Vorlesung 'Analysis für das Lehramt'

Andreas Knauf*

Wintersemester 2017/18

Zusammenfassung

Vorlesungsbegleitendes Skript. Anregungen und Kritik sind willkommen!

Inhaltsverzeichnis

Zur Notation iii

1 Maß und Integration 1
- 1.1 Treppenfunktionen . . . 3
- 1.2 Das Lebesgue-Integral . . . 8
- 1.3 Der Satz von Fubini (stetige Version) . . . 15
- 1.4 Nullmengen . . . 20
- 1.5 Abbildungen von Nullmengen . . . 23

2 Sätze und Rechenregeln der Lebesgue-Integration 26
- 2.1 Der Banach–Raum $L^1(\mathbb{R}^n)$ . . . 26
- 2.2 Der Satz von Fubini (L^1-Version) . . . 40
- 2.3 Der Transformationssatz . . . 44
- 2.4 Anwendung: Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^n$ . . . 50

3 Differentialformen und Mannigfaltigkeiten 53
- 3.1 Multilinearformen . . . 53
- 3.2 Differentialformen . . . 59
- 3.3 Vektoranalysis . . . 61
- 3.4 Integration von Differentialformen . . . 65

*Department Mathematik, Universität Erlangen-Nürnberg, Cauerstr. 11, D–91058 Erlangen, Germany. e-mail: knauf@math.fau.de, web: http://math.fau.de/knauf

4 Gewöhnliche Differentialgleichungen 75
4.1 Definitionen und Beispiele . . . 75
4.2 Lokale Existenz und Eindeutigkeit der Lösung . . . 81
4.3 Globale Existenz und Eindeutigkeit der Lösung . . . 89
4.4 Transformation in ein dynamisches System . . . 91

5 Lösungsmethoden für lineare Differentialgleichungen 94
5.1 Homogene lineare autonome Differentialgleichungen . . . 95
5.2 Explizit zeitabhängige lineare Differentialgleichungen . . . 102
5.3 Quasipolynome . . . 108
5.4 Lineare Flüsse in der Ebene . . . 111
5.5 Beispiel: Feder mit Reibung . . . 113

6 Stabilität von Gleichgewichtslagen 119
6.1 Allgemeine Bedeutung der Linearisierung . . . 119
6.2 Stabilitätsbegriffe für Gleichgewichtslagen . . . 121
6.3 Stabilitätskriterien für Gleichgewichtslagen . . . 125

7 Elementare analytische Lösungsmethoden 131
7.1 Trennung der Variablen . . . 131
7.2 Konstanten der Bewegung . . . 133
7.3 Potenzreihen als Lösungen . . . 135

8 Der Hauptsatz der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen 137
8.1 Das maximale Existenzintervall . . . 137
8.2 Linearisierung der DGL entlang einer Trajektorie . . . 139
8.3 Die Aussage des Hauptsatzes . . . 141

A Zusammenfassung zur Topologie 142
A.1 Topologische Räume . . . 142
A.2 Stetigkeit . . . 147
A.3 Kompaktheit . . . 151

Literatur 156

Index 158

Vorbemerkungen:
Dieses Skript kann kein Lehrbuch ersetzen. Einige Lehrbücher zur Analysis und zu gewöhnlichen Differentialgleichungen sind im Literaturverzeichnis erwähnt.
Die Einführung des Lebesgue-Integrals in Kapitel 1 lehnt sich an die Darstellung in KÖNIGSBERGER: Analysis 2, [Ko] an, weshalb ich die begleitende Benutzung

dieses Buches besonders empfehle.
Eingestreute Aufgaben des bayerischen Staatsexamens dienen dem Selbsttest.
Da dieses *pdf* intern und extern verlinkt ist, kann es sinnvoll sein, es *online* zu benutzen statt es auszudrucken.
Erlangen, im August 2017 Andreas Knauf

Zur Notation

Teilmengen: Sind A und B Mengen, dann heißt A *Teilmenge* von B (in Zeichen $A \subseteq B$), wenn gilt: $x \in A \Rightarrow x \in B$. Insbesondere gilt $B \subseteq B$. Die *echte Inklusion* $A \subsetneq B$ bedeutet, dass $A \subseteq B$, aber $A \neq B$ gilt. (in der mathematischen Literatur findet man davon abweichend auch das Teilmengenzeichen $A \subset B$.)

Potenzmengen: Ist A eine Menge, dann ist

$$2^A := \{B \mid B \subseteq A\}$$

die *Potenzmenge von* A. Man findet auch die Notationen $\mathfrak{P}(A)$ und $\mathcal{P}(A)$.

Zahlen: Menge $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ der natürlichen Zahlen, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$,
Ring $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$ der ganzen Zahlen.
Körper $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ der rationalen, reellen bzw. komplexen Zahlen.
Für einen Körper $\mathbb{K}$ bedeutet $\mathbb{K}^*$ die multiplikative Gruppe $\mathbb{K}^* := \mathbb{K} \setminus \{0\}$, und

$$\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} = (0, \infty).$$

Intervalle: Für $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$ ist

$$\begin{aligned} (a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a, x < b\}, \\ (a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a, x \leq b\} \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

(Synonym findet man auch die Notation $]a,b[= (a,b),]a,b] = (a,b]$ etc.)

Matrizen: $\mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{K})$ bezeichnet den $\mathbb{K}$–Vektorraum der $m \times n$–Matrizen mit Einträgen aus dem Körper $\mathbb{K}$, und $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$ den Ring $\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$.

Das griechische Alphabet: a) Kleinbuchstaben

α	Alpha	ζ	Zeta	λ	Lambda	π	Pi	ϕ, φ	Phi
β	Beta	η	Eta	μ	My	ρ, ϱ	Rho	χ	Chi
γ	Gamma	θ, ϑ	Theta	ν	Ny	σ, ς	Sigma	ψ	Psi
δ	Delta	ι	Jota	ξ	Xi	τ	Tau	ω	Omega
ϵ, ε	Epsilon	κ	Kappa	o	Omikron	υ	Ypsilon		

b) Großbuchstaben

Γ	Gamma	Θ	Theta	Ξ	Xi	Σ	Sigma	Φ	Phi	Ω	Omega
Δ	Delta	Λ	Lambda	Π	Pi	Υ	Ypsilon	Ψ	Psi		

1 Maß und Integration

Die Messung und Berechnung von Längen, Flächen und Volumina gehört zu den ersten mathematischen Aktivitäten der Menschheit. Integration und Volumenberechnung aber sind zwei Seiten einer Medaille:

- In der *Analysis I* wurde das Riemann-Integral einer (positiven) reellen Funktion als Fläche unter dem Graphen der Funktion eingeführt. Diese Idee wird jetzt auf Funktionen mehrerer Variablen erweitert.

- Ist andererseits $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine (messbare) Teilmenge, dann ist ihr Maß gleich dem Integral $\int \mathbb{1}_A \, dx$ ihrer charakteristischen Funktion $\mathbb{1}_A : \mathbb{R}^n \to \{0, 1\}$.

Tatsächlich ist die Integration historisch wesentlich älter als die Differentiation, die ja (in einer Dimension) ihre Umkehroperation ist.

Andererseits hat sich der Integralbegriff zusammen mit dem Begriff der Funktion erweitert. Bis zum 19. Jahrhundert waren in der Regel die betrachteten Funktionen glatt (beliebig oft stetig differenzierbar). In der Zwischenzeit ist uns aber der Gedanke vertraut geworden, dass etwa fraktale Mengen und Funktionen nicht nur als mathematische Konstrukte sondern auch für die Beschreibung von Naturvorgängen von Bedeutung sind. Solche Funktionen sind oft an unendlich vielen Stellen unstetig..

Schon beim *Riemann-Integral* muss ja die zu integrierende Funktion nicht stetig sondern nur sprungstetig sein.[1]

In den nächsten Wochen werden Sie den Begriff des *Lebesgue-Integrals* kennen lernen. Man kann noch mehr Funktionen nach Lebesgue integrieren als die Riemann-integrablen, z.B. die charakteristische Funktion

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$$

der Teilmenge $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ der rationalen Zahlen, und es ist $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \, dx = 0$.[2]

Dies bedeutet, dass $\mathbb{Q}$ im Gegensatz zu den irrationalen Zahlen Maß Null besitzt und korrespondiert mit der Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$. Dass man bei der Lebesgue-Integration allgemein sogenannte *Nullmengen* wie z.B. $\mathbb{Q}$ unberücksichtigt lassen kann, ist oft praktisch.

Der Hauptvorteil des Lebesgue-Integrals gegenüber dem Riemann-Integral ist aber, dass es sich bei Operationen wie Limesbildung etc. einfacher verhält.

---

[1] Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf dem kompakten Intervall I heißt *sprungstetig* oder eine *Regelfunktion*, wenn für alle x im Inneren von I die Limiten $\lim_{t \searrow x} f(t)$ und $\lim_{t \nearrow x} f(t)$ existieren.

[2] Dass das Riemann-Integral $\int_0^1 \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) \, dx$ nicht existiert, folgt daraus, dass die Untersummen ≤ 0, die Obersummen aber ≥ 1 sind.

Für Funktionen, für die *beide* Integralbegriffe definiert sind, stimmen aber Riemann– und Lebesgue-Integral überein.

Die Grundidee aller Integration ist es, das $(n+1)$–dimensionale Volumen unter dem Graphen von $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ zu betrachten. Integration lässt sich also auf die Berechnung von Maßen zurückführen[3]. In einem gewissen Sinn sind Maße damit ein fundamentaleres Konzept als das der Integration.

Ein *Maß* μ auf einer Menge M wie z.B. dem $\mathbb{R}^n$ ordnet geeigneten Teilmengen $A \subseteq M$ Zahlen

$$\mu(A) \in [0,\infty] := [0,\infty) \cup \{\infty\}$$

zu, eben das Maß von A. Diese Teilmengen heißen *messbar*. Die Leere Menge ist dabei messbar, mit $\mu(\emptyset) = 0$. Sind die messbare Teilmengen A_1 und A_2 disjunkt, dann gilt außerdem

$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$$

(so genannte *Additivität* von μ).[4]

Uns wird hauptsächlich das Lebesgue-Maß beschäftigen, aber in der Mathematik und ihren Anwendungen werden zahlreiche andere Maße benutzt:

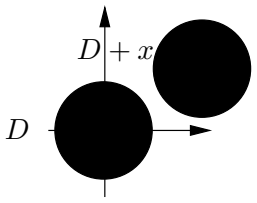
1.1 Beispiele (Maße)

1. Das *Zählmaß* m auf einer Menge M, für $A \subseteq M$ definiert durch

$$m(A) := \begin{cases} |A| & , A \text{ endlich} \\ \infty & , A \text{ unendlich} \end{cases} .$$

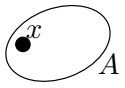
   Hier sind insbesondere alle Teilmengen messbar.

2. Das *Lebesgue–Maß* λ^n auf dem $\mathbb{R}^n$, das wir bald kennen lernen, zeichnet sich dadurch aus, dass es einem um $x \in \mathbb{R}^n$ verschobenen Körper das gleiche Volumen $\lambda^n(D+x) = \lambda^n(D)$ zuordnet wie dem unverschobenen, es also *translationsinvariant* ist, und der Einheitswürfel $[0,1]^n$ das Maß $\lambda^n([0,1]^n) = 1$ besitzt.



3. Das *Dirac–Maß* δ_x ist im Punkt x des $\mathbb{R}^n$ konzentriert, und für $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist

$$\delta_x(A) \equiv \int_A \delta_x := \begin{cases} 1 & , \quad x \in A \\ 0 & , \quad \text{sonst.} \end{cases} .$$

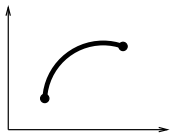


   Dieses Maß ist also nicht translationsinvariant

[3] Diesen Weg werden wir hier nicht verfolgen, siehe aber das Skript zur Maßtheorie.

[4] Die exakte Definition des Maßbegriffs folgt in Bemerkung 1.18.

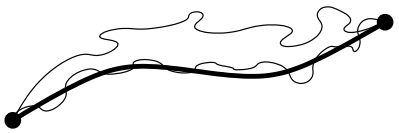
4. Wir wollen z.B. auch die Länge einer *Kurve* oder allgemeiner den Flächeninhalt einer d–dimensionalen Fläche im $\mathbb{R}^n$ messen. Auch das dafür benutzte Hausdorff-Maß μ_d ist translations- und rotationsinvariant, es ordnet aber der d–dimensionalen Einheitsfläche $[0,1]^d \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d} = \mathbb{R}^n$ Maß 1 zu. Entsprechend hat aber für $d < n$ hat der Einheitswürfel Maß $\mu_d([0,1]^n) = \infty$.



5. Man kann sogar Maße μ_d konstruieren, die Mengen beliebiger fraktaler Dimension $d \in [0,n]$ messen. Genau genommen *definiert* man die Hausdorff-Dimension der Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ durch $d(A) := \inf\{d' > 0 \mid \mu_{d'}(A) = 0\}$.

6. Im Zusammenhang mit dem so genannten Feynmanschen Pfadintegral der Quantenmechanik wird auf dem unendlich-dimensionalen Raum M der Wege zwischen zwei Punkten des Konfigurationsraumes $\mathbb{R}^d$ ein *Wahrscheinlichkeitsmaß* (also ein Maß μ auf M mit $\mu(M) = 1$) definiert.

   Dabei erhalten Wege, die in der Nähe von Lösungskurven der Differentialgleichung der Klassischen Mechanik sind, ein großes Gewicht.



Das Buch [Ba] von Heinz Bauer (einem Erlanger Mathematiker) gibt eine Einführung in die allgemeine Maß-und Integrationstheorie. ◇

1.1 Treppenfunktionen

Nach diesem kleinen Überblick wollen wir aber an die Arbeit gehen. Die Darstellung lehnt sich an das Buch *Analysis II* [Ko] von Königsberger an, das sich durch eine originelle Einführung des Lebesgue-Integrals auszeichnet.

Beschränkten *Intervallen* I der Form $I = [a,b), (a,b), (a,b]$ und $[a,b]$ (mit Intervallgrenzen $-\infty < a \leq b < \infty$) weisen wir das eindimensionale Lebesgue-Maß $|I| := b - a$ zu. Die Intervallgrenzen bilden dabei den Rand $\partial I := \{a,b\}$ des Intervalls I.

Entsprechend setzen wir das n-dimensionale Lebesgue-Maß des mithilfe der beschränkten Intervalle $I^{(1)}, \ldots, I^{(n)} \subset \mathbb{R}$ definierten *Quaders*

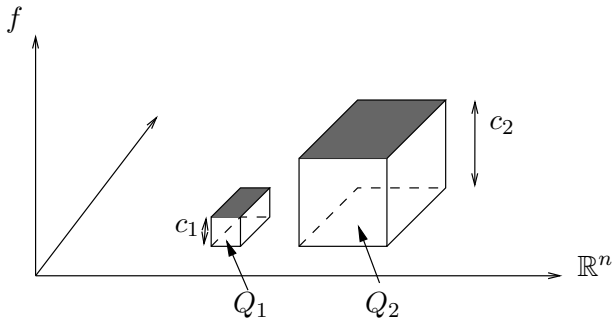
$$Q := I^{(1)} \times \ldots \times I^{(n)} \subseteq \mathbb{R}^n \tag{1.1}$$

gleich $v_n(Q) \equiv v(Q) := |I^{(1)}| \cdot \ldots \cdot |I^{(n)}|$.

Die Quader sind jetzt unsere Bausteine, mit denen wir allgemeinere Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ ausschöpfen und überdecken.

1.2 Definition

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *heißt* **Treppenfunktion**, *wenn es disjunkte Quader* $Q_1, \ldots, Q_s \subseteq \mathbb{R}^n$ *mit* $f\restriction_{Q_l}$ *konstant und* $f\restriction_{\mathbb{R}^n \setminus (Q_1 \cup \ldots \cup Q_s)} = 0$ *gibt.*
- *Es sei* $\mathcal{T}_n$ *die Menge der Treppenfunktionen des* $\mathbb{R}^n$.



Setzen wir $c_i := f\restriction_{Q_i}$, dann gilt

$$f = \sum_{i=1}^{s} c_i \mathbb{1}_{Q_i}. \tag{1.2}$$

Für die Projektionen

$$\pi^{(k)} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad , \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_k \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

auf die k–te Koordinate und den Quader aus (1.1) ist $\pi^{(k)}(Q) = I^{(k)}$. Wir *verfeinern* nun die Darstellung (1.2) der Treppenfunktion f, indem wir zunächst für die k–te Koordinate die nicht leere endliche Menge

$$M^{(k)} := \bigcup_{i=1}^{s} \partial\pi^{(k)}(Q_i)$$

der Intervallgrenzen projizierter Quader einführen.

Sind umgekehrt

$$M^{(k)} = \left\{ a_1^{(k)}, \ldots, a_{s_k}^{(k)} \right\} \subseteq \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad a_i^{(k)} < a_{i+1}^{(k)}$$

solche Mengen, dann ist das Intervall $\left[a_1^{(k)}, a_{s_k}^{(k)} \right]$ disjunkte Vereinigung der Intervalle $I_1^{(k)}, \ldots, I_{t_k}^{(k)}$ mit $t_k := 2s_k - 1$ und

$$I_{2l}^{(k)} := \left(a_l^{(k)}, a_{l+1}^{(k)} \right) \quad , \quad I_{2l-1}^{(k)} := \left\{ a_l^{(k)} \right\}.$$

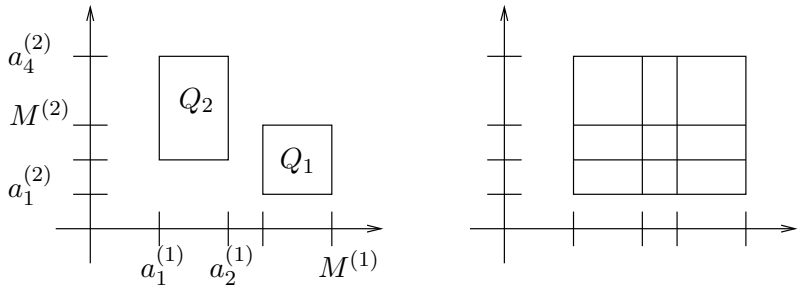


Abbildung 1.1: Quader in der Ebene (links); Partition mittels Intervallgrenzen $M^{(1)}, M^{(2)}$ (rechts)

Benutzt man nun die aus der Darstellung (1.2) der Treppenfunktion f gewonnenen Mengen $M^{(k)}$, dann ist f auf den Quadern

$$I_{j_1}^{(1)} \times \ldots \times I_{j_n}^{(n)} \subseteq \mathbb{R}^n \qquad (j_k \in \{1, \ldots, t_k\}) \tag{1.3}$$

konstant, und diese Quader sind disjunkt, siehe Abbildung 1.1.

1.3 Lemma *$\mathcal{T}_n$ ist ein $\mathbb{C}$–Vektorraum, und für $f \in \mathcal{T}_n$ ist auch $|f| \in \mathcal{T}_n$.*

Beweis:

1. Es seien $f^I = \sum_{i=1}^{s^I} c_i^I \mathbb{1}_{Q_i^I}$ und $f^{II} = \sum_{j=1}^{s^{II}} c_j^{II} \mathbb{1}_{Q_j^{II}}$ Treppenfunktionen in $\mathcal{T}_n$, und für $r = I, II$

   $$M^{(k,r)} := \bigcup_{i=1}^{s^r} \partial\pi^{(k)}\left(Q_i^r\right) \quad , \quad M^{(k)} := M^{(k,I)} \cup M^{(k,II)} \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

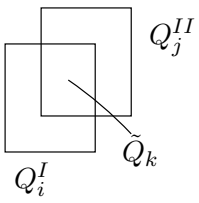
   Wir benutzen nun die unter Benutzung der Mengen $M^{(k)}$ gewonnenen verfeinerten Darstellungen

   $$f^r = \sum_{i=1}^{\tilde{s}} \tilde{c}_i^r \mathbb{1}_{\tilde{Q}_i} \qquad (r = I, II)$$

   mit den disjunkten Quadern $\tilde{Q}_i$ der Form (1.3). Dann ist auch

   $$f^I + f^{II} = \sum_{i=1}^{\tilde{s}} \left(\tilde{c}_i^I + \tilde{c}_i^{II}\right) \mathbb{1}_{\tilde{Q}_i}$$

   eine Treppenfunktion in $\mathcal{T}_n$.



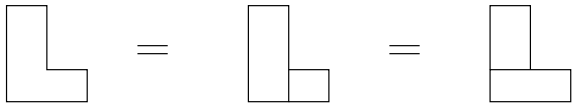
2. Ist $f = \sum_{i=1}^{s} c_i \mathbb{1}_{Q_i} \in \mathcal{T}_n$, dann ist mit $\lambda \in \mathbb{C}$ auch $\lambda f = \sum_{i=1}^{s} (\lambda c_i) \mathbb{1}_{Q_i} \in \mathcal{T}_n$ und $|f| = \sum_{i=1}^{s} |c_i| \mathbb{1}_{Q_i} \in \mathcal{T}_n$. □

Wir setzen jetzt versuchsweise

$$\mathcal{I}_n : \mathcal{T}_n \to \mathbb{C} \quad , \quad \mathcal{I}_n \left(\sum_{i=1}^{s} c_i \mathbb{1}_{Q_i} \right) := \sum_{i=1}^{s} c_i v(Q_i) \tag{1.4}$$

als *Integral der Treppenfunktion* an. Für positive Treppenfunktionen f entspricht $\mathcal{I}_n(f)$ dem Volumen unterhalb des Graphen.

Wir können zwar eine Treppenfunktion $f \in \mathcal{T}_n$ auf *verschiedene* Weise als gewichtete Summe $f = \sum_i c_i \mathbb{1}_{Q_i}$ charakteristischer Funktionen von Quadern Q_i darstellen, denn die Gebiete $f^{-1}(c) \subseteq \mathbb{R}^n$ lassen sich ja verschieden in endlich viele Quader zerlegen:



$\mathcal{I}_n(f)$ hängt aber nicht von der Wahl der Darstellung ab:

1.4 Satz (Integral für Treppenfunktionen)

1. *$\mathcal{I}_n : \mathcal{T}_n \to \mathbb{C}$ ist wohldefiniert und ein positives lineares Funktional.*
2. *Es gilt $\mathcal{I}_n(|f|) \geq |\mathcal{I}_n(f)|$.*
3. *Für $n = m + p$ und $f \in \mathcal{T}_n$ sind*

$$f_y : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C} \quad , \quad f_y(x) := f(x, y) \qquad (y \in \mathbb{R}^p)$$

und

$$g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{C} \quad , \quad g(y) := \mathcal{I}_m(f_y)$$

Treppenfunktionen in $\mathcal{T}_m$ bzw. $\mathcal{T}_p$, und es gilt

$$\mathcal{I}_n(f) = \mathcal{I}_p(g). \tag{1.5}$$

1.5 Bemerkungen (Integral für Treppenfunktionen)

1. $\mathcal{T}_n$ ist ein *Funktionenraum*, also ein Vektorraum, dessen Elemente Funktionen sind.

   Abbildungen $\mathcal{I} : \mathcal{T} \to \mathbb{K}$ von einem (unendlich-dimensionalen) Funktionenraum $\mathcal{T}$ über dem Körper $\mathbb{K}$ in $\mathbb{K}$ werden oft *Funktionale* genannt.
   Ein Funktional $\mathcal{I}$ heißt *positiv*, wenn $\mathcal{I}(f) \geq 0$ für $f \geq 0$ folgt und *linear*, wenn es eine lineare Abbildung bezüglich der Vektorraumstruktur von $\mathcal{T}$ ist.

2. Die Aussage des dritten Teiles ist die Spezialisierung des noch zu behandelnden Satzes von Fubini (Satz 1.15) auf Treppenfunktionen. Schreibt man $\int_{\mathbb{R}^n} f(z)\,dz$ statt $\mathcal{I}_n(f)$, dann lässt sich (1.5) in der Form

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,dx \right) dy$$

schreiben. Man kann also insbesondere mehrdimensionale Integrale durch mehrfache eindimensionale Integration ersetzen. ◇

Beweis:

1. • Um die Wohldefiniertheit des Integrals zu beweisen, ist zu zeigen, dass $\mathcal{I}_n(f)$ unabhängig von der Wahl der Zerlegung (1.2) ist, also für

$$f = \sum_{i=1}^{s^I} c_i^I \mathbb{1}_{Q_i^I} = \sum_{i=1}^{s^{II}} c_i^{II} \mathbb{1}_{Q_i^{II}} \in \mathcal{T}_n$$

gilt:

$$\sum_{i=1}^{s^I} c_i^I v\left(Q_i^I\right) = \sum_{i=1}^{s^{II}} c_i^{II} v\left(Q_i^{II}\right). \tag{1.6}$$

• Nun genügt es aber zu zeigen, dass beide Seiten in (1.6) gleich der Summe ist, die man für die gemeinsame Verfeinerung mit den Quadern (1.3) erhält.
• Dafür wiederum genügt der Nachweis, dass das Lebesgue-Maß $v_n(Q)$ eines Quaders Q der Form (1.1) gleich der Summe der Maße der Quader seiner Verfeinerung ist. Dies folgt aber aus

$$v_n(Q) = v_n(I^{(1)} \times \ldots \times I^{(n)}) = v_1(I^{(1)}) \cdot \ldots \cdot v_1(I^{(n)})$$

und

$$v_1(I^{(k)}) = v_1(I_1^{(k)}) + \ldots + v_1(I_{t_k}^{(k)}) \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

wenn $I^{(k)}$ disjunkte Vereinigung der Intervalle $I_l^{(k)}$ ist.
• Die Linearität und Positivität von $\mathcal{I}_n$ folgt jetzt unmittelbar aus der Definition (1.4) von $\mathcal{I}_n$.

2. Für $f = \sum_{i=1}^{s} c_i \mathbb{1}_{Q_i}$ ist

$$\mathcal{I}_n(|f|) = \sum_{i=1}^{s} |c_i| v(Q_i) \geq \left| \sum_{i=1}^{s} c_i v(Q_i) \right| = |\mathcal{I}_n(f)|.$$

3. Wir benutzen die mittels Verfeinerung gewonnene Darstellung

$$f = \sum_{i=1}^{s_m} \sum_{j=1}^{s_p} c_{ij} \mathbb{1}_{Q_{ij}}$$

mit Quadern $Q_{ij} = Q_i^{(m)} \times Q_j^{(p)}$, wobei die Quader $Q_1^{(m)}, \ldots, Q_{s_m}^{(m)} \subseteq \mathbb{R}^m$ und die Quader $Q_1^{(p)}, \ldots, Q_{s_p}^{(p)} \subseteq \mathbb{R}^p$ disjunkt sind.
Damit gilt wegen $\mathbb{1}_{Q_{ij}}(x,y) = \mathbb{1}_{Q_i^{(m)}}(x) \cdot \mathbb{1}_{Q_j^{(p)}}(y)$

$$g(y) = \mathcal{I}_m(f_y) = \sum_{j=1}^{s_p} \left(\sum_{i=1}^{s_m} c_{ij} v_m\left(Q_i^{(m)}\right) \right) \mathbb{1}_{Q_j^{(p)}}(y) \qquad (y \in \mathbb{R}^p),$$

also

$$\mathcal{I}_p(g) = \sum_{j=1}^{s_p} \sum_{i=1}^{s_m} c_{ij} v_m\left(Q_i^{(m)}\right) \cdot v_p\left(Q_j^{(p)}\right).$$

Dies ist aber wegen $v_n\left(Q_{ij}\right) = v_m\left(Q_i^{(m)}\right) \cdot v_p\left(Q_j^{(p)}\right)$ gleich $\mathcal{I}_n(f)$. □

1.2 Das Lebesgue-Integral

Ist $\psi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathbb{1}_{Q_k}$ mit $c_k \in \mathbb{C}$ und Quadern $Q_k \subseteq \mathbb{R}^n$, dann ist es naheliegend, das Integral von ψ analog zu (1.4) durch

$$\mathcal{I}_n(\psi) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k v_n(Q_k)$$

zu erklären. Im Allgemeinen konvergiert diese Reihe zwar nicht. Ist allerdings $c_k \geq 0$, dann ist immerhin $\mathcal{I}_n(\psi) \in [0, \infty]$ wohldefiniert.

1.6 Definition

- *Eine* **Hüllreihe** ψ *von* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *ist eine Reihe* $\psi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathbb{1}_{Q_k}$ *mit* $c_k \geq 0$ *und offenen Quadern* Q_k*, für die* $\psi \geq |f|$ *gilt.*
- f *besitzt die* $\mathcal{L}^1$*–Halbnorm*[5]

$$\|f\|_1 := \inf \{\mathcal{I}_n(\psi) \mid \psi \text{ ist Hüllreihe von } f\}.$$

[5] Bei einer **Halbnorm** wird im Gegensatz zu einer Norm nicht $\|f\| > 0$ für $f \neq 0$ verlangt. Zusätzlich wird hier der Wert $\|f\|_1 = \infty$ zugelassen.

- *f heißt* **Lebesgue-integrierbar**, *wenn es eine Folge von Treppenfunktionen $\varphi_k \in \mathcal{T}_n$ mit*

$$\lim_{k\to\infty} \|f - \varphi_k\|_1 = 0$$

gibt. In diesem Fall heißt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\,dx := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx := \lim_{k\to\infty} \mathcal{I}_n(\varphi_k)$$

das **Lebesgue-Integral** *von f.*

- *Die Menge der Lebesgue-integrierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ wird mit $\tilde{\mathcal{L}}^1(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet.*

Wir müssen uns zunächst überlegen, dass diese Definition des Lebesgue-Integrals sinnvoll ist.

- Zunächst besitzt jede Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ eine Hüllreihe, nämlich z.B. $\varphi := \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{Q_k}$ mit $Q_k := (-k, k)^n$, und es ist $\varphi(x) \equiv \infty$. Daher ist

$$\|g\|_1 \in [0, \infty].$$

- Sicher ist *nicht jede Funktion Lebesgue-integrierbar*, denn z.B. die Funktion $\mathbb{1}_{\mathbb{R}}$ hat die Eigenschaft, dass $\mathbb{1}_{\mathbb{R}} - \varphi_k$ für $\varphi_k \in \mathcal{T}_1$ außerhalb eines beschränkten Gebiets gleich 1 ist und damit ist $\|\mathbb{1}_{\mathbb{R}} - \varphi_k\|_1 = \infty$.

- Ist aber f Lebesgue-integrierbar, dann existiert auch der Limes auf der rechten Seite der Definition des Lebesgue-Integrals, denn $|\mathcal{I}_n(\varphi_k) - \mathcal{I}_n(\varphi_l)| =$

$$|\mathcal{I}_n(\varphi_k - \varphi_l)| \le \mathcal{I}_n(|\varphi_k - \varphi_l|) = \|\varphi_k - \varphi_l\|_1 \le \|f - \varphi_k\|_1 + \|f - \varphi_l\|_1,$$

und der letzte Ausdruck geht für $k, l \to \infty$ gegen Null[6]. $k \mapsto \mathcal{I}_n(\varphi_k)$ ist also eine Cauchy-Folge.

Aus dem gleichen Grund ist der Limes von der Wahl der Folge $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ unabhängig. Damit ist das Lebesgue-Integral von f wohldefiniert und endlich.

Dass $\|\cdot\|_1$ die Eigenschaften

$$\|\lambda f\|_1 = |\lambda|\,\|f\|_1 \quad \text{und} \quad \|f + g\|_1 \le \|f\|_1 + \|g\|_1 \quad \big(f, g \in \tilde{\mathcal{L}}^1(\mathbb{R}^n), \lambda \in \mathbb{C}\big)$$

einer Halbnorm erfüllt, wird klar, wenn man die Koeffizienten der Hüllreihe von f mit dem Betrag von $\lambda \in \mathbb{C}$ multipliziert bzw. die Hüllreihen von f und g addiert.

[6] Die mittlere Identität folgt aus folgendem Lemma (Beweis siehe [Ko], p. 238f):
Lemma. $\|\varphi\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|\,dx \qquad (\varphi \in \mathcal{T}_n)$.

Zwar ist $\tilde{\mathcal{L}}^1(\mathbb{R}^n)$ selbst kein $\mathbb{C}$-Vektorraum, denn der Wert ∞ ist zugelassen, aber $\tilde{\mathcal{L}}^1(\mathbb{R}^n)$ enthält den $\mathbb{C}$-Vektorraum

$$\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \mid f \in \tilde{\mathcal{L}}^1(\mathbb{R}^n)\}.$$

1.7 Lemma *Die Halbnorm erfüllt die* **verallgemeinerte Dreiecksungleichung**

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k \right\|_1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_1 . \tag{1.7}$$

Dabei nehmen wir $f_k : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ an, weil sonst die Summe auf der linken Seite von (1.7) evtl. nicht definiert ist. Es muß aber nicht $f_k \in \tilde{\mathcal{L}}^1(\mathbb{R}^n)$ gelten.

Beweis: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es geeignete Hüllreihen ψ_k von f_k, für die

$$\mathcal{I}_n(\psi_k) \leq \|f_k\|_1 + 2^{-k}\varepsilon \quad \text{gilt, also} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (\mathcal{I}_n(\psi_k) - \|f_k\|_1) \leq \varepsilon.$$

$\psi := \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k$ ist dann Hüllreihe von $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$, mit $\mathcal{I}_n(\psi) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{I}_n(\psi_k)$. □

Das Lebesgue-Integral ist eine Abbildung

$$\int_{\mathbb{R}^n} : \tilde{\mathcal{L}}^1(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}.$$

Wir wollen nun die Rechenregeln für das Integral ergründen. Zunächst ist

$$\mathcal{T}_n \subset \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n),$$

die Treppenfunktionen sind also Lebesgue-integrierbar, und für $\varphi \in \mathcal{T}_n$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx = \mathcal{I}_n(\varphi),$$

denn φ wird ja durch sich selbst approximiert. Damit *erweitert* das Lebesgue-integral unseren Integralbegriff für Treppenfunktionen, und auch Satz 1.4 besitzt eine Erweiterung:

1.8 Satz *Das Lebesgue-Integral ist ein positives lineares Funktional auf dem $\mathbb{C}$–Vektorraum $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, und es gilt*

1. $\left|\int_{\mathbb{R}^n} f\, dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f|\, dx = \|f\|_1 \qquad (f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n))$

2. Sind $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und ist g beschränkt, dann ist auch $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

Beweis:

- Fangen wir mit der Ungleichung in 1. an: Wegen der Dreiecksungleichung gilt

$$\big|\, |f| - |\varphi_k| \,\big| \le |f - \varphi_k|,$$

also

$$\| \, |f| - |\varphi_k| \, \|_1 \le \|f - \varphi_k\|_1,$$

sodass mit f auch $|f| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ ist, und

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f \, dx \right| = \left| \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k \, dx \right| \le \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_k| \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f| \, dx.$$

Weiter müssen wir noch die zweite Identität in 1. zeigen, indem wir die Dreiecksungleichung der $\mathcal{L}^1$–Halbnorm in der Form

$$\big|\, \|\varphi_k\|_1 - \|f\|_1 \,\big| \le \|\varphi_k - f\|_1$$

anwenden. Die rechte Seite geht für $k \to \infty$ gegen Null, also ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f| \, dx = \lim_{k\to\infty} \mathcal{I}_n(|\varphi_k|) = \lim_{k\to\infty} \|\varphi_k\|_1 = \|f\|_1.$$

Dabei wurde $\mathcal{I}(|\varphi_k|) = \||\varphi_k|\|_1 = \|\varphi_k\|_1$ benutzt, siehe Fußnote 6.

- Dass $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ überhaupt ein linearer Raum ist, sehen wir dadurch, dass wir für $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ die approximierenden Treppenfunktionen addieren können, um $f + g$ zu approximieren; analog multipliziert man die φ_k mit $\lambda \in \mathbb{C}$, um λf zu approximieren.

  Linearität des Lebesgue-Integrals ergibt sich ebenso wie seine Positivität aus den in Satz 1.4 gezeigten Eigenschaften von $\mathcal{I}_n$.

- Beweis von 2. Sei $M_g > 0$ eine obere Schranke für $|g|$, und für $\varepsilon > 0$ die f approximierende Treppenfunktion $\varphi \in \mathcal{T}_n$ so gewählt, dass $\|f - \varphi\|_1 \le \frac{\varepsilon}{2M_g}$. Ist nun $M_\varphi > 0$ eine obere Schranke für $|\varphi|$, dann wird $\gamma \in \mathcal{T}_n$ so gewählt, dass $\|g - \gamma\|_1 \le \frac{\varepsilon}{2M_\varphi}$. Es folgt für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$|f(x)g(x) - \varphi(x)\gamma(x)| \le |f(x) - \varphi(x)| \, |g(x)| + |\varphi(x)| \, |g(x) - \gamma(x)|,$$

also

$$\begin{array}{rcccccl} \|fg - \varphi\gamma\|_1 & \le & M_g \|f - \varphi\|_1 & + & M_\varphi \|g - \gamma\|_1 & & \\ & \le & \frac{\varepsilon}{2} & + & \frac{\varepsilon}{2} & = & \varepsilon. \end{array}$$

Damit approximiert $\varphi\gamma \in \mathcal{T}_n$ das Produkt von f und g. □

Da erstere auch auf Teilintervallen definiert sein können, müssen wir zunächst das Lebesgue-Integral solcher Funktionen definieren.

1.9 Definition

1. *Für $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : A \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ heißt*

$$f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \cup \{\infty\} \quad , \quad x \mapsto \begin{cases} f(x) & , \quad x \in A \\ 0 & , \quad x \in \mathbb{R}^n \backslash A \end{cases}$$

   die **triviale Fortsetzung** *von f.*

2. *f heißt* **über A integrierbar**, *wenn $f_A \in \tilde{\mathcal{L}}^1(\mathbb{R}^n)$.*
   Dann heißt $\int_A f\,dx := \int_{\mathbb{R}^n} f_A\,dx$ das **Lebesgue-Integral** *von f, und $\|f\|_{1,A} := \|f_A\|_1$ seine 1-***Norm**.

3. *Die Menge der über A Lebesgue-integrierbaren Funktionen $f : A \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ wird mit $\tilde{\mathcal{L}}^1(A)$ bezeichnet, die der über A Lebesgue-integrierbaren Funktionen $f : A \to \mathbb{C}$ mit $\mathcal{L}^1(A)$.*

1.10 Bemerkungen

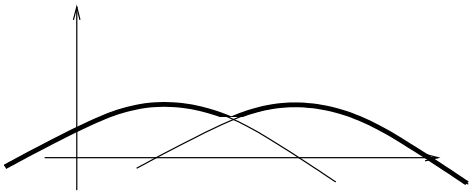
1. Die Existenz von $\int_A f\,dx$ hängt nicht nur von der Regularität von f, sondern auch von A ab. Insbesondere sind nicht alle $A \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar. Noch nicht einmal für alle beschränkten A existiert das Maß $\lambda(A) = \int \mathbb{1}_A\,dx$.

2. Satz 1.8 sagt uns unter anderem, dass wir, wenn wir *komplexwertige* Funktionen f integrieren wollen, uns auf die getrennte Integration von Real– und Imaginärteil von f zurückziehen können (dies folgt aus der Linearität des Lebesgue-Integrals).

3. Für reellwertige $f, g \in \tilde{\mathcal{L}}^1(\mathbb{R}^n)$ sind Maximum bzw. Minimum der beiden Funktionen wegen Satz 1.8

$$\max(f,g) = \tfrac{1}{2}(f + g + |f - g|) \quad , \quad \min(f,g) = \tfrac{1}{2}(f + g - |f - g|)$$

   in $\tilde{\mathcal{L}}^1(\mathbb{R}^n)$. Daher können wir uns auf die Integration *nichtnegativer* Funktionen beschränken:



Mit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ sind Positivteil $f^+ = \max(f, 0)$ und Negativteil $f^- = \max(-f, 0)$ von f in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, und $f^\pm \geq 0$. Aus $f = f^+ - f^-$ folgt also

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^+\,dx - \int_{\mathbb{R}^n} f^-\,dx.$$

Nach Einführung des Lebesgue-Integrals haben wir in Satz 1.8 erste Rechenregeln für seine Auswertung kennen gelernt. Wir sind aber noch nicht in der Lage, das Lebesgue-Integral in relevanten Anwendungen auszurechnen. Im Folgenden werden die dazu notwendigen Sätze bereitgestellt.

Die triviale Fortsetzung $f_{[a,b]} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ einer Riemann-integrierbaren Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist Lebesgue-integrierbar. Aus der Art der Approximation von $f_{[a,b]}$ durch Treppenfunktionen folgt dann sofort, dass das Lebesgue-Integral von $f_{[a,b]}$ gleich dem Riemann-Integral von f ist.
Allgemeiner gilt:

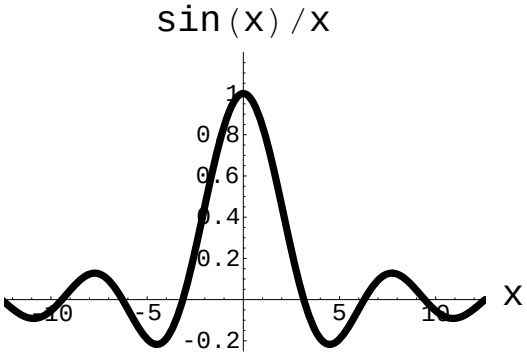
1.11 Satz *Ist die auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definierte Funktion $f : I \to \mathbb{C}$ absolut[7] Riemann-integrierbar, dann ist f auch Lebesgue-integrierbar und die Werte beider Integrale sind gleich.*

1.12 Bemerkungen

1. Die Voraussetzung des Satzes ist z.B. für stetige oder monotone Funktionen auf kompakten Intervallen erfüllt.

2. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$
   ist nach de l'Hospital stetig, und ihr uneigentliches Riemann-Integral existiert[8] (mit $\int_{-\infty}^{\infty} f\,dx = \pi$).

   Aber f ist nicht absolut Riemann-integrierbar, und es gilt auch $f \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, die Funktion ist nicht Lebesgue-integrierbar. Allerdings existiert der Limes der Lebesgue-Integrale der Funktionen $f \cdot \mathbb{1}_{[-c,c]}$ und gleicht dem uneigentlichen Riemann-Integral von f. $\diamond$



[7] d.h. die Restriktionen $f\restriction_J$ auf kompakte Teilintervalle $J \subseteq I$ sind Riemann-integrierbar und das uneigentliche Riemann-Integral von $|f|$ existiert, siehe z.B. Definition 1.1 der *Analysis II*, erhältlich unter www.math.fau.de/knauf.

[8] Einen Beweis findet man in Beispiel 1.5 der *Analysis II*.

1.13 Zur Geschichte (Lebesgue-Maß)

'Man kann auch sagen, dass man sich bei dem Vorgehen von Riemann verhält wie ein Kaufmann ohne System, der Geldstücke und Banknoten zählt in der zufälligen Reihenfolge, wie er sie in die Hand bekommt; während wir vorgehen wie ein umsichtiger Kaufmann, der sagt:
Ich habe $m(E_1)$ *Münzen zu einer Krone, macht* $1 \cdot m(E_1)$,
Ich habe $m(E_2)$ *Münzen zu einer Krone, macht* $2 \cdot m(E_2)$,
Ich habe $m(E_5)$ *Münzen zu einer Krone, macht* $5 \cdot m(E_5)$,
usw., ich habe also insgesamt $S = 1 \cdot m(E_1) + 2 \cdot m(E_2) + 5 \cdot m(E_5) + \ldots$.
Die beiden Verfahren führen sicher den Kaufmann zum gleichen Resultat, weil er – wie reich er auch sei – nur eine endliche Anzahl von Banknoten zu zählen hat; aber für uns, die wir unendlich viele Indivisiblen zu addieren haben, ist der Unterschied zwischen den beiden Vorgehensweisen wesentlich.' H. Lebesgue, 1926, zitiert nach ELSTRODT [El, Seite 85]. ◇

1.14 Satz *Es sei* $f \in C(A)$ *beschränkt und* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *kompakt bzw.* A *offen und beschränkt. Dann ist* $f \in \mathcal{L}^1(A)$.

Beweis: Gemäß den Bemerkungen 1.10 können wir $f \geq 0$ annehmen.

1. Wir betrachten zunächst den Fall einer *offenen beschränkten* Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ können wir den $\mathbb{R}^n$ als disjunkte Vereinigung der "halboffenen Würfel" mit Kantenlänge 2^{-k}

   $$W_k(a) := \left\{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in \left[2^{-k}a_i, 2^{-k}(a_i+1)\right)\right\} \qquad (a \in \mathbb{Z}^n)$$

   darstellen, und sie sind in der Form

   $$W_k(a) = \dot{\bigcup}_{b \in \mathbb{Z}^n : b_i \in \{2a_i, 2a_i+1\}} W_{k+1}(b) \qquad (k \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{Z}^n) \tag{1.8}$$

   ineinander geschachtelt. Wir setzen nun

   $$\varphi_k := \sum_{a \in \mathbb{Z}^n} c_{k,a} \mathbb{1}_{W_k(a)} \qquad (k \in \mathbb{N}) \tag{1.9}$$

   mit $c_{k,a} := \inf f_A\restriction_{W_k(a)}$, wobei f_A die triviale Fortsetzung von f bezeichnet.

   Wegen der Beschränktheit von f sind die $c_{k,a} \in [0, \infty)$. Wegen der Beschränktheit von $A \subseteq \mathbb{R}^n$ sind für jedes k nur endlich viele Koeffizienten $c_{k,a}$ ungleich Null. Also sind die φ_k Treppenfunktionen, mit $\varphi_k \leq f_A$ und $\varphi_k\restriction_{\mathbb{R}^n - A} = 0$.

   Andererseits gilt wegen (1.8) $\varphi_{k+1} \geq \varphi_k$. Da A offen ist, gibt es für jeden Punkt $x \in A$ ein $k \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{Z}^n$ mit $x \in W_k(a) \subseteq A$. Wegen (1.8) und der Stetigkeit von f (Vorsicht: f_A ist i.A. unstetig!) ist damit

   $$\lim_{k \to \infty} \varphi_k(x) = f_A(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Also folgt aus der verallgemeinerten Dreiecksungleichung (1.7) für alle k

$$\begin{aligned}\|f_A - \varphi_k\|_1 &= \left\|\sum_{m=k}^{\infty}(\varphi_{m+1}-\varphi_m)\right\|_1 \le \sum_{m=k}^{\infty}\|\varphi_{m+1}-\varphi_m\|_1\\ &= \sum_{m=k}^{\infty}\mathcal{I}_n(|\varphi_{m+1}-\varphi_m|)\\ &= \sum_{m=k}^{\infty}\mathcal{I}_n(\varphi_{m+1}-\varphi_m) = \sum_{m=k}^{\infty}(\mathcal{I}_n(\varphi_{m+1})-\mathcal{I}_n(\varphi_m)),\end{aligned}$$

was für $k \to \infty$ gegen Null konvergiert[9]. Also ist $f \in \mathcal{L}^1(A)$.

2. Ist dagegen $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *kompakt*, dann existiert nach dem Fortsetzungssatz von Tietze[10] eine stetige Fortsetzung $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ von f. Ist nun $k > 0$ so gewählt, dass der Würfel $W := (-k, k)^n$ das Kompaktum A beinhaltet, dann ist $\tilde{f}\restriction_W$ und auch $\tilde{f}\restriction_{W-A}$ nach Teil 1 des Beweises integrabel, also auch die triviale Fortsetzung $f_A = \tilde{f}\cdot \mathbb{1}_W - \tilde{f}\cdot\mathbb{1}_{W-A}$. □

1.3 Der Satz von Fubini (stetige Version)

Zur praktischen Durchführung der Integration führen wir sie auf die eindimensionale Integration zurück, wie wir das in Satz 1.4 schon für Treppenfunktionen getan haben. Allgemeiner zerlegen wir den $\mathbb{R}^n$ in das Produkt $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$.

1.15 Satz (Fubini)
*Es sei $f \in C(A)$ beschränkt und $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt bzw. A offen und beschränkt. Für alle $p \in \{1, \dots, n-1\}$, $m := n - p$ ist dann für den y-***Schnitt*** *von A*

$$A_y := \{x \in \mathbb{R}^m \mid (x, y) \in A\} \text{ und } f_y : A_y \to \mathbb{C}\ ,\ f_y(x) := f(x, y) \qquad (y \in \mathbb{R}^p)$$

$f_y \in \mathcal{L}^1(A_y)$, und es gilt

$$\int_A f(z)\,dz = \int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{A_y} f(x,y)\,dx\right)dy. \tag{1.10}$$

[9] Diese Argumentation wird später im **Satz von Beppo Levi** (Satz 2.11) auf monoton wachsende Folgen von Funktionen $f_k \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} f_k\,dx \le C$ und ihren punktweisen Limes f verallgemeinert, der dann ebenfalls integrabel ist.

[10] **Fortsetzungssatz von Tietze:** Ist A eine abgeschlossene Teilmenge eines metrischen Raumes X und $f \in C(A)$, dann existiert ein $\tilde{f} \in C(X)$ mit $\tilde{f}\restriction_A = f$. Beweis unter Benutzung von $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x) := f(x)$ für $x \in A$, $\tilde{f}(x) := \inf_{y\in A}(f(y) + \frac{d(x,y)}{d(x,A)} - 1$ sonst.
Beweis im Topologie-Skript unter noch schwächeren Voraussetzungen an den topologischen Raum X.

Beweis: Die Bedingungen an f und A sind die gleichen wie die im Satz 1.14. Wir können auch wieder o.B.d.A. $f \geq 0$ voraussetzen.

1. Sei zunächst $A \subseteq \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ beschränkt und *offen*.
   • Also ist $A_y \subseteq \mathbb{R}^m$ ebenfalls offen. Von den Treppenfunktionen φ_k aus (1.9) erben die $\varphi_{k,y} := \varphi_k \restriction_{\mathbb{R}^m \times \{y\}}$ die Eigenschaften

$$\varphi_{k,y} \in \mathcal{T}_m \quad , \quad \varphi_{k,y} \leq \varphi_{k+1,y} \leq \ldots \leq f_y \qquad (y \in \mathbb{R}^p) \tag{1.11}$$

   und

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_{k,y}(x) = f_y(x) \qquad (y \in \mathbb{R}^p, x \in \mathbb{R}^m). \tag{1.12}$$

   Mit der gleichen Argumentation wie im Beweis von Satz 1.14 gilt daher $\|f_y - \varphi_{k,y}\|_1 \overset{k\to\infty}{\to} 0$, also mit den Treppenfunktionen

$$\Phi_k \in \mathcal{T}_p \quad , \quad \Phi_k(y) := \int_{\mathbb{R}^m} \varphi_{k,y}\, dx$$

$$f_y \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m) \quad \text{und} \quad F(y) := \int_{A_y} f_y(x)\, dx = \lim_{k\to\infty} \Phi_k(y) \qquad (y \in \mathbb{R}^p).$$

   • Die $\Phi_k \in \mathcal{T}_p$ haben wegen (1.11) und (1.12) die Eigenschaften

$$\Phi_k \leq \Phi_{k+1} \leq \ldots \leq F \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} \Phi_k(y) = F(y)$$

   Daher gilt wieder $\|F - \Phi_k\|_1 \overset{k\to\infty}{\to} 0$, also

$$F \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^p) \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}^p} F\, dy = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^p} \Phi_k\, dy.$$

   • Der Satz von Fubini für Treppenfunktionen (Satz 1.4, Teil 3) besagt

$$\int_{\mathbb{R}^p} \Phi_k\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k\, dz.$$

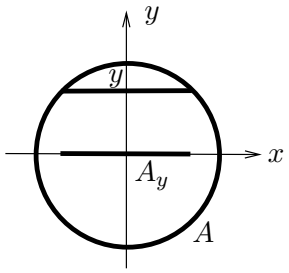
   Nach Satz 1.14 gilt $\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k\, dz = \int_{\mathbb{R}^n} f(z)\, dz$.
   Zusammen zeigt das die Richtigkeit von (1.10):

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f\, dz &= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k\, dz = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^p} \Phi_k\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^p} F\, dy = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{A_y} f_y(x)\, dx \right) dy. \end{aligned}$$

2. Ist dagegen $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, dann betrachten wir wieder einen A enthaltenden offenen Würfel W und wenden die obige Aussage auf eine stetige Fortsetzung $\tilde{f}$ von f auf $\mathbb{R}^n$ an, indem wir $\tilde{f}$ über W bzw. $W - A$ integrieren und die Differenz der Integrale bilden. □

1.16 Beispiel Kreisscheibe $A := \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \|z\| \leq R\}$ vom Radius R, $f := \mathbb{1}$, also $f_A = \mathbb{1}_A$.

Für $p = 1$ ergibt sich $A_y = \begin{cases} \left[-\sqrt{R^2 - y^2}, \sqrt{R^2 - y^2}\right] & , |y| \leq R \\ \emptyset & , |y| > R \end{cases}$.



$$\int_A f(z)\,dz = \int_{\mathbb{R}} \int_{A_y} 1\,dx\,dy = \int_{[-R,R]} 2\sqrt{R^2 - y^2}\,dy = \pi R^2.$$

Eigentlich haben wir im letzten Beispiel die Fläche der Kreisscheibe A gemessen. Allgemein definieren wir:

1.17 Definition *$A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt* **(Lebesgue–) messbar**, *wenn $\mathbb{1}_A \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. In diesem Fall heißt*

$$\lambda^n(A) := \int_A dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A\,dx \ \in [0, \infty)$$

das n–dimensionale **Lebesgue-Maß** *(oder* **Volumen***) von A.*

1.18 Bemerkung (Verallgemeinerung von Definition 1.17)
Nach dieser Definition haben alle Lebesgue–messbaren Mengen endliches Maß. Dies ist vielleicht naheliegend, aber von Standpunkt der *Maßtheorie* aus etwas unbefriedigend.

