$

ist die $(n+1) \times (n+1)$ -Matrix

$$C' := \begin{pmatrix} C & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^t & 1 \end{pmatrix}$$

Sie heißt so, weil für die erweiterten Vektoren $\mathbf{x}'$ und $\mathbf{y}'$ zu $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y} = F(\mathbf{x})$ gilt

$$\mathbf{y}' = C' \cdot \mathbf{x}'.$$

In der obigen Produktmatrix wurde die erweiterte Koeffizientenmatrix A' der Quadrik von rechts mit der erweiterten Matrix C' für die affine Transformation F multipliziert, und von links mit deren Transponierter. Mit C ist auch C' invertierbar. Insbesondere finden wir: Bei einer affinen Transformation der Quadrik Q bleiben Rang (und Signatur wenn $K = \mathbb{R}$) der eigentlichen Koeffizientenmatrix A , sowie auch der erweiterten Koeffizientenmatrix A' unverändert. Weil A' aus A durch Anfügen einer Zeile und einer Spalte entsteht, gilt

$$\text{Rang}(A) \leq \text{Rang}(A') \leq \text{Rang}(A) + 2.$$

Unser Ziel ist es, die Gleichung einer Quadrik, durch affine Transformationen auf eine möglichst einfache Normalform zu bringen. Wenn wir von solchen Normalformen einen Katalog aufstellen können, dann haben wir die Quadriken in Bezug auf affine Transformationen *klassifiziert*.

Nun transformierte sich die Koeffizientenmatrix A genau wie die Matrix einer symmetrischen Bilinearform unter der linearen Transformation mit Matrix C . Nach Satz 5.8 gibt es eine solche Matrix C derart, dass die transformierte Koeffizientenmatrix

$$\tilde{A} = C^t A C = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix ist. (Über $K = \mathbb{R}$ ist dies nach Satz 4.34 (Hauptachsentransformation) auch mit einer orthogonalen Matrix zu erreichen). An der Diagonalmatrix können wir den Rang von A und die Signatur dieser Matrix ablesen.

Ist der Rang von A maximal $= n$, so kann man den linearen Anteil $2\mathbf{b}^t \cdot \mathbf{x}$ ratzeputz wegtransformieren: Dazu schauen wir uns das Resultat einer reinen Translation

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{t}$$

an. Es ist

$$(\mathbf{y} + \mathbf{t})^t \cdot A \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{t}) + 2\mathbf{b}^t \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{t}) + c = \mathbf{y}^t \cdot A \cdot \mathbf{y} + 2(\mathbf{A}\mathbf{t} + \mathbf{b})^t \cdot \mathbf{y} + \text{const} = 0.$$

Wenn A invertierbar ist, können wir

$$\mathbf{t} := -A^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

wählen, und der transformierte lineare Anteil ist $= 0$.

Definition 5.16 Eine Quadrik Q heißt Mittelpunktsquadrik, wenn es einen Punkt $\mathbf{m}$ gibt, so, dass Q bei der Punktspiegelung an $\mathbf{m}$

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{m} - (\mathbf{x} - \mathbf{m})$$

in sich übergeht

Beispiel 5.23 Eine Quadrik mit invertierbarer Koeffizientenmatrix A hat einen Mittelpunkt (i.A. liegt der nicht auf Q !), in Bezug auf den sie punktsymmetrisch ist. Nach der Transformation, wenn die Quadriken Gleichung in der Form

$$\mathbf{y}^t \cdot \tilde{A} \cdot \mathbf{y} + c = 0$$

vorliegt, ist das der Nullpunkt, davor also der Punkt $\mathbf{x} = -\mathbf{t} = A^{-1} \cdot \mathbf{b}$.

Leider gibt es auch den Fall, dass A nicht den maximalen Rang hat. Dann wird das Leben kompliziert. Nehmen wir an, wir hätten A in eine Diagonalform

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

mit $n-r > 0$ Nullen auf der Diagonale transformiert. Die r Einträge $a_1, \dots, a_r \neq 0$ kann man benutzen, um ähnlich wie gerade, die ersten r Einträge des Vektors $\mathbf{b}$ loszuwerden. Danach haben wir einen Vektor $\mathbf{b} = (\mathbf{0}, \mathbf{b}')$ mit $\mathbf{b}' \in K^{n-r}$ und die Quadriken Gleichung sieht dann so aus:

$$\sum_{k=1}^r a_k (x^k)^2 + \sum_{k=r+1}^n b_k x^k + c = 0.$$

Wenn es das Schicksal so will, sind auch die übrig gebliebenen b_k alle $= 0$, und wir sind fertig:

$$\sum_{k=1}^r a_k (x^k)^2 + c = 0.$$

Hieraus liest man ab:

$$\text{Rang}(A') = \text{Rang}(A) = r \text{ falls } c = 0, \quad \text{Rang}(A') = \text{Rang}(A) + 1 \text{ falls } c \neq 0.$$

Oder das ist nicht der Fall. Dann können wir im Unterraum $x^1 = \dots = x^r = 0$ eine lineare Transformation durchführen, die die Linearform $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{b}^t \cdot \mathbf{x}$ auf die Linearform $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{e}_{r+1}^t \cdot \mathbf{x}$ transformiert. Die Quadrikenleichung wird

$$\sum_{k=1}^r a_k (x^k)^2 + x^{r+1} + c = 0.$$

Und wenn wir schließlich noch x^{r+1} durch $x^{r+1} + c$ ersetzen (Translation), so nimmt die Gleichung folgende Form an:

$$\sum_{k=1}^r a_k (x^k)^2 + x^{r+1} = 0.$$

Deren erweiterte Koeffizientenmatrix ist

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & a_r & & & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & 1 & & \end{pmatrix}.$$

Daraus liest man ab:

$$\text{Rang}(A') = r + 2 = \text{Rang}(A) + 2.$$

Fassen wir zusammen:

Satz 5.21 (Affine Normalform) *Die Gleichung einer Quadrik kann durch eine affine Transformation entweder auf eine Form ohne linearen Anteil*

$$\sum_{k=1}^r a_k (x^k)^2 + c = 0 \quad \text{Fall 1)}$$

oder auf die Form

$$\sum_{k=1}^r a_k (x^k)^2 + x^{r+1} = 0 \quad \text{Fall 2)}$$

gebracht werden. Hat die Koeffizientenmatrix A den Maximalrang n , so liegt der erste Fall vor. Hat die Matrix A einen Rang $r < n$, so hängt die Situation vom Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix A' ab:

$$\begin{aligned} \text{Rang}(A') &= r & \text{Fall 1)}, & \quad c = 0, \\ \text{Rang}(A') &= r + 1 & \text{Fall 1)}, & \quad c \neq 0, \\ \text{Rang}(A') &= r + 2 & \text{Fall 2)}. \end{aligned}$$

Wie die Diagonaleinträge $a_k \neq 0$ weiter transformiert werden können, hängt vom Grundkörper ab. Über $\mathbb{C}$ können sie alle auf 0 oder 1 normalisiert werden. Das ist aber nicht der geometrisch interessanteste Fall, der ist $K = \mathbb{R}$. In dem Fall können wir die Diagonaleinträge $\neq 0$ auf ± 1 normalisieren. In der folgenden Tabelle sind die Normalformen reeller Quadriken im $\mathbb{R}^n$ für $n \leq 3$ zusammengestellt, die man auf diese Weise bekommt. Wir orientieren uns dabei primär an der Signatur $\text{Sign}(A)$ der Koeffizientenmatrix A . Allerdings kann man jede Gleichung mit -1 durchmultiplizieren, das ändert die Signatur, aber nicht die Quadrik. Zwei Gleichungen, die sich so unterscheiden, geben wir nicht zweimal an. Außerdem nehmen wir immer an, dass $\text{Rang}(A) > 0$ ist, weil es sich sonst nicht um die Gleichung einer Quadrik handelt. Die Koordinaten werden x, y, z genannt.

n	$Rg(A)$	$Sign(A)$	$Rg(A')$	$Sign(A')$	Gleichung	Quadrik
1	1	(1, 0)	2	(2, 0)	$x^2 + 1 = 0$	$\emptyset$
			2	(1, 1)	$x^2 - 1 = 0$	zwei Punkte
			1	(1, 0)	$x^2 = 0$	ein Punkt
2	2	(2, 0)	3	(3, 0)	$x^2 + y^2 + 1 = 0$	$\emptyset$
			3	(2, 1)	$x^2 + y^2 - 1 = 0$	Kreis
			2	(2, 0)	$x^2 + y^2 = 0$	Punkt
			3	(2, 1)	$x^2 - y^2 + 1 = 0$	Hyperbel
			2	(1, 1)	$x^2 - y^2 = 0$	schneidendes Geradenpaar
	1	(1, 0)	3	(2, 1)	$x^2 + y = 0$	Parabel
			2	(2, 0)	$x^2 + 1 = 0$	$\emptyset$
			2	(1, 1)	$x^2 - 1 = 0$	paralleles Geradenpaar
			1	(1, 0)	$x^2 = 0$	Gerade
3	3	(3, 0)	4	(4, 0)	$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$	$\emptyset$
			4	(3, 1)	$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$	Sphäre
			3	(3, 0)	$x^2 + y^2 + z^2 = 0$	Punkt
			4	(3, 1)	$x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$	zweischaliges Hyperboloid
			4	(2, 2)	$x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$	einschaliges Hyperboloid
			3	(2, 1)	$x^2 + y^2 - z^2 = 0$	Kegel
	2	(2, 0)	4	(3, 1)	$x^2 + y^2 - z = 0$	Paraboloid
			3	(3, 0)	$x^2 + y^2 + 1 = 0$	$\emptyset$
			3	(2, 1)	$x^2 + y^2 - 1 = 0$	Kreiszyylinder
			2	(2, 0)	$x^2 + y^2 = 0$	Gerade
			4	(2, 2)	$x^2 - y^2 + z = 0$	Sattelfläche
			3	(2, 1)	$x^2 - y^2 + 1 = 0$	hyperbolischer Zylinder
			2	(1, 1)	$x^2 - y^2 = 0$	schneidendes Ebenenpaar
	1	(1, 0)	3	(2, 1)	$x^2 + y = 0$	parabolischer Zylinder
			2	(2, 0)	$x^2 + 1 = 0$	$\emptyset$
				(1, 1)	$x^2 - 1 = 0$	paralleles Ebenenpaar
			1	(1, 0)	$x^2 = 0$	Ebene

Das ist doch eine recht eindrucksvolle Tabelle: in einer Dimension drei, in zwei Dimensionen neun, in drei Dimensionen 17 Fälle. Alle diese Normalformen kann man alleine durch den Rang und Index der Koeffizientenmatrix und der geränderten Matrix unterscheiden kann. Natürlich sind viele Fälle Entartungsfälle:

Definition 5.17 Eine Quadrik Q heißt nicht-entartet, wenn die erweiterte Koeffizientenmatrix invertierbar ist.

Lassen wir die leeren Mengen beiseite, so gibt es also die folgenden nicht-entarteten Quadriken (die in obiger Tabelle dadurch hervorgehoben sind, dass $Rang(A')$ fett gedruckt wurde):

n	Quadrik
1	zwei Punkte
2	Kreis Hyperbel Parabel
3	Sphäre zweischaliges Hyperboloid einschaliges Hyperboloid Paraboloid Sattelfläche

Definition 5.18 Eine Quadrik Q in der affinen Ebene K^2 heißt Kegelschnitt.

Kegelschnitte (natürlich im Reellen) haben schon die alten Griechen gekannt und ausgiebig untersucht. Sie haben sie definiert als den Durchschnitt eines Kegels mit einer Ebene, daher der Name.

Den Durchschnitt einer Quadrik

$$\mathbf{x}^t \cdot A \cdot \mathbf{x} + 2\mathbf{b}^t \cdot \mathbf{x} + c = 0$$

mit einer Geraden berechnet man, indem man die Parametrisierung der Geraden

$$\mathbf{x} = \mathbf{v} + s\mathbf{w}, \quad s \in K,$$

in die Quadrikgleichung einsetzt:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{v} + s\mathbf{w})^t \cdot A \cdot (\mathbf{v} + s\mathbf{w}) + 2\mathbf{b}^t \cdot (\mathbf{v} + s\mathbf{w}) + c \\ &= \mathbf{v}^t A \mathbf{v} + 2\mathbf{v}^t A \mathbf{w} \cdot s + \mathbf{w}^t A \mathbf{w} \cdot s^2 + 2\mathbf{b}^t \mathbf{v} + 2\mathbf{b}^t \mathbf{w} \cdot s + c \\ &= 0. \end{aligned}$$

Das ist eine quadratische Gleichung in s . Natürlich kann es passieren, dass der Koeffizient bei s^2 verschwindet, und sich der Grad der Gleichung erniedrigt. Aber i.A. ist es eine echte quadratische Gleichung in s . Die braucht keine reellen Lösungen zu haben, dann schneidet die Gerade die Quadrik nicht. Oder sie hat zwei reelle Lösungen, dann schneidet die Gerade die Quadrik in zwei Punkten, oder die beiden reellen Lösungen fallen zusammen, dann berührt die Gerade die Quadrik in einem Punkt, und heißt *Tangente*.

Aufgabe 5.19 a) Bestimmen Sie eine invertierbare 3×3 -Matrix M mit reellen Koeffizienten und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^3$ so, dass die quadratische Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz + x + y + z = 1$$

mit den Variablen x, y, z die Form

$$\alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2 = \rho \text{ mit } \alpha, \beta, \gamma, \rho \in \mathbb{R}$$

erhält, falls man (x, y, z) durch $(u, v, w) \cdot M + b$ ersetzt.

b) Um welche Quadrik handelt es sich unter a)?

Aufgabe 5.20 Man bestimme alle in

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_2x_3 + 6x_1 + 2x_2 + 1 = 0\}$$

enthaltenen Geraden durch $(-1, 2, 2)$.

5.3.2 Die euklidische Normalform

Eine Quadrik $Q \subset \mathbb{R}^n$ ist jetzt natürlich genau dasselbe, wie in 5.3.1. Der ganze Unterschied ist, dass wir nicht mehr beliebige affine Transformationen benutzen können, um sie in eine Normalform zu transformieren, sondern nur Bewegungen. Die Normalform einer Quadrik, die dabei herauskommt, heißt deren *metrische*, oder *euklidische Normalform*.

Betrachten wir eine Quadrik mit erweiterter Koeffizientenmatrix

$$A' = \begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^t & c \end{pmatrix}$$

und gehen wir die Transformationen in 5.3.1, Beweis von Satz 5.22 nochmal durch:

- 1) Als erstes wurde die Koeffizientenmatrix A mit Satz 5.8 durch eine lineare Transformation in Diagonalform transformiert. Wir können aber auch Satz 4.34 (Hauptachsentransformation) verwenden, und dasselbe mit einer *orthogonalen* Transformation erreichen. Ganz genau dasselbe natürlich nicht: Durch lineare Transformationen bekommt man eine Diagonalmatrix mit den Einträgen ± 1 und 0. Nach einer orthogonalen Transformation stehen auf der Diagonale die Eigenwerte von A . Die Anzahlen der positiven, negativen, oder Null-Einträge sind dieselben, wie in der affinen Normalform, den Wert der Einträge $a_k \neq 0$ können wir jetzt aber nicht mehr auf ± 1 normieren.

- 2) Durch eine Translation können wir, ganz genau so wie in 5.3.1 die Gleichung der Quadrik in eine Form

$$\sum_{k=1}^r a_k (x^k)^2 + \sum_{k=r+1}^n b_k x^k + c = 0$$

transformieren.

- 3) Durch eine orthogonale Transformation kann man jetzt die Linearform $\mathbf{b}^t \cdot \mathbf{x}$ nicht mehr auf $\mathbf{e}_{r+1}^t \cdot \mathbf{x}$ transformieren, sondern nur noch auf

$$\mathbf{x} \mapsto b \cdot \mathbf{e}_{r+1}^t \cdot \mathbf{x} = b \cdot x^{r+1} \quad \text{mit} \quad b = \|\mathbf{b}\|.$$

Wenn $b \neq 0$ ist, kann man die Gleichung natürlich durch b teilen, und damit diese Konstante auf 1 normieren.

- 4) Wenn $b \neq 0$ ist, kann man durch eine abschließende Translation $x^{r+1} \mapsto x^{r+1} - c/b$ noch $bx^{r+1} + c$ in bx^{r+1} transformieren.

Satz 5.22 (Metrische Normalform) Die Gleichung einer Quadrik $Q \subset \mathbb{R}^n$ kann durch eine Bewegung entweder auf eine Form ohne linearen Anteil

$$\sum_{k=1}^r a_k (x^k)^2 + c = 0$$

oder auf eine Form

$$\sum_{k=1}^r a_k (x^k)^2 + bx^{r+1} = 0$$

gebracht werden. Die möglichen Fälle hängen wie in Satz 5.22 von der Beziehung zwischen dem Rang der Koeffizientenmatrix A und dem Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix A' ab.

Es lohnt sich natürlich nicht, für alle 29 Fälle aus der Tabelle bei Satz 5.22 nochmal die metrische Normalform hinzuschreiben. Es sollen diese Normalformen nur für die nichtentarteten, nichtleeren Quadriken in Dimension zwei und drei angegeben werden. Dabei schreiben wir eine reelle Zahl > 0 als Quadrat a^2 , $a \in \mathbb{R}$, eine Zahl < 0 als $-a^2$, $a \in \mathbb{R}$. Weil man die Gleichung mit einer beliebigen Konstante $\neq 0$ durchmultiplizieren darf, kann man das konstante Glied, wenn vorhanden, immer auf 1 normieren.

n	$Sign(A)$	$Sign(A')$	Gleichung	Quadrik
2	(2, 0)	(2, 1)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	Ellipse
	(1, 1)	(2, 1)	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	Hyperbel
	(1, 0)	(2, 1)	$y = p \cdot x^2$	Parabel
3	(3, 0)	(3, 1)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	Ellipsoid
	(2, 1)	(3, 1)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$	zweischaliges Hyperboloid
	(2, 1)	(2, 2)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	einschaliges Hyperboloid
	(2, 0)	(3, 1)	$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$	Paraboloid
	(1, 1)	(2, 2)	$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$	Sattelfläche

Die Achsen eines Koordinatensystems, in dem die Quadrik Q eine der angegebenen Normalformen annimmt, heißen die *Hauptachsen* der Quadrik. Daher kommt überhaupt der Name Hauptachsentransformation. Ihre Richtungen sind die Richtungen der Eigenvektoren der symmetrischen Matrix A . Manchmal nennt man auch die Länge, welche die Quadrik auf einer dieser Achsen ausschneidet, die Hauptachse. Ist $\lambda > 0$ der Eigenwert zum Eigenvektor in Richtung einer dieser Achsen, und ist die Konstante in der Gleichung auf 1 normiert, so ist diese Strecke

$$a = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}.$$

Eine Bewegung bildet eine Ellipse mit den Hauptachsen a und b immer auf eine Ellipse mit denselben Hauptachsen a und b ab. Und die Bewegung führt auch die Richtungen der Hauptachsen ineinander über. Bei einer affinen Transformation ist das nicht so. So ist etwa das Bild des Kreises

$$x^2 + y^2 = 1$$

unter der affinen Transformation

$$\xi = a \cdot x, \eta = b \cdot y,$$

die Ellipse

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1.$$

So sieht man: *Jede Ellipse ist das affine Bild eines Kreises.* Das kann man ausnutzen, um Aussagen für Ellipsen zu beweisen. Etwa: Eine Gerade schneidet eine Ellipse in zwei Punkten, in einem Punkt (und berührt sie dann), oder überhaupt nicht. Oder: Durch einen Punkt $\mathbf{p}$ außerhalb einer Ellipse gibt es zwei Tangenten an diese Ellipse.

Aufgabe 5.21 Im $\mathbb{R}^3$ mit dem üblichen Skalarprodukt sei E das Ellipsoid, das durch die Gleichung

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{3}\right)^2 = 1$$

definiert ist. Man berechne die Hauptachsen der Ellipse, die als Schnitt der Ebene $x - y + 2z = 0$ mit dem Ellipsoid E entsteht.

Aufgabe 5.22 Man transformiere folgende Kurve zweiter Ordnung im $\mathbb{R}^2$ auf ihre euklidische Normalform:

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_1 - 3x_2 - 5 = 0\}.$$

Aufgabe 5.23 Sei

$$Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{5}{16}x^2 + y^2 + \frac{5}{16}z^2 - \frac{3}{8}xz - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z = 0\}.$$

- a) Man zeige, dass Q ein Ellipsoid ist, und bestimme dessen Mittelpunkt und Hauptachsen.
b) Man gebe eine affine Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ an, so dass f eine Bijektion der Einheitssphäre $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ auf Q induziert.

Aufgabe 5.24 Man zeige, dass durch die Gleichung

$$5x^2 - 2xy + 5y^2 + 10x - 2y - 6 = 0$$

im $\mathbb{R}^2$ eine Ellipse definiert ist. Ferner bestimme man ihren Mittelpunkt, ihre Hauptachsen, die Länge der Achsenabschnitte und skizziere die Ellipse.

Aufgabe 5.25 Seien $d_1, d_2, \dots, d_n \in \mathbb{R}$ echt positive Zahlen, und sei E das Ellipsoid $E = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n d_i x_i^2 = 1\}$.

- a) Man zeige: $\{tx \mid x \in E, t \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^n$. Man zeige: $x \in E$ genau dann, wenn $-x \in E$.
b) Sei $A = A^t \in M_n(\mathbb{R})$ und $x^t A x = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ (x aufgefasst als Spaltenvektor). Man zeige $A = 0$.
c) Sei $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine bijektive affine Abbildung mit $A(x) = Bx + c$ und $B \in M_n(\mathbb{R})$, x, c Spaltenvektoren. Es gelte $A(E) = E$. Man zeige, dass dann $c = 0$ ist und dass ${}^t B D B = D$ gilt, wobei D die Diagonalmatrix $D = (d_i \delta_{ij})$ ist.

Aufgabe 5.26 Gegeben sei die Matrix

$$C := \begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte, die zugehörigen Eigenräume und ON-Basen in den Eigenräumen.
b) Geben Sie eine orthogonale Matrix an, die C diagonalisiert.

c) Für einen Vektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ bezeichne x^t den zugehörigen Zeilenvektor. Geben Sie an, welches geometrische Gebilde die Quadrik

$$Q := \{x \mid x \in \mathbb{R}^3, x^t C x = 1\}$$

darstellt (Skizze!).

Aufgabe 5.27 Im euklidischen $\mathbb{R}^3$ seien zwei Geraden g_1 und g_2 gegeben:

$$g_1 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

E sei die Ebene durch 0, die senkrecht zu g_2 ist.

a) Berechnen Sie für einen Punkt $(p_1, p_2, p_3)^t \in \mathbb{R}^3$ seinen Abstand von g_2 .

b) Zeigen Sie, dass

$$Q = \{(p_1, p_2, p_3)^t \in \mathbb{R}^3 \mid p_1^2 + 2p_1p_2 - 2p_2p_3 - p_3^2 + 2p_2 - 2p_3 + 1 = 0\}$$

die Menge der Punkte des $\mathbb{R}^3$ ist, die von g_1 und g_2 denselben Abstand haben. Wie lautet die affine Normalform und die geometrische Bezeichnung der Quadrik Q ? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Der Schnitt der Quadrik Q mit der Ebene E ist ein Kegelschnitt. Um was für einen Kegelschnitt handelt es sich bei $Q \cap E$?

Aufgabe 5.28 Transformieren Sie die folgende Quadrik auf Hauptachsenform:

$$5x_1^2 + 7x_2^2 + 6x_3^2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3 - 2x_1 + 20x_2 - 8x_3 + 9 = 0$$

Aufgabe 5.29 Gegeben sei die quadratische Form

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = 2 \sum_{i < k, i, k=1}^3 x_i x_k.$$

Transformieren Sie Φ auf Hauptachsen, und geben Sie die (orthogonale) Transformationsmatrix, sowie den Trägheitsindex (d.h., die Signatur) von Φ an.

Aufgabe 5.30 Betrachten Sie die quadratische Form in $\mathbb{R}^{2n+1}$

$$\begin{aligned} Q(x_1, \dots, x_{2n+1}) &= x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{2n-1}x_{2n} + x_{2n+1}^2 \\ &= \sum_{i=1}^n x_{2i-1}x_{2i} + x_{2n+1}^2 \end{aligned}$$

a) Finden Sie eine symmetrische Matrix $A \in M_{2n+1}(\mathbb{R})$ mit $Q(x) = x^t A x$.

b) Führen Sie die Hauptachsentransformation für A durch, d.h., bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $T \in O(2n+1)$, so dass $A' = T^t A T$ Diagonalgestalt hat.

c) Transformieren Sie für $n = 1$ die Quadrik

$$M = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Q(x) = x_1x_2 + x_3^2 = 2\}$$

auf euklidische Normalform.

Aufgabe 5.31 Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ sei eine Quadrik Q durch die Gleichung

$$x_1^2 + 2x_2x_3 - 2x_1 + 2 = 0$$

gegeben. Bestimmen Sie eine eigentliche Bewegung des $\mathbb{R}^3$ der Form $x = Sy + t$, so dass Q in den Koordinaten y_1, y_2, y_3 euklidische Normalform annimmt. Welcher Quadriktyp liegt vor? Zeigen Sie weiter, dass Q rotationssymmetrisch ist, und bestimmen Sie im ursprünglichen Koordinatensystem die Rotationsachse.

Aufgabe 5.32 Im $\mathbb{R}^4$ sei $\langle, \rangle: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ die Minkowski-Metrik

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \right\rangle := x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 - x_4 y_4,$$

und U sei der lineare Unterraum $\{x \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$. Beschreiben Sie die Quadrik $Q_U := \{x \in U \mid \langle x, x \rangle = 1\}$ in U durch Koordinaten in U . Von welchem affinen Typ ist Q_U ?

Aufgabe 5.33 Es sei V der 4-dimensionale Vektorraum aller reellen 2×2 -Matrizen und

$$Q := \{A \in V \mid \det(A) = 1\}.$$

Man bestimme 2-dimensionale Unterräume $E_1, E_2 \subset V$ und Isomorphismen $f_i: E_i \rightarrow \mathbb{R}^2$ ($i = 1, 2$), so dass $f_1(Q \cap E_1)$ eine Ellipse und $f_2(Q \cap E_2)$ eine Hyperbel ist.

Aufgabe 5.34 Sei $Q \subset \mathbb{R}^3$ das hyperbolische Paraboloid gegeben durch die Gleichung $z = x^2 - y^2$. Zeigen Sie: Durch jeden Punkt von Q gehen genau zwei Geraden, die ganz in Q verlaufen.

Aufgabe 5.35 Sei $Q \subset \mathbb{R}^3$ die Quadrik mit der Gleichung

$$8x^2 - 7y^2 + 8z^2 + 8xy + 8yz - 2xz + 12x + 6y + 12z = 0.$$

Bestimmen Sie die metrische Normalform von Q .

5.4 Alternierende Bilinearformen

In Abschnitt 5.1.2 vereinbarten wir bereits, eine Bilinearform φ *schiefssymmetrisch* oder *alternierend* zu nennen, wenn $\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\varphi(\mathbf{w}, \mathbf{v})$. Eine darstellende Matrix G für die alternierende Form φ hat die Eigenschaft

$$G^t = -G.$$

Beispiel 5.24 Sei $V = K^2$. Zwei Vektoren

$$\mathbf{v} = (v^1, v^2)^t, \mathbf{w} = (w^1, w^2)^t \in V$$

kann man zu einer 2×2 -Matrix

$$\begin{pmatrix} v^1 & w^1 \\ v^2 & w^2 \end{pmatrix}$$

zusammensetzen. Deren Determinante

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}] := \det \begin{pmatrix} v^1 & w^1 \\ v^2 & w^2 \end{pmatrix} = v^1 w^2 - v^2 w^1$$

ist eine alternierende Bilinearform auf K^2 mit darstellender Matrix

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

bezüglich der kanonischen Basis.

Beispiel 5.25 Es sei $V = K^n, n \geq 2$. Zwei Vektoren

$$\mathbf{v} = (v^1, \dots, v^n)^t, \mathbf{w} = (w^1, \dots, w^n)^t \in V,$$

kann man zu einer $n \times 2$ -Matrix

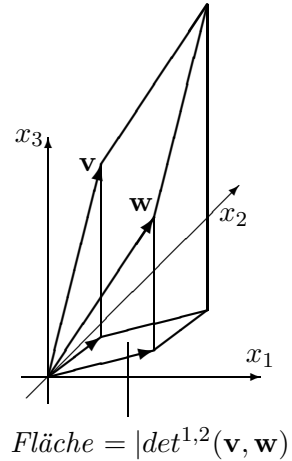
$$\begin{pmatrix} v^1 & w^1 \\ \vdots & \vdots \\ v^n & w^n \end{pmatrix}$$

zusammensetzen. Fixiert man zwei verschiedene Zeilen dieser Matrix, etwa die Zeilen $i \neq j$, dann ist die zugehörige 2×2 -Unter-Determinante

$$\det^{i,j}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := v^i w^j - v^j w^i$$

eine alternierende Bilinearform auf V .

Für $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ hat die 2×2 -Determinante $\det(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ eine geometrische Bedeutung: Ihr Absolutbetrag ist die Fläche des von $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ in $\mathbb{R}^2$ aufgespannten Parallelogramms. Auch zwei Vektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ spannen ein Parallelogramm auf. $\det^{i,j}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ ist - bis auf das Vorzeichen - die Fläche der Projektion dieses Parallelogramms in die i, j -Ebene.



Satz 5.23 Es sei K ein Körper der Charakteristik $\neq 2$ und V ein K -Vektorraum. Die Bilinearform φ auf V ist genau dann alternierend, wenn

$$\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0 \quad \text{für alle } \mathbf{v} \in V.$$

Beweis. Wenn φ alternierend ist, folgt wie üblich $\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$ für alle $\mathbf{v} \in V$.

Sei also jetzt $\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$ für alle $\mathbf{v} \in V$ vorausgesetzt. Dann folgt für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

$$0 = \varphi(\mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) = \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \varphi(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + \varphi(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \varphi(\mathbf{w}, \mathbf{v}). \quad \square$$

Satz 5.24 (Normalform alternierender Matrizen, $\text{char}(K) \neq 2$) Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K mit $\text{char}(K) \neq 2$. Sei φ eine alternierende Bilinearform auf V . Dann gibt es eine Basis, in der φ durch eine direkte Matrizensumme

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & & & & \\ & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & \\ & & & & 0 & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

aus alternierenden 2×2 -Kästchen $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und Nullen dargestellt wird.

