

Vorlesung Analysis III / Mehrdimensionale Integration

Andreas Knauf*

Wintersemester 2005/06

Zusammenfassung

Vorlesungsbegleitendes Skript. Anregungen und Kritik sind willkommen!
Die Kapitel 1, 2 und 6 sind nicht Stoffinhalt der 'Mehrdimensionalen
Integration'.

Inhaltsverzeichnis

Zur Notation	iii
1 Gewöhnliche Differentialgleichungen	1
1.1 Lösungsbegriffe	1
1.2 Elementare Lösungsmethoden	2
1.2.1 Trennung der Variablen	2
1.2.2 Hamiltonsche Differentialgleichung	3
2 Linearisierung von Differentialgleichungen	4
2.1 Allgemeine Bedeutung der Linearisierung	4
2.2 Stabilitätsbegriffe für Gleichgewichtslagen	7
2.3 Stabilitätskriterien für Gleichgewichtslagen	10
3 Einführung in die Topologie	16
3.1 Topologische Räume	16
3.2 Stetigkeit	21
3.3 Kompaktheit	24

*Department Mathematik, Universität Erlangen-Nürnberg, Cauerstr. 11, D-91058 Erlangen, Germany. e-mail: knauf@math.fau.de, web: www.math.fau.de/knauf

4	Maß und Integration	31
4.1	Treppenfunktionen	33
4.2	Das Lebesgue-Integral	38
4.3	Der Satz von Fubini (stetige Version)	44
4.4	Nullmengen	49
4.5	Abbildungen von Nullmengen	52
5	Sätze und Rechenregeln der Lebesgueintegration	55
5.1	Der Banach-Raum $L^1(\mathbb{R}^n)$	55
5.2	Der Satz von Fubini (L^1 -Version)	68
5.3	Der Transformationssatz	71
5.4	Anwendung: Polarkoordinaten im \mathbb{R}^n	76
5.5	L^p -Räume	78
5.6	Der Hilbert-Raum $L^2(\mathbb{R}^n)$	80
6	Die Fourier-Transformation	85
6.1	Fourier-Transformation integrierbarer Funktionen	85
6.2	Fourier-Transformation auf $L^2(\mathbb{R}^n)$	93
6.3	Fourier-Transformation für abelsche Gruppen	95
7	Differentialformen und Mannigfaltigkeiten	99
7.1	Multilinearformen	99
7.2	Differentialformen	105
7.3	Vektoranalysis	107
7.4	Integration von Differentialformen	111
	Literatur	120
	Index	121

Danksagung: Ich danke Frau I. Moch für ihre hervorragende Arbeit beim Schreiben des Manuskriptes, Herrn Dr. Chr. Schumacher, Herrn M.Sc. J. Singer sowie zahlreichen Studierenden für ihre Korrekturvorschläge.

Erlangen, im Januar 2015

Andreas Knauf

Vorbemerkung: Dieses Skript kann kein Lehrbuch ersetzen. Einige Lehrbücher zur Analysis sind im Literaturverzeichnis erwähnt. Die Einführung des Lebesgue-Integrals lehnt sich dabei an die Darstellung in Königsberger: Analysis 2, [Ko] an, weshalb ich die begleitende Benutzung dieses Buches besonders empfehle.

Zur Notation

Teilmengen: Sind A und B Mengen, dann heißt A *Teilmenge* von B (in Zeichen $A \subseteq B$), wenn gilt: $x \in A \Rightarrow x \in B$. Insbesondere gilt $B \subseteq B$. Die *echte Inklusion* $A \subsetneq B$ bedeutet, dass $A \subseteq B$, aber $A \neq B$ gilt. (in der mathematischen Literatur findet man davon abweichend auch das Teilmengenzeichen $A \subset B$.)

Potenzmengen: Ist A eine Menge, dann ist

$$2^A := \{B \mid B \subseteq A\}$$

die *Potenzmenge* von A . Synonym findet man auch die Notationen $\mathfrak{P}(A)$ und $\mathcal{P}(A)$.

Zahlen: Menge $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ der natürlichen Zahlen, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, Ring $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ der ganzen Zahlen.

Körper $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ der rationalen, reellen bzw. komplexen Zahlen.

Für einen Körper \mathbb{K} bedeutet \mathbb{K}^* die multiplikative Gruppe $\mathbb{K}^* := \mathbb{K} \setminus \{0\}$, und

$$\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} = (0, \infty).$$

Intervalle: Für $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ ist

$$\begin{aligned} (a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a, x < b\}, \\ (a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a, x \leq b\} \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

(Synonym findet man auch die Notation $]a, b[= (a, b)$, $]a, b] = (a, b]$ etc.)

Matrizen: $\text{Mat}(m \times n, \mathbb{K})$ bezeichnet den \mathbb{K} -Vektorraum der $m \times n$ -Matrizen mit Einträgen aus dem Körper \mathbb{K} , und $\text{Mat}(n, \mathbb{K})$ den Ring $\text{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$.

Das griechische Alphabet: a) Kleinbuchstaben

α	Alpha	ζ	Zeta	λ	Lambda	π	Pi	ϕ, φ	Phi
β	Beta	η	Eta	μ	My	ρ, ϱ	Rho	χ	Chi
γ	Gamma	θ, ϑ	Theta	ν	Ny	σ, ς	Sigma	ψ	Psi
δ	Delta	ι	Jota	ξ	Xi	τ	Tau	ω	Omega
ϵ, ε	Epsilon	κ	Kappa	\omicron	Omikron	υ	Ypsilon		

b) Großbuchstaben

Γ	Gamma	Θ	Theta	Ξ	Xi	Σ	Sigma	Φ	Phi	Ω	Omega
Δ	Delta	Λ	Lambda	Π	Pi	Υ	Ypsilon	Ψ	Psi		

1 Gewöhnliche Differentialgleichungen

1.1 Lösungsbegriffe

Wir wissen nun, dass unter vernünftigen Bedingungen Differentialgleichungen lokal eindeutige Lösungen besitzen. Wir können nämlich explizite, explizit zeitabhängige DGLn höherer Ordnung durch Einführung neuer Variablen in die Form

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.1)$$

überführen, wobei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf dem (offenen) *Phasenraum* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein lokal lipschitzstetiges Vektorfeld ist. Für $x_0 \in U$ besitzt dann das *Anfangswertproblem* (AWP)

$$\dot{x} = f(x) \quad , \quad x(0) = x_0 \quad (1.2)$$

eine Lösung $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$. Ist das Vektorfeld $f \in C^k(U, \mathbb{R}^n)$, dann ist auch die Lösung des Anfangswertproblems entsprechend glatt: $\varphi \in C^k((-\varepsilon, \varepsilon), U)$. Nur, wie finden wir diese Lösungen im Allgemeinen? Die Antwort hängt von unserem *Lösungsbegriff* ab.

1. Meistens werden die Komponenten von f elementare Funktionen¹ sein. Können wir dann auch gleiches für die Komponenten von φ erwarten? Im Allgemeinen nicht. Man muss sich nur vergegenwärtigen, dass die Integration einer reellen Funktion f die Lösung einer speziellen, explizit zeitabhängigen DGL bedeutet: Ist

$$\varphi(t) = c + \int_{t_0}^t f(s) ds,$$

dann gilt

$$\dot{\varphi} = f \quad , \quad \varphi(t_0) = c.$$

Nun bildet die Integration (im Gegensatz zur Differentiation) die Menge der elementaren Funktionen nicht in sich ab, wie schon das Beispiel der *Fehlerfunktion* $t \mapsto \int_{-\infty}^t \exp(-s^2) ds$ zeigt.

Wir müssen also darauf gefasst sein, nicht elementare Funktionen (wie der Fehlerfunktion des Beispiels, oder der so genannten hypergeometrischen Funktion) als *analytische Lösungen* in Betracht zu ziehen.

Inzwischen sind Programmsysteme wie Mathematica oder Maple in der analytischen Lösung von Differentialgleichungen versierter als die meisten

¹ also die Polynome, die Exponentialfunktion, der Logarithmus, die (invers) trigonometrischen Funktionen, und aus diesen durch endlich viele Anwendungen der Grundrechenarten und Kompositionen gewonnene Funktionen

Mathematiker. Trotzdem kapitulieren sie schon bei den meisten linearen Einzeldifferentialgleichungen zweiter Ordnung (mit nicht konstanten Koeffizienten).

Selbst wenn ein Programmsystem die allgemeine analytische Lösung einer DGL findet, kann diese so kompliziert sein, dass man ihre qualitativen Eigenschaften (siehe unten) nicht unmittelbar versteht.

Ich werde einige Methoden zur analytischen Integration beschreiben, verweise aber darauf, dass für die Mehrzahl der in der Praxis vorkommenden DGLn die allgemeine Lösung nicht bekannt ist.

2. Ein weiterer Lösungsbegriff ist der der *Numerischen Lösung*. Zunächst einmal verstehen wir darunter heuristisch das, was der Computer uns liefert, wenn wir ihn sachgemäß programmiert haben. Auch für ein endliches Zeitintervall wird diese Lösung im Allgemeinen nicht mit der analytischen Lösung übereinstimmen. Wir verlangen aber von einem numerischen Verfahren, dass es die (unbekannte) Lösung beliebig gut approximiert, wenn man – auf Kosten der Rechenzeit – einen Parameter wie den Zeitschritt der Iteration gegen Null führt. Vorteil der Numerik ist ihre fast universelle Anwendbarkeit, Nachteil die oft unbekannte Genauigkeit.
3. Oft sind wir an *qualitativen Eigenschaften* der Lösungen interessiert, etwa:
 - Konvergiert eine Lösung gegen eine Ruhelage?
 - Ist sie beschränkt oder nicht?
 - Ist sie zeitperiodisch?
 - Verändert sich eine Lösung stark, wenn der Anfangswert verändert wird (Instabilität)?

Für ein weiter gehendes Studium gewöhnlicher DGLn empfehle ich das Buch [Ar] von Arnol'd, die Numerik von gewöhnlichen DGLn wird z.B. im Buch [DB] von Bornemann und Deuffhard behandelt.

1.2 Elementare Lösungsmethoden

1.2.1 Trennung der Variablen

1.1 Beispiel Das AWP $\dot{x} = x^2$, $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$ besitzt die folgenden Lösungen:

- $x_0 = 0$: $x(t) = 0$
- $x_0 > 0$: $x(t) = \frac{x_0}{1-t/x_0}$ ($t \in (-\infty, 1/x_0)$)
- $x_0 < 0$: $x(t) = \frac{x_0}{1-t/x_0}$ ($t \in (1/x_0, \infty)$).