Diese versteht unter einem *Maß* μ auf einer Menge M eine Abbildung

$$\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$$

mit einem geeigneten Mengensystem $\mathcal{M} \subseteq 2^M$, einer sogenannten *$\sigma$-Algebra* [11]. Es ist nach Definition $\mu(\emptyset) = 0$, und für disjunkte $A_k \in \mathcal{M}$ $(k \in \mathbb{N})$ ist μ dabei

[11] **Definition:** • *Eine nichtleere Familie $\mathcal{M}$ von Teilmengen von M heißt* **Algebra**, *wenn mit $A, B \in \mathcal{M}$ auch $M \setminus A$, $A \cap B$ und $A \cup B \in \mathcal{M}$ sind.*
• *$\mathcal{M}$ heißt σ–***Algebra**, *wenn zusätzlich gilt:* $(\forall n \in \mathbb{N} : A_n \in \mathcal{M}) \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

σ-additiv, d.h.

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Der Vorteil, den Wert $\mu(A) = \infty$ zuzulassen, liegt dabei in der einfacheren Struktur des Mengensystems $\mathcal{M}$.

Im Fall des Lebesgue–Maßes folgt aus der σ-Additivität $\lambda^n(\mathbb{R}^n) = \infty$, denn der $\mathbb{R}^n$ ist disjunkte Vereinigung abzählbar vieler Würfel.

Von Def. 1.17 kommen wir zu der maßtheoretischen Definition der Meßbarkeit, indem wir diejenigen Mengen hinzunehmen, die durch die in einer σ–Algebra erlaubten Operationen von Komplementbildung und abzählbarer Vereinigung aus den Def. 1.17 erfüllenden Mengen gebildet werden können. ◇

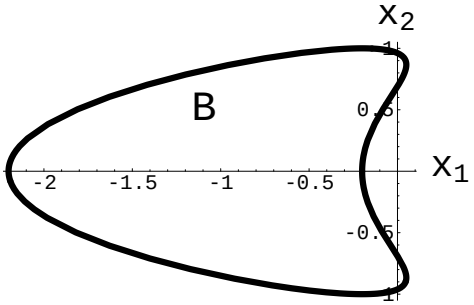
Aus den Sätzen 1.14 und 1.15 folgt unmittelbar das sog. *Prinzip von Cavalieri*:

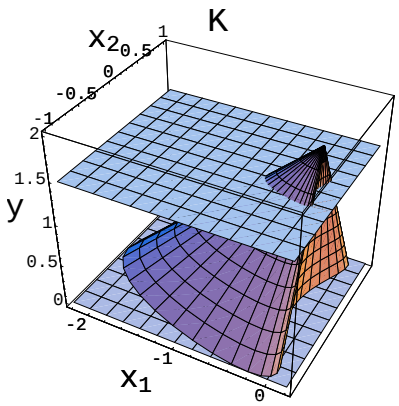
1.19 Korollar *Beschränkte offene sowie kompakte Mengen $A \subseteq \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ sind messbar, und $\lambda^n(A) = \int_{\mathbb{R}^p} \lambda^m(A_y)\, dy$ für $A_y = \{x \in \mathbb{R}^m \mid (x, y) \in A\}$.*

1.20 Beispiel (Kegelvolumen) Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ kompakt, und für $h > 0$

$$K := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times [0, h] \mid x \in \left(1 - \frac{y}{h}\right) B\right\}$$

der *Kegel* mit *Basis* B und *Höhe* h.





Es ist also $A_y = \ell B$ mit $\ell := 1 - y/h$ die um den Faktor $\ell \in [0, 1]$ skalierte (und verschobene) Basis. Als Bild des Kompaktums $B \times [0, h]$ unter der stetigen Abbildung $(x, y) \mapsto ((1 - y/h)x, y)$ ist K kompakt, also nach Kor. 1.19 messbar.

Es ist naheliegend (und wird noch besprochen), dass

$$\lambda^{n-1}(\ell B) = \ell^{n-1} \lambda^{n-1}(B)$$

gilt, also

$$\begin{aligned}\lambda^n(K) &= \int_{[0,h]} \lambda^{n-1}(A_y)\,dy = \int_{[0,h]} (1-y/h)^{n-1}\lambda^{n-1}(B)\,dy \\ &= \lambda^{n-1}(B)\cdot \frac{h(1-y/h)^n}{n}\Big|_h^0 = \lambda^{n-1}(B)\cdot\frac{h}{n}.\end{aligned}$$

In Anwendungen der Lebesgue-Integration über dem $\mathbb{R}^n$ möchte man gerne von Gebieten niedrigerer Dimension absehen können:

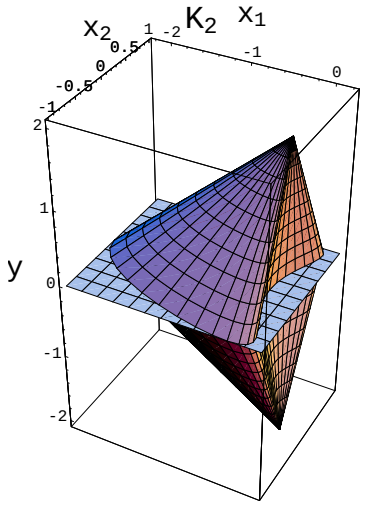
1.21 Beispiel (Volumen des Doppelkegels)
Für $B \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ kompakt und $h > 0$ sei

$$K_2 := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times [-h,h] \;\middle|\; x \in \left(1 - \frac{|y|}{h}\right) B \right\}.$$

Wir können K_2 als Vereinigung von K und der Spiegelung von K an der Hyperebene $y = 0$ in $\mathbb{R}^n$ darstellen. K und sein Spiegelbild haben Maß

$$\lambda^n(K) = \lambda^{n-1}(B)\frac{h}{n}.$$

Es liegt also nahe zu vermuten, dass K_2 das doppelte Volumen besitzt. Allerdings treffen sich die beiden einfachen Kegel in ihrer Basis B, und wir würden gerne argumentieren, dass diese Schnittmenge n–dimensionales Maß 0 besitzt.



◇

In diesem Beispiel haben wir folgende Rechenregeln angewandt:

1.22 Satz *Sind $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar, dann sind*

1. *$A \cup B$ und $A \cap B$ messbar, und $\lambda^n(A \cup B) = \lambda^n(A) + \lambda^n(B) - \lambda^n(A \cap B)$.*
2. *Für $A \subseteq B$ gilt $\lambda^n(A) \leq \lambda^n(B)$.*

Beweis: Wir benutzen Linearität und Positivität des Lebesgue-Integrals:

1. $\lambda^n(A \cup B) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{A\cup B}\,dx$, und $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$
2. $\mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$.

□

1.4 Nullmengen

Wir wollen jetzt Kriterien dafür entwickeln, dass eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ Maß 0 besitzt.

1.23 Definition $N \subseteq \mathbb{R}^n$ *heißt* **(Lebesgue–) Nullmenge** *im* $\mathbb{R}^n$*, wenn* N *messbar ist, und* $\lambda^n(N) = 0$.

Ist nun eine Hyperebene eine Nullmenge? Zwar ist sie "unendlich dünn", aber sie hat doch auch "unendliche Größe".

1.24 Satz

1. $N \subseteq \mathbb{R}^n$ *ist genau dann eine Nullmenge, wenn* $\|\mathbb{1}_N\|_1 = 0$.
2. *Teilmengen von Nullmengen sind Nullmengen.*
3. *Die Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen ist eine Nullmenge.*

Beweis:

1. "$\Longrightarrow$": Wir wissen schon (Satz 1.8), dass $\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_N dx = \|\mathbb{1}_N\|_1$, wenn $\mathbb{1}_N \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.
   "$\Longleftarrow$": Da für die konstante Folge von verschwindenden Treppenfunktionen $\varphi_k = 0$ auch $\|\mathbb{1}_N - \varphi_k\|_1 = 0$ ist, ist $\mathbb{1}_N$ integrierbar, N also messbar und hat daher Maß 0.
2. $M \subseteq N$ impliziert $\mathbb{1}_M \leq \mathbb{1}_N$, also $\lambda^n(M) \leq \lambda^n(N) := 0$
3. Für $N = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$ ist $\mathbb{1}_N \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{N_k}$. Mit $\lambda^n(A) = \|\mathbb{1}_A\|_1$ folgt unter Benutzung der verallgemeinerten Dreiecksungleichung (1.7)

$$\lambda^n(N) = \|\mathbb{1}_N\|_1 \leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{N_k} \right\|_1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|\mathbb{1}_{N_k}\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^n(N_k) = 0. \qquad \square$$

Natürlich braucht eine *überabzählbare* Vereinigung von Nullmengen keine Nullmenge zu sein.
Beispielsweise ist $v_1(\{x\}) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, aber $\lambda^n\left(\bigcup_{x\in[0,1]}\{x\}\right) = 1$.

1.25 Definition *Eine Eigenschaft, die Punkten des* $\mathbb{R}^n$ *zukommen kann, gilt* **fast überall**, *falls die Teilmenge von Punkten des* $\mathbb{R}^n$*, für die die Eigenschaft nicht gilt, eine Nullmenge ist.*

Formalisiert ist die Eigenschaft eine Aussageform $A : \mathbb{R}^n \to \{w, f\}$ mit den Werten 'wahr' und 'falsch'. A gilt fast überall, falls $\lambda^n(A^{-1}(f)) = 0$.

1.26 Beispiel Die Eigenschaft "$x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$" gilt in $\mathbb{R}$ fast überall, d.h.

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}\, dx = 0.$$

Mit anderen Worten: Die rationalen Zahlen bilden eine Nullmenge.
Beweis: Dies folgt aus Satz 1.24.3, denn einelementige Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind Nullmengen, und $\mathbb{Q}$ ist abzählbar. Trotzdem ist es interessant, einen Beweis unter Verwendung von Hüllreihen zu sehen:

• Es sei zunächst $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1)}$. Wir weisen konkret nach, dass $\int_{\mathbb{R}} f\, dx = 0$, indem wir f durch die Nullfunktion $0 \in \mathcal{T}_n$ approximieren. Als Hüllreihen für f nehmen wir die

$$\varphi_\varepsilon := \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\left(\frac{k}{n}-\frac{\varepsilon}{n^3}, \frac{k}{n}+\frac{\varepsilon}{n^3}\right)} \qquad (\varepsilon > 0),$$

die für alle rationalen Zahlen $\frac{k}{n}$ in $[0,1)$ größergleich 1 sind. Es gilt

$$\mathcal{I}_1(\varphi_\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2\varepsilon}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon}{n^2} = \varepsilon \frac{\pi^2}{3},$$

sodass $\int_{\mathbb{R}} f\, dx = \|f\|_1 \le \lim_{\varepsilon \searrow 0} \mathcal{I}_1(\varphi_\varepsilon) = 0$.

Man beachte, dass die zugehörige offene Überdeckung

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n} - \frac{\varepsilon}{n^3}, \frac{k}{n} + \frac{\varepsilon}{n^3}\right) \quad \text{von} \quad \mathbb{Q} \cap [0,1)$$

die meisten irrationalen Zahlen nicht trifft, wenn ε klein ist.
• Nach Satz 1.24 ist damit auch $\mathbb{Q}$ selbst als abzählbare Vereinigung der Nullmengen $\mathbb{Q} \cap [n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$ eine Nullmenge. □

1.27 Satz *Besitzt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ eine endliche Halbnorm ($\|f\|_1 < \infty$), dann nimmt f den Wert ∞ nur auf einer Nullmenge an.*

Beweis: Setze $N := f^{-1}(\infty) \subseteq \mathbb{R}^n$. Für alle $\varepsilon > 0$ gilt $\mathbb{1}_N \le \varepsilon |f|$, also $\|\mathbb{1}_N\|_1 \le \varepsilon \|f\|_1$. □

1.28 Satz *Es sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ fast überall gleich f. Dann ist $g \in \tilde{\mathcal{L}}^1(\mathbb{R}^n)$ und $\int_{\mathbb{R}^n} g\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f\, dx$.*

Beweis: • Wir können $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ mit Treppenfunktionen $\varphi_k \in \mathcal{T}_n$ approximieren, d.h. $\lim_{k\to\infty} \|f - \varphi_k\|_1 = 0$, und wir wollen zeigen, dass auch gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \|g - \varphi_k\|_1 = 0.$$

• Nun ist $|g - \varphi_k| \le |f - \varphi_k| + U_N \quad (k \in \mathbb{N})$ für

$$N := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq g(x)\} \quad , \quad U_N := \infty \cdot \mathbb{1}_N = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_N.$$

N ist nach Voraussetzung eine Nullmenge. Damit ist nach Satz 1.24

$$\|U_N\|_1 \le \sum_{n=1}^{\infty} \|\mathbb{1}_N\|_1 = 0.$$

Daher folgt

$$\lim_{k\to\infty} \|g - \varphi_k\|_1 \le \lim_{k\to\infty} \| \, |f - \varphi_k| + U_N\|_1 \le \|U_N\|_1 + \lim_{k\to\infty} \| \, f - \varphi_k\|_1 = 0,$$

also auch $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und $\int_{\mathbb{R}^n} g \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f \, dx$. □

In der *Analysis* sieht man an verschiedenen Stellen (z.B. dem lokalen Existenz– und Eindeutigkeitssatz für die Lösungen von Differentialgleichungen, in Kapitel 4.2) den Vorteil des Arbeitens in vollständigen metrischen Räumen. In diesen konvergieren ja alle Cauchy–Folgen. Wir hätten gerne, dass auch der Raum $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ der Lebesgue-integrierbaren Funktionen einen solchen Raum bildet. Nun ist $\|\cdot\|_1$ nur eine Halbnorm. Andererseits gilt der folgende Satz:

1.29 Satz *Für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ gilt*

$$\|f\|_1 = 0 \iff f(x) = 0 \quad \textit{fast überall.}$$

Beweis:
"$\Longleftarrow$": Dies folgt nach Satz 1.28 durch Vergleich mit der Nullabbildung.
"$\Longrightarrow$": Wir beweisen, daß $N := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}$ eine Nullmenge ist. Dazu schreiben wir N in der Form

$$N = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k \quad \text{für} \quad N_k := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)| \ge 1/k\}.$$

Aus $\lambda^n(N_k) = \|\mathbb{1}_{N_k}\|_1 \le \|k\,|f|\|_1 = k\|f\|_1 = 0$ folgt nach Satz 1.24.3 für die abzählbare Vereinigung $\lambda^n(N) = 0$. □

Es liegt also nahe, aus $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ durch Äquivalenzklassenbildung einen neuen Raum zu machen, indem man $f \sim g$ setzt, falls $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq g(x)\}$ eine Nullmenge ist.

1.5 Abbildungen von Nullmengen

Die in (1.1) eingeführten Quader des $\mathbb{R}^n$ sind die Bausteine unser Maßtheorie. Um das Verhalten von Maßen unter Abbildungen zu untersuchen, sind aber *Würfel*, also Quader gleicher Seitenlänge, praktischer.

1.30 Satz *Für jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert eine abzählbare Menge $(Q_i)_{i\in I}$ von bis auf Nullmengen disjunkten (d.h. $\lambda^n(Q_i \cap Q_j) = 0$ für $i \neq j$) kompakten Würfeln $Q_i \subset U$ mit*

$$U = \bigcup_{i\in I} Q_i.$$

Beweis: Für $k \in \mathbb{N},\ a \in \mathbb{Z}^n$ ist $Q_{k,a}$ der kompakte Würfel

$$Q_{k,a} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in [2^{-k}a_i, 2^{-k}(a_i + 1)]\}$$

der Kantenlänge 2^{-k}. Es gilt $\lambda^n(Q_{k,a} \cap Q_{k,a'}) = \delta_{a,a'}2^{-nk}$,

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{a\in\mathbb{Z}^n} Q_{k,a} \quad \text{und} \quad Q_{k,a} = \sum_{\substack{b\in\mathbb{Z}^n \\ b_i\in\{2a_i,2a_i+1\}}} Q_{k+1,b}\,. \tag{1.13}$$

Setzen wir $K_0 := \emptyset$ und induktiv für $\ell \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} I_\ell &:= \{(\ell, a) \mid Q_{\ell,a} \subseteq U \setminus \overset{\circ}{K}_{\ell-1}\}, \\ K_\ell &:= K_{\ell-1} \cup \bigcup_{i\in I_\ell} Q_i, \end{aligned}$$

dann sind die I_ℓ abzählbar. Damit ist auch $I := \bigcup_{\ell\in\mathbb{N}} I_\ell$ abzählbar.
Jeder Punkt $x \in U$ liegt in einem Kompaktum K_ℓ, denn wegen der Offenheit von U und (1.13) gibt es einen Würfel $Q_{k,a}$ mit $x \in Q_{k,a} \subseteq U$. Ist $\ell \in \mathbb{N}$ das kleinste solche k, dann ist auch $Q_{\ell,a} \cap \overset{\circ}{K}_{\ell-1} = \emptyset$. □

1.31 Definition
Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen heißt **lokal lipschitzstetig**, *wenn für jedes Kompaktum $K \subseteq X$ die Restriktion $f\restriction_K$ lipschitzstetig ist.*

1.32 Satz *Alle Abbildungen $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ mit offenem Definitionsbereich $U \subseteq \mathbb{R}^m$ sind lokal lipschitzstetig.*

Beweis: Es reicht aus, dies für die Komponenten f_i von $f = (f_1, \ldots, f_n)$ zu zeigen. Sei also o.B.d.A. $n = 1$. Wäre $f\restriction_K$ nicht lipschitzstetig, dann würde es eine Folge $(x_k, y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k \neq y_k \in K$ und $\lim_{k\to\infty} \frac{|f(x_k)-f(y_k)|}{\|x_k-y_k\|} = \infty$ geben. Da K kompakt ist, können wir die Existenz der Limiten $x := \lim_{k\to\infty} x_k \in K$ und $y := \lim_{k\to\infty} y_k \in K$ annehmen.

• Der Fall $x \neq y$ kann nicht auftreten, denn dann ist

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|f(x_k) - f(y_k)|}{\|x_k - y_k\|} = \frac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|} < \infty.$$

• Der Fall $x = y$ ist ebenfalls unmöglich, denn wegen der Offenheit von U gibt es eine abgeschlossene Vollkugel $B_r(x) \subseteq U$ von positivem Radius r. Wegen der Stetigkeit von Df gilt

$$L := \sup\{\|Df(z)\| \mid z \in B_r(x)\} < \infty.$$

Für große $k \in \mathbb{N}$ sind x_k und y_k in $B_r(x)$, wie auch ihre Verbindungsstrecke S_k. Es gibt also nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ein $\xi_k \in S_k$ mit $f(x_k) - f(y_k) = Df(\xi_k) \cdot (x_k - y_k)$, also $\frac{|f(x_k)-f(y_k)|}{\|x_k-y_k\|} \leq \|Df(\xi_k)\| \leq L$. □

1.33 Satz *Ist $f : U \to \mathbb{R}^n$ (mit $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $m \leq n$) lokal lipschitzstetig und $N \subseteq U$ eine Nullmenge, dann ist $f(N) \subseteq \mathbb{R}^m$ ebenfalls eine Nullmenge.*

Beweis:
• Nach Satz 1.30 können wir U durch abzählbar viele Kompakta K_ℓ ausschöpfen. Für jedes dieser Kompakta K_ℓ ist $N_\ell := N \cap K_\ell$ nach Satz 1.24.2 ebenfalls eine Nullmenge. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine Hüllreihe $\varphi = \sum_{r=1}^{\infty} c_r \mathbb{1}_{Q_r}$ von $2\mathbb{1}_{N_\ell}$ mit $\|\varphi\|_1 < \varepsilon$. φ lässt sich (bezüglich $\|\cdot\|_1$) durch ihre Partialsummen $\sum_{r=1}^{r'} c_r \mathbb{1}_{Q_r}$ approximieren und ist daher in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, mit $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\, dx = \|\varphi\|_1$. Die Menge

$$V := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) > 1\}$$

enthält N_ℓ, denn $\varphi \geq 2\mathbb{1}_{N_\ell}$. Außerdem ist V offen, denn ist $\sum_{r=1}^{r'} c_r \mathbb{1}_{Q_r}(x) > 1$, dann gilt diese Ungleichung auf dem (wegen $r' < \infty$ offenen) Schnitt der x enthaltenden offenen Quader Q_ℓ. Wir können also über V integrieren. Ferner ist

$$\lambda^m(V) \leq \int_V \varphi\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^m} \varphi\, dx < \varepsilon.$$

• Nach Satz 1.30 können wir V durch abzählbar viele bis auf Nullmengen disjunkte Würfel W_r ausschöpfen. Die Vereinigung der Bilder $f(W_r)$ überdeckt damit $f(V)$, also auch $f(N_\ell)$. Auch wenn diese Würfel nicht ganz in K_n enthalten

sein müssen, können wir o.B.d.A. annehmen, dass für eine geeignete Lipschitz–Konstante L gilt:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\| \qquad (x, y \in W_r, r \in \mathbb{N}).$$

Damit ist das Bild $f(W_r)$ von W_r in einem Würfel $W_r' \subset \mathbb{R}^n$ enthalten, dessen Kantenlängen $L\sqrt{m}$–mal[12] so groß ist wie die Kantenlänge D_r von W_r. Nach Definition der Würfel in Satz 1.30 ist $D_r \leq 1$. Daher gilt mit $c := (L\sqrt{m})^n$

$$\lambda^n(W_r') \leq cD_r^n \leq cD_r^m = c\lambda^m(W_r),$$

denn nach Annahme ist $n \geq m$.

Insgesamt ist für alle $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \|\mathbb{1}_{f(N_\ell)}\|_1 &\leq \|\mathbb{1}_{f(V)}\|_1 \leq \sum_{r=1}^{\infty} \|\mathbb{1}_{f(W_r)}\|_1 \leq \sum_{r=1}^{\infty} \|\mathbb{1}_{W_r'}\|_1 \\ &\leq c\sum_{r=1}^{\infty} \|\mathbb{1}_{W_r}\|_1 = c\|\mathbb{1}_{\cup_{r=1}^{\infty} W_r}\|_1 = c\|\mathbb{1}_V\|_1 \leq c\varepsilon, \end{aligned}$$

also auch $f(N_\ell)$ eine Nullmenge. □

1.34 Bemerkungen (Bilder von Nullmengen)

1. Auf die lokale Lipschitzstetigkeit von f kann nicht verzichtet werden. Es gibt nämlich stetige $f : U \to \mathbb{R}^n$, die Nullmengen auf Mengen von positivem Maß abbilden.

   Ein Beispiel ergibt sich durch Verwendung der Peano-Kurve $c : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ (siehe Beispiel 4.2.3 der *Analysis II*). Diese ist stetig, und ihr Bild $c([0,1]) = [0,1]^2$ hat Lebesgue–Maß 1 in $\mathbb{R}^2$.

   $$\hat{c} : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \quad , \quad \hat{c}\,(x,y) := c(x)$$

   ist stetig, und das Bild der Nullmenge $[0,1] \times \{0\}$ unter $\hat{c}$ besitzt Maß 1.

   Dass hier von einem nicht offenen Intervall $[0,1]$ ausgegangen wurde, ist für das Argument nicht wesentlich.

   Ein weiteres Beispiel ist die so genannte Cantor-Funktion.

2. Für Bilddimensionen $n < m$ wird die Aussage des Satzes ebenfalls falsch, wie man schon durch Betrachtung von linearen Abbildungen $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ sieht.

[12] Der Faktor $\sqrt{m}$ ist das Verhältnis der Länge der Raumdiagonale eines m–dimensionalen Würfels zu seiner Seitenlänge.

Auch wenn unter der Projektion $\pi_2 : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p,\ (x,y) \mapsto y$ Nullmengen N im Allgemeinen nicht auf Nullmengen abgebildet werden, sind die Schnitte von N mit den Fasern $\pi_2^{-1}(y)$ im Allgemeinen λ^m–Nullmengen:

1.35 Satz *Für $m,p \in \mathbb{N},\ n := m+p$, eine Nullmenge $N^{(n)} \subseteq \mathbb{R}^n$ und*

$$N_y^{(m)} := \{x \in \mathbb{R}^m \mid (x,y) \in N^{(n)}\} \qquad (y \in \mathbb{R}^p)$$

ist $N^{(p)} := \{y \in \mathbb{R}^p \mid N_y^{(m)}$ ist keine Nullmenge in $\mathbb{R}^m\}$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}^p$.

Beweis: Wie im Beweis des Satzes 1.33 können wir für alle $\varepsilon > 0$ die Nullmenge $N^{(n)}$ durch abzählbar viele Quader $Q_k \subseteq \mathbb{R}^n$ überdecken mit $\sum_{k=1}^\infty \lambda^n(Q_k) < \varepsilon$. Ähnlich wie π_2 bezeichnen wir mit $\pi_1 : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m,\ (x,y) \mapsto x$ die Projektion auf den ersten Faktor. Da die Quader achsenparallel sind, sind ihre Projektionen ebenfalls Quader. Wegen $\mathbb{1}_{N^{(n)}} \le \sum_{k=1}^\infty \mathbb{1}_{Q_k}$ gilt auch

$$\mathbb{1}_{N_y^{(m)}} \le \varphi_y := \sum_{k=1}^\infty c_k(y)\mathbb{1}_{\pi_1(Q_k)} \quad \text{mit} \quad c_k(y) := \mathbb{1}_{\pi_2(Q_k)}(y).$$

Es ist

$$N^{(p)} = \{y \in \mathbb{R}^p \mid f(y) > 0\} \quad \text{für} \quad f(y) := \|\mathbb{1}_{N_y^{(m)}}\|_1,$$

also $f(y) \le \|\varphi_y\|_1 = \sum_{k=1}^\infty c_k(y)\lambda^m(\pi_1(Q_k))$ und damit

$$\|f\|_1 \le \sum_{k=1}^\infty \lambda^p(\pi_2(Q_k)) \cdot \lambda^m(\pi_1(Q_k)) = \sum_{k=1}^\infty \lambda^n(Q_k) < \varepsilon.$$

Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt, ist $\|f\|_1 = 0$, also $N^{(p)}$ nach Satz 1.29 eine Nullmenge in $\mathbb{R}^p$. □

2 Sätze und Rechenregeln der Lebesgue-Integration

2.1 Der Banach–Raum $L^1(\mathbb{R}^n)$

Wir rekapitulieren den bisherigen Stand der Integrationstheorie:

Wir haben für eine große Klasse von Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ das sogenannte Lebesgue-Integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx$$

eingeführt, und zwar zunächst auf dem Raum $\mathcal{T}_n$ der Treppenfunktionen, und dann für den Raum $\tilde{\mathcal{L}}^1(\mathbb{R}^n)$ der sogenannten Lebesgue-integrierbaren Funktionen f. Dies waren solche Funktionen, die sich durch Folgen $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen $\varphi_k \in \mathcal{T}^n$ approximieren ließen im Sinn von

$$\lim_{n\to\infty} \|f - \varphi_k\|_1 = 0.$$

Dabei ist $\|\cdot\|_1$ die sogenannte $\mathcal{L}^1$–Halbnorm, definiert über das Infimum der Integrale von Hüllreihen. Ist dies der Fall, dann nimmt f den Wert ∞ nur auf einer Nullmenge an, und eine Abänderung der Funktion auf einer solchen Menge beeinflusst den Wert des Integrals nicht. Wir betrachten daher im Weiteren den $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \subseteq \tilde{\mathcal{L}}^1(\mathbb{R}^n)$ der Lebesgue-integrierbaren $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$. Nun unterscheidet sich die Abbildung

$$\|\cdot\|_1 : \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty)$$

von einer Norm dadurch, dass es von der Nullfunktion verschiedene Funktionen $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\|f\|_1 = 0$ gibt. Ein Beispiel bildet die charakteristische Funktion einer Hyperfläche.

Normen sind ausgesprochen nützlich bei allen Konvergenzfragen. Wir hatten also gern eine Norm auf dem Raum der Lebesgue-integrierbaren Funktionen.

Hier hilft der Begriff der Nullmenge. Das ist eine Teilmenge des $N \subseteq \mathbb{R}^n$ vom Lebesgue-Maß $\lambda^n(N)$ Null oder, äquivalent, mit verschwindender Halbnorm

$$\|\mathbb{1}_N\|_1 = 0$$

der charakteristischen Funktion.

2.1 Lemma $\mathcal{N} := \{f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \mid \|f\|_1 = 0\}$ *ist ein Unterraum von* $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

Beweis:
• Die Nullfunktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $f(x) = 0$ ist in $\mathcal{N}$ (Schreibweise: $0 \in \mathcal{N}$).

• Sind $f, g \in \mathcal{N}$, dann gilt nach der Dreiecksungleichung
$\|f + g\|_1 \le \|f\|_1 + \|g\|_1 = 0$, also auch $f + g \in \mathcal{N}$.

• Ist $f \in \mathcal{N}$ und $c \in \mathbb{C}$, dann ist $\|cf\|_1 = |c|\,\|f\|_1 = 0$, also $cf \in \mathcal{N}$. □

Wir nennen nun zwei Funktionen $g_1, g_2 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ *äquivalent*, wenn sie sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden, oder gleichbedeutend, wenn $g_1 - g_2 \in \mathcal{N}$.

2.2 Definition *Es sei* $L^1(\mathbb{R}^n)$ *der* $\mathbb{C}$*-Vektorraum*

$$L^1(\mathbb{R}^n) := \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)/\mathcal{N} \quad \textit{mit} \quad \|g + \mathcal{N}\|_1 := \|g\|_1.$$

Wir haben nun eine *Norm* auf diesem Faktorraum erklärt, dessen Elemente Äquivalenzklassen von Funktionen der Form $g + \mathcal{N}$ sind, denn der Wert der $\mathcal{L}^1$–Halbnorm hängt nicht vom Repräsentanten der Äquivalenzklasse ab:

$$\|g_1\|_1 = \|g_2\|_1 \quad \text{für} \quad g_1, g_2 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \quad \text{und} \quad g_1 - g_2 \in \mathcal{N}.$$

Außerdem ist nach Definition von $\mathcal{N}$ die Halbnorm genau auf der Äquivalenzklasse $\mathcal{N}$ der Nullfunktion $0 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ gleich Null.

2.3 Bemerkung (Die Elemente des Vektorraums $L^1(\mathbb{R}^n)$)
Der in der Analysis so wesentliche Raum $L^1(\mathbb{R}^n)$ besteht nun nicht mehr aus Funktionen, sondern aus Äquivalenzklassen. Für solche Äquivalenzklassen $\tilde{f} := f + \mathcal{N} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist aber der Ausdruck $\tilde{f}(x)$ undefiniert (wir können $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ ja an abzählbar vielen Stellen abändern, ohne $f + \mathcal{N}$ zu verlassen).

Immerhin, in jeder Äquivalenzklasse $f + \mathcal{N}$ gibt es höchstens eine stetige Funktion, und nichts hindert uns dann daran, gegebenenfalls mit diesem Repräsentanten zu arbeiten.

Die Elemente von $L^1(\mathbb{R}^n)$ als Funktionen zu bezeichnen ist ein schlampiger aber üblicher Sprachgebrauch, und wir wollen hier mit der Tradition nicht brechen. ◇

Wir haben also jetzt aus $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ den normierten Raum

$$\big(L^1(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_1\big)$$

konstruiert, und das Lebesgue-Integral induziert ein positives lineares Funktional auf $L^1(\mathbb{R}^n)$, das wir ebenfalls mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\,dx \equiv \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx \qquad (f \in L^1(\mathbb{R}^n))$$

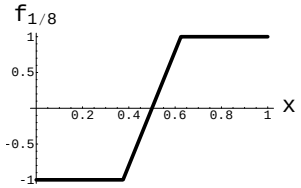
bezeichnen. Die Frage ist nun, ob in $L^1(\mathbb{R}^n)$ Cauchy–Folgen von [Äquivalenzklassen von] Funktionen konvergieren, ob dieser Raum also ein Banach–Raum ist. A priori muss dies nicht so sein:

2.4 Beispiel Es sei $V := C([0,1], \mathbb{C})$ der Vektorraum der stetigen Funktionen auf dem Einheitsintervall, und wir wollen ihn mit der Norm

$$\|f\| := \int_{[0,1]} |f(x)|\,dx \qquad (f \in V)$$

versehen (Auf V ist dies tatsächlich eine Norm, denn es gibt keine von $0 \in V$ verschiedene *stetige* Funktion f mit $\int_{[0,1]} |f(x)|\,dx = 0$.) Es sei für $\varepsilon > 0$

$$f_\varepsilon \in V \quad , \quad f_\varepsilon(x) := \begin{cases} -1 & , \quad x \le \frac{1}{2} - \varepsilon \\ \frac{x-\frac{1}{2}}{\varepsilon} & , \quad |x - \frac{1}{2}| < \varepsilon \\ 1 & , \quad x \ge \frac{1}{2} + \varepsilon \end{cases} .$$



f_ε ist stetig und

$$\|f_\varepsilon - f_{\varepsilon'}\| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad \varepsilon' \in (0, \varepsilon),$$

aber der punktweise Limes f_0 (mit $f_0(x) := \operatorname{sign}(x - \frac{1}{2})$) ist nicht in V, $(V, \|\cdot\|)$ also kein Banach–Raum. ◇

Wir können auch nicht einfach so argumentieren, dass wir schon $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ durch Grenzwertbildung (für Treppenfunktionen) gewonnen haben, denn daraus folgt noch nicht automatisch, dass $L^1(\mathbb{R}^n)$ unter erneuter Grenzwertbildung abgeschlossen ist. Trotzdem gilt:

2.5 Satz (Riesz–Fischer)

1. *$L^1(\mathbb{R}^n)$ ist ein Banach–Raum.*
2. *Ist $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\mathcal{L}^1$–Grenzwert f, dann konvergiert eine geeignete Teilfolge fast überall gegen f.*

2.6 Definition
Obwohl $\|\cdot\| : \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty)$ nur eine Halbnorm ist, spricht man

- *von einer* **Cauchy-Folge** *$(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, falls*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; \forall m, n \ge N(\varepsilon) : \; \|f_m - f_n\|_1 < \varepsilon \, ;$$

- *von* **Konvergenz gegen** *$f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, falls $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$. In Zeichen: $f = \mathcal{L}^1\text{–}\lim_{n\to\infty} f_n$.*

2.7 Bemerkung Folgt nicht die zweite Behauptung aus der ersten? Cauchy–Folgen konvergieren doch immer gegen ihren Grenzwert, soweit dieser existiert! Ja, aber hier geht es nicht um $\mathcal{L}^1$–Konvergenz, d.h. $\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_1 = 0$, sondern um $\lim_{k\to\infty}(f_k(x) - f(x)) = 0$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$! ◇

Beweis: Wir gehen von den Äquivalenzklassen $f_k \in L^1(\mathbb{R}^n)$ zu Repräsentanten in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ über, die wir ebenfalls mit f_k bezeichnen.

Zunächst konstruieren wir eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, gegen die eine geeignete Teilfolge der Cauchy–Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ fast überall konvergiert. Danach zeigen wir, dass f $\mathcal{L}^1$–Grenzwert der Cauchy–Folge ist.

2) Wir können eine Teilfolge $(f_{k_\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$ mit $\|f_k - f_{k_\ell}\|_1 \le 2^{-\ell}$ für $k \ge k_\ell$ auswählen, sodass insbesondere

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \|f_{k_{\ell+1}} - f_{k_\ell}\|_1 \le \sum_{\ell=1}^{\infty} 2^{-\ell} = 1$$

ist. Setzen wir $g_\ell := f_{k_{\ell+1}} - f_{k_\ell}$ und $g := \sum_{\ell=1}^{\infty} |g_\ell|$, dann folgt mit der verallgemeinerten Dreiecksungleichung (1.7)

$$\|g\|_1 \le \sum_{\ell=1}^{\infty} \|g_\ell\|_1 \le 1 < \infty.$$

Nach Satz 1.27 (der Integrabilität nicht voraussetzt!) ist $\mathcal{N} := g^{-1}(\infty) \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge, $\sum_{\ell=1}^{\infty} g_\ell$ konvergiert also fast überall absolut. Daher ist

$$f(x) := \begin{cases} \lim_{\ell\to\infty} f_{k_\ell}(x) & , \quad x \notin \mathcal{N} \\ 0 & , \quad x \in \mathcal{N} \end{cases}$$

wegen

$$\lim_{\ell\to\infty} f_{k_\ell}(x) = f_{k_1}(x) + \sum_{\ell=1}^{\infty} g_\ell(x) \quad \text{für} \quad x \notin \mathcal{N}$$

wohldefiniert, für alle $x \in \mathbb{R}^n$ endlich, und die Teilfolge $(f_{k_\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$ konvergiert fast überall gegen f (nämlich auf $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{N}$).

1) Diese punktweise Konvergenz sagt aber noch nichts darüber aus, dass die f_k (oder auch nur die f_{k_ℓ}) in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ gegen f konvergieren.

Dazu müssen wir ja zeigen, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $k(\varepsilon)$ mit

$$\|f - f_k\|_1 \le \varepsilon \qquad (k \ge k(\varepsilon)) \tag{2.1}$$

gibt. Dazu sei $m = m(\varepsilon)$ so gewählt, dass $2^{2-m} \le \varepsilon$ und $k(\varepsilon) := k_m$. Dann ist

- $\sum_{\ell=m}^{\infty} \|g_\ell\|_1 \le \sum_{\ell=m}^{\infty} 2^{-\ell} = 2^{1-m} \le \frac{\varepsilon}{2}$ und
- $\|f_k - f_{k_m}\|_1 \le 2^{-m} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (k \ge k(\varepsilon))$.

Andererseits lässt sich $f_{k_m} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ durch Treppenfunktionen $\varphi \in \mathcal{T}_n$ beliebig genau (im $\mathcal{L}^1$–Sinn) approximieren, es existiert also ein φ mit

$$\|f_{k_m} - \varphi\|_1 \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Daraus folgt mit der verallgemeinerten Dreiecksungleichung (1.7)

$$\begin{aligned}\|f-\varphi\|_1 &\le \|f-f_{k_m}\|_1+\|f_{k_m}-\varphi\|_1 = \left\|\sum_{\ell=m}^{\infty} g_\ell\right\|_1 + \|f_{k_m}-\varphi\|_1\\ &\le \sum_{\ell=m}^{\infty}\|g_\ell\|_1+\|f_{k_m}-\varphi\|_1 \le \varepsilon,\end{aligned}$$

also $f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. (2.1) zeigen wir mit

$$\|f-f_k\|_1 \le \|f-f_{k_m}\|_1+\|f_{k_m}-f_k\|_1 \le \varepsilon \qquad (k\ge k(\varepsilon)).$$

Also ist $f=\mathcal{L}^1\text{–}\lim_{k\to\infty} f_k$. □

2.8 Bemerkungen

1. Das Lebesgue-Integral ist wegen

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} f\,dx-\int_{\mathbb{R}^n} g\,dx\right| \le \int_{\mathbb{R}^n}|f-g|\,dx=\|f-g\|_1 \qquad (f,g\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n))$$

eine Lipschitz-stetige Abbildung $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)\to\mathbb{C}$ (mit Lipschitz-Konstante 1), also ein *stetiges* (lineares) Funktional. Aus $f=\mathcal{L}^1\text{–}\lim_{k\to\infty} f_k$ folgt also

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} f_k\,dx=\int_{\mathbb{R}^n} f\,dx.$$

2. Die Folge der f_k selbst braucht *nicht* punktweise zu konvergieren: ◇

2.9 Beispiel einer im $\mathcal{L}^1$–Sinn aber nicht punktweise konvergenten Folge

Zu $k\in\mathbb{N}$ seien $\nu,q\in\mathbb{N}_0$ durch $\nu:=\lfloor\log_2 k\rfloor$ und $q:=k-2^\nu$ definiert, also $0\le q<2^\nu$. Wir wählen die Funktionenfolge

$$f_k:=\mathbb{1}_{I_k}\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \quad\text{mit}\quad I_k:=[q2^{-\nu},(q+1)2^{-\nu}].$$

Es ist $\mathcal{L}^1\text{–}\lim_{k\to\infty} f_k=0$, aber für **kein** $x\in[0,1]$ existiert der punktweise Limes

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x),$$

denn x ist in mindestens einem, höchstens zwei Intervallen I_k der Länge $2^{-\nu}$ enthalten. ◇

Man sollte auch ein Beispiel in umgekehrter Richtung im Kopf behalten:

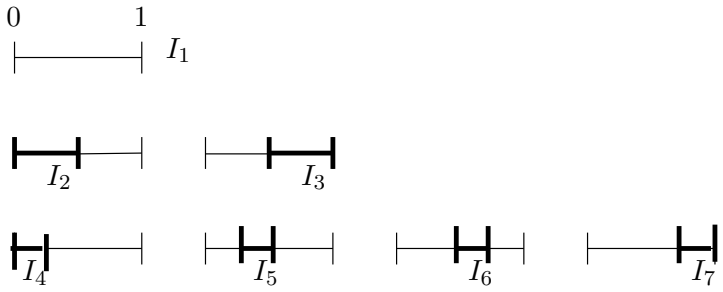


Abbildung 2.1: Folge der Intervalle I_k

2.10 Beispiel einer punktweise aber nicht im $\mathcal{L}^1$-Sinn konvergenten Folge
Es sei $f_k := k\mathbb{1}_{[1/k,2/k]} \quad (k \in \mathbb{N})$. Dann ist $f_k \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = 0$.

Würde aber die Folge im $\mathcal{L}^1$–Sinn gegen ein $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ konvergieren, dann müsste $\int_{\mathbb{R}} f\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k\,dx = 1$ gelten; gleichzeitig aber nach dem Satz von Riesz–Fischer (Satz 2.5) $f(x) = 0$ für fast alle $x \in \mathbb{R}$ gelten, im Widerspruch zu Satz 1.29. ◇

Oft kann man für eine Folge integrierbarer Funktionen die Existenz ihres punktweisen Limes nachprüfen, will aber wissen, ob sie auch im $\mathcal{L}^1$–Sinn gegen diesen konvergieren. Wir werden dafür im folgenden Satz, in Lemma 2.13 und im Satz 2.18 unterschiedliche Kriterien kennenlernen.

2.11 Satz (Beppo Levi)
Es sei $(f_k)_{\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge integrierbarer Funktionen $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, sodass die Folge ihrer Integrale $\int_{\mathbb{R}^n} f_k\,dx$ beschränkt ist.
Dann ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\},\ f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ in $\tilde{\mathcal{L}}^1(\mathbb{R}^n)$, und

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k\,dx. \tag{2.2}$$

Beweis: Zunächst existiert $I := \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k\,dx \in \mathbb{R}$, denn die Folge dieser reellen Zahlen ist monoton wachsend und beschränkt. Wegen

$$\|f_m - f_k\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} (f_m - f_k)\,dx \le I - \int_{\mathbb{R}^n} f_k\,dx \quad \text{für} \quad m \ge k$$

ist $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine $\mathcal{L}^1$–Cauchy–Folge und damit ist nach dem Satz von Riesz–Fischer (Satz 2.5) f ein $\mathcal{L}^1$–Limes der Folge. Nach Bemerkung 2.8.1. gilt (2.2). □

2.12 Bemerkungen (Satz von Beppo Levi)

1. Satz 2.11 wird auch **Satz von der monotonen Konvergenz** genannt.
   Die Voraussetzung der Monotonie kann nicht weggelassen werden:
   Ähnlich wie in Beispiel 2.10 besitzen die Funktionen $f_k := k^{-1}\mathbb{1}_{(0,k]} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ein (durch 1) beschränktes Integral, besitzen sogar einen punktweisen Limes $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = 0$, konvergieren aber nicht im L^1–Sinn gegen diesen.

2. Man kann also unter diesen Voraussetzungen (punktweisen) Limes und Integral vertauschen.

3. Eine analoge Aussage gilt für eine monoton *fallende* Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$. ◇

Oft ist die Monotonievoraussetzung nicht erfüllt, man kann aber auf den punktweisen Limes Inferior trotzdem den Satz von der monotonen Konvergenz anwenden:

2.13 Lemma (Fatou) *Es seien $f_k \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ $(k \in \mathbb{N})$ nicht negative Funktionen, für die $I := \liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k\,dx < \infty$ gilt. Dann ist die durch*

$$f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty] \quad , \quad f(x) := \liminf_{k\to\infty} f_k(x)$$

definierte Funktion ebenfalls integrabel, und

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\,dx \le I. \tag{2.3}$$

2.14 Bemerkung (Fatou) Beispiel 2.10 zeigt, dass in (2.3) selbst dann im Allgemeinen keine Gleichheit gilt, wenn der Limes $I = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k\,dx$ existiert. ◇

Beweis des Lemmas von Fatou:
• Die Folge der durch

$$F_k(x) := \inf\{f_\ell(x) \mid \ell \ge k\} \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

definierten Funktionen $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend. Nach Definition des Limes Inferior (Definition 7.13 der *Analysis I*) gilt

$$\lim_{k\to\infty} F_k(x) = f(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

• Definiert man für $\ell \ge k \in \mathbb{N}$

$$G_{k,\ell}(x) := \min\left\{f_m(x) \mid m \in \{k,\dots,\ell\}\right\} \qquad (x \in \mathbb{R}^n),$$

dann ist $G_{k,\ell} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist die Folge $(G_{k,\ell})_{\ell\ge k}$ monoton fallend, und

$$F_k(x) = \lim_{\ell\to\infty} G_{k,\ell}(x) \ge 0 \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Nach dem Satz von Beppo Levi folgt damit auch $F_k \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.
• Andererseits ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} F_k(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \inf_{\ell\geq k} f_\ell(x)\,dx \leq \inf_{\ell\geq k} \int_{\mathbb{R}^n} f_\ell(x)\,dx.$$

Also ist wegen $I = \lim_{k\to\infty} \inf_{\ell\geq k} \int_{\mathbb{R}^n} f_\ell(x)\,dx < \infty$

$$\int_{\mathbb{R}^n} F_k(x)\,dx \leq I$$

und der Satz von Beppo Levi auf die $F_k \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ anwendbar. Deren punktweiser Limes f ist damit integrierbar mit $\int_{\mathbb{R}^n} f\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} F_k\,dx \leq I$. □

Als zweite Anwendung des Satzes von Beppo Levi zeigen wir die folgende wichtige Eigenschaft des Lebesgue-Maßes.

2.15 Satz *Das Lebesgue–Maß λ^n ist σ–additiv. Sogar für messbare $A_k \subseteq \mathbb{R}^n$ $(k \in \mathbb{N})$, die bis auf Nullmengen disjunkt sind ($\lambda^n(A_k \cap A_l) = 0$ für $(l \neq k)$) gilt*

$$\lambda^n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^n(A_k)$$

zumindest falls die Summe endlich ist (siehe Bemerkung 1.18).

Beweis: Für $B_l := \bigcup_{k=1}^{l} A_k$ ist die Folge der Funktionen $\mathbb{1}_{B_l}$ monoton wachsend. Wenn zunächst die A_k disjunkt sind, gilt $\mathbb{1}_{B_l} = \sum_{k=1}^{l} \mathbb{1}_{A_k}$, also

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{B_l}\,dx = \sum_{k=1}^{l} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{A_k}\,dx = \sum_{k=1}^{l} \lambda^n(A_k) \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

$(\mathbb{1}_{B_l})_{l\in\mathbb{N}}$ konvergiert dann punktweise gegen die charakteristische Funktion von $B := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Sind die Integrale $\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{B_l}\,dx$ beschränkt, dann ist nach Satz 2.11

$$\lambda^n(B) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_B\,dx = \lim_{l\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{B_l}\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^n(A_k).$$

Sind die A_k nur bis auf Nullmengen disjunkt, dann ändert dies nach Satz 1.24 nichts an der Richtigkeit der Aussage. □

2.16 Satz *Lebesgue-Integral und Lebesgue-Maß sind* **translationsinvariant**, *d.h.*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x+a)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx \qquad (f \in L^1(\mathbb{R}^n)\,,\ a \in \mathbb{R}^n)$$

und (mit Minkowski-Schreibweise, d.h. $A + a = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x - a \in A\}$*)*

$$\lambda^n(A + a) = \lambda^n(A) \qquad (A \subseteq \mathbb{R}^n \textit{ meßbar }, a \in \mathbb{R}^n).$$

Beweis: Alle unsere relevanten Definitionen, angefangen mit der Definition des Quader-Volumen über die der Treppenfunktionen und ihres Integrals, bis zu den $\mathcal{L}^1$-Funktionen und meßbaren Mengen, waren translationsinvariant. □

2.17 Bemerkung Zusammen mit der Translationsinvarianz und der *Normierung* $\lambda^n([0,1]^n) = 1$ des Würfelvolumens legt die σ–Additivität das Lebesgue–Maß $\lambda^n : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ auf einer geeigneten σ–Algebra $\mathcal{M}$ des $\mathbb{R}^n$ eindeutig fest, siehe z.B. Bauer [Ba], §8. ◇

Ein weiteres Kriterium, für den punktweisen Limes einer Funktionenfolge zu zeigen, dass er auch der L^1-Limes ist, bietet die folgende, auch *Satz von Lebesgue* genannte Aussage:

2.18 Satz von der majorisierten Konvergenz
Es sei $f_k \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \quad (k \in \mathbb{N})$*, und der punktweise Limes*

$$f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x)$$

existiere fast überall. Wenn eine gemeinsame Majorante $F \geq |f_k|, F \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ *existiert, dann ist* $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ *und*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\, dx = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k\, dx.$$

Beweis:

- Für Real– und Imaginärteile der f_k gelten die gleichen Voraussetzungen wie für die f_k selbst. Gleiches gilt für Positiv– und Negativteile reeller f_k.

  Daher nehmen wir o.B.d.A. $f_k \geq 0$ an und zeigen den Satz in diesem Spezialfall. Die Aussage für komplexwertige f_k folgt dann durch Zerlegung.

- Wir setzen

  $$f^+(x) := \limsup_{k\to\infty} f_k(x) \quad \text{und} \quad f^-(x) := \liminf_{k\to\infty} f_k(x).$$

  Damit ist

  $$0 \leq f^-(x) \leq f^+(x) \leq F(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

  und nach Annahme der fast überall–Existenz von $f(x)$ gilt außerhalb einer Nullmenge

  $$f^+(x) = f(x) = f^-(x).$$

- Nach dem Lemma von Fatou (Lemma 2.13) ist f^- integrierbar mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^- \, dx \leq \liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, dx.$$

Andererseits können wir dieses Lemma auch auf die Funktionen $g_k := F - f_k$ anwenden, denn es ist $g_k \geq 0,\ g_k \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und $\int_{\mathbb{R}^n} g_k \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} F \, dx$. Wir erhalten die Abschätzung für

$$g(x) := \liminf_{k\to\infty} g_k(x) = F(x) - f^+(x),$$

$\int_{\mathbb{R}^n} g \, dx \leq \liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} F \, dx - \limsup_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, dx$, also

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^+ \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} (F - g) \, dx \geq \limsup_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, dx.$$

- Damit ist

$$\liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, dx \geq \int_{\mathbb{R}^n} f^- \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^+ \, dx \geq \limsup_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, dx.$$

Hier muss offensichtlich Gleichheit gelten. □

2.19 Bemerkung (Bedeutung des Satzes von Lebesgue)
Wir wissen schon, dass Entsprechendes für den $\mathcal{L}^1$–Limes einer $\mathcal{L}^1$-Cauchy–Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ integrabler Funktionen gilt (Satz 2.5 von Riesz–Fischer) und ebenso für eine monoton wachsende Folge mit beschränktem Integral (Satz von Beppo Levi). Aber oft ist eben nur der Satz 2.18 anwendbar, denn die $\mathcal{L}^1$–Konvergenz ist oft nur schwer zu überprüfen und die Monotonie oft nicht gegeben. ◇

2.20 Staatsexamens-Aufgabe (Frühjahr 2016)

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : [0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f_n(x) := \frac{x}{n^2} e^{-\frac{x}{n}}$. Zeigen Sie, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0, \infty[$ gleichmäßig gegen 0 konvergiert und bestimmen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x) \, dx.$$

(b) Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(0) = 0$. Bestimmen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x^n) \, dx.$$ ◇

2.21 Beispiel (Die Gammafunktion)
In der *Analysis II* haben wir auf der Halbebene $D = \{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > 0\}$ die Gamma–Funktion durch

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt \qquad (s \in D)$$

definiert. Dies ist für diese Integralformel die größtmögliche Halbebene, denn schon für $s = 0$ ist der Integrand nicht mehr in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+)$.

Andererseits ist für viele mathematische Fragen, etwa in der analytischen Zahlentheorie, eine Ausweitung des Definitionsbereiches wünschenswert.

Um dies durchzuführen, erinnern wir uns daran (Satz 8.33 der *Analysis I*), dass

$$e^{-t} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \qquad (t \in \mathbb{C}) \tag{2.4}$$

gilt. Wir würden gern die Polynome $t \mapsto \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ statt e^{-t} in die Integraldefinition eintragen, explizit integrieren und dann den Limes bilden. Dies ist nicht direkt möglich, denn dann wäre der Integrand nicht mehr in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+)$. Allerdings ist dies für $s \in D$ der Fall, wenn wir $f_s(t) := t^{s-1}e^{-t}$ durch

$$f_{s,n}(t) := \begin{cases} t^{s-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n & , \quad 0 < t \le n \\ 0 & , \quad t > n \end{cases}$$

ersetzen, denn die $f_{s,n}$ sind stetig (beachte $f_{s,n}(n) = 0$) und integrabel.