Beweis (Induktion nach $n = \dim(V)$.) In Dimension $n = 1$ ist jede alternierende Form $\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$ und ihre darstellende Matrix auch $= 0$.

Sei nun $n \geq 2$. Wenn φ die Nullform ist, d.h., wenn $\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$ für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, dann hat sie die Nullmatrix als darstellende Matrix, und es ist wieder nichts zu zeigen. Andernfalls gibt es Vektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ mit $\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \neq 0$. Diese Vektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ sind dann linear unabhängig, denn

$$a\mathbf{v} + b\mathbf{w} = \mathbf{0} \Rightarrow a\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \varphi(a\mathbf{v} + b\mathbf{w}, \mathbf{w}) = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow b = 0.$$

Also spannen $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ einen zweidimensionalen Untervektorraum $U \subset V$ auf. Wir setzen

$$\mathbf{v}_1 := \frac{1}{\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w})} \cdot \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}_2 := \mathbf{w}$$

und haben dann

$$\varphi(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 1, \quad \varphi(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) = -1,$$

d.h. in der Basis $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ von U hat $\varphi|_U$ die darstellende Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist $\varphi|_U$ nicht-entartet. Nach Satz 5.4 a) ist dann $V = U \oplus U^\perp$ mit $\dim(U^\perp) = n - 2$. Wenden wir die Induktionsannahme auf $U^\perp$ an, so ergibt sich die Behauptung. $\square$

Satz 5.25 (Korollar zu Satz 5.25) a) Der Rang einer alternierenden $n \times n$ -Matrix ist stets gerade.
b) Die Determinante einer alternierenden $n \times n$ -Matrix ist stets ein Quadrat in K .
c) Es sei $G \in M(n \times n, K)$ alternierend und invertierbar. (Wegen a) ist dann notwendigerweise $n = 2m$ gerade.) Dann gibt es eine invertierbare Matrix $T \in M(n \times n, K)$ mit

$$T^t \cdot G \cdot T = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_m \\ -\mathbb{1}_m & 0 \end{pmatrix} =: J.$$

Für diese Matrix J gilt offensichtlich $J^{-1} = -J$.

Beweis. a) Zu einer alternierenden Matrix G gibt es immer eine invertierbare Matrix A so, dass $A^t \cdot G \cdot A$ die Normalform aus Satz 5.25 hat. Deswegen ist der Rang von G gleich dem Rang dieser Normalform, d.h. gleich zweimal der Anzahl der alternierenden Zweierkästchen.

b) Die Determinante eines alternierenden Zweierkästchens in der Normalform ist $= +1$. Nach der Determinanten-Multiplikationsformel ist deswegen die Determinante der Normalform $= 0$ oder $= 1$. Daraus folgt

$$\det(G) = \frac{1}{\det(A)^2} \quad \text{oder} \quad \det(G) = 0.$$

c) Wenn G invertierbar ist, enthält seine Normalform (Satz 5.25) keine Nullen auf der Diagonale außerhalb der Zweierkästchen. Durch Simultane Zeilen- und Spaltenvertauschungen kann man deswegen die Normalform in Satz 5.25 auf die Form der Matrix J bringen. Eine solche Vertauschung ist eine Ähnlichkeitstransformation, deren Transformationsmatrix eine Permutationsmatrix $P = P^t = P^{-1}$ zur entsprechenden Vertauschung ist. $\square$

Bemerkung (von historischem Interesse): Die Wurzel aus der Determinante der alternierenden Matrix G heißt *Pfaffsche* von G nach dem Mathematiker Johann Friedrich Pfaff. Dieser auch in Erlangen tätige Mathematiker war formal der Doktorvater von Gauß. Der Pfaffweg auf dem Erlanger Burgberg ist nach ihm und seinem Bruder Johann Wilhelm Andreas benannt.

Die Isometrien einer nicht ausgearteten alternierenden Bilinearform bekommen einen eigenen Namen.

Definition 5.19 *Es sei V ein K -Vektorraum und φ eine nicht ausgeartete, alternierende Bilinearform. Eine Isometrie $\Phi : V \rightarrow V$ heißt symplektischer Automorphismus. Die symplektische Gruppe $Sp(V) = Sp(V, \varphi)$ ist die Menge aller dieser symplektischen Automorphismen. (Dass dies unter Hintereinanderschaltung eine Gruppe ist, wurde in Satz 5.3 gezeigt.)*

Eine Matrix $A \in M(2m \times 2m, K)$ heißt symplektisch, wenn sie darstellende Matrix eines symplektischen Automorphismus des K^{2m} bezüglich der alternierenden Form mit der Matrix J aus Satz 5.25 ist.

Symplektische Matrizen $A \in M(n \times n, K)$ sind also charakterisiert durch

$$A^t \cdot J \cdot A = J.$$

Die Matrix J kann man durch m^2 Spaltenvertauschungen auf die Form

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1}_m & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_m \end{pmatrix}$$

bringen. Damit folgt

$$\det(J) = (-1)^{m^2} \cdot \det(\mathbb{1}_m) = 1,$$

und man erhält

$$\det(A^2) = \det(A^t) \cdot \det(J) \cdot \det(A) = \det(J) = 1,$$

also $\det(A) = \pm 1$.

Satz 5.26 *a) Mit A ist auch die Matrix A^t symplektisch.*

b) Wenn A symplektisch ist, dann sind die Matrizen A^{-1} und A^t zueinander ähnlich.

Beweis. a) Die Inverse Matrix von J ist $J^{-1} = -J$. Mit A ist auch A^{-1} symplektisch, also ist

$$(A^{-1})^t \cdot J \cdot A^{-1} = J.$$

Wir invertieren diese Gleichung und sehen

$$-J = J^{-1} = A \cdot J^{-1} \cdot A^t = -A \cdot J \cdot A^t.$$

Das zeigt, dass A symplektisch ist.

b) Aus $A^t \cdot J \cdot A = J$ folgt $J^{-1} \cdot A^t \cdot J = A^{-1}$. □

Satz 5.27 *Hat die symplektische Matrix A den Eigenwert λ_0 mit der (algebraischen) Vielfachheit r , so hat sie auch den Eigenwert $1/\lambda_0$ mit dieser Vielfachheit r .*

Beweis. Wegen $\det(A) \neq 0$ ist 0 kein Eigenwert von A . Mit Satz 5.27 b) ist

$$\chi_A(\lambda) = \chi_{A^t}(\lambda) = \chi_{A^{-1}}(\lambda).$$

Nun ist

$$\chi_{A^{-1}}(\lambda) = \det(A^{-1} - \lambda \mathbb{1}_n) = \frac{1}{\det(A)} \det(A \cdot (A^{-1} - \lambda \mathbb{1}_n)) = \frac{1}{\det(A)} \det(\mathbb{1}_n - \lambda A) = \frac{1}{\det(A)} \det(\lambda A - \mathbb{1}_n),$$

letzteres, weil die Anzahl der Zeilen von A gerade ist. Für $\lambda \neq 0$ ist also

$$\chi_A(\lambda) = \frac{\lambda^n}{\det(A)} \det(A - \frac{1}{\lambda} \mathbb{1}_n) = \frac{\lambda^n}{\det(A)} \chi_A(\frac{1}{\lambda}).$$

Mit der Zerlegung von $\chi_A(\lambda)$ in Linearfaktoren folgt die Behauptung. $\square$

Sind r_1 und r_2 die Vielfachheiten der Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$, so ist

$$\det(A) = 1^{r_1} \cdot (-1)^{r_2} \cdot \left(\lambda_3 \cdot \frac{1}{\lambda_3} \right)^{r_3} \cdot \dots = (-1)^{r_2}$$

= 1 wenn r_2 gerade ist und = -1 wenn r_2 ungerade ist.

Satz 5.28 Für jede symplektische Matrix A gilt

$$\det(A) = 1.$$

Beweis. Es ist zu zeigen, dass r_2 , die Dimension des Hauptraums U_2 zum Eigenwert $\lambda_2 = -1$, gerade ist. Nach Satz 5.5 ist U_2 (bezüglich J) orthogonal zu jedem anderen Hauptraum. Wir haben also eine orthogonale direkte Summen-Zerlegung $\mathbb{C}^n = U_2 \oplus U'$. Daraus folgt, dass die schiefsymmetrische Form mit Matrix J auf U_2 nicht-entartet ist. Die Behauptung folgt aus Satz 5.26 a). $\square$

Symplektische Matrizen sind in der Hamiltonschen Mechanik wichtig. Eine Hamilton-Funktion

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t), \quad \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$$

definiert für n verallgemeinerte Koordinaten $q_i = q_i(t)$ und n verallgemeinert Impulse $p_i = p_i(t)$ das Differentialgleichungssystem

$$q'_i(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t), \quad p'_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial q_i}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t) \quad (i = 1, \dots, n).$$

Mit

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \mathbf{p}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$$

kann man dieses System auch schreiben

$$\mathbf{u}'(t) = J \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}(t), t).$$

Die Besonderheit solcher Systeme ist, dass die Funktion

$$H(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t)) = \text{const}$$

zeitunabhängig ist. In der Tat ihre Ableitung nach der Zeit ist (mit der Kettenregel für Abbildungen aus Analysis II)

$$\frac{d}{dt} H(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} q'_i(t) + \frac{\partial H}{\partial p_i} p'_i(t) = \sum_{i=1}^n -p'_i(t) q'_i(t) + q'_i(t) p'_i(t) \equiv 0.$$

Aufgabe 5.36 Es sei A eine reelle $(n \times n)$ -Matrix mit zugehörigem charakteristischem Polynom $p_A(x) = \det(A - xE_n)$. Zeigen Sie: Ist A schiefsymmetrisch, so ist für eine Nullstelle λ aus $\mathbb{C}$ von $p_A(x)$ auch $-\lambda$ Nullstelle von $p_A(x)$.

Aufgabe 5.37 Es sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Zeigen Sie:

- a) Für eine alternierende Bilinearform φ auf V sind äquivalent:
- 1) $\text{Rang}(\varphi) \leq 2k$,
 - 2) es gibt Linearformen $f_1, g_1, \dots, f_k, g_k \in V^*$ mit $\varphi = f_1 \wedge g_1 + \dots + f_k \wedge g_k$.
- b) Für zwei Linearformen $f, g \in V^*$ sind äquivalent:
- 1) $f \wedge g = 0$,
 - 2) f und g sind linear abhängig.

Aufgabe 5.38 Zeigen Sie: Durch

$$\varphi(f, g) := \int_0^1 f(x)g'(x) dx$$

wird eine nicht-entartete alternierende Bilinearform auf dem $\mathbb{R}$ -Vektorraum der über dem Intervall $[0, 1]$ stetig differenzierbaren Funktionen f mit $f(0) = f(1) = 0$ definiert.

Aufgabe 5.39 Es sei Λ der $\mathbb{R}$ -Vektorraum der alternierenden Bilinearformen auf $\mathbb{R}^4$. Zeigen Sie:

a) Ist $f^1, \dots, f^4 \in (\mathbb{R}^4)^*$ die Dualbasis zur kanonischen Basis des $\mathbb{R}^4$, so bilden die alternierenden Bilinearformen

$$f^1 \wedge f^2, f^1 \wedge f^3, f^1 \wedge f^4, f^2 \wedge f^3, f^2 \wedge f^4, f^3 \wedge f^4$$

eine Basis von Λ .

b) Durch

$$p(f^i \wedge f^j, f^k \wedge f^l) := \begin{cases} 0 & \text{falls } \{i, j\} \cap \{k, l\} \neq \emptyset \\ \text{sign}(\sigma) & \text{falls } \sigma : 1, 2, 3, 4 \mapsto i, j, k, l \end{cases}$$

wird auf Λ eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform definiert. Geben Sie die darstellende Matrix von p in der Basis aus a) an.

c) Für $\varphi \in \Lambda$ ist $p(\varphi, \varphi) = 0$ genau dann, wenn $\varphi = f \wedge g$ mit $f, g \in (\mathbb{R}^4)^*$.

Aufgabe 5.40 Zeigen Sie:

- a) Die Matrix J aus Satz 5.26 ist symplektisch.
- b) Eine 2×2 -Matrix ist genau dann symplektisch, wenn sie die Determinante $= 1$ hat.

5.5 Hermitesche Formen

Definition 5.20 Es sei V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. Eine Abbildung

$$\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$

heißt hermitesche Form (oder eingedeutschter: hermitische Form), wenn:

1) (Linearität im ersten Argument) Für alle $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ und $c^1, c^2 \in \mathbb{C}$ gilt

$$\varphi(c^1 \mathbf{v}_1 + c^2 \mathbf{v}_2, \mathbf{w}) = c^1 \varphi(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) + c^2 \varphi(\mathbf{v}_2, \mathbf{w}).$$

2) (Antilinearität im zweiten Argument) Für alle $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in V$ und $c^1, c^2 \in \mathbb{C}$ gilt

$$\varphi(\mathbf{v}, c^1 \mathbf{w}_1 + c^2 \mathbf{w}_2) = \overline{c^1} \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1) + \overline{c^2} \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}_2).$$

3) (Hermite-Symmetrie) Für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ ist

$$\varphi(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \overline{\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w})}$$

Natürlich ist 2) eine Konsequenz von 1) und 3), oder 1) eine Konsequenz von 2) und 3). Manchmal vereinbart man auch Antilinearität im ersten Argument und Linearität im zweiten.

Eine Konsequenz der Hermite-Symmetrie ist insbesondere

$$\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R} \quad \text{für alle} \quad \mathbf{v} \in V.$$

Beispiel 5.26 Die Standardform auf $\mathbb{C}^n$ ordnet je zwei Vektoren

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w^1 \\ \vdots \\ w^n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

die komplexe Zahl

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle := \sum_{\nu=1}^n v^\nu \overline{w^\nu} = \mathbf{v}^t \cdot \overline{\mathbf{w}}$$

zu. Für alle $\mathbf{v} \in V$ ist $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{\nu=1}^n v^\nu \overline{v^\nu} = \sum_{\nu=1}^n |v^\nu|^2$ reell, und echt > 0 wenn $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

Beispiel 5.27 Auf den $\mathbb{C}$ -Vektorraum der stetigen Funktionen $v : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ist das Integral

$$\int_a^b v(x) \overline{w(x)} dx$$

eine hermitesche Form.

Beispiel 5.28 Auf dem Vektorraum $M(m \times n, \mathbb{C})$ der komplexen $m \times n$ -Matrizen ist

$$Sp(A \cdot \overline{B}^t) = \sum_{\mu=1}^m \sum_{\nu=1}^n A_{\mu}^{\nu} \overline{B_{\mu}^{\nu}}$$

eine hermitesche Form.

Ist φ eine hermitesche Form auf dem endlich-dimensionalen $\mathbb{C}$ -Vektorraum V , dann gehört zu jeder Basis $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ eine darstellende Matrix

$$H = (h_{\mu, \nu}) := \varphi(\mathbf{v}_{\mu}, \mathbf{v}_{\nu}).$$

Aus den Eigenschaften 1) und 2) folgt, dass φ durch seine darstellende Matrix eindeutig bestimmt ist:

$$\varphi\left(\sum_{\mu=1}^n x^\mu \mathbf{v}_\mu, \sum_{\nu=1}^n y^\nu \mathbf{v}_\nu\right) = \sum_{\mu,\nu=1}^n x^\mu h_{\mu,\nu} \overline{y^\nu} = \mathbf{x}^t \cdot H \cdot \overline{\mathbf{y}}.$$

Eigenschaft 3) hat für die darstellende Matrix die Konsequenz

$$h_{\nu,\mu} = \varphi(\mathbf{v}_\nu, \mathbf{v}_\mu) = \overline{\varphi(\mathbf{v}_\mu, \mathbf{v}_\nu)} = \overline{h_{\mu,\nu}}, \quad H = \overline{H}^t.$$

Die Matrix H ist also hermitesch.

Ist H hermitesch, so definiert die Formel

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^t \cdot H \cdot \overline{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n,$$

eine hermitesche Form auf $\mathbb{C}^n$. Daraus folgt, dass es zu einer Basis $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ immer genau eine hermitesche Form mit darstellender Matrix H gibt.

Die Eigenschaft 'hermitesch' der Matrix H ist äquivalent mit

$$\begin{array}{ll} h_{\mu,\mu} = \overline{h_{\mu,\mu}} & \text{Diagonaleinträge } h_{\mu,\mu} \text{ sind reell,} \\ \operatorname{Re}(h_{\mu,\nu}) = \operatorname{Re}(h_{\nu,\mu}) & \text{Realteil } \operatorname{Re}(H) \text{ ist symmetrisch,} \\ \operatorname{Im}(h_{\mu,\nu}) = -\operatorname{Im}(h_{\nu,\mu}) & \text{Imaginärteil } \operatorname{Im}(H) \text{ ist schiefsymmetrisch.} \end{array}$$

Die hermiteschen $n \times n$ -Matrizen bilden einen *reellen* Vektorraum der reellen Dimension

$$\frac{\begin{array}{l} n \quad (n \text{ reelle Diagonaleinträge}) \\ +2(1+2+\dots+(n-1)) \quad (\text{komplexe Einträge oberhalb der Diagonale}) \end{array}}{= n + n(n-1) = n^2}$$

So sind beispielsweise die hermiteschen 2×2 -Matrizen genau die Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & c \end{pmatrix}, \quad a, c \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{C}.$$

Eine $\mathbb{R}$ -Basis für den vierdimensionalen reellen Vektorraum dieser Matrizen bilden z.B.

$$\mathbb{1}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Für hermitesche Formen gilt folgende Version der Polarisationsformel.

Satz 5.29 (Polarisationsformel für hermitesche Formen)

$$\operatorname{Re}(\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w})) = \frac{1}{2}(\varphi(\mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) - \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - \varphi(\mathbf{w}, \mathbf{w})).$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) &= \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \varphi(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + \varphi(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \\ &= \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \overline{\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w})} + \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \varphi(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \\ &= 2\operatorname{Re}(\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w})) + \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \varphi(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \end{aligned}$$

□

Eine Konsequenz dieser Polarisationsformel ist, genau wie im reellen symmetrischen Fall, dass die hermitesche Form $\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ durch die Funktion $q_\varphi(\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ eines Vektors eindeutig bestimmt ist: Der Realteil $\operatorname{Re}(\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}))$ ist durch die Polarisationsformel festgelegt, und daraus erhält man mit

$$\operatorname{Im}(\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w})) = -\operatorname{Re}(\varphi(i \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w}))$$

auch den Imaginärteil.

Für hermitesche Formen gilt folgende Version der Basis-Transformations-Formel: Wenn A die Übergangsmatrix von einer alten Basis in eine neue Basis ist, dann haben wir

alter Koordinatenvektor	$\mathbf{x}$
neuer Koordinatenvektor	$A^{-1} \cdot \mathbf{x}$
Form in der alten Basis	$\mathbf{x}^t \cdot H \cdot \overline{\mathbf{x}}$
Form in der neuen Basis	$(A^{-1}\mathbf{x})^t \cdot H' \cdot \overline{A^{-1} \cdot \mathbf{x}} =$ $(A^{-1}\mathbf{x})^t \cdot A^t \cdot H \cdot \overline{A \cdot A^{-1} \cdot \mathbf{x}}$

Die Transformationsformel ist also

$$H' = A^t \cdot H \cdot \overline{A}.$$

Ist H eine hermitesche Matrix, dann ist auch H' wieder hermitesch:

$$(A^t \cdot H \cdot \overline{A})^t = \overline{A}^t \cdot H^t \cdot A = \overline{A^t \cdot H \cdot \overline{A}}$$

Auch für hermitesche Formen definiert man das orthogonale Komplement einer Menge $A \subset V$ als

$$A^\perp = \{\mathbf{v} \in V : \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{v}) = 0 \text{ für alle } \mathbf{a} \in A\}.$$

Auch aus der Anti-Linearität von φ im zweiten Argument folgt, dass $A^\perp$ ein komplexer Untervektorraum von V ist. Wieder heißt $V^\perp \subset V$ der Entartungsraum. Und φ heißt nicht-entartet, wenn $V^\perp = \{\mathbf{0}\}$. Ist V endlich-dimensional, so ist der Rang einer darstellenden Matrix H für φ unabhängig von der Basiswahl. Und φ ist genau dann nicht entartet, wenn dieser Rang maximal, $= \dim(V)$ ist. Und in diesem Fall existiert zu jeder $\mathbb{C}$ -Linearform $f \in V^*$ wieder ein (eindeutig bestimmtes) $\mathbf{v} \in V$ mit $f(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ für alle $\mathbf{w} \in V$. (Wegen der Antilinearität sind hier erstes und zweites Argument im Vergleich zu 5.1 vertauscht.) Wenn man dies konsequent durchhält, kann man Satz 5.4 wörtlich für hermitesche Formen beweisen.

Isometrien definiert man wie in Definition 5.3. Die Isometrien auf dem $\mathbb{C}^n$ mit der hermiteschen Standard-Form sind jetzt die unitären Abbildungen. Und wie bei Satz 5.3 beweist man, dass die Isometrien einer nicht-entarteten hermiteschen Form auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum eine Gruppe bilden. Ist $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ eine Basis von V und H die dastellende Matrix der hermiteschen Form φ in dieser Basis, so gilt: Die $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung $\Psi : V \rightarrow V$ ist genau dann eine Isometrie, wenn für ihre dastellende Matrix A bezüglich der fixierten Basis gilt

$$H = A^t \cdot H \cdot \overline{A}.$$

Satz 5.30 (Diagonalisierung hermitescher Formen) *Es sei φ eine hermitesche Form auf dem endlich-dimensionalen $\mathbb{C}$ -Vektorraum V . Dann gibt es eine Basis $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ in der φ die darstellende Matrix*

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1}_p & & \\ & -\mathbb{1}_m & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

hat.

Beweis. Der Beweis dafür, dass man φ in einer geeigneten Basis durch eine Diagonalmatrix beschreiben kann, ist eine hermitesche Version des Beweises von Satz 5.8. Wird φ durch eine Diagonalmatrix

$$H = \begin{pmatrix} h_{1,1} & & \\ & \ddots & \\ & & h_{n,n} \end{pmatrix}$$

beschrieben, so ist auch diese Matrix H hermitesch, und die Diagonalelemente $h_{\nu,\nu}$ sind reell. Bei einer Basistransformation

$$H' = A^t \cdot H \cdot \overline{A}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

mit einer komplexen Diagonalmatrix A als Übergangsmatrix ändern sich die Diagonaleinträge $h_{\nu,\nu}$ von H in

$$h'_{\nu,\nu} = |a_{\nu,\nu}|^2 \cdot h_{\nu,\nu}.$$

Wenn $h_{\nu,\nu} \neq 0$, so kann man diesen Eintrag auf ± 1 normieren. (Aber das Vorzeichen kann man nicht ändern!) Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Zu jeder hermiteschen Matrix H gibt es also eine invertierbare komplexe Matrix A so, dass

$$A^t \cdot H \cdot \overline{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_p & & \\ & -\mathbb{1}_m & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

Wieder ist

$$p + m = \text{Rang}(H)$$

und wie im Beweis des Sylvesterschen Trägheitssatzes zeigt man wieder dass auch die beiden Zahlen p und m unabhängig von der gewählten Diagonalisierung sind.

Definition 5.21 Das Paar (p, m) heißt die Signatur der hermiteschen Matrix H (bzw. der zugehörigen hermiteschen Form). Eine hermitesche Matrix (oder Form) heißt

<i>positiv definit</i>	$\Leftrightarrow \mathbf{v}^t \cdot H \cdot \overline{\mathbf{v}} > 0$ für alle $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$
	$\Leftrightarrow p = n$
<i>negativ definit</i>	$\Leftrightarrow \mathbf{v}^t \cdot H \cdot \overline{\mathbf{v}} < 0$ für alle $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$
	$\Leftrightarrow m = n$
<i>positiv semi-definit</i>	$\Leftrightarrow \mathbf{v}^t \cdot H \cdot \overline{\mathbf{v}} \geq 0$ für alle $\mathbf{v}$
	$\Leftrightarrow m = 0$
<i>negativ semi-definit</i>	$\Leftrightarrow \mathbf{v}^t \cdot H \cdot \overline{\mathbf{v}} \leq 0$ für alle $\mathbf{v}$
	$\Leftrightarrow p = 0$
<i>indefinit</i>	$\Leftrightarrow p > 0$ und $m > 0$

Wir wollen für einen komplexen Vektor $\mathbf{w} = \mathbf{u} + i\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, und die komplexe hermitesche Matrix

$$H = S + iA, \quad S \text{ reell symmetrisch, } A \text{ reell alternierend}$$

den Wert

$$\mathbf{w}^t \cdot H \cdot \overline{\mathbf{w}} = (\mathbf{u} + i\mathbf{v})^t \cdot H \cdot (\mathbf{u} - i\mathbf{v}) = \mathbf{u}^t \cdot H \cdot \mathbf{u} + i \cdot (\mathbf{v}^t \cdot H \cdot \mathbf{u} - \mathbf{u}^t \cdot H \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{v}^t \cdot H \cdot \mathbf{v}$$

als Funktion von $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ berechnen. Wegen $\mathbf{u}^t \cdot A \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v}^t \cdot A \cdot \mathbf{v} = 0$ ist

$$\mathbf{u}^t \cdot H \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}^t \cdot S \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{v}^t \cdot H \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}^t \cdot S \cdot \mathbf{v}$$

und

$$\mathbf{u}^t \cdot H \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^t \cdot S \cdot \mathbf{v} + i\mathbf{u}^t \cdot A \cdot \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}^t \cdot H \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v}^t \cdot S \cdot \mathbf{u} + i\mathbf{v}^t \cdot A \cdot \mathbf{u}.$$

Damit wird

$$\mathbf{v}^t \cdot H \cdot \mathbf{u} - \mathbf{u}^t \cdot H \cdot \mathbf{v} = 2i \cdot \mathbf{v}^t \cdot A \cdot \mathbf{u}.$$

Insgesamt finden wir

$$\mathbf{w}^t \cdot H \cdot \bar{\mathbf{w}} = \mathbf{u}^t \cdot S \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v}^t \cdot S \cdot \mathbf{v} + 2 \cdot \mathbf{v}^t \cdot A \cdot \mathbf{u}.$$

Die Definitheit von H hängt also nicht nur von $S = \operatorname{Re}(H)$ ab. Das war die schlechte Nachricht. Die gute Nachricht: Das Hurwitz-Kriterium für Positiv-Definitheit hermitescher Matrizen gilt wörtlich wie für reelle symmetrische Matrizen.

Satz 5.31 *Es sei H eine hermitesche $n \times n$ -Matrix mit den linken oberen Untermatrizen*

$$H_\nu = (h_{k,l})_{k,l=1,\dots,\nu}, \quad \nu = 1, \dots, n.$$

Dann sind äquivalent:

- a) H ist positiv definit.
- b) $\det(H_\nu) > 0$ für $\nu = 1, \dots, n$.

Beweis. a) $\Rightarrow$ b): Alle (reellen) Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von H sind positiv. Dann ist auch $\det(H) = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n > 0$. Das gleiche gilt für die mit H positiv definiten Matrizen H_ν .

b) $\Rightarrow$ a) (Induktion nach n): Nach Induktionsannahme ist die Matrix H_{n-1} positiv definit und wie im Beweis von Satz 5.13 ist die durch H definierte hermitesche Form φ positiv definit auf dem Unterraum $\mathbb{C}^{n-1} \subset \mathbb{C}^n$, der von den ersten $n-1$ Einheitsvektoren aufgespannt wird. Insbesondere ist diese Form auf $\mathbb{C}^{n-1}$ nicht entartet. Somit ist $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{n-1} \oplus \mathbb{C} \cdot \mathbf{e}$ mit $\mathbb{C}^{n-1} \perp \mathbf{e}$ bezüglich φ . Die Form φ wird in der Basis $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}, \mathbf{e}$ durch eine Blockmatrix

$$\begin{pmatrix} H_{n-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^t & h \end{pmatrix}$$

mit $h \in \mathbb{R}$ dargestellt. Aus $\det(H) > 0$ und $\det(H_{n-1}) > 0$ folgt auch hier $h > 0$. Damit ist φ positiv definit.

Aufgabe 5.41 a) *Untersuchen Sie die Definitheit der hermiteschen Matrix*

$$\begin{pmatrix} t & i \\ -i & t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$.

b) *Geben Sie eine hermitesche 2×2 -Matrix H an, die nicht positiv definit ist, wo aber die reelle Matrix $S = \operatorname{Re}(H)$ sehr wohl positiv definit ist.*

Aufgabe 5.42 *Bestimmen Sie eine $\mathbb{C}$ -Basis von Eigenvektoren für die hermitesche Matrix*

$$\begin{pmatrix} 0 & i & -i \\ -i & 0 & i \\ i & -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5.43 Sei A eine hermitesche, positiv definite $n \times n$ -Matrix mit komplexen Koeffizienten. Zeigen Sie, dass genau eine komplexe $n \times n$ -Matrix B existiert mit folgenden Eigenschaften:

- i) B ist untere Dreiecksmatrix mit positiven Diagonaleinträgen.
- ii) $A = B\overline{B}^t$, hier bezeichnet $\overline{B}^t$ die Transponierte der Konjugierten von B .

Hinweis: Induktion nach n .

6 Einführung in die Lineare Optimierung

Optimierung ist ein mathematisches Gebiet, das nach dem zweiten Weltkrieg aus Problemen der mathematischen Anwendung entstanden ist. Je nachdem, ob man den innermathematischen Aspekt, oder die Frage der Anwendungen in den Mittelpunkt stellt, kann man dieses Gebiet der reinen oder der angewandten Mathematik zuordnen: zum Einen handelt es sich um *Polyedertheorie*, die die zulässige Menge des Optimierungsproblems und das Verhalten eines linearen Funktional, des *Zielfunktional*, darauf beschreibt. Zum Anderen handelt es sich um die effiziente und stabile algorithmische Lösung solcher linearer Optimierungsprobleme mit dem *Simplex-Verfahren*.

Die mathematische Theorie der linearen Optimierung ist kurz dargestellt im zweiten Kapitel des Buches

Fischer, G.: Analytische Geometrie. Vieweg 1978.