Der Lösungsansatz für $x_0 \neq 0$ ist

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dy}{y^2} = \int_0^t ds \quad , \text{ also } \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x(t)} = t.$$

Allgemein kann man Differentialgleichungen erster Ordnung in einer abhängigen Variablen lösen, wenn sie die Form

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad \text{mit} \quad f(x, t) = g(x)h(t) \in C(I \times J, \mathbb{R})$$

haben, wir also eine Zerlegung von f in stetige reelle Funktionen $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $h : J \rightarrow \mathbb{R}$ auf den Intervallen I und J vornehmen können. Setzt man nämlich o.B.d.A. $g > 0$ voraus (denn der Fall $g < 0$ auf $g > 0$ rückführbar, und wir können gegebenenfalls das Intervall I restringieren), dann ergibt sich für die Anfangsbedingungen

$$x(t_0) = x_0 \in I \quad , \quad t_0 \in J \quad \text{und}$$

$$G(x) := \int_{x_0}^x \frac{dy}{g(y)} \quad , \quad H(t) = \int_{t_0}^t h(s) ds$$

die Lösung

$$x(t) = G^{-1} \circ H(t) \quad (t \in J \cap F^{-1} \circ H(I)). \quad (1.3)$$

Dies verifiziert man (Hausaufgabe!) durch Einsetzen von (1.3) in die DGL und die Feststellung, dass in (1.3) $x(t_0) = x_0$ gilt. Die Lösung ist sogar eindeutig, wenn $g \neq 0$ vorausgesetzt wird, ohne dass Lipschitzstetigkeit vorliegen muss (siehe Forster, Analysis 2 [Fo]).

1.2.2 Hamiltonsche Differentialgleichung

1.2 Beispiel Die Newtonsche Kraftgleichung

$$\ddot{q} = F(q) \quad \text{mit} \quad F \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

besitzt die Lösungen

$$q(t) = G_E^{-1}(t - t_0),$$

wobei für das sog. *Potential* $V(q) := - \int_{q_0}^q F(x) dx$ der Kraft und $E > 0$

$$G_E(q) := \int_{q_0}^q \frac{1}{\sqrt{2(E - V(x))}} dx \quad (1.4)$$

gesetzt wird.

Hintergrund ist der folgende: Für $H \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ist die sog. *Hamiltonsche DGL von H* von der Form

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}.$$

Physikalisch wird dabei q als Ort, p als Impuls eines Teilchens auf der Geraden interpretiert. Wir verifizieren, dass für jede Lösung $t \mapsto x(t) = (q(t), p(t))$ gilt

$$\frac{d}{dt}H(x(t)) = \frac{\partial H}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial H}{\partial p}\dot{p} = 0.$$

H ist also *Konstante der Bewegung*, die Bewegung erfolgt auf den Niveaulächen von H .

Im obigen Beispiel ist $H(q, p) := \frac{1}{2}p^2 + V(q)$, also $\dot{q} = p$ und $\dot{p} = -F(q)$. Setzt man $E := H(x_0)$, dann ist $\sqrt{2(E - V(q_0))} = p_0$, falls $x_0 = (q_0, p_0)$ mit $p_0 \geq 0$. In (1.4) wird also die inverse Geschwindigkeit integriert, um die Zeitdifferenz $t - t_0$ zu erhalten, die das Teilchen zum Zurücklegen des Weges zwischen q_0 und q benötigt.

Eine weitergehende Einführung in die Hamiltonschen DGLn bietet mein Skript *Mathematische Physik 1 (Klassische Mechanik)*².

2 Linearisierung von Differentialgleichungen

2.1 Allgemeine Bedeutung der Linearisierung

Wir besitzen jetzt eine Lösungsmethode für lineare DGLn (mit konstanten Koeffizienten). Es ist dies aber leider die einzige große Klasse "algorithmisch" lösbarer DGLn. Andererseits sind viele Anfangswertprobleme zwar nicht linear, können aber immerhin näherungsweise mithilfe linearer AWP's gelöst werden.

2.1 Bemerkung Ein Grund dafür ist die Tatsache, dass sich viele in der Natur auftretenden Systeme näherungsweise im Gleichgewicht befinden, also nahe bei einem kräftefreien Fall. Besitzt die ortsabhängige Kraft F eine Nullstelle bei q_s , dann gilt (für glattes F) nach Taylor für q nahe bei q_s

$$\begin{aligned} F(q) &= \underbrace{F(q_s)}_0 + DF(q_s)(q - q_s) + \mathcal{O}(\|q - q_s\|^2) \\ &= A(q - q_s) + \mathcal{O}(\|q - q_s\|^2) \end{aligned}$$

²erhältlich unter www.mathematik.uni-erlangen.de/~knauf

mit $A := DF(q_s)$. Führt man die Relativkoordinate $y := q - q_s$ ein, so wird aus der Newtongleichung $\ddot{q} = F(q)$ (für Masse 1)

$$\ddot{y} = Ay + \mathcal{O}(\|y\|^2).$$

Es liegt nun nahe (und ist auch richtig), anzunehmen, dass für kurze Zeiten die Lösungen des AWP für $\ddot{y} = Ay$ mit betragsmäßig kleinen Anfangswerten $y(0)$ und $\dot{y}(0)$ nahe bei den entsprechenden Lösungen der nicht linearen DGL liegen. Manchmal gilt das sogar für alle Zeiten, zumindest wenn man statt der Lösungen die Orbits vergleicht, also die Zeitparametrisierung vergisst.

Wir formulieren nun das Konzept der Linearisierung allgemein für Differentialgleichungssysteme erster Ordnung.

2.2 Definition Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$.

1. Dann heißt U **Phasenraum** der Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x). \tag{2.1}$$

2. Das Bild $x(I) \subseteq U$ einer Lösungskurve $x : I \rightarrow U$ von (2.1) heißt **Orbit**.

3. Ist $x_s \in U$ Nullstelle des Vektorfeldes f , dann heißt x_s auch **Ruhelage** oder **Gleichgewichtslage** von (2.1).

4. Die lineare Differentialgleichung

$$\dot{y} = Ay \quad \text{mit} \quad A := Df(x_s) \tag{2.2}$$

heißt **Linearisierung** von (2.1) bei x_s .

Die Nullstellen x_s heißen Ruhelagen, weil das AWP $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_s$ die eindeutige Lösung $x(t) = x_s$ ($t \in \mathbb{R}$) besitzt.

Wir untersuchen an einem Beispiel den Zusammenhang zwischen den Lösungen von (2.1) und denen der Linearisierung (2.2).

2.3 Beispiel (Das planare Pendel) Zunächst leiten wir mithilfe des Newtonschen Kraftgesetzes eine Differentialgleichung ab, die wir anschließend untersuchen.

Im ersten Schritt (oft *Modellierung* genannt) idealisieren wir das Pendel wie folgt. Es soll aus einem Massepunkt der Masse $m > 0$ bestehen, der sich in einer Ebene auf einem Kreis mit Radius $L > 0$ (Pendellänge) um den Ursprung bewegt. Seine Koordinaten seien $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \end{pmatrix}$, und auf ihn wirke eine in $-z_2$ -Richtung wirkende Kraft $F(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ -m \end{pmatrix}$ der Stärke m (Schwerkraft). Deren

Komponente in Tangentialrichtung ist daher gleich $-\sin \varphi$. Es ergibt sich damit die Differentialgleichung

$$L\ddot{\varphi} = -\sin \varphi,$$

denn die Masse m tritt auf beiden Seiten des Newtonschen Kraftgesetzes als Faktor auf, kann also gekürzt werden. Auf dem Phasenraum $U = \mathbb{R}^2$ erhalten wir durch Einführung der Winkelgeschwindigkeit v das Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$\dot{\varphi} = v \quad , \quad \dot{v} = -\frac{1}{L} \sin \varphi.$$

Durch Reskalierung der Zeit können wir erreichen, dass $L = 1$ ist.

Mit $x := \begin{pmatrix} \varphi \\ v \end{pmatrix}$ ist

$$\dot{x} = f(x) = \begin{pmatrix} v \\ -\sin \varphi \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Es gilt $f(x + y) = f(x)$, falls $y = (0, 2\pi k)$ mit $k \in \mathbb{Z}$ ist. Innerhalb einer Periode ($\varphi \in [0, 2\pi)$) besitzt aber f nur die Nullstellen $x_s = (0, 0)$ und $(0, \pi)$, entsprechend der unteren bzw. oberen Ruhelage des Pendels. Linearisierung bei $x_s = (0, 0)$ ergibt die lineare Differentialgleichung auf dem Phasenraum \mathbb{R}^2

$$\dot{y} = Ay \quad \text{mit} \quad A = Df(x_s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese besitzt mit der Bezeichnung $y = (q, p)$ die Lösung

$$q(t) = q_0 \cos t + p_0 \sin t \quad , \quad p(t) = -q_0 \sin t + p_0 \cos t, \quad (2.4)$$

mit der Periode 2π .

Sind diese Lösungen für Anfangsbedingungen (q_0, p_0) in der Nähe der Ruhelage $x_s = (0, 0)$ eine gute Näherung an die Lösungen von (2.3)?

Um dies zu untersuchen, stellen wir fest, dass die so genannte *Hamilton-Funktion*³ von (2.3)

$$H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad H(\varphi, v) = \frac{1}{2}v^2 - \cos \varphi$$

entlang der Lösungskurven ihren Wert nicht ändert:

$$\frac{d}{dt}H(\varphi(t), v(t)) = v\dot{v} + \sin \varphi \dot{\varphi} = -v \sin \varphi + v \sin \varphi = 0.$$

Damit fixieren die Niveaulinien von H im Phasenraum \mathbb{R}^2 auch schon die Orbits der DGL (siehe Abb. 2.1). Da x_s Minimalstelle von H ist, und die Hessesche Hess $H(x_s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ positiv definit ist, sind diese Niveauflächen $H^{-1}(H(x_0))$ für x_0 nahe bei x_s näherungsweise von der Form eines Kreises mit Radius $\|x_0\|$, also nahe bei dem Orbit (2.4) der Linearisierung.

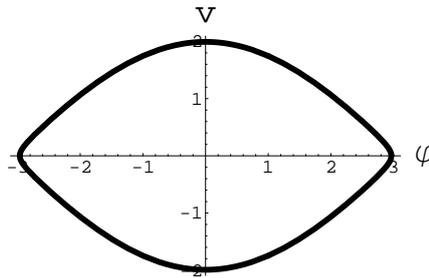


Abbildung 2.1: Niveaueurve für die Energie der oberen Ruhelage des Pendels

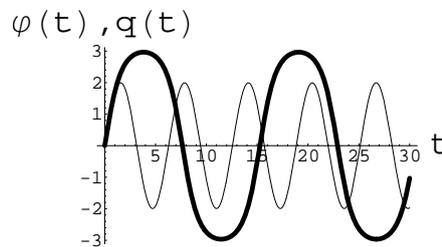


Abbildung 2.2: Pendelausschlag als Funktion der Zeit und Linearisierung

Damit bleibt insbesondere die Lösung von (2.3) für alle Zeiten in der Nähe von x_s . Die Schwingungsdauer des Pendels ist aber größer als die Periode 2π der Lösung (2.4) der linearen DGL, sodass die beiden Lösungen nach einiger Zeit nicht mehr synchron sind (siehe Abb. 2.2).