Wegen (2.4) gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_{s,n}(t) = f_s(t) \qquad (t > 0).$$

Außerdem ist für reelle $s > 0$

$$0 \le f_{s,n}(t) < f_s(t),$$

denn für $t < n$ ist wegen $\log(1-x) = -\sum_{k=1}^\infty x^k/k$

$$\log\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = n \log\left(1 - \frac{t}{n}\right) = -t - \sum_{k=2}^\infty \frac{t^k}{k n^{k-1}} \le -t,$$

also $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \le e^{-t}$. Damit ist für beliebige $s \in D$ und $\Gamma_n(s) := \int_0^\infty f_{s,n}(t)\, dt$

$$\begin{aligned} |\Gamma_n(s)| &\le \int_0^\infty |f_{s,n}(t)|\, dt = \int_0^n t^{\mathrm{Re}(s)-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt \\ &\le \int_0^\infty t^{\mathrm{Re}(s)-1} e^{-t}\, dt = \Gamma(\mathrm{Re}(s)). \end{aligned}$$

Der Satz von Lebesgue ergibt

$$\lim_{n\to\infty} \Gamma_n(s) = \Gamma(s) \qquad (s \in D).$$

Andererseits folgt durch partielle Integration

$$\begin{aligned} \Gamma_n(s) &= \int_0^n t^{s-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \frac{n}{ns} \int_0^n t^s \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} dt \\ &= \ldots = \frac{n!\, n^{s+n}}{n^n s(s+1)\cdot\ldots\cdot(s+n)} = \frac{n!\, n^s}{s(s+1)\cdot\ldots\cdot(s+n)}. \end{aligned}$$

Damit sind alle $\Gamma_n(s)$ auf dem gemeinsamen Definitionsbereich

$$\tilde{D} := \{s \in \mathbb{C} \mid s \notin \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}\}$$

definiert, es gilt

$$\Gamma_{n+1}(s) = \Gamma_1(s) \prod_{k=1}^{n} \frac{\Gamma_{k+1}(s)}{\Gamma_k(s)} \qquad (s \in \tilde{D}),$$

und wegen

$$\frac{\Gamma_{k+1}(s)}{\Gamma_k(s)} = \frac{(k+1)\left(\frac{k+1}{k}\right)^s}{s+k+1} = \frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^s}{1+\frac{s}{k+1}} = \frac{1+\frac{s}{k}+\mathcal{O}(k^{-2})}{1+\frac{s}{k}+\mathcal{O}(k^{-2})} = 1+\mathcal{O}(k^{-2})$$

existiert der Limes

$$\Gamma(s) := \lim_{n\to\infty} \Gamma_n(s) = \Gamma_1(s) \cdot \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{\Gamma_{k+1}(s)}{\Gamma_k(s)} \qquad (s \in \tilde{D}). \qquad \square$$

Wie stellen wir nun fest, ob eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ Lebesgue-integrierbar ist? Hier ist oft das folgende Kriterium nützlich:

2.22 Satz *Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ fast überall stetig und $|f| \le g$ für ein $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$; dann ist auch $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.*

Satz 2.22 wird unter Zuhilfenahme des Satzes von Lebesgue bewiesen, siehe [Ko], Kap. 5.3. Um den Satz anwenden zu können, braucht man natürlich einen gewissen Vorrat an Majoranten $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Beispielsweise kann man sich fragen, wie schnell eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *lokal*, d.h. in der Umgebung eines Punktes $x \in \mathbb{R}^n$, divergieren kann, bzw. wie langsam sie *bei Unendlich* gegen Null streben kann, damit noch $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt. Entsprechende Majoranten für f diskutieren wir in Bsp. 2.36, wenn wir den Transformationssatz 2.32 zur Verfügung haben.

Eine weitere Anwendung findet der Satz 2.18 bei der Theorie der Fourier–Transformation:

2.23 Definition
Die **Fourier–Transformierte** $\hat{f}$ *von* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *ist definiert durch*

$$\hat{f}(k) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \exp(-ik \cdot x)\, dx \qquad (k \in \mathbb{R}^n).$$

2.24 Bemerkung (Fourier–Transformation als unitäre Abbildung)
Oft wird die Fourier–Transformation auch unter Weglassung der Konstante $(2\pi)^{-n/2}$ definiert. Wenn wir quadratintegrable Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ Fourier-transformieren, ist allerdings diese Wahl nötig, um sicherzustellen, dass für das Skalarprodukt $\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \overline{g}(x)\, dx$ gilt: $\langle \hat{f}, \hat{g}\rangle = \langle f, g\rangle$. ◇

2.25 Beispiel (Gaußsche Glockenkurve)
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-ax^2}$ ist für $a > 0$ in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Mit der Substitution $y := \sqrt{a}x$ ergibt sich ihre Fourier–Transformierte:

$$\begin{aligned} \hat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2 - ixk}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2 - \frac{iyk}{\sqrt{a}}}\, dy \\ &= \frac{e^{-\frac{k^2}{4a}}}{\sqrt{2\pi a}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\left(y + \frac{ik}{2\sqrt{a}}\right)^2}\, dy = \frac{e^{-\frac{k^2}{4a}}}{\sqrt{2a}} \qquad (k \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Der letzte Schritt, nämlich die Substitution mit $z = y + c$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-(y+c)^2} dy = \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2} dz,$$

ist für reelle c vertraut, aber wegen der komplexen Differenzierbarkeit = Holomorphie von $z \mapsto e^{-z^2}$ auch für unser imaginäres c legitim. Auch ohne Kenntnis der *Funktionentheorie* kann man diese Identität durch Differentiation des c–abhängigen Integrals nach c mittels Vertauschung von uneigentlichem Integral und Differentiation nach dem Parameter beweisen.

Wir erhalten damit wieder eine Gaußsche Glockenkurve, und speziell für $a = 1/2$ ist sogar $\hat{f} = f$. Wenn a groß ist, also die Glockenkurve f ein schmales Profil hat, besitzt $\hat{f}$ ein weites Profil und umgekehrt. ◇

Warum ist die Fourier–Transformation wichtig? Unter anderem, weil sie die Lösung von partiellen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten ermöglicht. Unter der Fourier–Transformation werden nämlich solche Differentialoperatoren zu Polynomen.

Zunächst wissen wir noch nicht einmal, ob für $k \neq 0$ das Integral konvergiert. Wir würden gern Satz 1.8 benutzen, nach dem das Produkt von $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und einer beschränkten Funktion $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ wieder integrabel ist, aber $x \mapsto g(x) := e^{-ik\cdot x}$ zwar beschränkt, aber nicht integrabel. Tatsächlich ist das auch nicht nötig:

2.26 Satz *Das Produkt von $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und einer beschränkten Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ist integrabel, wenn g* **lokal integrabel** *ist, d.h. wenn für alle $r > 0$ die Funktionen*

$$g_r(x) := \begin{cases} g(x) & , \|x\| \leq r \\ 0 & , \|x\| > r \end{cases}$$

integrabel sind.

Beweis: Nach Satz 1.8 ist $f \cdot g_r \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Außerdem ist $|f \cdot g_r| \leq F$ mit $F := M \cdot |f|$ und $M := \sup_x |g(x)| < \infty$. Damit ist nach dem Satz von Lebesgue auch $f \cdot g$ integrabel. □

Für $g(x) := e^{-ik\cdot x}$ ist $M = 1$, und g ist stetig, also nach Satz 2.22 g_r integrabel. Satz 2.26 garantiert uns also, dass die Fourier–Transformierte $\hat{f}$ überhaupt wohldefiniert ist. Der Satz von der majorisierten Konvergenz liefert uns aber noch genauere Informationen über $\hat{f}$:

2.27 Satz *Die Fourier–Transformierte $\hat{f}$ von $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist stetig.*

Beweis: Für eine beliebige Folge $(k_l)_{l\in\mathbb{N}}$ von $k_l \in \mathbb{R}^n$ mit $\lim_{l\to\infty} k_l = k$ gilt punktweise

$$\lim_{l\to\infty} f(x)e^{-ik_l\cdot x} = f(x)e^{-ik\cdot x}.$$

Damit ist für $f_l(x) := f(x)e^{-ik_l\cdot x}$ die Voraussetzung von Satz 2.18 erfüllt, und es folgt $\hat{f}(k) = \lim_{l\to\infty} \hat{f}(k_l)$. □

Diese Stetigkeitseigenschaft der Fourier–Transformierten geht allerdings verloren, wenn wir die quadratintegrablen Funktionen $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ betrachten.

2.2 Der Satz von Fubini (L^1-Version)

Praktisch wird man die Lebesgue–Integration im $\mathbb{R}^n$ mithilfe des Satzes von Fubini auf die eindimensionale Integration zurückführen. Wir benutzen dabei den Satz in der folgenden Form (die im Gegensatz zur Version 1.15 für den gesamten $\mathbb{R}^n$ als Integrationsgebiet anwendbar ist).

2.28 Satz von Fubini *Für $m, p \in \mathbb{N},\ n = m + p$ und $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ ist*

$$N^{(p)} := \{y \in \mathbb{R}^p \mid f(\cdot, y) \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m)\} \tag{2.5}$$

eine Nullmenge, und für

$$F(y) := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,dx & , y \in \mathbb{R}^p \setminus N^{(p)} \\ 0 & , y \in N^{(p)} \end{cases} \tag{2.6}$$

ist $F \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^p)$. *Es gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(z)\,dz = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,dx \right) dy. \tag{2.7}$$

2.29 Bemerkungen (Satz von Fubini)

1. Da $N^{(p)}$ eine Nullmenge ist, braucht F auf dieser Menge nicht definiert zu werden, um als Element von $L^1(\mathbb{R}^p)$, also als Äquivalenzklasse von Funktionen in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^p)$ festgelegt zu sein.

2. Es gibt $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p)$, für die $N^{(p)} \neq \emptyset$ gilt, ja sogar eine dichte Teilmenge des $\mathbb{R}^p$ ist.
   Ein Beispiel ist die charakteristische Funktion der Teilmenge $\mathbb{R}^m \times \mathbb{Q}^p$ des Vektorraums $\mathbb{R}^n$, mit $N^{(p)} = \mathbb{Q}^p$.

3. In Satz 1.15, im wesentlichen einem Spezialfall des obigen Satzes von Fubini, bekommt man wegen der Beschränktheitsannahmen an die Funktion und ihren Definitionsbereich aber noch die Zusatzinformation $N^{(p)} = \emptyset$.

4. Der folgende Beweis ist kompliziert. Es ist daher sinnvoll, sich zunächst die Strategie zu überlegen. Wegen $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ gibt es eine L^1–approximierende Folge von $\varphi_k \in \mathcal{T}_n$. Aus dieser wird eine Folge von $\varphi_{k,y} := \varphi_k(\cdot, y) \in \mathcal{T}_m$ gewonnen, die $f_y := f(\cdot, y)$ L^1–approximiert. Deren Integrale $y \mapsto \Phi_k(y)$ sind Treppenfunktionen, die $y \mapsto F(y)$ im L^1–Sinn approximieren. Daher ist $F \in L^1(\mathbb{R}^p)$. Der Satz von Fubini für Treppenfunktionen impliziert dann die Richtigkeit der Formel 2.7. ◇

Beweis:

• Benutzung des Satzes von Riesz-Fischer auf $\mathbb{R}^n$:

Es sei $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ approximierende Folge von $\varphi_k \in \mathcal{T}_n$, die der Bedingung

$$\|\varphi_{k+1} - \varphi_k\|_1 \leq 2^{-k} \qquad (k \in \mathbb{N}) \tag{2.8}$$

genügt und für die

$$N^{(n)} := \{z \in \mathbb{R}^n \mid f(z) \text{ ist nicht Grenzwert von } (\varphi_k(z))_{k\in\mathbb{N}}\}$$

eine Nullmenge ist. Der Satz von Riesz–Fischer (Satz 2.5) garantiert die Existenz einer solchen Folge.

Unser Ziel ist zunächst, durch die Treppenfunktionen

$$\varphi_{k,y} \in \mathcal{T}_m \quad , \quad \varphi_{k,y}(x) := \varphi_k(x,y) \qquad (y \in \mathbb{R}^p)$$

die Funktion $f_y : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ zu approximieren.

Punktweise gelingt dies für fast alle $y \in \mathbb{R}^p$ fast überall in $\mathbb{R}^m$, denn die φ_k konvergieren außerhalb der Nullmenge $N^{(n)} \subseteq \mathbb{R}^n$ gegen f, und nach Satz 1.35 ist für $N_y^{(m)} := \left\{x \in \mathbb{R}^m \mid (x,y) \in N^{(n)}\right\}$

$$N_I^{(p)} := \{y \in \mathbb{R}^p \mid N_y^{(m)} \text{ ist keine Nullmenge in } \mathbb{R}^m\}$$

eine Nullmenge in $\mathbb{R}^p$.

• Benutzung des Satzes von Fubini für Treppenfunktionen:
Wir wollen diese Konvergenz gegen f_y aber auch *im L^1-Sinn* zeigen.
Nach Satz 1.4.3 ist für die Treppenfunktion

$$\Psi_k \in \mathcal{T}_p \quad , \quad \Psi_k(y) := \int_{\mathbb{R}^m} |\varphi_{k+1}(x,y) - \varphi_k(x,y)|\, dx$$

$$\int_{\mathbb{R}^p} \Psi_k(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_{k+1} - \varphi_k|\, dz = \|\varphi_{k+1} - \varphi_k\|_1 \leq 2^{-k} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Also bilden die Ψ_k eine L^1–konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k$, und für fast alle $y \in \mathbb{R}^p$ stimmen nach dem Satz von Beppo Levi der punktweise Grenzwert $\sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(y)$ mit dem L^1–Grenzwert überein. Insbesondere existiert nach Satz 1.27 eine Nullmenge $N_{II}^{(p)}$ mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(y) < \infty \qquad \left(y \in \mathbb{R}^p \setminus N_{II}^{(p)}\right). \tag{2.9}$$

• Benutzung des Satzes von Riesz–Fischer auf $\mathbb{R}^m$:
Wir setzen $\tilde{N}^{(p)} := N_I^{(p)} \cup N_{II}^{(p)}$. Dies ist ebenfalls eine Nullmenge in $\mathbb{R}^p$.

Für $y \in \mathbb{R}^p \backslash \tilde{N}^{(p)}$ ist wegen (2.9) die Folge der $\varphi_{k,y} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m)$ eine Cauchy–Folge, die nach dem Satz von Riesz–Fischer gegen eine Funktion in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m)$ konvergiert. Diese Funktion muß aber f_y sein, denn die $\varphi_{k,y}$ konvergieren (da $y \notin N_I^{(p)}$) auch fast überall gegen f_y. Also ist auch $f_y \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m)$, und $N^{(p)}$ aus (2.5) ist wegen $N^{(p)} \subseteq \tilde{N}^{(p)}$ eine Nullmenge.

Nach dem Satz von Riesz–Fischer konvergieren damit auch die Integrale: Die Treppenfunktionen

$$\Phi_k \in \mathcal{T}_p \quad , \quad \Phi_k(y) := \int_{\mathbb{R}^m} \varphi_{k,y}\, dx$$

konvergieren also punktweise bis auf eine Nullmenge gegen das in (2.6) definierte $F : \mathbb{R}^p \to \mathbb{C}$:

$$\lim_{k\to\infty} \Phi_k(y) = \int_{\mathbb{R}^m} f_y\, dx = F(y) \qquad \left(y \in \mathbb{R}^p \backslash \tilde{N}^{(p)}\right).$$

• **Benutzung des Satzes von Riesz–Fischer auf $\mathbb{R}^p$:**
Die Φ_k konvergieren aber auch im L^1–Sinn, denn nach (2.8) ist

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^p} |\Phi_{k+1} - \Phi_k|\, dy &= \int_{\mathbb{R}^p} \left| \int_{\mathbb{R}^m} \big(\varphi_{k+1}(x,y) - \varphi_k(x,y)\big)\, dx \right| dy \\ &\le \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_{k+1} - \varphi_k|\, dz = \|\varphi_{k+1} - \varphi_k\|_1 \le 2^{-k},\end{aligned}$$

die Φ_k bilden also eine L^1–Cauchy–Folge.

Nach dem Satz von Riesz–Fischer ist damit ihr punktweiser Limes F integrierbar, und

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f_y\, dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^p} F\, dy \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^p} \Phi_k\, dy = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^m} \varphi_k(x,y)\, dx \right) dy \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k\, dz = \int_{\mathbb{R}^n} f\, dz.\end{aligned}$$

Hierbei wurde in der vorletzten Identität nochmals der Satz von Fubini für Treppenfunktionen benutzt, in der letzten die L^1–Stetigkeit des Lebesgue–Integrals. □

Praktisch einfach zu überprüfen sind oft die Voraussetzungen des folgenden Satzes (eines Korollars des Satzes von Tonelli):

2.30 Satz *Die Funktionen f und F seien fast überall stetig auf $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ und es gelte:*

1. $|f| \le F$
2. *Es existiert wenigstens eines der Integrale*

$$\int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^m} F(x,y)\, dx \right) dy \quad , \quad \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^p} F(x,y)\, dy \right) dx.$$

Dann ist $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und $\int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\, dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\, dy \right) dx$.

Beweis: Siehe KÖNIGSBERGER [Ko]. □

2.3 Der Transformationssatz

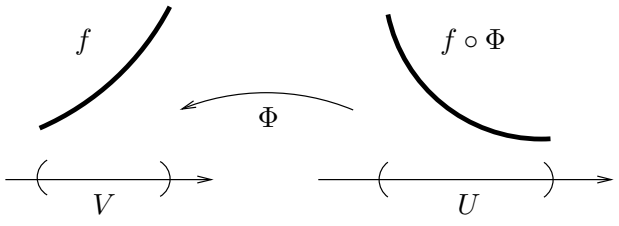
Oft nimmt eine Funktion in einem Koordinatensystem eine viel einfachere Form an als in einem anderen, und dies will man bei der Integration nutzen. Nun bezieht sich aber das Lebesgue–Integral zunächst auf die kartesischen Koordinaten des $\mathbb{R}^n$.

Koordinatenwechsel bewerkstelligt man (zumindest lokal) durch Diffeomorphismen.[13] Der Transformationssatz sagt uns, wie sich das Integral unter einem solchen Diffeomorphismus transformiert.

Schauen wir uns dazu zunächst die vertraute eindimensionale Situation an, d.h. ein offenes Intervall $V \subseteq \mathbb{R}$, $f \in L^1(V)$ und einen Diffeomorphismus

$$\Phi : U \to V.$$

Dann ist Φ nach Definition bijektiv und wie auch Φ^{-1} stetig differenzierbar, also $\Phi' \neq 0$ (und damit Φ entweder streng monoton wachsend oder fallend). $V \subseteq \mathbb{R}$ ist wieder ein offenes Intervall, und es gilt



$$\int_V f(y)\,dy = \int_U f \circ \Phi(x)\,|\Phi'(x)|\,dx.$$

Für Riemann–integrable f entspricht dies der Substitutionsregel. Man beachte, dass sich die Intervallgrenzen durch monoton fallende Φ umdrehen; daher die Verwendung des Gewichtsfaktors $|\Phi'|$.

Der Transformationssatz erweitert nun diese Formel auf beliebige L^1–Funktionen und Diffeomorphismen in beliebigen Dimensionen. Dazu müssen wir $|\Phi'|$ geeignet verallgemeinern.

2.31 Bemerkung (Funktionaldeterminante)
Ist in n Dimensionen der Diffeomorphismus Φ von der speziellen Form

$$\Phi(x) = (\Phi_1(x_1), \ldots, \Phi_n(x_n))^\top,$$

dann ergibt die Anwendung des Satzes von Fubini als Gewichtsfaktor

$$\left| \prod_{i=1}^{n} \Phi_i'(x_i) \right| = |\det(D\Phi(x))|\,. \qquad \diamond$$

[13] Zur Erinnerung: Für offene Teilmengen $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt $\Phi \in C^1(U,V)$ **Diffeomorphismus**, wenn Φ bijektiv ist und $\Phi^{-1} \in C^1(V,U)$ gilt.

Letzterer Ausdruck stimmt auch allgemein:

2.32 Satz (Transformationssatz) *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi : U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus. Es gilt für $f : V \to \mathbb{C}$*

$$f \in L^1(V) \iff f \circ \Phi \cdot |\det D\Phi| \in L^1(U),$$

und dann

$$\int_V f(y)\,dy = \int_U f(\Phi(x))|\det(D\Phi(x))|\,dx.$$

Eine Grundidee des Beweises ist, dass der Betrag der Determinante der Ableitung von Φ bei $x \in U$ der lokale Faktor der Volumenvergrößerung ist. Dazu betrachten wir zunächst eine *affine Abbildung* $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Für diese existieren eindeutige $v \in \mathbb{R}^n, L \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ mit

$$\Phi(x) = Lx + v \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Affine Abbildungen bilden Parallelotope auf Parallelotope ab. Dabei verstehen wir unter einem *Parallelotop* eine durch $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ und $z \in \mathbb{R}^n$ fixierte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ der Form

$$P(A, z) := \left\{ Ac + z \mid c = (c_1, \ldots, c_n)^\top,\ c_i \in [0, 1] \right\}.$$

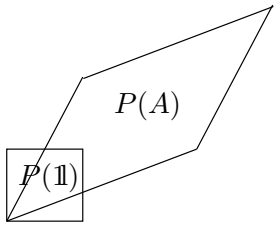
Für die affine Abbildung Φ gilt

$$\Phi(P(A, z)) = P(LA, Lz + v). \tag{2.10}$$

Das Parallelotop wird also wieder in ein Parallelotop überführt, welches durch die Bilder $b_i := La_i$ der Spaltenvektoren $a_1, \ldots, a_n$ von A aufgespannt wird. Da x–unabhängig $D\Phi(x) = L$ ist, ist unter Benutzung von (2.10) und des folgenden Satzes

$$|\det(D\Phi)|$$

der Faktor, um den das Lebesgue–Maß des Parallelotops $P(A, z)$ durch Anwendung von Φ vergrößert wird.



2.33 Satz *Für $A \in \mathrm{Mat}\,(n, \mathbb{R})$ und $z \in \mathbb{R}^n$ ist das Volumen des Parallelotops $P(A, z)$ gleich*

$$\lambda^n\big(P(A, z)\big) = |\det A|.$$

Beweis: Wir schreiben abkürzend $P(A) := P(A, 0)$.

- Als kompakte Mengen sind Parallelotope nach Satz 1.19 messbar.
- Dass $\lambda^n\big(P(\mathbb{1})\big) = 1$ ist (Lebesgue–Maß des Einheitswürfels $P(\mathbb{1}) = [0,1]^n$), haben wir im letzten Kapitel gezeigt.
- Wegen der Translationsinvarianz von λ^n (Satz 2.16) sind verschobene Parallelotope von unverändertem Volumen.
- Aus dem gleichen Grund ist

$$\lambda^n\big(P(a_1, \ldots, a_{i-1}, -a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)\big) = \lambda^n\big(P(a_1, \ldots, a_n)\big).$$

- Für $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ kann $P(a_1, \ldots, a_{i-1}, ca_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ aus $|c|$ verschobenen, bis auf Nullmengen disjunkten Parallelotopen zusammengesetzt werden. Für $c = 0$ ist das Parallelotop eine λ^n–Nullmenge. Daher hat es für alle $c \in \mathbb{Z}$ das $|c|$–fache Volumen des ursprünglichen Parallelotops.
- Gleiches gilt für $c \in \mathbb{Q}$, denn man kann für $c = p/q$ aus q solchen Parallelotopen einen vom $|p|$–fachen Volumen wie $P(A)$ zusammensetzen.
- Für beliebige $c \in \mathbb{R}$ folgt die Formel

$$\lambda^n\big(P(a_1, \ldots, a_{i-1}, ca_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)\big) = |c|\, \lambda^n\big(P(A)\big)$$

  durch rationale Approximation von c und die Monotonie des Lebesgue-Integrals (Satz 1.22.2) aus dem Fall $c \in \mathbb{Q}$.
- Weiter gilt

$$\lambda^n\big(P(a_1 \ldots, a_i + a_j, \ldots, a_j, \ldots, a_n)\big) = \lambda^n\big(P(A)\big) \qquad (i \neq j),$$

  wie sich unter Benutzung der Translationsinvarianz des Lebesgue–Maßes aus der Zerlegung des Parallelotops in zwei Polytope und Neuzusammensetzung ergibt, siehe Abb. 2.2.

Da sich jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}\,(n, \mathbb{R})$ aus der Einheitsmatrix $\mathbb{1}$ mit den genannten Spaltenoperationen gewinnen lässt, und wir für das Lebesgue–Maß Transformationsformeln abgeleitet haben, die denen des Betrages der Determinante von A gleichen, haben wir den Satz bewiesen unter der Voraussetzung verschwindender Translation z. Das Lebesgue–Maß ist aber translationsinvariant. □

Beweis des Transformationssatzes 2.32:

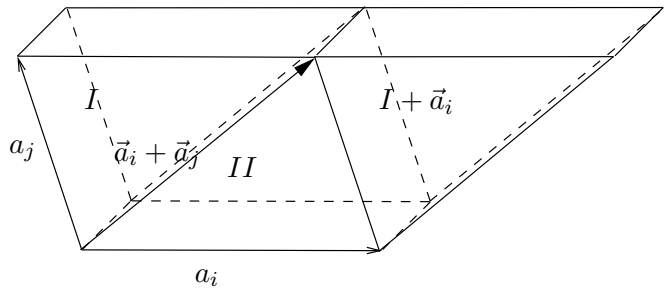


Abbildung 2.2: Volumentreue Scherung eines Parallelotops

• Wir nehmen zunächst an, dass $f \circ \Phi : U \to \mathbb{C}$ (genauer: die triviale Fortsetzung von f) eine Treppenfunktion mit Träger in U ist. Wegen der Linearität des Integrals genügt es, den Fall $f \circ \Phi = \mathbb{1}_Q$ für einen Quader $Q \subseteq U$ zu betrachten. In diesem Fall reduziert sich die zu beweisende Transformations-Formel

$$\int_U f(\Phi(x))|\det(D\Phi(x))|\,dx = \int_V f(y)\,dy$$

wegen $\int_U f(\Phi(x))|\det(D\Phi(x))|\,dx = \int_U \mathbb{1}_Q(x)|\det(D\Phi(x))|\,dx$
und $\int_V f(y)\,dy = \int_V \mathbb{1}_Q \circ \Phi^{-1}(y)\,dy = \int_V \mathbb{1}_{\Phi(Q)}\,dy = \lambda^n(\Phi(Q))$ auf

$$\int_Q |\det(D\Phi(x))|\,dx = \lambda^n(\Phi(Q)). \tag{2.11}$$

• Wegen der Eigenschaft des Diffeomorphismus Φ, Nullmengen in Nullmengen abzubilden (Satz 1.32 und 1.33) und wegen $\lambda^n(\overline{Q}) = \lambda^n(Q)$ nehmen wir auch an, dass Q kompakt ist, also von der Form $Q = [z_1, z_1 + \ell_1] \times \ldots \times [z_n, z_n + \ell_n]$ oder

$$Q = P(A, z) \quad \text{mit der Matrix} \quad A := \operatorname{diag}(\ell_1, \ldots, \ell_n).$$

$D\Phi\restriction_Q$ ist zwar i.Allg. nicht konstant, aber wegen der Kompaktheit von Q und Stetigkeit von $D\Phi$ gleichmäßig stetig. Betrachten wir daher die Zerlegungen von Q in die 2^{nk} bis auf Seiten, d.h. Mengen vom Maß 0 disjunkten Teilquader

$$Q_{k,m} := P(2^{-k}A, z+2^{-k}m) \qquad \big(m = (m_1, \ldots, m_n)^\top, m_i/\ell_i \in \{0, \ldots, 2^k-1\}\big)$$

mit Ecke $z_{k,m} := z + 2^{-k}m$. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $k = k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$|\partial_i\Phi_j(x) - \partial_i\Phi_j(y)| < \varepsilon \qquad \big(i, j = 1, \ldots, n,\ x, y \in Q_{k,m}\big)$$

für alle Teilwürfel $Q_{k,m} \subseteq Q$, oder

$$\Phi(x) = \Phi(z_{k,m}) + D\Phi(z_{k,m})(x - z_{k,m}) + \mathcal{O}(2^{-k}\varepsilon) \qquad (x \in Q_{k,m}). \tag{2.12}$$

Damit weicht das Bild $\Phi(Q_{k,m})$ nur wenig von einem Parallelotop ab. Wir benutzen zum Vergleich die um $P(A,z) = P^0(A,z)$ zentrierten Parallelotope

$$P^\delta(A,z) := \left\{ Ac + z \mid c = (c_1,\dots,c_n)^\top,\ c_i \in [-\delta, 1+\delta] \right\}$$

mit Volumen $\lambda^n(P^\delta(A,z)) = (1+2\delta)^n \lambda^n(P(A,z)) \quad (\delta > -\frac{1}{2})$. Wegen (2.12) und der Regularität von $D\Phi$ auf dem kompakten Quader Q finden wir für jedes $\delta > 0$ ein k mit

$$P^{-\delta}\Big(D\Phi(z_{k,m})(2^{-k}A), z_{k,m}\Big) \subseteq \Phi(Q_{k,m}) \subseteq P^{\delta}\Big(D\Phi(z_{k,m})(2^{-k}A), z_{k,m}\Big)$$

Damit ist nach Satz 2.33

$$\lambda^n(\Phi(Q)) = \sum_m \lambda^n(\Phi(Q_{k,m})) \le (1+2\delta)^n \sum_m \lambda^n(Q_{k,m})\ |\det(D\Phi(z_{k,m}))|$$

(man bedenke, dass nach Satz 1.33 gilt $\lambda^n\big(\Phi(Q_{k,m}) \cap \Phi(Q_{k,m'})\big) = 0$ für $m \neq m'$, denn Φ ist ein Diffeomorphismus). Analog ist

$$\lambda^n(\Phi(Q)) \ge (1-2\delta)^n \sum_m \lambda^n(Q_{k,m})\ |\det(D\Phi(z_{k,m}))|.$$

Die Riemann-Summe auf dem Quader Q konvergiert gegen das Integral:

$$\lim_{k\to\infty} \sum_m \lambda^n(Q_{k,m})\ |\det(D\Phi(z_{k,m}))| = \int_Q |\det(D\Phi(z)|\, dz.$$

Insgesamt erhalten wir $\lambda^n(\Phi(Q)) = \int_Q |\det(D\Phi(z))|\, dz$, also (2.11).
• Die Aussage für beliebige integrable f erhält man durch Approximation von $f \circ \Phi$ durch Treppenfunktionen. □

2.34 Beispiel (Integral der Gauß-Funktion)
Bei Verwendung von Polarkoordinaten $\binom{x}{y} = \Phi(r,\varphi) = \binom{r\cos\varphi}{r\sin\varphi}$ und der Substitution $u := r^2$ ist $D\Phi(r,\varphi) = \left(\begin{smallmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{smallmatrix}\right)$, also $\det(D\Phi(r,\varphi)) = r$ und

$$\left[\int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2)\, dx\right]^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-x^2)\exp(-y^2)\, dx\, dy = \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-(x^2+y^2))\, dx\, dy$$
$$= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \exp(-r^2)\, r d\phi\, dr = \pi \int_0^\infty \exp(-r^2) 2r\, dr = \pi \int_0^\infty \exp(-u)\, du = \pi.$$

Dadurch ist auch der Funktionswert der Gammafunktion bei $1/2$ bestimmt:

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty t^{-1/2}\exp(-t)\, dt = 2\int_0^\infty \exp(-x^2)\, dx = \int_{-\infty}^\infty \exp(-x^2)\, dx = \sqrt{\pi},$$

siehe das Skript *Analysis II*, Kap. 1.3. ◇

2.35 Staatsexamens-Aufgabe (Frühjahr 2017)
Im folgenden sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine integrable Funktion.

(a) Formulieren Sie den Transformationssatz für Integrale für den Spezialfall, dass Sie das Integral von $f \circ T$ zurückführen auf das Integral über f, wobei die Transformation $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine *lineare* Abbildung ist.

(b) Integrieren Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{(1 + (x_1 + x_2)^2)(1 + (2x_1 + 5x_2)^2)},$$

über $\mathbb{R}^2$. $\diamond$

2.36 Beispiel (Majoranten in L^p–Räumen)
Für $p \in [1, \infty)$ ist $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ der Raum der Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, die über jede kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ integrierbar sind, und für die

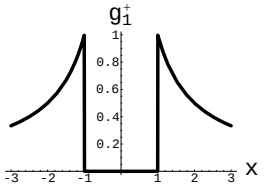
$$\|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty.$$

Analog zum Fall $p = 1$ setzt man $\mathcal{N} := \{f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) \mid \|f\|_p = 0\}$ und bildet die Äquivalenzklassen bezüglich dieses Unterraums, setzt also

$$L^p(\mathbb{R}^n) := \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)/\mathcal{N}.$$

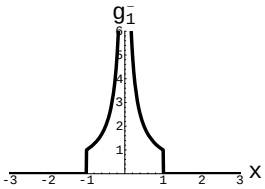
Es sei nun $g_\lambda^\pm : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$g_\lambda^+(x) := \begin{cases} 0 & , \quad \|x\| < 1 \\ \|x\|^{-\lambda} & , \quad \|x\| \geq 1 \end{cases}$$



und

$$g_\lambda^-(x) := \begin{cases} \|x\|^{-\lambda} & , \quad \|x\| \leq 1 \\ 0 & , \quad \|x\| > 1 \end{cases}$$



definiert. Dann gilt

$$g_\lambda^+ \in L^p(\mathbb{R}^n) \iff \lambda > \frac{n}{p}$$

und

$$g_\lambda^- \in L^p(\mathbb{R}^n) \iff \lambda < \frac{n}{p},$$

denn

$$\|g_\lambda^+\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} (g_\lambda^+(x))^p \, dx = I_n \int_1^\infty r^{-p\lambda} r^{n-1} dr$$

mit $I_n := \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ wie in Kapitel 2.4 (als Flächeninhalt der $(n-1)$–dimensionalen Sphäre interpretiert), also

$$\|g_\lambda^+\|_p^p = I_n \int_1^\infty r^{n-p\lambda-1} dr,$$

und analog

$$\|g_\lambda^-\|_p^p = I_n \int_0^1 r^{n-p\lambda-1} dr. \qquad \diamond$$

2.4 Anwendung: Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^n$

Wir benutzen nun den Transformationssatz 2.32, um mithilfe der Polarkoordinaten das Volumen einer n–dimensionalen Kugel zu berechnen. Unter *Polarkoordinaten* auf dem $\mathbb{R}^n$ verstehen wir für $n \geq 2$ die Abbildung

$$\Phi_n = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} \in C^\infty(U, V)$$

mit den offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} U &:= (0,\infty) \times (0, 2\pi) \times (0,\pi)^{n-2}, \\ V &:= \mathbb{R}^n \backslash N \quad , \quad N := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0, \ x_2 \geq 0\} \end{aligned}$$

und (mit $\theta_0 := 0$)

$$\varphi_m(r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1}) = r \cos\theta_{m-1} \prod_{\ell=m}^{n-1} \sin\theta_\ell \qquad (m = 1, \ldots, n),$$

wobei das Produkt über die leere Menge 1 ist, also

$$\begin{aligned} \varphi_1(r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1}) &= r \prod_{\ell=1}^{n-1} \sin\theta_\ell \\ \varphi_2(r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1}) &= r \cos\theta_1 \prod_{\ell=2}^{n-1} \sin\theta_\ell \\ \varphi_3(r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1}) &= r \cos\theta_2 \prod_{\ell=3}^{n-1} \sin\theta_\ell \\ &\vdots \qquad\quad \vdots \\ \varphi_n(r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1}) &= r \cos\theta_{n-1}. \end{aligned}$$

- Für $n = 2$ ergibt sich ähnlich wie in Beispiel 2.34 (und mit $\theta := \theta_1$)

$$\varphi_1(r,\theta) = r\sin\theta \quad , \quad \varphi_2(r,\theta) = r\cos\theta,$$

also $D\Phi_2(r,\theta) = \left(\begin{smallmatrix} \sin\theta & r\cos\theta \\ \cos\theta & -r\sin\theta \end{smallmatrix}\right)$, woraus sich $\det D\Phi_2(r,\theta) = -r < 0$ ergibt. Damit ist Φ_2 ein lokaler Diffeomorphismus. Man sieht leicht, dass Φ_2 die Menge $U = (0,\infty)\times(0,2\pi)$ bijektiv auf $V = \mathbb{R}^2\backslash N$ mit $N = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0,\ x_2 \geq 0\}$ abbildet, denn $r = \sqrt{\varphi_1^2+\varphi_2^2}$, durch $\left(\begin{smallmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{smallmatrix}\right) / \sqrt{\varphi_1^2+\varphi_2^2} = \left(\begin{smallmatrix}\sin\theta\\ \cos\theta\end{smallmatrix}\right)$ lässt sich $\theta \in (0,2\pi)$ eindeutig bestimmen, und N entspräche den Werten $r = 0$ bzw. $r > 0$ aber $\theta = 0$ der Polarkoordinaten. Wir haben damit nachgewiesen, dass $\Phi_2 : U \to V$ ein Diffeomorphismus ist.

- Es sei nun $n \geq 3$ und $A := D\Phi_{n-1}(r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2}) \in \mathrm{Mat}(n-1,\mathbb{R})$. Diese Matrix verwenden wir zur Berechnung von $D\Phi_n$.

  Es ist nämlich wegen

$$(\Phi_n)_k = \begin{cases} \sin\theta_{n-1}\,(\Phi_{n-1})_k & , k \in \{1,\ldots,n-1\} \\ r\cos\theta_{n-1} & , k = n \end{cases}$$

$$D\Phi_n = \left(\begin{array}{c|c} & rA_{1,1}\cos\theta_{n-1} \\ \sin\theta_{n-1}\cdot A & \vdots \\ & rA_{n-1,1}\cos\theta_{n-1} \\ \hline \cos\theta_{n-1}\ 0\ldots 0 & -r\sin\theta_{n-1} \end{array}\right),$$

  sodass aus einer Entwicklung nach der letzten Zeile

$$\begin{aligned} \det(D\Phi_n) &= -\det(D\Phi_{n-1})\,(\sin\theta_{n-1}))^{n-1}\cdot\left(r\sin\theta_{n-1} + r\frac{\cos^2\theta_{n-1}}{\sin\theta_{n-1}}\right) \\ &= -\det(D\Phi_{n-1})\,r\,(\sin\theta_{n-1}))^{n-2} \end{aligned}$$

  folgt. Es ergibt sich also durch Induktion die Formel

$$\det(D\Phi_n) = (-1)^{n-1} r^{n-1} \prod_{\ell=2}^{n-1} (\sin\theta_\ell)^{\ell-1} \neq 0.$$

  Damit ist Φ_n wieder ein lokaler Diffeomorphismus. Um zu zeigen, dass Φ_n den Definitionsbereich U bijektiv auf V abbildet, bestimmen wir die Umkehrfunktion $\Phi_n^{-1} : V \to U$.

  - Die Formel $\sum_{\ell=1}^{k}\varphi_\ell^2 = r^2\prod_{\ell=k}^{n-1}(\sin\theta_\ell)^2$ wird durch Induktion in k bewiesen und liefert den Radius $r = (\sum_{\ell=1}^{n}\varphi_\ell^2)^{1/2}$.
  - $\theta_1 \in (0,2\pi)$ wird wie oben im Fall $n = 2$ bestimmt: $\left(\begin{smallmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{smallmatrix}\right) / \sqrt{\varphi_1^2+\varphi_2^2} = \left(\begin{smallmatrix}\sin\theta_1\\ \cos\theta_1\end{smallmatrix}\right)$. Hier wird benutzt, dass $\Phi_n(r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-1}) \notin N$.

- Für $m = 2, \ldots, n-1$ ist $\cot\theta_m = \frac{\varphi_{m+1}}{\sqrt{\varphi_1^2+\varphi_2^2}} \prod_{\ell=2}^{m-1} \sin\theta_\ell$, und $\sqrt{\varphi_1^2+\varphi_2^2} > 0$. Auf $(0,\pi)$ ist aber der Cotangens streng monoton fallend. θ_m wird daher unter Benutzung der schon bekannten Winkel $\theta_1, \ldots, \theta_{m-1}$ bestimmt.

Man beachte, dass das Komplement N des Bildes $V \subseteq \mathbb{R}^n$ von Φ_n eine Nullmenge ist, es also für Volumenberechnungen keine Rolle spielt.

Wir benutzen nun die Transformationsformel zur Berechnung des Volumens einer n–dimensionalen Vollkugel $B^n \subseteq \mathbb{R}^n$. Wegen $\int_0^1 r^{n-1} dr = \frac{1}{n}$ ist

$$\lambda^n(B_n) = \frac{I_n}{n} \quad \text{mit} \quad I_n := 2\prod_{\ell=2}^{n} \int_0^\pi (\sin\theta)^{\ell-2} d\theta$$

(und dieser Ausdruck stimmt auch für $n = 1$). Nun besteht unsere erste Aufgabe in der Berechnung der Integrale

$$J_m := \int_0^\pi (\sin\theta)^m d\theta.$$

Die Rekursion beginnt bei $J_0 = \pi$ bzw. $J_1 = 2$. Für $m \geq 2$ ist mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (\sin\theta)^m \, d\theta &= (\sin\theta)^{m-1}(-\cos\theta)|_0^\pi + (m-1)\int_0^\pi (\sin\theta)^{m-2}\cos^2\theta \, d\theta \\ &= (m-1)\int_0^\pi (\sin\theta)^{m-2}(1-\sin^2\theta)\, d\theta, \end{aligned}$$

also

$$m\int_0^\pi (\sin\theta)^m \, d\theta = (m-1)\int_0^\pi (\sin\theta)^{m-2} \, d\theta$$

oder

$$J_m = \frac{m-1}{m} J_{m-2}.$$

Daraus ergibt sich unter Benutzung der *Doppelfakultät* $n!! := \prod_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}(n-2\ell)$

$$J_{2m} = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\pi \quad \text{und} \quad J_{2m+1} = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}2.$$

Damit ist $I_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$, denn $J_{n-1}J_n = \frac{\pi}{n/2}$ und $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

$$\boxed{\lambda^n(B_n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}}$$

Gleichzeitig legt die Rechnung nahe, dass das $(n-1)$–dimensionale Volumen der Kugeloberfläche $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ gleich I_n ist.

3 Differentialformen und Mannigfaltigkeiten

Für Funktionen *einer* Variablen verknüpft der Hauptsatz Ableitung und Integral. In diesem Kapitel werden wir den Satz von Stokes, die Verallgemeinerung des Hauptsatzes auf beliebige Dimensionen, herleiten.

In zahlreichen Anwendungen der Analysis wird *über Untermannigfaltigkeiten* des $\mathbb{R}^n$ *integriert*. Um diese Integration durchzuführen, entwickeln wir den Kalkül der Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten.

Dieser Kalkül lässt auch den *geometrischen Gehalt* physikalischer Theorien wie Elektrodynamik oder Allgemeine Relativitätstheorie klar hervortreten (beispielsweise lassen sich die sogenannten Maxwell-Gleichungen der Elektrodynamik mit Differentialformen als $dF = 0,\ d^*F = j$ schreiben, siehe Beispiel 3.18).

Eine gute Einführung gibt das Buch [AF] von AGRICOLA und FRIEDRICH.

3.1 Multilinearformen

Der erste Schritt ist die algebraische Theorie der *äußeren Formen*, denn diese beschreiben das lokale Verhalten der Differentialformen an einem Punkt der Mannigfaltigkeit.

3.1 Definition *Es sei E ein n–dimensionaler reeller Vektorraum. Eine Abbildung $\varphi : E \times \ldots \times E \to \mathbb{R}$ heißt* **multilinear***, wenn sie in jedem Argument linear ist, d.h. für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x_j, x_j^{I/II} \in E$*

$$\varphi(x_1, \ldots, x_{j-1}, \lambda x_j, x_{j+1}, \ldots, x_k) = \lambda\varphi(x_1, \ldots, x_k)$$

und

$$\begin{aligned}&\varphi(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j^I + x_j^{II}, x_{j+1}, \ldots, x_k)\\ &\quad = \varphi(x_1, \ldots, x_j^I, \ldots, x_k) + \varphi(x_1, \ldots, x_j^{II}, \ldots, x_k).\end{aligned}$$

*Genauer spricht man bei k Argumenten von einer k–***linearen** *Abbildung.*

Einige multilineare Abbildungen sind schon aus der Linearen Algebra vertraut:

3.2 Beispiele (multilineare Abbildungen)

1. $\underline{k = 1}$. Dann ist $\varphi : E \to \mathbb{R}$ eine *Linearform*, und für $\varphi \neq 0$ ist $\varphi^{-1}(0) \subset E$ ein Unterraum der Dimension $n - 1$.

   Auf $E = \mathbb{R}^n$ mit Standardbasis $e_1, \ldots, e_n \in E$ bezeichne $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in E^*$ die *Dualbasis* (d.h. diejenige Basis des Dualraumes E^* von E, für die $\alpha_i(e_j) = \delta_{ij}$ gilt). Dann ist $\varphi = \sum_{i=1}^n c_i\alpha_i$ mit Koeffizienten $c_i := \varphi(e_i)$.

2. $\underline{k=2}$, $E=\mathbb{R}^n$ mit kanonischem innerem Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Für $A\in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$ ist
$$\varphi : E\times E\to\mathbb{R} \quad , \quad \varphi(x,y):=\langle x,Ay\rangle$$
eine *Bilinearform*. Sie heißt *(anti–) symmetrisch*, wenn
$$\varphi(x,y)=\pm\varphi(y,x) \qquad (x,y\in E).$$

3. $\underline{k=n}$, $E=\mathbb{R}^n$. Die n-lineare Abbildung
$$\varphi(x_1,\dots,x_n):=\det(x_1,\dots,x_n) \qquad (x_i\in E)$$
heißt *Determinantenform*. Sie gibt das orientierte Volumen des von $x_1,\dots,x_n$ aufgespannten Parallelotops an. ◇

Offensichtlich können wir zwei k–lineare Abbildungen φ_1,φ_2 *addieren*, indem wir
$$(\varphi_1+\varphi_2)(x_1,\dots,x_k):=\varphi_1(x_1,\dots,x_k)+\varphi_2(x_1,\dots,x_k)$$
setzen und eine k–lineare Abbildung φ mit $\lambda\in\mathbb{R}$ *multiplizieren*:
$$(\lambda\varphi)(x_1,\dots,x_k):=\lambda(\varphi(x_1,\dots,x_k)).$$
Damit wird die Menge $L^k(E,\mathbb{R})$ der k–linearen Abbildungen von E in $\mathbb{R}$ zu einem $\mathbb{R}$–*Vektorraum*.

3.3 Definition *Es sei E ein n–dimensionaler $\mathbb{R}$–Vektorraum.*
• *Dann heißt $\varphi\in L^k(E,\mathbb{R})$* **äußere k–Form**, *wenn sie* **antisymmetrisch** *ist, d.h. für alle $1\le i<l\le k$ und $x_1,\dots,x_k\in E$ gilt*
$$\varphi(x_1,\dots,x_i,\dots,x_l,\dots,x_k)=-\varphi(x_1,\dots,x_l,\dots,x_i,\dots,x_k).$$
• *Der Unterraum der äußeren k–Formen wird mit $\Lambda^k(E)\subseteq L^k(E,\mathbb{R})$ bezeichnet.*

3.4 Beispiele Betrachten wir die Beispiele 3.2:

1. $\Lambda^1(E)=L^1(E,\mathbb{R})=E^*$.
2. $(x,y)\mapsto\langle x,Ay\rangle$ definiert eine äußere 2–Form auf $\mathbb{R}^n$ genau, wenn die Matrix A antisymmetrisch ist.
3. Die Determinantenform ist bis auf ihre Vielfachen die einzige äußere n–Form auf dem $\mathbb{R}^n$. ◇

3.5 Definition *Das* **äußere Produkt** *von* $\omega_1, \ldots, \omega_k \in \Lambda^1(E)$ *ist die durch*

$$\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k(x_1, \ldots, x_k) := \det \begin{pmatrix} \omega_1(x_1) & \ldots & \omega_k(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_1(x_k) & \ldots & \omega_k(x_k) \end{pmatrix} \qquad (x_i \in E)$$

definierte k*–lineare Abbildung.*

Offensichtlich ist $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k$ eine k–Form, also in $\Lambda^k(E)$.

Insbesondere ist damit für die Dualbasis $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ von E^*

$$\alpha_{i_1} \wedge \ldots \wedge \alpha_{i_k} \in \Lambda^k(E).$$

Wegen der Eigenschaften der Determinante stimmt diese äußere Form bis auf Vorzeichen mit derjenigen überein, bei der $i_1, \ldots, i_k$ aufsteigend geordnet sind und ist genau dann $\neq 0$, wenn alle Indizes voneinander verschieden sind.

Wir können nun jede k–Form $\omega \in \Lambda^k(E)$ eindeutig als Linearkombination

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \ldots i_k} \alpha_{i_1} \wedge \ldots \wedge \alpha_{i_k}$$

mit Koeffizienten

$$\omega_{i_1 \ldots i_k} := \omega(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) \in \mathbb{R}$$

darstellen. Da die Indexmengen $\{i_1, \ldots, i_k\}$ die k–elementigen Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ durchlaufen, gilt für $\dim(E) = n$

$$\dim\left(\Lambda^k(E)\right) = \binom{n}{k}.$$

Das *äußere Produkt* der k–Form ω mit einer l–Form

$$\psi := \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_{l \leq n}} \psi_{j_1 \ldots j_l} \alpha_{j_1} \wedge \ldots \wedge \alpha_{j_l}$$

wird nun als $\omega \wedge \psi \in \Lambda^{k+l}(E)$,

$$\omega \wedge \psi := \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_l \leq n} \omega_{i_1 \ldots i_k} \psi_{j_1 \ldots j_l} \alpha_{i_1} \wedge \ldots \wedge \alpha_{i_k} \wedge \alpha_{j_1} \wedge \ldots \wedge \alpha_{j_l}$$

definiert. All diejenigen Summanden, bei denen ein Indexpaar $i_r = j_s$ vorkommt, sind gleich Null, denn $\alpha_l \wedge \alpha_l = -\alpha_l \wedge \alpha_l = 0$.

- Offensichtlich ist das äußere Produkt *assoziativ*, d.h. für beliebige äußere Formen auf E gilt

$$(\omega \wedge \psi) \wedge \rho = \omega \wedge (\psi \wedge \rho).$$

- Weiter gilt für eine k–Form ω und eine l–Form ψ

$$\omega \wedge \psi = (-1)^{k \cdot l} \psi \wedge \omega,$$

denn wir müssen $k \cdot l$–mal 1–Formen kommutieren, um von der einen zur anderen Form zu gelangen.

3.6 Beispiel *Symplektische Form* auf dem $\mathbb{R}^{2n}$

$$\omega := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \wedge \alpha_{i+n} \in \Lambda^2(\mathbb{R}^{2n}).$$

Für $n = 2$ ergibt sich

$$\omega = \alpha_1 \wedge \alpha_3 + \alpha_2 \wedge \alpha_4,$$

also

$$\begin{aligned} \omega \wedge \omega &= (\alpha_1 \wedge \alpha_3 + \alpha_2 \wedge \alpha_4) \wedge (\alpha_1 \wedge \alpha_3 + \alpha_2 \wedge \alpha_4) \\ &= \underbrace{\alpha_1 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_3}_{0} + \alpha_2 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_3 \\ &\quad + \alpha_1 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_4 + \underbrace{\alpha_2 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_4}_{0} \\ &= (-1)^3 \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4 + (-1)^1 \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4 \\ &= -2\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4. \end{aligned}$$

Die symplektische Form ω hat eine Schlüsselrolle in der klassischen Mechanik. Dort bezeichnet man die Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ als Impulskoordinaten, die Koordinaten $x_{n+1}, \ldots, x_{2n}$ als Ortskoordinaten. $\diamond$

3.7 Beispiel Wir betrachten jetzt speziell den $\mathbb{R}^3$, also unseren Anschauungsraum, und ordnen Vektoren $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3 \in \mathbb{R}^3$ verschiedene äußere Formen zu:

- Allgemein vermittelt das kanonische innere Produkt im $\mathbb{R}^n$ einen Isomorphismus

$$v \mapsto v^* \quad , \quad v^*(w) := \langle v, w \rangle \qquad (w \in \mathbb{R}^n)$$

des $\mathbb{R}^n$ und seines Dualraumes. Die 1–Form v^* besitzt dabei die Gestalt

$$v^* = \sum_{i=1}^{n} v_i \alpha_i \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n).$$

- $v \in \mathbb{R}^n$ wird auch eine $(n-1)$–Form $\omega_v \in \Lambda^{n-1}(\mathbb{R}^n)$,

$$\omega_v(w_2, \ldots, w_n) := \det(v, w_2, \ldots, w_n) \qquad (w_2, \ldots, w_n \in \mathbb{R}^n)$$

zugeordnet. Speziell im $\mathbb{R}^3$ finden wir die 2–Form

$$\omega_v = v_1\alpha_2 \wedge \alpha_3 + v_2\alpha_3 \wedge \alpha_1 + v_3\alpha_1 \wedge \alpha_2.$$

- Das äußere Produkt zweier solcher 1–Formen ergibt auf dem $\mathbb{R}^3$ die 2–Form

$$\begin{aligned} v^* \wedge w^* &= (v_1\alpha_1 + v_2\alpha_2 + v_3\alpha_3) \wedge (w_1\alpha_1 + w_2\alpha_2 + w_3\alpha_3) \\ &= (v_1w_2 - v_2w_1)\alpha_1 \wedge \alpha_2 + (v_2w_3 - v_3w_2)\alpha_2 \wedge \alpha_3 \\ &\quad +(v_3w_1 - v_1w_3)\alpha_3 \wedge \alpha_1 \\ &= \omega_{v\times w}. \end{aligned}$$

Wir haben auf diese Weise das *Kreuzprodukt*

$$v \times w = \begin{pmatrix} v_2w_3 - v_3w_2 \\ v_3w_1 - v_1w_3 \\ v_1w_2 - v_2w_1 \end{pmatrix}$$

zweier Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$ gewonnen. ◇

3.8 Satz *Die Vektoren $w_1, \ldots, w_k \in E^*$ sind genau dann linear abhängig, wenn*

$$w_1 \wedge \ldots \wedge w_k = 0.$$

Beweis:

- Wenn sie linear abhängig sind, können wir einen Index $i \in \{1, \ldots, k\}$ mit $w_i = \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq i}}^{k} c_l w_l$ finden. Damit gilt aber

$$w_1 \wedge \ldots \wedge w_k = \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq i}}^{k} c_l w_1 \wedge \ldots \wedge w_l \wedge \ldots \wedge w_k = 0,$$

denn in jedem Summanden kommt w_l doppelt vor.