Dort werden genau zwei anwendungs-orientierte Bücher zitiert, offenbar sind es Klassiker:

Collatz, L., Wetterling, W.: Optimierungsaufgaben. Springer 1966.

Dantzig, G.B.: Lineare Programmierung und Erweiterungen. Springer 1966.

Sehr viel abgeschrieben habe ich aus dem Skriptum

Zowe, J.: Optimierung I. Theorie und Praxis der linearen Optimierung. WS 90/91.

<http://www.technik.oeh.uni-linz.ac.at/skripten/opti1.ps.gz>

Der große Vorteil beim Anfertigen eines Skriptums ist, dass man hemmungslos abschreiben darf. Man sollte es nur immer angeben. Wenn man ein Buch schreibt, darf man das nicht, das ist ein Nachteil. Der große Vorteil beim Schreiben eines Buches ist, dass man dafür Geld bekommt.

Im Semester 2003 wurde in Erlangen zum ersten Mal lineare Optimierung in der Vorlesung 'Lineare Algebra' behandelt. Dies geschah, weil damals zum ersten Mal Studenten des Studienganges Wirtschaftsmathematik die Vorlesung „Lineare Algebra“ in Erlangen hörten. Für sie ist Optimierung ein unverzichtbares Teilgebiet der Mathematik.

6.1 Elementare affine und konvexe Geometrie

6.1.1 Elementare affine Geometrie

Zuerst erinnern wir uns an die Definition des affinen Unterraums im $\mathbb{R}^n$. Nach Definition ist das die Lösungsmenge eines linearen LGS. I.a. ist dieses System inhomogen. Wenn es homogen ist, ist der Lösungsraum sogar ein linearer Unterraum. Hat das LGS die Gestalt

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n &= c_1 \\ &\vdots \\ a_{k,1}x_1 + \dots + a_{k,n}x_n &= c_k \end{aligned}$$

so kürzen wir jetzt ab:

$$h_i(\mathbf{x}) := a_{i,1}x_1 + \dots + a_{i,n}x_n.$$

Die Funktion $h_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Linearform auf dem $\mathbb{R}^n$. Einen affinen Unterraum $A \subset \mathbb{R}^n$ können wir dann so schreiben:

$$A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : h_1(\mathbf{x}) = c_1, \dots, h_k(\mathbf{x}) = c_k\}.$$

Ist $\mathbf{a} \in A$ ein fester Punkt, so sagt der Struktursatz 1.4:

$$A = \{\mathbf{a} + \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : h_1(\mathbf{x}) = \dots = h_k(\mathbf{x}) = 0\}.$$

Hier durchläuft $\mathbf{x}$ also den Lösungsraum des zugehörigen homogenen LGS. Der ist ein Untervektorraum, und hat eine Basis, etwa $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d$. Dann ist

$$\begin{aligned} A &= \mathbf{a} + t_1 \mathbf{x}_1 + \dots + t_d \mathbf{x}_d, \quad t_1, \dots, t_d \in \mathbb{R} \\ &= (1 - t_1 - \dots - t_d) \mathbf{a} + t_1 \mathbf{y}_1 + \dots + t_d \mathbf{y}_d \\ &= t_0 \mathbf{y}_0 + t_1 \mathbf{y}_1 + \dots + t_d \mathbf{y}_d \end{aligned}$$

mit

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{a}, \mathbf{y}_i = \mathbf{a} + \mathbf{x}_i \in A \text{ und } t_0 + t_1 + \dots + t_d = 1.$$

Definition 6.1 Die Dimension des affinen Unterraums mit dem inhomogenen LGS $h_i(\mathbf{x}) = c_i$ ist die Dimension des zugehörigen Untervektorraums mit dem homogenen LGS $h_i(\mathbf{x}) = 0$.

Für diese Dimension d gilt die bekannte Formel

$$d = n - r,$$

wo r der Rang der Koeffizientenmatrix des LGS ist. Dieser Rang ist die Maximalzahl linear unabhängiger Zeilen in der Koeffizientenmatrix, d.h., die Maximalzahl linear unabhängiger Linearformen h_i unter den $h_1, \dots, h_k$.

Null-dimensionale affine Unterräume bestehen nur aus einem Punkt. Ein ein-dimensionaler affiner Unterraum enthält außer einem Punkt $\mathbf{a}$ noch einen Punkt $\mathbf{b}$, sowie alle Vektoren

$$\mathbf{a} + t \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (1 - t) \mathbf{a} + t \mathbf{b}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Es handelt sich um eine Gerade, mit Anfangspunkt $\mathbf{a}$ und Richtungsvektor $\mathbf{b} - \mathbf{a}$.

Die Parametrisierung $(1 - t) \mathbf{a} + t \mathbf{b}$ kann man etwas symmetrischer schreiben als

$$s \cdot \mathbf{a} + t \cdot \mathbf{b} \quad \text{mit} \quad s, t \in \mathbb{R}, s + t = 1.$$

Dies ist der einfachste nicht-triviale Spezialfall in folgender Definition:

Definition 6.2 Es seien $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_l \in \mathbb{R}^n$. Eine Affinkombination dieser Vektoren ist eine Linearkombination

$$t_1 \mathbf{y}_1 + \dots + t_l \mathbf{y}_l$$

mit $t_1, \dots, t_l \in \mathbb{R}$ und $t_1 + \dots + t_l = 1$.

Satz 6.1 Für eine nicht-leere Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:

- a) $A \subset \mathbb{R}^n$ ist ein affiner Unterraum;
- b) mit endlich vielen Punkten $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_l \in A$ gehört auch jede Affinkombination dieser Punkte zu A .

Beweis. a) $\Rightarrow$ b): Es sei $A = \mathbf{a} + U$ mit einem Untervektorraum $U \subset \mathbb{R}^n$. Wir betrachten Vektoren

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{a} + \mathbf{u}_i \in A, \quad \mathbf{u}_i \in U, \quad i = 1, \dots, l.$$

Sind $t_i \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{i=1}^l t_i = 1$, so ist

$$\sum_{i=1}^l t_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^l t_i \mathbf{a} + \sum_{i=1}^l t_i \mathbf{u}_i = \mathbf{a} + \sum_{i=1}^l t_i \mathbf{u}_i \in \mathbf{a} + U = A.$$

b) $\Rightarrow$ a): Es genügt zu zeigen, dass die Menge

$$U := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{y} := \mathbf{a} + \mathbf{x} \in A\}$$

einen Untervektorraum $\subset \mathbb{R}^n$ bildet. Seien also $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in U$ und $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\mathbf{a} + s_1 \mathbf{x}_1 + s_2 \mathbf{x}_2 = (1 - s_1 - s_2) \mathbf{a} + s_1 (\mathbf{a} + \mathbf{x}_1) + s_2 (\mathbf{a} + \mathbf{x}_2)$$

eine Affinkombination der drei Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in A$ und gehört nach Voraussetzung zu A . Also liegt $s_1 \mathbf{x}_1 + s_2 \mathbf{x}_2$ in U . $\square$

Satz 6.2 (Korollar) *Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Menge. Dann ist die Menge A aller Affinkombinationen von endlich vielen Vektoren aus M ein affiner Unterraum.*

Eine Affinkombination von zwei Affinkombinationen ist nämlich wieder eine Affinkombination. Wegen der vielen Indizes möchte ich das hier nicht ausführlich nachrechnen.

Definition 6.3 *Die Menge A aus Satz 6.2 heißt der von M aufgespannte affine Unterraum.*

Das einfachste Beispiel für einen solchen aufgespannten affinen Unterraum ist die Gerade

$$\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}, \quad t \in \mathbb{R},$$

die von zwei Punkten $\mathbf{a} \neq \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ aufgespannt wird.

Weil jeder Punkt $\mathbf{a} \in M$ die triviale Affinkombination $1 \cdot \mathbf{a}$ ist, enthält der von M aufgespannte affine Unterraum sicher die Menge M . Nach Satz 6.1 b) ist klar, dass A der kleinste affine Teilraum des $\mathbb{R}^n$ ist, der die Menge M enthält, im folgenden Sinn: Ist $B \subset \mathbb{R}^n$ ein weiterer affiner Unterraum mit $M \subset B$, so gilt $A \subset B$.

Definition 6.4 *Die $m + 1$ Punkte $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$ heißen affin unabhängig, wenn die m Vektoren*

$$\mathbf{x}_1 := \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{x}_m := \mathbf{a}_m - \mathbf{a}_0$$

linear unabhängig sind.

Die Punkte $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_m$ sind also genau dann affin unabhängig, wenn sie einen m -dimensionalen affinen Unterraum aufspannen. Deswegen spielt der Punkt $\mathbf{a}_0$ in dieser Definition nur scheinbar eine Sonderrolle. Ist $\mathbf{a}_i$ einer dieser affin unabhängigen Punkte, so sind auch die Differenzen $\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i$, $j \neq i$, linear unabhängig.

Die Punkte $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_m$ sind genau dann affin abhängig, wenn einer der Differenzvektoren $\mathbf{x}_i$ eine Linearkombination der anderen ist, etwa

$$\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_0 = \sum_{i=1}^{m-1} t_i \cdot (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_0).$$

Genau dann ist

$$\mathbf{a}_m = \left(1 - \sum_{i=1}^{m-1} t_i\right) \cdot \mathbf{a}_0 + \sum_{i=1}^{m-1} t_i \cdot \mathbf{a}_i = \sum_{i=0}^{m-1} s_i \mathbf{a}_i, \quad s_0 + \dots + s_{m-1} = 1,$$

eine Affinkombination der anderen Vektoren.

Ganz ähnlich, wie bei der linearen Unabhängigkeit, gilt auch hier:

Satz 6.3 *Es seien $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$ und $A \subset \mathbb{R}^n$ der von diesen Punkten aufgespannte affine Unterraum. Dann sind äquivalent:*

- a) *Die Punkte $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_m$ sind affin unabhängig;*
- b) *(Test auf affine Unabhängigkeit) ist*

$$\sum_{i=0}^m s_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0} \quad \text{mit} \quad \sum_{i=0}^m s_i = 0,$$

dann folgt daraus $s_0 = \dots = s_m = 0$;

c) *jeder Punkt $\mathbf{a} \in A$ ist eine Affinkombination der $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_m$, in der die Koeffizienten durch $\mathbf{a}$ eindeutig bestimmt sind.*

Beweis. a) $\Rightarrow$ b): Nach Voraussetzung ist

$$\sum_{i=1}^m s_i (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_0) = (-s_1 - \dots - s_m) \mathbf{a}_0 + \sum_{i=1}^m s_i \mathbf{a}_i = \sum_{i=0}^m s_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}.$$

Mit a) folgt daraus

$$s_1 = \dots = s_m = 0 \quad \text{und} \quad s_0 = -(s_1 + \dots + s_m) = 0.$$

b) $\Rightarrow$ c): Sei etwa

$$\mathbf{a} = \sum_{i=0}^m s_i \mathbf{a}_i = \sum_{i=0}^m t_i \mathbf{a}_i \in A$$

durch zwei Affinkombinationen dargestellt. Dann folgt

$$\sum_{i=0}^m (s_i - t_i) \mathbf{a}_i = \mathbf{0} \quad \text{mit} \quad \sum_{i=0}^m (s_i - t_i) = 1 - 1 = 0,$$

und mit b) erhält man $s_i = t_i$ für $i = 0, \dots, m$.

c) $\Rightarrow$ a): Falls die Vektoren $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_m$ affin abhängig sind, dann ist einer von ihnen eine Affinkombination der anderen, etwa

$$\mathbf{a}_0 = t_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \dots + t_m \cdot \mathbf{a}_m, \quad t_1 + \dots + t_m = 1.$$

Diese Gleichung können wir deuten als zwei verschiedene Darstellungen des Punktes $\mathbf{a}_0$ durch Affinkombinationen der Punkte $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_m$. Nach Voraussetzung ist dies unmöglich. $\square$

Definition 6.5 *Eine affine Abbildung ist eine Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ der Form*

$$\varphi : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{t} + C \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}^m,$$

wo C eine invertierbare $m \times n$ -Matrix ist. Diese Abbildung ist genau dann bijektiv, wenn $m = n$ ist und die $m \times n$ -Matrix C invertierbar. Bijektive affine Abbildungen heißen Affinitäten

Alle Affinitäten $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ bilden eine Gruppe in Bezug auf Hintereinander-Ausführung:

- Sind $\varphi_1 : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{t}_1 + C_1 \cdot \mathbf{x}$ und $\varphi_2 : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{t}_2 + C_2 \cdot \mathbf{x}$ zwei Affinitäten, so ist auch

$$\varphi_1 \circ \varphi_2 : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{t}_2 + C_2 \cdot \mathbf{x} \mapsto \mathbf{t}_1 + C_1 \cdot \mathbf{t}_2 + (C_1 \cdot C_2) \cdot \mathbf{x}$$

eine Affinität, weil mit C_1 und C_2 auch $C_1 \cdot C_2$ invertierbar ist.

- Die Identität $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{0} + \mathbb{1}_n \cdot \mathbf{x}$ ist eine Affinität.
- Ist $\varphi : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{t} + C \cdot \mathbf{x}$ eine Affinität, so ist auch die Umkehrabbildung

$$\varphi^{-1} : \mathbf{x} \mapsto -C^{-1} \cdot \mathbf{t} + C^{-1} \cdot \mathbf{x}$$

eine Affinität.

Das Bild einer Affinkombination $\sum t_i \mathbf{x}_i$, $\sum t_i = 1$, unter einer affinen Abbildung $\varphi : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{t} + C \cdot \mathbf{x}$ ist

$$\varphi\left(\sum t_i \mathbf{x}_i\right) = \mathbf{t} + C \cdot \sum t_i \mathbf{x}_i = \sum t_i (\mathbf{t} + C \cdot \mathbf{x}_i) = \sum t_i \varphi(\mathbf{x}_i).$$

Das ist die Affinkombination der Bilder $\varphi(\mathbf{x}_i)$ mit denselben Koeffizienten. *Affinkombinationen bleiben unter affinen Abbildungen erhalten.* Daraus folgt, dass alle Begriffe dieses Abschnitts

- affiner Unterraum;
- Affinkombination;
- aufgespannter affiner Unterraum;

unter affinen Abbildungen, und

- Dimension eines affinen Unterraums;
- affine Unabhängigkeit

unter Affinitäten erhalten bleiben.

Aufgabe 6.1 (Fischer, p.27) Der affine Unterraum $A \subset \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch die Gleichung

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1.$$

- Geben Sie drei affin unabhängige Punkte $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in A$ an.
- Stellen Sie $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in A$ als Affinkombination von $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ und $\mathbf{a}_3$ dar.

Aufgabe 6.2 (Fischer, p.27) a) Zeigen Sie, dass die Punkte

$$\mathbf{p}_1 = (1, 0, 1), \quad \mathbf{p}_2 = (0, 3, 1), \quad \mathbf{p}_3 = (2, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$$

affin unabhängig sind.

b) Stellen Sie jeden der Punkte

$$\mathbf{a}_1 = (2, 5, -1), \quad \mathbf{a}_2 = (-2, 5, 2), \quad \mathbf{a}_3 = (-5, 2, 5) \in \mathbb{R}^3$$

als Affinkombination von $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ dar.

Aufgabe 6.3 Die Punkte

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2), \quad \mathbf{q} = (q_1, q_2), \quad \mathbf{r} = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$$

seien affin unabhängig. Bestimmen Sie Gleichungen

$$\begin{aligned}\alpha(\mathbf{x}) = a_1x_1 + a_2x_2 + a &= 0 && \text{der Seite } \mathbf{pq} \\ \beta(\mathbf{x}) = b_1x_1 + b_2x_2 + b &= 0 && \text{der Seite } \mathbf{qr} \\ \gamma(\mathbf{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + c &= 0 && \text{der Seite } \mathbf{rp}\end{aligned}$$

im Dreieck $\mathbf{pqr}$.

6.1.2 Elementare konvexe Geometrie

Die von zwei Punkten $\mathbf{a} \neq \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ aufgespannte Gerade ist etwas anderes, als die Strecke $\overline{\mathbf{ab}}$ zwischen diesen Punkten. Diese Strecke ist ja

$$\overline{\mathbf{ab}} = \mathbf{a} + t \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (1 - t) \cdot \mathbf{a} + t \cdot \mathbf{b}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Die Punkte auf dieser Strecke kann man symmetrischer so schreiben:

$$s \cdot \mathbf{a} + t \cdot \mathbf{b}, \quad s, t \geq 0, \quad s + t = 1.$$

Definition 6.6 Eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ heißt konvex, wenn sie mit je zwei Punkten $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in K$ auch die ganze Strecke $\overline{\mathbf{ab}}$ enthält.

Beispiel 6.1 Jeder affine Unterraum ist konvex. Jeder Durchschnitt konvexer Mengen ist wieder konvex. Jede Strecke $\overline{\mathbf{ab}}$ ist konvex. Jede Kugel mit Zentrum $\mathbf{a}$ und Radius r

$$K := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r\}$$

ist konvex: Gehören nämlich $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ zu K , und ist $\mathbf{x} = s\mathbf{x}_1 + t\mathbf{x}_2$, $0 \leq s, t \in \mathbb{R}$, $s + t = 1$, so ist nach der Dreiecksungleichung

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = \|s\mathbf{x}_1 + t\mathbf{x}_2 - (s + t)\mathbf{a}\| \leq s \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}\| + t \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{a}\| < (s + t)r = r.$$

Definition 6.7 Eine Affinkombination

$$t_1\mathbf{y}_1 + \dots + t_l\mathbf{y}_l \in \mathbb{R}^n, \quad t_1 + \dots + t_l = 1,$$

heißt Konvexkombination, wenn

$$t_i \geq 0 \text{ für } i = 1, \dots, l.$$

Das Analogon zu Satz 6.1 für Konvexkombinationen statt Affinkombinationen ist

Satz 6.4 Für eine Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:

a) K ist konvex;

b) mit endlich vielen Punkten $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_l \in K$ gehört auch jede Konvexkombination dieser Punkte zu K .

Beweis. a) $\Rightarrow$ b): Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach l , indem wir die Konvexkombination

$$t_1 \cdot \mathbf{y}_1 + \dots + t_l \cdot \mathbf{y}_l, \quad t_i \geq 0, t_1 + \dots + t_l = 1,$$

für $t_l \neq 1$ schreiben als

$$(1 - t_l) \cdot \mathbf{y} + t_l \cdot \mathbf{y}_l \quad \text{mit} \quad \mathbf{y} := \frac{t_1}{1 - t_l} \mathbf{y}_1 + \dots + \frac{t_{l-1}}{1 - t_l} \mathbf{y}_{l-1}.$$

Wegen $t_i \geq 0$ sind die Koeffizienten der Affinkombination $\mathbf{y}$ auch alle ≥ 0 . Deswegen ist $\mathbf{y} \in K$ nach Induktionsannahme. Wegen $0 \leq t_l \leq 1$ sind beide Koeffizienten der Affinkombination $(1 - t_l)\mathbf{y} + t_l\mathbf{y}_l$ nicht-negativ und diese Affinkombination ist eine Konvexkombination zweier Vektoren aus. Sie gehört zu K nach Definition der Konvexität.

b) $\Rightarrow$ a) ist offensichtlich, denn die Punkte einer Strecke $\overline{\mathbf{a}\mathbf{b}}$ sind Konvexkombinationen der beiden Endpunkte $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$. $\square$

Die folgende Definition ist das Analogon für Konvexkombinationen, zu dem was der aufgespannte affine Unterraum für Affinkombinationen ist.

Definition 6.8 Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine (endliche oder unendliche) Menge. Die Menge aller endlichen Konvexkombinationen

$$\{\mathbf{x} = s_1\mathbf{x}_1 + \dots + s_l\mathbf{x}_l \in \mathbb{R}^n : s_1, \dots, s_l \in \mathbb{R}, s_1 \geq 0, \dots, s_l \geq 0, s_1 + \dots + s_l = 1\}$$

heißt die konvexe Hülle $\text{conv}(M)$ der Menge M .

Satz 6.5 a) Die konvexe Hülle einer Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist konvex und enthält die Menge M .

b) Die Menge $\text{conv}(M)$ ist die kleinste konvexe Menge, die M enthält, im folgenden Sinn: Ist $N \subset \mathbb{R}^n$ konvex mit $M \subset N$, so ist $\text{conv}(M) \subset N$.

Beweis. a) Es seien

$$\mathbf{x} = \sum_1^k r_i \mathbf{x}_i, \quad \mathbf{y} = \sum_1^l s_i \mathbf{y}_i, \quad r_i, s_i \geq 0, \sum r_i = \sum s_i = 1,$$

Konvexkombinationen von Punkten $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i \in M$. Zu zeigen ist, dass dann auch $r\mathbf{x} + s\mathbf{y}$ mit $r, s \geq 0, r + s = 1$, zu $\text{conv}(M)$ gehört. Aber wegen

$$r\mathbf{x} + s\mathbf{y} = \sum r \cdot r_i \mathbf{x}_i + \sum s \cdot s_i \mathbf{y}_i$$

mit

$$r \cdot r_i \geq 0, s \cdot s_i \geq 0, \sum r r_i + \sum s s_i = r \sum r_i + s \sum s_i = r + s = 1$$

ist dieser Punkt eine Konvexkombination der endlich vielen Punkte $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i \in M$.

b) Ist N konvex mit $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_l \in M \subset N$, so gehört nach Satz 6.4 b) jede Konvexkombination der Punkte $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_l$ auch zu N . $\square$

Satz 6.6 (Lemma) Die konvexe Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ sei enthalten in der Vereinigung $E_1 \cup \dots \cup E_k$ endlich vieler affiner Hyperebenen $E_i : h_i(\mathbf{x}) = c_i$. Dann ist M schon enthalten in einer einzigen dieser affinen Hyperebenen.

Beweis (Induktion nach k): Beim Induktionsanfang $k = 1$ ist nichts zu zeigen. Sei also $k \geq 2$.

Induktionsschluss: Gilt $M \subset E_k$, so ist wieder nichts zu zeigen. Gilt $M \subset E_1 \cup \dots \cup E_{k-1}$, so folgt die Behauptung nach Induktion. Liegt keiner dieser beiden Fälle vor, dann gibt es Punkte $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in M$ mit

$$\mathbf{a} \in E_1 \cup \dots \cup E_{k-1}, \mathbf{a} \notin E_k, \quad \mathbf{b} \in E_k, \mathbf{b} \notin E_1 \cup \dots \cup E_{k-1}.$$

Insbesondere ist $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ und beide Punkte spannen eine Gerade $L := \overline{\mathbf{a}\mathbf{b}}$ auf.

Weil M konvex ist, gehört die Strecke $\overline{\mathbf{a}\mathbf{b}}$ auf L zu M und damit zu $E_1 \cup \dots \cup E_k$. Wegen $\mathbf{a} \notin E_k$ schneidet E_k die Gerade L nur in dem einzigen Punkt $\mathbf{b}$. Wegen $\mathbf{b} \notin E_1 \cup \dots \cup E_{k-1}$ liegt L in keiner der Hyperebenen $E_1, \dots, E_{k-1}$. Deswegen schneidet L jede dieser Hyperebenen in höchstens einem Punkt. Damit besteht $L \cap (E_1 \cup \dots \cup E_k)$ aus höchstens k Punkten. Weil die Strecke $\overline{\mathbf{a}\mathbf{b}}$ aus unendlich vielen verschiedenen Punkten besteht, ist dies ein Widerspruch. $\square$

Wieder gilt auch hier, dass unter Affinitäten

- konvexe Mengen;
- Konvexkombinationen;
- die konvexe Hülle

erhalten bleiben.

Definition 6.9 Es sei $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$. Ein von $\mathbf{q}$ ausgehender Strahl ist eine Menge $\{\mathbf{q} + t \cdot \mathbf{a} : 0 \leq t \in \mathbb{R}\}$ mit $\mathbf{0} \neq \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Das ist also eine halbe Gerade, an deren einem Ende der Punkt $\mathbf{q}$ sitzt.

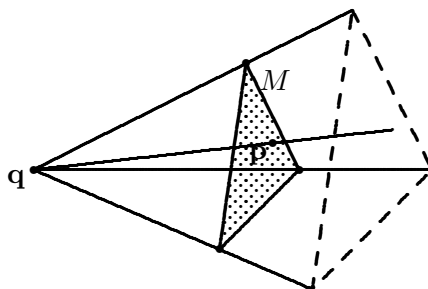
Ein Strahl ist der einfachste, nichttriviale Spezialfall eines Kegels:

Definition 6.10 Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge und $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt. Der Kegel über M mit Spitze $\mathbf{q}$ ist die Vereinigung aller von $\mathbf{q}$ ausgehenden Strahlen durch Punkte von M :

$$\text{cone}_{\mathbf{q}}(M) = \bigcup_{\mathbf{p} \in M} \{\mathbf{q} + t \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{q}) : 0 \leq t \in \mathbb{R}\}.$$

Offensichtlich erhält die Kegelbildung Inklusionen:

$$M \subset N \quad \Rightarrow \quad \text{cone}_{\mathbf{q}}(M) \subset \text{cone}_{\mathbf{q}}(N)$$



Satz 6.7 (cone conv = conv cone) Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge und $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt.

a) Ist M konvex, so ist auch der Kegel $\text{cone}_{\mathbf{q}}(M)$ konvex.

b) Der Kegel $\text{cone}_{\mathbf{q}}(\text{conv}(M))$ über der konvexen Hülle von M mit Spitze $\mathbf{q}$ ist dasselbe, wie $\text{conv}(\text{cone}_{\mathbf{q}}(M))$, die konvexe Hülle des Kegels über M mit Spitze $\mathbf{q}$.

Beweis. a) Es seien $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in M$, $s_1, s_2 \geq 0$, und

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{q} + s_1(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}), \mathbf{x}_2 = \mathbf{q} + s_2(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}) \in \text{cone}_{\mathbf{q}}(M).$$

Zu zeigen ist, dass dann auch jede Konvexkombination $\mathbf{x} = t_1\mathbf{x}_1 + t_2\mathbf{x}_2$, $t_1 + t_2 = 1$, zum Kegel $\text{cone}_{\mathbf{q}}(M)$ gehört. Wir schreiben

$$\mathbf{x} = (t_1 + t_2)\mathbf{q} + t_1s_1\mathbf{p}_1 + t_2s_2\mathbf{p}_2 - (t_1s_1 + t_2s_2)\mathbf{q} = \mathbf{q} + t_1s_1\mathbf{p}_1 + t_2s_2\mathbf{p}_2 - s\mathbf{q}$$

mit $s := t_1s_1 + t_2s_2$. Falls $s = 0$ ist, gilt $t_1s_1 = t_2s_2 = 0$, also ist $\mathbf{x} = \mathbf{q} \in \text{cone}_{\mathbf{q}}(M)$. Andernfalls ist $s > 0$ und

$$\mathbf{x} = \mathbf{q} + s \cdot \left(\frac{t_1s_1}{s}\mathbf{p}_1 + \frac{t_2s_2}{s}\mathbf{p}_2 - \mathbf{q} \right).$$

Wegen

$$\frac{t_1s_1}{s} + \frac{t_2s_2}{s} = \frac{s}{s} = 1, \quad t_1s_1 \geq 0, t_2s_2 \geq 0,$$

gehört

$$\frac{t_1s_1}{s}\mathbf{p}_1 + \frac{t_2s_2}{s}\mathbf{p}_2$$

zur konvexen Menge M und dann $\mathbf{x}$ zu $\text{cone}_{\mathbf{q}}(M)$.

b) Nach a) ist $\text{cone}_{\mathbf{q}}(\text{conv}(M))$ konvex. Wegen $M \subset \text{conv}(M)$ und $\text{cone}_{\mathbf{q}}(M) \subset \text{cone}_{\mathbf{q}}(\text{conv}(M))$ enthält dieser Kegel die konvexe Hülle $\text{conv}(\text{cone}_{\mathbf{q}}(M))$. Es bleibt zu zeigen: $\text{cone}_{\mathbf{q}}(\text{conv}(M)) \subset \text{conv}(\text{cone}_{\mathbf{q}}(M))$. Sei dazu $\mathbf{p} = \sum t_i\mathbf{p}_i$ eine Konvexkombination von Punkten $\mathbf{p}_i \in M$. Für alle $s \geq 0$ ist dann $\mathbf{q} + s(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \in \text{cone}_{\mathbf{q}}(M)$ und

$$\mathbf{q} + s(\mathbf{p} - \mathbf{q}) = \mathbf{q} + s\left(\sum t_i\mathbf{p}_i - \mathbf{q}\right) = \sum t_i(\mathbf{q} + s(\mathbf{p}_i - \mathbf{q})) \in \text{conv}(\text{cone}_{\mathbf{q}}(M)). \quad \square$$

Aufgabe 6.4 Im $\mathbb{R}^n$ seien $\mathbf{e}_0 := \mathbf{0}$ und $\mathbf{e}_i$, $i = 1, \dots, n$, die Koordinatenvektoren. Zeigen Sie: $\mathbf{x} = (x_i)_{i=1, \dots, n}$ liegt genau dann in der konvexen Hülle $\text{conv}(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$, wenn

$$x_i \geq 0 \text{ für } i = 1, \dots, n \quad \text{und} \quad x_1 + \dots + x_n \leq 1.$$

Aufgabe 6.5 Es seien $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ wie in Aufgabe 6.3. Zeigen Sie: Die konvexe Hülle $\text{conv}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r})$ ist das Dreieck $\mathbf{pqr}$, d.h., die Menge der Punkte $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, für welche

$$\alpha(\mathbf{x}) \text{ dasselbe Vorzeichen wie } \alpha(\mathbf{r})$$

$$\beta(\mathbf{x}) \text{ dasselbe Vorzeichen wie } \beta(\mathbf{p})$$

$$\gamma(\mathbf{x}) \text{ dasselbe Vorzeichen wie } \gamma(\mathbf{q})$$

hat.