2.2 Stabilitätsbegriffe für Gleichgewichtslagen

Anschaulich wird man eine Gleichgewichtslage x_s der DGL $\dot{x} = f(x)$ dann stabil nennen, wenn benachbarte Lösungen nicht von x_s wegstreben. Diese Vorstellung muss natürlich noch präzisiert werden, ihre praktischen Implikationen sind aber offensichtlich.

2.4 Beispiel In vielen technischen Anwendungen ist man daran interessiert, das System in eine Gleichgewichtslage zu bringen. Man kann das aber natürlich nur bis auf einen gewissen Fehler erreichen.

³Physikalisch ist $H(\varphi, v)$ die Gesamtenergie des Pendels mit Winkel φ und Winkelgeschwindigkeit v

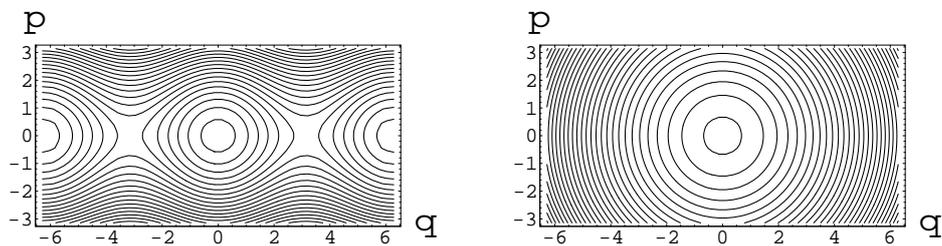


Abbildung 2.3: Orbits der Pendelgleichung (links) und ihrer Linearisierung an der unteren Gleichgewichtslage (rechts)

Ist nun die Gleichgewichtslage stabil, dann ist auch in Zukunft das System nahe bei der Gleichgewichtslage, sonst im Allgemeinen nicht.

Das Pendel ist in diesem Sinn in seiner unteren Gleichgewichtslage stabil, in seiner oberen nicht.

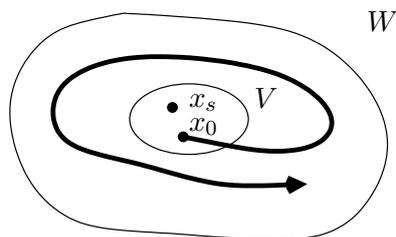
Ist das Pendel ungedämpft, so wird es für alle Zeiten kleine Schwingungen um die Gleichgewichtslage vollführen; ist es gedämpft, dann wird es sich der Gleichgewichtslage immer mehr annähern. Entsprechend unterscheiden wir auch zwei Stabilitätsbegriffe.

2.5 Definition • Die Gleichgewichtslage $x_s \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ der DGL

$$\dot{x} = f(x) \quad , \quad f \in C^1(U, \mathbb{R}^n) \quad (2.5)$$

heißt **liapunov-stabil**, falls für jede Umgebung $W \subseteq U$ von x_s eine Umgebung $V \subseteq W$ von x_s existiert, sodass das AWP (1.2) für alle Anfangswerte $x_0 \in V$ und alle Zeiten $t \geq 0$ lösbar ist und die Lösungen φ in W bleiben ($\varphi([0, \infty)) \subseteq W$).

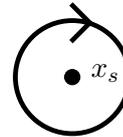
• Andernfalls heißt sie **instabil**.



2.6 Beispiel 1. Die untere Gleichgewichtslage $x_s := (\varphi, v) = (0, 0)$ des planaren Pendels

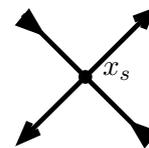
$$\begin{cases} \dot{\varphi} = v \\ \dot{v} = -\sin \varphi \end{cases}$$

ist liapunov-stabil, denn jede Umgebung W von x_s enthält eine Umgebung V der Form $V = H^{-1}((-\infty, E))$, wobei $H(v, \varphi) = \frac{v^2}{2} - \cos \varphi$ die Hamilton-Funktion ist.



V ist aber flussinvariant, denn die Energie H ist, wie wir gesehen haben, auf den Lösungskurven konstant (lässt man Winkel $\varphi \in \mathbb{R}$ zu, muss man statt $H^{-1}((-\infty, E))$ die x_s enthaltende Zusammenhangskomponente V dieser nicht beschränkten Menge verwenden).

2. Die obere Gleichgewichtslage $x_s := (\varphi, v) = (\pi, 0)$ ist *nicht* liapunov-stabil, denn $H(x_s) = 1$, und $E^{-1}(1)$ enthält von x_s verschiedene, stabil, aber diesem beliebig nahe Phasenraumpunkte, die von x_s wegstreben.



Der Begriff der Liapunov-Stabilität ist vergleichsweise schwach, denn er setzt ja keine Annäherung an die Gleichgewichtslage voraus. So ist der untere Gleichgewichtspunkt des Pendelbeispiels auch für negative Zeiten, also bei Richtungsumkehr des Vektorfeldes, liapunov-stabil.

2.7 Definition Die Gleichgewichtslage x_s von (2.5) heißt **asymptotisch stabil**, wenn sie liapunov-stabil ist und eine Umgebung $V \subseteq U$ von x_s mit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_s \quad \text{für alle } x(0) \in V$$

existiert.

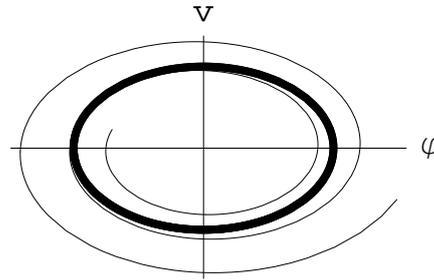
- 2.8 Beispiel** 1. Die untere Gleichgewichtslage $x_s = (0, 0)$ des Pendels ist *nicht* asymptotisch stabil, denn nur x_s selbst hat Energie $H(x_s) = -1$, alle Nachbarpunkte haben echt größere Energie, und diese bleibt erhalten.
2. Wirkt auf das Pendel eine geschwindigkeitsproportionale Reibung mit Proportionalitätskonstante $k > 0$, dann wird seine Bewegung durch die DGL

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = v \\ \dot{v} = -\sin \varphi - k \cdot v \end{cases}$$

beschrieben. In diesem Fall ist die untere Gleichgewichtslage sogar asymptotisch stabil. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(v(t), \varphi(t)) &= v(t) \cdot \dot{v}(t) + \sin(\varphi) \cdot \dot{\varphi} \\ &= -k(v(t))^2 \leq 0, \end{aligned}$$

was ja auch anschaulich zu erwarten ist. Man kann nun zeigen, dass mit der Zeit die Energie H tatsächlich gegen -1 geht, der Orbit also auf die untere Gleichgewichtslage zusteuert. In diesem Beispiel spielt H die Rolle einer *Liapunovfunktion*, d.h. einer entlang der Lösung streng monoton fallenden Phasenraumfunktion H .



2.3 Stabilitätskriterien für Gleichgewichtslagen

Das letzte Beispiel zeigt eine wichtige Beweisidee für asymptotische Stabilität. Man möchte ja Stabilitätsfragen auch für DGLn klären, deren Lösungen man nicht hinschreiben kann. Die Rolle der Funktion H bestand nun in der Tatsache, dass die Mengen $H^{-1}((-\infty, \varepsilon)) \subset U$ Umgebungen der Gleichgewichtslage waren, die wegen $\frac{dH}{dt} \leq 0$ nicht verlassen werden können. Die Größe von H ist ein Maß für den Abstand von der Gleichgewichtslage, und dieser wird immer kleiner. Unsere Strategie besteht nun darin, zunächst Kriterien für die Stabilität im linearen Fall zu entwickeln, um danach, soweit möglich, diese auf den nichtlinearen Fall mittels Linearisierung zu übertragen.

Der lineare Fall ist dabei ganz einfach:

2.9 Satz Gilt für die Eigenwerte $\lambda_i \in \mathbb{C}$ von $A \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$ $\text{Re}(\lambda_i) < 0$, dann ist die Gleichgewichtslage $0 \in \mathbb{R}^n$ der DGL $\dot{x} = Ax$ asymptotisch stabil.

Beweis:

1. Die Einträge der Matrixfunktion $t \mapsto \exp(At)$ sind Summen von λ_i -Quasipolynomen, also von der Form $\sum_i e^{\lambda_i t} p_i(t)$. Damit ist wegen $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ ihr $t \rightarrow \infty$ -Limes Null, also auch $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\exp(At)\| = 0$.
2. Da $\sup_{t \geq 0} \|\exp(At)\| < \infty$, ist die Gleichgewichtslage 0 liapunov-stabil. \square

Wir betrachten nun eine nicht notwendig lineare DGL auf $U \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\dot{x} = f(x) \quad , \quad f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$$

in einer Umgebung einer Gleichgewichtslage x_s . Von dieser können wir (durch Einführung verschobener Koordinaten $x - x_s$) o.B.d.A. annehmen, dass sie sich im Nullpunkt befindet.

Mit $A := Df(0)$ bezeichne

$$R \in C^1(U, \mathbb{R}^n) \quad , \quad R(x) := f(x) - Ax$$

die Abweichung des Vektorfeldes von seiner Linearisierung an der Gleichgewichtslage.

Wir wollen nun zeigen, dass die Lösungen der DGL in führender Ordnung durch die Linearisierung von f kontrolliert werden, soweit wir uns in der Nähe der Gleichgewichtslage befinden. Dazu benutzen wir das

2.10 Lemma $x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}R(x(s)) ds$

Beweis: Wir setzen die Lösung $x(t)$ des AWP $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_0$ in der Form

$$x(t) = e^{At}c(t) \quad \text{mit} \quad c(0) = x_0$$

an, und suchen eine Bestimmungsgleichung für den Vektor $c(t)$ (sog. *Variation der Konstanten*). Es gilt

$$\dot{x}(s) = Ae^{As}c(s) + e^{As}\dot{c}(s) = Ax(s) + e^{As}\dot{c}(s)$$

und

$$\dot{x}(s) = Ax(s) + R(x(s)),$$

also

$$e^{As}\dot{c}(s) = R(x(s)) \quad \text{oder} \quad \dot{c}(s) = e^{-As}R(x(s)).$$

Damit ist

$$c(t) = c(0) + \int_0^t \dot{c}(s) ds = x_0 + \int_0^t e^{-As}R(x(s)) ds$$

und

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}R(x(s)) ds.$$

□

Scheinbar nützt uns diese Identität nicht viel, denn auch auf der rechten Seite taucht $x(s)$, also die unbekannte Lösung des AWP auf.