- Andernfalls können wir die Vektoren zu einer Basis

$$w_1, \ldots, w_n \quad \text{mit} \quad n := \dim(E^*)$$

ergänzen, sodass $w_1 \wedge \ldots \wedge w_n \neq 0$ ist. Dann ist aber auch $w_1 \wedge \ldots \wedge w_k \neq 0$. □

3.9 Definition *Der reelle Vektorraum*

$$\Lambda^*(E) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Lambda^k(E) \cong \bigoplus_{k=0}^{\dim(E)} \Lambda^k(E)$$

(mit $\Lambda^0(E) := \mathbb{R}$) mit der durch das Dachprodukt gegebenen Multiplikation heißt die **äußere** *oder* **Grassmann-Algebra** *über E.*

3.10 Bemerkungen 1. $\dim(\Lambda^*(E)) = 2^{\dim(E)}$, denn $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

2. Für beliebige $k, l \in \mathbb{N}_0$ ist für alle $\omega \in \Lambda^k(E)$ und $\varphi \in \Lambda^l(E)$: $\omega \wedge \varphi \in \Lambda^{k+l}(E)$, aber für $m > \dim(E)$ ist $\dim(\Lambda^m(E)) = 0$.

3.11 Definition *Für eine lineare Abbildung $f : E \to F$ endlich dimensionaler $\mathbb{R}$–Vektorräume und $\omega \in \Lambda^k(F)$ heißt die durch*

$$f^*(\omega)(v_1, \ldots, v_k) := \omega(f(v_1), \ldots, f(v_k))$$

definierte k–Form $f^*(\omega)$ die **Zurückziehung** *(engl.* **pull–back***) von ω mit f.*

Es gilt offensichtlich $f^*(\omega) \in \Lambda^k(E)$, denn $f^*(\omega)$ ist k–linear und antisymmetrisch.

3.12 Satz *1. Die Abbildung $f^* : \Lambda^*(F) \to \Lambda^*(E)$ ist linear.*

2. Für $g \in L(F, G)$ ist $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

3. Für die identische Abbildung $\mathrm{Id}_E : E \to E$ ist $\mathrm{Id}_E^* = \mathrm{Id}_{\Lambda^*(E)}$.

4. Für eine invertierbare Abbildung $f \in GL(E, F)$ ist $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.

5. $f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*(\alpha) \wedge f^*(\beta)$.

Beweis: Wir beweisen die Behauptungen für die Summanden $\Lambda^k,\ k \in \mathbb{N}_0$ von Λ^*: Für alle Vektoren $v_1, \ldots, v_k \in E$ gilt

1. Mit $\alpha, \beta \in \Lambda^k(F)$ und $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} f^*(c_1\alpha + c_2\beta)(v_1, \ldots, v_k) &= (c_1\alpha + c_2\beta)(f(v_1), \ldots, f(v_k)) \\ &= c_1\alpha(f(v_1), \ldots, f(v_k)) + c_2\beta(f(v_1), \ldots, f(v_k)) \\ &= c_1 f^*\alpha(v_1, \ldots, v_k) + c_2 f^*\beta(v_1, \ldots, v_k). \end{aligned}$$

2. $(g \circ f)^*\alpha(v_1, \ldots, v_k) = \alpha(g \circ f(v_1), \ldots, g \circ f(v_k)) = g^*\alpha(f(v_1), \ldots, f(v_k))$ $= f^* \circ g^*\alpha(v_1, \ldots, v_k)$

3. $\mathrm{Id}_E^*(\alpha)(v_1, \ldots, v_k) = \alpha(\mathrm{Id}_E(v_1), \ldots, \mathrm{Id}_E(v_k)) = \alpha(v_1, \ldots, v_k)$.

4. Folgt aus 2. und 3.: $(f^{-1})^* f^* = (f \circ f^{-1})^* = \mathrm{Id}_F^* = \mathrm{Id}_{\Lambda^*(F)}$.

5. Hausaufgabe □

3.2 Differentialformen

Wir wollen nun Differentialformen einführen, aus Zeitgründen aber nur auf offenen Teilmengen $U \subseteq \mathbb{R}^n$, nicht auf Mannigfaltigkeiten.

Eine *Differentialform* ω auf $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine von Ort zu Ort variierende äußere Form, deren Variation wir als glatt voraussetzen.

Wir schreiben eine allgemeine k*–Form* ω in der *Grundform*

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \omega_{i_1 \ldots i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \in \Omega^k(U), \tag{3.1}$$

wobei die $\omega_{i_1 \ldots i_k} \in \Omega^0(U) := C^\infty(U, \mathbb{R})$ sind, und die dx_i den Koordinatenfunktionen $x_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zugeordnete 1–Differentialformen sind ($dx_i \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$). Den Raum der k–Differentialformen schreiben wir ab jetzt zur Unterscheidung vom Raum der äußeren k–Formen mit dem Symbol Ω statt Λ.

Die dx_i sind durch ihre Wirkung auf ein Vektorfeld $v : U \to \mathbb{R}^n$ definiert, und $dx_i(v)(y) := v_i(y)$. 1–Differentialformen machen also aus Vektorfeldern Funktionen, und für k Vektorfelder $v^{(l)} : U \to \mathbb{R}^n$ ist für das ω aus (3.1)

$$\omega\left(v^{(1)}, \ldots, v^{(k)}\right) := \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \omega_{i_1 \ldots i_k} \cdot \det \begin{pmatrix} dx_{i_1}(v^{(1)}) & \ldots & dx_{i_k}(v^{(1)}) \\ \vdots & & \vdots \\ dx_{i_1}(v^{(k)}) & \ldots & dx_{i_k}(v^{(k)}) \end{pmatrix}$$

definiert. Das Ergebnis ist also eine reelle Funktion auf U.

Die Rechenregeln übertragen sich von den äußeren Formen auf die Differentialformen.

Auf dem $\mathbb{R}$–Vektorraum

$$\Omega^*(U) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Omega^k(U) \cong \bigoplus_{k=0}^{n} \Omega^k(U)$$

der Differentialformen betrachten wir jetzt den *Differentialoperator* d, der durch

- $df := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ für Funktionen $f \in C^\infty(U, \mathbb{R}) = \Omega^0(U)$
- und $d\omega := \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} d\omega_{i_1 \ldots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$ für k–Formen $\omega = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \omega_{i_1 \ldots i_k} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$

definiert ist. d verwandelt eine k–Form also in eine $(k+1)$–Form.

3.13 Definition
Diese lineare Abbildung $d : \Omega^*(U) \to \Omega^*(U)$ *heißt* **äußere Ableitung**.

3.14 Beispiele (äußere Ableitung)

1. Für $\omega \in \Omega^0(\mathbb{R}^3)$ ist $d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \omega}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \omega}{\partial x_3} dx_3$.

2. Für $\omega = \omega_1 dx_1 + \omega_2 dx_2 + \omega_3 dx_3 \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ ist

$$\begin{aligned} d\omega &= (d\omega_1) \wedge dx_1 + (d\omega_2) \wedge dx_2 + (d\omega_3) \wedge dx_3 \\ &= \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 + \left(\frac{\partial \omega_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} \right) dx_2 \wedge dx_3 \\ &\quad + \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1} \right) dx_3 \wedge dx_1 \end{aligned}$$

3. Für $\omega = \omega_{12} dx_1 \wedge dx_2 + \omega_{23} dx_2 \wedge dx_3 + \omega_{31} dx_3 \wedge dx_1 \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ ist

$$d\omega = \left(\frac{\partial \omega_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \omega_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \omega_{31}}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

4. Für $\omega \in \Omega^3(\mathbb{R}^3)$ ist $d\omega = 0$. ◇

3.15 Satz *d ist eine* **Antiderivation**, *d.h. für $\alpha \in \Omega^k(U)$ und $\beta \in \Omega^l(U)$ ist*

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta.$$

Beweis: Wegen der Linearität von d genügt es, diese Gleichung für Monome

$$\alpha := f \underbrace{dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}}_{\tilde{\alpha}} \quad , \quad \beta := g \underbrace{dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_l}}_{\tilde{\beta}}, \ f, g \in C^\infty(U, \mathbb{R})$$

zu beweisen. Es gilt

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= d(f \cdot g)\tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta} = ((df)g + f(dg))\tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta} \\ &= (df)\tilde{\alpha} \wedge g\tilde{\beta} + (-1)^k f\tilde{\alpha} \wedge (dg)\tilde{\beta} = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta. \end{aligned}$$

□

3.16 Satz *Auf $\Omega^*(U)$ gilt* $\boxed{dd = 0}$.

Beweis:

1. Für $f \in \Omega^0(U)$ ist $ddf = d\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_i} dx_l \wedge dx_i = \sum_{1 \le r < s \le n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_r \partial x_s} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_s \partial x_r} \right) dx_r \wedge dx_s = 0$, da wir wegen der Glattheit von f die partiellen Ableitungen vertauschen können.

2. Für $\omega = \sum \omega_{i_1 \ldots i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \in \Omega^k(U)$ ist

$$dd\omega = \sum (\underbrace{dd\omega_{i_1 \ldots i_k}}_{0}) \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} = 0,$$

denn gemäß Satz 3.15 wird die äußere Ableitung auf die 1-Formen $d\omega_{i_1 \ldots i_k}$ und dx_{i_l} angewandt, und nach 1. ist das Ergebnis Null. □

3.17 Definition *Eine Differentialform $\varphi \in \Omega^*(U)$ heißt*

- **geschlossen**, *wenn $d\varphi = 0$,*
- **exakt**, *wenn $\varphi = d\psi$ für ein $\psi \in \Omega^*(U)$ gilt.*

Nach Satz 3.16 sind exakte Differentialformen geschlossen.
Für k–Formen auf $U = \mathbb{R}^n$ gilt (für $k \geq 1$) auch die Umkehrung (sog. *Poincaré-Lemma*, siehe [AF]).

3.3 Vektoranalysis

Wir erinnern uns an Beispiel 3.7, in dem wir Vektoren in 1–Formen bzw. $(n-1)$–Formen umgewandelt haben. Gleiches wollen wir jetzt auch für Vektorfelder und Differentialformen tun. Wir ordnen also mithilfe des kanonischen Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf dem $\mathbb{R}^n$ dem Vektorfeld $v \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$

1. die durch $v^* \in \Omega^1(U)$, $v^*(w) := \langle v, w \rangle \quad (w \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n))$ definierte 1–Form zu. In Koordinaten ist $v^* = \sum_{i=1}^n v_i dx_i$.

2. Die Zuordnung einer $(n-1)$–Form $\omega_v \in \Omega^{n-1}(U)$ zum Vektorfeld v wird durch

$$\omega_v(w_1, \ldots, w_{n-1}) := \det(v, w_1, \ldots, w_{n-1}) \qquad (w_i \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)) \quad (3.2)$$

definiert, also durch ihre Anwendung auf $n-1$ Vektorfelder. In Koordinaten ergibt sich $\omega_v = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n(v, \cdot, \ldots, \cdot)$, also

$$\omega_v = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} v_i dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_n. \qquad (3.3)$$

Dabei bedeutet $\widehat{dx_i}$ Entfernen von dx_i.

Im ersten Fall sieht man die Rechenregel

$$\boxed{\operatorname{grad}(f)^* = df} \tag{3.4}$$

für den *Gradienten*

$$\operatorname{grad}(f) \equiv \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

einer reellen Funktionen f, im zweiten gilt

$$\boxed{\operatorname{div}(v) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = d\omega_v} \tag{3.5}$$

für die *Divergenz*

$$\operatorname{div}(v) \equiv \nabla \cdot v := \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v_k}{\partial x_k}$$

eines Vektorfeldes v. Denn nach (3.3) ist

$$d\omega_v = \sum_{i,k=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

und die Summanden sind für $k \neq i$ gleich Null. Da $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ die kanonische Volumenform auf dem $\mathbb{R}^n$ ist, ergibt dies eine Relation, die praktisch nützlich ist.

Speziell für $n = 3$ Dimensionen ist die *Rotation*

$$\operatorname{rot} v \equiv \nabla \times v := \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

des Vektorfeldes v durch die Relation

$$\boxed{\omega_{\operatorname{rot} v} = d(v^*)} \tag{3.6}$$

mit der äußeren Ableitung verknüpft, siehe Beispiel 3.14.2.

- Es ergibt sich aus (3.5), (3.6) und Satz 3.16

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} v)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = d\omega_{\operatorname{rot} v} = ddv^* = 0,$$

also mit $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \neq 0$

$$\boxed{\operatorname{div} \operatorname{rot} v = 0.}$$

Diese und ähnliche Relationen sind übrigens, da sie aus $dd = 0$ abgeleitet sind, auch bei einer anderen Wahl der Riemannschen Metrik[14] gültig.

- Auch die Relation

$$\boxed{\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0,}$$

die für beliebige glatte Funktionen f gültig ist, entpuppt sich als eine Manifestation des Gesetzes $dd = 0$: Wegen (3.6) und (3.4) gilt

$$\omega_{\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f)} = d(\operatorname{grad} f)^* = ddf = 0.$$

- Als letztes Beispiel für die Nützlichkeit der Differentialformen in der Vektoranalysis soll die Identität

$$\boxed{\operatorname{div}(v \times w) = \langle \operatorname{rot} v, w\rangle - \langle v, \operatorname{rot} w\rangle}$$

abgeleitet werden: Wir haben schon im Beispiel 3.7 gesehen, dass

$$\boxed{v^* \wedge w^* = \omega_{v\times w}} \tag{3.7}$$

gilt, denn die entsprechende Rechenregel für äußere Formen überträgt sich direkt auf Differentialformen im $\mathbb{R}^3$. Also gilt unter Benutzung von (3.5), (3.7) und (3.6)

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}(v \times w)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
&= d\omega_{v\times w} = d(v^* \wedge w^*) \\
&= (dv^*) \wedge w^* - v^* \wedge dw^* = \omega_{\operatorname{rot} v} \wedge w^* - v^* \wedge \omega_{\operatorname{rot} w^*} \\
&= (\langle \operatorname{rot} v, w\rangle - \langle v, \operatorname{rot} w\rangle)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3,
\end{aligned}$$

was zu beweisen war.

3.18 Beispiel (Elektromagnetisches Feld)

Die kartesischen Koordinaten $x_1, \ldots, x_4$ auf der Raumzeit $\mathbb{R}^4$ bezeichnen den Raumpunkt $x := (x_1, x_2, x_3)$ und den Zeitpunkt $t := x_4$. Die *Feldstärke* $F \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$ sei durch

$$F := B_1\, dx_2 \wedge dx_3 + B_2\, dx_3 \wedge dx_1 + B_3\, dx_1 \wedge dx_2 + \sum_{i=1}^{3} E_i\, dx_i \wedge dx_4$$

[14] **Def.:** Eine **Riemannsche Metrik** auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung $g \in C^\infty(U, \operatorname{Mat}(n, \mathbb{R}))$, wobei $g(x)$ für $x \in U$ eine symmetrische positiv definite Matrix ist. $g(x)$ definiert also ein Skalarprodukt $(Y, Z) \mapsto \langle Y, g(x)Z\rangle$ bei x; siehe auch [AF], Kapitel 3.2.

gegeben, wobei $E := (E_1, E_2, E_3) \in C^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ das elektrische und $B := (B_1, B_2, B_3) \in C^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ das magnetische Feld bezeichnet.

Die *homogene Maxwellgleichung* $dF = 0$ ist äquivalent zu

$$\mathrm{div}_x(B) = 0 \quad , \quad \frac{\partial B}{\partial t} = -\mathrm{rot}_x E.$$

Aus dem Poincaré-Lemma schließen wir auf die Existenz eines so genannten *Eichfeldes* $A \in \Omega^1(\mathbb{R}^4)$ mit $F = dA$. $\diamond$

Ein weiterer Aspekt von Differentialformen ist ihr Verhalten unter Abbildungen.

3.19 Definition *Es seien $U \subseteq \mathbb{R}^m, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} : U \to V$ glatt. Die* **Zurückziehung (pull–back)** *$\varphi^*\omega$ der Differentialform*

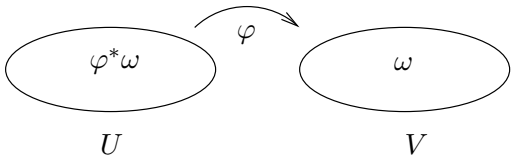
$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \omega_{i_1 \ldots i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \in \Omega^k(V)$$

ist durch

$$\varphi^*\omega = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \omega_{i_1 \ldots i_k} \circ \varphi \cdot d\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\varphi_{i_k}$$

definiert.

Der Pull–back $\varphi^*\omega$ ist also eine k–Form auf $U \subseteq \mathbb{R}^m$.



3.20 Beispiel Die Polarkoordinaten sind durch $\varphi = \binom{\varphi_1}{\varphi_2} : \mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$,

$$\varphi_1(r, \psi) := r\cos\psi \quad , \quad \varphi_2(r, \psi) := r\sin\psi$$

definiert. Es soll die 2–Form $\omega = f dx_1 \wedge dx_2$ zurückgezogen werden. Mit $\tilde{f} := f \circ \varphi$, also der in Polarkoordinaten geschriebenen Funktion f, ergibt sich wegen

$$d\varphi_1 = \cos(\psi)dr - r\sin(\psi)d\psi \quad , \quad d\varphi_2 = \sin(\psi)dr + r\cos(\psi)d\psi$$

$$\varphi^*\omega = \tilde{f} d\varphi_1 \wedge d\varphi_2 = \tilde{f}\, r\,(\cos^2\psi + \sin^2\psi) dr \wedge d\psi = \tilde{f}\, r dr \wedge d\psi.$$

3.21 Satz *Für alle $\varphi \in C^\infty(U, V)$ gilt*

$$\boxed{\varphi^* d = d\varphi^*.}$$

Beweis: Durch Anwendung der Kettenregel:

$$\begin{aligned} d\varphi^*(f dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}) &= d((f \circ \varphi) \cdot d\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\varphi_{i_k}) \\ &= d(f \circ \varphi) \wedge d\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\varphi_{i_k}. \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \varphi^* d(f dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}) &= \varphi^* \left(\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_l} dx_l \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \right) \\ &= \underbrace{\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_l} \circ \varphi \, d\varphi_l}_{df \circ \varphi} \wedge d\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\varphi_{i_k}. \end{aligned}$$

□

Durch Spezialisierung auf Diffeomorphismen φ schließen wir aus Satz 3.21, dass die äußere Ableitung einer Differentialform unabhängig vom verwendeten Koordinatensystem definiert ist.

3.4 Integration von Differentialformen

Vorbetrachtung: In der *Analysis I* wurden für geeignete Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei Integralbegriffe eingeführt:

- das *Riemannsche Integral* $\int_a^b f(x)\,dx$, interpretiert als (signierte) Fläche unter dem Graphen von f auf dem Intervall $[a, b]$
- das *unbestimmte Integral* $\int f(x)\,dx$, d.h. die Menge aller Stammfunktionen $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $F' = f$.

Die Stammfunktionen unterscheiden sich nur durch eine reelle Konstante voneinander.

- Der *Hauptsatz der Infinitesimalrechnung* verknüpfte die beiden Integralbegriffe folgendermaßen: Für eine beliebige Stammfunktion F von f gilt

$$\int_a^b f\,dx = F(b) - F(a).$$

Wir beachten, dass

1. auf der rechten Seite der *Rand* $\{a, b\} = \partial I$ des Intervalls $I := [a, b]$ auftaucht, über das auf der linken Seite integriert wird und

2. dass der Integrand $f dx$, als 1–Form aufgefasst, gleich der *äußeren Ableitung* dF der Stammfunktion F ist.

Bei der Integration von geeigneten Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ haben wir den Riemannschen Integralbegriff erweitert, indem wir für geeignete Gebiete $M \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\int_M f\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f \mathbb{1}_M\, dx$$

als (signiertes) Volumen unter dem Graphen von f, restringiert auf M, interpretiert haben.

Unbeachtet blieb dabei die Frage, ob auch für $n > 1$ Dimensionen ein Zusammenhang zwischen Integration und Differentiation existiert.

Nun ist die Ableitung einer Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ die 1–Form $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$. Nur für $n = 1$ konnten wir dieser Ableitung wieder eine Funktion (nämlich $f' = \frac{\partial f}{\partial x}$) zuordnen.

Tatsächlich liefert uns, wie wir sehen werden, die Integration von *Differentialformen* k–ter Stufe über k–dimensionale Flächen die adäquate Verallgemeinerung des Hauptsatzes, den Satz von Stokes. Wir integrieren zunächst n–Formen auf dem $\mathbb{R}^n$, und danach k–Formen auf k–dimensionalen Flächen im $\mathbb{R}^n$.

3.22 Definition *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und $\omega \in \Omega^n(U)$ habe kompakten Träger (d.h. für $\omega = f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ ist $f(x) = 0$ außerhalb eines Kompaktums $K \subseteq U$). Das* **Integral** *von ω ist dann*

$$\int_U \omega := \int_U f(x)\, dx_1 \ldots dx_n.$$

3.23 Satz *Es seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi : V \to U$ ein Diffeomorphismus mit konstantem Vorzeichen ε von $\det(D\varphi(x))$. Dann gilt*

$$\int_V \varphi^* \omega = \varepsilon \int_U \omega.$$

Beweis: Nach Definition des pull–back ist unter Benutzung der symmetrischen Gruppe S_n

$$\begin{aligned}
\varphi^*\omega = &\quad f \circ \varphi\, d\varphi_1 \wedge \ldots \wedge d\varphi_n = f \circ \varphi \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^n \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{i_1}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_{i_n}} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_n} \\
= &\quad f \circ \varphi \sum_{\pi \in S_n} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{\pi(1)}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_{\pi(n)}} dx_{\pi(1)} \wedge \ldots \wedge dx_{\pi(n)} \\
= &\quad f \circ \varphi \left(\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}(\pi) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{\pi(1)}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_{\pi(n)}} \right) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \\
= &\quad f \circ \varphi \, \det(D\varphi)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n.
\end{aligned}$$

Nach dem Transformationssatz (Satz 2.32) ergibt die Integration dieser n–Form auf V
$\int_V f \circ \varphi \, \det(D\varphi) \, dx_1 \ldots dx_n = \varepsilon \int_V f \circ \varphi \, |\det D\varphi| \, dx = \varepsilon \int_U f dx = \varepsilon \int_U \omega$. $\square$
Wir sehen insbesondere, dass das Integral über die n–Form ω nicht von der Wahl des (orientierten) Koordinatensystems abhängt.

Betrachten wir $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ als die *Standardvolumenform* auf dem $\mathbb{R}^n$, dann können wir $\int_U \omega$ auch als Integral der *Funktion* f über U auffassen.

Wenn wir als nächstes Funktionen über k–dimensionale Flächen im $\mathbb{R}^n$ integrieren wollen, müssen wir uns zunächst über die Standardvolumenform klar werden. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und für $n \geq k$

$$\varphi : U \to \mathbb{R}^n$$

eine injektive glatte Abbildung mit $\operatorname{rang}(D\varphi(x)) = k \quad (x \in U)$, also vom maximalen Rang. φ parametrisiert die k–dimensionale Fläche $V := \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$. Gesucht ist nun eine Form $\omega^{(\varphi)} \in \Omega^k(U)$, für die für jedes in V offene $V' \subseteq V$

$$\int_{\varphi^{-1}(V')} \omega^{(\varphi)}$$

der Flächeninhalt von V' ist.

Drei vernünftige Forderungen an die φ–abhängige Definition von $\omega^{(\varphi)}$ sind, dass

- das Quadrat $V' := (0,1)^k \times \{0\}^{n-k} \subseteq \mathbb{R}^n$ den Flächeninhalt 1 besitzt.
- sich unter einer Drehung $O \in SO(n)$ der Flächeninhalt von V' nicht ändert, und ebenso wenig unter Translationen.
- der Flächeninhalt von V sich nicht ändert, wenn die Parametrisierung (orientierungserhaltend) geändert wird.

Diese Forderungen werden von der **Volumenform**

$$\omega^{(\varphi)} := \sqrt{\det(g)} \, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k \tag{3.8}$$

der parametrisierten Fläche V erfüllt, wobei die symmetrische $k \times k$–Matrix g durch

$$\boxed{g := (D\varphi)^\top D\varphi}$$

definiert ist, und für reguläre Parametrisierung ($\operatorname{rang}(D\varphi(x)) = k \quad (x \in U)$) wegen

$$\langle v, g(x)v \rangle = \langle D\varphi(x)v, D\varphi(x)v \rangle = \|D\varphi(x)v\|_2^2 > 0 \qquad (v \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\})$$

$g(x) > 0$ gilt, die Matrix also positiv definit ist.
g heißt *metrischer Tensor*. $|g|$ bezeichnet in der Literatur oft $\det(g)$.

Ist beispielsweise $\psi : U \to \mathbb{R}^n$ durch $\psi = O \circ \varphi$ mit $O \in SO(n)$ gegeben, dann ist g invariant unter der Drehung:

$$(D\psi)^\top D\psi = (OD\varphi)^\top (OD\varphi) = (D\varphi)^\top O^\top OD\varphi = (D\varphi)^\top D\varphi = g.$$

Wir können eine Funktion $f : V \to \mathbb{R}$ integrieren, indem wir das Integral

$$\boxed{\int_U f \circ \varphi \cdot \omega^{(\varphi)}}$$

bilden. Dieser Ausdruck ist invariant unter einer Veränderung der Parametrisierung. Der Spezialfall $f = \mathbb{1}_V$ liefert wieder das k-dimensionale Volumen von V.

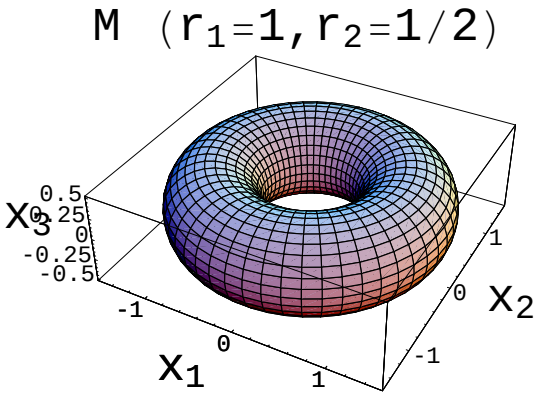
3.24 Beispiel Wir wollen den Flächeninhalt eines zweidimensionalen Torus $M \subseteq \mathbb{R}^3$ berechnen. Dieser sei für Parameter $r_1 > r_2 > 0$ durch $M := \varphi(U)$ mit

$$\varphi : U \to \mathbb{R}^3 \qquad U := [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$$

und

$$\varphi(\psi_1, \psi_2) := \begin{pmatrix} (r_1 + r_2 \cos\psi_2) \cos\psi_1 \\ (r_1 + r_2 \cos\psi_2) \sin\psi_1 \\ r_2 \sin\psi_2 \end{pmatrix}$$

parametrisiert. Wir scheren uns nicht weiter um die Tatsache, dass $U \subset \mathbb{R}^2$ nicht offen ist, denn der Rand von U ist eine Lebesgue-Nullmenge.



Die Koeffizienten der Riemannschen Metrik $g = \left(\begin{smallmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{smallmatrix}\right)$ mit $g_{21} = g_{12}$ sind

$$\begin{aligned}
g_{11}(\psi_1,\psi_2) &= \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial\psi_1}\right)^2 = (r_1 + r_2\cos\psi_2)^2(\sin^2\psi_1 + \cos^2\psi_1) \\
&= (r_1 + r_2\cos\psi_2)^2 \\
g_{12}(\psi_1,\psi_2) &= \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\varphi_i}{\partial\psi_1}\frac{\partial\varphi_i}{\partial\psi_2} = r_2\sin\psi_2(r_1 + r_2\cos\psi_2)\sin\psi_1\cos\psi_1 \\
&\qquad\qquad -r_2\sin\psi_2(r_1 + r_2\cos\psi_2)\cos\psi_1\sin\psi_1 \\
&= 0 \\
g_{22}(\psi_1,\psi_2) &= \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial\psi_2}\right)^2 = r_2^2[\sin^2\psi_2(\cos^2\psi_1 + \sin^2\psi_1) + \cos^2\psi_1] \\
&= r_2^2,
\end{aligned}$$

also $\sqrt{|g|} = \sqrt{\det g} = r_2(r_1 + r_2\cos\psi_2) > 0$ und damit die Torus-Fläche

$$\int_U \omega^{(\varphi)} = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{|g|}\,d\psi_1\,d\psi_2 = (2\pi)^2 r_1 r_2.$$

Betrachten wir den im Beispiel vorliegenden Spezialfall einer *Hyperfläche* V des $\mathbb{R}^n$ genauer. $V = \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ besitzt eine Parametrisierung

$$\varphi : U \to \mathbb{R}^n \quad \text{für} \quad U \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \quad \text{offen} \quad .$$

Auf V existiert ein bis auf Vorzeichen eindeutiges stetiges *Normalenvektorfeld*

$$N : V \to \mathbb{R}^n \quad , \quad \|N(y)\| = 1 \qquad (y \in V),$$

das senkrecht auf V steht, also

$$\langle N \circ \varphi(x), D\varphi(x)w\rangle = 0 \qquad (x \in U,\, w \in \mathbb{R}^{n-1}).$$

Es gilt dann für die $n \times n$–Matrix $M(x) := \big(N \circ \varphi(x), D\varphi(x)\big)$

$$M^\top(x)M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & g(x) & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \qquad (x \in U)$$

also $\det g(x) = \det(M^\top(x)M(x)) = (\det(M(x)))^2$, oder, bei geeigneter Wahl der Orientierung des Normalenvektorfeldes

$$\sqrt{|g|} = \det M. \tag{3.9}$$

Damit ergibt sich für die in (3.2) definierte zum Normalenvektorfeld N duale $(n-1)$–Form ω_N auf V die Gleichheit zur Volumenform der Hyperfläche V:

3.25 Satz *$\varphi^*\omega_N = \omega^{(\varphi)}$ für $\omega^{(\varphi)}$ aus (3.8).*

Beweis: Bezeichnen wir mit $\widehat{d\varphi_k}$ wieder das Entfernen von $d\varphi_k$, dann ist

$$\begin{aligned}\varphi^*\omega_N &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}N_k\circ\varphi\, d\varphi_1\wedge\ldots\wedge\widehat{d\varphi_k}\wedge\ldots d\varphi_n\\ &= \det(M)\, dx_1\wedge\ldots\wedge dx_{n-1}.\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt also aus (3.9). □

Eine weitere wichtige Situation ist die, dass im die k–dimensionale Untermannigfaltigkeit $V\subseteq\mathbb{R}^n$ umgebenden Raum eine k–Form $\omega\in\Omega^k(\mathbb{R}^n)$ existiert, deren Integral über $V=\varphi(U)$ (mit einer offenen Teilmenge $U\subseteq\mathbb{R}^k$ und durch $\varphi: U\to\mathbb{R}^n$ parametrisiert) wir durch

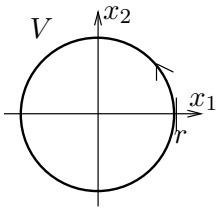
$$\int_V\omega := \int_U\varphi^*\omega$$

definieren. Nach Satz 3.23 ist dieses Integral bis auf das Vorzeichen unabhängig von der Wahl der Parametrisierung.

3.26 Beispiel 1–Form $\omega\in\Omega^1(\mathbb{R}^2)$, $\omega := x_1dx_2$

$U := [0,2\pi)$, $\varphi: U\to\mathbb{R}^2$,

$\varphi(\psi) := \binom{r\cos\psi}{r\sin\psi}$, also $V=\varphi(U)$ der Kreis vom Radius $r>0$ um den Ursprung.



$$\int_V\omega=\int_U\varphi^*\omega=\int_U r\cos\psi\, d(r\sin\psi)=r^2\int_U\cos^2\psi\, d\psi=\pi r^2.$$

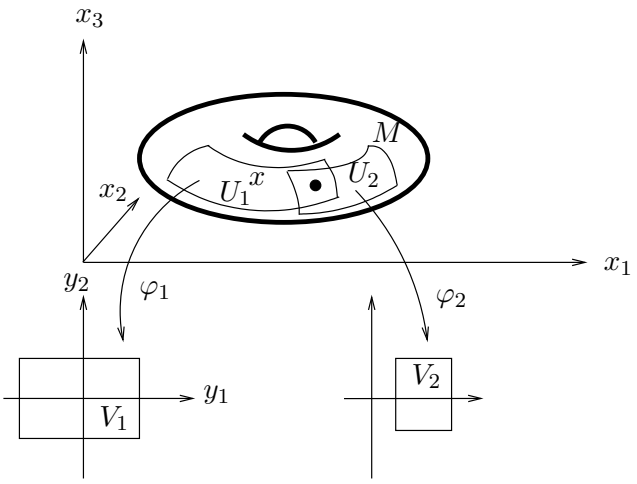
In diesem Beispiel fällt auf, dass das Integral von $d\omega = dx_1\wedge dx_2$, also dem kanonischen orientierten Flächenelement des $\mathbb{R}^2$, über die von V eingeschlossene Kreisscheibe vom Radius r gleich dem Integral von ω über die Kreislinie ist.

Dies ist kein Zufall, sondern die Manifestation eines allgemeinen Satzes, des sogenannten Satzes von Stokes. Dieser stellt eine Beziehung zwischen Integralen über Mannigfaltigkeiten und Integralen über ihren Rand her. Ohne wegen der Kürze der Zeit den allgemeinen Mannigfaltigkeitsbegriff einführen zu können, möchte ich doch kurz das Wichtigste skizzieren.[15]
Die in der *Analysis II* eingeführten, in den $\mathbb{R}^n$ eingebettete *k–dimensionale Mannigfaltigkeiten* $M\subseteq\mathbb{R}^n$ sehen zunächst in einer geeigneten Umgebung $V_x\subseteq M$ jedes ihrer Punkte $x\in M$ wie der $\mathbb{R}^k$ aus:

[15] Siehe z.B. [AF] für eine genauere und weitergehende Einführung.

3.27 Definition
*Für $k \in \{0, \ldots, n\}$ heißt eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ k–***dimensionale Untermannigfaltigkeit*** *des $\mathbb{R}^n$, wenn jeder Punkt $x \in M$ eine Umgebung $V_x \subseteq \mathbb{R}^n$ besitzt, so dass für eine geeignete Abbildung $f \in C^1(V_x, \mathbb{R}^{n-k})$ mit regulärem Wert 0 gilt: $M \cap V_x = f^{-1}(0)$.*

Das heißt aber nicht, dass die gesamte Mannigfaltigkeit notwendig homöomorph zu irgendeiner offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^k$ ist. Beispielsweise ist dies für den in Beispiel 3.24 besprochenen $k = 2$–dimensionalen Torus M im $\mathbb{R}^3$ nicht der Fall (denn im $\mathbb{R}^2$ gibt es keine nicht leere offene Teilmenge, die kompakt ist).



• Wohl aber kann man den topologischen Raum M durch *Kartengebiete*, d.h. offene Teilmengen $U_i \subseteq M$ überdecken, die zu offenen Teilmengen $V_i \subseteq \mathbb{R}^k$ homöomorph sind. Für kompakte Mannigfaltigkeiten genügen endlich viele U_i.
• Die inversen Abbildungen $\varphi_i : U_i \to V_i \subseteq \mathbb{R}^k$ (*Kartenabbildungen*) sollen *verträglich* sein, d.h. $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ auf dem Definitionsbereich $\varphi_j(U_i \cap U_j) \subseteq V_j$ glatt.
• Besitzt die Mannigfaltigkeit M einen *Rand*, dann verlangen wir, dass die Kartenbilder V_i als Teilmengen des Halbraums

$$\mathbb{R}^k_+ := \{(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_k \geq 0\}$$

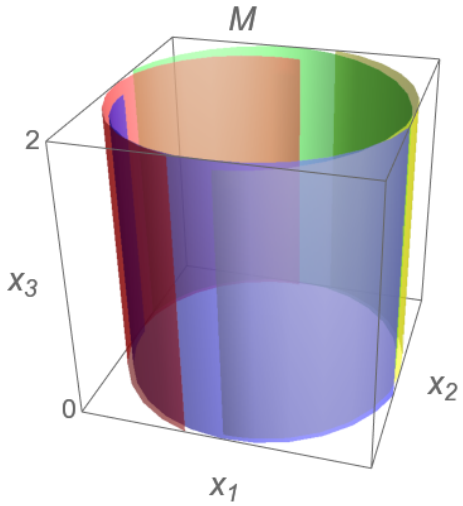
offen sind. Der Rand des Halbraums $\mathbb{R}^k_+$ ist $\partial\mathbb{R}^k_+ = \mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}$.
• Der *Rand* ∂M von M ist dann Vereinigung der Mengen $\varphi_i^{-1}(\mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}) \subseteq M$. ∂M ist eine $(k-1)$–dimensionale Mannigfaltigkeit.

3.28 Beispiel Berandeter halb-unendlicher Zylinder

$$M := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = R^2,\ x_3 \geq 0\}$$

mit Radius $R > 0$.
Wir können z.B. die folgenden vier Karten $(U_i^{\pm}, \varphi_i^{\pm})$, $i = 1, 2$ benutzen:

$$\begin{aligned} U_i^{\pm} &:= \{x \in M \mid \pm x_i > 0\} \\ \varphi_i^{\pm} &: U_i^{\pm} \to \mathbb{R}^2_+ \\ \varphi_1^{\pm}(x_1, x_2, x_3) &:= (\pm x_2, x_3) \\ \varphi_2^{\pm}(x_1, x_2, x_3) &:= (\pm x_1, x_3). \end{aligned}$$



Der Rand des Zylinders ist $\partial M = \{x \in M \mid x_3 = 0\}$, also ein Kreis mit Radius R in der (x_1, x_2)–Ebene des $\mathbb{R}^3$. ◇

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung besitzt die folgende Verallgemeinerung:

3.29 Satz (Stokes) *Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine (orientierte) k–dimensionale Mannigfaltigkeit und ω eine $(k-1)$–Form (mit kompaktem Träger) auf M. Dann gilt*

$$\boxed{\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega}\ .$$

3.30 Beispiele

1. **Kurvenintegral:** Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ das Bild einer (regulären, injektiven) Kurve

   $$c : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$$

   und $F : M \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion.

   Dann besteht ∂M aus den Punkten $c(0)$ und $c(1)$. Diese bekommen als Anfangs– und Endpunkte aber unterschiedliche Orientierung, sodass die Formel

   $$\int_0^1 \underbrace{\frac{\partial F \circ c}{\partial t}(t)\, dt}_{dF \circ c} = F \circ c(1) - F \circ c(0) \tag{3.10}$$

   entsteht. Ist $F = \tilde{F}\restriction_M$ mit einer glatten Funktion $\tilde{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dann ist das Integral in (3.10) gleich $\tilde{F}(c(1)) - \tilde{F}(c(0))$, unabhängig von der Wahl des Weges c mit vorgegebenem Anfangs– und Endpunkt.

2. Symplektische 2–Form $\omega = -d\theta = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$ auf dem Phasenraum $P := \mathbb{R}^n_p \times \mathbb{R}^n_q$ mit 1–Form $\theta := \sum_{i=1}^n p_i dq_i$.

Es sei $c : S^1 \to P$ eine Schleife, deren Bild das Bild M einer Kreisscheibe berandet, d.h.

$$c(S^1) = \partial M.$$

Dann ist das Integral $\int_{\partial M} \theta = -\int_M \omega$, unabhängig von der Wahl von M.

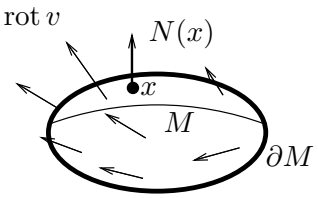
3. **Satz von Kelvin-Stokes:** Wir bleiben bei dem Bild M einer Kreisscheibe. Diese soll aber diesmal im $\mathbb{R}^3$ liegen.

   Weiter sei $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld. Dann ist v^* eine 1–Form, dv^* eine (auf M integrierbare) 2–Form, und nach (3.6) gilt

   $$\omega_{\operatorname{rot} v} = dv^*.$$

   Also ist das Integral von dv^* über M gleich dem Integral des Skalarproduktes von $\operatorname{rot} v$ mit der Flächennormale N (bezüglich des Flächenelementes $\sqrt{|g|}dx_1 \wedge dx_2$) und es folgt nach Satz 3.25

   $$\begin{aligned} &\int_M \langle \operatorname{rot} v, N\rangle \sqrt{|g|}\, dx_1 \wedge dx_2 \\ &= \int_M \langle \operatorname{rot} v, N\rangle\, \omega_N = \int_M \omega_{\operatorname{rot} v} = \int_M dv^* = \int_{\partial M} v^*. \end{aligned}$$

   Beispielsweise könnte v das Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeit sein. Dann sieht man aus der obigen Formel, dass bei Rotationsfreiheit der Strömung die Tangentialkomponente der Geschwindigkeit bezüglich der Schleife ∂M im Mittel verschwindet.

4. **Gaußscher Integralsatz**: Die Divergenz eines Vektorfeldes ist nach (3.5) via

   $$\operatorname{div}(v)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = d\omega_v$$

   mit der äußeren Ableitung verbunden.

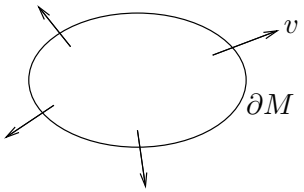
   Ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine n–dimensionale berandete Untermannigfaltigkeit (z.B. eine Vollkugel), dann gilt nach dem Satz von Stokes

   $$\int_M d\omega_v = \int_{\partial M} \omega_v.$$

Für die Randpunkte $x \in \partial M$ bezeichne $N(x)$ den Normalenvektor. $v(x)$ lässt sich eindeutig in der Form

$$v(x) = \langle v(x), N(x) \rangle \, N(x) + w(x) \quad (3.11)$$

schreiben, wobei dann $w(x)$ tangential an ∂M bei x ist, also $\int_{\partial M} \omega_w = 0$ und mit (3.11) $\int_{\partial M} \omega_v = \int_{\partial M} \langle v, N \rangle \, \omega_N$. Es ergibt sich also



$$\int_M \operatorname{div}(v) \, dx_1 \ldots dx_n = \int_M d\omega_v = \int_{\partial M} \omega_v = \int_{\partial M} \langle v, N \rangle \, \omega_N.$$

Ist das Vektorfeld divergenzfrei (wie beispielsweise das Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeit), dann fließt also durch die Randfläche ∂M genauso viel aus M heraus wie herein. ◇

3.31 Zur Geschichte (Satz von Stokes)

Als Faustregel kann man sagen, dass nach Mathematikern benannte Sätze nicht von diesen zum ersten Mal bewiesen wurden. So verhält es sich auch beim Satz von Stokes. Seine komplizierte Entstehungsgeschichte wird im Artikel [Ka] von Katz beleuchtet. Er schreibt:

'All of the mathematicians who stated and proved versions of this theorem were interested in it for specific physical reasons. Gauss was interested in the theory of magnetic attraction, Ostrogradsky in the theory of heat, Green in electricity and magnetism, Poisson in elastic bodies, and Sarrus in floating bodies. In nearly all cases, the theorems involved occurred in the middle of long papers and were only thought of as tools toward some physical end.' ◇

4 Gewöhnliche Differentialgleichungen

4.1 Zur Geschichte (Integration und Differentialgleichungen)
'The early history of a branch of mathematics which has enjoyed two and a half centuries of vigorous life naturally tends more and more to be masked by the density of its later growth. Yet our hazy knowledge of the birth and infancy of the science of differential equations condenses upon a remarkable date, the eleventh day of November, 1675, when Leibniz first set down on paper the equation

$$\int y\,dy = \tfrac{1}{2}y^2,$$

thereby not merely solving a simple differential equation, which was, in itself a trivial matter, but what was an act of great moment, forging a powerful tool; the integral sign.

The early history of the infinitesimal calculus abounds in instances of problems solved through the agency of what were virtually differential equations; it is even true to say that the problem of integration, which may be regarded as the solution of the simplest of all types of differential equations, was a practical problem even in the middle of the sixteenth century.' Aus INCE, [In, Appendix A].

4.1 Definitionen und Beispiele

Differentialgleichungen sind so vielfältig wie die Naturvorgänge, die sie beschreiben. Wir beginnen mit (etwas informellen) Definitionen und einer Grobeinteilung:

4.2 Definition

- *Eine* **Differentialgleichung (DGL)** *ist eine Gleichung, in der Ableitungen einer oder mehrerer Funktionen von einer oder mehreren Variablen auftreten. Die gesuchten Unbekannten sind hierbei die Funktionen.*
- *Hängen die Funktionen von nur* **einer** *Variablen ab, so heißt die DGL* **gewöhnlich**, *sonst* **partiell**.
- *Werden mehrere Funktionen gesucht, so spricht man von einem* **Differentialgleichungssystem**, *sonst von einer* **Einzel-DGL**.

4.3 Beispiele (Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen)

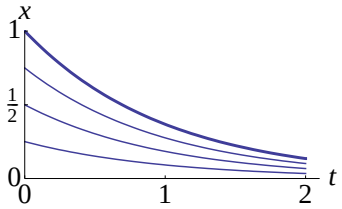
1. Für $c > 0$ beschreibt die gewöhnliche Einzel-Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt}(t) = -c \cdot x(t)$$

z.B. radioaktiven Zerfall mit Stoffmenge x als Funktion der Zeit t und Zerfallskonstante c. Ist die Stoffmenge zur Zeit $t = 0$ gleich $x_0 \in \mathbb{R}$, dann ist

$$x(t) = x_0 e^{-ct} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

die eindeutige Lösung. Wir erhalten also eine einparametrige Schar von Lösungen, die linear vom Anfangswert x_0 abhängt:



2. Die Bahn eines geworfenen Körpers im konstanten Schwerefeld der Erde mit Erdbeschleunigung[16] $g > 0$ wird unter Vernachlässigung der Luftreibung durch das gewöhnliche DGL–System,

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}(t) = 0 \quad , \quad \frac{d^2x_2}{dt^2}(t) = -g$$

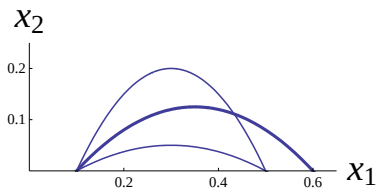
beschrieben. Dabei bezeichnet x_1 die Horizontalkomponente und x_2 die Vertikalkomponente des Ortes als Funktionen der Zeit t.
Für Anfangsort $x_0 = \binom{x_{1,0}}{x_{2,0}} \in \mathbb{R}^2$ und Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = \binom{v_{1,0}}{v_{2,0}} \in \mathbb{R}^2$ ist die *Lösung:*

$$x_1(t) = x_{1,0} + v_{1,0}t \quad , \quad x_2(t) = x_{2,0} + v_{2,0}t - \tfrac{1}{2}gt^2 \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Dies entspricht den Geschwindigkeiten

$$v_1(t) := \frac{d}{dt}x_1(t) = v_{1,0} \quad , \quad v_2(t) := \frac{d}{dt}x_2(t) = v_{2,0} - gt \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Die Zeichnung zeigt verschiedene Wurfbahnen bei gleichem Anfangsort und Betrag der Anfangsgeschwindigkeit, aber unterschiedlicher Richtung der Anfangsgeschwindigkeit. Der Wurf mit Winkel $\alpha = \pi/4$ führt dabei



am weitesten, denn für die Zeit $t := 2v_{2,0}/g$ ist $x_2(t) = x_{2,0}$, und

$$x_1(t) - x_{1,0} = 2\frac{v_{1,0}v_{2,0}}{g} = \frac{\|v_0\|^2 \sin(2\alpha)}{g}.$$

3. Die *Wellengleichung* $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$ mit Parameter $c > 0$ (*Ausbreitungsgeschwindigkeit*) ist ein Beispiel einer partiellen Differentialgleichung. Für beliebige Funktionen $f_\pm \in C^2(\mathbb{R})$ ist

$$u(x,t) := f_+(x - ct) + f_-(x + ct) \qquad (x, t \in \mathbb{R})$$

[16] In Bodenhöhe ist $g = 9.81 m/s^2$

eine Lösung. Eine physikalische Anwendung ist die Ausbreitung elektrischer Signale $f_\pm$ in einem Telegraphendraht, wobei die Position mit x, die Zeit mit t bezeichnet wird.

Wir werden in dieser Vorlesung nur gewöhnliche DGLn (englisch: *ordinary differential equations* oder *o.d.e.*) behandeln.

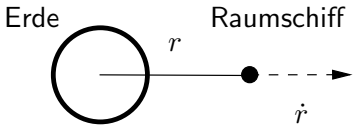
4.4 Definition *Die Ordnung des höchsten in der DGL auftretenden Differentialquotienten wird* **Ordnung der Differentialgleichung** *genannt.*

4.5 Beispiele (Ordnung von Differentialgleichungen)

1. 4.3.1. ist von erster Ordnung,

2. 4.3.2. und die Wellengleichung 4.3.3. sind von zweiter Ordnung.

3. Die DGL $\frac{d^2r}{dt^2}(t) = -\frac{\gamma}{r^2(t)}$ ist von zweiter Ordnung. Sie beschreibt z.B. die Bewegung eines sich radial mit Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt}$ vom Erdmittelpunkt wegbewegenden Raumschiffes. γ ist dann das Produkt von Gravitationskonstante und Erdmasse $M > 0$, r der Abstand des Raumschiffes vom Erdmittelpunkt und $\dot{r} = \frac{d}{dt}r$ die Radialgeschwindigkeit.



4.6 Definition • *Ein gewöhnliches DGL-System für die Funktionen $x_1, \ldots, x_m$ heißt* **linear**, *wenn es die Form*

$$\sum_{i=0}^{n} A^{(i)}(t)x^{(i)}(t) \quad = \quad b(t)$$

hat. Dabei bezeichnet $x^{(i)} := (\frac{d^i}{dt^i}x_1, \ldots, \frac{d^i}{dt^i}x_m)^\top$ den Vektor der i–ten Ableitungen; $A^{(i)}(t) \in \mathrm{Mat}(m, \mathbb{R})$ und $b(t) \in \mathbb{R}^m$ sind vorgegebene Matrix– bzw. vektorwertige Funktionen.
• *Andernfalls heißt das DGL-System* **nicht linear**.
• *Eine lineare DGL heißt* **homogen**, *wenn $b(t) = 0$ für alle t, sonst* **inhomogen**.
• *Die Komponenten b_l von b heißen* **Störfunktionen**.

Beispiele 4.3.1. und 12.2.3. sind linear homogen.
Beispiel 4.3.2. ist linear inhomogen.
Beispiel 4.5.3. ist nicht linear.

Ab jetzt werden viele Begriffe nur für Einzel–DGLn eingeführt. Das meiste überträgt sich aber auf DGL–Systeme.

4.7 Definition *1. Eine DGL heißt* **implizit**, *wenn sie die Form*

$$F(t, x, x', \ldots, x^{(n)}) = 0 \tag{4.1}$$

hat, **explizit**, *wenn sie die Form*

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}) \tag{4.2}$$

hat.

2. Eine n–mal differenzierbare auf dem offenen Intervall I definierte Funktion $x : I \to \mathbb{R}$ heißt **explizite Lösung** *der DGL (4.1) bzw. (4.2), wenn gilt:*

$$F(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)) = 0 \qquad (t \in I)$$

$$\textit{bzw.} \quad x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)) \qquad (t \in I).$$

Beispiele 4.3.1.–3. waren explizite DGLn, für 1. und 2. wurden auch (die) expliziten Lösungen angegeben.

4.8 Bemerkung Algebraische Gleichungen, wie z.B. $ax^2 + bx + c = 0$ mit Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{R}$, sind uns vertraut. Diese sind *Aussageformen* über dem Variablenbereich $\mathbb{R}$, es entsteht also eine (wahre oder falsche) Aussage, wenn wir eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ einsetzen.

Ähnlich betrachten wir z.B. eine DGL vom Typ (4.2) mit stetigem f als Aussageform über dem Variablenbereich $C^n(I)$, wobei die Lösungen wieder die wahren Aussagen liefern [Wu]. ◇

4.9 Beispiel 4. $y\frac{dy}{dx} + x = 0$ ist eine implizite nichtlineare DGL. Die Kreisgleichung $x^2 + y^2 = c \geq 0$ ist die allgemeine Lösung, aber in *impliziter* Form.

Explizite Lösung: $y(x) = \pm\sqrt{c - x^2}$ für $|x| < \sqrt{c}$, also

$$\frac{dy}{dx} = \mp\frac{x}{\sqrt{c - x^2}} = -\frac{x}{y}.$$

4.10 Definition

- *Eine einzelne Lösung (ohne frei wählbare Konstanten) heißt* **spezielle** *oder* **partikuläre** *Lösung.*
- *Eine parameterabhängige Lösung einer DGL n–ter Ordnung heißt* **allgemeine** *Lösung, wenn sie n frei wählbare Konstanten enthält,*
- *eine parameterabhängige Lösung heißt* **vollständig**, *wenn alle speziellen Lösungen durch Wahl geeigneter Parameterwerte aus ihr hervorgehen.*

- *Eine nicht zu einer parameterabhängigen Lösung gehörende spezielle Lösung heißt* **singulär**.

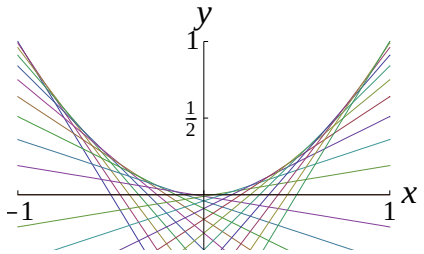
Beispiele 4.3.1. und 2.: Die allgemeinen = vollständigen Lösungen wurden angegeben. Eine partikuläre Lösung von 2. ist z.B. $x_1(t) = 0,\ x_2(t) = -\frac{1}{2}gt^2$.