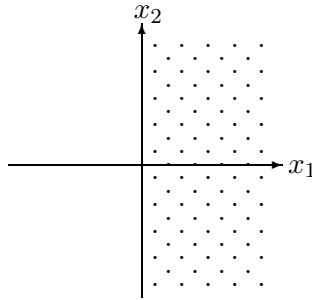
6.2 Polyeder

Bis jetzt haben wir immer Gleichungen (lineare, quadratische) betrachtet, Systeme solcher Gleichungen und gelegentlich auch ihre geometrische Interpretation. Ihre Lösungsmengen sind lineare oder affine Unterräume, oder Quadriken. Jetzt wenden wir uns Ungleichungen zu. Fangen wir, genau wie am Beginn des ersten Semesters, mit einer einzigen davon an:

Beispiel 6.2 (n=2) Im $\mathbb{R}^2$ mit den Koordinaten x_1, x_2 beschreibt die Ungleichung $x_1 \geq 0$ die Menge

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0\}.$$

Das ist die rechte Halb-Ebene:



Ebenso beschreibt die Ungleichung $x_1 \leq 0$ die linke Halb-Ebene, die Ungleichung $x_2 \geq 0$ die obere und $x_2 \leq 0$ die untere Halbebene. Steht auf der rechten Seite der Ungleichung nicht 0, sondern eine Zahl c , so ist der Rand der definierten Halbebene entsprechend verschoben: die Ungleichung $x_1 \geq 1$ etwa beschreibt die Halb-Ebene rechts von der Geraden $x_1 = 1$.

Definition 6.11 Es seien $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Linearform, nicht identisch $= 0$, und $c \in \mathbb{R}$. Dann heißt

$$H := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : h(\mathbf{x}) \geq c\}$$

ein Halbraum im $\mathbb{R}^n$. Die affine Hyperebene $\partial H : h(\mathbf{x}) = c$ heißt Rand des Halbraums.

Auch die umgekehrte Ungleichung $h(\mathbf{x}) \leq c$ beschreibt einen Halbraum: Es ist ja

$$h(\mathbf{x}) \leq c \quad \Leftrightarrow \quad (-h)(\mathbf{x}) \geq -c.$$

Wir können zur Beschreibung von Halbräumen also immer das $\geq$ -Zeichen hernehmen und unsere Ungleichungen dadurch etwas normieren.

Absolut trivial ist

Satz 6.8 Ein Halbraum $H \subset \mathbb{R}^n$ ist konvex.

Beweis. Es sei $H : h(\mathbf{x}) \geq c$. Sind dann $\mathbf{a} \neq \mathbf{b} \in H$, so gilt für jeden Punkt $\mathbf{x} \in \overline{\mathbf{ab}}$

$$\mathbf{x} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}, \quad s, t \geq 0, \quad s + t = 1,$$

$$h(\mathbf{x}) = sh(\mathbf{a}) + th(\mathbf{b}) \geq s \cdot c + t \cdot c = (s + t) \cdot c = c.$$

□

Definition 6.12 Ein Polyeder $P \subset \mathbb{R}^n$ ist ein Durchschnitt $H_1 \cap \dots \cap H_k$ endlich vieler Halbräume, oder, was dasselbe ist, die Lösungsmenge

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : h_1(\mathbf{x}) \geq c_1, \dots, h_k(\mathbf{x}) \geq c_k\}$$

eines Systems von endlich vielen linearen Ungleichungen (LUS), wobei $h_1, \dots, h_k$ Linearformen nicht identisch $\equiv 0$ sind.

Weil der Durchschnitt konvexer Mengen wieder konvex ist, folgt aus Satz 6.8

Satz 6.9 *Jedes Polyeder ist konvex.*

Eine lineare Gleichung $h(\mathbf{x}) = c$ definiert dieselbe Menge, wie die beiden linearen Ungleichungen $h(\mathbf{x}) \geq c$ und $h(\mathbf{x}) \leq c$, d.h., $-h(\mathbf{x}) \geq -c$ zusammen. Es ist also keine echte Verallgemeinerung, wenn wir in unserer Definition der Polyeder auch lineare Gleichungen, statt nur linearer Ungleichungen zulassen. Somit gilt offensichtlich

Satz 6.10 *Der Durchschnitt eines Polyeders und eines affinen Unterraums ist wieder ein Polyeder.*

Beispiel 6.3 *Es sei $P : h_i(\mathbf{x}) \geq c_i, i = 1, \dots, k$, ein Polyeder und $L : \mathbf{a} + t \cdot \mathbf{v}, t \in \mathbb{R}$ eine Gerade. Der Durchschnitt $L \cap P$ besteht dann aus allen Punkten $\mathbf{a} + t \cdot \mathbf{v}$, für welche*

$$h_i(\mathbf{a} + t \cdot \mathbf{v}) = h_i(\mathbf{a}) + t \cdot h_i(\mathbf{v}) \geq c_i$$

ist für $i = 1, \dots, k$. Es kann passieren, dass $h_i(\mathbf{v}) = 0$ ist. Falls $h_i(\mathbf{a}) \geq c_i$ ist, dann ist die Bedingung $h_i(\mathbf{x}) \geq c_i$ für alle $\mathbf{x} \in L$ erfüllt, und wir können diese Bedingung für $L \cap P$ weglassen. Falls $h_i(\mathbf{a}) < c_i$ ist, dann ist die Bedingung $h_i(\mathbf{x}) \geq c_i$ für kein $\mathbf{x} \in L$ erfüllt. Es ist $L \cap P = \emptyset$, und wir können die Diskussion abschließen.

Wir können also o.B.d.A. annehmen $h_i(\mathbf{v}) \neq 0$ für $i = 1, \dots, k$. Wir ändern die Reihenfolge der h_i so, dass $h_i(\mathbf{v}) > 0$ ist für $i = 1, \dots, l$ und $h_i(\mathbf{v}) < 0$ für $i = l + 1, \dots, k$. Die Bedingungen dafür, dass $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t \cdot \mathbf{v}$ zu $L \cap P$ gehört, sind dann

$$t \geq \frac{c_i - h_i(\mathbf{a})}{h_i(\mathbf{v})}, i = 1, \dots, l, \quad t \leq \frac{c_i - h_i(\mathbf{a})}{h_i(\mathbf{v})}, i = l + 1, \dots, k.$$

Sei nun

$$a := \max_{i=1}^l \frac{c_i - h_i(\mathbf{a})}{h_i(\mathbf{v})}, \quad b := \min_{i=l+1}^k \frac{c_i - h_i(\mathbf{a})}{h_i(\mathbf{v})}.$$

Dann wird $L \cap P$ also parametrisiert durch die Werte $t \in \mathbb{R}$ in Intervall $[a, b]$. Hier kann natürlich $l = 0$ sein, dann wird es das Intervall $]-\infty, b]$, oder $l = k$, dann erhalten wir das Intervall $[a, \infty[$. Und wenn $b < a$ ist, dann ist das Intervall leer.

Definition 6.13 *Die Dimension eines Polyeders P ist die Dimension des kleinsten affinen Unterraums, in dem P enthalten ist.*

Weil jedes Polyeder $P \subset \mathbb{R}^n$ immer im affinen Unterraum $A = \mathbb{R}^n$ enthalten ist, ist seine Dimension höchstens $= n$. Aber sie kann auch echt kleiner sein:

Beispiel 6.4 (trivial) *Jeder Punkt $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ definiert ein 0-dimensionales Polyeder $P = \{\mathbf{p}\}$. Das ist ja die Lösungsmenge eines i.a. inhomogenen LGS von maximalem Rang.*

Beispiel 6.5 (nicht ganz trivial) *Es seien $\mathbf{a} \neq \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ zwei verschiedene Punkte. Die Strecke*

$$\overline{\mathbf{ab}} = \{\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}), t \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 1\},$$

ist dann ein eindimensionales Polyeder. Es ist klar, dass diese Strecke auf der Gerade L durch $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ liegt. Diese Gerade ist, als affiner Unterraum, die Lösungsmenge eines Systems (i.a. inhomogener) linearer Gleichungen. Weil $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ ist, gibt es eine Linearform h (etwa eine Koordinatenfunktion x_ν)

mit $h(\mathbf{a}) \neq h(\mathbf{b})$. Wenn wir hier h eventuell durch $-h$ ersetzen, können wir sogar $h(\mathbf{a}) < h(\mathbf{b})$ annehmen. Für jeden Punkt $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \in L$ gilt

$$h(\mathbf{x}) = (1 - t)h(\mathbf{a}) + th(\mathbf{b}).$$

Hier sind äquivalent:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in \overline{\mathbf{a}\mathbf{b}} &\Leftrightarrow 0 \leq t \leq 1 \\ &\Leftrightarrow h(\mathbf{x}) \in \overline{h(\mathbf{a})h(\mathbf{b})} \subset \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow h(\mathbf{a}) \leq h(\mathbf{x}) \leq h(\mathbf{b}) \end{aligned}$$

Die Strecke wird also durch ein lineares Gleichungssystem und zwei lineare Ungleichungen definiert.

Beispiel 6.6 Ein Polyeder $P \subset \mathbb{R}^n$ enthalte $m + 1$ affin unabhängige Punkte $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_m$. Dann ist $\dim(P) \geq m$. Denn jeder affine Unterraum $A \subset \mathbb{R}^n$, welcher P enthält, der enthält auch die Punkte $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_m$, und damit den von ihnen aufgespannten affinen Unterraum B . Dieser Unterraum B hat die Dimension m und damit ist $\dim(A) \geq \dim(B) = m$.

Beispiel 6.7 Es sei $m \leq n$, und die $m + 1$ Punkte $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_m \in \mathbb{R}^n$ seien affin unabhängig. Wir ersetzen nun $\mathbb{R}^n$ durch $A = \mathbb{R}^m$, den von $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_m$ aufgespannten affinen Unterraum, und konzentrieren uns darauf, dass wir $m + 1$ affin unabhängige Punkte $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_m \in \mathbb{R}^m$ haben. Je m dieser Punkte spannen im $\mathbb{R}^m$ einen affinen Unterraum der Dimension $m - 1$ auf. Sie sind nämlich auch affin unabhängig. Dabei gelte etwa

$$\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{p}_{i+1}, \dots, \mathbf{p}_m \in A_i : h_i(\mathbf{x}) = c_i,$$

wo h_i eine Linearform, nicht die Nullform, ist mit $h_i(\mathbf{p}_j) = c_i$ für $j \neq i$. Weil nicht alle $m + 1$ Punkte in dem $m - 1$ -dimensionalen Unterraum A_i liegen, ist $h_i(\mathbf{p}_i) \neq c_i$. Nachdem wir eventuell das Vorzeichen von h_i ändern, können wir $h_i(\mathbf{p}_i) > c_i$ annehmen. Alle $m + 1$ Punkte liegen dann im Halbraum $H_i : h_i(\mathbf{x}) \geq c_i$. Das Polyeder

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : h_0(\mathbf{x}) \geq c_0, \dots, h_m(\mathbf{x}) \geq c_m\}$$

enthält alle $m + 1$ Punkte $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_m$ und damit auch deren konvexe Hülle S .

Nennt man

$$F_i := P \cap A_i = P \cap \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n : h_i(\mathbf{p}) = c_i\}, \quad i = 0, \dots, m,$$

Randfläche von P , so liegen also die Punkte

$$\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{p}_{i+1}, \dots, \mathbf{p}_m$$

in F_i .

Definition 6.14 Die konvexe Hülle von $m + 1$ affin unabhängigen Punkten im $\mathbb{R}^n$ heißt ein Simplex der Dimension m .

Beispiel 6.8 Das von zwei affin unabhängigen Punkten $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}$ aufgespannte Simplex ist die Strecke $\overline{\mathbf{a}\mathbf{b}}$.

Das von drei affin unabhängigen Punkten $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ aufgespannte Simplex ist ein Dreieck mit den Ecken $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, das von vier affin unabhängigen Punkten $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$ aufgespannte Simplex ist ein Tetraeder mit den Ecken $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$.

Satz 6.11 Die konvexe Hülle S der $m+1$ affin unabhängigen Punkte $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_m$ in Beispiel 6.7 stimmt mit dem Polyeder P überein, und bildet ein Polyeder der Dimension m .

Beweis. Um die Gleichheit $S = P$ zu zeigen, müssen wir nur noch $P \subset S$ zeigen. Dazu benützen wir Satz 6.3: Jeder Punkt $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$ ist eine (durch $\mathbf{p}$) eindeutig bestimmte Affinkombination

$$\mathbf{p} = t_0 \cdot \mathbf{p}_0 + \dots + t_m \cdot \mathbf{p}_m, \quad t_0 + \dots + t_m = 1.$$

Wir berechnen

$$h_i(\mathbf{p}) = \sum_j t_j \cdot h_i(\mathbf{p}_j) = \sum_{j \neq i} t_j \cdot c_i + t_i h_i(\mathbf{p}_i) = (1 - t_i)c_i + t_i h_i(\mathbf{p}_i) = c_i + t_i \cdot (h_i(\mathbf{p}_i) - c_i).$$

Wenn $\mathbf{p}$ in P liegt, also insbesondere zum Halbraum $h_i(\mathbf{x}) \geq c_i$ gehört, muss das Ergebnis $\geq c_i$ sein. Wegen $h_i(\mathbf{p}_i) > c_i$ folgt daraus $t_i \geq 0$. Weil dies für $i = 0, \dots, m$ gilt, ist die Affinkombination $\mathbf{p}$ der Punkte $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_m$ sogar eine Konvexkombination. Das heißt: $\mathbf{p} \in S$. Damit ist $P \subset S$ bewiesen.

Es bleibt noch $\dim(P) = m$ zu zeigen. Aber weil die Punkte $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_m$ affin unabhängig sind, ist der kleinste affine Unterraum, der P , und damit diese Punkte enthält, der ganze $\mathbb{R}^m$. $\square$

Wenn das Polyeder $P \subset \mathbb{R}^n$ eine Dimension echt $< n$ hat, gibt es einen affinen Unterraum $A \subset \mathbb{R}^n$ mit $P \subset A$ und $\dim(A) = \dim(P) =: d$. Nach dem Struktursatz 1.4 gibt es eine bijektive Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^d \ni (t_1, \dots, t_d) \mapsto \mathbf{y} + t_1 \mathbf{x}_1 + \dots + t_d \mathbf{x}_d \in A.$$

Lineare (Un-)Gleichungen $h(\mathbf{x}) \geq c$ im $\mathbb{R}^n$ gehen dabei auf lineare (Un-)Gleichungen $h(\varphi(\mathbf{t})) \geq c$ im $\mathbb{R}^d$. Das Urbild von P unter φ ist somit ein Polyeder der Dimension d im $\mathbb{R}^d$. Wir können also, wenn wir wollen, für Polyeder $P \subset \mathbb{R}^n$ häufig $\dim(P) = n$ annehmen.

Die folgende Aussage ist anschaulich völlig klar, aber wir brauchen die bisher aufgebaute Maschinerie, um sie exakt zu beweisen.

Satz 6.12 Es sei $P : h_1(\mathbf{x}) \geq c_1, \dots, h_k(\mathbf{x}) \geq c_k$ ein Polyeder im $\mathbb{R}^n$. Für einen Punkt $\mathbf{p} \in P$ sind äquivalent:

a) $h_1(\mathbf{p}) > c_1, \dots, h_k(\mathbf{p}) > c_k$;

b) es gibt eine Vollkugel $K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| < r\}$ mit Mittelpunkt $\mathbf{p}$ und Radius r echt > 0 , welche noch ganz in P enthalten ist.

Beweis. Wir schreiben $h_i(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}_i, \mathbf{x})$ mit Vektoren $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \neq \mathbf{0}$ im $\mathbb{R}^n$.

a) $\Rightarrow$ b): Nach Voraussetzung ist $h_i(\mathbf{p}) = c_i + r_i$ mit $r_i > 0$. Für alle $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{y}$ folgt dann mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$h_i(\mathbf{x}) = h_i(\mathbf{p}) + h_i(\mathbf{y}) \geq c_i + r + (\mathbf{a}_i, \mathbf{y}) \geq c_i + r - \|\mathbf{a}_i\| \cdot \|\mathbf{y}\| \geq c_i$$

falls

$$\|\mathbf{y}\| \leq \frac{r_i}{\|\mathbf{a}_i\|}.$$

Sei nun r das Minimum der Werte $r_i / \|\mathbf{a}_i\|$. Dann ist $r > 0$, und für alle $\mathbf{y}$ mit $\|\mathbf{y}\| < r$ gehört $\mathbf{a} = \mathbf{p} + \mathbf{y}$ zu P . Die Vollkugel mit Mittelpunkt $\mathbf{p}$ und Radius r ist ganz in P enthalten.

b) $\Rightarrow$ a): Wir müssen $h_i(\mathbf{p}) = c_i$ ausschließen. Aber wenn $h_i(\mathbf{p}) = c_i$ für ein i , $1 \leq i \leq k$, gelten sollte, dann ist

$$h_i(\mathbf{p} + t \cdot \mathbf{a}_i) = c_i + t \cdot \|\mathbf{a}_i\|^2 < c_i \quad \text{für alle } t < 0.$$

Für $-r / \|\mathbf{a}_i\| < t < 0$ hätten wir einen Widerspruch zu b). $\square$

Definition 6.15 Es sei $P \subset \mathbb{R}^n$ ein Polyeder wie in Satz 6.12. Die Menge

$$\overset{\circ}{P} := \{\mathbf{p} \in P : h_i(\mathbf{x}) > c_i \text{ für } i = 1, \dots, k\}$$

der Punkte $\mathbf{p} \in P$ mit Eigenschaft a) aus Satz 6.12 heißt das offene Innere des Polyeders P . (Diese Menge ist offen im Sinn der Vorlesung Analysis II.) Die Menge

$$\partial P = P \setminus \overset{\circ}{P} = \{\mathbf{x} \in P : h_i(\mathbf{x}) = c_i \text{ für mindestens ein } i\}$$

heißt der Rand des Polyeders P .

Satz 6.13 Für das Polyeder $P : h_1(\mathbf{x}) \geq c_1, \dots, h_k(\mathbf{x}) \geq c_k$ im $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent:

- a) $\dim(P) = n$;
- b) $\overset{\circ}{P} \neq \emptyset$.
- c) Für jedes i existiert ein $\mathbf{x}_i \in P$ mit $h_i(\mathbf{x}_i) > 0$.

Beweis. a) $\Rightarrow$ b): Nach Voraussetzung ist P in keiner affinen Hyperebene E enthalten, also auch in keiner der affinen Hyperebenen $h_i(\mathbf{x}) = c_i$. Wenn es keinen Punkt $\mathbf{x} \in P$ mit $h_i(\mathbf{x}) > c_i$, $i = 1, \dots, k$, gäbe, wäre P in der Vereinigung dieser Hyperebenen enthalten. Weil P konvex ist, folgt mit Satz 6.6, dass P schon in einer einzigen dieser Hyperebenen enthalten ist, Widerspruch.

b) $\Rightarrow$ a): Nach Voraussetzung enthält P eine Vollkugel um einen Punkt $\mathbf{p}$ mit einem Radius $r > 0$. Wir müssen ausschließen, dass diese in einer Hyperebene $H : h(\mathbf{x}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) = c$ enthalten ist. Wir betrachten die Gerade $\mathbf{p} + t \cdot \mathbf{a}$ durch $\mathbf{p}$. Für $|t| < r / \|\mathbf{a}\|$ gehören diese Punkte zu P . Und die zugehörigen h -Werte

$$h(\mathbf{p} + t \cdot \mathbf{a}) = h(\mathbf{p}) + t \|\mathbf{a}\|^2$$

durchlaufen alle Zahlen im Intervall

$$]h(\mathbf{p}) - r \cdot \|\mathbf{a}\|, h(\mathbf{p}) + r \cdot \|\mathbf{a}\|[,$$

können also nicht alle mit einer Zahl c übereinstimmen.

b) $\Rightarrow$ c): Nach Satz 6.12 ist $h_i(\mathbf{p}) > 0$ für alle i .

c) $\Rightarrow$ b): Wenn es keinen Punkt $\mathbf{x} \in P$ mit $h_i(\mathbf{x}) > 0$ für alle $i = 1, \dots, k$ wie in Satz 6.12 gäbe, dann gäbe es zu jedem $\mathbf{x} \in P$ ein i mit $h_i(\mathbf{x}) = c_i$. Wie oben würde folgen, dass P in einer einzigen Hyperebene $\{h_i(\mathbf{x}) = c_i\}$ enthalten wäre. Dann könnte der Punkt $\mathbf{x}_i$ nicht existieren. Widerspruch! $\square$

6.2.1 Seiten

Jeder Punkt $\mathbf{x}$ des Randes ∂P gehört zu einer (der endlich vielen) affinen Hyperebene $h_i(\mathbf{x}) = c_i$, und damit zu dem Polyeder $P_i := P \cap \{h_i(\mathbf{x}) = c_i\}$ kleinerer Dimension. Der Rand besteht aus endlich vielen Polyedern einer Dimension $< n$.

Definition 6.16 Es seien $h_{i_1}, \dots, h_{i_l}$ beliebige unter den Linearformen $h_1, \dots, h_k$, welche das Polyeder P definieren. Das Polyeder $S := P \cap \{h_{i_1}(\mathbf{x}) = c_{i_1}, \dots, h_{i_l}(\mathbf{x}) = c_{i_l}\}$ heißt eine Seite von P , falls S nicht leer ist. Eine null-dimensionale Seite heißt Ecke, jede ein-dimensionale Seite heißt eine Kante.

Beispiel 6.9 Die $m-1$ -dimensionalen Seiten des von $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_m$ aufgespannten Simplex sind die $m+1$ Simplizes, welche von je m der Punkte $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_m$ aufgespannt werden. Durch Induktion folgt: Die d -dimensionalen Seiten des Simplex sind genau die Simplizes, die von $d+1$ dieser Punkte aufgespannt werden. Die Anzahl der d -dimensionalen Seiten ist damit

$$\binom{m+1}{d+1}, \quad d = 0, \dots, m.$$

Satz 6.14 (Seiten-Seite) *Es sei P ein Polyeder und S eine Seite von P . Jede Seite S' von S ist dann auch eine Seite von P .*

Beweis. Das Polyeder sei definiert durch die Ungleichungen $h_i(\mathbf{x}) \geq c_i, i = 1, \dots, k$, und die Seite S durch einige der Gleichungen $h_i(\mathbf{x}) = c_i$. O.B.d.A. können wir annehmen

$$S = P \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : h_i(\mathbf{x}) = c_i, i = 1, \dots, l\}.$$

Im affinen Unterraum $A : h_1(\mathbf{x}) = c_1, \dots, h_l(\mathbf{x}) = c_l$ ist die Seite S definiert durch die Ungleichungen $h_i(\mathbf{x}) \geq c_i, i = l+1, \dots, k$. Die Seite S' ist dann definiert durch einige der Gleichungen $h_i(\mathbf{x}) = c_i, i = l+1, \dots, k$. O.B.d.A. können wir annehmen, dass es die Gleichungen $h_i(\mathbf{x}) = c_i, i = l+1, \dots, m$, sind. Dann ist also

$$\begin{aligned} S' &= S \cap \{\mathbf{x} \in A : h_{l+1}(\mathbf{x}) = c_{l+1}, \dots, h_m(\mathbf{x}) = c_m\} \\ &= P \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : h_1(\mathbf{x}) = c_1, \dots, h_l(\mathbf{x}) = c_l\} \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : h_{l+1}(\mathbf{x}) = c_{l+1}, \dots, h_m(\mathbf{x}) = c_m\} \\ &= P \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : h_1(\mathbf{x}) = c_1, \dots, h_m(\mathbf{x}) = c_m\} \end{aligned}$$

eine Seite von P . □

Satz 6.15 (Irrelevante Bedingung) *Es sei $P \subset \mathbb{R}^n, P \neq \mathbb{R}^n$, ein n -dimensionales Polyeder. Es sei definiert durch $P = \{h_i(\mathbf{x}) \geq c_i, i = 1, \dots, k\}$. Hat die Seite $S := P \cap \{h_i = c_i\}$ eine Dimension $< n-1$, so kann man bei der Definition von P die Bedingung $h_i(\mathbf{x}) \geq c_i$ weglassen, ohne das Polyeder zu verändern.*

Beweis. O.B.d.A. sei $i = 1$. Weiter sei Q das Polyeder definiert durch $h_j \geq c_j, j > 1$. Dann gilt $P \subset Q$. Wenn $P = Q$ ist, sind wir fertig. Andernfalls gibt es einen Punkt $\mathbf{q} \in Q$ mit $\mathbf{q} \notin P$. Es sei A der von $\mathbf{q}$ und S erzeugte affine Unterraum. Aus $\dim(S) < n-1$ folgt $\dim(A) < n$. Weil P die Dimension n hat, gibt es einen Punkt $\mathbf{p} \in P$ mit $\mathbf{p} \notin A$. Die von $\mathbf{p}$ und $\mathbf{q}$ aufgespannte Gerade trifft A dann nur in $\mathbf{q}$. Wir betrachten die Strecke $\overline{\mathbf{q}\mathbf{p}}$.

Aus $\mathbf{q} \notin P$ folgt $h_1(\mathbf{q}) < c_1$, während $h_1(\mathbf{p}) \geq c_1$ gilt. Aus dem Zwischenwertsatz folgt, dass es eine Konvexkombination $\mathbf{r} := t \cdot \mathbf{q} + (1-t) \cdot \mathbf{p}$ gibt mit $h_1(\mathbf{r}) = c_1$. Weil hier nicht $\mathbf{r} = \mathbf{q}$ gelten kann ($h_1(\mathbf{q}) < c_1$), gehört $\mathbf{r}$ nicht zu A und damit nicht zu S . Der Punkt $\mathbf{r}$ ist also ein Punkt aus P mit $h_1(\mathbf{r}) = c_1$, der nicht zu S gehört. Widerspruch! □

Satz 6.16 (Seiten-Dimension) *Es sei $P = \{h_1 \geq c_1, \dots, h_k \geq c_k\} \subset \mathbb{R}^n$ ein Polyeder und*

$$S := P \cap \{h_{i_1} = c_{i_1}, \dots, h_{i_l} = c_{i_l}\}$$

eine seiner Seiten. Die Dimension des Polyeders S ist dann

$$d = n - r,$$

wo r die Maximalzahl linear unabhängiger Linearformen unter den Formen $h_i, i = 1, \dots, k$ ist,

- *welche das Polyeder P definieren und*
- *die Eigenschaft $h_i(\mathbf{x}) = c_i$ für alle $\mathbf{x} \in S$ besitzen.*

Beweis. Wenn es dumm läuft, kann es außer den $h_{i_1}, \dots, h_{i_l}$, welche die Seite definieren, noch mehr Linearformen h_i geben mit $h_i(\mathbf{x}) = c_i$ für alle $\mathbf{x} \in S$. Es seien nun $h_{j_1}, \dots, h_{j_m}$ alle diese Linearformen. Diese Linearformen definieren einen affinen Unterraum $A = \{h_{j_1} = c_{j_1}, \dots, h_{j_m} = c_{j_m}\} \neq \emptyset$ der Dimension $\dim(A) = d = n - r$. Wegen $S \subset A$ haben wir also $\dim(S) \leq n - r$.

Für alle anderen $h_i, i = 1, \dots, k, i \neq j_1, \dots, j_m$ ist dann zwar $h_i(\mathbf{x}) \geq c_i$ für $\mathbf{x} \in S$, aber es gibt auch Punkte $\mathbf{x} \in S$ mit $h_i(\mathbf{x}) > c_i$. Nach Satz 6.13 folgt daraus $\dim(S) = d$. □

Beispiel 6.10 Wir betrachten die Pyramide $P \subset \mathbb{R}^3$ der Höhe 1, über einem Einheitsquadrat, mit den Ecken

$$\mathbf{p}_1 = (1, 1, 0), \mathbf{p}_2 = (2, 1, 0), \mathbf{p}_3 = (1, 2, 0), \mathbf{p}_4 = (2, 2, 0), \mathbf{p}_5 = (1.5, 1.5, 1).$$

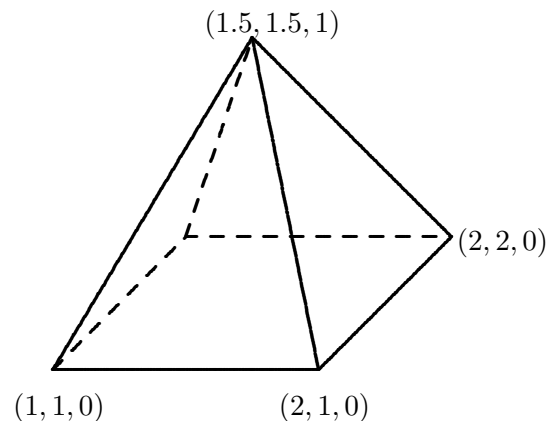
Ihre fünf Seitenflächen haben die Gleichungen

$$\begin{aligned} x_3 &= 0, \\ x_3 &= 2x_1 - 2, \\ x_3 &= 2x_2 - 2, \\ x_3 &= 4 - 2x_1, \\ x_3 &= 4 - 2x_2. \end{aligned}$$

Um Satz 6.16 zu verifizieren, wollen wir die Ecken der Pyramide identifizieren als Durchschnitte von je drei Seitenebenen zu linear unabhängigen Linearformen: Es gibt

$$\binom{5}{2} = 10$$

Tripel von Seitenflächen:



			lin. unabh.?	Durchschnitt
$x_3 = 0$	$2x_1 - x_3 = 2$	$2x_2 - x_3 = 2$	ja	$(1, 1, 0)$
$x_3 = 0$	$2x_1 - x_3 = 2$	$2x_1 + x_3 = 4$	nein	
$x_3 = 0$	$2x_1 - x_3 = 2$	$2x_2 + x_3 = 4$	ja	$(1, 2, 0)$
$x_3 = 0$	$2x_2 - x_3 = 2$	$2x_1 + x_3 = 4$	ja	$(2, 1, 0)$
$x_3 = 0$	$2x_2 - x_3 = 2$	$2x_2 + x_3 = 4$	nein	
$x_3 = 0$	$2x_1 + x_3 = 4$	$2x_2 + x_3 = 4$	ja	$(2, 2, 0)$
$2x_1 - x_3 = 2$	$2x_2 - x_3 = 2$	$2x_1 + x_3 = 4$	ja	$(1.5, 1.5, 1)$
$2x_1 - x_3 = 2$	$2x_2 - x_3 = 2$	$2x_2 + x_3 = 4$	ja	$(1.5, 1.5, 1)$
$2x_1 - x_3 = 2$	$2x_1 + x_3 = 4$	$2x_2 + x_3 = 4$	ja	$(1.5, 1.5, 1)$
$2x_2 - x_3 = 2$	$2x_1 + x_3 = 4$	$2x_2 + x_3 = 4$	ja	$(1.5, 1.5, 1)$

Satz 6.17 (Seiten-Anzahl) Es sei $P \subset \mathbb{R}^n$ ein n -dimensionales Polyeder.