Wir können aber die sogenannte Gronwall–Ungleichung auf diese Integralgleichung anwenden. Diese in der Differentialgleichungstheorie wichtige Abschätzung ähnelt Münchhausens Methode, sich an den eigenen Haaren aus dem Sumpf zu ziehen.

2.11 Lemma (Gronwall–Ungleichung) Für $f, g \in C^0([t_0, t_1], [0, \infty))$ gelte mit einem geeigneten $a \geq 0$ die Ungleichung

$$f(t) \leq a + \int_{t_0}^t f(s)g(s) ds \quad (t \in [t_0, t_1]).$$

Dann ist

$$f(t) \leq a \cdot \exp\left(\int_{t_0}^t g(s) ds\right) \quad (t \in [t_0, t_1]).$$

Beweis: • Ist $a > 0$, dann gilt für die rechte Seite $h(t) := a + \int_{t_0}^t f(s)g(s) ds$ der Voraussetzung $h(t) > 0$ und $h'(t) = f(t)g(t) \leq h(t)g(t)$, also $\frac{h'(t)}{h(t)} \leq g(t)$.

Integration ergibt $\ln\left(\frac{h(t)}{a}\right) \leq \int_{t_0}^t g(s) ds$, oder $h(t) \leq a \exp\left(\int_{t_0}^t g(s) ds\right)$, also die Behauptung.

• Ist $a = 0$, dann gelten Voraussetzung und Resultat für alle $\hat{a} := \varepsilon > 0$, also ist $f = 0$. \square

2.12 Bemerkung Man kann sich die Abschätzung leicht merken, wenn man Gleichheit annimmt. Die Integralgleichung

$$f(t) = a + \int_{t_0}^t f(s)g(s) ds$$

entspricht ja dem AWP $\dot{f} = f \cdot g$, $f(t_0) = a$ mit der Lösung $f(t) = a e^{\int_{t_0}^t g(s) ds}$.

2.13 Satz Eine Gleichgewichtslage $x_s \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ der DGL

$$\dot{x} = f(x) \quad , \quad f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$$

ist asymptotisch stabil, wenn für die Eigenwerte λ von $Df(x_s)$ gilt: $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$.

Beweis: • Wieder können wir durch eine Verschiebung $x_s = 0$ erreichen. Da $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ist, gehört eine Kugelumgebung vom positiven Radius \tilde{r} zu U .

• Für die Eigenwerte λ_i von $A := Df(x_s)$ gelte die Abschätzung $\operatorname{Re}(\lambda_i) < -\Lambda$, $\Lambda > 0$ geeignet. Dann gibt es ein $c > 0$, sodass gilt

$$\|e^{At}\| \leq c \cdot e^{-\Lambda t} \quad (t \geq 0).$$

Das ersieht man aus der Tatsache, dass die Einträge von e^{At} Summen von λ_i -Quasipolynomen $e^{\lambda_i t} p(t)$ sind und dass wegen $\operatorname{Re}(\lambda_i) + \Lambda < 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \exp((\lambda_i + \Lambda)t) p(t) = 0$$

ist.

• Nun existiert ein Radius $r \in (0, \tilde{r})$ mit

$$\|R(x)\| \leq \frac{\Lambda}{2c} \|x\| \quad , \quad \text{falls} \quad \|x\| \leq r, \quad (2.6)$$

denn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|R(x)\|}{\|x\|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|f(x) - Df(0) \cdot x\|}{\|x\|} = 0$.

- Wenn wir nun zeigen können, dass aus

$$\|x(0)\| \leq \varepsilon < \frac{r}{c}$$

folgt, dass für $t \geq 0$ gilt:

$$\|x(t)\| \leq c\varepsilon e^{-\Lambda t/2}, \quad (2.7)$$

dann haben wir den Satz bewiesen, denn für die rechte Seite von (2.7) gilt: $c\varepsilon e^{-\Lambda t/2} \leq c\varepsilon < r < \tilde{r}$, und für $t \rightarrow \infty$ strebt sie gegen Null.

Nun gilt nach Lemma 2.10: $x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}R(x(s)) ds$, woraus mit (2.6) die Ungleichung

$$\|x(t)\| \leq ce^{-\Lambda t}\|x_0\| + \int_0^t ce^{-\Lambda(t-s)}\frac{\Lambda}{2c}\|x(s)\| ds$$

folgt, soweit $\|x\| \leq r$.

Setzt man $F(t) := e^{\Lambda t}\|x(t)\|$, dann gilt

$$F(t) \leq \underbrace{c\|x_0\|}_{=:a} + \int_0^t \underbrace{\frac{\Lambda}{2}}_{=:g(s)} F(s) ds,$$

also nach dem Gronwall-Lemma 2.11

$$F(t) \leq c\|x_0\| \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^t \Lambda ds\right) \leq c\varepsilon e^{\frac{\Lambda}{2}t} \leq re^{\frac{\Lambda}{2}t}$$

oder $\|x(t)\| \leq re^{-\frac{\Lambda}{2}t}$. Die Lösungskurve bleibt also für alle positiven Zeiten in der Vollkugel $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}$ und konvergiert gegen Null. \square

2.14 Bemerkung Der Beweis lieferte zusätzlich die Aussage, dass alle $x \in U$ mit $\|x\| < \frac{r}{c}$ zu gegen die Gleichgewichtslage konvergierenden Orbits gehören, also in deren Einzugsbereich, dem so genannten *Bassin*, liegen.

Während ein hinreichendes Kriterium für das Vorliegen *asymptotischer Stabilität* die strikte Ungleichung $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ für die Eigenwerte λ_i der Jacobimatrix war, ist die Situation bezüglich der Liapunov-Stabilität komplizierter.

2.15 Satz *Besitzen die Eigenwerte λ_i von $A \in \operatorname{Mat}(n, \mathbb{R})$ Realteil $\operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0$, und ist im Fall $\operatorname{Re}(\lambda_i) = 0$ die geometrische Vielfachheit gleich der algebraischen, dann ist $0 \in \mathbb{R}^n$ liapunov-stabile Gleichgewichtslage der DGL $\dot{x} = Ax$.*

Beweis: • Aus der Jordan-Normalform $A = VJV^{-1}$ mit Jordan-Matrix J der Form

$$J = \begin{pmatrix} J_{r_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & J_{r_2}(\lambda_2) & \\ & & \ddots \\ 0 & & & J_{r_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}, \quad J_r(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & \ddots & \lambda \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \in \text{Mat}(r, \mathbb{C})$$

folgt mit

$$\exp(Jt) = \begin{pmatrix} \exp(J_{r_1}(\lambda_1)t) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(J_{r_k}(\lambda_k)t) \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

die Liapunov-Stabilität der Gleichgewichtslage aus

$$\|\exp(At)\| = \|V \exp(Jt) V^{-1}\| \leq \|V\| \|V^{-1}\| \|\exp(Jt)\|,$$

wenn für alle Jordanblöcke $J_{r_i}(\lambda_i)$ von J der Ursprung $0 \in \mathbb{C}^{r_i}$ liapunov-stabile Gleichgewichtslage der DGL $\dot{y} = J_{r_i}(\lambda_i)y$ ist.

- Aus $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ folgt sogar asymptotische Stabilität.
- Da für einen komplexen Eigenwert λ von A mit $\text{Re}(\lambda) = 0$ die geometrische Vielfachheit nach Voraussetzung gleich der algebraischen ist, sind die ihm zugeordneten Jordanblöcke alle eindimensional: $J_{r_i}(\lambda_i) = \lambda$. Damit ist in diesem Fall

$$\|\exp(J_{r_i}(\lambda_i)t)\| = |\cos(\text{Im}(\lambda)t) + i \sin(\text{Im}(\lambda)t)| = 1. \quad \square$$

2.16 Bemerkung Dass man die Gleichheit von geometrischer und algebraischer Vielfachheit fordern muss, sieht man schon am Beispiel von

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Leider kann man nicht wie im Fall der asymptotischen Stabilität vom linearen auf den nicht linearen Fall folgern.

2.17 Beispiel DGL $\dot{x} = \alpha x + \beta x^3$ mit Parametern $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Die Null ist Gleichgewichtslage der DGL und ihrer Linearisierung $\dot{y} = \alpha y$.

	linearisierte Gleichung	nicht lineare Gleichung
$\alpha < 0$	asymptotisch stabil	asymptotisch stabil
$\alpha > 0$	instabil	instabil
$\alpha = 0$	liapunov-stabil	$\left\{ \begin{array}{l} \text{asymptotisch stabil für } \beta < 0 \\ \text{stabil für } \beta = 0 \\ \text{instabil für } \beta > 0. \end{array} \right.$

2.18 Bemerkung Anschaulich gesprochen kann asymptotische Stabilität nur vorliegen, wenn der Fluss in der Nähe der Gleichgewichtslage das Phasenraumvolumen verkleinert. Daher kann man in physikalischen Situationen ohne Reibungseffekte höchstens Liapunov–Stabilität erwarten. Das hat z.B. zur Folge, dass die Frage der Stabilität des Sonnensystems sehr subtil sind.

3 Einführung in die Topologie

Die *Topologie* ist das Teilgebiet der Mathematik, das sich mit Begriffen wie Offenheit, Abgeschlossenheit und Kompaktheit von Mengen, Konvergenz von Folgen und Stetigkeit von Funktionen befasst.

3.1 Topologische Räume

3.1 Definition Ein topologischer Raum ist ein Paar (M, \mathcal{O}) , bestehend aus einer Menge M und einer Familie \mathcal{O} von Teilmengen von M (genannt "offene Mengen"), sodass gilt:

1. Beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen.
2. Der Durchschnitt von je zwei offenen Mengen ist offen.
3. \emptyset und M sind offen.

Man nennt \mathcal{O} auch die **Topologie** von (M, \mathcal{O}) .

Die für uns wichtigsten Beispiele topologischer Räume sind die metrischen Räume:

3.2 Definition Für einen metrischen Raum (M, d) heißt

$$\mathcal{O} := \mathcal{O}(d) := \{V \subseteq M \mid \forall x \in V \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subseteq V\} \quad (3.1)$$

(mit $U_\varepsilon(x) := \{y \in M \mid d(y, x) < \varepsilon\}$) die (metrische) **Topologie von** (M, d) .