Beachte: In 2. gab es *vier* Parameter $x_{1,0}, x_{2,0}, v_{1,0}, v_{2,0}$, denn es waren zwei DGLn zweiter Ordnung, $2 \times 2 = 4$.
Beispiel 4.9.4.: Hier war $c \geq 0$ Parameter der allgemeinen = vollständigen Lösung.

4.11 Beispiel 5. $(y')^2 - 4xy' + 4y = 0$

ist eine implizite nichtlineare DGL erster Ordnung.

Die *allgemeine* Lösung: $y(x) = 2cx - c^2,\ c \in \mathbb{R}$ ist eine durch c parametrisierte Geradenschar.
Dies ist aber *nicht* die *vollständige* Lösung, denn es existiert noch die *singuläre* Lösung $y(x) = x^2$. Diese ist die Einhüllende der Geradenschar, siehe Abbildung.

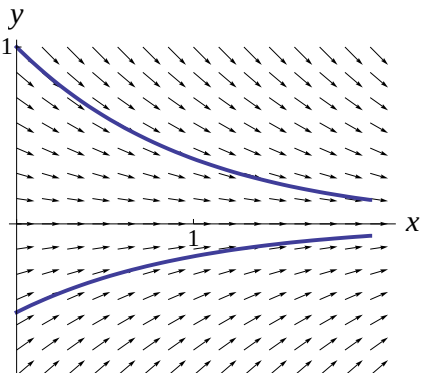


Frage:
- Wie findet man Lösungen?
- Woher weiß man, dass man alle gefunden hat?

Diese Frage beschäftigt seit der Zeit Newtons viele Mathematiker (und uns in den nächsten Wochen[17]).

Wir betrachten zunächst die expliziten Einzel-DGLn erster Ordnung

$$y' = f(x,y) \qquad (x,y) \in U \subseteq \mathbb{R}^2,\ U \text{ offen.}$$



Geometrische Interpretation: Zeichnet man an jedem Punkt $(x,y) \in U$ eine Gerade der Steigung $f(x,y)$, dann ist

$$\text{graph}(\tilde{y}) = \{(x, \tilde{y}(x))\}$$

jeder speziellen Lösung $\tilde{y} \equiv \tilde{y}(x)$ der DGL eine Kurve in U, die überall *tangential* an den lokalen Geraden ist.

Beispiel $y' = -cy$, also $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = -cy$, siehe Abbildung. ◇

[17] Numerische Methoden zur Lösung von DGLn werden z.B. in [DB] behandelt

Um also die durch den Punkt (x, y) gehende spezielle Lösung zu finden, bewegt man sich, von (x, y) ausgehend, tangential zum Richtungsfeld.

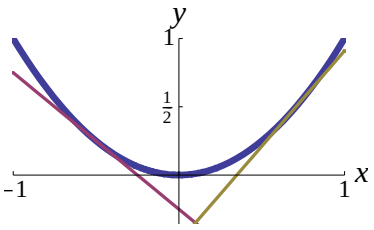
Vorsicht: Woher wissen wir überhaupt, dass durch jeden Punkt $(x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2$ nur *eine* Lösungskurve geht?

4.12 Beispiele (Gegenbeispiele zur eindeutigen Lösbarkeit)

1. **Implizite DGL, Beispiel 4.9.4.**

$$(y')^2 - 4xy' + 4y = 0 \tag{4.3}$$

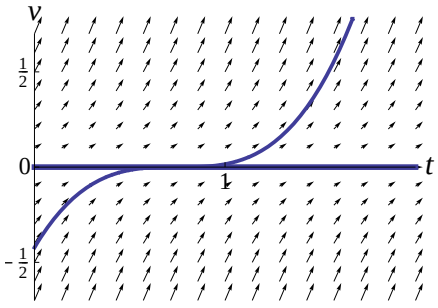
Hier gehen durch jeden Punkt (x_0, y_0) unterhalb des Graphen der Parabel $y = x^2$ zwei Lösungskurven, d.h. an die Parabel tangentiale Geraden. Deren Steigungen entsprechen den zwei Lösungen der quadratischen Gleichung (4.3) für y' am Punkt (x_0, y_0).
Oberhalb des Graphen der Parabel gibt es keine Lösung.



2. **Explizite Differentialgleichung mit nicht lipschitz–stetigem f**
Eine allgemeine Lösung der DGL $\dot{v} = f(v)$ mit $f(v) := 3\sqrt[3]{v^2}$ ist

$$v(t) = (t - c)^3, \ c \in \mathbb{R}\,.$$

Daneben gibt es aber eine singuläre Lösung: $v(t) = 0$.
Durch jeden Punkt auf der t–Achse gehen damit mindestens zwei Lösungskurven!
In diesem Beispiel fällt auf, dass die Funktion f zwar stetig, aber bei 0 nicht differenzierbar ist.



Der Vergleich mit dem (eindeutigen) Fall $f(t) := |t|$ legt aber nahe, dass nicht die mangelnde Differenzierbarkeit sondern die fehlende Lipschitz–Stetigkeit die Nichteindeutigkeit verursacht.

Physikalisch modelliert dieses Beispiel das Wachstum des Volumens v von Regentropfen durch Kondensation von Wasserdampf an der Oberfläche. Dabei wird angenommen, dass die Rate kondensierten Wassers proportional zur

Oberfläche des Tropfens, also zu $v^{2/3}$ ist. Zur eigentlichen *Entstehung* von Tropfen kann das Modell also nichts aussagen. $\diamond$

Nach dieser informellen Übersicht über die bei gewöhnlichen DGLn auftretenden Phänomene zeigen wir nun mathematisch rigoros die (lokale) Existenz und Eindeutigkeit der Lösung genügend regulärer expliziter gewöhnlicher DGLn 1. Ordnung. Später werden wir sehen, dass damit auch die gleiche Frage für explizite DGLn höherer Ordnung beantwortet wird.

4.2 Lokale Existenz und Eindeutigkeit der Lösung

Wir werden nun sehen, dass bei etwas mehr Regularität von f die DGL lokal eindeutig lösbar ist. Dazu schauen wir uns aber gleich die n–dimensionale Situation an:

4.13 Definition

- *Ist der* **erweiterte Phasenraum** $U \subseteq \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n$ *offen, und das* **zeitabhängige Vektorfeld** $f : U \to \mathbb{R}^n$ *stetig, dann heißt die Gleichung*

$$\boxed{\dot{x} = f(t, x)}$$

  nicht autonome *oder* **explizit zeitabhängige** *DGL.*

- *Ist speziell* $U = \mathbb{R}_t \times \tilde{U}$ *mit* **Phasenraum** $\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}_x^n$ *offen und* f *von der Form* $f(t, x) = \tilde{f}(x)$*, dann heißt die DGL* **autonom** *oder* **dynamisches System**.

- *Eine differenzierbare Funktion* $\varphi : I \to \mathbb{R}_x^n,\ I \subseteq \mathbb{R}_t$ *Intervall heißt* **Lösung** *der DGL, wenn* $\mathrm{graph}(\varphi) \subseteq U$ *und*

$$\frac{d\varphi}{dt} \mid_{t=\tau} = f(\tau, \varphi(\tau)) \qquad (\tau \in I).$$

- $\varphi : I \to \mathbb{R}_x^n$ **genügt** *der* **Anfangsbedingung** (t_0, x_0)*, wenn* $t_0 \in I$*,* $(t_0, x_0) \in U$ *und* $\varphi(t_0) = x_0$ *gilt.* φ **löst das Anfangswertproblem** *(AWP), wenn gilt:*

$$\frac{d\varphi}{dt} \mid_{t=\tau} = f(\tau, \varphi(\tau)) \quad (\tau \in I) \quad \textit{und} \quad \varphi(t_0) = x_0 \tag{4.4}$$

- *Das zeitabhängige Vektorfeld* $f : U \to \mathbb{R}^n$ *genügt*

  - **global einer Lipschitz-Bedingung** *mit Konstante* L*, wenn*

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\| \qquad ((t, x_i) \in U)$$

- *und* **(lokal) einer Lipschitz-Bedingung**, *wenn jeder Punkt* (τ, x) *aus* U *eine offene Umgebung* $V \subseteq U$ *besitzt, sodass für eine Konstante* $L = L(\tau, x)$

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\| \qquad ((t, x_i) \in V).$$

4.14 Bemerkungen (Lipschitz-Bedingung)

1. Man beachte, dass die Lipschitzstetigkeit nur bezüglich der x–Variablen gefragt ist.

2. Ist $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$, dann ist in einem konvexen[18] kompakten Gebiet $K \subseteq U$ (nach Satz 8.13 der *Analysis II*[19]) die lokale Lipschitz-Bedingung mit der Konstante $L := \max_{(t,x)\in K}\|D_x f(t, x)\|$ erfüllt.

3. Es war schon festgestellt worden, dass aus einer Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}^n_x$ des AWP durch Restriktion $\varphi\,|_{\tilde{I}}$ auf ein kleines, t_0 enthaltendes Intervall $\tilde{I} \subseteq I$ eine von φ im strengen Sinn verschiedene Lösung entsteht, denn die Definitionsbereiche der beiden Funktionen φ und $\varphi|_{\tilde{I}}$ sind ja unterschiedlich. In diesem Sinn ist die Lösung des AWP also nicht eindeutig.

   Da wir aber später sowieso nach dem größtmöglichen Zeitintervall I suchen, für das die Lösung von (4.4) definiert ist, interessiert uns diese triviale Verschiedenheit der Lösungen nicht. Daher wird sie wegdefiniert: ◇

4.15 Definition Die Lösung des AWP (4.4) ist eindeutig, *wenn für je zwei Lösungen* $\varphi_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n_x$ *und* $\varphi_2 : I_2 \to \mathbb{R}^n_x$ *auf dem Intervall* $I_3 := I_1 \cap I_2$ *gilt:*

$$\varphi_1|_{I_3} = \varphi_2|_{I_3}.$$

Wir werden in Satz 4.17 die eindeutigen lokalen Lösungen des Anfangswertproblems als Fixpunkte einer kontrahierenden Abbildung auf einem Raum stetiger Funktionen finden. Damit wir sicher sein können, dass der Fixpunkt überhaupt existiert, müssen wir gemäß dem Banachschen Fixpunktsatz[20] zunächst kontrollieren, dass der benutzte Funktionenraum ein vollständiger metrischer Raum ist.

---

[18] **Definition:** $V \subseteq \mathbb{R}^m$ heißt *konvex*, wenn für je zwei Punkte $v_0, v_1 \in V$ gilt:
$v_a := (1 - a)v_0 + av_1 \in V \qquad (a \in [0, 1])$.

[19] **Beweis (zeitunabhängiger Fall):** Für $v_0, v_1 \in V$ ist
$f(v_1) - f(v_0) = \int_0^1 \frac{d}{da} f(v_a)\, da = \int_0^1 Df(v_a)\frac{dv_a}{da}\, da = \int_0^1 Df(v_a)(v_1 - v_0)\, da$, woraus die Lipschitz-Ungleichung folgt: $\|f(v_1) - f(v_0)\| \leq \int_0^1 \|Df(v_a)\|\, da \cdot \|v_1 - v_0\| \leq L\|v_1 - v_0\|$. □

[20] **Banachscher Fixpunktsatz** Eine kontrahierende Abbildung $f : X \to X$ auf einem vollständigen metrischen Raum (X, d) mit Lipschitz-Konstante $\theta < 1$ besitzt genau einen Fixpunkt x^*, und für die m-**te Iterierte** $x_m := f(x_{m-1})$ **von** $x_0 \in X$ gilt

$$\boxed{d(x_m, x^*) \leq d(x_1, x_0)\frac{\theta^m}{1-\theta} \qquad (m \in \mathbb{N}).} \tag{4.5}$$

Beweis: Kapitel 8.1 der *Analysis II*.

4.16 Satz *Es sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und M der Raum der Kurven in V, also $M := C([a,b], V)$. Für $f, g \in M$ setzen wir $d(f,g) := \sup\limits_{t\in[a,b]} \|f(t) - g(t)\|$. Dann ist (M,d) ein vollständiger metrischer Raum.*

Beweis:

- Auf $[a,b]$ nimmt die stetige Funktion $t \mapsto \|f(t) - g(t)\|$ ihr Maximum an. Also ist $d(f,g) < \infty$. Andererseits ist $d(f,g) = 0$ genau für $f = g$.
  Ebenso gilt $d(g,f) = d(f,g)$ und

$$\begin{aligned} d(f,h) &= \sup_{t\in[a,b]} \|(f(t) - g(t)) + (g(t) - h(t))\| \\ &\leq \sup_{t\in[a,b]} (\|f(t) - g(t)\| + \|g(t) - h(t)\|) \\ &\leq \sup_{t\in[a,b]} \|f(t) - g(t)\| + \sup_{t\in[a,b]} \|g(t) - h(t)\| \\ &= d(f,g) + d(g,h). \end{aligned}$$

  Damit ist (M,d) ein metrischer Raum.

- Weiter ist für alle $t \in [a,b]$ und eine Cauchyfolge $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ von Kurven $f_m \in M$ auch die Folge $(f_m(t))_{m\in\mathbb{N}}$ von Punkten aus V eine Cauchyfolge, denn es gilt $\|f_m(t) - f_n(t)\| \leq d(f_m, f_n)$. Da $\mathbb{R}^n$ vollständig ist und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen ist, existiert für alle $t \in [a,b]$ der Punkt

$$f(t) := \lim_{m\to\infty} f_m(t) \in \mathbb{R}^n$$

  und ist sogar aus V.

- Ist damit schon der Limes $f \in M$? Das ist noch nicht klar, denn f könnte unstetig sein. Wir verwenden zum Nachweis der Stetigkeit ein sog. $\varepsilon/3$–*Argument*:
  Für jedes $\varepsilon > 0$ und ein geeignetes $N \in \mathbb{N}$ gilt ja für die Cauchyfolge $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ insbesondere

$$d(f_m, f_N) < \varepsilon/3 \qquad (m \geq N),$$

  also auch für alle $t \in [a,b]$

$$\|f(t) - f_N(t)\| = \lim_{m\to\infty} \|f_m(t) - f_N(t)\| \leq \varepsilon/3.$$

  Da f_N stetig ist, gibt es für jedes $s \in [a,b]$ ein $\delta > 0$ mit

$$\|f_N(t) - f_N(s)\| < \varepsilon/3 \qquad (t : |t - s| < \delta).$$

Damit ist nach der Dreiecksungleichung für diese t

$$\begin{array}{rcccccc} \|f(t)-f(s)\| & \leq & \|f(t)-f_N(t)\| & + & \|f_N(t)-f_N(s)\| & + & \|f_N(s)-f(s)\| \\ & < & \varepsilon/3 & + & \varepsilon/3 & + & \varepsilon/3 \\ & = & \varepsilon. & & & & \end{array}$$

Also ist auch f stetig, d.h. $f \in M$.

- Damit gilt auch $f = \lim_{m\to\infty} f_m$ im metrischen Raum (M,d), denn

$$\begin{aligned} d(f,f_N) &= \sup_{t\in[a,b]} \|f(t)-f_N(t)\| = \sup_t \lim_{m\to\infty} \|f_m(t)-f_N(t)\| \\ &\leq \sup_t \sup_{m\geq N} \|f_m(t)-f_N(t)\| = \sup_{m\geq N} d(f_m,f_N), \end{aligned}$$

und da die f_n eine Cauchyfolge bilden, geht letzterer Abstand für $N\to\infty$ gegen Null. Wir haben damit nachgewiesen, dass jede Cauchyfolge $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ konvergiert, (M,d) also vollständig ist. □

4.17 Satz (Picard–Lindelöf) *Das zeitabhängige Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^n$ auf der offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x$ genüge einer Lipschitz-Bedingung auf U. Dann existiert für $(t_0,x_0) \in U$ ein $\varepsilon > 0$, sodass das Anfangswertproblem*

$$\dot{x} = f(t,x) \quad , \quad x(t_0) = x_0 \tag{4.6}$$

eine eindeutige Lösung $\varphi : [t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon] \to \mathbb{R}^n$ besitzt.

Beweis: Wir bezeichnen das Zeitintervall mit $I := [t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$.

- Existiert eine solche Lösung, dann muss sie die Integralgleichung

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))\,ds \qquad (t \in I) \tag{4.7}$$

erfüllen, wie man durch Differentiation bzw. Einsetzen von t_0 feststellt. Andererseits ist nach dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung (Satz 12.15 der *Analysis I*) jede stetige Lösung von (4.7) auch schon differenzierbar und damit eine Lösung des Anfangswertproblems

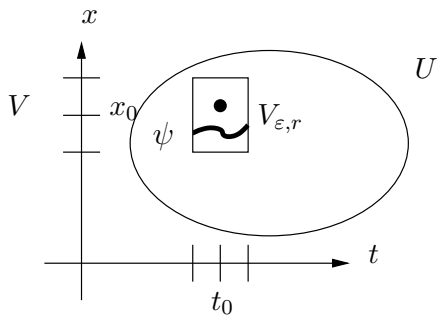
$$\dot{x} = f(t,x) \quad , \quad x(t_0) = x_0.$$

- Es soll nun die Lösung φ als Fixpunkt einer Abbildung A aufgefunden werden. A wird stetige Kurven im Phasenraum in solche abbilden.

Um den Definitionsbereich von A günstig zu wählen, soll der Phasenraumbereich die Vollkugel $V := \overline{U_r(x_0)}$ sein. Wir setzen

$$V_{\varepsilon,r} := I \times V,$$

und wählen r so klein, das $V_{r,r} \subseteq U$.



Weiter sei $L > 0$ Lipschitz-Konstante von $f|_{V_{r,r}}$ und

$$N := \max_{(t,x)\in V_{r,r}} \|f(t,x)\| \quad \text{und} \quad \varepsilon := \min\left(r, \frac{r}{N}, \frac{1}{2L}\right). \tag{4.8}$$

Damit ist insbesondere $V_{\varepsilon,r} \subseteq V_{r,r} \subseteq U$.

$$M := C(I,V) \subseteq C(I,\mathbb{R}^n)$$

bezeichne wieder den metrischen Raum der stetigen Funktionen $\psi : I \to V$ mit Supremumsmetrik

$$d(\psi,\varphi) := \sup_{t\in I} \|\psi(t) - \varphi(t)\|.$$

Nach Satz 4.16 ist (M,d) ein vollständiger metrischer Raum (denn $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ist abgeschlossen).

- Wir führen durch

$$\boxed{(A\psi)(t) := x_0 + \textstyle\int_{t_0}^t f(s,\psi(s))\,ds \qquad (t \in I)}$$

eine Abbildung $A : M \to C(I,\mathbb{R}^n)$ ein, von der wir zunächst zeigen wollen, dass ihr Bild in M bleibt. Dazu stellen wir fest, dass gemäß Definition (4.8)

$$\begin{aligned}\left\|\int_{t_0}^t f(s,\psi(s))\,ds\right\| &\le \left|\int_{t_0}^t \|f(s,\psi(s))\|\,ds\right| \\ &\le \left|\int_{t_0}^t \max_{(\tilde t,x)\in V_{r,r}} \|f(\tilde t,x)\|\,ds\right| \le |t-t_0|N \le \varepsilon N \le r,\end{aligned}$$

sodass $(A\psi)(t) \in V$ für $t \in I$ ist.

- Jetzt müssen wir nur noch beweisen, dass

$$A : M \to M,$$

die so genannte *Picard–Abbildung*, kontrahierend ist, dass also für ein geeignetes $0 < \theta < 1$ gilt

$$d(A\varphi, A\psi) \le \theta\, d(\varphi, \psi) \qquad (\varphi, \psi \in M).$$

Tatsächlich ergibt sich aus der Definition (4.8) von ε für $t \in I$

$$\begin{aligned} d(A\varphi, A\psi) &= \sup_{t\in I} \|A\psi(t) - A\varphi(t)\| \\ &= \sup_{t\in I} \left\| \int_{t_0}^{t} [f(s,\psi(s)) - f(s,\varphi(s))]\, ds \right\| \\ &\le \varepsilon \cdot \sup_{s\in I} \|f(s,\psi(s)) - f(s,\varphi(s))\| \\ &\le \varepsilon L \sup_{s\in I} \|\psi(s) - \varphi(s)\| = \varepsilon L d(\psi,\varphi) \le \tfrac{1}{2} d(\psi,\varphi). \end{aligned}$$

A ist damit eine kontrahierende Abbildung auf dem vollständigen metrischen Raum M, besitzt also nach dem Banachschen Fixpunktsatz (siehe Seite 82) einen eindeutigen Fixpunkt $\varphi \in M$. Diese Funktion φ erfüllt also die Integralgleichung (4.7) und löst damit das Anfangswertproblem. □

4.18 Staatsexamens-Aufgabe (Frühjahr 2017)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) := (|x_2|^{1/2}, |x_1|^{1/2})$, und $D :=]0, \infty[^2$. Zeigen Sie:

(a) Das Anfangswertproblem $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_0$ ist für alle $x_0 \in D$ lokal eindeutig lösbar.

(b) Es gibt genau eine Lösung $x : [0, \infty[\to \mathbb{R}^2$ des Anfangswertproblems $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = 0$ mit $x(t) \in D$ für alle $t > 0$.
(Hinweis: Die Trajektorie einer solchen Lösung ist der Graph einer Funktion, welche wieder eine Differentialgleichung erfüllt.)

(c) Das Anfangswertproblem $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = 0$ ist nicht eindeutig lösbar. ◇

Die Picard–Iteration, die hier als technisches Beweismittel verwandt wurde, kann auch zur Lösung der DGL verwandt werden:

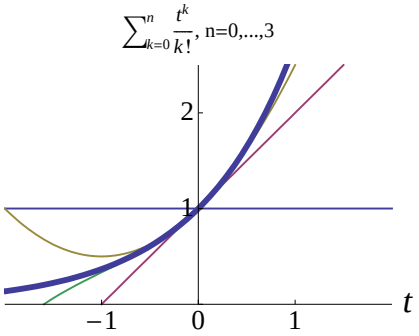
4.19 Beispiele (Picard–Iteration)

1. Wir approximieren die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x} = x \quad , \quad x(0) = x_0$ durch

$$x_0(t) := x_0 \qquad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{und} \quad x_{i+1}(t) := x_0 + \int_0^t x_i(s)\, ds,$$

also

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= x_0(1+t) \\
x_2(t) &= x_0\left(1+t+\frac{t^2}{2}\right) \\
&\vdots \\
x_n(t) &= x_0 \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{t^i}{i!}.
\end{aligned}
$$

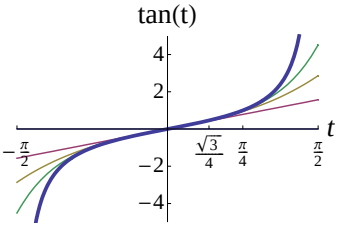


Da $x(t) = x_0 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} = x_0 \cdot e^t$, konvergiert für alle $t \in \mathbb{R}$ die n–te Iterierte $x_n(t)$ gegen die Lösung $x(t)$, und zwar gleichmäßig auf jedem kompakten Zeitintervall (aber nicht gleichmäßig auf $\mathbb{R}$).

2. $\dot{x} = 1 + x^2 \quad , \quad x_0 = 0$

   Für $r > 0$ ist $N = \max_{|x|\le r} \|f(x)\| = 1+r^2$, und die Lipschitz-Konstante $L = \max_{|x|\le r} \|f'(x)\| = 2r$, also ist gemäß Definition (4.8) $\varepsilon = \min\left(\frac{r}{1+r^2}, \frac{1}{4r}\right)$.

   ε wird maximal für $r = \frac{1}{\sqrt{3}}$, das heißt $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Für Zeiten $|t| < \frac{\sqrt{3}}{4}$ können wir also Konvergenz garantieren. Picard–Iteration mit Anfangswert $x_0(t) := x_0$ ergibt



$$
\begin{aligned}
x_0(t) &= 0 \\
x_1(t) &= (Ax_0)(t) = \textstyle\int_0^t [1 + x_0^2(s)]\, \mathrm{d}s = t \\
x_2(t) &= (Ax_1)(t) = \textstyle\int_0^t [1 + s^2]\, \mathrm{d}s = t + t^3/3 \\
x_3(t) &= (Ax_2)(t) = \textstyle\int_0^t [1 + (s + s^3/3)^2]\, \mathrm{d}s \\
&= t + \tfrac{t^3}{3} + \tfrac{2}{15}t^5 + \tfrac{1}{63}t^7, \quad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

   Die Funktionenfolge konvergiert gegen $\tan(t)$, die Lösung des Anfangswertproblems. Konvergenz haben wir sogar auf dem Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. ◇

4.20 Zur Geschichte (Picard-Iteration)

Thus the two definitions of the exponential

1) $e^t = \lim_{n\to\infty}(1 + t/n)^n$,

2) $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} +$

correspond to two methods of approximating the solutions of the very simple differential equation $\dot{x} = x$*: the broken line method of Euler, and the method of successive approximations of Picard. Historically the original definition of the exponential was simple:*

3) e^t *is the solution of the equation* $\dot{x} = x$ *with initial condition* $x(0) = 1$.

ARNOL'D, in [Ar, Kapitel 4.2] ◇

In den naturwissenschaftlichen oder technischen Anwendungen von Differentialgleichungen kennen wir deren Anfangswerte normalerweise nicht genau. Der folgende Satz besagt, dass dies auch gar nicht nötig ist.

4.21 Satz *Unter den Voraussetzungen des Satzes 4.17 (Picard–Lindelöf) existiert für jeden Punkt* $(T_0, X_0) \in U$ *des erweiterten Phasenraumes eine kompakte Umgebung* $V \subseteq U$ *und ein Intervall* $I := [-\varepsilon, \varepsilon]$*, sodass die Familie*

$$\Phi : I \times V \to U \quad , \quad (s; t_0, x_0) \mapsto \varphi(t_0 + s)$$

der Lösungen des AWP (4.6) eine stetige Abbildung ist. Die Lösungen hängen also stetig von ihren Anfangswerten und der Zeit ab.

Beweis:

- Für kleine $\varepsilon > 0$ und $R > 0$ ist $[T_0 - 2\varepsilon, T_0 + 2\varepsilon] \times \overline{U_R(X_0)}$ Teilmenge des erweiterten Phasenraums U. Wir setzen $V_{\varepsilon,r} := [T_0 - \varepsilon, T_0 + \varepsilon] \times \overline{U_r(X_0)}$. Diese Menge von Anfangswerten $(t_0, x_0$ ist für $r \in (0, R)$ in der ersten Menge enthalten. Außerdem ist sie beschränkt und abgeschlossen, also kompakt. Für die Picard-Iteration benutzen wir statt des Raumes der Kurven den metrischen Raum
$$M := C\Big(I \times V_{\varepsilon,r}, \overline{U_R(X_0)}\Big)$$
mit der Supremumsmetrik
$$d(\Phi, \Psi) := \sup\{\|\Phi(t, y) - \Psi(t, y)\| \mid (t, y) \in I \times V_{\varepsilon,r}\}.$$

- Dies ist ein vollständiger metrischer Raum, denn
  (a) die Bildmenge ist eine abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, also vollständig.
  (b) der Definitionsbereich ist kompakt, weswegen jede Cauchyfolge $(\Phi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in M einen *punktweisen* Limes Φ mit $\Phi(t, y) := \lim_{m\to\infty} \Phi_m(t, y)$ besitzt.
  (c) auch das $\varepsilon/3$–Argument aus Satz 4.16 überträgt sich auf diese Situation, Φ ist also stetig und $\Phi \in M$.

- Wir betrachten für $\Psi \in M$ die Picard–Abbildung
$$(A\Psi)(s, t_0, x_0) := x_0 + \int_0^s f\big(t_0 + \tau, \Psi(\tau, t_0, x_0)\big)\, d\tau.$$

Nach unserer Voraussetzung ist für $s \in I$ das Argument von f ein Punkt aus U. Ist Φ ein Fixpunkt von A, dann bedeutet dies

$$\Phi(0, t_0, x_0) = A\Phi(0, t_0, x_0) = x_0$$

und

$$\frac{d}{ds}\Phi(s, t_0, x_0) = \frac{d}{ds}(A\Phi)(s, t_0, x_0) = f\big(t_0 + s, \Phi(s, t_0, x_0)\big).$$

Die Abbildung $t \mapsto \Phi(t - t_0, t_0, x_0)$ löst also das AWP mit Anfangswert (t_0, x_0).

- Mit der gleichen Argumentation wie im Beweis von Picard–Lindelöf wird für kleine Parameter $\varepsilon, r > 0$

  $$A : M \to M$$

  zu einer Kontraktion, besitzt also nach dem Banachschen Fixpunktsatz einen eindeutigen Fixpunkt Φ. □

4.3 Globale Existenz und Eindeutigkeit der Lösung

An Beispiel 4.19.2 sehen wir, dass die Lösung nicht für alle Zeiten existiert, da $f(x) = 1 + x^2$ mit $|x|$ sehr stark anwächst, sodass man in der Zeit $\frac{\pi}{2}$ nach ∞ geführt wird. Dies steht nicht im Widerspruch zur lokalen Lipschitzstetigkeit von f.

Dagegen ist in Beispiel 4.19.1 $f(x) = x$ sogar global lipschitzstetig, und die Lösung existiert für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$. Dies ist ganz allgemein so:

4.22 Satz *Ist das (zeitunabhängige) Vektorfeld $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lipschitzstetig, dann existiert eine eindeutige Lösung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ des Anfangswertproblems*

$$\dot{x} = f(x) \quad , \quad x(0) = x_0. \tag{4.9}$$

Beweis:

- Es sei $L \geq 1$ eine Lipschitz-Konstante, es gelte also

  $$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\| \qquad (x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n).$$

  Wir wählen $r := \|f(x_0)\| + \frac{1}{2L}$, sodass $N = \max_{x \in \overline{U_r(x_0)}} \|f(x)\|$ die Ungleichung

  $$\begin{aligned} N &\leq \|f(x_0)\| + \max_{x \in \overline{U_r(x_0)}} \|f(x) - f(x_0)\| \\ &\leq \|f(x_0)\| + L \max_{x \in \overline{U_r(x_0)}} \|x - x_0\| \leq r + Lr \end{aligned}$$

erfüllt, und die das Zeitintervall definierende Konstante ε aus (4.8) unabhängig von x_0 wird:

$$\varepsilon = \min\left(r, \frac{r}{N}, \frac{1}{2L}\right) \geq \min\left(\tfrac{1}{2L} + \|f(x_0)\|, \tfrac{1}{1+L}, \tfrac{1}{2L}\right) = \tfrac{1}{2L}$$

- Für beliebige Zeiten $t_k \in \mathbb{R}$ und Anfangswerte $x_k \in \mathbb{R}^n$ $(k \in \mathbb{Z})$ können wir also die eindeutige lokale Lösung $\varphi_k : I_k \to \mathbb{R}^n$ des Anfangswertproblems $\dot{x} = f(x)$ mit $\varphi_k(t_k) := x_k$ auf dem Intervall $I_k := (t_k - \varepsilon, t_k + \varepsilon)$ finden.

  Mit den Zeiten $t_k := \frac{\varepsilon}{2}k$ $(k \in \mathbb{Z})$ setzen wir nun für $k > 0$ bei Kenntnis der Lösung φ_{k-1} den Anfangswert $x_k := \varphi_{k-1}(t_k)$ (analog wählen wir für $k < 0$ den Anfangswert $x_k := \varphi_{k+1}(t_k)$).

- Es ist also $\varphi_{k-1}(t_k) = \varphi_k(t_k)$. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems gilt auf einer in $U_k := I_{k-1} \cap I_k = (t_k - \varepsilon, t_k + \frac{1}{2}\varepsilon)$ offenen Umgebung von t_k: $\varphi_{k-1}(t) = \varphi_k(t)$. Andererseits ist wegen der Stetigkeit der Lösungen φ_l diese Umgebung auch abgeschlossen in U_k, also das gesamte Intervall U_k.

  Durch Zusammensetzung der Lösungen φ_k erhalten wir eine eindeutige Lösung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ des Anfangswertproblems (4.9). □

4.23 Bemerkungen (Lipschitz-Stetigkeit)

1. Ist $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, dann ist (nach Satz 8.13, *Analysis II*) f Lipschitz-stetig, wenn $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|Df(x)\| < \infty$ gilt.

2. Insbesondere folgt, dass für alle *linearen Differentialgleichungen* das AWP der Form

   $$\dot{x} = Ax \quad , \quad x(0) = x_0$$

   für alle Zeiten eindeutig lösbar ist, denn das Vektorfeld $f(x) = Ax$ ist lipschitzstetig mit Konstante $L = \|A\| := \sup_{v\in S^{n-1}} \|Av\|$, der Matrixnorm von $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$.
   Wie wir in Kapitel 5.1 sehen werden, ist diese Lösung $x(t) = \exp(At)x_0$.

3. Die Lipschitz-Stetigkeit des Vektorfeldes auf dem gesamten Phasenraum ist eine hinreichende, aber keineswegs notwendige Voraussetzung für die globale Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen.

   Hinreichend ist, dass das Vektorfeld lokal lipschitz-stetig ist, und dass alle Orbits in kompakten Mengen enthalten sind. ◇

4.24 Beispiel (Kompaktheit und globale eindeutige Existenz)
Wir betrachten die durch das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = \|x\|^2 \left(\begin{smallmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{smallmatrix}\right)$ gegebene Differentialgleichung.

Ohne den multiplikativen Faktor $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2$ wäre die Differentialgleichung linear: $\dot{y} = Ay$ mit $A := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Die Orbits waren Kreise um den Koordinatenursprung, denn $\exp(At) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$. Daran ändert sich hier nichts, denn der Faktor $\|x\|^2$ ändert nur die Umlaufgeschwindigkeit. In Polarkoordinaten $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$ lautet die DGL nämlich

$$\dot{r} = 0 \quad , \quad \dot{\varphi} = -r^2.$$

Deren Lösung $r(t) = r_0$, $\varphi(t) = \varphi_0 - r_0^2 t$ existiert für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$.

Obwohl f nicht lipschitzstetig ist, kann die Bahn wegen der Form des Vektorfeldes f (fehlende Radialkomponente) nicht in endlicher Zeit nach räumlich unendlich gehen. ◇

4.4 Transformation in ein dynamisches System

Reduktion der Ordnung

Auch Differentialgleichungen höherer als erster Ordnung lassen sich mit den beschriebenen Methoden behandeln, indem man aus einer expliziten DGL n–ter Ordnung ein DGL-System von n DGLn erster Ordnung macht.

4.25 Satz *Die Differentialgleichung der Ordnung $n > 1$*

$$\frac{d^n x}{dt^n} = F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right) \tag{4.10}$$

mit $F \in C^1(\mathbb{R}^{n+1})$ ist zum DGL–System

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y) \quad \textit{mit} \quad f(t,y) := \begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ F(t,y_1,\ldots,y_n) \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

im folgenden Sinn äquivalent:

- *Ist $\varphi : I \to \mathbb{R}$ Lösung von (4.10), dann ist $\psi := \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)} \end{pmatrix} : I \to \mathbb{R}^n$ Lösung von (4.11).*
- *Ist umgekehrt $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}$ Lösung von (4.11), dann ist ψ_1 Lösung von (4.10).*

Beweis: Nach Definition ist φ n–mal differenzierbar, also $\psi : I \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar, und $\psi_k = \frac{d}{dt}\psi_{k-1} \qquad (k = 2, \ldots, n)$,

$$\tfrac{d}{dt}\psi_n = \tfrac{d^n\varphi}{dt^n} = F(t, \varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(n-1)}) = F(t, \psi_1, \ldots, \psi_n).$$

Die Argumentation lässt sich umkehren. □

4.26 Beispiel (Gravitation)
Die Anziehung zweier (kugelförmigen) Massen führt nach Newton auf die Beschleunigung

$$\ddot{x} = -\gamma \frac{x}{\|x\|^3}$$

des Differenzvektors x ihrer Schwerpunkte. Diese Differentialgleichung zweiter Ordnung lässt sich auf die DGL erster Ordnung mit

$$\dot{z} = f(z) := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ -\gamma \frac{x_1}{\|x\|^3} \\ -\gamma \frac{x_2}{\|x\|^3} \\ -\gamma \frac{x_3}{\|x\|^3} \end{pmatrix} \qquad \big(z = (x, v) \in U\big)$$

umformen. Der Phasenraum $U := (\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}) \times \mathbb{R}^3$ ist eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^6$, und das Vektorfeld f ist lokal Lipschitz-stetig, denn $f \in C^\infty(U, \mathbb{R}^6)$.

Diese Differentialgleichung können wir daher mit Picard–Iteration oder einem anderen Verfahren für kleine Zeiten lösen. Sie besitzt aber auch eine bekannte allgemeine Lösung, die keplerschen Kegelschnitte. ◇

Übergang zu einem zeitunabhängigen System

Wir können auch explizite zeitabhängige DGLn auf autonome zurückführen. Statt der DGL $\dot{x} = f(t, x)$ mit $f : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x$ offen betrachten wir dazu das autonome DGL–System

$$\dot{y} = g(y) \quad \text{mit} \quad g : U \to \mathbb{R}^{n+1} \quad , \quad y := \begin{pmatrix} s \\ x \end{pmatrix} \qquad g(y) := \begin{pmatrix} 1 \\ f(y) \end{pmatrix}. \tag{4.12}$$

Wir erhöhen also die Dimension des Phasenraumes um eins, indem wir den Zeitparameter s zum Phasenraumpunkt x hinzufügen. Ausgeschrieben hat (4.12) die Form

$$\tfrac{d}{dt}s = 1 \quad , \quad \tfrac{d}{dt}x = f(s, x). \tag{4.13}$$

Ist nun $\psi : I \to U$ eine Lösung von (4.12), dann gilt mit $\psi(t) = \begin{pmatrix} s(t) \\ x(t) \end{pmatrix}$ $s(t) = s(0) + t$, bis auf eine zu wählende additive Konstante ist also die Phasenraumkoordinate s gleich der Zeit t. Die Lösung $\psi = \begin{pmatrix} s \\ \tilde{x} \end{pmatrix}$ des AWP $\dot{y} =$

$g(y),\ \psi(0) = \binom{t_0}{x_0}$ ergibt daher eine Lösung x des AWP $\dot{x} = f(t,x),\ x(t_0) = x_0$. Man setzt einfach $x(t) := \tilde{x}(t - t_0)$.

Umgekehrt kann man aus einer Lösung des AWP $\dot{x} = f(t,x),\ x(t_0) = x_0$ durch Ergänzung eine Lösung des AWP von (4.12) konstruieren.

Ist $f : U \to \mathbb{R}^n$ (in allen Argumenten) lipschitzstetig, dann auch g. Damit überträgt sich der Existenz– und Eindeutigkeitssatz (man beachte aber, dass wir für nicht autonome DGLn keine Lipschitzstetigkeit bezüglich t forderten).

Grundbegriffe für dynamische Systeme

4.27 Definition *Das Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^n$ auf der offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sei lokal Lipschitz-stetig. Wir betrachten die DGL $\dot{x} = f(x)$.*

1. *Existiert für alle $x_0 \in U$ eine Lösung $\varphi_{x_0} : \mathbb{R} \to U$ des AWP $\dot{x} = f(x),\ x(0) = x_0$, dann heißt die Abbildung*

$$\Phi : \mathbb{R} \times U \to U \quad , \quad (t,x) \mapsto \varphi_x(t) \tag{4.14}$$

   Phasenfluss *oder kurz* **Fluss** *der DGL.*

2. *Das Bild $\varphi(I) \subseteq U$ einer Lösungskurve $\varphi : I \to U$ der DGL heißt* **Orbit**. *Für $x \in U$ heißt $\mathcal{O}(x) := \Phi(\mathbb{R}, x)$* **Orbit durch** *$x$.*

3. *$x_s \in U$ heißt* **singulärer Punkt** *des Vektorfeldes f, wenn $f(x_s) = 0$ ist. Ist $x_s \in U$ singulärer Punkt von f, dann heißt x_s auch* **Ruhelage** *oder* **Gleichgewichtslage** *der DGL.*

4. *$x \in U$ heißt* **periodischer Punkt** *mit* **(Minimal)-Periode** *$T > 0$, wenn $\Phi(T,x) = x$, und $\Phi(t,x) \neq x$ falls $t \in (0,T)$.*

   Ein Orbit $\mathcal{O}(x)$ heißt **geschlossen**, *wenn $x \in U$ ein periodischer Punkt ist*

5. *Für $x \in U$ heißt*

$$\omega(x) := \left\{ y \in U \mid \exists (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } \lim_{n\to\infty} t_n = \infty \text{ und } \lim_{n\to\infty} \Phi(t_n,x) = y \right\}$$

   ω–Limesmenge von *x und*

$$\alpha(x) := \left\{ y \in U \mid \exists (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } \lim_{n\to\infty} t_n = -\infty \text{ und } \lim_{n\to\infty} \Phi(t_n,x) = y \right\}$$

   α–Limesmenge von *x.*

4.28 Bemerkungen 1. Für einen singulären Punkt x_s des Vektorfelds f ist die konstante Funktion $x(t) = x_s$ die (einzige) Lösung des AWP.

2. *Singulär* heißt der Punkt nicht etwa deswegen, weil das Vektorfeld f dort eine Singularität besäße, sondern weil dessen *Richtungsfeld* $x \mapsto f(x)/\|f(x)\|$ dort undefiniert ist und sich auch im Allgemeinen nicht stetig auf x_s fortsetzen lässt.

3. Gibt es für zwei Phasenraumpunkte $x, y \in U$ eine Zeit $t \in \mathbb{R}$ mit $\Phi(t,x) = y$, dann sind ihrer Orbits gleich: $\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(y)$, also auch ihre α– bzw. ω–Limesmengen. ◇

4.29 Satz *Wenn der Phasenfluss (4.14) existiert, ist er stetig, und die*

$$\Phi_t : U \to U \quad , \quad \Phi_t(x) := \Phi(t,x) \qquad (t \in \mathbb{R}) \tag{4.15}$$

sind Homöomorphismen, mit

$$\Phi_0 = \mathrm{Id}_U \quad , \quad \Phi_{t_1} \circ \Phi_{t_2} = \Phi_{t_1+t_2} \qquad (t_1, t_2 \in \mathbb{R})$$

Beweis: Hausaufgabe, unter Verwendung von Satz 4.21. □

4.30 Beispiele

1. Für ein reelles Polynom $f(x) = \prod_{i=1}^{n}(x-a_i)$ mit den Nullstellen $a_1 < \ldots < a_n$ ist die DGL $\dot{x} = f(x)$ lokal eindeutig lösbar und besitzt für $x \in [a_1, a_n]$ sogar Lösungen $t \mapsto \Phi_t(x)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

   Die Ruhelagen sind die Punkte $a_1, \ldots, a_n$, und für $x \in (a_i, a_{i+1})$ ist $f|_{(a_i,a_{i+1})} > 0$, falls $n-i$ gerade ist. In diesem Fall ist damit $\omega(x) = \{a_{i+1}\}$ und $\alpha(x) = \{a_i\}$. Ist dagegen $n-i$ ungerade, also $f|_{(a_i,a_{i+1})} < 0$, dann gilt umgekehrt $\omega(x) = \{a_i\},\ \alpha(x) = \{a_{i+1}\}$. Periodische Punkte existieren nicht.

2. Für das (in Polarkoordinaten (r, φ) notierte) DGL–System mit Phasenraum $\mathbb{R}^2$

   $$\dot{r} = r(1-r^2) \quad , \quad \dot{\varphi} = 1$$

   ist der Ursprung $(r = 0)$ die einzige Ruhelage, und $\{1\} \times [0, 2\pi)$ der einzige periodische Orbit. Für alle $x \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ ist $\omega(x)$ gleich diesem periodischen Orbit, für $\|x\| < 1$ ist $\alpha(x) = \{0\}$.

5 Lösungsmethoden für lineare DGLn

Eine besonders wichtige Klasse von Differentialgleichungen sind die linearen mit konstanten Koeffizienten, und nach Satz 4.25 können wir annehmen, dass das

System erster Ordnung ist. Wenn wir eine Zeitabhängigkeit der *Störfunktion* b zulassen, dann lautet das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + b(t) \quad , \quad x(t_0) = x_0, \tag{5.1}$$

mit *Systemmatrix* $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}),\ b : I \to \mathbb{R}^n$, t_0 im Intervall I und $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Die Lösungsstrategie wird darin bestehen, im ersten Schritt das *homogene* AWP

$$\dot{y} = Ay \quad , \quad y(t_0) = x_0 \tag{5.2}$$

durch

$$y(t) := \exp\big((t - t_0)A\big)x_0 \qquad (t \in \mathbb{R}) \tag{5.3}$$

zu lösen, um dann das *inhomogene* AWP (5.1) zu lösen.
Formal ist (5.3) die Lösung von (5.2), denn formale Differentiation von y nach t ergibt Ay, und $y(t_0) = x_0$.

5.1 Homogene lineare autonome Differentialgleichungen

Exponentiation von Matrizen

Warum aber löst die Exponentialfunktion die DGL? Diese Frage soll jetzt beantwortet werden. Sie ist nicht rein akademisch, denn ist die Matrix A zeitabhängig, dann löst die Funktion $t \mapsto \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(s)\,ds\right) x_0$ *nicht* das homogene AWP $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, $x(t_0) = x_0$, außer für Spezialfälle wie Dimension $n = 1$.

Zur Rechtfertigung von (5.3) müssen wir also etwas über matrixwertige Funktionen nachdenken, und zwar für Vektorräume über den Körpern $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Zunächst wird die Exponentialfunktion wie für $n = 1$ durch ihre Potenzreihe erklärt:

5.1 Definition • *Für einen Endomorphismus $M \in \mathrm{Lin}(V)$ eines endlich-dimensionalen $\mathbb{K}$–Vektorraums V ist $\exp(M) \in \mathrm{Lin}(V)$ durch*

$$\exp(M) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^{(k)}}{k!}$$

definiert (mit $M^{(0)} = \mathrm{Id}_V$ und $M^{(k+1)} = M \circ M^{(k)}$).

• *Analog wird die Exponentialfunktion auf Matrizen in $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$ angewandt.*

Wir haben also eine Reihe vor uns, deren Summanden Elemente von $\mathrm{Lin}(V)$, dem Raum der (beschränkten) linearen Abbildungen von V in V sind.

Sei etwa $V = \mathbb{K}^n$, mit euklidischer Norm $\|\cdot\|$. Wir haben auf $\mathrm{Lin}(\mathbb{K}^n)$ schon die *Operatornorm*

$$\|M\| := \sup_{v\in\mathbb{K}^n/\{0\}} \frac{\|M(v)\|}{\|v\|} = \sup_{v\in\mathbb{K}^n,\,\|v\|=1} \|M(v)\|$$

eingeführt. Neben den Eigenschaften $\|M\| \geq 0,\ \|M\| = 0 \Leftrightarrow M = 0,$

$$\|\lambda M\| = |\lambda|\,\|M\| \quad (\lambda \in \mathbb{K}) \quad \text{und} \quad \|M+N\| \leq \|M\| + \|N\|$$

jeder Norm ist sie zusätzlich *submultiplikativ*:

5.2 Satz *Für $M, N \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^n)$ gilt: $\|MN\| \leq \|M\| \cdot \|N\|$.*

Beweis: Denn

$$\begin{aligned} \|MN\| &= \sup_{v\neq 0} \tfrac{\|MNv\|}{\|v\|} = \sup_{v:\,Nv\neq 0} \tfrac{\|MNv\|}{\|Nv\|} \cdot \tfrac{\|Nv\|}{\|v\|} \\ &\leq \sup_{w\neq 0} \tfrac{\|Mw\|}{\|w\|} \cdot \sup_{v\neq 0} \tfrac{\|Nv\|}{\|v\|} = \|M\| \cdot \|N\|, \end{aligned}$$

außer für $N = 0$, wo sowieso beide Seiten Null sind. □

Nun stellen wir fest, dass die obige Definition von $\exp(M)$ auch sinnvoll ist:

5.3 Satz *Die Partialsummen $s_k := \sum_{l=0}^{k} \frac{M^{(l)}}{l!}$ bilden eine Cauchyfolge.*

Beweis: Für $k_1 \geq k_0 \geq \|M\|$ gilt nach der Dreiecksungleichung und Satz 5.2

$$\begin{aligned} \|s_{k_1} - s_{k_0}\| &= \left\| \sum_{l=k_0+1}^{k_1} \frac{M^{(l)}}{l!} \right\| \leq \sum_{l=k_0+1}^{k_1} \tfrac{\|M^{(l)}\|}{l!} \leq \textstyle\sum_{l=k_0+1}^{k_1} \frac{\|M\|^l}{l!} \\ &\leq \tfrac{\|M\|^{k_0+1}}{(k_0+1)!} \textstyle\sum_{m=0}^{k_1-k_0-1} \frac{\|M\|^m}{(k_0+1)^m} \leq \frac{\|M\|^{k_0+1}}{(k_0+1)!} \left(1 - \frac{\|M\|}{k_0+1}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck geht für $k_0 \to \infty$ gegen Null, denn die Fakultät wächst schneller als die (reelle) Exponentialfunktion. □

Nebenbei stellen wir fest, dass wir an keiner Stelle vorausgesetzt haben, dass der lineare Endomorphismus bzw. die Matrix reell ist. Dies ist günstig, denn die Jordan–Normalform von A in (5.2), und damit von $\exp(At)$, kann auch komplex sein.

Um nun zu sehen, dass (5.3) des AWP (5.2) tatsächlich löst, müssen wir in der Lage sein, die Abbildung

$$\mathbb{R} \to \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^n) \quad , \quad t \mapsto \exp(At)$$

nach dem Zeitparameter zu differenzieren.

Später werden wir uns auch fragen, wie die Lösungen von eventuellen Parametern der linearen DGL abhängen. Für diese Art von Fragestellungen wertet man die Exponentialfunktion für mehr als ein Argument aus, man betrachtet also die Abbildung

$$\exp : \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^n) \to \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^n) \quad , \quad M \mapsto \exp(M)$$

in ihrer Abhängigkeit von Argument M. Hier hilft das *Weierstraß–Kriterium*:

5.4 Satz (Weierstraß) *Es sei $(V, \|\cdot\|)$ ein Banach-Raum, $X \subseteq V$ und*

$$f_l : X \to V \qquad (l \in \mathbb{N}_0)$$

seien Funktionen mit $\sup_{x\in X} \|f_l(x)\| \le a_l$ mit $\sum_{l=0}^{\infty} a_l < \infty$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{l=0}^{\infty} f_l$ auf X gleichmäßig.

Die Beweismethode für reelle Funktionen lässt sich verallgemeinern:

Beweis: Wegen der Vollständigkeit des metrischen Raumes V haben wir punktweise Konvergenz der Partialsummen $s_l := \sum_{m=0}^{l} f_m$:

$$s(x) := \lim_{l\to\infty} s_l(x) \qquad (x \in X).$$

Für $\varepsilon > 0$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{l=m+1}^{n} a_l < \varepsilon \qquad (n > m)$.

Daher folgt $\|s_n(x) - s_m(x)\| \le \sum_{l=m+1}^{n} a_l < \varepsilon,\ (x \in X)$, also gleichmäßige Konvergenz. □

5.5 Satz *Für $A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^n)$ ist die Abbildung*

$$\mathbb{R} \to \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^n) \quad , \quad t \mapsto \exp(At)$$

stetig differenzierbar, und es gilt

$$\boxed{\tfrac{d}{dt}\exp(At) = A\exp(At).} \tag{5.4}$$

Beweis: Setzen wir $V := \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^n)$ und $f_l : X \to V,\ M \mapsto \frac{M^{(l)}}{l!}$ in Satz 5.4 ein, so gilt für alle $l \in \mathbb{N}$: $\sup_{M\in V} \|f_l(M)\| = \infty$.
Wir können also im Satz von Weierstraß als Definitionsbereich X nicht den gesamten Vektorraum V wählen.
• Für die Vollkugel $X := \{M \in V \mid \|M\| \le r\}$ mit Radius $r > 0$ ist aber

$$a_l := \sup_{M\in X} \|f_l(M)\| = \frac{1}{l!} \sup_{M\in X} \left\|M^{(l)}\right\| \le \frac{r^l}{l!},$$

und die Reihe $\sum_{l=0}^{\infty} a_l \leq \exp(r)$ konvergiert für jede Wahl von r.
• Deshalb ist die Exponentialabbildung als Limes gleichmäßig konvergenter stetiger Funktionen $s_l\restriction_X : X \to V$ auch stetig, und, da die Ableitungen $\mathrm{D}s_l$ auf X ebenfalls gleichmäßig konvergent sind, auch differenzierbar. Damit ist die Formel (5.4) richtig, und aus ihr ergibt sich auch die Stetigkeit der Ableitung. □

Verwendung der Jordan–Normalform

Die konkrete Berechnung von $\exp(At)$ kann mittels der Jordan–Normalform von A erfolgen.

5.6 Definition

- *Für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $r \in \mathbb{N}$ heißt* $J_r(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(r, \mathbb{K})$ $r \times r$–**Jordan–Block mit Eigenwert** λ.
- *Eine* **Jordanmatrix** *ist eine quadratische Matrix der Form*

$$J = \begin{pmatrix} J_{r_1}(\lambda_1) & & & 0 \\ & J_{r_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{r_k}(\lambda_k) \end{pmatrix} \equiv J_{r_1}(\lambda_1) \oplus \ldots \oplus J_{r_k}(\lambda_k)\,. \tag{5.5}$$

- *Eine* **Jordanbasis** *eines Operators $A \in \mathrm{Lin}(V)$ auf dem $\mathbb{K}$–Vektorraum V ist eine Basis von V, in der die darstellende Matrix von A eine Jordanmatrix ist.*

Aus der linearen Algebra ist der (konstruktive) Beweis des folgenden Satzes bekannt[21]:

5.7 Satz *Sei V ein endlich–dimensionaler $\mathbb{C}$–Vektorraum und $A \in \mathrm{Lin}(V)$. Dann existiert eine Jordanbasis für A.*

Da mit $n := \dim(V)$ der Vektorraum V isomorph zu $\mathbb{C}^n$ ist, können wir A in der Form

$$A = WJW^{-1} \quad \text{mit} \quad J \quad \text{Jordanmatrix}, \quad W \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$$

schreiben, wenn wir die darstellende Matrix ebenfalls mit A bezeichnen.