- a) Wenn $P \neq \mathbb{R}^n$ ist, so besitzt P Seiten der Dimension $n - 1$.
- b) Jede d -dimensionale Seite von P ist auch Seite einer $d + 1$ -dimensionalen Seite ($d \leq n - 2$).
- c) Jede $n - 2$ -dimensionale Seite von P gehört zu genau zwei $n - 1$ -dimensionalen Seiten.

Beweis. Wir nehmen o.B.d.A. an

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : h_1(\mathbf{x}) \geq c_1, \dots, h_k(\mathbf{x}) \geq c_k\},$$

wobei keine der Linearformen weggelassen werden kann (irrelevant ist).

a) Wegen $P \neq \mathbb{R}^n$ muss es Ungleichungen $h_i(\mathbf{x}) \geq c_i$ geben. Für jede von diesen ist $P \cap \{h_i(\mathbf{x}) = c_i\}$ nach Satz 6.15 eine Seite der Dimension $n - 1$.

b) Sei

$$S := P \cap \{h_{i_1} = c_{i_1}, \dots, h_{i_l} = c_{i_l}\}$$

eine Seite der Dimension d . Unter den Linearformen $h_{i_1}, \dots, h_{i_l}$ gibt es dann $r := n - d$ linear unabhängige, und nicht mehr. Wir wählen davon $r - 1$ linear unabhängige aus, etwa $h_{j_1}, \dots, h_{j_{r-1}}$. Dann ist

$$S' := P \cap \{h_{j_1}(\mathbf{x}) = c_{j_1}, \dots, h_{j_{r-1}}(\mathbf{x}) = c_{j_{r-1}}\}$$

eine Seite von P der Dimension $n - (r - 1) = d + 1$. Nach Konstruktion gilt $S \subset S'$ und S wird aus S' durch lineare Gleichungen ausgeschnitten. Damit ist S Seite von S' .

c) Es sei S eine $n - 2$ -dimensionale Seite von P . Dann gibt es unter den P definierenden Linearformen h_i zwei linear unabhängige, etwa h_1 und h_2 , mit

$$S = P \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : h_1(\mathbf{x}) = c_1, h_2(\mathbf{x}) = c_2\}.$$

Die Mengen $S_i := P \cap \{h_i(\mathbf{x}) = c_i\}, i = 1, 2$, sind dann $n - 1$ -dimensionale Seiten von P , welche S enthalten. Es ist zu zeigen, dass es keine weiteren $n - 1$ -dimensionalen Seiten von P gibt, welche S enthalten. Sei etwa $S_3 : P \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : h_3(\mathbf{x}) = c_3\}$ eine solche. Weil das LGS $h_i(\mathbf{x}) = c_i, i = 1, 2, 3$, einen $n - 2$ -dimensionalen Lösungsraum besitzt, ist h_3 linear abhängig von h_1 und h_2 , etwa $h_3 = a_1 h_1 + a_2 h_2$ mit $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Für die Punkte $\mathbf{x} \in S$ gilt dann

$$c_3 = h_3(\mathbf{x}) = a_1 h_1(\mathbf{x}) + a_2 h_2(\mathbf{x}) = a_1 c_1 + a_2 c_2.$$

Insbesondere finden wir $c_3 = a_1 c_1 + a_2 c_2$ und

$$h_3 - c_3 = a_1(h_1 - c_1) + a_2(h_2 - c_2).$$

Die Seite S_1 ist nicht in der Hyperebene $h_2 = c_2$ enthalten. Deswegen gibt es Punkte $\mathbf{x} \in S_1$ mit $h_1(\mathbf{x}) = c_1$ und $h_2(\mathbf{x}) > c_2$. Für diese Punkte ist

$$h_3(\mathbf{x}) - c_3 = a_2(h_2(\mathbf{x}) - c_2) \quad \text{mit} \quad h_3(\mathbf{x}) - c_3 \geq 0 \quad \text{und} \quad h_2(\mathbf{x}) - c_2 > 0.$$

Deswegen kann nicht $a_2 < 0$ gelten. Wir finden $a_2 \geq 0$ und ebenso $a_1 \geq 0$.

Für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ folgt $h_3(\mathbf{x}) \geq c_3$ aus den beiden Ungleichungen $h_1(\mathbf{x}) \geq c_1$ und $h_2(\mathbf{x}) \geq c_2$. Die Ungleichung $h_3(\mathbf{x}) \geq c_3$ ist irrelevant. Widerspruch! $\square$

6.2.2 Ecken

Für die lineare Optimierung sind an einem Polyeder das Wichtigste seine Ecken, weil die zu optimierende Funktion ihr Extremum entweder in einer Ecke oder überhaupt nicht annimmt.

Satz 6.18 (Ecken-Kriterien) *Es sei $P \subset \mathbb{R}^n$ das Polyeder $h_1(\mathbf{x}) \geq c_1, \dots, h_k(\mathbf{x}) \geq c_k$. Für einen Punkt $\mathbf{p} \in P$ sind äquivalent:*

a) $\mathbf{p}$ ist eine Ecke von P ;

b) unter den Linearformen $h_1, \dots, h_k$ gibt es n linear unabhängige, etwa $h_{i_1}, \dots, h_{i_n}$, mit $\mathbf{p} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : h_{i_1}(\mathbf{x}) = c_{i_1}, \dots, h_{i_n}(\mathbf{x}) = c_{i_n}\}$;

c) Es gibt eine Linearform h und ein $c \in \mathbb{R}$ derart, dass der Halbraum $h(\mathbf{x}) \leq c$ das Polyeder P nur im Punkt $\mathbf{p}$ schneidet;

d) Sind $\mathbf{a} \neq \mathbf{b} \in P$ Punkte derart, dass $\mathbf{p} = t \cdot \mathbf{a} + (1 - t) \cdot \mathbf{b}, 0 \leq t \leq 1$, auf der Strecke $\overline{\mathbf{ab}}$ liegt, dann gilt $t = 0$ oder $t = 1$.

Beweis. a) $\Leftrightarrow$ b): Eine Ecke ist eine 0-dimensionale Seite. Die behauptete Äquivalenz ist genau Satz 6.16 für die Dimension $d = 0$.

a) $\Rightarrow$ c): Nach Voraussetzung gibt es Linearformen $h_{i_1}, \dots, h_{i_n}$ unter den $h_1, \dots, h_k$ so, dass

$$P \cap \{h_{i_1} = c_{i_1}, \dots, h_{i_n} = c_{i_n}\} = \{\mathbf{p}\}.$$

Für alle anderen Punkte $\mathbf{x} \in P$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{p}$ ist mindestens einer der Werte $h_{i_\nu}(\mathbf{x}) > c_{i_\nu}$, $\nu = 1, \dots, n$. Wir setzen nun

$$h := h_{i_1} + \dots + h_{i_n}, \quad c := c_{i_1} + \dots + c_{i_n}.$$

Dann ist $h(\mathbf{p}) = c$ und für alle anderen Punkte $\mathbf{x} \in P$ gilt $h(\mathbf{x}) > c$. Der Halbraum $h(\mathbf{x}) \leq c$ schneidet P nur im Punkt $\mathbf{p}$.

c) $\Rightarrow$ d): Es seien $\mathbf{a} \neq \mathbf{b} \in P$ mit $\mathbf{p} \in \overline{\mathbf{a}\mathbf{b}}$, $\mathbf{p} \neq \mathbf{a}$ und $\mathbf{p} \neq \mathbf{b}$. Nach b) ist dann also $h(\mathbf{a}) > c$ und $h(\mathbf{b}) > c$. Daraus folgt

$$h(\mathbf{p}) = th(\mathbf{a}) + (1-t)h(\mathbf{b}) > c,$$

Widerspruch.

d) $\Rightarrow$ a): Weil $\mathbf{p}$ zu P gehört, gilt $h_i(\mathbf{p}) \geq c_i$ für $i = 1, \dots, k$. Es seien $h_{i_1}, \dots, h_{i_l}$ diejenigen dieser Linearformen, für welche die Gleichheit $h_i(\mathbf{p}) = c_i$ gilt. Für alle anderen ist dann also $h_i(\mathbf{p}) > c_i$. Der Lösungsraum des inhomogenen LGS

$$h_{i_1}(\mathbf{x}) = c_{i_1}, \dots, h_{i_l}(\mathbf{x}) = c_{i_l}$$

ist nicht leer. Es ist zu zeigen, dass er die Dimension 0 hat. Andernfalls enthält er eine Gerade L durch $\mathbf{p}$. Wegen $h_i(\mathbf{p}) > c_i$ für $i \neq i_1, \dots, i_l$ gibt es auf dieser Geraden eine Strecke $\overline{\mathbf{p} + \mathbf{y}, \mathbf{p} - \mathbf{y}}$, die $\mathbf{p}$ enthält, mit $h_i(\mathbf{x}) > c_i$ für alle $\mathbf{x}$ auf dieser Strecke. Insbesondere gehört diese Strecke dann zu P , im Widerspruch zu c). $\square$

Satz 6.19 (Korollar) Jedes Polyeder hat nur endlich viele Ecken.

In der Tat, das Polyeder ist durch endlich viele Ungleichungen $h_i(\mathbf{x}) \geq c_i$, $i = 1, \dots, k$, definiert. Und unter den Linearformen $h_1, \dots, h_k$ gibt es höchstens

$$\binom{k}{n}$$

Mengen von n linear unabhängigen Linearformen. Und jede Ecke des Polyeders ist durch so eine Menge definiert. $\square$

Ein Wort zur Warnung: Wenn k groß ist, dann ist auch $\binom{k}{n}$ groß. Die Aufzählung aller Ecken eines Polyeders kann dann zu einem ziemlich unlösbaren Problem werden. Hierzu ein noch relativ einfaches Beispiel (Collatz - Wetterling, p.3):

Beispiel 6.11 Ein Polyeder im $\mathbb{R}^2$ sei definiert durch das LUS

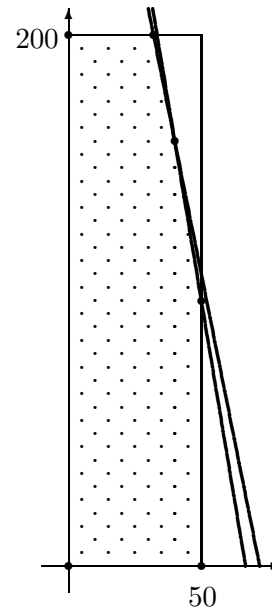
$$0 \leq x_1 \leq 50, \quad 0 \leq x_2 \leq 200, \quad 5x_1 + x_2 \leq 360, \quad 6x_1 + x_2 \leq 400.$$

Seine Ecken finden sich unter den Lösungen der Gleichungssysteme zu je zwei dieser Ungleichungen mit linear unabhängigen Linearformen. Wir schreiben diese Gleichungen und ihre Lösungen an:

	$x_2 = 0$	$x_2 = 200$	$5x_1 + x_2 = 360$	$6x_1 + x_2 = 400$
$x_1 = 0$	(0, 0)	(0, 200)	(0, 360)	(0, 400)
$x_1 = 50$	(50, 0)	(50, 200)	(50, 110)	(50, 100)
$x_2 = 0$			(72, 0)	(200/3, 0)
$x_2 = 200$			(32, 200)	(100/3, 200)
$5x_1 + x_2 = 360$				(40, 160)

Wenn wir die Punkte mit $x_1 > 50$ und $x_2 > 200$ aussortieren, bleiben noch

(x_1, x_2)	$5x_1 + x_2$	$6x_1 + x_2$	$\in P$
$(0, 0)$	$0 \leq 360$	$0 \leq 400$	ja
$(0, 200)$	$200 \leq 360$	$200 \leq 400$	ja
$(50, 0)$	$250 \leq 360$	$300 \leq 400$	ja
$(50, 200)$	$450 > 360$	$500 > 400$	nein
$(50, 110)$	360	$410 > 400$	nein
$(50, 100)$	$350 \leq 360$	400	ja
$(32, 200)$	360	$392 \leq 400$	ja
$(100/3, 200)$	$1100/3 > 360$	400	nein
$(40, 160)$	360	400	ja



Verglichen mit der graphischen Ermittlung der Ecken, ist die rechnerische Methode sehr unübersichtlich und aufwendig. Aber die graphische Methode funktioniert eben nicht in höheren Dimensionen.

Satz 6.20 Für ein nicht-leeres Polyeder $P \subset \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:

- a) Unter den Ungleichungen $h_i(\mathbf{x}) \geq c_i$, welche P beschreiben, gibt es n wofür die Linearformen h_i linear unabhängig sind;
- b) P besitzt Seiten beliebiger Dimension $< \dim(P)$, also insbesondere auch Ecken.

Beweis. a) $\Rightarrow$ b): Weil P nicht leer ist, gibt es einen Punkt $\mathbf{p} \in P$. Wenn $P = \{\mathbf{p}\}$ ist, dann ist $\mathbf{p}$ trivialerweise eine Ecke von P . Andernfalls gibt es noch einen Punkt $\mathbf{q} \neq \mathbf{p}$ in P . Wir betrachten die Gerade L , die von $\mathbf{p}$ und $\mathbf{q}$ aufgespannt wird. Unter den h_i wählen wir nun n linear unabhängige, etwa $h_1, \dots, h_n$. Das homogene LGS $h_i(\mathbf{x}) = 0$, $i = 1, \dots, n$, hat dann nur die Null-Lösung. Insbesondere gibt es dann ein h_i mit $h_i(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \neq 0$. Dann kann nicht für alle $t \in \mathbb{R}$

$$h_i(\mathbf{p} + t \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{p})) = h_i(\mathbf{p}) + t \cdot h_i(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \geq c_i$$

gelten. Die Gerade L liegt nicht ganz in P . Das Beispiel nach Satz 6.9 zeigt: Es gibt einen Punkt $\mathbf{r} \in L$ und eine Linearform h_j mit $\{h_j(\mathbf{x}) = c_j\} \cap L = \{\mathbf{r}\}$. Insbesondere liegt die Strecke $\overline{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ nicht ganz in der Hyperebene $H : h_j(\mathbf{x}) = c_j$. Dann liegt auch P nicht ganz in H , und $S := P \cap H$ ist eine Seite von P mit $\dim(S) < \dim(P)$. Wenn $\dim(S) < \dim(P) - 1$ wäre, hätten wir h_j bei der Definition von P nach Satz 6.15 weglassen können. Wir können also $\dim(S) = \dim(P) - 1$ annehmen. Die Behauptung ergibt sich durch Induktion nach $\dim(P)$, denn die Ungleichungen, welche S beschreiben, sind genau diejenigen für P mit der zusätzlichen Gleichung $h_j(\mathbf{x}) = c_j$. Und auch unter den Ungleichungen für S gibt es n derart, dass die zugehörigen Linearformen linear unabhängig sind.

Die Richtung b) $\Rightarrow$ a) folgt sofort aus Satz 6.16. □

Satz 6.21 Es sei $P \subset \mathbb{R}^n$ ein Polyeder, $H \subset \mathbb{R}^n$ eine Hyperebene, und Q das Polyeder $H \cap P$. Die Ecken $\mathbf{q}$ von Q sind dann entweder selbst Ecken von P oder Durchschnitte $H \cap K$, wo K eine Kante von P ist, die nicht ganz zu H gehört.

Beweis. Wie immer sei P definiert durch $h_i(\mathbf{x}) \geq c_i$, $i = 1, \dots, k$. Weiter sei $H : h(\mathbf{x}) = c$. Dann ist

$$Q = \{h(\mathbf{x}) \geq c, -h(\mathbf{x}) \geq -c, h_i(\mathbf{x}) \geq c_i\}.$$

Sei nun $\mathbf{q} \in Q$ eine Ecke. Nach Satz 6.18 b) ist $\mathbf{q}$ durch n linear unabhängige Linearformen unter den h, h_i definiert. Wenn es n linear unabhängige h_i sind, ist $\mathbf{q}$ eine Ecke von P . Andernfalls sind es n linear unabhängige Linearformen $h, h_{i_1}, \dots, h_{i_{n-1}}$ mit

$$\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{x} : h(\mathbf{x}) = c, h_{i_1}(\mathbf{x}) = c_{i_1}, \dots, h_{i_{n-1}}(\mathbf{x}) = c_{i_{n-1}}\}.$$

Dann sind auch $h_{i_1}, \dots, h_{i_{n-1}}$ linear unabhängig. Wegen

$$\mathbf{q} \in K := P \cap \{\mathbf{x} : h_{i_1}(\mathbf{x}) = c_{i_1}, \dots, h_{i_{n-1}}(\mathbf{x}) = c_{i_{n-1}}\},$$

ist K nicht leer, und keine Ecke, sondern eine Kante von P . Nach Konstruktion ist $\{\mathbf{q}\} = K \cap H$.

Sei umgekehrt $K : \{h_{i_1} = c_{i_1}, \dots, h_{i_{n-1}} = c_{i_{n-1}}\}$ eine Kante von P , wo wir nach Satz 6.16 annehmen können, dass die Linearformen $h_{i_1}, \dots, h_{i_{n-1}}$ linear unabhängig sind. Ist $\mathbf{q} \in H \cap K$ und gehört K nicht ganz zu H , so ist $\{\mathbf{q}\} = K \cap H$. Die Linearformen $h, h_{i_1}, \dots, h_{i_{n-1}}$ sind linear unabhängig und definieren die Ecke $\mathbf{q}$ von Q .

Und wenn $\mathbf{q} \in H$ schon selbst eine Ecke von P ist, so gibt es n linear unabhängige Linearformen $h_{i_1}, \dots, h_{i_n}$ mit $\{\mathbf{q}\} = \{h_{i_1}(\mathbf{x}) = c_{i_1}, \dots, h_{i_n}(\mathbf{x}) = c_{i_n}\}$. Diese Linearformen definieren $\mathbf{q}$ als Ecke von Q . $\square$

Aufgabe 6.6 Bestimmen Sie die Ecken des Polyeders (Hyperwürfel)

$$W : \quad -1 \leq x_\nu \leq 1 \quad (1 \leq \nu \leq n)$$

im $\mathbb{R}^n$. Wieviele Ecken sind es?

Aufgabe 6.7 a) Bestimmen Sie die Seitenflächen der Simplexes $S, S' \subset \mathbb{R}^3$ mit den Ecken

$$\begin{aligned} S : & \quad (1, 1, 1), (1, -1, -1), (-1, 1, -1), (-1, -1, 1), \\ S' : & \quad (1, 1, -1), (1, -1, 1), (-1, 1, 1), (-1, -1, -1). \end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie die Ecken des Polyeders $S \cap S' \subset \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 6.8 Bestimmen Sie die Ecken des Polyeders im $\mathbb{R}^3$ definiert durch $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$ und

- a) $x_1 + x_2 \leq 1, x_1 + x_3 \leq 1, x_2 + x_3 \leq 1$;
- b) $x_1 + x_2 \geq 1, x_1 + x_3 \geq 1, x_2 + x_3 \geq 1$.

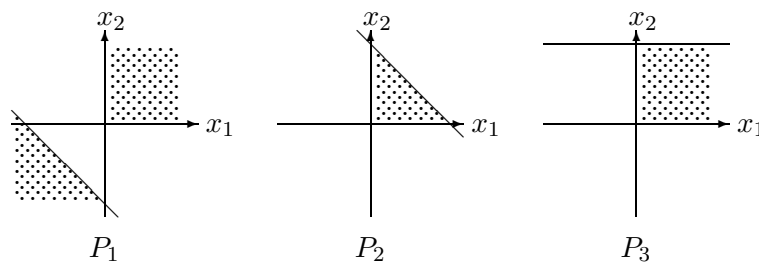
6.3 Beschränkte Polyeder

Von diesen Polyedern gibt es drei wesentlich verschiedene, mehr oder weniger erwünschte Sorten: Ein Polyeder P kann

- leer sein, seine definierenden Ungleichungen sind unverträglich, das LUS ist unlösbar;
- beschränkt sein (Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt beschränkt, wenn es ein $R \in \mathbb{R}$ gibt mit $\|\mathbf{x}\| < R$ für alle $\mathbf{x} \in M$). Das ist der für die lineare Optimierung relevante Fall;
- unbeschränkt sein, hier kann das Optimierungsproblem unlösbar sein.

Beispiel 6.12 In der Ebene $\mathbb{R}^2$ ist das Polyeder

- $P_1 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, -(x_1 + x_2) \geq 1$ leer;
- $P_2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, -(x_1 + x_2) \geq -1$ nicht leer und beschränkt. Es ist ja das Dreieck mit den Ecken $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$;
- $P_3 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, -x_2 \geq -1$ nicht leer, aber unbeschränkt. Dieses Polyeder enthält nämlich alle Punkte $(x_1, 1/2)$ mit $x_1 \geq 0$.



Statt „beschränktes Polyeder“ werden wir uns meistens die Formulierung „endliches Polyeder“ verwenden, statt „unbeschränktes Polyeder“ meistens „unendliches Polyeder“. Das klingt einfach besser.

Im Beispiel 6.3 haben wir die Möglichkeiten diskutiert, die sich für den Durchschnitt einer Gerade $L \subset \mathbb{R}^n$ mit einem Polyeder $P \subset \mathbb{R}^n$ ergeben können. Es gibt die Fälle:

- $L \cap P$ ist leer;
- $L \subset P$;
- $L \cap P$ ist ein (unendlich langer) Strahl (Definition 6.9), dessen Anfangspunkt $\mathbf{p}$ zum Rand ∂P gehört;
- $L \cap P$ ist eine Strecke $\overline{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ mit $\mathbf{p}$ und $\mathbf{q} \in \partial P$.

Satz 6.22 (Unendliche Polyeder) Es sei P das Polyeder $\{h_i(\mathbf{x}) \geq c_i, i = 1, \dots, k\}$ und $P \neq \emptyset$. Dann sind äquivalent:

- P ist unendlich;
- es gibt einen Punkt $\mathbf{p} \in P$ und einen Strahl durch $\mathbf{p}$, der ganz in P verläuft;
- Es gibt einen Vektor $\mathbf{0} \neq \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ mit $h_i(\mathbf{a}) \geq 0$ für $i = 1, \dots, k$;
- durch jeden Punkt $\mathbf{p} \in P$ gibt es einen Strahl, der ganz in P verläuft.

Beweis. a) $\Rightarrow$ b) (Induktion nach $\dim(P)$): Ein Polyeder P der Dimension 0 ist ein Punkt und damit endlich. Ein eindimensionales Polyeder, das nicht endlich ist, ist selbst eine unbeschränkte Kante. Das ist der Induktionsanfang. Sei nun P ein unendliches Polyeder der Dimension $n > 1$.

Zu jeden $R \in \mathbb{R}$ gibt es also einen Punkt $\mathbf{x} \in P$ mit $\|\mathbf{x}\| > R$. Wir betrachten eine beliebige Gerade $L \subset \mathbb{R}^n$ durch $\mathbf{x}$. Wegen $\mathbf{x} \in L \cap P$ ist der Durchschnitt $L \cap P$ nicht leer. Nach der Diskussion vor diesem Satz enthält $L \cap P$ entweder einen Strahl (Fälle i) und ii)), wir sind fertig, oder dieser Durchschnitt ist eine Strecke $\overline{\mathbf{a}\mathbf{b}}$ mit $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b} \in \partial P$. Weil $\mathbf{x}$ zur konvexen Hülle $\text{conv}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ gehört, kann nicht $\|\mathbf{a}\| \leq R$ und $\|\mathbf{b}\| \leq R$ sein. Zu jeden $R > 0$ gibt es also einen Punkt $\mathbf{q} \in \partial P$ mit $\|\mathbf{q}\| > R$.

Weil ∂P aus endlich vielen Seiten von P besteht, muss P eine unbeschränkte Seite haben. Die Aussage folgt aus der Induktionsannahme.

b) $\Rightarrow$ c): Es sei $\mathbf{p} \in P$ und $\mathbf{0} \neq \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ derart, dass der Strahl $\mathbf{p} + t \cdot \mathbf{a}$, $t \geq 0$, ganz zu P gehört. Für $i = 1, \dots, k$ bedeutet dies:

$$h_i(\mathbf{p} + t \cdot \mathbf{a}) = h_i(\mathbf{p}) + t \cdot h_i(\mathbf{a}) \geq c_i \text{ für alle } t \geq 0.$$

Dann kann nicht $h_i(\mathbf{a}) < 0$ sein.

c) $\Rightarrow$ d) Sei $\mathbf{p} \in P$ und $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ mit $h_i(\mathbf{a}) \geq 0$ für alle i . Für alle $t \geq 0$ folgt daraus

$$h_i(\mathbf{p} + t \cdot \mathbf{a}) = h_i(\mathbf{p}) + t \cdot h_i(\mathbf{a}) \geq h_i(\mathbf{p}) \geq c_i.$$

Der ganze Strahl $\mathbf{p} + t \cdot \mathbf{a}$, $t \geq 0$, gehört zu P .

d) $\Rightarrow$ a) ist offensichtlich: Wenn es unendlich lange Strahlen in P gibt, dann kann P selbst nicht endlich sein. $\square$

Satz 6.23 Es sei $P \subset \mathbb{R}^n$ ein Polyeder und $H : h(\mathbf{x}) = c$ eine Hyperebene in $\mathbb{R}^n$. Wenn $H \cap P$ ein endliches Polyeder $\neq \emptyset$ ist, so ist auch jedes Polyeder $P_b := \{h(\mathbf{x}) = b\} \cap P$, $b \in \mathbb{R}$, endlich (oder leer).

Beweis. Es sei, wie immer, $P = \{h_i(\mathbf{x}) \geq c_i, i = 1, \dots, k\}$. Dann ist $P_b = \{h(\mathbf{x}) = b, h_i(\mathbf{x}) \geq c_i\}$. Angenommen, P_b sei unendlich, und insbesondere nicht leer. Wir wählen einen Punkt $\mathbf{p} \in P_b$. Nach Satz 6.22 d) gibt es einen Vektor $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ derart, dass der ganze Strahl $\mathbf{p} + t \cdot \mathbf{a}$, $0 \leq t \in \mathbb{R}$, zu P_b gehört. Es folgt $h_i(\mathbf{a}) \geq 0$, $i = 1, \dots, k$, und

$$h(\mathbf{p} + t \cdot \mathbf{a}) = h(\mathbf{p}) + t \cdot h(\mathbf{a}) = b = h(\mathbf{p})$$

für alle $t \geq 0$. Dann muss $h(\mathbf{a}) = 0$ sein. Weil $H \cap P$ nicht leer ist, folgt aus Satz 6.22 c), dass $H \cap P$ unendlich ist. Widerspruch! $\square$

Satz 6.24 (Endliche Polyeder) a) Jedes endliche n -dimensionale Polyeder hat mindestens $n + 1$ Seiten der Dimension $n - 1$.

b) Jedes endliche Polyeder hat Ecken.

Beweis. a) Es sei $P : h_i(\mathbf{x}) \geq c_i, i = 1, \dots, k$, wobei keine der Bedingungen überflüssig ist. Nach Satz 6.15 ist dann jede Menge $P \cap \{h_i(\mathbf{x}) = c_i\}$ eine $n - 1$ -dimensionale Seite von P . Die Behauptung ist bewiesen für $k \geq n + 1$. Sei nun $k \leq n$. Wir zeigen, dass dann P unendlich ist.

Die Lösungsmenge des LGS $h_1(\mathbf{x}) = 0, \dots, h_{k-1}(\mathbf{x}) = 0$ ist ein Untervektorraum der Dimension ≥ 1 . Er enthält einen Vektor $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Wenn $h_k(\mathbf{a}) \geq 0$ ist, dann ist die Bedingung c) aus Satz 6.22 erfüllt. Wenn $h_k(\mathbf{a}) < 0$ sein sollte, ersetzen wir $\mathbf{a}$ durch $-\mathbf{a}$, und wieder ist diese Bedingung erfüllt.

b) Weil nach a) Jedes endliche Polyeder endliche Seiten der Dimension $n - 1$ besitzt, folgt die Behauptung durch Induktion nach n . $\square$

Im letzten Abschnitt haben wir die verschiedenen Möglichkeiten für den Durchschnitt einer Geraden $L : \mathbf{a} + \mathbb{R} \cdot \mathbf{v}$ mit einem Polyeder P diskutiert. Wenn P endlich ist, kann dieser Durchschnitt nicht die ganze Gerade sein, auch kein Strahl auf L . Deswegen wird $L \cap P$ durch die Parameter t in einem endlichen abgeschlossenen Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ definiert. Für $\mathbf{p}_a := \mathbf{a} + a \cdot \mathbf{v}$ und $\mathbf{p}_b := \mathbf{a} + b \cdot \mathbf{v}$ ist

$$h_i(\mathbf{p}_a) \geq c_i, h_i(\mathbf{p}_b) \geq c_i, \quad i = 1, \dots, k.$$

Aber es gibt Indizes $1 \leq i, j \leq k$ mit

$$h_i(\mathbf{p}_a) = c_i, \quad h_j(\mathbf{p}_b) = c_j.$$

Die Punkte $\mathbf{p}_a$ und $\mathbf{p}_b$ gehören zum Rand ∂P .

Satz 6.25 *Jedes endliche Polyeder ist die konvexe Hülle seiner (endlich vielen) Ecken.*

Beweis. Nach Satz 6.9 ist jedes Polyeder konvex. Es enthält seine Ecken, und damit die konvexe Hülle dieser Ecken.

Wir müssen noch die Umkehrung zeigen: Jedes endliche Polyeder P ist in der konvexen Hülle seiner Ecken enthalten. Dies geschieht durch vollständige Induktion nach der Dimension von P . Ein null-dimensionales Polyeder ist ein Punkt, da ist nichts zu zeigen. Sei nun P ein Polyeder der Dimension $n > 0$. Wir können annehmen, dass P im $\mathbb{R}^n$ liegt. Jeder Punkt $\mathbf{x} \in \partial P$ des Randes liegt in einem endlichen Polyeder $P' \subset P$ kleinerer Dimension. Nach Induktionsannahme ist $\mathbf{x}$ in der konvexen Hülle der Ecken von P' enthalten. Und nach Satz 6.14 sind die Ecken von P' auch Ecken von P . Damit ist die Behauptung für $\mathbf{x} \in \partial P$ bewiesen.