3.3 Satz $(M, \mathcal{O}(d))$ ist ein topologischer Raum, und die $U_\varepsilon(x)$ sind offen.

Beweis: • $(M, \mathcal{O}(d))$ ist ein topologischer Raum:

1. Ist $x \in \bigcup_{i \in I} V_i$ mit $V_i \in \mathcal{O}$, dann gibt es ein $j \in I$ mit $x \in V_j$, und ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subseteq V_j \subseteq \bigcup_{i \in I} V_i$.
 2. Sei $x \in V_1 \cap V_2$ mit $V_1, V_2 \in \mathcal{O}$, dann gibt es $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ mit $U_{\varepsilon_j}(x) \subseteq V_j$, $j = 1, 2$. Daher ist für $\varepsilon := \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0$ $U_\varepsilon(x) \subseteq V_1 \cap V_2$.
 3. $\emptyset \in \mathcal{O}$, denn dann ist die Bedingung in (3.1) leer. Ebenso gilt $M \in \mathcal{O}$, denn dann ist die Bedingung in (3.1) für alle $\varepsilon > 0$ erfüllt.
- Die $U_\varepsilon(x)$ sind offen: Für $y \in U_\varepsilon(x)$ ist $\varepsilon' := d(x, y) < \varepsilon$. Wählen wir $\delta := \varepsilon - \varepsilon' > 0$, dann ist wegen der Dreiecksungleichung $U_\delta(y) \subseteq U_\varepsilon(x)$. \square

Oft erzeugen verschiedene Metriken die gleiche Topologie. Insbesondere gilt dies für Metriken auf Vektorräumen, die von äquivalenten Normen abstammen.

Auf jeder Menge M lassen sich Topologien finden:

3.4 Beispiel 1. Die *diskrete Topologie* $\mathcal{O} := 2^M$ aller Teilmengen.

2. Die *indiskrete Topologie* $\mathcal{O} := \{M, \emptyset\}$.

Beispielsweise erzeugt die in der Informatik beliebte Hamming-Metrik auf $M := B^n$, $B := \{0, 1\}$

$$d : B^n \times B^n \rightarrow \mathbb{N}_0, d((b_1, \dots, b_n), (c_1, \dots, c_n)) := \left| \left\{ i \in \{1, \dots, n\} \mid b_i \neq c_i \right\} \right|$$

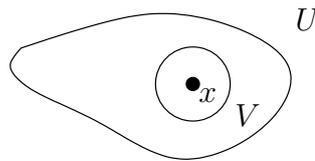
gemäß Def. 3.2 die diskrete Topologie.

Die indiskrete Topologie taucht fast nur in Gegenbeispielen auf.

Wir erweitern unseren topologischen Sprachschatz, indem wir die uns vom Raum \mathbb{R} bekannten Begriffsbildungen verallgemeinern:

3.5 Definition • $A \subseteq M$ heißt **abgeschlossen**, wenn $M \setminus A \in \mathcal{O}$.

- $U \subseteq M$ heißt **Umgebung** von $x \in M$, wenn es eine offene Menge V mit $x \in V \subseteq U$ gibt.



- Für $A \subseteq M$ und $x \in M$ heißt x **innerer** bzw. **äußerer** bzw. **Randpunkt** von A , je nachdem, ob A oder $M \setminus A$ oder keines von beiden Umgebung von x ist.

- $\overset{\circ}{A} := \{x \in M \mid x \text{ ist innerer Punkt von } A\}$ heißt das **Innere** von A .
- $\bar{A} := \{x \in M \mid x \text{ nicht äußerer Punkt von } A\}$ heißt **abgeschlossene Hülle** von A .
- $\partial A := \{x \in M \mid x \text{ Randpunkt von } A\}$ heißt **Rand** von A .

- $x \in M$ heißt **Häufungspunkt** der Teilmenge $A \subseteq M$, wenn für keine Umgebung U von x die Menge $U \cap (A \setminus \{x\})$ leer ist.

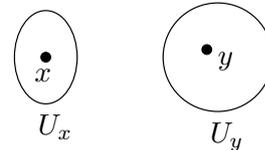
3.6 Beispiele Für $A := (0, 1] \subset \mathbb{R}$ ist $\overset{\circ}{A} = (0, 1)$, $\bar{A} = [0, 1]$ und $\partial A = \{0, 1\}$. \mathbb{Z} besitzt keine Häufungspunkte.

3.7 Bemerkungen 1. $\overset{\circ}{A} \subseteq A \subseteq \bar{A} = \overset{\circ}{A} \cup \partial A$.

2. Eine Menge ist genau dann offen, wenn sie mit ihrem Inneren übereinstimmt.

3. Für alle $A \subseteq M$ ist $\overset{\circ}{A}$ offen und \bar{A} sowie ∂A abgeschlossen.
4. Die Menge der Häufungspunkte von A ist eine Teilmenge von \bar{A} .

3.8 Definition Ein topologischer Raum heißt **Hausdorff–Raum**, wenn je zwei verschiedene Punkte x, y disjunkte Umgebungen U_x, U_y besitzen.



3.9 Bemerkungen 1. Metrische Räume sind hausdorffsch, denn für $x \neq y$ ist $\varepsilon := d(x, y)/2 > 0$ und $U_\varepsilon(x) \cap U_\varepsilon(y) = \emptyset$.

Daher werden die meisten uns begegnenden Räume die Hausdorff-Eigenschaft besitzen.

2. Ein mehr als einpunktiger Raum mit indiskreter Topologie ist nicht hausdorffsch.

3.10 Definition In einem topologischen Raum (X, \mathcal{O}) heißt

- $x \in M$ **Häufungspunkt** einer Folge $a : \mathbb{N} \rightarrow M$, wenn für jede Umgebung U von x und jedes $N \in \mathbb{N}$ ein Folgenglied $a_n \equiv a(n) \in U$ mit $n \geq N$ existiert.
- $x \in M$ heißt **Grenzwert** oder **Limes** einer Folge $a : \mathbb{N} \rightarrow M$, wenn für jede Umgebung U von x ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \in U$ für alle $n \geq N$ existiert.

3.11 Bemerkungen 1. Man muss also zwischen den Häufungspunkt einer Folge und den Häufungspunkten der Menge $a(\mathbb{N}) \subseteq M$ unterscheiden. So besitzt die konstante Folge mit Wert $a_n = x$ den Häufungspunkt x , nicht aber die Menge $\{x\}$.

2. In einem Hausdorff–Raum besitzt jede Folge höchstens einen Grenzwert.

Oft beschreibt man eine Topologie \mathcal{O} , indem man eine so genannte Basis von \mathcal{O} angibt.

3.12 Definition Sei (M, \mathcal{O}) ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $B \subseteq \mathcal{O}$ offener Mengen heißt **Basis der Topologie**, wenn jedes $V \in \mathcal{O}$ Vereinigung von Mengen aus B ist.

3.13 Beispiel 1. Die Menge $B := \{(a, b) \mid a < b\}$ der offenen beschränkten Intervalle bildet eine Basis der (metrischen) Topologie von \mathbb{R} .

2. Allgemeiner bilden nach Definition 3.2 die ε –Umgebungen eine Basis $B := \{U_\varepsilon(x) \mid x \in M, \varepsilon > 0\}$ der Topologie $\mathcal{O}(d)$ des metrischen Raums (M, d) .

Aus topologischen Räumen kann man auf verschiedene Weise neue topologische Räume konstruieren, z.B. durch Produktbildung bzw. Betrachtung von Teilmengen.

3.14 Definition $(X^{(i)}, \mathcal{O}^{(i)})$, $i = 1, \dots, n$ seien topologische Räume. Dann ist auf ihrem kartesischen Produkt $X := X^{(1)} \times \dots \times X^{(n)}$ die **Produkttopologie** \mathcal{O} gegeben durch

$$\mathcal{O} := \left\{ W \subseteq X \mid \forall (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in W \exists U^{(i)} \in \mathcal{O}^{(i)} \text{ mit } x^{(i)} \in U^{(i)} \right. \\ \left. \text{und } U^{(1)} \times \dots \times U^{(n)} \subseteq W \right\}.$$

3.15 Satz Die Produkttopologie ist eine Topologie auf X .

Beweis: Hausaufgabe. □

Die in X offenen Mengen W müssen also "offene Kästchen" um jeden ihrer Punkte enthalten.

3.16 Bemerkungen 1. Die Bildung der Produkttopologie ist eine assoziative Operation, es genügt also, je zwei Faktoren zu betrachten. Produkte von Basen bilden eine Basis der Produkttopologie.

Beispielsweise bilden die offenen Quader

$$(a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n) \subset \mathbb{R}^n$$

eine Basis der Produkttopologie des \mathbb{R}^n .

2. Für metrische Räume (X, d_X) und (Y, d_Y) sind auf dem kartesischen Produkt $Z := X \times Y$

$$d_i : Z \times Z \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{für } z_j = (x_j, y_j)$$

$$d_1(z_1, z_2) := d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2),$$

$$d_2(z_1, z_2) := \sqrt{d_X(x_1, x_2)^2 + d_Y(y_1, y_2)^2}$$

und

$$d_\infty(z_1, z_2) := \max(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2))$$

Metriken. Sie erzeugen aber alle die gleiche Topologie $\mathcal{O}(d_i)$, die Produkttopologie.

3.17 Definition Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$. Dann heißt (Y, \mathcal{O}_Y) mit $\mathcal{O}_Y := \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{O}\}$ **Teilraum von (X, \mathcal{O}) und \mathcal{O}_Y die induzierte Topologie oder Spurtopologie.**

Im Allgemeinen enthält \mathcal{O}_Y also mehr Mengen als die schon in X offenen Mengen $U \subseteq Y, U \in \mathcal{O}$.

3.18 Beispiel $X := \mathbb{R}$ mit der von den offenen Intervallen erzeugten Topologie \mathcal{O} , $Y := (0, 1]$. Dann ist $(\frac{1}{2}, 1] \subseteq Y$ offen und entsprechend $(0, \frac{1}{2}] \subseteq Y$ abgeschlossen in Y (!).

Analog definiert man auf Teilmengen $Y \subseteq X$ metrischer Räume (X, d) eine $\mathcal{O}(d)_Y = \mathcal{O}(d_Y)$ Metrik d_Y durch Restriktion, und $\mathcal{O}(d)_Y = \mathcal{O}(d_Y)$.