Wegen $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \subset \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ können wir insbesondere reelle quadratische Matrizen A Jordan-diagonalisieren, aber J ist im Allgemeinen nicht mehr reell (wir *komplexifizieren* A also im Sinne der Linearen Algebra).

[21] Z.B. im Skript *Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2*, Kap. 5, erhältlich unter `www.math.fau.de/knauf`

5.8 Beispiel $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ besitzt die komplexen Eigenwerte $\pm i$. Die Matrix $W := \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{GL}(2, \mathbb{C})$, mit $W^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{smallmatrix}\right)$, diagonalisiert A:

$$W^{-1}AW = \left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right) = J_1(i) \oplus J_1(-i).$$

Wie in diesem Beispiel existiert allgemein zu jedem nicht reellen Eigenwert λ von $A \in \mathrm{Mat}\,(n, \mathbb{R})$ und Jordan-Block $J_r(\lambda)$ ein Eigenwert $\overline{\lambda}$ gleicher Multiplizität und Jordan-Block $J_r(\overline{\lambda})$, denn das charakteristische Polynom von A lässt sich in $\mathbb{R}$ in Faktoren höchstens zweiten Grades zerlegen (siehe Abb. 5.1).

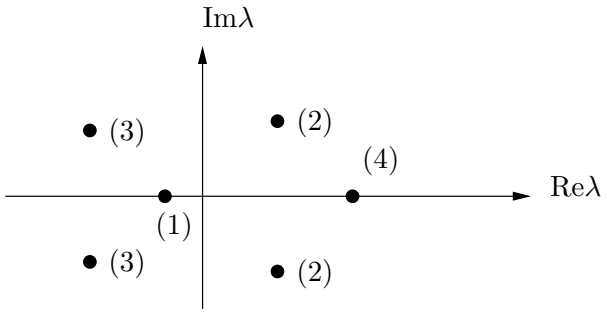


Abbildung 5.1: Komplexe Eigenwerte (mit Multiplizitäten) einer reellen Matrix

Es gilt

$$\boxed{\exp(At) = W \exp(Jt) W^{-1} \qquad (t \in \mathbb{R}),}$$

wie man durch Potenzreihenentwicklung und Benutzung von $A^m = (WJW^{-1})^m = WJ^mW^{-1}$ sieht.

Wegen

$$\exp(Jt) = \begin{pmatrix} \exp(J_{r_1}(\lambda_1)t) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(J_{r_k}(\lambda_k)t) \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

für die Jordanmatrix J aus (5.5) genügt es, $\exp(J_r(\lambda)t)$ zu berechnen. Nun gilt $J_r(\lambda) = J_r(0) + \lambda \mathbb{1}$. $J_r(0)$ und $\lambda \mathbb{1}$ kommutieren aber, was die Berechnung von $\exp(J_r(\lambda)t)$ erleichtert:

5.9 Lemma *Für $B, C \in \mathrm{Mat}\,(n, \mathbb{C})$ mit $BC = CB$ gilt*

$$\exp(B + C) = \exp(B) \cdot \exp(C).$$

Beweis: Durch Einsetzen in die Definition von $\exp$:

$$\begin{aligned}\exp(B+C) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(B+C)^n \overset{(!)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}B^iC^{n-i}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!(n-i)!}B^iC^{n-i}\\ &= \left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}B^i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}C^j\right) = \exp(B)\cdot\exp(C). \qquad \square\end{aligned}$$

5.10 Bemerkungen (Matrix-Exponential)

1. Als Gegenbeispiel gilt für die Dreiecksmatrizen $B := \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ und $C := B^\top = \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)$: $\exp(Bt) = \left(\begin{smallmatrix}1&t\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ und $\exp(Ct) = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\t&1\end{smallmatrix}\right)$, also

   $$\exp(Bt)\exp(Ct) = \left(\begin{smallmatrix}1+t^2&t\\t&1\end{smallmatrix}\right) \quad \text{und} \quad \exp(Ct)\exp(Bt) = \left(\begin{smallmatrix}1&t\\t&1+t^2\end{smallmatrix}\right).$$

   Dagegen folgt aus $(B+C)^n = \begin{cases}\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right) & , \quad n \quad \text{gerade}\\ \left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right) & , \quad n \quad \text{ungerade}\end{cases}$

   $$\exp((B+C)t) = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^{2m}}{(2m)!} + \left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^{2m+1}}{(2m+1)!} = \left(\begin{smallmatrix}\cosh t&\sinh t\\ \sinh t&\cosh t\end{smallmatrix}\right).$$

2. Da Vielfache einer Matrix miteinander kommutieren, ist für alle $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$

   $$\boxed{\exp(At_1)\exp(At_2) = \exp(A\ (t_1+t_2)),}$$

   der die DGL $\dot{x} = Ax$ lösende lineare Fluss

   $$\Phi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad , \quad \Phi_t(x) = \exp(At)x \qquad (t \in \mathbb{R})$$

   bildet also eine einparametrige Gruppe. $\diamond$

Für die Jordan-Blöcke gilt aber $\exp(J_r(\lambda)t) = \exp(J_r(0)\cdot t)\cdot\exp(\lambda t\mathbb{1})$.
$\exp(\lambda t\mathbb{1})$ ist gleich $\exp(\lambda t)\mathbb{1}$ und $\exp(J_r(0)t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(J_r(0))^n t^n$ mit

$$\left((J_r(0))^n\right)_{i,k} = \delta_{i,k-n} \qquad (i,k \in \{1,\ldots,r\}),$$

also

$$\exp\big(J_r(\lambda)t\big) = \exp(\lambda t)\begin{pmatrix}1&t&\cdots&\cdots&\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\\ 0&1&t&&\vdots\\ \vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\ \vdots&&\ddots&\ddots&t\\ 0&\cdots&\cdots&0&1\end{pmatrix}. \tag{5.7}$$

Verwendung der reellen Jordan–Normalform

Für $A \in \mathrm{Mat}\,(n,\mathbb{R})$ ist es oft sinnvoll, die *reelle* Jordan–Normalform von $\exp(At)$ zu benutzen. Dabei setzt man für reelle Eigenwerte einfach

$$J_r^{\mathbb{R}}(\lambda) := J_r(\lambda) \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Für $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ transformiert man Paare von Jordan–Blöcken der Gestalt

$$\begin{pmatrix} J_r(\lambda) & 0 \\ 0 & J_r(\overline{\lambda}) \end{pmatrix} \quad ,$$

unter Benutzung von $X := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & \mathbb{1}_r \\ -i\mathbb{1}_r & i\mathbb{1}_r \end{pmatrix}$ in die *reelle Normalform*

$$J_r^{\mathbb{R}}(\lambda) := X \begin{pmatrix} J_r(\lambda) & 0 \\ 0 & J_r(\overline{\lambda}) \end{pmatrix} X^{-1} = \begin{pmatrix} J_r(\mu) & -\varphi\mathbb{1}_r \\ \varphi\mathbb{1}_r & J_r(\mu) \end{pmatrix} \qquad (\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R})$$

mit $\mu := \mathrm{Re}(\lambda)$ und $\varphi := \mathrm{Im}(\lambda)$. Es gilt

$$\exp\left(J_r^{\mathbb{R}}(\lambda)t\right) = X\exp\left(\begin{pmatrix} J_r(\lambda) & 0 \\ 0 & J_r(\overline{\lambda}) \end{pmatrix} t\right) X^{-1} = e^{\mu t} \begin{pmatrix} \cos(\varphi t)e^{J_r(0)t} & -\sin(\varphi t)e^{J_r(0)t} \\ \sin(\varphi t)e^{J_r(0)t} & \cos(\varphi t)e^{J_r(0)t} \end{pmatrix}, \tag{5.8}$$

also im Spezialfall $r = 1$ einfacher Multiplizität

$$\exp\left(J_1^{\mathbb{R}}(\lambda)t\right) = e^{\mu t} \begin{pmatrix} \cos(\varphi t) & -\sin(\varphi t) \\ \sin(\varphi t) & \cos(\varphi t) \end{pmatrix}. \tag{5.9}$$

Bedeutung der Spur

Unter einem Diffeomorphismus[22] $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ besitzt das Bild $g(\Lambda)$ einer kompakten Teilmenge $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$ das Volumen

$$V_n(g(\Lambda)) = \int_\Lambda |\det(Dg(x))|\, dx,$$

der Betrag der Funktionaldeterminante bei $x \in \Lambda$ ist also der Faktor, um den bei x das Volumen durch g vergrößert wird (*Transformationssatz*, Satz 2.32).

Betrachten wir nun für die Zeit $t \in \mathbb{R}$ den Lösungsoperator der DGL $\dot{x} = Ax$, also die lineare Abbildung

$$\Phi_t \in \mathbf{Lin}(\mathbb{R}^n) \quad , \quad \Phi_t(x) = \exp(At)x.$$

Wie bei jeder linearen Abbildung ist die Ableitung konstant:

$$D\Phi_t(x) = \exp(At) \qquad (x \in \mathbb{R}^n), \tag{5.10}$$

und es gilt

[22] **Definition:** Für $r \in \mathbb{N}$ und $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen heißt eine Abbildung $\Psi : U \to V$ ein C^r**–Diffeomorphismus**, wenn $\Psi \in C^r(U,V)$, die inverse Abbildung $\Psi^{-1} : V \to U$ existiert, und $\Psi^{-1} \in C^r(V,U)$.

5.11 Lemma *Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt* $\det(D\Phi_t) = \exp(\mathrm{tr}\,(A)t)$.

Beweis: Für alle $B \in \mathrm{Mat}\,(n, \mathbb{K})$ gilt

$$\det(\exp(B)) = \exp(\mathrm{tr}\,(B))$$

(siehe z.B. Satz 8.28 in *Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2*). Setze nun $B := At$ und benutze (5.10). □

Wir sehen also, dass die Zeitableitung der Volumenvergrößerung gleich

$$\tfrac{d}{dt} \det(D\Phi_t) \mid_{t=0} = \tfrac{d}{dt} \exp(\mathrm{tr}\,(A)t) \mid_{t=0} = \mathrm{tr}\,(A)$$

ist. Genau diejenigen linearen DGLn mit $\mathrm{tr}\,(A) = 0$ sind damit volumenerhaltend.

5.2 Explizit zeitabhängige lineare Differentialgleichungen

Das homogene Problem

Wir betrachten zunächst auf dem t_0 enthaltenden Zeitintervall I das *homogene* lineare nicht autonome (d.h. explizit zeitabhängige) AWP

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) \quad , \quad y(t_0) = y_0, \tag{5.11}$$

wobei $A : I \to \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ eine stetige matrixwertige Funktion ist.

5.12 Satz *Ist $M := \sup_{t\in I} \|A(t)\| < \infty$, dann hat (5.11) eine eindeutige Lösung $y : I \to \mathbb{R}^n$ mit*

$$\|y(t)\| \leq e^{M\cdot|t-t_0|}\|y_0\| \qquad (t \in I). \tag{5.12}$$

Beweis:

- Zunächst können wir durch eine Substitution $t = \tilde{t} + t_0$ erreichen, dass $t_0 = 0$ ist, und es genügt, $t \geq 0$ zu betrachten.
- Die eindeutige Existenz der Lösung $t \mapsto y(t)$ folgt wegen der in t uniformen globalen Lipschitzstetigkeit des Vektorfeldes $y \mapsto A(t)y$ auf dem $\mathbb{R}^n$ analog zu Satz 4.22.
- $z(t) := e^{-Mt}y(t)$ erfüllt das AWP

  $$\dot{z}(t) = N(t)z(t) \quad , \quad z(0) = y_0 \quad \text{mit} \quad N(t) := A(t) - M\mathbb{1},$$

  wie man durch Differentiation nachprüft. Die Abschätzung (5.12) folgt daher, wenn wir

  $$\|z(t)\| \leq \|y_0\| \qquad (t \geq 0, t \in I) \tag{5.13}$$

bewiesen haben. Nun ist

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}\|z(t)\|^2 &= \langle \dot{z}(t), z(t)\rangle + \langle z(t), \dot{z}(t)\rangle \\ &= \langle N(t)z(t), z(t)\rangle + \langle z(t), N(t)z(t)\rangle \\ &= \langle z(t), S(t)z(t)\rangle \leq 0 \end{aligned} \tag{5.14}$$

mit $S(t) := N(t) + N^\top(t)$, denn $S(t)$ ist selbstadjungiert, und besitzt nur Eigenwerte $E \leq 0$.

Letzteres sieht man so: Wäre $S(t)v = Ev$ mit $E > 0$, dann würde auch $(A(t) + A^\top(t))v = (E + 2M)v$ gelten, die Norm $\|A(t) + A^\top(t)\|$ also $\geq 2M$ sein, was im Widerspruch zur Definition von M steht.

Aus (5.14) folgt aber (5.13). □

Sind $\varphi_1, \varphi_2 : I \to \mathbb{R}^n$ Lösungen der DGL $\dot{y}(t) = A(t)y(t)$ und $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, dann ist auch $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 : I \to \mathbb{R}^n$ Lösung der Differentialgleichung. Die Menge

$$L_0 := \{\varphi \in C^1(I, \mathbb{R}^n) \mid \dot{\varphi}(t) = A(t)\varphi(t), t \in I\} \tag{5.15}$$

der Lösungen bildet also einen $\mathbb{R}$–Untervektorraum von $C^1(I, \mathbb{R}^n)$, den (homogenen) *Lösungsraum*. Ist $t_0 \in I$, so ist wegen der lokalen Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des AWP die lineare Abbildung

$$B_{t_0} : L_0 \to \mathbb{R}^n \quad , \quad \varphi \mapsto \varphi(t_0)$$

ein Isomorphismus, es ist also $\dim(L_0) = n$.

5.13 Definition *Eine Basis des Lösungsraumes L_0 heißt* **Fundamentalsystem** *von Lösungen der Differentialgleichung. Geschrieben als matrixwertige Abbildung $I \to \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ spricht man auch von einer* **Fundamentalmatrix**.

Da die Lösung des homogenen DGL-Systems (5.11) linear von y_0 abhängt, erhalten wir die allgemeine Lösung in der Form

$$y_h(t) = \Phi(t, s)y_h(s)$$

mit dem *Lösungsoperator* (auch *Hauptfundamentalmatrix* genannt)

$$\Phi : I \times I \to \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}).$$

Im Spezialfall einer zeitunabhängigen Matrix A ist

$$\Phi(t, s) = \exp(A \cdot (t - s)) \qquad (t, s \in \mathbb{R}).$$

Allgemein gilt

$$\boxed{\tfrac{d}{dt}\Phi(t, s) = A(t)\Phi(t, s) \text{ und } \Phi(s, s) = \mathbb{1}}. \tag{5.16}$$

5.14 Bemerkungen 1. Auch wenn diese Familie von Matrizen von *zwei* Parametern, der Anfangszeit s und der Endzeit t abhängt, genügt es, für ein einziges $t_0 \in I$ die einparametrige Familie

$$t \mapsto \Phi(t, t_0) \qquad (t \in I)$$

zu kennen, denn es gilt

$$\Phi(t, s) = \Phi(t, t_0)\Phi(t_0, s) = \Phi(t, t_0)\Phi(s, t_0)^{-1}.$$

2. Trotzdem ist die Lösung dieses homogenen nicht autonomen Problems oft eine Matrix, deren Einträge keine elementaren Funktionen sind, auch wenn die Einträge von A elementare Funktionen sind.

   Tatsächlich werden viele sog. *höhere Funktionen* als Lösungen solcher DGLn definiert, wie etwa die Bessel–Gleichung oder die Mathieu–Gleichung. $\diamond$

Die Wronski–Determinante

5.15 Definition *Für ein Intervall I und Kurven $v_1, \ldots, v_n \in C(I, \mathbb{R}^n)$ ist die* **Wronski–Determinante** *die stetige Funktion*

$$w : I \to \mathbb{R} \quad , \quad t \mapsto \det(v_1(t), \ldots, v_n(t)).$$

Wir sind hier an der Wronski–Determinante w von Lösungen $v_1, \ldots, v_n$ der DGL interessiert. Da diese Lösungen sogar stetig differenzierbar von der Zeit abhängen, ist $w \in C^1(I, t)$, und erfüllt selbst eine Differentialgleichung.

5.16 Satz *Für die Wronski–Determinante w gilt*

$$\frac{d}{dt}w(t) = \operatorname{tr}(A(t))w(t) \qquad (t \in I), \tag{5.17}$$

also

$$w(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr}(A(s))\, ds\right) w(t_0). \tag{5.18}$$

Beweis: Da die Lösungen $v_i \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ der Differentialgleichung die Ableitung

$$\dot{v}_i(t) = A(t)v_i(t) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

besitzen, gilt nach der Produktregel

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}w(t) &= \sum_{i=1}^{n} \det\Big(v_1(t), \ldots, v_{i-1}(t), \dot{v}_i(t), v_{i+1}(t), \ldots, v_n(t)\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \det\Big(v_1(t), \ldots, v_{i-1}(t), Av_i(t), v_{i+1}(t), \ldots, v_n(t)\Big). \end{aligned}$$

Für die kanonische Basis $e_1, \ldots, e_n$ des $\mathbb{R}^n$ gilt

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} (A)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \det\Big(e_1, \ldots, e_{i-1}, Ae_i, e_{i+1}, \ldots, e_n\Big),$$

was sich nach der Determinantenproduktregel auf beliebige Vektoren $\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n \in \mathbb{R}^n$ überträgt:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(A)\det(\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n) &= \sum_{i=1}^{n} \det\Big((\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n)(e_1, \ldots, e_{i-1}, Ae_i, e_{i+1}, \ldots, e_n)\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \det(\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_{i-1}, (A)_{k,i}\tilde{v}_k, \tilde{v}_{i+1}, \ldots, \tilde{v}_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \det(\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_{i-1}, A\tilde{v}_i, \tilde{v}_{i+1}, \ldots, \tilde{v}_n)
\end{aligned}$$

Die Lösung der DGL (5.17) erfolgt durch Separation der Variablen. □

5.17 Bemerkungen

1. Die Wronski–Determinante einer *Fundamentallösung* lässt sich also berechnen, auch wenn man nur deren Anfangswerte $v_1(t_0), \ldots, v_n(t_0)$ kennt. Weil $w(t_0) = \det(v_1(t_0), \ldots, v_n(t_0)) \neq 0$ ist, folgt aus der Gestalt (5.18) der Lösung auch $w(t) \neq 0$ für alle $t \in I$.

2. Die Wronski–Determinante $w(t)$ eines Fundamentalsystems mit Anfangsbedingungen $v_i(t_0) = e_i \quad (i = 1, \ldots, n)$ gibt den Faktor an, um den das Phasenraumvolumen zum Zeitpunkt t gewachsen ist.

3. Für eine lineare DGL n–ter Ordnung der Form

$$y^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) y^{(i)}(t) = 0$$

mit stetigen Koeffizienten $a_0, \ldots, a_{n-1}$ ist die zugeordnete DGL erster Ordnung von der Form

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad x_i = y^{(i-1)} \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & & \\ & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Hier ist also die Wronski–Determinante von Lösungen $y_1, \ldots, y_n : I \to \mathbb{R}$ gleich

$$w(t) = \det \begin{pmatrix} y_1(t) & \ldots & y_n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & \ldots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \quad \text{, und} \quad \frac{d}{dt} w(t) = -a_{n-1}(t) w(t). \quad \diamond$$

Das inhomogene Problem

Das *inhomogene AWP*

$$\dot{z}(t) = A(t)z(t) + b(t) \quad , \quad z(t_0) = z_0 \tag{5.19}$$

mit $b : I \to \mathbb{R}^n$ stetig lässt sich bei Kenntnis dieses homogenen Lösungsoperators leicht lösen:

5.18 Satz ("Duhamel–Prinzip")

$$z(t) = \Phi(t, t_0)z_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, s)b(s)\, ds \tag{5.20}$$

Beweis: Wegen $\Phi(s, s) = \mathbb{1}$ gilt in (5.20) $z(t_0) = z_0$ und zusätzlich gilt wegen $\frac{d}{dt}\Phi(t, s) = A(t)\Phi(t, s)$

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= A(t)\Phi(t, t_0)z_0 + A(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(t, s)b(s)\, ds + \Phi(t, t)b(t) \\ &= A(t)z(t) + b(t). \end{aligned}$$

Damit ist (5.20) die Lösung von (5.19). □

Die Menge der Lösungen der inhomogenen linearen DGL

$$L_b := \{\varphi \in C^1(I, \mathbb{R}^n) \mid \dot{\varphi}(t) = A(t)\varphi(t) + b(t), t \in I\}$$

ist also von der Form

$$L_b = L_0 + \varphi,$$

mit dem in (5.15) definierten homogenen Lösungsraum L_0 und der partikulären Lösung

$$\varphi \in C^1(I, \mathbb{R}^n) \quad , \quad \varphi(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t, s)b(s)\, ds$$

Dieser *inhomogene Lösungsraum* ist damit ein affiner Unterraum von $C^1(I, \mathbb{R}^n)$.

5.19 Beispiel (Harmonischer Oszillator)
Die DGL $\ddot{x}(t)+\frac{1}{10}\dot{x}(t)+x(t) = \cos(t)$ eines gedämpften harmonischen Oszillators mit äußerer Anregung ist zum System

$$\dot{z}(t) = A(t)z(t) + b(t)$$

mit

$$z(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}$$

und

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1/10 \end{pmatrix} \quad , \quad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

äquivalent. A besitzt die komplexen Eigenwerte

$$\lambda_{1/2} = -\tfrac{1}{20} \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{20}\right)^2 - 1} = \tfrac{1}{20}(-1 \pm \sqrt{399}i),$$

und Eigenvektoren

$$W_{1/2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{20}(+1 \mp \sqrt{399}i) \\ 1 \end{pmatrix},$$

sodass mit der diagonalisierenden Matrix

$$W := (W_1; W_2) = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{399}i}{20} & \frac{1+\sqrt{399}i}{20} \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

also

$$W^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-10i}{\sqrt{399}} & \frac{1}{2} - \frac{i}{2\sqrt{399}} \\ \frac{10i}{\sqrt{399}} & \frac{1}{2} + \frac{i}{2\sqrt{399}} \end{pmatrix} \quad , \quad W^{-1}AW = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

gilt. Damit ist mit $\omega := \frac{\sqrt{399}}{20}$

$$\begin{aligned} \exp(At) &= W \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} W^{-1} \\ &= e^{-t/20} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) + \frac{\sin(\omega t)}{\sqrt{399}} & \omega^{-1} \sin(\omega t) \\ -\omega^{-1} \sin(\omega t) & \cos(\omega t) - \frac{\sin(\omega t)}{\sqrt{399}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

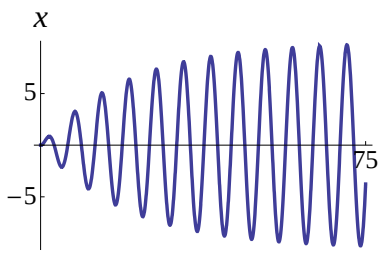
Aus (5.20) ergibt sich

$$\begin{aligned} z(t) &= \exp(At) z_0 + \int_0^t \exp(A(t-s)) b(s)\, ds \\ &= e^{-t/20} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) + \frac{\sin(\omega t)}{\sqrt{399}} & \omega^{-1} \sin(\omega t) \\ -\omega^{-1} \sin(\omega t) & \cos(\omega t) - \frac{\sin(\omega t)}{\sqrt{399}} \end{pmatrix} z_0 + \\ & \quad 10 \begin{pmatrix} \sin(t) - \omega^{-1} e^{-t/20} \sin(\omega t) \\ \cos(t) + e^{-t/20} \left(-\cos(\omega t) + \frac{\sin(\omega t)}{\sqrt{399}} \right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit ist die allgemeine Lösung der DGL zweiter Ordnung von der Form

$$x(t) = e^{-t/20} \left(c_1 \cos(\omega t) - c_2 \sin(\omega t) \right) + 10 \sin t.$$

Die Lösung des AWP für $x_0 = x_0' = 0$ ist nebenstehend abgebildet.
Die Integration bereitet zwar keine grundsätzlichen Probleme, ist aber schon in diesem einfachen Beispiel rechenintensiv.



5.3 Quasipolynome

Um den Rechenaufwand in Grenzen zu halten, benutzt man die Methode der Quasipolynome.

Erinnerung: Der Lösungsoperator $\exp(At)$ der linearen DGL $\dot{x} = Ax$ hat die Form

$$\exp(At) = W \exp(Jt) W^{-1}$$

mit der Jordanmatrix $J = \begin{pmatrix} J_{r_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{r_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}$, und

es gilt $\exp(J_r(\lambda)t) = e^{\lambda t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 1 & t \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Folgerung: Ist $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ und sind $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ seine Eigenwerte mit den Vielfachheiten $\nu_1, \dots, \nu_k$, dann haben die Einträge der Matrix $\exp(At)$ die Form $\sum_{l=1}^{k} e^{\lambda_l t} \cdot p_l(t)$, wobei $p_l(t)$ ein Polynom vom Grad $\leq \nu_l - 1$ ist.

Diese Folgerung können wir uns zunutze machen, nur unter Benutzung eines entprechenden Lösungsansatzes direkter eine Lösung linearer DGLn zu finden.

5.20 Definition *Für $\lambda \in \mathbb{K}$ und ein Polynom $p \in \mathbb{K}[t]$ heißt die Funktion*

$$t \mapsto e^{\lambda t} p(t)$$

λ–Quasipolynom *vom* **Grad** $\mathrm{grad}(p)$ über $\mathbb{K}$.

Kennt man nun durch Auswertung des charakteristischen Polynoms von A die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ und die Multiplizitäten $\nu_1, \dots, \nu_k$, dann kann man die Lösung in der oben angegebenen Form ansetzen.

Der $\mathbb{K}$-Vektorraum der λ–Quasipolynome wird durch Differentiation linear in sich abgebildet, und es gilt

$$\tfrac{d}{dt}(e^{\lambda t} p(t)) = e^{\lambda t}(p'(t) + \lambda p(t)).$$

Einsetzen des Lösungsansatzes ergibt für jeden Eigenwert λ_l eine Gleichung für die Polynome p_l (im Allgemeinen mehrere, denn $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$).

Daraus lassen sich im Prinzip deren Koeffizienten bestimmen.

Besonders leicht ist der Lösungsansatz für lineare Einzel-Differentialgleichungen höherer Ordnung. Ist nämlich

$$x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_0 x = 0,$$

dann ergibt sich das äquivalente System

$$\dot{y} = Ay \quad \text{mit} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y_k := \tfrac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}}$$

und $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$. Es ist damit das charakteristische Polynom

$$\det(\lambda \mathbb{1} - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & \lambda + a_{n-1} \end{pmatrix} = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0,$$

also das Polynom mit den Koeffizienten der DGL.

Wir brauchen also nicht den Umweg über ein DGL–System erster Ordnung zu machen, wenn wir die allgemeine Lösung in Form eines Quasipolynoms schreiben wollen.

5.21 Beispiele (Lösung linearer DGLn mit Quasipolynomen)

1. Für die DGL $x^{(4)} - ax = 0$ mit Koeffizient $a > 0$ sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\lambda^4 - a = 0$ von der Form

   $$\lambda_k = i^k \sqrt[4]{a} \qquad (k = 1, \ldots, 4).$$

   Jede Lösung lässt sich also in der Form $x(t) = \sum_{k=1}^{4} c_k e^{\lambda_k t}$ mit Koeffizienten c_k schreiben. Ist eine reelle Lösung gefragt, dann muss offensichtlich $c_2, c_4 \in \mathbb{R}$ und $c_1 = \overline{c}_3$ gelten. Damit ist mit $\omega := \sqrt[4]{a} > 0$ die allgemeine reelle Lösung

   $$x(t) = d_1 \exp(\omega t) + d_2 \exp(-\omega t) + d_3 \cos(\omega t) + d_4 \sin(\omega t) \qquad (d_k \in \mathbb{R}).$$

2. Die DGL $\ddot{x} + k\dot{x} + x = 0$ mit $k > 0$ beschreibt einen *gedämpften harmonischen Oszillator* (ohne äußere Anregung, siehe Beispiel 5.19).

   Die Eigenwerte $\lambda_{1/2} = -\frac{k}{2} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4} - 1}$ der Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -k \end{smallmatrix}\right)$ sind nur im *aperiodischen Grenzfall* $k = 2$ einander gleich: Dann ist $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, sodass die allgemeine Lösung von der Form

   $$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-t}$$

   ist. ◇

Für $\lambda \in \mathbb{R}$ (sogar für $\lambda \in \mathbb{C}$!) ist

$$\cosh(\lambda t) = \tfrac{1}{2}\left(e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}\right) \quad , \quad \sinh(\lambda t) = \tfrac{1}{2}\left(e^{\lambda t} - e^{-\lambda t}\right),$$

und nach der Euler-Formel

$$\cos(\lambda t) = \tfrac{1}{2}\left(e^{i\lambda t} + e^{-i\lambda t}\right) \quad , \quad \sin(\lambda t) = \tfrac{1}{2i}\left(e^{i\lambda t} - e^{-i\lambda t}\right).$$

Lösungen linearer Differentialgleichungen können also insbesondere Produkte dieser vier elementaren Funktionen mit t–Potenzen enthalten, denn diese erhält man durch Linearkombination geeigneter Quasipolynome.

Das hat eine weitere Konsequenz.

Ist nämlich $\dot{x} = Ax + b(t)$, wobei $b(t)$ sich als Summe von Quasipolynomen schreiben lässt, dann lässt sich die Lösung dieser *inhomogenen* DGL mit konstanten Koeffizienten als Summe von λ–Quasipolynomen schreiben (wobei λ Eigenwert von A ist oder als Exponent in $b(t)$ auftaucht). Dies ergibt sich unmittelbar aus der in diesem Fall gültigen Lösungsformel (siehe (5.20))

$$\varphi(t) = \exp(At)\left(x_0 + \int_0^t \exp(-As)b(s)\,ds\right)$$

für das AWP mit $x(0) = x_0$, denn Produkte und Integrale von Quasipolynomen sind Quasipolynome.

5.22 Beispiele (Quasipolynome)

1. $\ddot{x} + x = t^2$

   Eine partikuläre Lösung dieser inhomogenen Differentialgleichung ist $x_p(t) := t^2 - 2$, die allgemeine von der Form $a_1 \cos t + a_2 \sin t + x_p(t),\ a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

2. $x^{(4)} + x = t^2 e^t \cos t$.

   Die rechte Seite ist von der Form $\frac{1}{2}t^2(e^{\lambda t} + e^{\overline{\lambda} t})$ mit $\lambda := 1 + i$.

   Allgemein hat ein Quasipolynom $e^{\lambda t}p(t)$ die k–te Ableitung

   $$\frac{d^k}{dt^k}\left(e^{\lambda t}p(t)\right) = e^{\lambda t} \cdot \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \lambda^l p^{(k-l)}(t), \tag{5.21}$$

   denn nach der Leibnizregel gibt es $\binom{k}{l}$ Wahlmöglichkeiten, den Exponentialfaktor l–mal abzuleiten.

   Wir setzen die partikuläre Lösung x_p in der Form $x_p = y_p + \overline{y}_p$ mit $y_p^{(4)}(t) + y_p(t) = \frac{t^2}{2}e^{\lambda t}$ an, wobei $y_p(t) := e^{\lambda t}(a_2 t^2 + a_1 t + a_0)$ sein soll.

Nach Formel (5.21) ist die linke Seite

$$\begin{aligned} y_p^{(4)}(t) + y_p(t) &= e^{\lambda t}((\lambda^4+1)a_2t^2 + [(\lambda^4+1)a_1 + 8\lambda^3 a_2]t \\ &\quad + [(\lambda^4+1)a_0 + 4\lambda^3 a_1 + 12\lambda^2 a_2]). \end{aligned}$$

Vergleich mit der rechten Seite ergibt

$$\begin{aligned} a_2 &= \tfrac{1/2}{\lambda^4+1} = -\tfrac{1}{6} \qquad (\text{denn } \lambda^2 = 2i,\ \lambda^4 = -4) \\ a_1 &= \tfrac{-8\lambda^3 a_2}{\lambda^4+1} = \tfrac{8}{9}(1-i) \\ a_0 &= -\tfrac{4\lambda^3 a_1 + 12\lambda^2 a_2}{\lambda^4+1} = \tfrac{92}{27}i. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} x_p(t) &= 2\mathrm{Re}\left(e^{(1+i)t}(-\tfrac{t^2}{6} + \tfrac{8}{9}(1-i)t + \tfrac{92}{27}i)\right) \\ &= e^t\left((-\tfrac{t^2}{3} + \tfrac{16}{9}t)\cos t + (\tfrac{16}{9}t - \tfrac{184}{27})\sin t\right). \end{aligned}$$

5.4 Lineare Flüsse in der Ebene

Nach dem in Beispiel 4.3.1 behandelten Fall der linearen DGLn in einer Dimension ($n = 1$) untersuchen wir jetzt den nächst einfachen Fall $n = 2$. Zueinander ähnliche Matrizen führen zu Flüssen, die sich nur durch eine Basistransformation unterscheiden.

Wir betrachten für $A = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Mat}(2,\mathbb{R})$ den Fluss $\Phi_t^{(A)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ der linearen DGL $\dot{x} = Ax$. Die Größen

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11}+a_{22} \quad , \quad \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad \text{und} \quad D := \mathrm{tr}(A)^2 - 4\det(A)$$

sind invariant unter Konjugationen $A \mapsto SAS^{-1}$, und die Eigenwerte $\lambda_{1/2} \in \mathbb{C}$ sind gleich

$$\lambda_{1/2} = \tfrac{1}{2}(\mathrm{tr}(A) \pm \sqrt{D}).$$

Nur wenn die Diskriminante $D = 0$ ist, kann also die komplexe Jordan-Normalform von A aus einen Jordan-Block der Größe 2 bestehen, und nur in diesem Fall eines doppelten Eigenwerts ist die Konjugations-Klasse von A nicht schon durch $\mathrm{tr}(A)$ und $\det(A)$ festgelegt.

Nicht hyperbolisch ist die Matrix A genau dann, wenn mindestens einer der Eigenwerte verschwindenden Realteil hat. Dies ist genau dann der Fall, wenn

1. $\det(A) = 0$, also sogar ein Eigenwert 0 ist oder
2. $\det(A) > 0$, aber $\mathrm{tr}(A) = 0$ gilt, also die Eigenwerte rein imaginär sind.

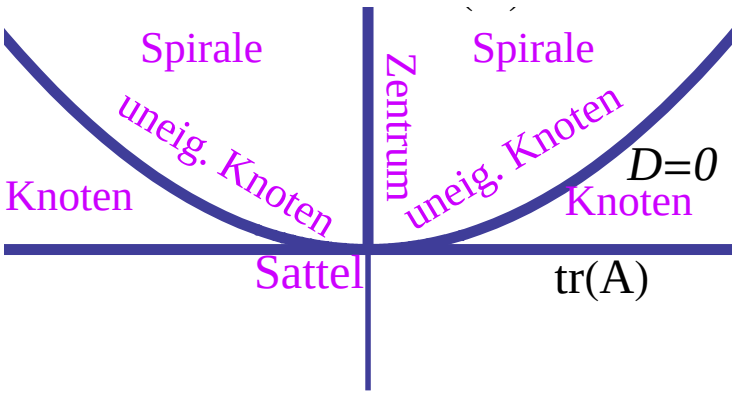


Abbildung 5.2: Verzweigungsdiagramm für Matrizen $A \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{R})$, mit Diskriminante $D = \mathrm{tr}(A)^2 - 4\det(A)$.
$\mathrm{tr}(A) < 0$: Senke; $\mathrm{tr}(A) = 0$: Volumenerhaltender Fluss; $\mathrm{tr}(A) > 0$: Quelle

In der $(\mathrm{tr}, \det) \in \mathbb{R}^2$–Ebene bilden diese Bedingungen die Abszisse bzw. positive Ordinate und trennen damit drei offene Gebiete ab, siehe Abb. 5.2. Mit dem Index $\mathrm{Ind}(A)$ von A bezeichnen wir die Summe der algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte λ von A mit $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ (siehe auch Seite 125).

- $\mathrm{Ind}(A) = 0$ gilt für den Quadranten $\det(A) > 0 < \mathrm{tr}(A)$.
- $\mathrm{Ind}(A) = 1$ gilt für $\det(A) < 0$. Hier sind beide Eigenwerte reell.
- $\mathrm{Ind}(A) = 2$ entspricht dem Quadranten $\det(A) > 0 > \mathrm{tr}(A)$.

Der Fall $\mathrm{Ind}(A) = 1$ ist, entsprechend dem Vorzeichen von $\mathrm{tr}(A)$, noch weiter unterteilbar. In der Situation $\mathrm{tr}(A) = 0$ zweier Eigenwerte $\lambda_1 = -\lambda_2 \in \mathbb{R}$ wird das Phasenraumvolumen durch den Fluss erhalten, während er für $\mathrm{tr}(A) < 0$ gemäß Lemma 5.11 im Limes großer Zeiten mit exponentieller Rate gegen Null geht. Der Fall $\mathrm{tr}(A) > 0$ ist in Abb. 5.3 dargestellt.

Die durch die Gleichung $D = 0$ definierte Parabel trennt die Gebiete mit$\mathrm{Ind}(A) = 0$ und $\mathrm{Ind}(A) = 2$ noch weiter auf. Für $D > 0$, also reelle Eigenwerte, erhalten wir sog. *Knoten* als Phasenraumporträts, siehe Abb. 5.4. Diese werden *stabil* genannt, wenn $\dim(E^s) = 2$, also $\mathrm{Ind}(A) = 2$ ist und *instabil* für $\mathrm{Ind}(A) = 0$.

Für $D = 0$ kann die Jordan–Normalform von A ein nichttrivialer Jordan–Block sein. Ein entsprechendes Phasenporträt, *uneigentlicher Knoten* genannt, findet sich ebenfalls in Abb. 5.4.

Ist zusätzlich $\mathrm{tr}(A) = 0$, sind also beide Eigenwerte gleich Null, erhält man einen eindimensionalen Eigenraum von Gleichgewichtslagen, wie in Abb. 5.5 (links).

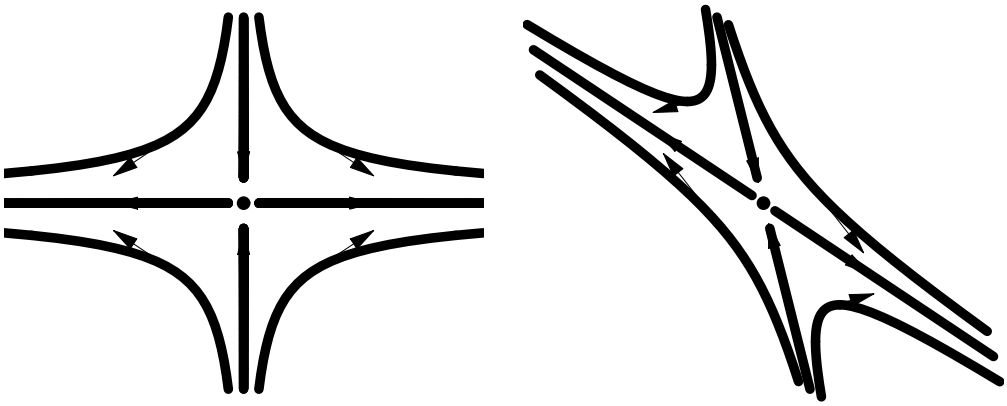


Abbildung 5.3: Phasenporträt von Satteln der DGL $\dot{x} = Ax$. Links: Systemmatrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right)$; Rechts: zu A ähnliche Matrix.

Der Fall $\mathrm{tr}(A) = 0,\ \det(A) > 0$ führt zu imaginären Eigenwerten und periodischen Orbits (Abb. 5.5 rechts), auch *Zentren* genannt.

Endlich ist für $D < 0$ und $\mathrm{tr}(A) < 0$ die Bewegung spiralförmig und stabil (Abb. 5.6), während $D < 0$ und $\mathrm{tr}(A) > 0$ zu sog. *instabilen Spiralen* führt.

5.5 Beispiel: Feder mit Reibung

Als Anwendungsbeispiel der Theorie linearer Differentialgleichungen diskutieren wir den Fall eines an einer Feder aufgehängten Gewichts der Masse $m > 0$, das sich im Ruhezustand in der Höhe $x = 0$ befinde.

Die Kraft $F(x, \dot{x})$, die auf die Masse wirkt, ist in der einfachsten Näherung eine lineare Funktion der Auslenkung $x \in \mathbb{R}$ und der Geschwindigkeit $\dot{x} \in \mathbb{R}$, also $F(x, \dot{x}) = -Dx - R\dot{x}$. Die erste Proportionalitätskonstante $D > 0$ nennt man Federkonstante. Sie ist ein Maß für die Steifheit der Feder.

Die zweite Konstante $R \geq 0$ beschreibt die Reibung des Massenkörpers an der umgebenden Luft und die innere Reibung des Federmaterials.

Autonomer Fall

Es gilt also nach dem zweiten Newtonschen Gesetz $m\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -Dx(t) - R\frac{d}{dt}x(t)$, oder $\frac{d^2}{dt^2}x = -\frac{D}{m}x - \frac{R}{m}\frac{d}{dt}x$. Setzt man als neuen Zeitparameter $s = \sqrt{\frac{m}{D}}t$ an, und kürzt $\frac{d}{ds}x(t(s))$ mit $\dot{x}$ ab, so ergibt sich

$$\ddot{x} = -x - k\dot{x} \quad \text{, mit} \quad k := \frac{R}{\sqrt{mD}} \geq 0.$$

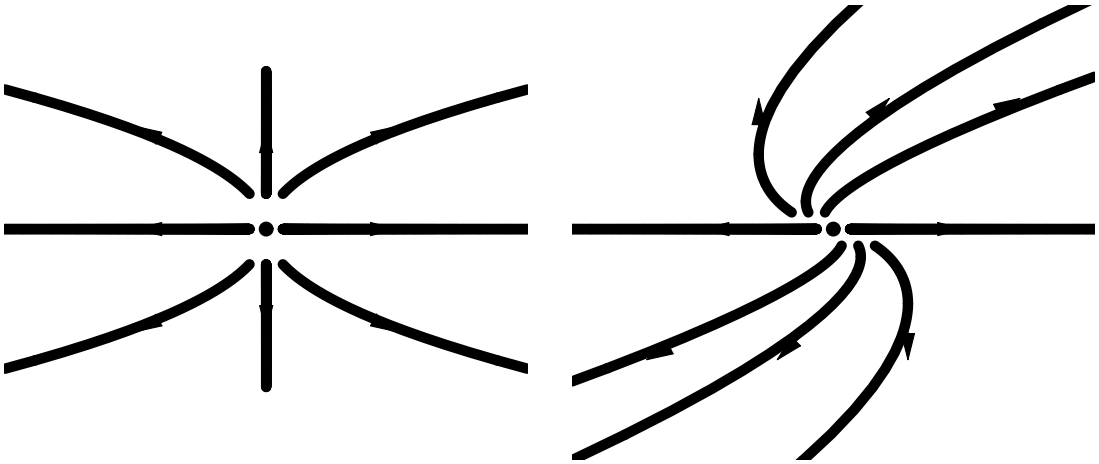


Abbildung 5.4: Phasenporträts von Knoten der DGL $\dot{x} = Ax$. Links: instabiler Knoten, für $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{smallmatrix}\right)$; Rechts: instabiler uneigentlicher Knoten, für $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$

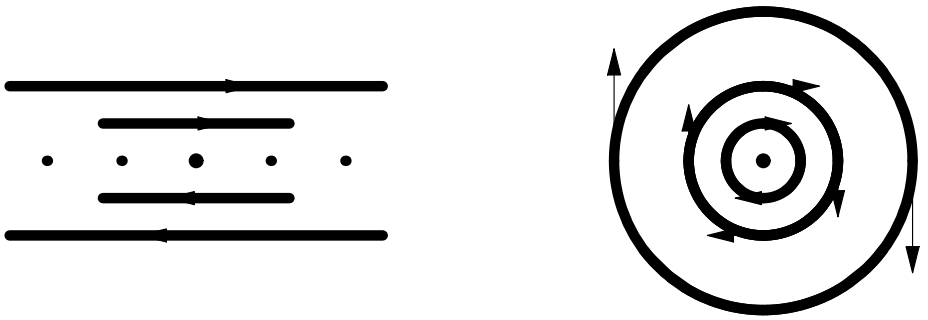


Abbildung 5.5: Phasenporträts von $\dot{x} = Ax$. Fall rein imaginärer Eigenwerte. Links: Nilpotente Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$; Rechts: Zentrum, für antisymmetrische Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$

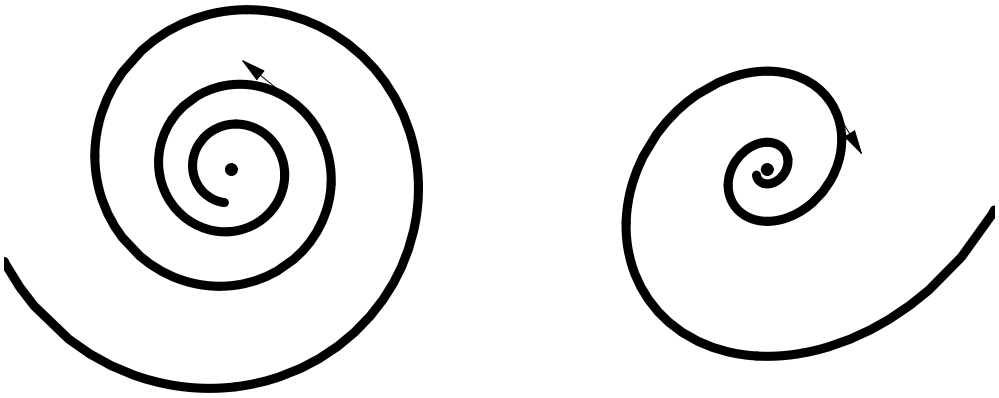


Abbildung 5.6: Phasenporträts von stabilen Spiralen der DGL $\dot{x} = Ax$. Links: $A = \left(\begin{smallmatrix} -1/5 & -1 \\ 1 & -1/5 \end{smallmatrix}\right)$; rechts: eine nicht zu A ähnliche Matrix

Derartige Umskalierungen werden häufig benutzt, um eine Differentialgleichung auf eine möglichst einfache Form zu bringen.

Mit der Geschwindigkeit $v := \dot{x}$ ergibt sich das lineare System erster Ordnung

$$\left(\begin{smallmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{smallmatrix}\right) = A \left(\begin{smallmatrix} x \\ v \end{smallmatrix}\right) \quad \text{mit} \quad A := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -k \end{smallmatrix}\right).$$

Die Eigenwerte von A ergeben sich als die Nullstellen $\lambda_{1/2} = -\frac{k}{2} \pm i\sqrt{1 - \frac{k^2}{4}}$ des charakteristischen Polynoms $\det(\lambda \mathbb{1} - A) = \lambda^2 + k\lambda + 1$.

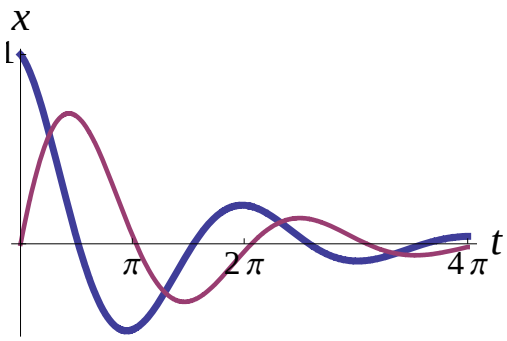
Es gilt $\det(A) = 1$ und $\operatorname{tr}(A) = -k$, wir bewegen uns also im Diagramm 5.2 auf einer horizontalen Geraden. Je nach Größe des Reibungsterms müssen also drei Fälle unterschieden werden:

1. **Schwingfall:**, Kleine Reibung, $0 \leq k < 2$.

   Die allgemeine Lösung hat hier die Form

$$x(t) = e^{-kt/2}(a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)) \quad \text{mit} \quad \omega := \operatorname{Im}(\lambda_1) = \sqrt{1 - \frac{k^2}{4}},$$

wobei die Koeffizienten a und b aus den Anfangswerten $x(0), \dot{x}(0)$ zu bestimmen sind. Für den reibungsfreien Fall $k = 0$ liegt ein Zentrum vor, sonst eine Spirale.
Die Schwingungsfrequenz $\omega(k)$ ist gegenüber $\omega(0) = 1$ verkleinert, aber es gilt noch $\omega(k) > 0$.
Die an der Feder aufgehängte Masse pendelt sich allmählich in ihre Ruhelage $(x, \dot{x}) = (0, 0)$ ein.



Zwei Lösungen für den Schwingfall $(k = 1/2)$

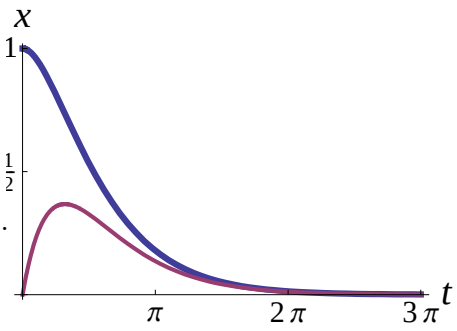
2. **Aperiodischer Grenzfall:** $k = 2$.

Es ist $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{smallmatrix}\right)$, und die Matrix $V := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right), V^{-1} = \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, führt A in obere Dreiecksform über: $J := V^{-1}AV = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.
Damit ist $e^{Jt} = e^{-t}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und

$$\exp(At) = Ve^{Jt}V^{-1} = e^{-t}\left(\begin{smallmatrix} 1+t & t \\ -1 & 1-t \end{smallmatrix}\right).$$

Beispielsweise ist bei verschwindender Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$

$$x(t) = x_0(1+t)e^{-t}.$$



Zwei Lösungen für den Aperiodischen Grenzfall

Es findet also keine Schwingung mehr statt. Wegen der Nichttrivialität des Jordan-Blockes ist die Bewegung zur Ruhelage hin gegenüber der Lösung $x(t) = x_0e^{-t}$ verlangsamt.

3. **Kriechfall:** Große Reibung, $k > 2$.

Hier hat A die beiden reellen negativen Eigenwerte

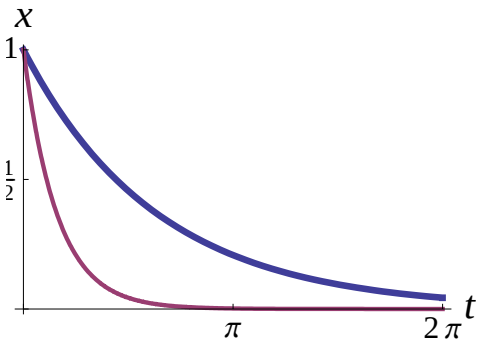
$$\lambda_{1/2} = -\frac{k \pm \sqrt{k^2-4}}{2} = -\frac{k}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-\frac{4}{k^2}}\right).$$

Für $k \to \infty$ ist also

$$\lambda_1 \sim -k^{-1} \quad , \quad \lambda_2 \sim -k.$$

Das Phasenportrait ist das eines Knotens. Physikalisch bedeutet dies, dass, außer für sehr spezielle Anfangswerte (x_0, v_0) die einem Eigenvektor zum kleineren Eigenwert λ_2 entsprechen, die Annäherung an die Ruhelage sich bei Vergrößerung von k verlangsamt:

$$x(t) = ae^{\lambda_1 t} + be^{\lambda_2 t}.$$



Zwei Lösungen für den Kriechfall $(k = 2.5)$

Nicht autonomer Fall

Eine in der Praxis wichtige Erweiterung des eben besprochenen Beispiels besteht darin, dass auf den Massenpunkt zusätzlich eine äußere Kraft wirkt. Soll beispielsweise dauerhaft eine Schwingung aufrechterhalten werden, kann man den Aufhängungspunkt zeitperiodisch nach oben und unten bewegen.

Die zu behandelnde Differentialgleichung hat dann die Normalform

$$\ddot{x} + k\dot{x} + x = f(t)$$

mit einer vorgegebenen äußeren Kraft f, z.B. $f(t) = A\cos(\omega t)$. Es ist ja $\cos(\omega t) = \mathrm{Re}(e^{i\omega t})$. Es liegt also zur Verkürzung der Rechnung nahe, eine partikuläre Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ der komplexen Differentialgleichung

$$\ddot{y} + k\dot{y} + y = Ae^{i\omega t}$$

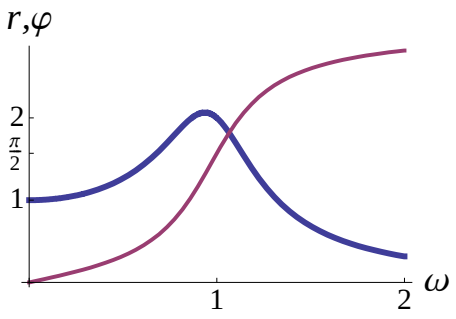
zu suchen, und danach $x(t) := \mathrm{Re}(y(t))$ zu setzen.

Physikalisch ist wegen der Reibung zu erwarten, dass der Massenpunkt nach einiger Zeit hauptsächlich eine harmonische Schwingung mit der Kreisfrequenz ω durchführt, die ihm von außen aufgeprägt wird. Setzen wir an: $y(t) := Be^{i\omega t}$, so ergibt sich $y^{(k)}(t) = (i\omega)^k y(t)$, also

$$(1 - \omega^2 + ik\omega)y(t) = Ae^{i\omega t}$$

oder, nach Auflösen nach B:

$$B = \frac{A}{1 - \omega^2 + ik\omega} = Ar(\omega)e^{-i\varphi(\omega)}$$



Amplitude und Phasendifferenz der Erzwungenen Schwingung $(k = \frac{1}{2})$

mit *Amplitude* $r(\omega) := \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2)^2+(k\omega)^2}}$ und *Phase* $\varphi(\omega) := \arctan\left(\frac{k\omega}{1-\omega^2}\right)$

der erzwungenen Schwingung (siehe Abb.).