Sei nun $\mathbf{x} \in \overset{\circ}{P}$. Wir wählen eine Gerade $L \subset \mathbb{R}^n$ durch $\mathbf{x}$, etwa $L : \mathbf{x} + \mathbb{R} \cdot \mathbf{v}$ mit einem Vektor $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Nach der Diskussion des Durchschnitts von Gerade und Polyeder (hier ist $\mathbf{x} \in L \cap P$, und damit ist $L \cap P$ nicht leer) gibt es Parameter $a < 0 < b \in \mathbb{R}$ deren zugehörige Punkte $\mathbf{p}_a$ und $\mathbf{p}_b$ auf L zum Rand ∂P gehören. Deswegen sind beide Punkte eine Konvexkombination von Ecken. Und $\mathbf{x} \in \overline{\mathbf{p}_a \mathbf{p}_b}$ ist es auch. $\square$

Definition 6.17 *Es sei P ein Polyeder und $\mathbf{p} \in P$ eine seiner Ecken. Weiter seien $K_1, \dots, K_l \subset P$ die von $\mathbf{p}$ ausgehenden Kanten des Polyeders P . Wenn eine Kante $K_i = \overline{\mathbf{p} \mathbf{p}_i}$ endlich ist, so nennen wir $S_i := \{\mathbf{p} + s \cdot (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}), 0 \leq s \in \mathbb{R}\}$ den durch K_i definierten, von $\mathbf{p}$ ausgehenden Strahl. Wenn K_i unendlich ist, ist diese Kante selbst ein von $\mathbf{p}$ ausgehender Strahl S_i . Alle diese Strahlen S_i , $i = 1, \dots, l$, nennen wir die von $\mathbf{p}$ ausgehenden durch Kanten von P definierten Strahlen.*

Satz 6.26 (Korollar zu Satz 6.25) *Es seien $P \subset \mathbb{R}^n$ ein endliches Polyeder der Dimension ≥ 1 , $\mathbf{p} \in P$ eine seiner Ecken, und $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k$ die anderen Ecken von P . Weiter seien $S_1, \dots, S_k$ die von $\mathbf{p}$ ausgehenden Strahlen durch diese Ecken $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k$. Dann liegt das Polyeder P in der konvexen Hülle von $\bigcup S_i$, $i = 1, \dots, k$.*

Beweis. Nach Satz 6.25 ist P die konvexe Hülle $\text{conv}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k)$ seiner Ecken. Deswegen gehört P zur konvexen Hülle des Kegels über dieser Menge $\{\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k\}$ mit Spitze $\mathbf{p}$. Dieser Kegel besteht aber genau aus den Strahlen $S_1, \dots, S_k$. $\square$

Wir brauchen auch die Version dieses Satzes für unendliche Polyeder.

Satz 6.27 *Es sei $P \subset \mathbb{R}^n$ ein Polyeder der Dimension ≥ 1 und $\mathbf{p} \in P$ eine seiner Ecken. Weiter seien $S_1, \dots, S_l$ die von $\mathbf{p}$ ausgehenden durch Kanten definierten Strahlen. Dann liegt das Polyeder P in der konvexen Hülle von $\bigcup S_i$, $i = 1, \dots, l$.*

Beweis. Wir wählen nach Satz 6.18 c) eine Linearform $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $P \cap \{h(\mathbf{x}) \leq c\} = \{\mathbf{p}\}$. Dann schneidet die Hyperebene $H : h(\mathbf{x}) = c$ das Polyeder P nur in der Ecke $\mathbf{p}$. Weiter seien $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_l \neq \mathbf{p}$ Punkte von P , welche die Strahlen S_i definieren, d.h., $\mathbf{p}_i \in S_i$. Weil P nicht nur aus der Ecke $\mathbf{p}$ besteht, gibt es solche Strahlen. Wir setzen

$$m_1 := \min_{i=1, \dots, l} h(\mathbf{p}_i), \quad m_2 := \min_{\text{Ecken } \mathbf{p}'_j \neq \mathbf{p}} h(\mathbf{p}'_j), \quad m := \min(m_1, m_2).$$

Weil keiner der Punkte $\mathbf{p}_i, \mathbf{p}'_j$ zu H gehört, ist $m > c$. Sei nun $b \in \mathbb{R}$ mit $c < b < m$. Wir betrachten die Hyperebene $H_b : h(\mathbf{x}) = b$ und das Polyeder $Q_b := P \cap H_b$. Aus $h(\mathbf{p}) = c < b$ und $h(\mathbf{p}_i) > b$ folgt, dass jede Strecke $\overline{\mathbf{p}\mathbf{p}_i} \subset P$ die Hyperebene H_b schneidet. Deswegen sind die Polyeder Q_b nicht leer und nach Satz 6.23 endlich.

Wegen Satz 6.25 ist Q_b die konvexe Hülle seiner Ecken $\mathbf{q}_j$. Keine dieser Ecken ist ein Endpunkt von S_i und kann eine Ecke von P sein. Also sind diese Ecken $\mathbf{q}_j$ nach Satz 6.21 Durchschnitte $H_b \cap K_j$ mit Kanten K_j von P . Wir zeigen, dass alle diese Kanten von der Ecke $\mathbf{p}$ ausgehen:

Nehmen wir also an, eine Kante K_j ginge nicht von $\mathbf{p}$ aus. Sei diese Kante K_j endlich, etwa $K_j = \overline{\mathbf{p}'_j \mathbf{p}''_j}$ mit $\mathbf{p}'_j, \mathbf{p}''_j \neq \mathbf{p}$, so gilt nach Wahl von m_2 , dass $h(\mathbf{p}'_j) > c$, $h(\mathbf{p}''_j) > c$ und K_j schneidet H nicht. Sei K_j unendlich, etwa der Strahl $\{\mathbf{p}'_j + t \cdot \mathbf{a}, t \geq 0\}$ mit $\mathbf{p}'_j \neq \mathbf{p}$. Hier kann nicht $h(\mathbf{a}) < 0$ sein, denn dann würde dieser Strahl die Hyperebene H schneiden. Das könnte nur in $\mathbf{p}$ passieren, und die Kante wäre nicht unendlich, sondern die Strecke $\overline{\mathbf{p}\mathbf{p}'_j}$. Es folgt $h(\mathbf{a}) \geq 0$ und $h(\mathbf{p}'_j + t \cdot \mathbf{a}) \geq h(\mathbf{p}'_j) > b$. Auch dieser Strahl schneidet H_b nicht.

Weil Q_b endlich ist, stimmt es nach Satz 6.23 mit der konvexen Hülle seiner Ecken überein. Jede dieser Ecken ist der Durchschnitt von H_b mit einer von $\mathbf{p}$ ausgehenden Kante K_j . Deswegen liegt Q_b in der konvexen Hülle dieser von $\mathbf{p}$ ausgehenden Kanten K_j und auch in der konvexen Hülle $\text{conv}(S_j, j = 1, \dots, l)$ der dadurch definierten Strahlen.

Sei nun $\mathbf{x} \in P$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{p}$, beliebig. Gilt $h(\mathbf{x}) < m$, so liegt $\mathbf{x}$ in Q_b mit $b := h(\mathbf{x})$. Der Punkt $\mathbf{x} \in Q_b$ gehört zur konvexen Hülle von $\bigcup S_j$. Andernfalls sei S der von $\mathbf{p}$ ausgehende Strahl durch $\mathbf{x}$. Er hat den Richtungsvektor $\mathbf{a} := \mathbf{x} - \mathbf{p}$. Weil $h(\mathbf{x}) > h(\mathbf{p}) = c$ ist, gilt $h(\mathbf{a}) > 0$. Deswegen schneidet der Strahl S die Hyperebene H_b in einem Punkt $\mathbf{y} \in \overline{\mathbf{p}\mathbf{x}} \subset P$. Dieser Punkt $\mathbf{y} \in Q_b$ gehört zur konvexen Hülle von $\bigcup S_i$. Nach Satz 6.7 ist diese konvexe Hülle ein Kegel mit Spitze $\mathbf{p}$. Mit $\mathbf{y}$ enthält dieser Kegel auch jeden Strahl $\mathbf{p} + t \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{p})$, $t \geq 0$, und insbesondere den Punkt $\mathbf{x}$. $\square$

Aufgabe 6.9 Welches der beiden Polyeder aus Aufgabe 6.8 ist endlich, welches unendlich? (Beweis!)

6.4 Das Optimierungsproblem

Das Problem der linearen Optimierung ist folgendes: Gegeben ist ein Polyeder $P \subset \mathbb{R}^n$ und eine lineare Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Gesucht ist ein Punkt $\mathbf{p} \in P$, in dem $f(\mathbf{p})$ den Minimalwert unter allen Werten $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in P$, annimmt. In diesem Fall bedeutet $f(\mathbf{x})$ so etwas wie Kosten. Wenn $f(\mathbf{x})$ so etwas wie Profit bedeutet, dann ist natürlich der maximale Wert $f(\mathbf{x})$ gesucht. Nach Änderung des Vorzeichens von f sind beide Formulierungen äquivalent.

Beispiel 6.13 (Collatz-Wetterling p.3) Wörtlich steht da: „In einem landwirtschaftlichen Betrieb werden Kühe und Schafe gehalten. Für 50 Kühe und 200 Schafe sind Ställe vorhanden. Weiterhin sind

72 Morgen Weideland verfügbar. Für eine Kuh werden 1 Morgen, für ein Schaf 0.2 Morgen benötigt. Zur Versorgung des Viehs sind Arbeitskräfte einzusetzen, und zwar können jährlich bis zu 10 000 Arbeitsstunden geleistet werden. Auf eine Kuh entfallen jährlich 150 Arbeitsstunden, auf ein Schaf 25 Arbeitsstunden. Der jährlich erzielte Reingewinn beträgt pro Kuh 250 DM, pro Schaf 45 DM.“

Natürlich ist der Betrieb daran interessiert, die Anzahl x_1 seiner Kühe und x_2 seiner Schafe so zu bestimmen, dass der erzielte Gesamtgewinn möglichst groß wird. Mathematisch ausgedrückt: Gesucht ist das Maximum der Funktion

$$f(x_1, x_2) := 250 \cdot x_1 + 45 \cdot x_2$$

auf dem Polyeder, das durch die Ungleichungen

$$0 \leq x_1 \leq 50, \quad 0 \leq x_2 \leq 200, \quad x_1 + 0.2 \cdot x_2 \leq 72, \quad 150 \cdot x_1 + 25 \cdot x_2 \leq 10000$$

definiert wird. Kompliziert wird dieses Problem durch eine ganze Reihe von Umständen. Am schwierigsten dürfte es sein, die Sicherheit aller Annahmen zu gewährleisten. Aber weil dies am wenigsten mit Mathematik zu tun hat, wollen wir davon abstrahieren. Mathematisch interessanter ist schon die Frage, was zu tun ist, wenn ein Punkt $\mathbf{p} = (x_1, x_2) \in P$ herauskommt, dessen Koordinaten nicht beide ganzzahlig sind. Aber auch davon wollen wir abstrahieren.

Der entscheidende Punkt, den wir gleich verifizieren werden (Satz 6.30), ist, dass das Maximum von f auf P in einer Ecke von P angenommen wird. Nun ist das Polyeder genau dasjenige aus Beispiel 6.11. Dort haben wir ausgerechnet, dass es sechs Ecken hat. In der folgenden Tabelle sind diese Ecken $\mathbf{p}$ zusammen mit den Werten $f(\mathbf{p})$ angegeben:

$\mathbf{p}$	(0, 0)	(0, 200)	(50, 0)	(50, 100)	(40, 160)	(32, 200)
$f(\mathbf{p})$	0	8400	12500	16700	16720	16400

Man sieht: Der größte Wert wird in der Ecke mit den Koordinaten (40, 160) angenommen.

Natürlich ist es so hingetrickst, dass für Kühe und Schafe ganzzahlige Zahlen raus kommen: 40 Kühe und 160 Schafe. Außerdem liegen die beiden Seitengeraden durch die Ecke (40, 160) so nahe beieinander, dass man sie auf der Graphik kaum auseinanderhalten kann. Und die Gerade $f(x_1, x_2) = 16720$ liegt da noch dazwischen. Eine lästige Komplikation.

Definition 6.18 Die Ecke $\mathbf{p}$ eines Polyeders P heißt optimal für die Linearform f , wenn $f(\mathbf{p}) \leq f(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in P$.

Der folgende Satz zeigt, wie man optimale Ecken erkennt, ausgehend von den Ungleichungen, welche das Polyeder definieren.

Satz 6.28 Das n -dimensionale Polyeder P sei durch die Ungleichungen $h_i(\mathbf{x}) \geq c_i$, $i = 1, \dots, k$, definiert. Für die Ecke $\mathbf{p} \in P$ gelte $h_i(\mathbf{p}) = c_i$, $i = 1, \dots, n$, wobei die Linearformen $h_1, \dots, h_n$ wie im Eckenkriterium Satz 6.18 b) linear unabhängig sind. Dann ist

$$f = a_1 h_1 + \dots + a_n h_n$$

eine (eindeutig bestimmte) Linearkombination dieser Linearformen. Gilt hier $a_i \geq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$, so ist $\mathbf{p}$ optimal für f .

Beweis. Aus $f = \sum a_i h_i$ folgt $f(\mathbf{p}) = \sum a_i h_i(\mathbf{p}) = \sum a_i c_i$. Für alle $\mathbf{x} \in P$ ist $h_i(\mathbf{x}) \geq c_i$ und damit $a_i h_i(\mathbf{x}) \geq a_i c_i$. Damit erhalten wir für alle $\mathbf{x} \in P$

$$f(\mathbf{x}) = \sum a_i h_i(\mathbf{x}) \geq \sum a_i c_i = f(\mathbf{p}). \quad \square$$

Die folgende Bemerkung ist entscheidend für das Auffinden optimaler Ecken:

Satz 6.29 *Es sei $P \subset \mathbb{R}^n$ ein Polyeder und $\mathbf{p} \in P$ eine seiner Ecken. Wenn $\mathbf{p}$ nicht optimal für f ist, dann gibt es eine von $\mathbf{p}$ ausgehende Kante K , auf welcher f echt absteigt. D.h., für alle $\mathbf{p} \neq \mathbf{q} \in K$ ist $f(\mathbf{q}) < f(\mathbf{p})$.*

Beweis. Weil $\mathbf{p}$ nicht optimal für f ist, gibt es ein $\mathbf{x} \in P$ mit $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{p})$. Nach Satz 6.27 gehört $\mathbf{x} \in P$ zur konvexen Hülle der von $\mathbf{p}$ ausgehenden Strahlen

$$S_i : \mathbf{p} + s_i \cdot (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}), \quad 0 \leq s_i \in \mathbb{R}.$$

Es sei etwa

$$\mathbf{x} = \sum_i t_i (\mathbf{p} + s_i (\mathbf{p}_i - \mathbf{p})), \quad 0 \leq s_i, t_i \in \mathbb{R}, \quad \sum t_i = 1.$$

Dann wird

$$f(\mathbf{x}) = \sum t_i f(\mathbf{p} + s_i (\mathbf{p}_i - \mathbf{p})) = f(\mathbf{p}) + \sum t_i s_i (f(\mathbf{p}_i) - f(\mathbf{p})).$$

Falls hier $f(\mathbf{p}_i) \geq f(\mathbf{p})$ für alle Punkte $\mathbf{p}_i$ gelten würde, so wäre wegen $s_i t_i \geq 0$

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{p})$$

im Widerspruch zur Wahl von $\mathbf{x}$. Es gibt also ein i mit $f(\mathbf{p}_i) < f(\mathbf{p})$. Für alle $\mathbf{q} = \mathbf{p} + s \cdot (\mathbf{p}_i - \mathbf{p})$, $s > 0$, auf dem Strahl S_i ist dann

$$f(\mathbf{q}) = (1 - s)f(\mathbf{p}) + sf(\mathbf{p}_i) < (1 - s)f(\mathbf{p}) + sf(\mathbf{p}) = f(\mathbf{p}).$$

□

Damit haben wir jetzt alle technischen Hilfsmittel beieinander, um lineare Optimierungsprobleme konkret anzugehen. Sei ein solches Problem etwa in der folgenden Form gegeben:

Es sei $P \subset \mathbb{R}^n$ ein Polyeder und $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Linearform. Gesucht ist ein $\mathbf{p} \in P$, in dem f sein Minimum auf P annimmt.

Man verfährt wie folgt:

- 1) Man ermittelt eine Ecke $\mathbf{p}_i$ von P .
- 2) Man untersucht, ob es eine von $\mathbf{p}_i$ ausgehende Kante K gibt, auf der f echt absteigt. Ist dies nicht der Fall, so ist $\mathbf{p}_i$ optimal für f nach Satz 6.29.
- 3) Gibt es doch so eine Kante K , so untersucht man, ob sie endlich ist, oder ein unendlicher Strahl. Ist letzteres der Fall, so kann man aufgeben, denn auf dieser Kante wird f gegen unendlich anwachsen. Das Optimierungsproblem besitzt keine Lösung!
- 4) Ist aber $K = \overline{\mathbf{p}_i \mathbf{p}_j}$ endlich, so ist $f(\mathbf{p}_j) < f(\mathbf{p}_i)$. Man ersetzt die Ecke $\mathbf{p}_i$ durch $\mathbf{p}_j$ und beginnt erneut bei 2).

Weil P nur endlich viele Ecken hat, bricht das Verfahren irgendwann ab. Dann hat man entweder einen unendlich lange Kante gefunden, auf der f gegen unendlich geht, das Problem hat keine Lösung, oder man ist in einer Ecke gelandet, wo f auf keiner davon ausgehenden Kante echt anwächst. Diese Ecke ist dann optimal für f . Wir haben bewiesen:

Satz 6.30 (Hauptsatz der linearen Optimierung) *Es sei $P \subset \mathbb{R}^n$ ein Polyeder, das eine Ecke besitzt und $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ linear. Nimmt f auf P sein Minimum an, dann tut es das auch in einer Ecke von P . Andernfalls gibt es eine (unendlichlange) Kante von P , auf der f gegen $-\infty$ geht.*

Das Wesentliche an dem genannten Verfahren ist, dass man es auch programmieren kann. Das heißt dann der *Simplex-Algorithmus*. Den werden wir im nächsten Abschnitt genauer behandeln. Zuvor noch einiges zur Standardisierung des Optimierungsproblems.

Definition 6.19 *Es seien*

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Vektoren im $\mathbb{R}^n$. Dann sagt man

$$\mathbf{a} \geq \mathbf{b},$$

falls $\mathbf{a}$ komponentenweise $\geq \mathbf{b}$ ist, d.h.

$$a_i \geq b_i \quad \text{für alle} \quad i = 1, \dots, n.$$

Beispiel 6.14 *In diesem Sinn ist $\mathbf{a} \geq \mathbf{0}$, wenn alle Komponenten $a_i \geq 0$ sind.*

Bei einem konkreten Optimierungsproblem sind ja häufig Stückzahlen x_j , $j = 1, \dots, n$, zu bestimmen, die natürlich automatisch ≥ 0 sind. Zusätzliche Beschränkungen sind durch weitere Rahmenbedingungen (Restriktionen) gegeben, etwa $h_i(\mathbf{x}) \leq b_i$. Hier sei etwa

$$h_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j.$$

Die Koeffizienten der Linearformen fasst man zu einer Matrix $A = (a_{i,j})$ zusammen, und kann dann die zusätzlichen Beschränkungen kurz

$$A \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

schreiben mit dem Vektor $\mathbf{b} = (b_i)$. Ist f die zu minimierende Funktion, so schreibt man das Optimierungsproblem

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}) = \min & \text{(Zielfunktion)} \\ A \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b} & \text{(Restriktionen)} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} & \text{(Vorzeichenbedingungen)}. \end{cases}$$

Natürlich beschreibt das Ungleichungssystem $A \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, ein Polyeder im $\mathbb{R}^n$. Falls $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ ist, gehört der Nullpunkt dazu und ist eine Ecke (Ecken-Kriterium mit den n linear unabhängigen Linearformen x_i , $i = 1, \dots, n$). Umgekehrt kann man auch jedes Polyeder, welches Ecken hat in dieser Form darstellen:

Satz 6.31 *Es sei $\emptyset \neq P \subset \mathbb{R}^n$ ein Polyeder definiert durch die Ungleichungen $h_i(\mathbf{x}) \geq c_i$, $i = 1, \dots, k$. Dann sind äquivalent:*

- a) *P besitzt eine Ecke;*
- b) *Es gibt eine Affinität $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, welche P auf ein Polyeder der Form $A \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, mit $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ abbildet.*
- c) *Es gibt eine Affinität $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, welche P auf ein Polyeder der Form $A \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, abbildet.*

Beweis. a) $\Rightarrow$ b): Es sei $\mathbf{p} \in P$ eine Ecke. Dann gibt es n linear unabhängige Linearformen in den P definierenden Ungleichungen, etwa $h_1, \dots, h_n$ mit $\{\mathbf{p}\} = P \cap \{h_i(\mathbf{x}) = c_i, i = 1, \dots, n\}$. Die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x} \mapsto (h_i(\mathbf{x}) - c_i)_{i=1, \dots, n}$$

ist eine Affinität. Unter φ wird P in die Menge $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ abgebildet. Und $\varphi(P) \subset \mathbb{R}^n$ ist ein Polyeder. Die Ungleichungen, welche zusammen mit $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ dieses Polyeder definieren schreiben wir (nach Vorzeichen-Umkehr) $h_i(\mathbf{x}) \leq b_i$, oder zusammengefasst $A \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b}$. Weil $\varphi(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$ zu $\varphi(P)$ gehört, ist $\mathbf{0} = A \cdot \mathbf{0} \leq \mathbf{b}$, also $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$.

b) $\Rightarrow$ c) ist offensichtlich.

c) $\Rightarrow$ a): Sei $P \subset \mathbb{R}^n$ ein nichtleeres Polyeder der Form $A \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. Wir müssen zeigen: P besitzt eine Ecke. Weil P nicht leer ist, gibt es einen Punkt $\mathbf{p} \in P$. Wir unterscheiden folgende Fälle:

i) $\text{Rang}(A) < n$: Dann gibt es einen Vektor $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $A \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Für alle Punkte $\mathbf{q} = \mathbf{p} + t \cdot \mathbf{v}, t \in \mathbb{R}$, auf der Geraden L durch $\mathbf{p}$ mit Richtungsvektor $\mathbf{v}$ gilt dann $A \cdot \mathbf{q} = A \cdot \mathbf{p} \leq \mathbf{b}$. Weil die Gerade L nicht ganz in der Menge $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ liegen kann, liegt sie auch nicht ganz in P . Sie trifft den Rand ∂P in einem Punkt $\mathbf{q} \in L$, jenseits dessen die Bedingung $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ nicht mehr erfüllt ist. Es ist also $\mathbf{q} \in P$ mit $q_i = 0$ für ein i .

ii) $\text{Rang}(A) = n$: Es gibt genau einen Punkt $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, der das LGS $A \cdot \mathbf{q} = \mathbf{b}$ erfüllt. Gehört $\mathbf{q}$ zu P , so ist er eine Ecke von P nach Satz 6.18 b).

Gehört $\mathbf{q}$ nicht zu P , so trifft die Strecke

$$\overline{\mathbf{pq}} = \{s\mathbf{p} + (1-s)\mathbf{q}, 0 \leq s \leq 1, s \in \mathbb{R}\}$$

den Rand ∂P in einem Punkt $\mathbf{r} = s\mathbf{p} + (1-s)\mathbf{q}$ mit $0 \leq s < 1$. Für alle $0 \leq s \leq 1$ ist aber

$$A \cdot (s\mathbf{p} + (1-s)\mathbf{q}) = sA \cdot \mathbf{p} + (1-s)A \cdot \mathbf{q} \leq s \cdot \mathbf{b} + (1-s) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b}.$$

Also muss eine der Koordinaten r_i von $\mathbf{r}$ verschwinden.

Wir haben bewiesen: Entweder hat P eine Ecke, oder das Polyeder schneidet eine Koordinatenhyperebene $x_i = 0$. Das Polyeder $P \cap \{x_i = 0\}$ ist in $\mathbb{R}^{n-1} : x_i = 0$ durch die Bedingungen $A \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, definiert. Die Behauptung folgt durch Induktion nach n . $\square$

Ist in dem oben formulierten Optimierungsproblem die Koeffizientenmatrix vom Typ $m \times n$ mit $m < n$, so kann man den Hauptsatz der linearen Optimierung noch etwas schärfer formulieren:

Satz 6.32 Nimmt die lineare Funktion f auf dem Polyeder

$$P: \quad A \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

ihr Minimum an, so tut sie es auch in einer Ecke $\mathbf{p} = (p_\nu) \in P$ wo höchstens m Koordinaten $p_\nu \neq 0$ sind.

Beweis. Jede Ecke $\mathbf{p} \in P$ ist durch n der Gleichungen

$$\sum_{\nu=1}^n a_{\mu,\nu} x_\nu = b_\mu \quad (\mu = 1, \dots, m), \quad x_\nu = 0 \quad (\nu = 1, \dots, n)$$

definiert. Weil davon höchstens m Gleichungen die Form $\sum_{\nu} a_{\mu,\nu} x_\nu = b_\mu$ haben können, müssen mindestens $n - m$ von der Form $x_\nu = 0$ sein. $\square$

In der Literatur werden Optimierungsprobleme häufig etwas anders normiert: Man ersetzt die Ungleichungen in den Restriktionen durch Gleichungen. Das geht auf Kosten von zusätzlichen Variablen $y_1, \dots, y_m$, die man *Schlupf-Variablen* nennt. Eine Ungleichung

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \leq b_i$$

ist ja äquivalent zur Kombination

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j + y_i = b_i, \quad y_i \geq 0$$

von Gleichung und Vorzeichenbedingung. Die Schlupf-Variablen fasst man zu einem Vektor $\mathbf{y} = (y_j)$ zusammen und schreibt das Optimierungsproblem in der *Normalform*

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}) = \min & \text{(Kostenfunktion)} \\ (A, \mathbb{1}_m) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \mathbf{b} & \text{(Restriktionen)} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \geq \mathbf{0} & \text{(Vorzeichenbedingungen)} \end{cases}$$

Beispiel 6.15 Wir betrachten die Pyramide $P \subset \mathbb{R}^3$ aus 6.2 definiert durch die Bedingungen

$$\begin{array}{rclcl} & x_3 & \geq 0 & & x_3 & \geq 0 \\ 2x_1 & -x_3 & \geq 2 & & -2x_1 & +x_3 \leq -2 \\ & 2x_2 -x_3 & \geq 2 & \text{bzw.} & -2x_2 & +x_3 \leq -2 \\ 2x_1 & +x_3 & \leq 4 & & 2x_1 & +x_3 \leq 4 \\ & 2x_2 +x_3 & \leq 4 & & 2x_2 & +x_3 \leq 4 \end{array}$$

Mit den Schlüpfen $x_4, \dots, x_7 \geq 0$ wird daraus

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & & & \\ & -2 & 1 & & 1 & \\ & 2 & 1 & & & 1 \\ & & 2 & 1 & & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Beim Optimierungsproblem mit Schlupf-Variablen haben Restriktionen und Vorzeichenbedingungen die Form

$$(A, \mathbb{1}_m) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}.$$

Hier ist A eine reelle $m \times n$ -Matrix, weiter $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$. Ersetzt man in dieser Notation die Matrix $(A, \mathbb{1}_m)$ durch die neue $m \times (m+n)$ -Matrix A' und das Paar $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ der Vektoren durch den neuen Vektor $\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^{m+n}$, so nehmen diese Bedingungen die komprimierte Form

$$A' \cdot \mathbf{x}' = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x}' \geq \mathbf{0}$$

an. Dies ist der Spezialfall $A' = (A, \mathbb{1}_m)$ der allgemeineren, komprimierten Form

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \geq \mathbf{0},$$

wo A eine $m \times n$ -Matrix ist. Die Matrix A kann keinen größeren Rang als die Anzahl n ihrer Spalten haben. Sei also $r := \text{Rang}(A) \leq n$. Falls $\text{Rang}(A, \mathbf{b}) > r$ ist, dann ist das LGS unlösbar, das betrachtete Polyeder ist leer. Wir können also $\text{Rang}(A, \mathbf{b}) = r$ annehmen. Falls $m > r$ ist, dann enthält $(A, \mathbf{b})$ Zeilen, welche von den anderen linear abhängig sind. Solche Zeilen können wir sukzessive weglassen, ohne die Lösungsmenge des LGS zu verändern. Nachdem wir genügend viele dieser Zeilen weggelassen haben, können wir o.B.d.A. $r = m$ annehmen. Gilt jetzt $m = n$, so hat das LGS nur eine einzige Lösung, ein uninteressanter Fall. Wir können deswegen für ein Problem in komprimierter Form immer

$$\text{Rang}(A) = m, \text{ und } m < n$$

annehmen.