Oft sind solche Teilräume *Niveaumengen* von Funktionen $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

3.19 Beispiel 1. Die n -Sphäre $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$.

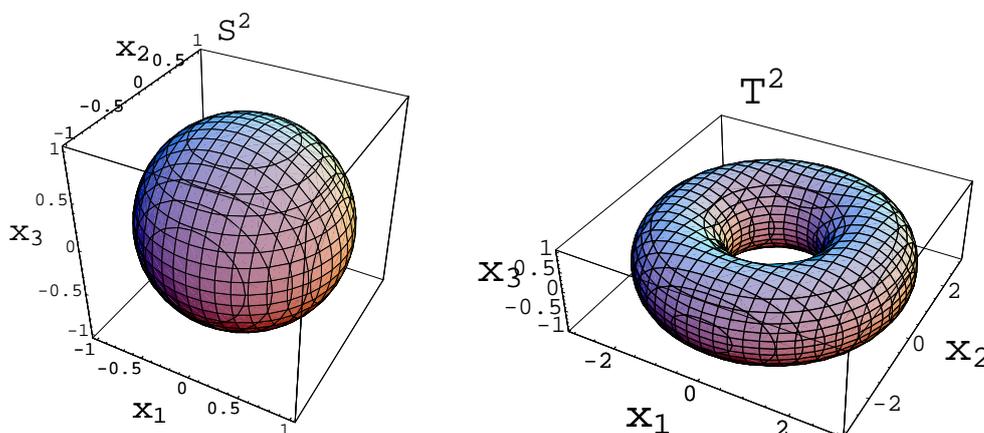


Abbildung 3.1: 2-Sphäre S^2 (links) und 2-Torus \mathbb{T}^2 (rechts)

2. Auch der 2-Torus $\mathbb{T}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$, eine Fläche mit einem Henkel, lässt sich als Niveaumenge darstellen: $\mathbb{T}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid F(x) = 1\}$ mit $F(x) = (\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 2)^2 + x_3^2$, siehe Abb. 3.1.
3. Dagegen ist die Niveaumenge $\{x \in \mathbb{R}^3, F(x) = 1/4\}$ von $F(x) = (4x_1^2(1 - x_1^2) - x_2^2)^2 + x_3^2$ eine Fläche mit 2 Henkeln, siehe Abb. 3.2.

Etwas vornehmer heißt die Henkelzahl der Flächen ihr *Geschlecht*. Sie erlaubt diese topologischen Räume voneinander zu unterscheiden. Die *algebraische* Topologie befaßt sich mit solchen den topologischen Räumen zugeordneten sog. *Invarianten*.

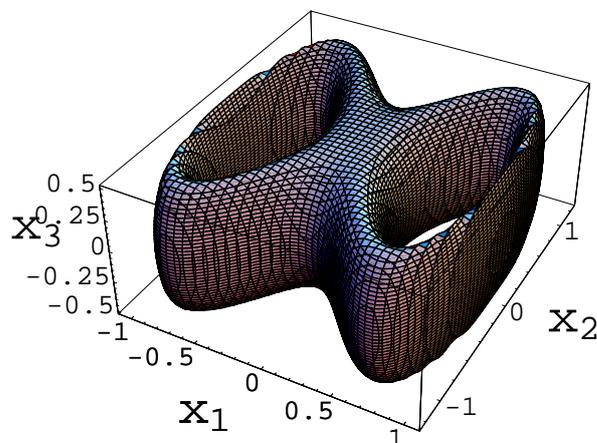


Abbildung 3.2: Fläche mit 2 Henkeln

3.2 Stetigkeit

Eine reelle Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wurde *stetig bei* $x \in \mathbb{R}$ genannt, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$f(U_\delta(x)) \subseteq U_\varepsilon(f(x))$$

existiert, und *stetig*, wenn dies für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Ganz analog wurde die $\varepsilon - \delta$ -Stetigkeit einer Abbildung zwischen metrischen Räumen definiert. Diesen Stetigkeitsbegriff verallgemeinert man folgendermaßen:

3.20 Definition • Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen heißt **stetig bei** $x \in X$, wenn es zu jeder Umgebung V von $f(x)$ eine Umgebung U von x mit $f(U) \subseteq V$ gibt.

- f heißt **stetig**, wenn sie bei jedem Punkt $x \in X$ stetig ist.
- Eine bijektive stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **Homöomorphismus**, wenn auch $f^{-1} : Y \rightarrow X$ stetig ist.
- X und Y heißen **homöomorph**, wenn ein Homöomorphismus $f : X \rightarrow Y$ existiert.

3.21 Bemerkung Analog zum Englischen (*homeomorphism*) benutzt man auch das Wort Homeomorphismus := Homöomorphismus \neq Homomorphismus!

3.22 Satz Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen metrischen Räumen ist genau dann stetig im Sinn von Definition 3.20, wenn sie $\varepsilon - \delta$ -stetig ist.

Beweis: Hausaufgabe. □

3.23 Satz *Es sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen. Dann ist f genau dann stetig, wenn die Urbilder $f^{-1}(V)$ offener Mengen immer offen sind.*

Beweis:

- Es sei $f : X \rightarrow Y$ stetig und $V \subseteq Y$ offen. Nach Definition existiert für jedes $x \in U := f^{-1}(V)$ eine in U liegende offene Umgebung U_x von x . Deren Vereinigung $\cup_{x \in U} U_x$ ist offen und gleich U .
- Falls aus der Offenheit von $\tilde{V} \subseteq Y$ die Offenheit von $f^{-1}(\tilde{V}) \subseteq X$ folgt, gibt es für alle $x \in X$ und Umgebungen V von $f(x)$ eine offene Umgebung $\tilde{V} \subseteq V$ von $f(x)$, und für $\tilde{U} := f^{-1}(\tilde{V})$ gilt: \tilde{U} ist eine offene Umgebung von x mit $f(\tilde{U}) \subseteq V$. □

Damit bildet ein Homöomorphismus $f : X \rightarrow Y$ durch

$$\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_Y \quad , \quad U \mapsto f(U)$$

die Topologie \mathcal{O}_X bijektiv auf \mathcal{O}_Y ab. Homöomorphismen sind daher die Isomorphismen der Topologie!

Es gibt noch einen zweiten Stetigkeitsbegriff:

3.24 Definition • Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen heißt **folgenstetig bei** $x \in X$, wenn für jede gegen x konvergente Folge $a : \mathbb{N} \rightarrow X$ die Bildfolge $f \circ a : \mathbb{N} \rightarrow Y$ gegen $f(x)$ konvergiert.

- f heißt **folgenstetig**, wenn sie bei jedem Punkt $x \in X$ folgenstetig ist.

Soweit wir nur Topologien betrachten, die von Metriken kommen, gilt für uns nach Satz 9.4 der *Analysis I*

”stetig = folgenstetig”.

Allgemein gilt aber auf *topologischen* Räumen nur ”stetig \Rightarrow folgenstetig”.

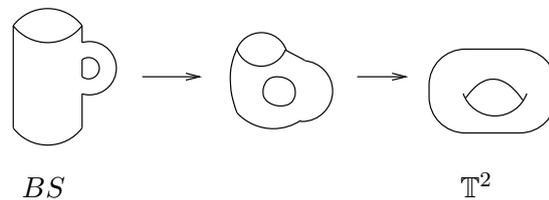
3.25 Beispiel 1. Für $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1})$ mit $\lambda_i > 0$ sei

$$E_\lambda := \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} (x_i/\lambda_i)^2 = 1 \right\}$$

das Ellipsoid mit den Hauptachsen der Länge λ_i .

Dann ist $f : E_\lambda \rightarrow S^n$, $x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$ ein Homeomorphismus.

2. Ähnlich ist die Oberfläche eines Bierseidels zum 2-Torus \mathbb{T}^2 aus Beispiel 3.19 homeomorph:



3. Es lässt sich dagegen zeigen, dass S^2 und \mathbb{T}^2 nicht homeomorph sind. Anschaulich liegt das daran, dass der Torus \mathbb{T}^2 einen Henkel hat, die Sphäre S^2 aber nicht.

3.26 Satz Sind $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ stetig, so auch $g \circ f : X \rightarrow Z$.

Beweis: Nach Satz 3.23 müssen wir nachprüfen, dass für alle offenen $W \subseteq Z$ auch $U := (g \circ f)^{-1}(W) \subseteq X$ offen ist. Wegen der Stetigkeit von g ist $V := g^{-1}(W) \subseteq Y$ offen, wegen der Stetigkeit von f auch $U = f^{-1}(V)$. \square

3.27 Bemerkung In der *Funktionalanalysis*, also dem Gebiet der Mathematik, in dem Lineare Algebra und Analysis sich kombinieren, betrachtet man sog. *topologische Vektorräume*, d.h. Vektorräume mit einer Topologie, die mit Addition und Skalarmultiplikation verträglich ist. Während nun endliche dimensionale Vektorräume über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} die Produkttopologie des \mathbb{K}^n tragen, kommen für unendlich dimensionale Vektorräume V oft verschiedene Topologien in Betracht. Oft sind diese Topologien metrische Topologien $\mathcal{O}(d)$ der von einer Norm $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ erzeugten Metrik d . In dieser Topologie ist die Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ immer stetig.

3.28 Satz Eine lineare Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen normierten Vektorräumen $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ist genau dann stetig, wenn sie lipschitzstetig ist, d.h. für ein $L > 0$ gilt

$$\|f(x)\|_Y \leq L \cdot \|x\|_X \quad (x \in X). \quad (3.2)$$

Beweis:

- Nach Satz 8.5 der *Analysis II* sind lipschitzstetige Abbildungen zwischen metrischen Räumen stetig.
- Wegen $\|f(x_1) - f(x_2)\|_Y = \|f(x)\|_Y$ mit $x := x_1 - x_2$ reicht es aus, die L -Stetigkeit bei der Null zu überprüfen. Ist f stetig, dann gibt es zu $\varepsilon := 1$ ein $\delta > 0$ mit

$$\|f(x)\|_Y \leq 1 \quad (\|x\|_X \leq \delta).$$

Setze $L := 1/\delta$. Dann folgt aus der Linearität von f für $x \neq 0$ und $\hat{x} := \delta x / \|x\|_X$

$$\|f(x)\|_Y = \left\| f(L\|x\|_X \hat{x}) \right\|_Y = \left\| L\|x\|_X f(\hat{x}) \right\|_Y = L\|x\|_X \|f(\hat{x})\|_Y \leq L\|x\|_X,$$

während für $x = 0$ ebenfalls (3.2) folgt. □

Ist die lineare Abbildung $f : X \rightarrow Y$ stetig, dann definiert man analog zur Matrixnorm die *Operatornorm* von f als

$$\|f\| := \sup_{\|x\|_X=1} \|f(x)\|_Y. \quad (3.3)$$

Diese läßt sich wieder grob als maximaler Streckungsfaktor eines Vektors unter der linearen Abbildung interpretieren, wobei das Supremum in (3.3) nicht angenommen werden muss.

Wie im nächsten Abschnitt gezeigt wird, sind lineare Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ immer stetig, falls $\dim(X) < \infty$.

3.29 Beispiel

Es sei $X := C^1([0, 1], \mathbb{R}) := \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig differenzierbar}\},$

und

$$Y := C([0, 1], \mathbb{R}),$$

beide versehen mit der Supremumsnorm. Dann ist die lineare Abbildung

$$D : X \rightarrow Y \quad , \quad f \mapsto f'$$

nach Satz 3.28 *nicht stetig*, denn zwar besitzt $f_n \in X$, $f_n(x) := x^n$ die Norm $\|f_n\| = |f_n(1)| = 1$, aber wegen $Df_n = nf_{n-1}$ ist $\|Df_n\| = n$ ($n \in \mathbb{N}$).