Offensichtlich spielt $\omega = 1$ eine besondere Rolle; das ist nicht verwunderlich, denn die homogene Gleichung ohne Reibung hatte ja diese Frequenz ihrer Lösungen.

Wir interpretieren jetzt Amplitude und Phase der Lösung physikalisch:

- Für kleine anregende Frequenz ω schwingt die Masse einfach mit der Amplitude der Anregung. Ist ω nahe bei der auf 1 normierten Eigenfrequenz, dann kommt es zur Resonanz. Die Schwingungsamplitude wird größer als die anregende Amplitude und zwar um so größer, je geringer die Dämpfung ist.[23] Das Maximum von $r(\omega)$ liegt an der Stelle $\omega_0 = \sqrt{1-k^2/2}$, also zwischen der Eigenfrequenz mit und ohne Reibung. Die Maximalamplitude ist für verschwindende Dämpfung $k \searrow 0$ asymptotisch zu

$$r(\omega_0) = \frac{1}{k\sqrt{1-k^2/4}} \sim \frac{1}{k}.$$

- Die Phasendifferenz $\varphi(k)$ zwischen der äußeren Kraft und der Schwingung hat folgende Form:

  Für $\omega \ll 1$ sind die beiden Schwingungen also in Phase, für $\omega \gg 1$ gegenphasig, für $\omega = 1$ um $\frac{\pi}{2}$ gegeneinander verschoben.

Wir erhalten also als Lösung der Differentialgleichung $\ddot{x}+k\dot{x}+x = A\cos(\omega t)$

$$x_I(t) = r(\omega)A\cos(\omega t - \varphi(\omega)).$$

Der Index I steht hier für *inhomogen* und verweist auf die rechte Seite der Differentialgleichung. Wie immer bei inhomogenen linearen DGLn gilt:

Ist x_H eine beliebige *homogene* Lösung der homogenen linearen DGL (hier: $\ddot{x} + k\dot{x} + x = 0$), dann ist

$$x_H + x_I$$

eine Lösung der inhomogenen Gleichung, und jede Lösung der inhomogenen Gleichung läßt sich so gewinnen. Diese Lösungsstruktur entspricht derjenigen der Lösungsmenge eines inhomogenen Gleichungssystems $Ax = b$.

[23] Voraussetzung: $k < \sqrt{2}$.

6 Stabilität von Gleichgewichtslagen

6.1 Allgemeine Bedeutung der Linearisierung

Wir besitzen jetzt eine Lösungsmethode für lineare Differentialgleichungen (mit konstanten Koeffizienten). Es ist dies aber leider die einzige große Klasse "algorithmisch" lösbarer DGLn. Andererseits sind viele Anfangswertprobleme zwar nicht linear, können aber immerhin näherungsweise mithilfe linearer AWPs gelöst werden.

6.1 Bemerkung Ein Grund dafür ist die Tatsache, dass sich viele in der Natur auftretenden Systeme näherungsweise im Gleichgewicht befinden, also nahe bei einem kräftefreien Fall. Besitzt die ortsabhängige Kraft F eine Nullstelle bei q_s, dann gilt (für glattes F) nach Taylor für q nahe bei q_s

$$\begin{aligned} F(q) &= \underbrace{F(q_s)}_{0} + DF(q_s)(q-q_s) + \mathcal{O}(\|q-q_s\|^2) \\ &= A(q-q_s) + \mathcal{O}(\|q-q_s\|^2) \end{aligned}$$

mit $A := DF(q_s)$. Führt man die Relativkoordinate $y := q - q_s$ ein, so wird aus der Newton-Gleichung $\ddot{q} = F(q)$ (für Masse 1)

$$\ddot{y} = Ay + \mathcal{O}(\|y\|^2).$$

Es liegt nun nahe (und ist auch richtig), anzunehmen, dass für kurze Zeiten die Lösungen des AWP für $\ddot{y} = Ay$ mit betragsmäßig kleinen Anfangswerten $y(0)$ und $\dot{y}(0)$ nahe bei den entsprechenden Lösungen der nicht linearen DGL liegen. Manchmal gilt das sogar für alle Zeiten, zumindest wenn man statt der Lösungen die Orbits vergleicht, also die Zeitparametrisierung vergisst. ◇

Wir formulieren nun das Konzept der Linearisierung allgemein für Differentialgleichungssysteme erster Ordnung.

6.2 Definition *Es sei $x_s \in U$ Nullstelle des Vektorfeldes $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ auf dem Phasenraum $U \subseteq \mathbb{R}^n$, also Gleichgewichtslage der Differentialgleichung*

$$\dot{x} = f(x). \tag{6.1}$$

Die lineare Differentialgleichung

$$\dot{y} = Ay \quad \textit{mit} \quad A := Df(x_s) \tag{6.2}$$

heißt **Linearisierung** *von (6.1)* **bei** x_s.

Wir untersuchen an einem Beispiel den Zusammenhang zwischen den Lösungen von (6.1) und denen der Linearisierung (6.2).

6.3 Beispiel (Das planare Pendel)
Zunächst leiten wir mithilfe des newtonschen Kraftgesetzes eine Differentialgleichung ab, die wir anschließend untersuchen.

Im ersten Schritt (oft *Modellierung* genannt) idealisieren wir das Pendel wie folgt. Es soll aus einem Massepunkt der Masse $m > 0$ bestehen, der sich in einer Ebene auf einem Kreis mit Radius $L > 0$ (Pendellänge) um den Ursprung bewegt. Seine Koordinaten seien $\binom{z_1}{z_2} = L\binom{\sin\varphi}{-\cos\varphi}$, und auf ihn wirke eine in $-z_2$–Richtung wirkende Kraft $F(z) = \binom{0}{-m}$ der Stärke m (Schwerkraft). Deren Komponente in Tangentialrichtung ist daher gleich $-\sin\varphi$. Es ergibt sich damit die Differentialgleichung

$$L\ddot{\varphi} = -\sin\varphi,$$

denn die Masse m tritt auf beiden Seiten des Newtonschen Kraftgesetzes als Faktor auf, kann also gekürzt werden. Auf dem Phasenraum $U = \mathbb{R}^2$ erhalten wir durch Einführung der Winkelgeschwindigkeit v das Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$\dot{\varphi} = v \quad , \quad \dot{v} = -\frac{1}{L}\sin\varphi.$$

Durch Reskalierung der Zeit können wir erreichen, dass $L = 1$ ist.
Mit $x := \binom{\varphi}{v}$ ist

$$\dot{x} = f(x) = \begin{pmatrix} v \\ -\sin\varphi \end{pmatrix}. \tag{6.3}$$

Es gilt $f(x + y) = f(x)$, falls $y = (2\pi k, 0)$ mit $k \in \mathbb{Z}$ ist. Innerhalb einer Periode ($\varphi \in [0, 2\pi)$) besitzt aber f nur die Nullstellen $x_s = (0, 0)$ und $(\pi, 0)$, entsprechend der unteren bzw. oberen Ruhelage des Pendels. Linearisierung bei $x_s = (0, 0)$ ergibt die lineare Differentialgleichung auf dem Phasenraum $\mathbb{R}^2$

$$\dot{y} = Ay \quad \text{mit} \quad A = Df(x_s) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right).$$

Diese besitzt mit der Bezeichnung $y = (q, p)$ die Lösung

$$q(t) = q_0\cos t + p_0\sin t \quad , \quad p(t) = -q_0\sin t + p_0\cos t, \tag{6.4}$$

mit der Periode 2π.

Sind diese Lösungen für Anfangsbedingungen (q_0, p_0) in der Nähe der Ruhelage $x_s = (0, 0)$ eine gute Näherung an die Lösungen von (6.3)?

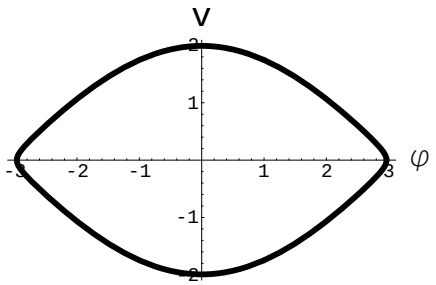


Abbildung 6.1: Niveaukurve für die Energie der oberen Ruhelage des Pendels

Um dies zu untersuchen, stellen wir fest, dass die so genannte *Hamilton-Funktion* [24] von (6.3)

$$H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad , \quad H(\varphi, v) = \tfrac{1}{2}v^2 - \cos\varphi$$

entlang der Lösungskurven ihren Wert nicht ändert:

$$\frac{d}{dt}H(\varphi(t), v(t)) = v\dot{v} + \sin(\varphi)\dot{\varphi} = -v\sin\varphi + v\sin\varphi = 0.$$

Damit fixieren die Niveaulinien von H im Phasenraum $\mathbb{R}^2$ auch schon die Orbits der DGL (siehe Abb. 6.1). Da x_s Minimalstelle von H ist, und die Hessesche Hess $H(x_s) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ positiv definit ist, sind diese Niveauflächen $H^{-1}(H(x_0))$ für x_0 nahe bei x_s näherungsweise von der Form eines Kreises mit Radius $\|x_0\|$, also nahe bei dem Orbit (6.4) der Linearisierung.
Damit bleibt insbesondere die Lösung von (6.3) für alle Zeiten in der Nähe von x_s. Die Schwingungsdauer des Pendels ist aber größer als die Periode 2π der Lösung (6.4) der linearen DGL, sodass die beiden Lösungen nach einiger Zeit nicht mehr synchron sind (siehe Abb. 6.2). ◇

6.2 Stabilitätsbegriffe für Gleichgewichtslagen

Anschaulich wird man eine Gleichgewichtslage x_s der DGL $\dot{x} = f(x)$ dann stabil nennen, wenn benachbarte Lösungen nicht von x_s wegstreben. Diese Vorstellung muss natürlich noch präzisiert werden, ihre praktischen Implikationen sind aber offensichtlich.

[24] Physikalisch ist $H(\varphi, v)$ die Gesamtenergie des Pendels mit Winkel φ und Winkelgeschwindigkeit v

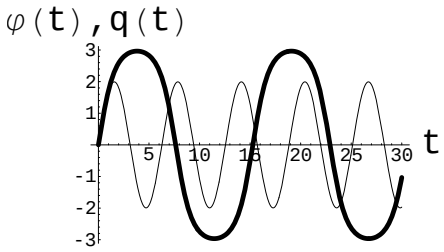


Abbildung 6.2: Pendelausschlag als Funktion der Zeit (fett) und Linearisierung

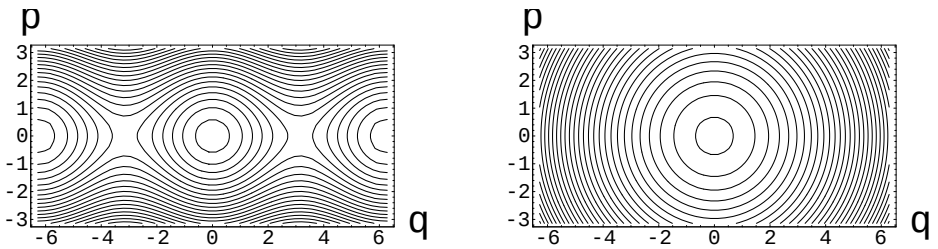


Abbildung 6.3: Orbits der Pendelgleichung (links) und ihrer Linearisierung an der unteren Gleichgewichtslage (rechts)

6.4 Beispiel In vielen technischen Anwendungen ist man daran interessiert, das System in eine Gleichgewichtslage zu bringen. Man kann das aber natürlich nur bis auf einen gewissen Fehler erreichen.

Ist nun die Gleichgewichtslage stabil, dann ist auch in Zukunft das System nahe bei der Gleichgewichtslage, sonst im Allgemeinen nicht.

Das Pendel aus Beispiel 6.3 ist in diesem Sinn in seiner unteren Gleichgewichtslage stabil, in seiner oberen nicht.

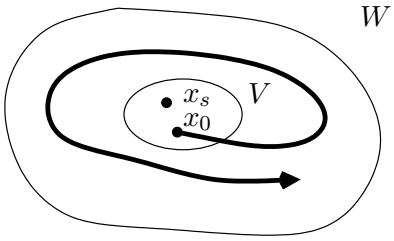
Ist das Pendel ungedämpft, so wird es für alle Zeiten kleine Schwingungen um die Gleichgewichtslage vollführen; ist es gedämpft, dann wird es sich der Gleichgewichtslage immer mehr annähern. Entsprechend unterscheiden wir auch zwei Stabilitätsbegriffe. ◇

6.5 Definition • *Die Gleichgewichtslage $x_s \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ der DGL*

$$\dot{x} = f(x) \quad , \quad f \in C^1(U, \mathbb{R}^n) \tag{6.5}$$

heißt **Liapunov-stabil**, *falls für jede Umgebung $W \subseteq U$ von x_s eine Umgebung $V \subseteq W$ von x_s existiert, sodass das AWP $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_0$ für alle Anfangswerte $x_0 \in V$ und alle Zeiten $t \geq 0$ lösbar ist und die Lösungen φ in W bleiben ($\varphi\big([0,\infty)\big) \subseteq W$).*

• *Andernfalls heißt sie* **instabil**.

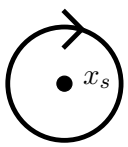


6.6 Beispiel (Liapunov-Stabilität und Instabilität)

1. Die *untere* Gleichgewichtslage $x_s := (\varphi, v) = (0, 0)$ des planaren Pendels

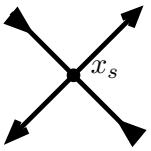
$$\begin{cases} \dot{\varphi} = v \\ \dot{v} = -\sin\varphi \end{cases}$$

ist Liapunov-stabil, denn jede Umgebung W von x_s enthält eine Umgebung V der Form $V = H^{-1}((-\infty, E))$, wobei $H(v, \varphi) = \frac{v^2}{2} - \cos\varphi$ die Hamilton-Funktion ist.



V ist aber flussinvariant, denn die Energie H ist, wie wir gesehen haben, auf den Lösungskurven konstant (lässt man Winkel $\varphi \in \mathbb{R}$ zu, muss man statt $H^{-1}((-\infty, E))$ die x_s enthaltende Zusammenhangskomponente V dieser nicht beschränkten Menge verwenden).

2. Die *obere* Gleichgewichtslage $x_s := (\varphi, v) = (\pi, 0)$ ist *nicht* Liapunov-stabil, denn $H(x_s) = 1$, und $E^{-1}(1)$ enthält von x_s verschiedene, aber diesem beliebig nahe Phasenraumpunkte, die von x_s wegstreben. ◇



Der Begriff der Liapunov-Stabilität ist vergleichsweise schwach, denn er setzt ja keine Annäherung an die Gleichgewichtslage voraus. So ist der untere Gleichgewichtspunkt des Pendelbeispiels auch für negative Zeiten, also bei Richtungsumkehr des Vektorfeldes, Liapunov-stabil.

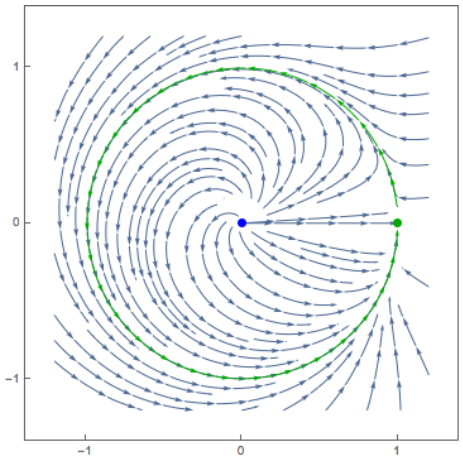
6.7 Definition *Die Gleichgewichtslage x_s von (6.5) heißt* **asymptotisch stabil**, *wenn sie Liapunov-stabil ist und eine Umgebung $V \subseteq U$ von x_s existiert mit*

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_s \quad \textit{für alle} \quad x(0) \in V.$$

6.8 Bemerkung Wie das Beispiel der autonomen Differentialgleichung

$$\dot{x}_1 = g(\|x\|)x_1 - (\|x\| - x_1)x_2 \quad , \quad \dot{x}_2 = g(\|x\|)x_2 + (\|x\| - x_1)x_1$$

mit $g(0) := 0$, $g(x) := -x\log(x)$ $(x > 0)$ auf dem $\mathbb{R}^2$ zeigt, folgt die Liapunov-Stabilität nicht aus der zweiten Bedingung. Denn diese ist für die Ruhelage $(1, 0)$ erfüllt, sie ist aber nicht asymptotisch stabil. ◇



6.9 Beispiel (Asymptotische Stabilität)

1. Die untere Gleichgewichtslage $x_s = (0, 0)$ des Pendels ist *nicht* asymptotisch stabil, denn nur x_s selbst hat Energie $H(x_s) = -1$, alle Nachbarpunkte haben echt größere Energie, und diese bleibt erhalten.

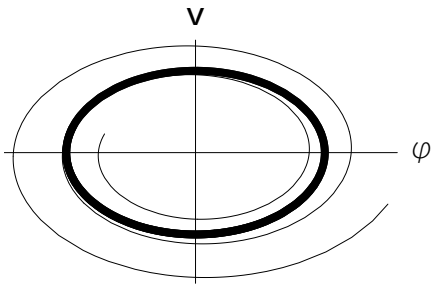
2. Wirkt auf das Pendel eine geschwindigkeitsproportionale Reibung mit Proportionalitätskonstante $k > 0$, dann wird seine Bewegung durch die DGL

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = v \\ \dot{v} = -\sin\varphi - k \cdot v \end{cases}$$

beschrieben. In diesem Fall ist die untere Gleichgewichtslage sogar asymptotisch stabil. Es gilt nämlich

$$\frac{d}{dt}H(v(t),\varphi(t)) \;=\; v(t)\cdot\dot{v}(t) + \sin(\varphi)\cdot\dot{\varphi} = -k(v(t))^2 \leq 0,$$

was ja auch anschaulich zu erwarten ist. Man kann nun zeigen, dass mit der Zeit die Energie H tatsächlich gegen -1 geht, der Orbit also auf die untere Gleichgewichtslage zusteuert. In diesem Beispiel spielt H die Rolle einer *Liapunov-Funktion*, d.h. einer entlang der Lösung monoton fallenden Phasenraumfunktion H. ◇



6.3 Stabilitätskriterien für Gleichgewichtslagen

Das letzte Beispiel zeigt eine wichtige Beweisidee für asymptotische Stabilität. Man möchte ja Stabilitätsfragen auch für Differentialgleichungen klären, deren Lösungen man nicht hinschreiben kann. Die Rolle der Funktion H bestand nun in der Tatsache, dass die Mengen $H^{-1}((-\infty,\varepsilon)) \subseteq U$ Umgebungen der Gleichgewichtslage waren, die wegen $\frac{dH}{dt} \leq 0$ nicht verlassen werden können. Die Größe von H ist ein Maß für den Abstand von der Gleichgewichtslage, und dieser wird immer kleiner. Unsere Strategie besteht nun darin, zunächst Kriterien für die Stabilität im linearen Fall zu entwickeln, um danach, soweit möglich, diese auf den nichtlinearen Fall mittels Linearisierung zu übertragen.

Der lineare Fall

Der Fall linearer autonomer Differentialgleichungen folgt unter Verwendung der reellen Jordan-Normalform.

6.10 Definition

- *Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$, das Vektorfeld $x \mapsto Ax$ und der Fluss $(t,x) \mapsto \Phi_t(x) = \exp(At)x$ heißen* **hyperbolisch**, *wenn für alle Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C}$ von A gilt:* $\mathrm{Re}(\lambda) \neq 0$.

- *Die Summe der algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte λ mit $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ heißt der* **Index** *von A und wird $\mathrm{Ind}(A)$ geschrieben.*

- $E^s := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t\to\infty} \Phi_t(x) = 0\}$ *heißt* **stabiler Unterraum**,
  $E^u := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t\to-\infty} \Phi_t(x) = 0\}$ **instabiler Unterraum** *von A.*

6.11 Satz *Die Ruhelage 0 der DGL $\dot{x} = Ax$ mit $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ ist*

1. **instabil**, *wenn $\mathrm{Ind}(-A) > 0$, oder wenn $\mathrm{Ind}(-A) = 0$, es aber einen Eigenwert $\lambda \in i\mathbb{R}$ gibt, dessen algebraische Multiplizität größer als die geometrische ist,*

2. **Liapunov-stabil**, *wenn keine der in 1. genannten Bedingungen erfüllt ist,*

3. **asymptotisch stabil** *genau dann, wenn $\mathrm{Ind}(A) = n$ gilt.*

Beweis: Da Instabilität, Liapunov-Stabilität und asymptotische Stabilität linearer Differentialgleichungen unter Ähnlichkeitstransformationen erhalten bleiben, nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass sich A schon in der reellen Jordan–Normalform befindet, also aus reellen Jordan-Blöcken der Form $J_r^{\mathbb{R}}(\lambda) := J_r(\lambda)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$, bzw.

$$J_r^{\mathbb{R}}(\lambda) := \begin{pmatrix} J_r(\mu) & -\varphi \mathbb{1}_r \\ \varphi \mathbb{1}_r & J_r(\mu) \end{pmatrix} \qquad (\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R})$$

mit $\mu := \mathrm{Re}(\lambda),\ \varphi := \mathrm{Im}(\lambda)$ besteht.

1. Nach Voraussetzung gibt es einen Jordan-Block zu einem Eigenwert λ, für den $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ oder $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$, aber $r \geq 2$ gilt. Wir benutzen den r–ten kanonischen Basisvektor e_r im fluss–invarianten Unterraum dieses reellen Jordan-Blocks als Anfangswert. Inspektion von (5.7) bzw. (5.8) zeigt, dass

   $$\lim_{t\to\infty} \|\exp(J_r^{\mathbb{R}}(\lambda))e_r\| = \infty.$$

2. Andernfalls gibt es keine Eigenwerte λ mit Realteil $\mu > 0$, und diejenigen mit Realteil $\mu = 0$ gehören zu Jordan-Blöcken $J_r(\lambda)$ mit $r = 1$.

   Im Fall $\mu < 0$ zeigt für reelle λ (5.7), und für nicht reelle λ (5.8), dass

   $$\lim_{t\to\infty} \|\exp(J_r^{\mathbb{R}}(\lambda)t)\| = \lim_{t\to\infty} e^{\mu t}\|\exp(J_r^{\mathbb{R}}(i\varphi)t)\| = 0.$$

   Für $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$ und $r = 1$ tritt neben dem Fall $\exp(J_r(0)t) = 1$ nur der Fall des reellen Jordan-Blocks

   $$\left\|\exp(J_r^{\mathbb{R}}(\lambda)t)\right\| = \left\|\begin{pmatrix} \cos(\varphi t) & -\sin(\varphi t) \\ \sin(\varphi t) & \cos(\varphi t) \end{pmatrix}\right\| = 1$$

   aus (5.9) auf, und beide führen zu Liapunov-Stabilität.

3. Ist $\mathrm{Ind}(A) = n$, sind also die Realteile der Eigenwerte negativ, dann ist $\lim_{t\to\infty} \|\exp(J_r^{\mathbb{R}}(\lambda)t)\| = 0$, andernfalls gibt es ein λ mit $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$, also $\lim_{t\to\infty} \|\exp(J_r^{\mathbb{R}}(\lambda)t)\| \geq 1$. □

Der nichtlineare Fall

Wir betrachten nun eine nicht notwendig lineare DGL auf $U \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\dot{x} = f(x) \quad , \quad f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$$

in einer Umgebung einer Gleichgewichtslage x_s. Von dieser können wir (durch Einführung verschobener Koordinaten $x - x_s$) o.B.d.A. annehmen, dass sie sich im Nullpunkt befindet.

Mit $A := Df(0)$ bezeichne

$$R \in C^1(U, \mathbb{R}^n) \quad , \quad R(x) := f(x) - Ax$$

die Abweichung des Vektorfeldes von seiner Linearisierung an der Gleichgewichtslage.

Wir wollen nun zeigen, dass die Lösungen der DGL in führender Ordnung durch die Linearisierung von f kontrolliert werden, soweit wir uns in der Nähe der Gleichgewichtslage befinden. Wir können die so genannte Gronwall–Ungleichung benutzen. Diese in der Differentialgleichungstheorie wichtige Abschätzung ähnelt Münchhausens Methode, sich an den eigenen Haaren aus dem Sumpf zu ziehen.

6.12 Lemma (Gronwall–Ungleichung)

Für $F, G \in C^0\big([t_0, t_1), [0, \infty)\big)$ gelte mit einem geeigneten $a \geq 0$ die Ungleichung

$$F(t) \leq a + \int_{t_0}^{t} F(s)G(s)\,ds \qquad \big(t \in [t_0, t_1)\big). \tag{6.6}$$

Dann ist

$$F(t) \leq a \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} G(s)\,ds\right) \qquad \big(t \in [t_0, t_1)\big). \tag{6.7}$$

Beweis:

- Ist $a > 0$, dann gilt für die rechte Seite $h(t) := a + \int_{t_0}^{t} F(s)G(s)\,ds$ der Voraussetzung (6.6): $h(t) > 0$ und $h'(t) = F(t)G(t) \leq h(t)G(t)$, also $\frac{h'(t)}{h(t)} \leq G(t)$.

  Integration ergibt $\ln\left(\frac{h(t)}{a}\right) \leq \int_{t_0}^{t} G(s)\,ds$, oder $h(t) \leq a \exp\left(\int_{t_0}^{t} G(s)\,ds\right)$, also die Behauptung (6.7).

• Ist $a = 0$, dann gelten Voraussetzung und Resultat für alle $\hat{a} := \varepsilon > 0$, also ist $F = 0$. □

6.13 Bemerkung ('Gronwall–Gleichung')
Man kann sich die Abschätzung (6.7) leicht merken, wenn man Gleichheit annimmt. Die Integralgleichung

$$F(t) = a + \int_{t_0}^{t} F(s)G(s)\,ds$$

entspricht ja dem Anfangswertproblem $\dot{F} = F \cdot G,\ F(t_0) = a$ mit der Lösung $F(t) = a\exp(\int_{t_0}^{t} G(s)\,ds)$. ◇

6.14 Satz *Eine Gleichgewichtslage $x_s \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ der DGL*

$$\dot{x} = f(x) \quad , \quad f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$$

ist asymptotisch stabil, wenn $\mathrm{Ind}(Df(x_s)) = n$ ist.

Beweis: • Wieder können wir durch eine Verschiebung $x_s = 0$ erreichen. Da $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ist, gehört eine Kugelumgebung vom positiven Radius $\tilde{r}$ zu U.

• Für $A = Df(x_s)$ gibt es ein $\Lambda < 0$ mit $\mathrm{Re}(\lambda_i) < \Lambda$ für alle Eigenwerte λ_i von A und, siehe *Dgl-Skript*, Lemma 4.7, ein Skalarprodukt mit

$$\langle Ax, x\rangle \le \Lambda\ \langle x, x\rangle \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

• Nun existiert ein Radius $r \in (0, \tilde{r})$ mit

$$\|R(x)\| \le \frac{|\Lambda|}{2}\|x\| \quad \text{, falls} \quad \|x\| \le r, \tag{6.8}$$

für $R(x) = f(x) - Ax$, denn $\lim_{x\to 0} \frac{\|R(x)\|}{\|x\|} = \lim_{x\to 0} \frac{\|f(x) - Df(0)x\|}{\|x\|} = 0$.

• Also folgt für die glatte Funktion

$$\tilde{F} : \overline{U_r(0)} \to [0, \infty) \quad , \quad \tilde{F}(x) := \tfrac{1}{2}\|x\|^2,$$

für alle Lösungen mit Anfangswerten $x(0) \in \overline{U_r(0)}$ und $F(t) := \tilde{F}(x(t))$

$$\begin{aligned} \frac{dF(t)}{dt} &= \langle \dot{x}(t), x(t)\rangle = \langle f(x(t)), x(t)\rangle \le \langle Ax(t), x(t)\rangle + \|R(x(t))\|\|x(t)\| \\ &\le \frac{\Lambda}{2}\,\langle x(t), x(t)\rangle = \Lambda F(t) \qquad (t \ge 0). \end{aligned}$$

Denn da F monoton fällt ($\tilde{F}$ also eine Liapunov-Funktion ist, siehe Definition 6.18), gilt auch $x(t) \in \overline{U_r(0)}$. Durch Integration wird aus dieser Ungleichung

$$F(t) = F(0) + \int_0^t \dot{F}(s)\,ds \le F(0) + \Lambda \int_0^t F(s)\,ds \qquad (t \ge 0),$$

also nach dem Gronwall–Lemma 6.12

$$F(t) \le F(0) \exp\left(\int_0^t \Lambda\,ds\right) = F(0)\exp(\Lambda t)$$

oder $\|x(t)\| \le r \exp\left(\frac{\Lambda}{2}t\right)$. Die Lösungskurve bleibt also für alle positiven Zeiten in der Vollkugel $\overline{U_r(0)}$ und konvergiert gegen Null. □

6.15 Bemerkung (Bassin von x_s) Der Beweis lieferte zusätzlich die Aussage, dass alle $x \in \overline{U_r(0)}$ zu gegen die Gleichgewichtslage konvergierenden Orbits gehören, also in deren Einzugsbereich, dem so genannten *Bassin*, liegen. ◇

Leider kann man bei der Liapunov-Stabilität nicht wie im Fall der asymptotischen Stabilität vom linearen auf den nicht linearen Fall folgern.

6.16 Beispiel (aus [Wa]) DGL $\dot{x} = \alpha x + \beta x^3$ mit Parametern $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Die Null ist Gleichgewichtslage der DGL und ihrer Linearisierung $\dot{y} = \alpha y$.

	linearisierte Gleichung	nicht lineare Gleichung
$\alpha < 0$	asymptotisch stabil	asymptotisch stabil
$\alpha > 0$	instabil	instabil
$\alpha = 0$	Liapunov-stabil	$\begin{cases} \text{asymptotisch stabil für} & \beta < 0 \\ \text{stabil für} & \beta = 0 \\ \text{instabil für} & \beta > 0. \end{cases}$

6.17 Bemerkung Anschaulich gesprochen kann asymptotische Stabilität nur vorliegen, wenn der Fluss in der Nähe der Gleichgewichtslage das Phasenraumvolumen verkleinert. Daher kann man in physikalischen Situationen ohne Reibungseffekte höchstens Liapunov-Stabilität erwarten. Das hat z.B. zur Folge, dass die Frage der Stabilität des Sonnensystems sehr subtil sind. ◇

Ein praktisches Hilfmittel für den Nachweis der Stabilität der Ruhelagen sind Liapunov-Funktionen. Sie fallen entlang der Lösungskurven monoton:

6.18 Definition *Es sei $x_s \in U$ Gleichgewichtslage der Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$, mit einem Vektorfeld $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ auf dem Phasenraum $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Eine in einer Umgebung $D \subseteq U$ von x_s definierte Funktion $L \in C^1(D, \mathbb{R})$ heißt*

- **Liapunov-Funktion** *für x_s, falls x_s die einzige absolute Minimalstelle von L ist und die Abbildung $D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto DL_x(f(x))$ nur Werte ≤ 0 annimmt,*

- **strikte Liapunov-Funktion** *für x_s, falls zusätzlich gilt:*

$$DL_x(f(x)) < 0 \qquad \big(x \in D \setminus \{x_s\}\big).$$

6.19 Satz *Es sei $x_s \in U$ Gleichgewichtslage der Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$, mit einem Vektorfeld $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ auf dem Phasenraum $U \subseteq \mathbb{R}^n$.*

- *Falls eine Liapunov-Funktion für x_s existiert, ist x_s Liapunov-stabil.*

- *Falls eine strikte Liapunov-Funktion für x_s existiert, ist x_s asymptotisch stabil.*

Beweis: • Es sei $L \in C^1(D, \mathbb{R})$ eine Liapunov-Funktion für x_s. O.B.d.A. sei $L(x_s) = 0$. Die abgeschlossenen Kugeln $W_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_s\| \leq \varepsilon\}$ bilden eine Umgebungsbasis von x_s, und für ein geeignetes $\varepsilon_0 > 0$ ist $W_\varepsilon \subseteq D$, falls $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Die in der Definition von Liapunov-Stabilität vorgegebene Umgebung W von x_s enthält also eine Umgebung W_ε.

Der Minimalwert $m(\varepsilon) := \min_{x \in \partial W_\varepsilon} L(x)$ auf dem Rand der Kugel ist nach Voraussetzung positiv. Wir finden also ein $\delta \in (0, \varepsilon)$ mit $L\restriction_V < m(\varepsilon)$ für $V := W_\delta$. Diese Umgebung V von x_s erfüllt die Anforderungen aus der Definition der Liapunov-Stabilität: Für alle Anfangspunkte $x_0 \in V$ muss die maximale Lösung $t \mapsto x(t, x_0)$ des AWP für $t \geq 0$ in W_ε bleiben, denn $L(x(t, x_0)) \leq L(x_0) < m(\varepsilon)$. Da W_ε kompakt ist, existiert auch die Lösung für alle $t \geq 0$.
• Die reelle monoton fallende Funktion $[0, \infty) \to [0, \infty)$, $t \mapsto L(x(t, x_0))$ besitzt einen Limes $\ell \geq 0$. Ist nun L eine strikte Liapunov-Funktion für x_s, dann ist $\ell = 0$. Andernfalls würde die kompakte Menge $A := \{x \in V \mid L(x) \geq \ell\}$ die Ruhelage x_s nicht enthalten. Auf A nimmt daher $x \mapsto DL_x(f(x))$ ein negatives Maximum $-v < 0$ an, die Liapunov-Funktion $t \mapsto L(x(t, x_0))$ würde entlang der Lösungskurve also mindestens mit der Geschwindigkeit v fallen. Widerspruch!
Wegen $L^{-1}(\{0\}) = \{x_s\}$ konvergiert die Trajektorie gegen die Ruhelage. □

Oft sucht man strikte Liapunov-Funktionen unter den Phasenraumfunktionen der Form $x \mapsto \langle x - x_s, A(x - x_s)\rangle$, mit einer positiv definiten Matrix $A = A^t \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$.

6.20 Staatsexamens-Aufgabe (Frühjahr 2017)
Gegeben sei folgendes System linearer Differentialgleichungen für $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$:

$$\dot{x}(t) = \left(\begin{smallmatrix} -1 & -1 \\ 4 & -1 \end{smallmatrix}\right) x(t).$$

(a) Zeigen Sie, dass der Ursprung $(0,0)$ ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt ist.

(b) Geben Sie einen Wert für $x(0) \in \mathbb{R}^2$ an, so dass die euklidische Norm $\|x(t)\|$ *keine* monotone Funktion der Zeit $t \in \mathbb{R}$ ist.

(c) Bestimmen Sie einen Parameter $p > 0$ derart, dass für jede Lösung x die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(t) = x_1(t)^2 + px_2(t)^2$ monoton in der Zeit $t \in \mathbb{R}$ ist. ◇

7 Elementare analytische Lösungsmethoden

7.1 Trennung der Variablen

7.1 Beispiel Das AWP $\dot{x} = x^2,\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$ besitzt die folgenden Lösungen:

- $x_0 = 0 :\ x(t) = 0$
- $x_0 > 0 :\ x(t) = \frac{x_0}{1-tx_0} \qquad (t \in (-\infty, 1/x_0))$
- $x_0 < 0 :\ x(t) = \frac{x_0}{1-tx_0} \qquad (t \in (1/x_0, \infty)).$

Dabei wurde für $x_0 \neq 0$ der Lösungsansatz

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dy}{y^2} = \int_0^t ds \quad \text{, also} \quad \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x(t)} = t$$

benutzt. ◇

Diese Lösungsmethode kann wie folgt verallgemeinert werden:

7.2 Satz (Separation der Variablen)
Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle, $g \in C(I, \mathbb{R})$ und $h \in C(J, \mathbb{R})$.
Dann besitzt das AWP für die **DGL mit getrennten Variablen**

$$\dot{x} = g(x)h(t) \quad , \quad x(t_0) = x_0 \quad \textit{mit} \quad (x_0, t_0) \in I \times J \tag{7.1}$$

eine lokale Lösung:

1. *Ist $g(x_0) = 0$, dann ist $t \mapsto x_0$ sogar eine globale Lösung.*
2. *Ist dagegen $g(x_0) \neq 0$, dann existiert ein t_0 enthaltendes Intervall $\tilde{J} \subseteq J$ und eine eindeutige lokale Lösung $\varphi \in C^1(\tilde{J}, I)$ von (7.1), in der Form*

$$\varphi(t) = G^{-1} \circ H(t) \tag{7.2}$$

mit

$$G(x) := \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{g(y)} \quad , \quad H(t) := \int_{t_0}^{t} h(s)\, ds. \tag{7.3}$$

Beweis:

1. Für $g(x_0) = 0$ ist das AWP von der Form $\dot{x} = 0,\ x(t_0) = x_0$, besitzt also die konstante Lösung $\varphi(t) = x_0 \quad (t \in \mathbb{R})$.

2. • Falls $g(x_0) \neq 0$, dann ist x_0 in einem eindeutigen maximalen Intervall $\tilde{I} \subseteq I$ enthalten, auf dem $g(x) \neq 0$ für alle $x \in \tilde{I}$ gilt. Das Integral G existiert damit auf $\tilde{I}$, und $G \in C^1(\tilde{I}, \mathbb{R})$. Ebenso ist $H \in C^1(J, \mathbb{R})$. G besitzt die stetige Ableitung $\frac{1}{g}|_{\tilde{J}}$, ist also streng monoton und sogar ein Diffeomorphismus auf sein offenes Bildintervall $K := G(\tilde{I})$. K enthält $0 = G(x_0)$, genauso wie $H(J)$.

   • Es sei $\tilde{J} \subseteq J$ das größte t_0 enthaltende offene Intervall mit $H(\tilde{J}) \subseteq K$. Dann ist in (7.2) φ auf $\tilde{J}$ definiert, und es gilt $\varphi \in C^1(\tilde{J}, \tilde{I})$.

   • Tatsächlich ist φ eine Lösung von (7.1), denn $\varphi(t_0) = G^{-1}(H(t_0)) = G^{-1}(0) = x_0$ und

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = \frac{H'(t)}{G'(G^{-1}(H(t)))} = g(G^{-1}(H(t))) \cdot h(t) = g(\varphi(t))h(t).$$

   • Ist $\tilde{\varphi}$ eine weitere lokale Lösung von (7.1), dann gilt auf dem t_0 enthaltenden Schnitt $\hat{J} \subseteq \mathbb{R}$ der Definitionsbereiche von φ und $\tilde{\varphi}$, dass

$$H(t) = \int_{t_0}^{t} h(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} \frac{\frac{d\tilde{\varphi}}{ds}(s)}{g(\tilde{\varphi}(s))} ds = \int_{x_0}^{\tilde{\varphi}(t)} \frac{dy}{g(y)} = G(\tilde{\varphi}(t))$$

   oder

$$\tilde{\varphi}(t) = G^{-1} \circ H(t) = \varphi(t) \qquad (t \in \hat{J}),$$

   also die Eindeutigkeit der Lösung. □

7.3 Bemerkungen (Trennung der Variablen)

1. Wie schon das Beispiel $\dot{x} = \sqrt{|x|}$ zeigt, ist im Fall 1. die konstante Lösung im Allgemeinen nicht die einzige Lösung.

   Im Fall 2. brauchen wir, anders als im Satz von Picard-Lindelöf, keine Lipschitzstetigkeit von g zu verlangen, um die Eindeutigkeit zu erzwingen.

2. Man kann sich die Methode gut merken, wenn man die DGL in (7.1) in der Form $\frac{dx}{dt} = g(x)h(t)$ schreibt und dann die Variablen in der Form

$$\frac{dx}{g(x)} = h(t)\,dt$$

trennt. Dann sind beide Seiten Differentialformen, genauer ist $\frac{dx}{g} \in \Omega^1(\tilde{I})$ und $h\,dt \in \Omega^1(J)$ (siehe die Einführung in die Theorie der Differentialformen in Kapitel 3).

Wie in [Am], Kap. I.5 gezeigt, können wir mithilfe der Differentialformen in vielen Fällen auch die DGL $\dot{x} = f(x,t)$ (bei der f nicht von der Produktform $f(x,t) = g(x) \cdot h(t)$ ist) lösen. ◇

Insbesondere kann eine Einzeldifferentialgleichung erster Ordnung manchmal durch eine Variablentransformation in einer DGL mit getrennten Variablen überführt werden.

7.4 Beispiele 1. Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ betrachten wir die DGL $\dot{x} = f(ax + bt + c)$. Falls a oder b gleich Null ist, ist sie schon in der gewünschten Form. Andernfalls benutzen wir als neue abhängige Variable $z(t) := ax(t) + bt + c$, also $\dot{z} = a\dot{x} + b = af(z) + b$, eine durch Separation der Variablen lösbare DGL. Nach Lösung wenden wir die Rücktransformation $x(t) = \frac{z(t)-bt-c}{a}$ an.

2. Die sog. *Ähnlichkeits–Differentialgleichung*

$$\dot{x} = f(x/t) \qquad (t \in (0,\infty))$$

wird durch die Substitution $y(t) := x(t)/t$ gelöst, denn

$$\dot{y}(t) = \frac{\dot{x}(t)}{t} - \frac{x(t)}{t^2} = \frac{f(y(t)) - y(t)}{t}.$$

7.2 Konstanten der Bewegung

Für eine autonome DGL $\dot{x} = f(x)$ auf dem Phasenraum $U \subseteq \mathbb{R}^n$ existieren manchmal Phasenraumfunktionen $H \in C^1(U,\mathbb{R})$ mit verschwindender Richtungsableitung in Richtung des Vektorfelds f:

$$dH(x)f(x) = 0 \qquad (x \in U).$$

Durch Integration schließen wir, dass $t \mapsto H \circ \Phi_t(x_0)$ für alle $x_0 \in U$ konstant ist. Eine solche Phasenraumfunktion H heißt *Konstante der Bewegung* oder *Erhaltungsgröße*.

Dann findet die Bewegung auf der Niveaumenge $H^{-1}(H(x_0)) \subseteq U$ statt, und diese ist für reguläre Werte $H(x_0)$ von H nach dem Satz über die implizite Funktion eine Untermannigfaltigkeit, siehe Definition 3.27.

7.5 Beispiel (Erhaltungsgröße) Die Newtonsche Kraftgleichung

$$\ddot{q} = F(q) \quad \text{mit} \quad F \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

besitzt die Lösungen

$$q(t) = q_0 + G_E^{-1}(t - t_0),$$

wobei für das sog. *Potential* $V(q) := -\int_{q_0}^{q} F(x)\,dx$ der Kraft und $E > 0$

$$G_E(q) := \int_{q_0}^{q} \frac{1}{\sqrt{2(E - V(x))}} dx \tag{7.4}$$

gesetzt wird. ◇

Hintergrund ist der folgende: Für $H \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ist die sog. *Hamiltonsche DGL von* H von der Form

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad , \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}.$$

Physikalisch wird dabei q als Ort, p als Impuls eines Teilchens auf der Geraden interpretiert. Wir verifizieren, dass für jede Lösung $t \mapsto x(t) = (q(t), p(t))$ gilt

$$\frac{d}{dt} H(x(t)) = \frac{\partial H}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial H}{\partial p}\dot{p} = 0.$$

H ist also *Konstante der Bewegung*, die Bewegung erfolgt auf den Niveauflächen von H.

Im Beispiel 7.5 ist $H(q,p) := \frac{1}{2}p^2 + V(q)$, also $\dot{q} = p$ und $\dot{p} = F(q)$. Setzt man $E := H(x_0)$, dann ist $\sqrt{2(E - V(q_0))} = p_0$, falls $x_0 = (q_0, p_0)$ mit $p_0 \geq 0$. In (7.4) wird also die inverse Geschwindigkeit integriert, um die Zeitdifferenz $t - t_0$ zu erhalten, die das Teilchen zum Zurücklegen des Weges zwischen q_0 und q benötigt.[25]

7.6 Staatsexamens-Aufgabe (Frühjahr 2017) Gegeben sei ein stetig differenzierbares Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ derart, dass die Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x) \tag{7.5}$$

die Erhaltungsgrößen

$$V, W : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad , \quad V(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad , \quad W(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3$$

besitzt. Zeigen Sie:

(a) Alle maximalen Lösungen von (7.5) existieren auf ganz $\mathbb{R}$.

[25] Eine erste Einführung in die Hamiltonschen Differentialgleichungen bietet Kapitel 9.2 des *Differentialgleichungs-Skripts*. Siehe auch [Kn].

(b) $\overline{x} := 0$ ist eine stabile, stationäre Lösung von (7.5).

(c) Für jede Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ von (7.5) ist $t \mapsto x_3(t)$ konstant.

(d) Es gibt ein Vektorfeld f mit den obigen Eigenschaften, für welches zusätzlich die maximale Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = (1, 0, 0)$ periodisch und nicht konstant ist. ◇

7.3 Potenzreihen als Lösungen

In Anwendungen kommen häufig lineare, nicht autonome Differentialgleichungen vor. Als Beispiel betrachten wir solche von zweiter Ordnung in der Form

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0, \tag{7.6}$$

wobei wir vereinfachend annehmen wollen, dass die Funktionen p und q der unabhängigen Variable t Polynome sind. Der Fall reell–analytischer Funktionen ist aber auch nicht viel schwieriger. Unser Ansatz zur Lösung des AWP mit

$$x(t_0) = x_0 \quad , \quad \dot{x}(t_0) = x_1$$

ist

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (t - t_0)^k x_k \tag{7.7}$$

mit zu bestimmenden Koeffizienten $x_k \in \mathbb{R},\ k \geq 2$. Wir berechnen diese durch Einsetzen in (7.6) und Koeffizientenvergleich.

Da p und q Polynome sind, ist der (verschwindende) Koeffizient von t^ℓ Summe des vom $\ddot{x}$–Term stammenden Terms $(\ell+1)(\ell+2)x_{\ell+2}$ und weiteren (höchstens $2 + \deg(p) + \deg(q)$) schon bekannten Termen der Form $c_k x_k$, $k < \ell + 2$.

Da die so definierte Potenzreihe positiven Konvergenzradius ρ besitzt, ist deren gliedweise Differentiation für $t \in (t_0 - \rho, t_0 + \rho)$ nachträglich gerechtfertigt.

7.7 Beispiel (Airy–Differentialgleichung) $\ddot{x}(t) - tx(t) = 0$.
Einsetzen von (7.7) für $t_0 = 0$ ergibt $\ddot{x}(t) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)t^{k-2}x_k$, also

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(k(k-1)t^{k-2}x_k - t^{k+1}x_k \right) = 0$$

oder

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \Big((\ell+1)(\ell+2)x_{\ell+2} - x_{\ell-1} \Big) t^\ell = 0,$$

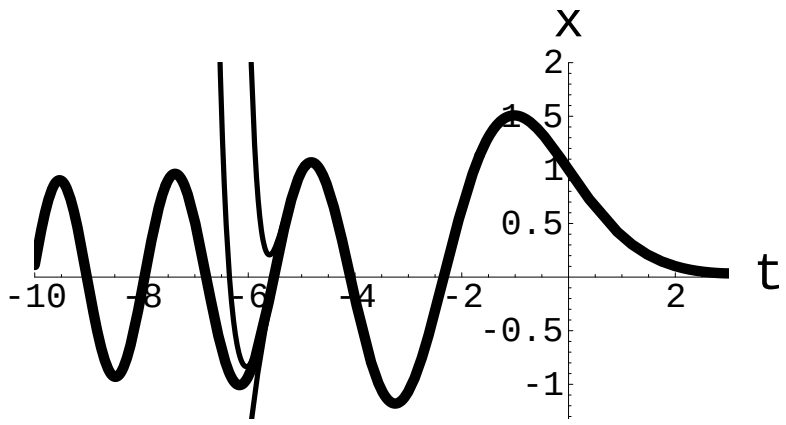


Abbildung 7.1: Die Airy-Funktion Ai und drei ihrer Polynom-Approximationen

wenn $x_{-1} := 0$ gesetzt wird. Wir wissen aus der *Analysis I*, dass eine reelle Potenzreihe nur dann die Nullfunktion ergeben kann, wenn alle Koeffizienten gleich Null sind. Das bedeutet, nur x_0 und x_1, also die Anfangswerte der DGL, können frei gewählt werden, alle anderen bestimmen sich aus diesen. Insbesondere ergibt sich für $\ell = 0,\ \ell = 1$ und $\ell = 2$

$$x_2 = 0 \quad , \quad x_3 = \frac{x_0}{6} \quad , \quad x_4 = \frac{x_1}{12}.$$

Allgemein sind für $n \in \mathbb{N}$ die Koeffizienten $x_{3n-1} = 0$,

$$x_{3n} = \frac{x_0}{\prod_{\ell=1}^{n}\left((3\ell-1)3\ell\right)} \quad \text{und} \quad x_{3n+1} = \frac{x_1}{\prod_{\ell=1}^{n}\left(3\ell(3\ell+1)\right)}.$$

In Abb. 7.1 ist für die Anfangswerte $x_0 = 1,\ x_1 \approx -0.729$ die Airy–Funktion und einige ihrer approximierenden Polynome dargestellt. Die Wahl der Anfangswerte bewirkt Erfüllen der Randbedingung $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$. Da hier die Quotienten

$$\frac{x_{3(n+1)}}{x_{3n}} = \frac{1}{(3n+2)(3n+3)} \quad \text{und} \quad \frac{x_{3(n+1)+1}}{x_{3n+1}} = \frac{1}{(3n+3)(3n+4)}$$

der Koeffizienten mit Indexdifferenz 3 für $n \to \infty$ gegen Null gehen, während sogar $x_{3n+2} = 0$ ist, besitzt die Potenzreihe Konvergenzradius unendlich. $\diamond$

8 Der Hauptsatz der Theorie gewöhnlicher DGLn

Wir wissen aus Satz 4.21, dass für stetig differenzierbare zeitabhängige Vektorfelder f auch die Lösungen $(t, x_0) \mapsto \Phi(t, x_0)$ des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = f\big(t, x(t)\big) \quad , \quad x(t_0) = x_0$$

stetig in der Zeit t *und* im Anfangswert x_0 sind.

Der Hauptsatz besagt nun, dass die Lösung Φ genauso glatt wie f ist.

Zur Vorbereitung bestimmen wir zunächst die Struktur des maximalen Definitionsbereichs von Φ.

8.1 Das maximale Existenzintervall

Wir betrachten auf dem Phasenraum $U \subseteq \mathbb{R}^n$ das Vektorfeld $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$, und wollen für die Anfangszeit t_0 allen Anfangswerten x_0 aus U das maximale Zeitintervall zuordnen, für das die Lösung des AWP definiert ist. Wir können dies in der Form $\big(T^-(x_0), T^+(x_0)\big)$ mit

$$-\infty \leq T^-(x_0) < 0 < T^+(x_0) \leq +\infty$$

schreiben, und wir untersuchen die *Fluchtzeiten*

$$T^\pm : U \to \overline{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \tag{8.1}$$

mit Werten in der erweiterten Zahlengerade. In der *Analysis I* wurde $\overline{\mathbb{R}}$ mit einer Topologie versehen, bezüglich derer $\overline{\mathbb{R}}$ zum Intervall $[-1, 1]$ homöomorph ist, mit Homöomorphismus

$$h : \overline{\mathbb{R}} \to [-1, 1] \quad , \quad x \mapsto \begin{cases} -1 & , \quad x = -\infty \\ \tanh(x) & , \quad x \in \mathbb{R} \\ 1 & , \quad x = +\infty. \end{cases}$$

Wir sehen an folgendem Beispiel, dass T^+ und T^- im Allgemeinen nicht stetig sind:

8.1 Beispiel (Fluchtzeiten)
Auf dem Phasenraum $U := \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ betrachten wir das konstante Vektorfeld $f(x) := e_1$, also $\Phi_t(x) = x + e_1 t$. Dies ist für alle t definiert, falls $x = \binom{x_1}{x_2}$ mit $x_2 \neq 0$ ist. Für $x_2 = 0$ und $x_1 < 0$ ist $(T^-(x), T^+(x)) = (-\infty, |x_1|)$. ◇

In diesem Beispiel springt T^+ nur nach oben, nicht nach unten. Dies ist typisch für alle Differentialgleichungen:

8.2 Definition *Eine Funktion $f : U \to \overline{\mathbb{R}}$ auf einem topologischen Raum U heißt* **oberhalbstetig** *bzw.* **unterhalbstetig bei** $x_0 \in U$*, wenn*

$$f(x_0) \geq \limsup_{x \to x_0} f(x) \quad \textit{bzw.} \quad f(x_0) \leq \liminf_{x \to x_0} f(x),$$

und **oberhalbstetig** *(bzw.* **unterhalbstetig***), wenn sie für alle $x_0 \in U$ oberhalbstetig (bzw. unterhalbstetig) bei x_0 ist.*

8.3 Beispiel (Halbstetigkeit)
Die floor–Funktion $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \max\{y \in \mathbb{Z} \mid y \leq x\}$ ist oberhalbstetig, während die ceil–Funktion $\lceil \cdot \rceil : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \min\{y \in \mathbb{Z} \mid y \geq x\}$ unterhalbstetig ist. ◇

8.4 Satz *Die Fluchtzeit $T^+ : U \to \overline{\mathbb{R}}$ aus (8.1) ist unterhalbstetig, die Fluchtzeit $T^- : U \to \overline{\mathbb{R}}$ ist oberhalbstetig. Damit ist der Definitionsbereich*

$$D := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times U \mid t \in (T^-(x), T^+(x))\}$$

des Flusses eine offene Teilmenge des erweiterten Phasenraumes.

Beweis:

- Es sei $x_0 \in U$. Dann existiert wegen der Offenheit von U eine Umgebung $U_r(x_0)$ mit $\overline{U_r(x_0)} \subseteq U$. Da $\overline{U_r(x_0)}$ kompakt ist, ist die Einschränkung des Vektorfeldes auf diese Menge lipschitzstetig. Nach dem Satz von Picard–Lindelöf gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass für alle $y \in U_{r/2}(x_0)$ das AWP $\dot{x} = f(x),\ x(0) = y$ für $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ eindeutig lösbar ist.