Das folgende Problem führt dierekt auf eine Optimierungsaufgabe in dieser Form:

Beispiel 6.16 (Transport-Problem) Gegeben seien m Fabriken, welche Mengen $a_1, \dots, a_m$ einer Ware erzeugen und n Abnehmer, welche davon Mengen $b_1, \dots, b_n$ verbrauchen. Damit das System stabil bleibt, setzt man

$$\sum_{\mu=1}^m a_{\mu} = \sum_{\nu=1}^n b_{\nu}$$

voraus. Außerdem nimmt man an, dass die Transportkosten $k_{\mu,\nu}$ von der Fabrik μ zum Abnehmer ν linear in Bezug auf die transportierte Menge $x_{\mu,\nu}$ sind, etwa

$$k_{\mu,\nu} = c_{\mu,\nu} x_{\mu,\nu}.$$

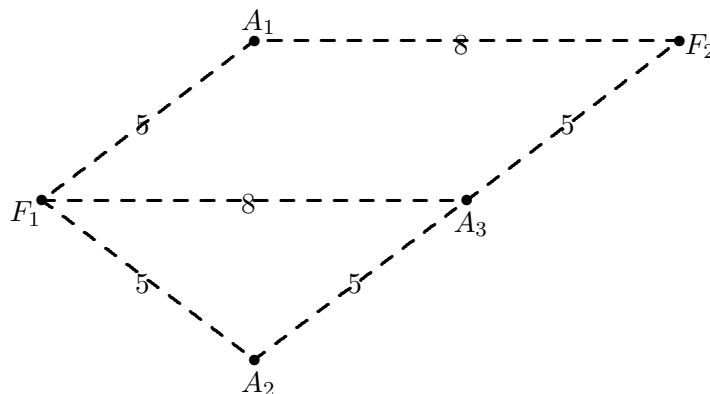
(Eine etwas idealistische Annahme, aber wahrscheinlich realistisch, wenn die transportierten Stückzahlen groß sind.) Das Optimierungsproblem ist damit

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sum_{\mu,\nu=1}^{m,n} c_{\mu,\nu} x_{\mu,\nu} = \min & (\text{Kostenfunktion}) \\ \sum_{\nu=1}^n x_{\mu,\nu} = a_{\mu} \quad (\mu = 1, \dots, m) & (\text{Restriktionen}) \\ \sum_{\mu=1}^m x_{\mu,\nu} = b_{\nu} \quad (\nu = 1, \dots, n) & (\text{Restriktionen}) \\ x_{\mu,\nu} \geq 0 \quad (\mu = 1, \dots, m, \nu = 1, \dots, n) & (\text{Vorzeichenbedingungen}) \end{array} \right.$$

Lassen Sie mich ein konkretes Beispiel diskutieren (das einfachste nicht ganz-triviale Beispiel mit konkreten Zahlen, das mir einfiel). Gegeben seien zwei Fabriken F_1 und F_2 mit den jeweiligen Produktionsmengen $a_1 = 4$ und $a_2 = 6$. Sie beliefern drei Abnehmer A_1, A_2, A_3 mit dem jeweiligen Bedarf $b_1 = 3, b_2 = 4$ und $b_3 = 3$. Wir notieren die Stabilitätsbedingung

$$a_1 + a_2 = 10 = b_1 + b_2 + b_3.$$

Die geographische Lage der Fabriken und Abnehmer zueinander sei wie folgt:



Die Zahlen auf den Verbindungsgeraden sollen die Entfernungen angeben, und der Einfachheit halber auch gleich die Koeffizienten $c_{\mu,\nu}$ in den Transportkosten, also:

$$c_{1,1} = 5, c_{1,2} = 5, c_{1,3} = 8, \quad c_{2,1} = 8, c_{2,2} = 10, c_{2,3} = 5.$$

(Wenn Ihnen dieses Beispiel etwas unrealistisch vorkommt, können Sie gern die Entfernungen mit 100 km und die Stückzahlen mit 10 000 multiplizieren. Am Ergebnis der Optimierungsaufgabe wird das nichts ändern.) Ist $x_{\mu,\nu}$ die von F_μ nach A_ν transportierte Stückzahl, so haben wir also die Kostenfunktion

$$f(x_{\mu,\nu}) := 5x_{1,1} + 5x_{1,2} + 8x_{1,3} + 8x_{2,1} + 10x_{2,2} + 5x_{2,3}$$

zu minimieren. Dabei sind die Restriktionen

$$\begin{array}{ll} x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} = 4 & x_{1,1} + x_{2,1} = 3 \\ x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} = 6 & x_{1,2} + x_{2,2} = 4 \\ & x_{1,3} + x_{2,3} = 3 \end{array}$$

In Matrixform nehmen sie die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ x_{1,3} \\ x_{2,1} \\ x_{2,2} \\ x_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

an. Hier hat die (erweiterte) Koeffizientenmatrix allerdings nur den Rang 4. Man könnte also in diesem Gleichungssystem beispielsweise die erste Zeile weglassen.

Stellen wir die verschiedenen Formen der Bedingungen noch einmal in einer Tabelle zusammen:

1) ohne Schlupf	$A \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$	$A : m \times n$
2) mit Schlupf	$(A, \mathbb{1}_m) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \mathbf{b}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}$	$A : m \times n, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$
3) komprimiert	$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$	$A : m \times n, n > m, \text{Rang}(A) = m$

Definition 6.20 Ein Optimierungsproblem sei mit Bedingungen in der Form 2) oder 3) gegeben. Die Restriktionen haben dann die Form eines inhomogenen LGS. Seine Lösungen heißen ganz einfach Lösungen (der Restriktionsbedingungen). Sind zusätzlich die Vorzeichen-Bedingungen erfüllt, so nennt man derartige Lösungen zulässig.

Die zulässigen Lösungen bilden also das Polyeder P , auf dem das Minimum einer linearen Kostenfunktion f gesucht wird.

Aufgabe 6.10 (Danzig, p. 106) Bringen Sie die folgenden Systeme von Ungleichungen durch Einführung von Schlupfen auf Gleichungsform von Typ 2:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ x_1 - 2x_2 \geq -4 \\ x_1 + 7x_2 \leq 6 \end{array} \\ \text{b)} & \begin{array}{l} x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 7 \end{array} \end{array}$$

Aufgabe 6.11 Gegeben sei ein Polyeder $P \subset \mathbb{R}^3$ durch

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \quad x_1 \leq 1 + x_2 + x_3.$$

a) Bestimmen Sie alle Ecken von P .

b) Nimmt die Funktion $f(\mathbf{x}) = x_1 - x_2 - 2x_3$ auf P ein Maximum oder Minimum an? Bestimmen Sie gegebenenfalls einen Punkt $\mathbf{p} \in P$, wo dies der Fall ist.

Aufgabe 6.12 Lösen Sie die vorhergehende Aufgabe für das Polyeder

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \quad x_3 \geq x_1 + 2x_2 - 1$$

und $f(\mathbf{x}) := 2x_3 - x_1$.

Aufgabe 6.13 Drei Zementhersteller Z_1, Z_2 und Z_3 beliefern zwei Großbaustellen G_1, G_2 . Die tägliche Zementproduktion und der Bedarf in Tonnen sind

Z_1	Z_2	Z_3	G_1	G_2
20	30	50	40	60

Die Transportkosten in euro betragen pro Tonne

von	Z_1	Z_2	Z_3
nach G_1	70	20	40
G_2	10	100	60

Formulieren Sie das Problem, die täglichen Transportkosten zu minimieren in der Standardform

$$f(\mathbf{x}) = \min, \quad A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

(Die Lösung des Problems ist nicht verlangt.)

6.5 Ecken und Basislösungen

Wir betrachten nun Optimierungsprobleme in komprimierter Form

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Hier ist A eine $m \times n$ -Matrix mit $n > m$ und vom Rang m . Die Bedingungen $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ sind also ein inhomogenes LGS mit Koeffizientenmatrix A vom Maximalrang m . Wir sind am Verhalten

der Zielfunktion in den Ecken des zugehörigen Polyeders interessiert. Dazu brauchen wir erst eine übersichtliche Beschreibung der Ecken.

Nach Satz 6.18 b) wird eine Ecke durch n linear unabhängige Gleichungen definiert. Diese Gleichungen können Zeilen des LGS sein, sie sind nach Voraussetzung linear unabhängig. Aber deren Anzahl ist nur $m < n$. Zu den Gleichungen werden also auch immer mindestens $n - m$ Gleichungen der Form $x_\nu = 0$ gehören. Selbst in sehr einfachen (= niedrig-dimensionalen) Fällen kann das direkte Auffinden der Ecken ziemlich unübersichtlich sein.

Beispiel 6.17 Wir betrachten im $\mathbb{R}^5$ das Polyeder

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1, \quad x_3 + x_4 + x_5 = 1, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Eine Ecke wird durch fünf Gleichungen definiert, wovon mindestens drei Koordinatengleichungen der Form $x_\nu = 0$ sein müssen. Es gibt die Fälle:

a) fünf Koordinatengleichungen geht nicht, weil dann $x_1 = \dots = x_5 = 0$ keine Lösung der beiden ersten Gleichungen ist.

b) vier Koordinatengleichungen, wovon zu den beiden Mengen $\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_2, x_3, x_4\}$ jeweils nur zwei Koordinaten gehören können. Damit ist die Gleichung $x_3 = 0$ ausgeschlossen. Es bleibt

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 1, 0, 0),$$

und in diesem Punkt sind sogar alle beiden ersten Gleichungen erfüllt. Der Punkt ist eine Ecke.

c) drei Koordinatengleichungen, wozu die Gleichung $x_3 = 0$ gehören muss, weil sonst aus den beiden ersten Gleichungen $x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = 0$ (Fall b) folgen würde. Es gibt die vier Möglichkeiten $x_i = x_3 = x_j = 0$, $i = 1, 2$, $j = 4, 5$, welche auf die Ecken

$$(0, 1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 1, 0)$$

führen.

Bei diesem Beispiel handelt es sich übrigens nur um eine etwas unanschauliche Version der Pyramide in Beispiel 6.10. Um diese Pyramide auf unser Polyeder abzubilden schreiben wir in Beispiel 6.10 statt (x_1, x_2, x_3) jetzt (x, y, z) . Dann wird eine affine Abbildung, welche die Pyramide auf das Polyeder abbildet, gegeben durch

$$\begin{array}{rclclcl} x_1 & = & 2 & & - & y & - & 0.5z \\ x_2 & = & -1 & & + & y & - & 0.5z \\ x_3 & = & & & & & & z \\ x_4 & = & -1 & + & x & & - & 0.5z \\ x_5 & = & 2 & - & x & & - & 0.5z \end{array}$$

Dieses Beispiel zeigt deutlich, dass wir uns dem Problem viel systematischer nähern müssen. Deswegen

Definition 6.21 Eine Basis (im Sinn dieses Kapitels) ist eine Menge von m Spaltenvektoren $\mathbf{a}^j$ der Matrix A , die eine Basis für den Spaltenraum dieser Matrix bilden. Ihre Anzahl ist also $m = \text{Rang}(A)$. Die Menge der m zugehörigen Spalten-Indizes nennen wir Basis-Menge B . Die Menge der anderen Spalten-Indizes $j \notin B$ nennen wir Nicht-Basis-Menge N . Die Koordinaten x_j , $j \in B$, heißen Basiskoordinaten, bzw. B -Koordinaten, die Koordinaten x_j , $j \in N$, heißen Nicht-Basis-Koordinaten, bzw. N -Koordinaten. Insbesondere ist

$$B \cup N = \{1, \dots, n\}, \quad B \cap N = \emptyset.$$

Zur Zerlegung $B \cup N$ der Indexmenge gehört eine Zerlegung

$$A = (A_B, A_N)$$

der Matrix A (hier ist A_B invertierbar) und eine Zerlegung des Koordinatenvektors

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix}.$$

Wenn nicht $B = \{1, \dots, m\}$ und $N = \{m+1, \dots, n\}$, muss man hier die Spalten von A und die Einträge von $\mathbf{x}$ umordnen. Aber es gilt immer

$$A \cdot \mathbf{x} = (A_B, A_N) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix} = A_B \cdot \mathbf{x}_B + A_N \cdot \mathbf{x}_N.$$

Ein Basislösung zur Basismenge B ist eine Lösung $\mathbf{x} = (x_j)$ mit $x_j = 0$ für $j \notin B$, d.h. $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$. Sie ist durch B eindeutig bestimmt als $(\mathbf{x}_B, \mathbf{0})$, wo $\mathbf{x}_B$ Lösung des LGS

$$A_B \cdot \mathbf{x}_B = \mathbf{b} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{x}_B = A_B^{-1} \mathbf{b}$$

ist.

Die Basislösung $\mathbf{x} = (x_j)$, $x_j = 0$ für $j \in N$, heißt zulässig wenn $\mathbf{x}$ zu P gehört, d.h., $\mathbf{x}_j \geq 0$ für $j \in B$.

Beispiel 6.18 Nehmen wir Beispiel 6.17 wieder auf. Der Spaltenraum der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

hat Dimension 2. Basismengen B und zugehörige Basislösungen $\mathbf{x}$ sind

B	$\mathbf{x}$
(1, 3)	(0, 0, 1, 0, 0)
(1, 4)	(1, 0, 0, 1, 0)
(1, 5)	(1, 0, 0, 0, 1)
(2, 3)	(0, 0, 1, 0, 0)
(2, 4)	(0, 1, 0, 1, 0)
(2, 5)	(0, 1, 0, 0, 1)
(3, 4)	(0, 0, 1, 0, 0)
(3, 5)	(0, 0, 1, 0, 0)

Alle Basislösungen sind zulässig, aber vier verschiedene Basen führen auf die gleiche Lösung.

Der Punkt ist, dass die zulässigen Basislösungen genau die Ecken des Polyeders P sind. Ihre konkrete Beschreibung in Form von Basislösungen ist wichtig, weil es beim Simplex-Algorithmus genau auf das systematische Auffinden von Ecken ankommt.

Satz 6.33 Für Punkte $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:

- a) $\mathbf{p}$ ist eine Ecke von P ;
- b) $\mathbf{p}$ ist eine zulässige Basislösung.

Beweis. a) $\Rightarrow$ b): Es sei $\mathbf{p} \in P$ eine Ecke. Nach Satz 6.18 b) ist $\mathbf{p}$ Lösung eines inhomogenen LGS

$$A' \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad x_{\nu_i} = 0,$$

wo A' aus Zeilen von A besteht und die gesamte Koeffizientenmatrix den Rang n hat. Wegen $n > m$ gehören dazu mindestens $n - m$ Gleichungen der Form $x_\nu = 0$. Sei $k \geq n - m$ die Anzahl aller dieser Gleichungen. Nach Umordnung der Koordinaten (und entsprechender Vertauschung der Spalten von A) können wir annehmen, dass dies die Koordinaten $x_{n-k+1}, \dots, x_n$ sind. Wir können das LGS so schreiben:

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{a}^\nu)_{\nu \leq n-k} & (\mathbf{a}^\nu)_{\nu > n-k} \\ 0 & \mathbb{1}_{n-k} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Weil die Koeffizientenmatrix den Rang n hat, müssen die Spalten $\mathbf{a}^\nu$, $\nu \leq n - k$, linear unabhängig sein.

Fall 1. $k = n - m$: Dann sind wir fertig mit $B = \{1, \dots, n - k = m\}$.

Fall 2. $k > n - m$: Wir können die $n - k < m$ linear unabhängigen Spalten $\mathbf{a}^\nu$, $\nu \leq n - k$, von A zu insgesamt m linear unabhängigen Spalten ergänzen, es ist ja $\text{Rang}(A) = m$ vorausgesetzt. Wieder nach Vertauschen von Spalten können wir annehmen, dass es die ersten m Spalten sind. Dann löst $\mathbf{p}$ das inhomogene LGS

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{a}^\nu)_{\nu \leq m} & (\mathbf{a}^\nu)_{\nu > m} \\ 0 & \mathbb{1}_{n-m} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Somit ist $\mathbf{p}$ Basislösung mit $B = \{1, \dots, m\}$.

b) $\Rightarrow$ a): Sei $\mathbf{p} \in P$ eine zulässige Basislösung, also Lösung eines LGS

$$\begin{pmatrix} A_B & A_N \\ 0 & \mathbb{1}_{n-m} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Wegen $\text{Rang}(A_B) = m$ hat die Koeffizientenmatrix n linear unabhängige Zeilen. Deswegen ist $\mathbf{p}$ eine Ecke von P . $\square$

Beispiel 6.19 In Beispiel 6.18 gibt es vier Ecken, wo drei Koordinaten $x_\nu = 0$ sind. In jeder dieser Ecke sind genau fünf der Gleichungen erfüllt. In der fünften Ecke sind aber sechs Gleichungen erfüllt, weil dort zusätzlich zu den Zeilen der Matrix auch noch $x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = 0$ sind.

Was ist dann der Unterschied zwischen einer Ecke und einer zulässigen Basislösung? Wenn in $\mathbf{p}$ genau n Gleichungen unter

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad x_\nu = 0$$

erfüllt sind, dann liegt im Beweis von Satz 6.33 a) $\Rightarrow$ b) gerade der Fall 1 $k = n - m$ vor, und zur Ecke $\mathbf{p}$ gehört genau eine Basis. Insbesondere ist dann $p_\nu = 0$ für genau $n - m$ Indizes ν .

Aber wenn mehr als n Gleichungen erfüllt sind, dann werden durch die Basis genau n unabhängige davon ausgewählt. Eine zulässige Basislösung ist also dasselbe, wie eine Ecke mit der Angabe von genau n Gleichungen, die sie definieren. Weil die Gleichungen $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ immer dazu gehören, ist es dasselbe, wie Angabe von $n - m$ Indizes ν mit $p_\nu = 0$.

Beispiel 6.20 Wir betrachten die Pyramide $P \subset \mathbb{R}^3$ aus 6.2. Aus der Zeichnung ist klar: Durch jede der vier Ecken der Grundfläche gehen genau drei definierende Ebenen, aber durch die Spitze gehen

vier. Nach Einführung der Schlupf-Variablen $x_4, \dots, x_7 \geq 0$ (vgl. 6.4) schreiben sich die Restriktionen als

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & & & \\ & -2 & 1 & & 1 & \\ & 2 & 1 & & & 1 \\ & & 2 & 1 & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Wir haben ein LGS mit $m = 4$ und $n = 7$. Die Ecke $\mathbf{p}_1 = (1, 1, 0)$ z.B. gehört zur Basislösung

$$\mathbf{x} = (1, 1, 0, 0, 0, 2, 2) \quad \text{mit} \quad N = \{3, 4, 5\}, B = \{1, 2, 6, 7\}.$$

In der Ecke $\mathbf{p}_5 = (1.5, 1.5, 1)$ sind alle vier Gleichungen $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ erfüllt, hier treffen sich vier Kanten und vier Seitenflächen. Für die Schlupf-Variablen bedeutet dies

$$x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{x} = (1.5, 1.5, 1, 0, 0, 0, 0).$$

Für die Ermittlung einer zugehörigen Basislösung kann man je drei der Koordinaten $x_4, \dots, x_7$ auswählen. Man erhält diese Ecke auf vier verschiedene Weisen als zulässige Basislösung. Die sieben Koordinaten sind natürlich immer die gleichen, aber ihre Aufteilung auf B-Koordinaten und N-Koordinaten unterscheidet sich.

Definition 6.22 Es sei P ein n -dimensionales Polyeder. Eine Ecke $\mathbf{p}$ von P heißt *einfach* oder *nicht-entartet*, wenn sich in $\mathbf{p}$ genau n Seitenflächen S von P der Dimension $n - 1$ treffen. Ist P z.B. durch Ungleichungen $h_i(\mathbf{x}) \geq c_i$, $i = 1, \dots, k$, gegeben, von denen man keine weglassen kann, so heißt dies, dass in $\mathbf{p}$ genau n Gleichungen $h_i(\mathbf{p}) = c_i$ gelten, und nicht mehr. Ist $P \subset \mathbb{R}^n$ durch m Gleichungen $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ und $n > m$ Ungleichungen $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ gegeben, so heißt dies, dass genau n der Gleichungen $A \cdot \mathbf{p} = \mathbf{b}$, $p_\nu = 0$, gelten, und nicht mehr. Ist die Ecke $\mathbf{p} \in P$ nicht einfach, so heißt sie nicht-einfach, bzw. entartet.

Beispiel 6.21 Bei der soeben wieder erwähnten Pyramide P sind die vier Ecken auf der Grundebenen $x_3 = 0$ einfach, die Spitze $(1.5, 1.5, 1)$ ist eine nicht-einfache Ecke.

Ist die Ecke $\mathbf{p}$ einfach, so bekommt man sie nur auf eine Weise als zulässige Basislösung.

Beispiel 6.22 Wir wollen auf diese Weise noch die Ecken des Polyeders finden, das zum oben diskutierten Transport-Problem gehört. Von den sechs linear abhängigen Gleichungen lassen wir die erste weg und schreiben die Restriktionen

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ x_{1,3} \\ x_{2,1} \\ x_{2,2} \\ x_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Wir gehen alle 15 Möglichkeiten für $N = \{i, j\} \subset \{1, \dots, 6\}$ durch. Mit MAPLE berechnen wir die Koordinaten der zugehörigen Basislösung. Wenn MAPLE nur eine Lösung findet, dann sind die Spalten

$\mathbf{a}^j$, $j \in B$, linear unabhängig, wir haben eine Basislösung. Wenn MAPLE keine Lösungen findet, dann sind diese Spalten nicht linear unabhängig. So erhalten wir die folgende Tabelle:

N	Basis?	Basislösung	zulässig?
1, 2	ja	(0, 0, 4, 3, 4, -1)	nein
1, 3	ja	(0, 4, 0, 3, 0, 3)	ja
1, 4	nein		
1, 5	ja	(0, 4, 0, 3, 0, 3)	ja
1, 6	ja	(0, 1, 3, 3, 3, 3)	ja
2, 3	ja	(4, 0, 0, -1, 4, 3)	nein
2, 4	ja	(3, 0, 1, 0, 4, 2)	ja
2, 5	nein		
2, 6	ja	(1, 0, 3, 2, 4, 0)	ja
3, 4	ja	(3, 1, 0, 0, 3, 3)	ja
3, 5	ja	(0, 4, 0, 3, 0, 3)	ja
3, 6	nein		
4, 5	ja	(3, 4, -3, 0, 0, 6)	nein
4, 6	ja	(3, -2, 3, 0, 6, 0)	nein
5, 6	ja	(-3, 4, 3, 6, 0, 0)	nein

Die gefundenen Ecken $\mathbf{p}$ stellen wir in der folgenden Tabelle zusammen, in die wir gleich auch die Werte der Kostenfunktion $f(\mathbf{p})$ eintragen:

$\mathbf{p}$	(0, 4, 0, 3, 0, 3)	(0, 1, 3, 3, 3, 0)	(3, 0, 1, 0, 4, 2)	(1, 0, 3, 2, 4, 0)	(3, 1, 0, 0, 3, 3)
$f(\mathbf{p})$	59	82	73	85	65

Am kostengünstigsten ist es also, wenn

$$x_{1,1} = x_{1,3} = x_{2,2} = 0$$

ist. Das bedeutet: Die Fabrik F_2 beliefert nur die beiden ihr am nächsten liegenden Verbraucher, und F_1 nur den dritten. Das ist irgendwie logisch, aber wenn die Zahlen nicht so aufgingen, wäre das Ergebnis komplizierter.

Der Algorithmus in 6.4 beginnt mit einer zulässigen Basislösung. Eine Basislösung $(\mathbf{0}, \mathbf{x}_B)$ des LGS

$$A_N \cdot \mathbf{x}_N + A_B \cdot \mathbf{x}_B = \mathbf{b}$$

kann man sich verschaffen, wenn die Teilmatrix A_B invertierbar ist. Multipliziert man das LGS mit A_B^{-1} und setzt $A'_N := A_B^{-1} \cdot A_N$, $\mathbf{b}' = A_B^{-1} \cdot \mathbf{b}$, so erhält man das äquivalente System

$$A'_N \cdot \mathbf{x}_n + \mathbb{1}_m \cdot \mathbf{x}_B = \mathbf{b}'$$

mit der Basislösung $(\mathbf{0}, \mathbf{x}_B) = (\mathbf{0}, \mathbf{b})$. Das Problem besteht darin, dass sie nur dann zulässig ist, wenn

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{b} \geq \mathbf{0}.$$

In dieser Situation gibt es eine Methode, die Frage nach der Existenz einer zulässigen Basislösung auf ein Optimierungsproblem zurückzuführen.

Gehen wir aus von unserem Problem in der Form

$$A \cdot \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$$

mit der $m \times n$ -Matrix A . Wenn $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ ist, dann ist die Basislösung $(\mathbf{0}, \mathbf{b})$ zulässig. Andernfalls gibt es Koeffizienten $b_i < 0$. Wir ordnen die Zeilen des Systems so um, dass

$$b_1, \dots, b_k < 0, \quad b_{k+1}, \dots, b_m \geq 0.$$

Die Idee besteht darin, neue Variable $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_k$ aufzunehmen, und damit das LGS wie folgt zu erweitern:

$$\begin{array}{ccccccc} -a_{1,1}x_1 & -\dots & -a_{1,n}x_n & -y_1 & & +\tilde{y}_1 & = -b_1 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ -a_{k,1}x_1 & -\dots & -a_{k,n}x_n & -y_k & & +\tilde{y}_k & = -b_k \\ a_{k+1,1}x_1 & +\dots & a_{k+1,n}x_n & & +y_{k+1} & & = b_{k+1} \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & +\dots & +a_{m,n}x_n & & & y_m & = b_m \end{array}$$

Jede Lösung $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{\mathbf{y}})$ des erweiterten Systems mit $\mathbf{x}, \mathbf{y} \geq \tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{0}$ ist eine Lösung des ursprünglichen Systems. Und so erhält man auch jede Lösung des ursprünglichen Systems. Der Punkt ist, dass diese Korrespondenz auch zwischen zulässigen Basislösungen gilt: Ist $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ eine zulässige Basislösung des ursprünglichen Systems, etwa zur Basismenge B , so ist $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{0})$ zulässige Basislösung des erweiterten Systems zur gleichen Basismenge B . Problematisch ist nur die Umkehrung: Sei $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{0})$ zulässige Basislösung des erweiterten Systems zu einer Basismenge $\tilde{B}$ und Nicht-Basismenge $\tilde{N}$. Dann enthält $\tilde{N}$ genau $n + k$ Indizes. Im Fall $\tilde{B} \subset \{1, \dots, m + n\}$ sind wir fertig. Andernfalls seien etwa $1, \dots, l \leq k$ Indizes zu Basis-Variablen $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_l$. Zur Basis gehören dann $m - l$ linear unabhängige Spalten der Matrix

$$\begin{pmatrix} -a_{1,1} & \dots & -a_{1,n} & -1 & & & \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \\ -a_{k,1} & \dots & -a_{k,n} & & & -1 & \\ a_{k+1,1} & \dots & a_{k+1,n} & & & & 1 \\ \vdots & & \vdots & & & & \ddots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Weil diese Matrix den Rang m hat, können wir diese $m - l$ Spalten ergänzen zu einer Basis, die aus Spalten dieser $m \times (m + n)$ -Matrix besteht. Dafür lassen wir die Variablen $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_l$ aus der Basis weg. Wir haben eine neue Basis $\tilde{B} \subset \{1, \dots, m + n\}$ mit der zulässigen Basislösung $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{0})$. $\square$

Und eine zulässige Basislösung $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{0})$ des erweiterten Systems ist zu finden als eine Lösung der Optimierungsaufgabe mit Kostenfunktion

$$\tilde{f}(\tilde{\mathbf{y}}) := \tilde{y}_1 + \dots + \tilde{y}_k, \quad \tilde{\mathbf{y}} \geq \mathbf{0}.$$

Wegen $\tilde{\mathbf{y}} \geq \mathbf{0}$ gibt es keine Kante unseres Polyeders, auf der $\tilde{f}$ gegen $-\infty$ gehen kann. Es gibt also eine Ecke $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{\mathbf{p}})$, in der $\tilde{f}$ sein Minimum $z := \tilde{f}(\tilde{\mathbf{p}}) \geq 0$ annimmt. Ist $z > 0$, so gibt es keine zulässige Basislösung des erweiterten Problems mit $\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{0}$. Dann gibt es leider auch keine zulässige Basislösung des ursprünglichen Systems. Und wenn $z = 0$ ist, dann ist auch $\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{0}$ und gehört zu einer zulässigen Basislösung des ursprünglichen Systems.

Die Lösung des Optimierungsproblems mit dem Simplex-Algorithmus sehen wir uns im nächsten Kapitel an. Für das erweiterte System findet man leicht eine zulässige Basislösung, mit der man den Algorithmus anwerfen kann. Eine solche ist z.B.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_N &= (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k) = \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_B &= (y_{k+1}, \dots, y_m, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_k) = (b_{k+1}, \dots, b_m, -b_1, \dots, -b_k) \end{aligned}$$

Zu jeder Basis B gehört eine *Auflösung* des LGS

$$A \cdot \mathbf{x} = (A_B, A_N) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix} = A_B \cdot \mathbf{x}_B + A_N \cdot \mathbf{x}_N = \mathbf{b}$$

vermöge

$$\mathbf{x}_B = (A_B)^{-1} \cdot (\mathbf{b} - A_N \cdot \mathbf{x}_N).$$

Dadurch, und zusammen mit den Vorzeichenbedingungen

$$\mathbf{x}_B \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}_N \geq \mathbf{0}$$

bekommen wir eine *explizite Parametrisierung* unseres Polyeders P .

Damit ist auch die Kostenfunktion

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\nu=1}^n c_\nu x_\nu$$

nur eine affine Funktion von $\mathbf{x}_N$. Wir geben sie explizit an. Dazu schreiben wir

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c}_B \cdot \mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N \cdot \mathbf{x}_N$$

mit einem *Zeilenvektor* $\mathbf{c} = (\mathbf{c}_B, \mathbf{c}_N)$. Hier setzen wir $\mathbf{x}_B$ ein:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \mathbf{c}_B \cdot A_B^{-1} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{c}_B \cdot A_B^{-1} \cdot A_N \cdot \mathbf{x}_N + \mathbf{c}_N \cdot \mathbf{x}_N \\ &= \mathbf{c}_B \cdot A_B^{-1} \cdot \mathbf{b} + (\mathbf{c}_N - \mathbf{c}_B \cdot A_B^{-1} \cdot A_N) \cdot \mathbf{x}_N. \end{aligned}$$

Zu $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$ gehört die Ecke $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_B, \mathbf{0})$ mit $\mathbf{p}_B = A_B^{-1} \cdot \mathbf{b}$. Deswegen ist

$$\mathbf{c}_B \cdot A_B^{-1} \cdot \mathbf{b} = f(\mathbf{p}).$$

Wir kürzen ab

$$\tilde{\mathbf{c}}_N := \mathbf{c}_N - \mathbf{c}_B \cdot A_B^{-1} \cdot A_N.$$

Dann haben wir die Kostenfunktion in die Form

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{p}) + \tilde{\mathbf{c}}_N \cdot \mathbf{x}_N$$

gebracht. Den variablen Anteil $\tilde{\mathbf{c}}_N \cdot \mathbf{x}_N$ nennt man die *reduzierten Kosten*.

Satz 6.34 (Optimalitätskriterium) Wenn für $\tilde{\mathbf{c}}_N$ in der Formel für die reduzierten Kosten gilt

$$\tilde{\mathbf{c}}_N \geq \mathbf{0},$$

dann ist die Ecke $\mathbf{p}$ für f optimal.