3.3 Kompaktheit

In dem (empfehlenswerten) Topologiebuch [Ja] von Klaus Jänich beginnt das entsprechende Kapitel mit dem Ausruf: "Ah, Kompaktheit! Eine wundervolle Eigenschaft!"

In Kapitel 9.3 der *Analysis I* wurde $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt genannt, wenn A beschränkt und abgeschlossen ist.

Der Prototyp eines kompakten Raumes ist daher das abgeschlossene Intervall $[a, b]$, und wir wissen schon, dass darin jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt $x \in [a, b]$ hat. Das ist eine 'wundervolle Eigenschaft', denn eine geeignete Teilfolge konvergiert dann gegen x .

Dagegen ist \mathbb{R} nicht kompakt, und z.B. die Folge $(x_n := n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt keinen Häufungspunkt.

In topologischen Räumen definieren wir Kompaktheit ganz anders und zeigen anschließend, dass im Fall des \mathbb{R}^n die Definitionen übereinstimmen.

3.30 Definition • Eine Teilmenge X eines topologischen Raumes (M, \mathcal{O}) heißt **kompakt**, wenn jede **offene Überdeckung**, d.h. jede Familie $(V_i)_{i \in I}$ mit $V_i \in \mathcal{O}$ und $X \subseteq \bigcup_{i \in I} V_i$, eine **endliche Teilüberdeckung**

$$X \subseteq V_{j_1} \cup \dots \cup V_{j_n} \quad \text{mit } j_1, \dots, j_n \in I$$

besitzt.

- X heißt **folgenkompakt**, wenn jede Folge $a : \mathbb{N} \rightarrow X$ eine gegen ein $x \in X$ konvergente Teilfolge besitzt.

3.31 Beispiel $X := (0, 1] \subset \mathbb{R}$ ist nicht kompakt, denn mit $V_i := (\frac{1}{i}, 2)$ ($i \in \mathbb{N}$) ist auch $U_i := V_i \cap X = (\frac{1}{i}, 1]$ in X offen. Die Familie $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ist eine offene Überdeckung von X . Gäbe es aber eine endliche Teilüberdeckung $X = U_{j_1} \cup \dots \cup U_{j_n}$, dann wäre mit $j := \max(j_1, \dots, j_n)$ der Punkt $\frac{1}{j} \in X$. Er ist aber in keinem U_{j_i} . Widerspruch!

Natürlich *existieren* für jede Teilmenge X eines topologischen Raumes M immer endliche offene Überdeckungen, z.B. die einelementige bestehend aus M .

Es gibt topologische Räume, die kompakt, aber nicht folgenkompakt sind und solche, in denen das Umgekehrte gilt. Aber:

3.32 Satz Ein metrischer Raum (M, d) ist genau dann kompakt, wenn er folgenkompakt ist.

Beweis: In beiden Richtungen führen wir Widerspruchsbeweise:

1. (M, d) sei kompakt. Wir nehmen nun die Existenz einer Folge $a : \mathbb{N} \rightarrow M$ ohne konvergente Teilfolge an.

Dann existiert für jeden Punkt $x \in M$ eine Umgebung V_x , die nur von endlich vielen Folgengliedern getroffen wird. (Warum? Andernfalls existierte ja ein Punkt $x \in M$, dessen Umgebungen $U_{1/n}(x)$ ($n \in \mathbb{N}$) alle von unendlich vielen Folgengliedern getroffen würden. Dann könnten wir eine gegen x konvergente Teilfolge auswählen).

Nach Voraussetzung besitzt aber die offene Überdeckung $(V_x)_{x \in M}$ eine endliche Teilüberdeckung, und damit die Folge nur endlich viele Glieder. Widerspruch!

2. (M, d) sei folgenkompakt, aber nicht kompakt. Es existiert also eine Überdeckung $(V_i)_{i \in I}$ von M ohne endliche Teilüberdeckung.

Für jeden Punkt $x \in M$ und $J(x) := \{i \in I \mid x \in V_i\}$ setzen wir

$$R(x, i) := \min(\sup\{r > 0 \mid U_r(x) \subseteq V_i\}, 1) \quad (i \in J(x)),$$

sodass für diese Radien also $U_{R(x,i)}(x) \subseteq V_i$ gilt.

Als Nächstes wählen wir für jedes $x \in M$ eine Umgebung $V_{j(x)}$ von x mit

$$j(x) \in J(x) \quad \text{so dass} \quad R(x, j(x)) \geq \frac{1}{2} \sup_{i \in J(x)} R(x, i). \quad (3.4)$$

Anschließend konstruieren wir induktiv eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in M mit

$$x_{n+1} \notin V_{j(x_1)} \cup \dots \cup V_{j(x_n)} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (3.5)$$

(da nach Annahme keine endliche Teilüberdeckung existiert, ist dies möglich).

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt nach Annahme eine konvergente Teilfolge, und wir nehmen o.B.d.A. an, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ selbst gegen $a \in M$ konvergiert, also $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, a) = 0$.

Damit muss wegen (3.5) der Limesradius $\lim_{n \rightarrow \infty} R(x_n, j(x_n)) = 0$ sein.

Andererseits ist $R(a, j(a)) > 0$, es gibt also ein $N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, a) < \frac{1}{4}R(a, j(a))$ für alle $n \geq N$. Damit ist nicht nur $x_n \in U_{R(a, j(a))}(a)$, sondern sogar die Kugel $U_{\frac{1}{4}R(a, j(a))}(x_n)$ um x_n mit n -unabhängigem Radius in

$U_{R(a, j(a))}(a)$ enthalten. Wir haben also für ein $n \in \mathbb{N}$ die Bedingung (3.4) verletzt. Widerspruch! \square

3.33 Korollar *Kompakte metrische Räume sind vollständig.*

Beweis: Denn konvergiert eine Teilfolge einer Cauchy-Folge, so auch die Cauchy-Folge selbst. \square

3.34 Beispiel $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ ist nicht vollständig (da $1/\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$), also nicht kompakt!

Satz 3.32 ermöglicht uns zu zeigen, dass die Kompaktheitsdefinition der *Analysis I* Spezialfall unserer jetzigen Definition ist.

3.35 Satz (Heine–Borel) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt im Sinne von Definition 3.30, wenn A beschränkt und abgeschlossen ist.

Beweis:

- Falls A beschränkt und abgeschlossen ist, ist A nach dem Satz von Bolzano–Weierstraß (Satz 7.41 der *Analysis I*) folgenkompakt und damit nach Satz 3.32 kompakt.
- Ist A unbeschränkt, dann existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \infty$. Diese Folge divergiert also, und A ist nicht (folgen)kompakt.
- Gleiches gilt, falls A nicht abgeschlossen ist, also einen nicht in A liegenden Häufungspunkt besitzt. \square

Man könnte nun denken, dass allgemein Abgeschlossenheit und Beschränktheit⁴ einer Teilmenge eines metrischen Raumes ihre Kompaktheit impliziert. Das gilt aber noch nicht einmal für Teilmengen normierter Vektorräume:

3.36 Bemerkung Die Einheitsphäre $S := \{f \in \ell^2 \mid \|f\|_2 = 1\}$ im *Hilbertschen Folgenraum*

$$\ell^2 := \ell^2(\mathbb{N}) := \left\{ f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|^2 < \infty \right\}$$

bezüglich der Norm $\|f\|_2 := \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|^2}$ ist beschränkt und abgeschlossen, aber nicht kompakt. Denn die Folge $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der (Basis–) Vektoren $e_n(k) := \delta_{n,k}$ ($k \in \mathbb{N}$) liegt in S , besitzt aber wegen $\|e_n - e_m\|_2 = \sqrt{2}$ ($m \neq n$) keine konvergente Teilfolge.

3.37 Satz *Kompakte Teilmengen von Hausdorff–Räumen sind abgeschlossen.*

Beweis: Sei M Hausdorff–Raum und $X \subseteq M$ kompakt. Zu zeigen ist: $Y := M - X$ ist offen. Für $y \in Y$ konstruieren wir zum Nachweis eine offene Umgebung $V \subseteq Y$ von y . Für jedes $x \in X$ existieren wegen der Hausdorffeigenschaft disjunkte offene Umgebungen $U_x \subseteq M$ von x und $V_x \subseteq M$ von y .

Wegen der Kompaktheit von X gibt es eine endliche Teilüberdeckung

$$U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n} \supseteq X$$

der Überdeckung $(U_x)_{x \in X}$ von X . Für die offene Umgebung

$$V := V_{x_1} \cap \dots \cap V_{x_n} \subseteq M$$

von y gilt: $U_{x_i} \cap V \subseteq U_{x_i} \cap V_{x_i} = \emptyset$ ($i = 1, \dots, n$). Also ist $V \subseteq M - X = Y$. \square

Gegenbeispiel: $M := \{1, 2\}$ mit indiskreter Topologie $\mathcal{O} = \{\emptyset, \{1, 2\}\}$.

⁴**Definition** Eine Teilmenge $A \subseteq X$ eines metrischen Raums (X, d) heißt **beschränkt**, wenn $A = \emptyset$ oder wenn ihr **Durchmesser** $\text{diam}(A) := \sup_{x, y \in A} d(x, y)$ endlich ist.

$\{1\} \subset \{1, 2\}$ ist zwar als endliche Menge kompakt, aber nicht abgeschlossen, da $\{2\}$ nicht offen ist.

Die folgenden beiden Sätze können oft zum Nachweis der Kompaktheit benutzt werden.

3.38 Satz Ist $X \subseteq M$ kompakt und $f : M \rightarrow Y$ stetig, dann ist $f(X) \subseteq Y$ kompakt.

Beweis: Sei $(V_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $f(X)$ und

$$U_i := f^{-1}(V_i) = \{x \in X \mid f(x) \in V_i\}.$$

Dann ist nach Satz 3.23 auch U_i offen, und es gibt eine endliche Teilüberdeckung $X \subseteq U_{j_1} \cup \dots \cup U_{j_m}$. Damit ist $f(X) \subseteq V_{j_1} \cup \dots \cup V_{j_m}$. \square

Ein weiteres Prinzip zur Identifikation kompakter Mengen ist das folgende:

3.39 Satz Abgeschlossene Teilmengen kompakter topologischer Räume sind kompakt.

Beweis: Es sei $A \subseteq K$ eine abgeschlossene Teilmenge des kompakten Raums K und $(V_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von A durch (in A) offene Teilmengen $V_i \subseteq A$. Nach Definition 3.17 der Teilraumtopologie gibt es daher in K offene Teilmengen $(U_i)_{i \in I}$ mit $V_i = U_i \cap A$. Die U_i bilden zusammen mit der offenen Menge $K \setminus A$ eine offene Überdeckung von K , die wegen Kompaktheit von K eine endliche Teilüberdeckung besitzt:

$$K = (K \setminus A) \cup U_{j_1} \cup \dots \cup U_{j_m}.$$

Damit ist $A = V_{j_1} \cup \dots \cup V_{j_m}$. \square

Eine Abbildung ist genau dann stetig, wenn die Urbilder der offenen Mengen offen sind, oder äquivalent, wenn die Urbilder der abgeschlossenen Mengen abgeschlossen sind.