- Wir betrachten nun eine aufsteigende Folge von Zeiten $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $t_1 = 0$, $\lim_{n \to \infty} t_n = T^+(x_0)$, sodass für geeignete $r_n > 0$ und $\varepsilon_n > 0$ das AWP

  $$\dot{x} = f(x) \quad , \quad x(0) = y \quad \text{für alle} \quad t \in (-\varepsilon_n, \varepsilon_n) \quad \text{und} \quad y \in U_{r_n/2}(x_n)$$

  erfüllt ist, wobei wir $x_n := \Phi_{t_n}(x_0)$ setzen. Nach Konstruktion der maximalen Lösung können wir annehmen, dass $t_{n+1} - t_n < \varepsilon_n$ ist.

- Es sei nun T^+ *nicht* unterhalbstetig bei x_0, also $\hat{T} := \liminf_{x \to x_0} T^+(x) < T(x_0)$ und $t_k \leq \hat{T} < t_{k+1}$. Nach Annahme ist $t_k + \varepsilon_k > \hat{T}$. Wegen der Stetigkeit des Flusses in den Anfangsbedingungen (Iteration von Satz 4.21) existiert eine Umgebung $V \subseteq U$ von x_0 mit $\Phi_{t_k}(V) \subset U_{r_k/2}(x_n)$, und für alle $y \in V$ gilt

  $$T^+(y) = t_k + T^+(\Phi_{t_k}(y)) \geq t_k + \varepsilon_k > \hat{T}\,.$$

  Widerspruch!

- Die Oberhalbstetigkeit von T^- zeigt man analog.

- Wäre D nicht offen, dann würde eine Folge $(t_n, x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \setminus D$ mit $(t,x) := \lim_{n\to\infty}(t_n,x_n) \in D$ existieren. Wegen der Offenheit von $U \subseteq \mathbb{R}^n$ können wir (durch Weglassen der ersten Folgenglieder) annahmen, dass $x_n \in U$. Also muss für jedes n gelten: Entweder ist $t_n \geq T^+(x_n)$ oder $t_n \leq T^-(x_n)$. Einer der beiden Fälle tritt unendlich oft auf, z.B. $t_n \geq T^+(x_n)$. Wir gehen wieder zur entsprechenden Teilfolge über. Wegen $(t,x) \in D$ ist $t \in (0, T^+(x))$, was wegen
$$\liminf_{n\to\infty} T^+(x_n) \leq \liminf_{n\to\infty} t_n = t < T^+(x)$$
der Unterhalbstetigkeit von T^+ bei x widerspricht. □

8.5 Bemerkung In diesem Abschnitt haben wir angenommen, dass die DGL autonom ist. Ganz analoge Aussagen stimmen aber auch für AWP nicht autonomer DGLn, wenn wir eine Anfangszeit t_0 fixieren. Denn durch Hinzunahme einer abhängigen Variable können wir die DGL in autonomer Form schreiben.
Diese Tatsache werden wir uns beim Beweis des Hauptsatzes zunutze machen. ◇

8.2 Linearisierung der DGL entlang einer Trajektorie

Zur Vorbereitung des Beweises des Hauptsatzes lernen wir zunächst, welcher Differentialgleichung die Ableitung der Lösung nach dem Anfangswert genügen sollte. Nehmen wir dazu schon einmal an, dass sowohl f als auch Φ stetig differenzierbar sind und setzen
$$M(t,x) := D_2\Phi(t,x) \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R}).$$
Dann folgt mit $\tilde{A}(t,x) := D_2 f(t,x) \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$ aus
$$\Phi(t,x) = x + \int_{t_0}^{t} f(s,\Phi(s,x))\,ds \tag{8.2}$$
die Integralgleichung
$$M(t,x) = \mathbb{1} + \int_{t_0}^{t} \tilde{A}(s,\Phi(s,x))M(s,x)\,ds. \tag{8.3}$$
Äquivalent dazu stellen wir fest, dass die Ableitung M des Flusses nach dem Anfangswert dem linearen Anfangswertproblem
$$D_1M(t,x) = \tilde{A}\big(t,\Phi(t,x)\big)M(t,x) \quad , \quad M(t_0,x) = \mathbb{1}$$

genügt. Dabei ist die Systemmatrix die Linearisierung des Vektorfeldes entlang der Trajektorie im erweiterten Phasenraum. Setzen wir $A(t,x) := \tilde{A}(t,\Phi(t,x))$, dann ist A als Komposition stetiger Abbildungen stetig. Die im folgenden Lemma konstatierte Stetigkeit der Lösung in Zeit und Anfangsbedingungen folgt nicht aus Satz 4.29, weil dort Lipschitz-Stetigkeit des Vektorfeldes vorausgesetzt war.

8.6 Lemma
Es sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offene Umgebung von (t_0, x_0), $A \in C(D, \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R}))$ und $M : D \to \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$ Lösung des Anfangswertproblems

$$D_1 M(t,x) = A(t,x)M(t,x) \quad , \quad M(t_0,x) = \mathbb{1}. \tag{8.4}$$

Dann ist auch $M \in C(D, \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R}))$.

Beweis:

- Wir wissen schon, dass für jeden Anfangswert (t_0, x) das AWP (8.4) eine eindeutige lokale Lösung besitzt, denn x taucht nur als Parameter auf, und A ist stetig in t.

- Um auch Stetigkeit in x zu zeigen, genügt es, sich auf kompakte Umgebungen $K \subseteq D$ von (t_0, x_0) der Form $K := \overline{U_{\delta_t}(t_0)} \times \overline{U_{\delta_x}(x_0)}$ zu beschränken. Es ist $k := \sup_{(t,x)\in K} \|A(t,x)\| < \infty$, also nach (8.3)

  $$\|M(t,x)\| \le 1 + k \left| \int_{t_0}^{t} \|M(s,x)\|\, ds \right|$$

  und mit Gronwall

  $$\sup_{(t,x)\in K} \|M(t,x)\| \le e^{k\delta_t}. \tag{8.5}$$

- Aus (8.3) folgt die Identität

  $$\begin{aligned} M(t,x) - M(t,x_0) &= \int_{t_0}^{t} A(s,x_0)\big(M(s,x) - M(s,x_0)\big)\, ds \\ &+ \int_{t_0}^{t} \big(A(s,x) - A(s,x_0)\big) M(s,x)\, ds. \end{aligned} \tag{8.6}$$

  Der zweite Term kann durch Verkleinerung des Radius δ_x in der Norm unter jede Schranke $a(\delta_x) > 0$ gedrückt werden. Denn die stetige Funktion A ist auf K gleichmäßig stetig, und die Norm von M durch (8.5) beschränkt. Damit ergibt sich für $F_x(t) := \|M(t,x) - M(t,x_0)\|$ aus (8.6):

  $$F_x(t) \le a + \left| \int_{t_0}^{t} k F_x(s)\, ds \right|.$$

Die Gronwallsche Ungleichung macht daraus

$$F_x(t) \leq a(\delta_x)\exp(k|t-t_0|) \leq a(\delta_x)\exp(k\delta_t) \quad , \quad (x \in U_{\delta_x}(x_0)),$$

also

$$\lim_{x\to x_0} M(t,x) = M(t,x_0) \quad \text{für alle} \quad t \in (t_0-\delta_t, t_0+\delta_t). \qquad \square$$

Damit sind wir in der Lage, den *Hauptsatz der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen* zu beweisen. Aus Zeitgründen werden wir ihn nicht führen, siehe aber Kapitel 7 des *Differentialgleichungs-Skripts*.

8.3 Die Aussage des Hauptsatzes

Wir betrachten auf dem erweiterten Phasenraum $U \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ das zeitabhängige Vektorfeld $f \in C^r(U,\mathbb{R}^n)$. Wir fixieren eine Anfangszeit $t_0 \in \mathbb{R}$ und betrachten für Anfangswert $(t_0,x_0) \in U$ das maximale Lösungsintervall $(T^-(x_0),T^+(x_0))$ des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = f(t,x) \quad , \quad x(t_0) = x_0.$$

Wie im zeitunabhängigen Fall bekommen wir einen in U offenen maximalen Definitionsbereich

$$D = \{(t,x) \in U \mid t \in (T^-(x),T^+(x))\}$$

des nicht autonomen Flusses $\Phi : D \to \mathbb{R}^n$, mit

$$\Phi(t_0,x_0) = x_0 \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}\Phi(t,x_0) = f(t,\Phi(t,x_0)). \tag{8.7}$$

8.7 Satz (Hauptsatz) *Ist $r \in \mathbb{N}$ und $f \in C^r(U,\mathbb{R}^n)$, dann ist $\Phi \in C^r(D,\mathbb{R}^n)$.*

A Zusammenfassung zur Topologie

Die *Topologie* ist das Teilgebiet der Mathematik, das sich mit Begriffen wie Offenheit, Abgeschlossenheit und Kompaktheit von Mengen, Konvergenz von Folgen und Stetigkeit von Funktionen befasst. Sie haben in der *Analysis II* schon eine Einführung in die Topologie metrischer Räume bekommen. Die dort erlernten Begriffe reichen für die Zwecke dieser Vorlesung aus. Sie werden in diesem Anhang kurz wiederholt.

A.1 Topologische Räume

A.1 Definition *Ein* **topologischer Raum** *ist ein Paar $(M, \mathcal{O})$, bestehend aus einer Menge M und einer Familie $\mathcal{O}$ von Teilmengen von M (genannt "offene Mengen"), sodass gilt:*

1. *Beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen.*
2. *Der Durchschnitt von je zwei offenen Mengen ist offen.*
3. *$\emptyset$ und M sind offen.*

Man nennt $\mathcal{O}$ auch die **Topologie** *von $(M, \mathcal{O})$.*

Die für uns wichtigsten Beispiele topologischer Räume sind die metrischen Räume:

A.2 Definition *Für einen metrischen Raum (M, d) heißt*

$$\mathcal{O} := \mathcal{O}(d) := \{V \subseteq M \mid \forall x \in V \ \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subseteq V\} \tag{A.1}$$

(mit $U_\varepsilon(x) := \{y \in M \mid d(y, x) < \varepsilon\}$) die (metrische) **Topologie von** *(M, d).*

A.3 Satz *$(M, \mathcal{O}(d))$ ist ein topologischer Raum, und die $U_\varepsilon(x)$ sind offen.*

Beweis: • *$(M, \mathcal{O}(d))$ ist ein topologischer Raum*:

1. Ist $x \in \bigcup_{i\in I} V_i$ mit $V_i \in \mathcal{O}$, dann gibt es ein $j \in I$ mit $x \in V_j$, und ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subseteq V_j \subseteq \bigcup_{i\in I} V_i$.
2. Sei $x \in V_1 \cap V_2$ mit $V_1, V_2 \in \mathcal{O}$, dann gibt es $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ mit $U_{\varepsilon_j}(x) \subseteq V_j,\ j = 1, 2$. Daher ist für $\varepsilon := \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0 \ \ U_\varepsilon(x) \subseteq V_1 \cap V_2$.
3. $\emptyset \in \mathcal{O}$, denn dann ist die Bedingung in (A.1) leer. Ebenso gilt $M \in \mathcal{O}$, denn dann ist die Bedingung in (A.1) für alle $\varepsilon > 0$ erfüllt.

• *Die $U_\varepsilon(x)$ sind offen*: Für $y \in U_\varepsilon(x)$ ist $\varepsilon' := d(x,y) < \varepsilon$. Wählen wir $\delta := \varepsilon - \varepsilon' > 0$, dann ist wegen der Dreiecksungleichung $U_\delta(y) \subseteq U_\varepsilon(x)$. □

Oft erzeugen verschiedene Metriken die gleiche Topologie. Insbesondere gilt dies für Metriken auf Vektorräumen, die von äquivalenten Normen abstammen.

Auf jeder Menge M lassen sich Topologien finden:

A.4 Beispiele 1. Die *diskrete Topologie* $\mathcal{O} := 2^M$ aller Teilmengen.

2. Die *indiskrete Topologie* $\mathcal{O} := \{M, \emptyset\}$. ◇

Beispielsweise erzeugt die in der Informatik beliebte Hamming-Metrik auf $M := B^n$, mit dem Bit $B := \{0,1\}$

$$d : B^n \times B^n \to \mathbb{N}_0 \ , \ d((b_1,\ldots,b_n),(c_1,\ldots,c_n)) := \left|\left\{i \in \{1,\ldots n\} \mid b_i \neq c_i\right\}\right|$$

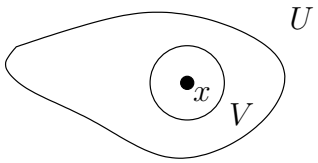
gemäß Definition A.2 die diskrete Topologie.

Die indiskrete Topologie taucht fast nur in Gegenbeispielen auf.

Wir erweitern unseren topologischen Sprachschatz, indem wir die uns vom Raum $\mathbb{R}$ bekannten Begriffsbildungen verallgemeinern:

A.5 Definition • *$A \subseteq M$ heißt* **abgeschlossen**, *wenn $M \backslash A \in \mathcal{O}$.*

• *$U \subseteq M$ heißt* **Umgebung** *von $x \in M$, wenn es eine offene Menge V mit $x \in V \subseteq U$ gibt.*



• *Für $A \subseteq M$ und $x \in M$ heißt x* **innerer** *bzw.* **äußerer** *bzw.* **Randpunkt von** *A, je nachdem, ob A oder $M \backslash A$ oder keines von beiden Umgebung von x ist.*

  - $\mathring{A} := \{x \in M \mid x$ *ist innerer Punkt von* $A\}$ *heißt das* **Innere von** A.
  - $\bar{A} := \{x \in M \mid x$ *nicht äußerer Punkt von* $A\}$ *heißt* **abgeschlossene Hülle von** A.
  - $\partial A := \{x \in M \mid x$ *Randpunkt von* $A\}$ *heißt* **Rand von** A.

• *$x \in M$ heißt* **Häufungspunkt** *der Teilmenge $A \subseteq M$, wenn für keine Umgebung U von x die Menge $U \cap (A \setminus \{x\})$ leer ist.*

A.6 Beispiel Für $A := (0,1] \subseteq \mathbb{R}$ ist $\overset{\circ}{A} = (0,1)$, $\bar{A} = [0,1]$ und $\partial A = \{0,1\}$. $\mathbb{Z}$ besitzt keine Häufungspunkte.

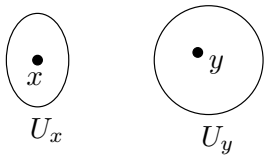
A.7 Bemerkungen 1. $\overset{\circ}{A} \subseteq A \subseteq \bar{A} = \overset{\circ}{A} \dot{\cup} \partial A$.

2. Eine Menge ist genau dann offen, wenn sie mit ihrem Inneren übereinstimmt.

3. Für alle $A \subseteq M$ ist $\overset{\circ}{A}$ offen und $\bar{A}$ sowie ∂A abgeschlossen.

4. Die Menge der Häufungspunkte von A ist eine Teilmenge von $\overline{A}$.

A.8 Definition *Ein topologischer Raum heißt* **Hausdorff–Raum**, *wenn je zwei verschiedene Punkte x, y disjunkte Umgebungen U_x, U_y besitzen.*



A.9 Bemerkungen 1. Metrische Räume sind hausdorffsch, denn für $x \neq y$ ist $\varepsilon := d(x,y)/2 > 0$, also $U_\varepsilon(z)$ Umgebung von z, und $U_\varepsilon(x) \cap U_\varepsilon(y) = \emptyset$.

Daher werden die meisten uns begegnenden Räume die Hausdorff-Eigenschaft besitzen.

2. Ein mehr als einpunktiger Raum mit indiskreter Topologie ist nicht hausdorffsch. ◇

A.10 Definition *In einem topologischen Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt*
• $x \in M$ **Häufungspunkt** *einer* **Folge** $a : \mathbb{N} \to M$, *wenn für jede Umgebung U von x und jedes $N \in \mathbb{N}$ ein Folgenglied $a_n \equiv a(n) \in U$ mit $n \geq N$ existiert.*
• $x \in M$ *heißt* **Grenzwert** *oder* **Limes** *einer Folge $a : \mathbb{N} \to M$, wenn für jede Umgebung U von x ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \in U$ für alle $n \geq N$ existiert.*

A.11 Bemerkungen 1. Man muss also zwischen den Häufungspunkt einer *Folge* und den Häufungspunkten der *Menge* $a(\mathbb{N}) \subseteq M$ unterscheiden. So besitzt die *konstante Folge* mit Wert $a_n = x$ den Häufungspunkt x, nicht aber die Menge $\{x\}$.

2. In einem Hausdorff–Raum besitzt jede Folge höchstens einen Grenzwert. ◇

Oft beschreibt man eine Topologie $\mathcal{O}$, indem man eine so genannte Basis von $\mathcal{O}$ angibt.

A.12 Definition *Sei $(M, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $B \subseteq \mathcal{O}$ offener Mengen heißt* **Basis der Topologie**, *wenn jedes $V \in \mathcal{O}$ Vereinigung von Mengen aus B ist.*

A.13 Beispiele (Basen von Topologien)

1. Die Menge $B := \{(a,b) \mid a < b\}$ der offenen beschränkten Intervalle bildet eine Basis der (metrischen) Topologie von $\mathbb{R}$.

2. Allgemeiner bilden nach Definition A.2 die ε–Umgebungen eine Basis $B := \{U_\varepsilon(x) \mid x \in M, \varepsilon > 0\}$ der Topologie $\mathcal{O}(d)$ des metrischen Raums (M,d).$\diamond$

Aus topologischen Räumen kann man auf verschiedene Weise neue topologische Räume konstruieren, z.B. durch Produktbildung bzw. Betrachtung von Teilmengen.

A.14 Definition
$(X^{(i)}, \mathcal{O}^{(i)})$, $i = 1, \ldots, n$ seien topologische Räume. Dann ist auf ihrem kartesischen Produkt $X := X^{(1)} \times \ldots \times X^{(n)}$ die **Produkttopologie** *$\mathcal{O}$ gegeben durch*

$$\mathcal{O} := \Big\{ W \subseteq X \mid \forall\, (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}) \in W \; \exists\, U^{(i)} \in \mathcal{O}^{(i)} \text{ mit } x^{(i)} \in U^{(i)} \text{ und } U^{(1)} \times \ldots \times U^{(n)} \subseteq W \Big\}.$$

A.15 Satz *Die Produkttopologie ist eine Topologie auf X.*

Beweis: Hausaufgabe. □

Die in X offenen Mengen W müssen also "offene Kästchen" um jeden ihrer Punkte enthalten.

A.16 Bemerkungen (Produkttopologie)

1. Die Bildung der Produkttopologie ist eine assoziative Operation, es genügt also, je zwei Faktoren zu betrachten. Produkte von Basen bilden eine Basis der Produkttopologie.

   Beispielsweise bilden die offenen Quader

   $$(a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n) \subseteq \mathbb{R}^n$$

   eine Basis der Produkttopologie des $\mathbb{R}^n$.

2. Für metrische Räume (X, d_X) und (Y, d_Y) sind auf dem kartesischen Produkt $Z := X \times Y$

   $$d_i : Z \times Z \to \mathbb{R} \quad \text{für} \quad z_j = (x_j, y_j)$$
   $$d_1(z_1, z_2) := d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2),$$

$$d_2(z_1, z_2) := \sqrt{d_X(x_1, x_2)^2 + d_Y(y_1, y_2)^2}$$

und

$$d_\infty(z_1, z_2) := \max(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2))$$

Metriken. Sie erzeugen aber alle die gleiche Topologie $\mathcal{O}(d_i)$, die Produkttopologie. ◇

A.17 Definition *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$. Dann heißt $(Y, \mathcal{O}_Y)$ mit $\mathcal{O}_Y := \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{O}\}$* **Teilraum von** *$(X, \mathcal{O})$ und $\mathcal{O}_Y$ die* **induzierte Topologie** *oder* **Spurtopologie**.

Im Allgemeinen enthält $\mathcal{O}_Y$ also mehr Mengen als die schon in X offenen Mengen $U \subseteq Y$, $U \in \mathcal{O}$.

A.18 Beispiel $X := \mathbb{R}$ mit der von den offenen Intervallen erzeugten Topologie $\mathcal{O}$, $Y := (0, 1]$. Dann ist $(\frac{1}{2}, 1] \subseteq Y$ offen und entsprechend $(0, \frac{1}{2}] \subseteq Y$ abgeschlossen in Y (!). ◇

Analog definiert man auf Teilmengen $Y \subseteq X$ metrischer Räume (X, d) eine $\mathcal{O}(d)_Y = \mathcal{O}(d_Y)$ Metrik d_Y durch Restriktion, und $\mathcal{O}(d)_Y = \mathcal{O}(d_Y)$.

Oft sind solche Teilräume *Niveaumengen* von Funktionen $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

A.19 Beispiele 1. Die *n–Sphäre* $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$.

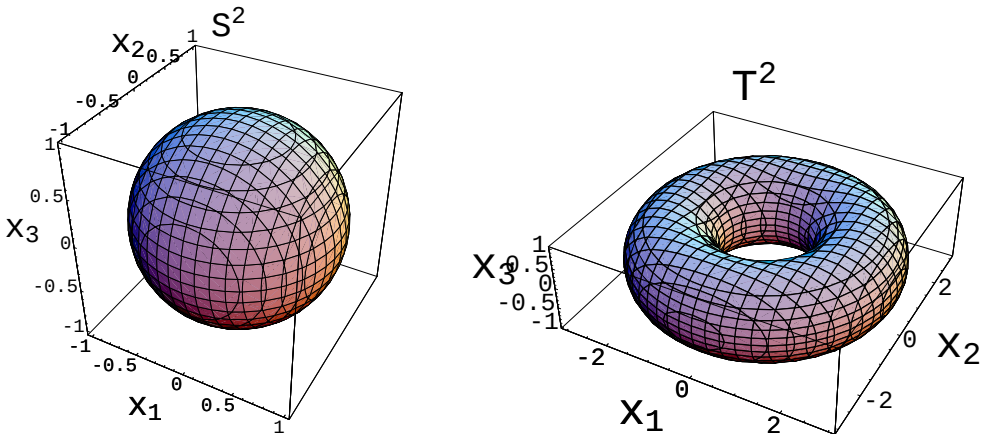


Abbildung A.1: 2–Sphäre S^2 (links) und 2–Torus $\mathbb{T}^2$ (rechts)

2. Auch der *2–Torus* $\mathbb{T}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$, eine Fläche mit einem Henkel, lässt sich als Niveaumenge darstellen: $\mathbb{T}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid F(x) = 1\}$ mit $F(x) = (\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 2)^2 + x_3^2$, siehe Abb. A.1.

3. Dagegen ist die Niveaumenge $\{x \in \mathbb{R}^3, F(x) = 1/4\}$ von $F(x) = (4x_1^2(1 - x_1^2) - x_2^2)^2 + x_3^2$ eine Fläche mit 2 Henkeln, siehe Abb. A.2. ◇

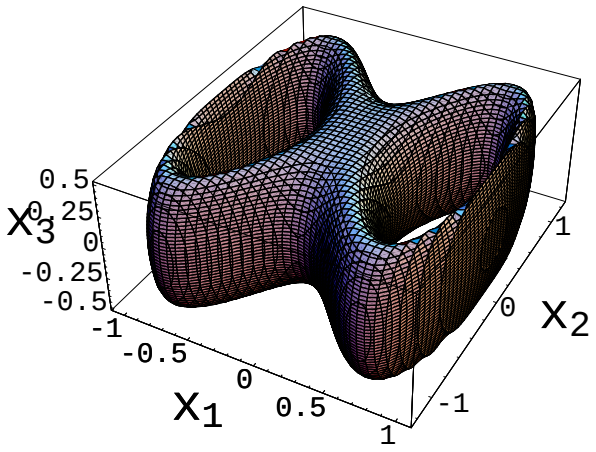


Abbildung A.2: Fläche mit 2 Henkeln

Etwas vornehmer heißt die Henkelzahl der Flächen ihr *Geschlecht*. Sie erlaubt diese topologischen Räume voneinander zu unterscheiden. Die *algebraische* Topologie befaßt sich mit solchen den topologischen Räumen zugeordneten sog. *Invarianten*.

A.2 Stetigkeit

Eine reelle Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wurde *stetig bei* $x \in \mathbb{R}$ genannt, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$f(U_\delta(x)) \subseteq U_\varepsilon(f(x))$$

existiert, und *stetig*, wenn dies für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Ganz analog wurde die $\varepsilon - \delta$–Stetigkeit einer Abbildung zwischen metrischen Räumen definiert. Diesen Stetigkeitsbegriff verallgemeinert man folgendermaßen:

A.20 Definition • *Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt* **stetig bei** *$x \in X$, wenn es zu jeder Umgebung V von $f(x)$ eine Umgebung U von x mit $f(U) \subseteq V$ gibt.*

- *f heißt* **stetig**, *wenn sie bei jedem Punkt $x \in X$ stetig ist.*
- *Eine bijektive stetige Abbildung $f : X \to Y$ heißt* **Homöomorphismus**, *wenn auch $f^{-1} : Y \to X$ stetig ist.*

- X *und* Y *heißen* **homöomorph**, *wenn ein Homöomorphismus* $f : X \to Y$ *existiert.*

A.21 Bemerkung Analog zum Englischen (*homeomorphism*) benutzt man auch das Wort Homeomorphismus := Homöomorphismus $\neq$ Homomorphismus! $\diamond$

A.22 Satz *Eine Abbildung* $f : X \to Y$ *zwischen metrischen Räumen ist genau dann stetig im Sinn von Definition A.20, wenn sie* $\varepsilon - \delta$*–stetig ist.*

Beweis: Hausaufgabe. $\square$

A.23 Satz *Es sei* $f : X \to Y$ *eine Abbildung zwischen topologischen Räumen. Dann ist* f *genau dann stetig, wenn die Urbilder* $f^{-1}(V)$ *offener Mengen immer offen sind.*

Beweis:

- Es sei $f : X \to Y$ stetig und $V \subseteq Y$ offen. Nach Definition existiert für jedes $x \in U := f^{-1}(V)$ eine in U liegende offene Umgebung U_x von x. Deren Vereinigung $\cup_{x \in U} U_x$ ist offen und gleich U.
- Falls aus der Offenheit von $\tilde{V} \subseteq Y$ die Offenheit von $f^{-1}(\tilde{V}) \subseteq X$ folgt, gibt es für alle $x \in X$ und Umgebungen V von $f(x)$ eine offene Umgebung $\tilde{V} \subseteq V$ von $f(x)$, und für $\tilde{U} := f^{-1}(\tilde{V})$ gilt: $\tilde{U}$ ist eine offene Umgebung von x mit $f(\tilde{U}) \subseteq V$. $\square$

Damit bildet ein Homöomorphismus $f : X \to Y$ durch

$$\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y \quad , \quad U \mapsto f(U)$$

die Topologie $\mathcal{O}_X$ bijektiv auf $\mathcal{O}_Y$ ab. Homöomorphismen sind daher die Isomorphismen der Topologie!

Es gibt noch einen zweiten Stetigkeitsbegriff:

A.24 Definition • *Eine Abbildung* $f : X \to Y$ *zwischen topologischen Räumen heißt* **folgenstetig bei** $x \in X$, *wenn für jede gegen* x *konvergente Folge* $a : \mathbb{N} \to X$ *die Bildfolge* $f \circ a : \mathbb{N} \to Y$ *gegen* $f(x)$ *konvergiert.*

- f *heißt* **folgenstetig**, *wenn sie bei jedem Punkt* $x \in X$ *folgenstetig ist.*

Soweit wir nur Topologien betrachten, die von Metriken kommen, gilt für uns nach Satz 9.4 der *Analysis I*

$$\textbf{"stetig} = \textbf{folgenstetig"}.$$

Allgemein gilt aber auf *topologischen* Räumen nur "stetig $\Rightarrow$ folgenstetig".

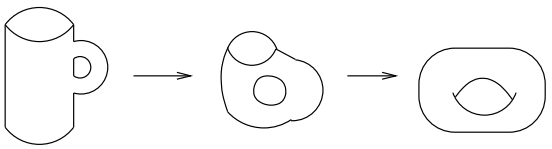
A.25 Beispiele 1. Für $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1})$ mit $\lambda_i > 0$ sei

$$E_\lambda := \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} (x_i/\lambda_i)^2 = 1 \right\}$$

das Ellipsoid mit den Hauptachsen der Länge λ_i.

Dann ist $f : E_\lambda \to S^n,\ x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$ ein Homeomorphismus.

2. Ähnlich ist die Oberfläche eines Bierseidels zum 2–Torus $\mathbb{T}^2$ aus Beispiel A.19 homeomorph:



BS $\qquad\qquad$ $\mathbb{T}^2$

3. Es lässt sich dagegen zeigen, dass S^2 und $\mathbb{T}^2$ nicht homeomorph sind. Anschaulich liegt das daran, dass der Torus $\mathbb{T}^2$ einen Henkel hat, die Sphäre S^2 aber nicht. ◇

A.26 Satz *Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ stetig, so auch $g \circ f : X \to Z$.*

Beweis: Nach Satz A.23 müssen wir nachprüfen, dass für alle offenen $W \subseteq Z$ auch $U := (g \circ f)^{-1}(W) \subseteq X$ offen ist. Wegen der Stetigkeit von g ist $V := g^{-1}(W) \subseteq Y$ offen, wegen der Stetigkeit von f auch $U = f^{-1}(V)$. □

A.27 Bemerkung (Topologische Vektorräume)
In der *Funktionalanalysis*, also dem Gebiet der Mathematik, in dem Lineare Algebra und Analysis sich kombinieren, betrachtet man sog. *topologische Vektorräume*, d.h. Vektorräume mit einer Topologie, die mit Addition und Skalarmultiplikation verträglich ist. Während nun endliche dimensionale Vektorräume über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ die Produkttopologie des $\mathbb{K}^n$ tragen, kommen für unendlich dimensionale Vektorräume V oft verschiedene Topologien in Betracht. Oft sind diese Topologien metrische Topologien $\mathcal{O}(d)$ der von einer Norm $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ erzeugten Metrik d. In dieser Topologie ist die Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ immer stetig. ◇

A.28 Satz *Eine lineare Abbildung $f : X \to Y$ zwischen normierten Vektorräumen $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ist genau dann stetig, wenn sie lipschitzstetig ist, d.h. für ein $L > 0$ gilt*

$$\|f(x)\|_Y \leq L \cdot \|x\|_X \qquad (x \in X). \tag{A.2}$$

Beweis:

- Nach Satz 8.5 der *Analysis II* sind lipschitzstetige Abbildungen zwischen metrischen Räumen stetig.

- Wegen $\|f(x_1) - f(x_2)\|_Y = \|f(x)\|_Y$ mit $x := x_1 - x_2$ reicht es aus, die L–Stetigkeit bei der Null zu überprüfen. Ist f stetig, dann gibt es zu $\varepsilon := 1$ ein $\delta > 0$ mit

$$\|f(x)\|_Y \le 1 \qquad (\|x\|_X \le \delta).$$

  Setze $L := 1/\delta$. Dann folgt aus der Linearität von f für $x \neq 0$ und $\hat{x} := \delta x/\|x\|_X$

$$\|f(x)\|_Y = \left\|f(L\|x\|_X\hat{x})\right\|_Y = \left\|L\|x\|_X f(\hat{x})\right\|_Y = L\|x\|_X\|f(\hat{x})\|_Y \le L\|x\|_X,$$

  während für $x = 0$ ebenfalls (A.2) folgt. □

Ist die lineare Abbildung $f : X \to Y$ stetig, dann definiert man analog zur Matrixnorm die *Operatornorm* von f wie in (5.1) als

$$\|f\| := \sup_{\|x\|_X=1} \|f(x)\|_Y. \tag{A.3}$$

Diese läßt sich wieder grob als maximaler Streckungsfaktor eines Vektors unter der linearen Abbildung interpretieren, wobei das Supremum in (A.3) nicht angenommen werden muss.

Wie im nächsten Abschnitt gezeigt wird, sind lineare Abbildungen $f : X \to Y$ immer stetig, falls $\dim(X) < \infty$.

A.29 Beispiel Es sei

$$X := C^1([0,1],\mathbb{R}) := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig differenzierbar}\},$$

und

$$Y := C([0,1],\mathbb{R}),$$

beide versehen mit der Supremumsnorm. Dann ist die lineare Abbildung

$$D : X \to Y \quad , \quad f \mapsto f'$$

nach Satz A.28 *nicht stetig*, denn zwar besitzt $f_n \in X,\ f_n(x) := x^n$ die Norm $\|f_n\| = |f_n(1)| = 1$, aber wegen $Df_n = nf_{n-1}$ ist $\|Df_n\| = n \qquad (n \in \mathbb{N})$. ◇

A.3 Kompaktheit

Im Buch [Ja] von KLAUS JÄNICH über Topologie beginnt das entsprechende Kapitel mit dem Ausruf: "Ah, Kompaktheit! Eine wundervolle Eigenschaft!"

In Kapitel 9.3 der *Analysis I* wurde $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt genannt, wenn A beschränkt und abgeschlossen ist.

- Der Prototyp eines kompakten Raumes ist daher das abgeschlossene Intervall $[a, b]$, und wir wissen schon, dass darin jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt $x \in [a, b]$ hat. Das ist eine 'wundervolle Eigenschaft', denn eine geeignete Teilfolge konvergiert dann gegen x.
- Dagegen ist $\mathbb{R}$ nicht kompakt, und z.B. die Folge $(x_n := n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt keinen Häufungspunkt.

In topologischen Räumen definieren wir Kompaktheit ganz anders und zeigen anschließend, dass im Fall des $\mathbb{R}^n$ die Definitionen übereinstimmen.

A.30 Definition • *Eine Teilmenge X eines topologischen Raumes $(M, \mathcal{O})$ heißt* **kompakt**, *wenn jede* **offene Überdeckung**, *d.h. jede Familie $(V_i)_{i\in I}$ mit $V_i \in \mathcal{O}$ und $X \subseteq \bigcup_{i\in I} V_i$, eine endliche Teilüberdeckung*

$$X \subseteq V_{j_1} \cup \ldots \cup V_{j_n} \quad \textit{mit} \quad j_1, \ldots, j_n \in I$$

besitzt.

- *X heißt* **folgenkompakt**, *wenn jede Folge $a : \mathbb{N} \to X$ eine gegen ein $x \in X$ konvergente Teilfolge besitzt.*

A.31 Beispiel $X := (0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ ist nicht kompakt, denn mit $V_i := \left(\frac{1}{i}, 2\right) \quad (i \in \mathbb{N})$ ist auch $U_i := V_i \cap X = \left(\frac{1}{i}, 1\right]$ in X offen. Die Familie $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ist eine offene Überdeckung von X. Gäbe es aber eine endliche Teilüberdeckung $X = U_{j_1} \cup \ldots \cup U_{j_n}$, dann wäre mit $j := \max(j_1, \ldots, j_n)$ der Punkt $\frac{1}{j} \in X$. Er ist aber in keinem U_{j_l}. Widerspruch! ◇

Natürlich *existieren* für jede Teilmenge X eines topologischen Raumes M immer endliche offene Überdeckungen, z.B. die einelementige bestehend aus M.

Es gibt topologische Räume, die kompakt, aber nicht folgenkompakt sind und solche, in denen das Umgekehrte gilt. Aber:

A.32 Satz *Ein metrischer Raum (M, d) ist genau dann kompakt, wenn er folgenkompakt ist.*

Beweis: In beiden Richtungen führen wir Widerspruchsbeweise:

1. (M,d) sei kompakt. Wir nehmen nun die Existenz einer Folge $a : \mathbb{N} \to M$ ohne konvergente Teilfolge an.

   Dann existiert für jeden Punkt $x \in M$ eine Umgebung V_x, die nur von endlich vielen Folgengliedern getroffen wird. (Warum? Andernfalls existierte ja ein Punkt $x \in M$, dessen Umgebungen $U_{1/n}(x) \quad (n \in \mathbb{N})$ alle von unendlich vielen Folgengliedern getroffen würden. Dann könnten wir eine gegen x konvergente Teilfolge auswählen).

   Nach Voraussetzung besitzt aber die offene Überdeckung $(V_x)_{x\in M}$ eine endliche Teilüberdeckung, und damit die Folge nur endlich viele Glieder. Widerspruch!

2. (M,d) sei folgenkompakt, aber nicht kompakt. Es existiert also eine Überdeckung $(V_i)_{i\in I}$ von M ohne endliche Teilüberdeckung.

   Für jeden Punkt $x \in M$ und $J(x) := \{i \in I \mid x \in V_i\}$ setzen wir

   $$R(x,i) := \min\big(\sup\{r > 0 \mid U_r(x) \subseteq V_i\}, 1\big) \qquad (i \in J(x)),$$

   sodass für diese Radien also $U_{R(x,i)}(x) \subseteq V_i$ gilt.

   Als Nächstes wählen wir für jedes $x \in M$ eine Umgebung $V_{j(x)}$ von x mit

   $$j(x) \in J(x) \quad \text{so dass} \quad R(x,j(x)) \geq \tfrac{1}{2} \sup_{i\in J(x)} R(x,i). \tag{A.4}$$

   Anschließend konstruieren wir induktiv eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M mit

   $$x_{n+1} \notin V_{j(x_1)} \cup \ldots \cup V_{j(x_n)} \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{A.5}$$

   (da nach Annahme keine endliche Teilüberdeckung existiert, ist dies möglich).

   $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt nach Annahme eine konvergente Teilfolge, und wir nehmen o.B.d.A. an, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selbst gegen $a \in M$ konvergiert, also $\lim_{n\to\infty} d(x_n,a) = 0$.

   Damit muss wegen (A.5) der Limesradius $\lim_{n\to\infty} R(x_n, j(x_n)) = 0$ sein.

   Andererseits ist $R(a,j(a)) > 0$, es gibt also ein $N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n,a) < \frac{1}{4}R(a,j(a))$ für alle $n \geq N$. Damit ist nicht nur $x_n \in U_{R(a,j(a))}(a)$, sondern sogar die Kugel $U_{\frac{1}{4}R(a,j(a))}(x_n)$ um x_n mit n–unabhängigem Radius in $U_{R(a,j(a))}(a)$ enthalten. Wir haben also für ein $n \in \mathbb{N}$ die Bedingung (A.4) verletzt. Widerspruch! □

A.33 Korollar *Kompakte metrische Räume sind vollständig.*

Beweis: Denn konvergiert eine Teilfolge einer Cauchy–Folge, so auch die Cauchy–Folge selbst. □

A.34 Beispiel

$\mathbb{Q} \cap [0,1]$ ist nicht vollständig (da $1/\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$), also nicht kompakt! ◇

Satz A.32 ermöglicht uns zu zeigen, dass die Kompaktheits-Definition der *Analysis I* Spezialfall unserer jetzigen Definition ist.

A.35 Satz (Heine–Borel) *$A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt im Sinne von Definition A.30, wenn A beschränkt und abgeschlossen ist.*

Beweis:

1. Falls A beschränkt und abgeschlossen ist, ist A nach dem Satz von Bolzano–Weierstraß (Satz 7.41 der *Analysis I*) folgenkompakt und damit nach Satz A.32 kompakt.

2. Ist A unbeschränkt, dann existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A mit $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \infty$. Diese Folge divergiert also, und A ist nicht (folgen)kompakt.

3. Gleiches gilt, falls A nicht abgeschlossen ist, also einen nicht in A liegenden Häufungspunkt besitzt. □

Man könnte nun denken, dass allgemein Abgeschlossenheit und Beschränktheit[26] einer Teilmenge eines metrischen Raumes ihre Kompaktheit impliziert. Das gilt aber noch nicht einmal für Teilmengen normierter Vektorräume:

A.36 Bemerkung (Kompaktheit)

Die Einheitssphäre $S := \{f \in \ell^2 \mid \|f\|_2 = 1\}$ im *Hilbertschen Folgenraum*

$$\ell^2 := \ell^2(\mathbb{N}) := \left\{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|^2 < \infty \right\}$$

bezüglich der Norm $\|f\|_2 := \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|^2}$ ist beschränkt und abgeschlossen, aber nicht kompakt. Denn die Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der (Basis–) Vektoren $e_n(k) := \delta_{n,k}$ $(k \in \mathbb{N})$ liegt in S, besitzt aber wegen $\|e_n - e_m\|_2 = \sqrt{2}$ $(m \neq n)$ keine konvergente Teilfolge. ◇

A.37 Satz *Kompakte Teilmengen von Hausdorff–Räumen sind abgeschlossen.*

[26] **Definition** Eine Teilmenge $A \subseteq X$ eines metrischen Raums (X, d) heißt **beschränkt**, wenn $A = \emptyset$ oder wenn ihr **Durchmesser** $\operatorname{diam}(A) := \sup_{x,y\in A} d(x,y)$ endlich ist.

Beweis: Sei M Hausdorff–Raum und $X \subseteq M$ kompakt. Zu zeigen ist: $Y := M - X$ ist offen. Für $y \in Y$ konstruieren wir zum Nachweis eine offene Umgebung $V \subseteq Y$ von y. Für jedes $x \in X$ existieren wegen der Hausdorffeigenschaft disjunkte offene Umgebungen $U_x \subseteq M$ von x und $V_x \subseteq M$ von y.
Wegen der Kompaktheit von X gibt es eine endliche Teilüberdeckung

$$U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_n} \supseteq X$$

der Überdeckung $(U_x)_{x \in X}$ von X. Für die offene Umgebung

$$V := V_{x_1} \cap \ldots \cap V_{x_n} \subseteq M$$

von y gilt: $U_{x_i} \cap V \subseteq U_{x_i} \cap V_{x_i} = \emptyset$ $(i = 1 \ldots, n)$. Also ist $V \subseteq M - X = Y$. □

Gegenbeispiel (Kompakt, aber nicht abgeschlossen):
$M := \{1, 2\}$ mit indiskreter Topologie $\mathcal{O} = \{\emptyset, \{1, 2\}\}$. $\{1\} \subset \{1, 2\}$ ist zwar als endliche Menge kompakt, aber nicht abgeschlossen, da $\{2\}$ nicht offen ist. ◇

Die folgenden beiden Sätze können oft zum Nachweis der Kompaktheit benutzt werden.

A.38 Satz
Ist $X \subseteq M$ kompakt und $f : M \to Y$ stetig, dann ist $f(X) \subseteq Y$ kompakt.

Beweis: Sei $(V_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $f(X)$ und

$$U_i := f^{-1}(V_i) = \{x \in X \mid f(x) \in V_i\}.$$

Dann ist nach Satz A.23 auch U_i offen, und es gibt eine endliche Teilüberdeckung $X \subseteq U_{j_1} \cup \ldots \cup U_{j_m}$. Damit ist $f(X) \subseteq V_{j_1} \cup \ldots \cup V_{j_m}$. □

Ein weiteres Prinzip zur Identifikation kompakter Mengen ist das folgende:

A.39 Satz
Abgeschlossene Teilmengen kompakter topologischer Räume sind kompakt.

Beweis: Es sei $A \subseteq K$ eine abgeschlossene Teilmenge des kompakten Raums K und $(V_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von A durch (in A) offene Teilmengen $V_i \subseteq A$. Nach Definition A.17 der Teilraumtopologie gibt es daher in K offene Teilmengen $(U_i)_{i \in I}$ mit $V_i = U_i \cap A$. Die U_i bilden zusammen mit der offenen Menge $K \backslash A$ eine offene Überdeckung von K, die wegen Kompaktheit von K eine endliche Teilüberdeckung besitzt:

$$K = (K \backslash A) \cup U_{j_1} \cup \ldots \cup U_{j_m}.$$

Damit ist $A = V_{j_1} \cup \ldots \cup V_{j_m}$. □

Eine Abbildung ist genau dann stetig, wenn die Urbilder der offenen Mengen offen sind, oder äquivalent, wenn die Urbilder der abgeschlossenen Mengen abgeschlossen sind.

So gewinnt man viele Kompakta:

A.40 Beispiel Die n–Sphäre $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ ist *kompakt*, denn

- S^n ist Urbild der abgeschlossenen Menge $\{1\} \subseteq \mathbb{R}$ unter der stetigen Abbildung $x \mapsto \|x\|$, also abgeschlossen, und
- $S^n \subseteq [-1,1]^{n+1}$. Die Kompaktheit der Quader haben wir aber schon gezeigt. ◇

A.41 Satz *Stetige Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ auf kompakten metrischen Räumen $X \neq \emptyset$ nehmen ihr Minimum und Maximum an, d.h. es gibt $x_{\min}, x_{\max} \in X$ mit*

$$\inf_{x\in X} f(x) = f(x_{\min}) \quad , \quad \sup_{x\in X} f(x) = f(x_{\max}).$$

Beweis: Da $f(X) \neq \emptyset$, gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\sup_x f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$. wegen der Äquivalenz von Kompaktheit und Folgenkompaktheit (Satz A.32) gibt es eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Wegen der Stetigkeit von f und der Äquivalenz von Stetigkeit und Folgenstetigkeit (Satz 9.4 der *Analysis I*) gilt

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_{\max}) \quad \text{für} \quad x_{\max} := \lim_{k\to\infty} x_{n_k}.$$

Analog für das Infimum. □

Während verschiedene Normen auf einem Vektorraum unterschiedliche geometrische Strukturen erzeugen, können sie einander doch in einem gröberen Sinn gleichen:

A.42 Definition *Zwei Normen $\|\cdot\|_I$ und $\|\cdot\|_{II}$ auf dem $\mathbb{K}$–Vektorraum V heißen* **äquivalent**, *wenn für geeignete $C' \geq C > 0$ gilt:*

$$C\|v\|_I \leq \|v\|_{II} \leq C'\|v\|_I \qquad (v \in V).$$

Als Anwendung unserer Kompaktheitssätze können wir jetzt den

A.43 Satz *Alle Normen auf einem endlich–dimensionalen $\mathbb{K}$–Vektorraum ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) sind äquivalent*

beweisen:

Beweis: • Ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachten wir den $\mathbb{K}^n$.
• Es sei $\|\cdot\| : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ eine Norm. Es genügt die Äquivalenz dieser Norm zur

euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$ nachzuweisen, denn Äquivalenz von Normen ist eine Äquivalenzrelation.
• Wir zeigen zunächst, dass die Abbildung $\|\cdot\| : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ stetig ist. Es sei dazu $e_1, \ldots, e_n$ die kanonische Basis des $\mathbb{K}^n$ (mit $\|e_i\|_2 = 1$) und $c_i := \|e_i\|$ die Norm des i–ten Basiselementes. Dann besitzt ein Vektor $x = \sum_{k=1}^n x_i e_i \in \mathbb{K}^n$ die euklidische Länge $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$ und nach der Dreiecksungleichung die Länge

$$\|x\| \leq \sum_{i=1}^n \|x_i e_i\| = \sum_{i=1}^n |x_i| c_i \leq c \sum_{i=1}^n |x_i| \leq cn\|x\|_2$$

mit $c := \max(c_1, \ldots, c_n)$. Damit ist die Norm-Abbildung stetig.
• Nun restringieren wir diese auf die Einheitssphäre

$$S_{\mathbb{K}}^{n-1} := \{x \in \mathbb{K}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$$

des Euklidischen Vektorraums, betrachten also die Abbildung

$$f : S_{\mathbb{K}}^{n-1} \to \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto \|x\|.$$

Da $S_{\mathbb{K}}^{n-1}$ nach Beispiel A.40 kompakt[27] und f stetig ist, nimmt f Minimum $f_{\min} > 0$ und Maximum $f_{\max} < \infty$ an. Daher gilt $f_{\min}\|x\|_2 \leq \|x\| \leq f_{\max}\|x\|_2$. □

A.44 Satz *Sind* $(X, \|\cdot\|_X)$ *und* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *und* $\dim(X) < \infty$ $\mathbb{K}$*–Vektorräume, dann ist jede lineare Abbildung* $f : X \to Y$ *stetig.*

Beweis: Nach Satz A.43 können wir annehmen, dass $\|\cdot\|_X$ die euklidische Norm ist. Es sei $e_1, \ldots, e_n \in X$ eine Orthonormalbasis und $x = \sum_{i=1}^n c_i e_i \in X$ von der Norm 1, also $\sum_{i=1}^n |c_i|^2 = 1$. Dann ist $\|f(x)\|_Y = \|\sum_{i=1}^n c_i f(e_i)\|_Y \leq \sum_{i=1}^n |c_i| \|f(e_i)\|_Y \leq L := n \max\{\|f(e_i)\|_Y \mid i = 1, \ldots, n\}$. L ist damit eine Lipschitz–Konstante. □

Literatur

[AF] Agricola, I., Friedrich, T.: *Globale Analysis*. Vieweg, 2001

[Am] Amann, H.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. de Gruyter

[Ar] Vladimir I. Arnol'd: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Springer, 1980

[27] Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, dann ist $S_{\mathbb{C}}^{n-1} = S_{\mathbb{R}}^{2n-1}$, wenn man den $\mathbb{C}^n$ *reellifiziert* d.h. mit dem $\mathbb{R}^{2n}$ identifiziert.

[Ba] Heinz Bauer: *Maß- und Integrationstheorie*. de Gruyter, 1992

[Bl] Ch. Blatter: *Analysis I-III*. Springer, 1974

[Br] T. Bröcker: *Analysis, Bd. 1 und 2*. Spektrum der Wissenschaft, 1995

[DB] Peter Deuflhard, Folkmar Bornemann: *Numerische Mathematik II: Gewöhnliche Differentialgleichungen*. de Gruyter, 2002

[El] Jürgen Elstrodt: Maß– und Integrationstheorie. 6. Auflage. Berlin: Springer 2009

[Fi] Gerd Fischer: *Lineare Algebra*. Vieweg, 2000

[Fo] Otto Forster: *Analysis, Band 1-3*. Vieweg, 1999

[Hi] Stefan Hildebrandt: *Analysis 1 und 2*. Springer, 2002

[In] E.L. Ince: *Ordinary Differential Equations*.

[Ja] Klaus Jänich: *Topologie*. Springer, 1999

[Ka] Victor Katz: *The History of Stokes' Theorem*. Mathematics Magazine **52**, 146–156 (1979)

[Kn] Andreas Knauf: *Mathematische Physik: Klassische Mechanik*. Springer, 2017

[Ko] K. Königsberger: *Analysis, Band 1 und 2*. Springer, 1997

[LL] Elliott Lieb, Michael Loss: *Analysis*. AMS, 1997

[MV] Meyberg, K., Vachenauer, P.: *Höhere Mathematik, Band 1 und 2*. Springer, 1999

[Wa] W. Walter: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Springer, 1996

[Wu] Reiner Wüst: *Höhere Mathematik für Physiker, Band 1.* de Gruyter, 1995

Index

abgeschlossen 143
abgeschlossene Hülle 143
äußere Ableitung 59
äußere Form 54
äußeres Produkt 55
Anfangswertproblem 81
Antiderivation 60
asymptotisch stabil 124, 126
Basis einer Topologie 144
Bilinearform 54
Differentialform 59
    exakte 61
    geschlossene 61
Differentialgleichung 75
    explizite 78
    hamiltonsche 133
    implizite 78
    inhomogene lineare 106
Dimension 3
Dirac–Maß 2
Divergenz 62
Doppelfakultät 52
Dualbasis 53
Duhamel-Prinzip 106
Erhaltungsgröße 133
fast überall 20
Fluchtzeiten 137
folgenkompakt 151
folgenstetig 148
Fundamentalsystem 103
Funktional 6
Funktionaldeterminante 44
Gammafunktion 48
Gaußsche Glockenkurve 39
Gleichgewichtslage 93
Gradient 62
Grassmann–Algebra 58
Grenzwert 144
Gronwall–Ungleichung 127
Häufungspunkt
    einer Folge 144
    einer Menge 143
Halbnorm 8
harmonischer Oszillator 106, 109
Hausdorff–Raum 144
Homöomorphismus 147
Hüllreihe 8
Inneres einer Menge 143
instabil 123
Integral 66
Jordan–Normalform 98
Kegel 18
kompakt 151
Konstante der Bewegung 133
Kreuzprodukt 57
Lebesgue–Integral 9
Lebesgue–Maß 17
liapunov–stabil 123, 126
Liapunov-Funktion 129
Limes 144
Linearisierung einer Differentialgl. 119
Lösung einer Differentialgleichung 81
lokal integrabel 40
lokal lipschitz–stetig 23
Maß 2
Matrixexponential 95
messbar 17
metrischer Tensor 68
multilinear 53
Nullmenge 20
oberhalbstetig 138
offene Überdeckung 151
Operatornorm 96
Ordnung einer Differentialgleichung 77
Parallelotop 45
Pendel 120

Phasenraum 81
Polarkoordinaten 50, 64
pull–back 58, 64
Quader 3
Quasipolynom 108
Randpunkt 143
Rotation 62
Ruhelage 93
Satz
    Banachscher Fixpunktsatz 82
    Beppo Levi 32
    Fatou 33
    über Fluchtzeiten 138
    Fubini 6, 15, 40
    Gaußscher Integralsatz 73
    Hauptsatz der DGL-Theorie 141
    Heine–Borel 153
    Kelvin-Stokes 73
    Lebesgue 35
    majorisierte Konvergenz 35
    monotone Konvergenz 32
    Picard–Lindelöf 84
    Riesz–Fischer 29
    Stokes 72
    Tietze 15
    Transformationssatz 45
    Trennung der Variablen 131
    Weierstraß 97
σ–additiv 18
Sphäre 153, 155
Spurtopologie 146
stetig 147
Standardvolumenform 67
symplektische Form 56
topologischer Raum 142
Topologie 142
    induzierte 146
    Produkttopologie 145
Teilraum 146
Torus 68, 146
Transformationssatz 45
Translationsinvarianz 34
Trennung der Variablen 131
Treppenfunktion 4
Umgebung 143
unterhalbstetig 138
Untermannigfaltigkeit 70
Verfeinerung 4
Wronski-Determinante 104