Beweis. Für alle $\mathbf{x} \in P$ ist $\mathbf{x}_N \geq \mathbf{0}$. Daraus folgt $\tilde{\mathbf{c}}_N \cdot \mathbf{x}_N \geq 0$ und $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{p})$ für alle $\mathbf{x} \in P$. $\square$

Alle relevanten Größen kann man sehr übersichtlich in einem sogenannten *Tableau* zusammenfassen. Das ist nichts anderes, als eine Matrix, welche die Koeffizientenmatrix A als Teilmatrix enthält, aber zusätzlich noch eine weitere Zeile und eine weitere Spalte. Wie oben zerlegen wir $A = (A_B, A_N)$ und $\mathbf{c} = (\mathbf{c}_B, \mathbf{c}_N)$ und beginnen mit dem Tableau

$$\left[\begin{array}{cc|c} A_B & A_N & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{c}_B & \mathbf{c}_N & 0 \end{array} \right].$$

Wir passen dieses Tableau an die Basis B an, indem wir die Spalten von A_B als neue Basis für den Spaltenraum von A wählen. Für das Tableau bedeutet es Multiplikation von links

$$\begin{pmatrix} A_B^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{array}{cc|c} A_B & A_N & \mathbf{b} \\ \mathbf{c}_B & \mathbf{c}_N & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} \mathbb{1}_B & A_B^{-1} \cdot A_N & A_B^{-1} \cdot \mathbf{b} \\ \mathbf{c}_B & \mathbf{c}_N & 0 \end{array} \right].$$

Hier braucht man die Inverse A_B^{-1} nicht explizit auszurechnen. Es reicht, die invertierbare Matrix A_B durch elementare Zeilenumformungen auf die Form der Einheitsmatrix zu bringen. Die Multiplikation mit A_B^{-1} von links ist ja nichts anderes, als die Hintereinander-Ausführung all dieser Zeilenumformungen. Und wenn wir diese Zeilenumformungen nicht nur auf A_B anwenden, sondern auf die ganze $m \times (n+1)$ -Matrix $(A_B, A_N, \mathbf{b})$ im Tableau, kommen wir genau auf die angegebene Form.

Das reicht uns aber noch nicht. Durch weitere Zeilenumformungen bringen wir den Vektor $\mathbf{c}_B$ unter $\mathbb{1}_B$ auf Null. Das ist dasselbe, wie die Multiplikation des Tableaus von links

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1}_B & 0 \\ -\mathbf{c}_B & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{array}{cc|c} \mathbb{1}_B & A_B^{-1} \cdot A_N & A_B^{-1} \cdot \mathbf{b} \\ \mathbf{c}_B & \mathbf{c}_N & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} \mathbb{1}_B & A_B^{-1} \cdot A_N & A_B^{-1} \cdot \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & \mathbf{c}_N - \mathbf{c}_B \cdot A_B^{-1} \cdot A_N & -\mathbf{c}_B \cdot A_B^{-1} \cdot \mathbf{b} \end{array} \right].$$

Wegen $A_B^{-1} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{p}_B$ enthält unser resultierendes Tableau

$$\left[\begin{array}{cc|c} \mathbb{1}_B & A_B^{-1} \cdot A_N & \mathbf{p}_B \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{c}}_N & -f(\mathbf{p}) \end{array} \right]$$

auf geradezu wunderbare Weise noch die reduzierten Kosten und - bis auf das Vorzeichen - den Wert $f(\mathbf{p})$. Der große Vorteil dieser Manipulationen besteht darin, dass man sich nichts mehr zu merken braucht. Man braucht nur noch Zeilenumformungen, wie wir sie im ersten Semester gelernt haben. Das ist so einfach, dass man das auch einem Computer überlassen kann.

Aufgabe 6.14 (Danzig, p. 105) Gegeben sei das System

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & -7 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Basislösungen für die Basismengen

$$B = \{1, 2, 3\}, \quad \text{bzw.} \quad \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}.$$

welche dieser Basislösungen sind zulässig?

Aufgabe 6.15 Gegeben sei das System

$$\begin{cases} -3x + y + 2z = 2 \\ -2x + y + z = 1 \end{cases} \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

a) Bestimmen Sie alle Basislösungen dieses Systems. Welche davon sind zulässig?

b) Nimmt die Funktion $f(x, y, z) := y - 2z$ auf dem durch dieses System bestimmten Polyeder ihr Minimum an?

Aufgabe 6.16 *Nimmt die Funktion*

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) := x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

auf dem Polyeder

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 3, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

ihr Maximum an?

Aufgabe 6.17 *Drei Schokoladenhersteller S_1, S_2, S_3 beliefern drei Kindergärten mit Schokoriegeln. Die wöchentliche Produktion und die Abnahme in Kartons sind*

S_1	S_2	S_3	K_1	K_2	K_3
40	40	70	20	40	90

Der Student, der die Kartons mit dem Fahrrad ausfährt, erhält für den Transport eines Kartons

	von	S_1	S_2	S_3
nach				
K_1		1	1	3
K_2		2	1	2
K_3		4	3	1

Schokoriegel. Formulieren Sie das Problem, dem Studenten für seine Wochenarbeit möglichst wenig Schokoriegel zukommen zu lassen, in der Standardform

$$f(\mathbf{x}) = \min, \quad A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

(Die Lösung des Problems ist nicht verlangt.)

6.6 Das Simplex-Verfahren

Die Beispiele für Optimierungsaufgaben, welche wir bis jetzt lösten, waren alle so einfach, dass wir leicht alle Ecken $\mathbf{p}_i$ und dann auch das Minimum der Werte $f(\mathbf{p}_i)$ ausrechnen konnten. Das lag daran, dass wir einen Zusammenhang mit der Anschauung behalten wollten, und dann darf die Anzahl der Unbekannten nicht zu groß sein. Für Anwendungen typisch ist dies keineswegs. Die Zahl n der Unbekannten kann durchaus dreistellig sein, und die Zahl k der Restriktionen noch viel größer. Die Zahl

$$\binom{k}{n}$$

der linearen Gleichungssysteme, die man lösen muss, um alle Ecken zu finden, ist dann echt astronomisch groß. Auch mit Computern führt dieser naive Ansatz zu nichts. Das Simplex-Verfahren ist eine numerische Umsetzung der in 6.4 geschilderten Methode: Man fängt mit einer Ecke $\mathbf{p}$ an, schaut nach ob $\mathbf{p}$ optimal ist, und wenn nicht, dann versucht man, sich auf einer von $\mathbf{p}$ ausgehenden Kante zu einer optimaleren Ecke $\mathbf{q}$ zu hangeln.

Schon der erste Schritt, die Suche nach einer Ausgangsecke, ist keineswegs trivial. In 6.5 sahen wir, dass man ihn auf eine andere Optimierungsaufgabe zurückführen kann, für die man eine Ausgangs-Ecke kennt. Die Lösung dieser Aufgabe heißt *Phase I* des Simplex-Verfahrens.

Deswegen brauchen wir hier nur die *Phase II* zu behandeln: Wie man von einer Ecke zur nächsten kommt.

Das Optimierungsproblem sei in der Form

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}) = \min \\ A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

vorgelegt. Wie immer sei A eine $m \times n$ -Matrix, $n > m$, mit $\text{Rang}(A) = m$.

Eine Ecke $\mathbf{p}$ sei gegeben, und zwar in Form einer zulässigen Basislösung $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_B, \mathbf{0})$. Dazu gehört eine Zerlegung $A = (A_B, A_N)$ der Matrix A mit einer invertierbaren $m \times m$ -Teilmatrix A_B von A . Wie am Ende von 6.5 gehen wir von A über zu der Matrix

$$A_B^{-1} \cdot A = (\mathbb{1}_B, A_B^{-1} \cdot A_N).$$

Das ändert nichts an den Restriktionen, wenn wir gleichzeitig von $\mathbf{b}$ zur neuen rechten Seite $A_B^{-1} \cdot \mathbf{b}$ übergehen. An den Variablen $\mathbf{x} = (x_\nu)$ ändert sich dabei nichts, und auch nichts an der Kostenfunktion $f(\mathbf{x})$. So können wir also gleich von der neuen Matrix $A = (\mathbb{1}_B, A_N)$ und dem Tableau

$$\left[\begin{array}{cc|c} \mathbb{1}_B & A_N & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{c}}_N & -f(\mathbf{p}) \end{array} \right]$$

mit $\mathbf{b} = \mathbf{p}_B \geq \mathbf{0}_B$ ausgehen. Dann ist der Optimalitätstest Satz 6.36 sehr einfach: Ist $\tilde{\mathbf{c}}_N \geq \mathbf{0}$, so ist $\mathbf{p}$ optimal, und wir sind fertig.

Andernfalls besitzt $\tilde{\mathbf{c}}_N$ einen Koeffizienten $\tilde{c}_s < 0$, $s \in N$. Für den Vektor

$$\mathbf{x}_N := (0, \dots, x_s, \dots, 0), \quad x_j = 0 \text{ für } j \in N, j \neq s$$

haben wir

$$\tilde{\mathbf{c}}_N \cdot \mathbf{x}_N = \tilde{c}_s x_s < 0, \quad \text{falls } x_s > 0.$$

Wenn wir $x_s > 0$ wählen, wird $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{p})$. Die Vektoren $\mathbf{x} = (\mathbf{b} - A_N \cdot \mathbf{x}_N, \mathbf{x}_N)$ liegen auf einem Strahl, längs dessen wir uns weiterhangeln wollen. Aber dabei können Komplikationen auftreten:

Nach der Wahl von $\mathbf{x}_B = \mathbf{b} - A_N \cdot \mathbf{x}_N$ sind die Restriktionen $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ sicher erfüllt. Aber $\mathbf{x}$ liegt nur dann in P , wenn die Vorzeichenbedingungen $\mathbf{x}_B \geq \mathbf{0}$ gelten. Dazu betrachten wir die Spalte $\mathbf{a}^s = (a_\mu^s)$ von A_N zum Index s . Damit ist

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{b} - x_s \cdot \mathbf{a}^s \geq \mathbf{0}$$

solange, wie $x_s \cdot \mathbf{a}^s \leq \mathbf{b}$. Es gibt zwei Möglichkeiten:

1) Entweder ist $\mathbf{a}^s \leq \mathbf{0}$. Dann ist die Vorzeichenbedingung wegen $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ erfüllt für *alle* $x_s > 0$. Das ist nicht gut! Auf unserem Strahl geht $f(\mathbf{x})$ gegen $-\infty$. Das Optimierungsproblem hat keine Lösung und wir müssen leider Schluss machen. Alle bisherige Mühe war umsonst.

2) Oder es gibt Koeffizienten $a_i^s > 0$ von $\mathbf{a}^s$. Dann gehört $\mathbf{x}$ solange zu P , wie die Vorzeichenbedingungen

$$x_s \cdot a_i^s \leq b_i \quad \text{bzw.} \quad x_s \leq \frac{b_i}{a_i^s}$$

für diese i gelten. Sei nun r eines der $i \in B$ mit

$$t := \frac{b_r}{a_r^s} = \min_{i=1}^m \left\{ \frac{b_i}{a_i^s}, \quad a_i^s > 0 \right\}.$$

Für $x_s > t$ gehört $\mathbf{x}$ nicht mehr zu P . Für $x_s := t$ erhalten wir einen Punkt

$$\mathbf{q} = (\mathbf{b} - t \cdot \mathbf{a}^s, 0, \dots, 0, t, 0, \dots, 0).$$

Für ihn gilt sicher $f(\mathbf{q}) < f(\mathbf{p})$, falls $t > 0$. In diesem Fall ist $\mathbf{q}$ eine neue, erfolgversprechende Ecke:

Beweis. Wie für jeden Punkt auf dem Strahl gelten auch für $\mathbf{q}$ die Restriktionen $A \cdot \mathbf{q} = \mathbf{b}$ mit m linear unabhängigen Linearformen (Zeilen von A). Außerdem haben wir die weiteren Gleichungen $x_j = 0$, $j \in N$, $j \neq s$. Das sind zusammen $n-1$ unabhängige Bedingungen. Zusätzlich haben wir für $\mathbf{q}$ noch die Gleichung $x_r = 0$. Die Linearform x_r kann nicht linear abhängig von den $n-1$ Linearformen

$$\sum_{\nu=1}^n a_{\mu,\nu} x_\nu \quad (\mu = 1, \dots, m), \quad x_j \quad (j \in N, j \neq s)$$

sein, denn dann wäre $x_r = 0$ auch für $x_s > t$. Wir setzen nun

$$B' := B \setminus \{r\} \cup \{s\}, \quad N' := N \setminus \{s\} \cup \{r\}$$

und erhalten eine Darstellung von $\mathbf{q}$ als zulässige Basislösung zur Menge B' . □

Der Übergang von der zulässigen Basislösung $\mathbf{p}$ zur zulässigen Basislösung $\mathbf{q}$ geschieht, indem man zwischen B und N einen Index $r \in B$ gegen einen Index $s \in N$ austauscht. Man tauscht die Gleichung $x_s = 0$, welche zusammen mit den anderen Gleichungen die Ecke $\mathbf{p}$ beschreibt, aus gegen die Gleichung $x_r = 0$, welche zusammen mit den anderen Gleichungen die Ecke $\mathbf{q}$ beschreibt. Das ist an sich nichts sehr bewegendes, nur eine Umgruppierung der Indizes. Unser Tableau ändert sich dabei in

$$\left[\begin{array}{cc|c} A_{B'} & A_{N'} & \mathbf{p}_B \\ \hline \tilde{\mathbf{c}}_{B'} & \tilde{\mathbf{c}}_{N'} & -f(\mathbf{p}) \end{array} \right],$$

wo

$$A_{B'} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{r-1}, \mathbf{a}^s, \mathbf{e}_{r+1}, \dots, \mathbf{e}_m), \quad A_{N'} = (\dots, \mathbf{a}^\nu, \dots, \mathbf{a}^{s-1}, \mathbf{e}_r, \mathbf{a}^{s+1}, \dots, \mathbf{a}^\nu, \dots)$$

und

$$\tilde{\mathbf{c}}_{B'} = (0, \dots, 0, \tilde{c}_s, 0, \dots, 0), \quad \tilde{\mathbf{c}}_{N'} = (\dots, \tilde{c}_\nu, \dots, \tilde{c}_{s-1}, 0, \tilde{c}_{s+1}, \dots, \tilde{c}_\nu, \dots).$$

Wie am Ende von 6.5 müssen wir das Tableau durch Zeilenumformungen so behandeln, dass $A_{B'}$ in die Einheitsmatrix $\mathbb{1}_{B'}$ übergeht. Aber sehr aufwendig ist das nicht, weil nur eine einzige Spalte abzuändern ist. Die entstehende eigentliche Koeffizientenmatrix nennen wir

$$A' = (\mathbb{1}_{B'}, A'_{N'}).$$

Gleichzeitig wird die rechte Seite $\mathbf{p}_B$ abgeändert in $\mathbf{q}_{B'}$.

Schließlich kümmern wir uns auch um die letzte Zeile des Tableaus mit den reduzierten Kosten. Hier stört der Eintrag $\tilde{c}_s$ in der r -ten Spalte von $\tilde{\mathbf{c}}_{B'}$. Wir beseitigen ihn, indem wir $\tilde{c}_s$ -mal die r -te Zeile des Tableaus von der letzten abziehen. Wir bezeichnen mit $\tilde{\mathbf{c}}'_{N'} \cdot \mathbf{x}_{N'}$ die neuen reduzierten Kosten und erhalten das neue Tableau

$$\left[\begin{array}{cc|c} \mathbb{1}_{B'} & A'_{N'} & \mathbf{q}_{B'} \\ \hline \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{c}}'_{N'} & -f(\mathbf{p}) - \tilde{c}_s \cdot q_r \end{array} \right].$$

Und es fügt sich alles so, dass

$$q_r = t = \frac{b_r}{a_r^s}, \quad -f(\mathbf{q}) = -f(\mathbf{p}) - \tilde{\mathbf{c}}_N \mathbf{x}_N = -f(\mathbf{p}) - \tilde{c}_s \frac{b_r}{a_r^s}.$$

In der rechten unteren Ecke des Tableaus haben wir, wie es sich gehört, den Wert $-f(\mathbf{q})$.

Das ganze ist schwerer zu beschreiben, als durchzuführen. Bei der Beschreibung muss man die Indizes (B, N) zu (B', N') umgruppieren. Praktisch lässt man alle Indizes in Ruhe, und gruppiert auch keine Spalten um. Man muss sich nur merken, was jeweils die Basis-Indizes sind. Die ganzen Zeilen-Umformungen nennt man dann *Pivot-Operation* zum *Pivot-Element* a_r^s .

Beispiel 6.23 (Zowe-Skriptum, p. 20) Das Optimierungsproblem sei

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 = \min, \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Nach Einführung von drei Schlupf-Variablen haben wir das Ausgangstableau

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ \boxed{2} & -1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Die schöne 3×3 -Einheitsmatrix, die von den Schlüpfen herkommt, legt die Wahl $B = \{3, 4, 5\}$ als erste Basis nahe. Die zugehörige Ecke (ursprünglich der Ursprung)

$$\mathbf{p} = (0, 0, 4, 3, 1)$$

ist zulässig. Schon für $s = 1$ ist $\tilde{c}_s = -1 < 0$. Wegen $3/2 < 4/1$ müssen wir $r = 2$ wählen. Im Tableau ist das Pivot-Element $a_2^1 = 2$ eingekastelt. Die neue Basis ist $B = \{1, 3, 5\}$. Die Zeilenumformungen führen zum nächsten Tableau

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & \frac{5}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{array} \right].$$

Hier müssen wir $s = 2$ wählen. Wegen $5/2 : 5/2 = 1/1 = 1$ können wir $r = 1$ oder $= 3$ wählen. Die dritte Zeile sieht einfacher aus, wir wählen als Pivot-Element $a_{3,2} = 1$. Die neue Basis ist $B = \{1, 2, 3\}$. Die Zeilen-Umformungen führen auf das Tableau

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 3 \end{array} \right]$$

Hier greift das Optimalitätskriterium und zeigt: In der Ecke $\mathbf{p} = (2, 1, 0, 0, 0)$ wird das Minimum $f(\mathbf{p}) = -3$ angenommen.

Man soll nicht immer alles sofort glauben, was einem im Leben so erzählt wird. Zumindest ab und zu sollte man die Konsistenz der übermittelten Information checken. Schauen wir mal, was passiert, wenn wir im vorletzten Tableau nicht a_3^2 sondern a_1^2 als Pivot genommen hätten. Die Zeilen-Umformungen führen dann auf das Tableau

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & -\frac{1}{5} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 3 \end{array} \right].$$

Die Basis ist jetzt $B = \{1, 2, 5\}$, aber auch hier ist das Optimalitätskriterium erfüllt. Wir erhalten dieselbe Ecke und denselben Wert $f(\mathbf{p}) = -3$.

Beispiel 6.24 (Fischer p. 80, 105) Ein Landwirt besitzt 20 ha Land und einen Stall für 10 Kühe. Er kann im Jahr 2400 Arbeitsstunden aufwenden. Für eine Kuh benötigt er pro Jahr 0.5 ha Land und 200 Arbeitsstunden. Der Anbau von 1 ha Weizen erfordert pro Jahr 100 Arbeitsstunden. Im Jahr erzielt er einen Gewinn von DM 350.- pro Kuh und von DM 260.- pro ha Weizen. Natürlich ist auch dieser Landwirt daran interessiert, seinen Gewinn zu maximieren.

Wir bezeichnen mit x_1 die Anzahl der gehaltenen Kühe und mit x_2 die Anzahl der angebauten ha Weizen. Dann haben wir die Funktion $350 \cdot x_1 + 260 \cdot x_2$ zu maximieren unter den Nebenbedingungen

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_1 \leq 10,$$

$$\frac{1}{2}x_1 + x_2 \leq 20, \quad 200x_1 + 100x_2 \leq 2400.$$

Wir schreiben die beiden letzten Gleichungen etwas anwenderfreundlicher, ohne das Problem wesentlich zu verändern, als

$$x_1 + 2x_2 \leq 40, \quad 2x_1 + x_2 \leq 24.$$

Nach der Einführung von Schlupfen x_3, x_4, x_5 haben wir das Problem

$$\begin{cases} -350x_1 - 260x_2 = \min \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & & 1 & \\ 2 & 1 & & & 24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 40 \\ 24 \end{pmatrix} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{cases}$$

Es liegt nahe, mit der Ecke $(x_1, x_2) = (0, 0)$ und der Basis $B = \{3, 4, 5\}$ zu beginnen, denn die zugehörige Basislösung $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 10, 40, 24)$ ist zulässig. Dazu gehört das Tableau

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & & & 1 & & 10 \\ & 1 & 2 & & 1 & 40 \\ & 2 & 1 & & & 24 \\ \hline -350 & -260 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Wir wählen als Pivot-Spalte die erste Spalte, und müssen dann als Pivot-Zeile die erste Zeile nehmen. Zeilen-Umformungen liefern das nächste Tableau

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & & & 1 & & 10 \\ & 2 & -1 & 1 & & 30 \\ & & \boxed{1} & -2 & 1 & 4 \\ \hline 0 & -260 & 350 & 0 & 0 & 3500 \end{array} \right].$$

Hier können wir nur die zweite Spalte als Pivot-Spalte, und dann die dritte Zeile als Pivot-Zeile nehmen. Das dritte Tableau ist

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & & 1 & & & 10 \\ & & \boxed{3} & 1 & -2 & 22 \\ & 1 & -2 & & 1 & 4 \\ \hline 0 & 0 & -170 & 0 & 520 & 4540 \end{array} \right].$$

Noch immer sind unsere Bemühungen nicht von Erfolg gekrönt. Wir müssen als Pivot das Element in der zweiten Zeile der dritten Spalte nehmen.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & & -1/3 & 2/3 & & 8/3 \\ & 1 & 1/3 & -2/3 & & 22/3 \\ & 1 & 0 & 2/3 & -4/3 & 56/3 \\ \hline 0 & 0 & 170 & 170/3 & 1220/3 & 17360/3 \end{array} \right].$$

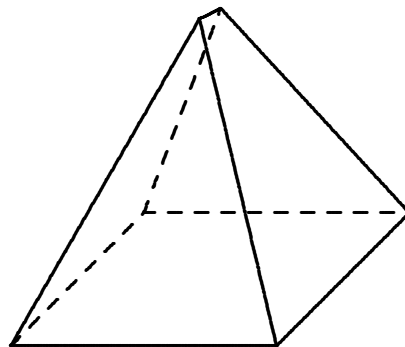
Jetzt ist das Tableau optimal. Der Gewinn von DM 17 360/3 ist ja ganz schön, aber nur ein Nebenerwerbslandwirt kann davon leben. Dazu muss er $x_2 = 56/3$ ha Weizen anbauen, das wird er wohl hinkriegen, aber $x_1 = 8/3$ Kühe halten. Was sich G. Fischer bei diesem Beispiel wohl gedacht hat? Er schreibt etwas von mehr oder weniger fetten Kühen. Nur, wie soll der Landwirt es hinkriegen, dass zwei Kühe ganz fett werden und eine $2/3$ -fett wird, oder 8 Kühe zu $1/3$ fett werden? Die armen Kühe!

Damit das Verfahren von einer Ecke zur einer optimaleren weiter läuft, haben wir oben $t > 0$ in

$$\mathbf{q} = (\mathbf{b} - t\mathbf{a}^s, 0, \dots, 0, t, 0, \dots, 0)$$

annehmen müssen. Äquivalent damit ist $b_r > 0$. Aber leider braucht das nicht erfüllt zu sein. Und es ist genau dann nicht erfüllt, wenn die Ecke $\mathbf{p}$ nicht einfach ist. Dann kommen wir eventuell zu keiner neuen Ecke, sondern bleiben in der Ecke $\mathbf{p}$ hängen. Es gibt zwei Möglichkeiten, damit umzugehen:

1) Wie so oft im Leben, hilft es hier, wenn man das Problem einfach nicht zur Kenntnis nimmt. Der Computer erledigt es schon. Wegen der unvermeidlichen Rechenungenauigkeit kommt es bei ihm praktisch nie vor, dass sich mehr als n Hyperebenen des $\mathbb{R}^n$ in einem Punkt schneiden. Die mehrfache Ecke unserer Standardpyramide löst er in einfache Ecken auf, z.B. so wie nebenstehend gezeichnet.



2) Es gibt eine Modifizierung, das sogenannte lexikographische Simplexverfahren. Da ist dann auch theo-

retisch garantiert, dass der Algorithmus nicht in einer mehrfachen Ecke hängen bleibt. Aber das können die Kollegen aus der Angewandten Mathematik viel besser in der Vorlesung „Optimierung I“ im Hauptstudium erklären, als ich das hier in der Anfängervorlesung könnte. Deswegen will ich es hier auch nicht tun.

Wenn man sich diesen Algorithmus genauer ansieht, stellt man fest, dass viel Schreibarbeit überflüssig ist. Alle Spalten zu Basisvariablen sind Einheitsvektoren, und bleiben es auch nach der Umformung, bis auf die Spalte $\mathbf{e}_r$, die man umformt, und dann gegen die Spalte $\mathbf{a}^s$ der Nicht-Basis-Variablen austauscht. Die ganzen B-Spalten bräuchte man eigentlich nicht hinschreiben. Wenn man sie weglässt,

nennt man das das *kondensierte Simplexverfahren*. Zur Sicherheit muss man allerdings die B-Indizes und die N-Indizes ins Tableau aufnehmen. Man schreibt die Tableaus in der Form

$$\left[\begin{array}{c|c|c} & & N \\ \hline & -f(\mathbf{p}) & \tilde{\mathbf{c}}_N \\ \hline B & \mathbf{b} & A_N \end{array} \right]$$

Schauen wir uns das im letzten Beispiel an: Das Ausgangstableau war

$$\left[\begin{array}{c|c|cc} & & x_1 & x_2 \\ \hline & 0 & -1 & -1 \\ \hline x_3 & 4 & 1 & 2 \\ x_4 & 3 & \boxed{2} & -1 \\ x_5 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Das Pivot-Element steht in der ersten Spalte und der zweiten Zeile. Zur Sicherheit schreiben wir den Basisvektor $\mathbf{e}_2$ neben das Tableau und führen die Zeilenumformungen durch:

$$\left[\begin{array}{c|c|cc|c} & & x_1 & x_2 & \\ \hline & 0 & -1 & -1 & 0 \\ \hline x_3 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ x_4 & 3 & \boxed{2} & -1 & 1 \\ x_5 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{c|c|cc|c} & & x_1 & x_2 & \\ \hline & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline x_3 & \frac{5}{2} & 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ x_4 & \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ x_5 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right].$$

Vertauscht man jetzt x_1 und x_4 , wird das neue Tableau

$$\left[\begin{array}{c|c|cc} & & x_4 & x_2 \\ \hline & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \hline x_3 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ x_1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ x_5 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Jetzt müssen wir $x_s = x_2$ wählen und können $x_r = x_5$ nehmen. Die Zeilenumformungen sind

$$\left[\begin{array}{c|c|cc|c} & & x_4 & x_2 & \\ \hline & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ \hline x_3 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 0 \\ x_1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ x_5 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{c|c|cc|c} & & x_4 & x_2 & \\ \hline & 3 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ \hline x_3 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{2} \\ x_1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ x_5 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right].$$

Das dritte Tableau wird, nach dem Austausch von x_2 und x_5

$$\left[\begin{array}{c|c|cc} & & x_4 & x_5 \\ \hline & 3 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \hline x_3 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ x_1 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ x_2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Das Tableau ist optimal und liefert dieselbe Lösung wie vorher.

Die folgenden Aufgaben sind mit der Simplexmethode zu lösen.

Aufgabe 6.18 (Danzig, p. 134) Lösen sie das Optimierungsproblem

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = \min \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 2 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 2 \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

Aufgabe 6.19 (Danzig, p. 135) Lösen sie das Optimierungsproblem

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4 - 2x_5 = \min \\ \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 9 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

Aufgabe 6.20 (Danzig, p.136) Lösen Sie

$$\begin{cases} -2y_1 - 5y_2 = \min \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

Aufgabe 6.21 (Danzig, p. 72) Zwei Warenlager haben Tomatenkonserven vorrätig, und in drei Geschäften werden sie verlangt. Dabei sind Vorräte und Bedarf

Lagerhaus	Vorrat	Geschäft	Bedarf
1	100	A	75
		B	125
2	200	C	100

Die Versandkosten (pro Konserve in Cent) sind

	A	B	C
1	10	14	30
2	12	20	17

a) Finden Sie für dieses Transportsystem eine zulässige Basislösung.

b) Lösen Sie das Transportsystem.

Aufgabe 6.22 (Collatz-Wetterling p.174) Ein Tischler will x_1 Tische und x_2 Stühle mit maximalem Gewinn produzieren. Dabei kann er höchstens 20 Tische absetzen, also $x_1 \leq 20$. Weiter hat er

	pro Tisch	pro Stuhl	insgesamt verfügbar
Arbeitsstunden	6	1.5	240
Kosten	180 DM	30	5400
Reingewinn	80 DM	15 DM	

Aufgabe 6.23 (Collatz-Wetterling p. 174) Auf einem sumpfigen Gelände, auf dem das Bauen höherer Häuser wegen der Fundamentierung sehr große Kosten verursacht, sollen x fünf-stöckige und y zwei-stöckige Häuser gebaut werden. Die Arbeitsleistung eines Arbeiters pro Monat werde mit „Mannmonat“ bezeichnet. Weiter hat man bei

Stockwerke	Kosten	Mannmonate	Bodenfläche	Einwohner pro Haus
5	600 000 DM	120	800 qm	30
2	200 000 DM	60	600 qm	12
zur Verfügung	18 000 000 DM	4500	42 000 qm	

Wie müssen x und y gewählt werden, damit insgesamt möglichst viele Bewohner in den Häusern untergebracht werden können?

Aufgabe 6.24 (Collatz-Wetterling p. 175) Auf einem Gut sollen Roggen und Kartoffeln angebaut werden. Man hat, bezogen auf 1 Morgen Anbaufläche

	Anbaukosten	Arbeitszeit	Reingewinn
bei Kartoffeln	5 DM	2 Std	20 DM
bei Roggen	10 DM	10 Std	60 DM

Gesucht ist die Anbaufläche x_1 für Kartoffeln und x_2 für Roggen so, dass der gesamte Reingewinn maximal wird. Dabei stehen 1200 Morgen Land, 7000 DM und 5200 Arbeitsstunden zur Verfügung.

Aufgabe 6.25 Lösen Sie mit dem Simplex-Algorithmus die Optimierungsprobleme

$$a) \left\{ \begin{array}{rclclcl} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & \min \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & & & & + & x_5 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & & & & - & x_4 & & & = & 5 \\ \mathbf{x} & \geq & 0 & & & & & & & & & \end{array} \right.$$

$$a) \left\{ \begin{array}{rclclcl} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 5x_3 & + & x_4 & = & \min \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & & & = & 4 \\ \mathbf{x} & \geq & 0 & & & & & & \end{array} \right.$$