So gewinnt man viele Kompakta:

3.40 Beispiel Die n -Sphäre $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ ist kompakt, denn

- S^n ist Urbild der abgeschlossenen Menge $\{1\} \subseteq \mathbb{R}$ unter der stetigen Abbildung $x \mapsto \|x\|$, also abgeschlossen, und
- $S^n \subseteq [-1, 1]^{n+1}$. Die Kompaktheit der Quader haben wir aber schon gezeigt.

3.41 Satz *Stetige Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ auf kompakten metrischen Räumen $X \neq \emptyset$ nehmen ihr Minimum und Maximum an, d.h. es gibt $x_{\min}, x_{\max} \in X$ mit*

$$\inf_{x \in X} f(x) = f(x_{\min}) \quad , \quad \sup_{x \in X} f(x) = f(x_{\max}).$$

Beweis: Da $f(X) \neq \emptyset$, gibt es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\sup_x f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$. wegen der Äquivalenz von Kompaktheit und Folgenkompaktheit (Satz 3.32) gibt es eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Wegen der Stetigkeit von f und der Äquivalenz von Stetigkeit und Folgenstetigkeit (Satz 9.4 der *Analysis I*) gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_{\max}) \quad \text{für} \quad x_{\max} := \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}.$$

Analog für das Infimum. □

Während verschiedene Normen auf einem Vektorraum unterschiedliche geometrische Strukturen erzeugen, können sie einander doch in einem größeren Sinn gleichen:

3.42 Definition *Zwei Normen $\|\cdot\|_I$ und $\|\cdot\|_{II}$ auf dem \mathbb{K} -Vektorraum V heißen äquivalent, wenn für geeignete $C' \geq C > 0$ gilt:*

$$C\|v\|_I \leq \|v\|_{II} \leq C'\|v\|_I \quad (v \in V).$$

Als Anwendung unserer Kompaktheitssätze können wir jetzt den

3.43 Satz *Alle Normen auf einem endlich-dimensionalen \mathbb{K} -Vektorraum ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C}) sind äquivalent*

beweisen:

Beweis: • Ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachten wir den \mathbb{K}^n .

• Es sei $\|\cdot\| : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Norm. Es genügt die Äquivalenz dieser Norm zur euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$ nachzuweisen, denn Äquivalenz von Normen ist eine Äquivalenzrelation.

• Wir zeigen zunächst, dass die Abbildung $\|\cdot\| : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist. Es sei dazu e_1, \dots, e_n die kanonische Basis des \mathbb{K}^n (mit $\|e_i\|_2 = 1$) und $c_i := \|e_i\|$ die Norm des i -ten Basiselementes. Dann besitzt ein Vektor $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k \in \mathbb{K}^n$ die euklidische Länge $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$ und nach der Dreiecksungleichung die Länge

$$\|x\| \leq \sum_{i=1}^n \|x_i e_i\| = \sum_{i=1}^n |x_i| c_i \leq c \sum_{i=1}^n |x_i| \leq cn \|x\|_2$$

mit $c := \max(c_1, \dots, c_n)$. Damit ist die Norm-Abbildung stetig.

- Nun restringieren wir diese auf die Einheitssphäre

$$S_{\mathbb{K}}^{n-1} := \{x \in \mathbb{K}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$$

des Euklidischen Vektorraums, betrachten also die Abbildung

$$f : S_{\mathbb{K}}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto \|x\|.$$

Da $S_{\mathbb{K}}^{n-1}$ nach Beispiel 3.40 kompakt⁵ und f stetig ist, nimmt f Minimum $f_{\min} > 0$ und Maximum $f_{\max} < \infty$ an. Daher gilt $f_{\min}\|x\|_2 \leq \|x\| \leq f_{\max}\|x\|_2$. \square

3.44 Satz Sind $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ und $\dim(X) < \infty$ \mathbb{K} -Vektorräume, dann ist jede lineare Abbildung $f : X \rightarrow Y$ stetig.

Beweis: Nach Satz 3.43 können wir annehmen, dass $\|\cdot\|_X$ die euklidische Norm ist. Es sei $e_1, \dots, e_n \in X$ eine Orthonormalbasis und $x = \sum_{i=1}^n c_i e_i \in X$ von der Norm 1, also $\sum_{i=1}^n |c_i|^2 = 1$. Dann ist $\|f(x)\|_Y = \|\sum_{i=1}^n c_i f(e_i)\|_Y \leq \sum_{i=1}^n |c_i| \|f(e_i)\|_Y \leq L := n \max\{\|f(e_i)\|_Y \mid i = 1, \dots, n\}$. L ist damit eine Lipschitz-Konstante. \square

⁵Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, dann ist $S_{\mathbb{C}}^{n-1} = S_{\mathbb{R}}^{2n-1}$, wenn man den \mathbb{C}^n reellifiziert d.h. mit dem \mathbb{R}^{2n} identifiziert.

4 Maß und Integration

Die Messung und Berechnung von Längen, Flächen und Volumina gehört zu den ersten mathematischen Aktivitäten der Menschheit. Integration und Volumenberechnung aber sind zwei Seiten einer Medaille:

- In der *Analysis I* wurde das Riemann-Integral einer (positiven) reellen Funktion als Fläche unter dem Graphen der Funktion eingeführt. Diese Idee wird jetzt auf Funktionen mehrerer Variablen erweitert.
- Ist andererseits $A \subset \mathbb{R}^n$ eine (messbare) Teilmenge, dann ist ihr Maß gleich dem Integral $\int \mathbb{1}_A dx$ ihrer charakteristischen Funktion.

Tatsächlich ist die Integration historisch wesentlich älter als die Differentiation, die ja (in einer Dimension) ihre Umkehroperation ist.

Andererseits hat sich der Integralbegriff zusammen mit dem Begriff der Funktion erweitert. Bis zum 19. Jahrhundert waren in der Regel die betrachteten Funktionen stetig (sogar beliebig oft stetig differenzierbar). In der Zwischenzeit ist uns der Gedanke vertraut geworden, dass fraktale Mengen und Funktionen nicht nur als mathematische Konstrukte sondern auch für die Beschreibung von Naturvorgängen von Bedeutung sind.

Schon beim *Riemann-Integral* muss ja die zu integrierende Funktion nicht stetig sein, sondern kann Sprungstellen besitzen, wenn diese sich nicht häufen.

In den nächsten Wochen werden Sie den Begriff des *Lebesgue-Integrals* kennen lernen. Man kann noch mehr Funktionen Lebesgue-integrieren als die Riemann-integrierbaren, z.B. die charakteristische Funktion

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$$

der Teilmenge $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ der rationalen Zahlen, und es ist $\int \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} dx = 0$. Dies bedeutet, dass \mathbb{Q} im Gegensatz zu den irrationalen Zahlen Maß Null besitzt und korrespondiert mit der Abzählbarkeit von \mathbb{Q} . Dass man bei der Lebesgue-Integration allgemein sogenannte *Nullmengen* wie z.B. \mathbb{Q} unberücksichtigt lassen kann, ist oft praktisch.

Der Hauptvorteil des Lebesgue-Integrals gegenüber dem Riemann-Integral ist aber, dass es sich bei Operationen wie Limesbildung etc. einfacher verhält.

Für Funktionen, für die *beide* Integralbegriffe definiert sind, stimmen aber Riemann- und Lebesgue-Integral überein.

Die Grundidee aller Integration ist es, das $(n + 1)$ -dimensionale Volumen unter dem Graphen von $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ zu betrachten. Integration lässt sich also auf die Berechnung von Maßen zurückführen⁶. In einem gewissen Sinn sind Maße damit ein fundamentaleres Konzept als das der Integration.

⁶Diesen Weg werden wir allerdings nicht verfolgen.

Ein Maß μ auf einer Menge M wie z.B. dem \mathbb{R}^n ordnet geeigneten Teilmengen $A \subset M$ Zahlen

$$\mu(A) \in [0, \infty] := [0, \infty) \cup \{\infty\}$$

zu, eben das Maß von A . Diese Teilmengen heißen *messbar*. Die Leere Menge ist dabei messbar, mit $\mu(\emptyset) = 0$. Sind die messbare Teilmengen A_1 und A_2 disjunkt, dann gilt außerdem

$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2).$$

(sog. *Additivität* von μ). Das Buch [Ba] von Bauer gibt eine Einführung in die allgemeine Maß- und Integrationstheorie.

Wichtige Maße sind z.B. die folgenden.

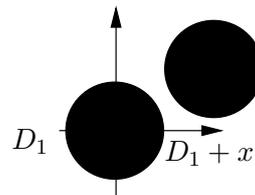
4.1 Beispiel 1. Das *zählende Maß* m auf einer endlichen Menge M , mit

$$m(A) := |A| \quad (A \subset M).$$

Hier sind insbesondere alle Teilmengen messbar.

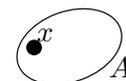
2. Das *Lebesgue-Maß* λ^n auf dem \mathbb{R}^n , das wir bald kennen lernen,

zeichnet sich dadurch aus, dass es einem verschobenen Körper das gleiche Volumen zuordnet wie dem unverschobenen, es also *translationsinvariant* ist, und der Einheitswürfel $[0, 1]^n$ Maß 1 besitzt.



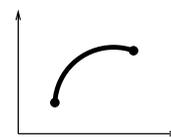
3. Das *Dirac-Maß* δ_x ist im Punkt x des \mathbb{R}^n konzentriert, und für $A \subset \mathbb{R}^n$ ist

$$\delta_x(A) \equiv \int_A \delta_x := \begin{cases} 1 & , \quad x \in A \\ 0 & , \quad \text{sonst.} \end{cases} .$$



Dieses Maß ist also nicht translationsinvariant

4. Wir wollen z.B. auch die Länge einer *Kurve* oder allgemeiner den Flächeninhalt einer d -dimensionalen Fläche im \mathbb{R}^n messen. Auch das dafür benutzte Maß μ_d ist translations- und rotationsinvariant, es ordnet aber der d -dimensionalen Einheitsfläche $[0, 1]^d \times \{0\} \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d} = \mathbb{R}^n$ Maß 1 zu. Entsprechend hat aber für $d < n$ hat der Einheitswürfel Maß $\mu_d([0, 1]^n) = \infty$.



5. Man kann sogar Maße μ_d konstruieren, die Mengen beliebiger fraktaler Dimension $d \in [0, n]$ messen. Genau genommen *definiert* man die Dimension der Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ durch $d(A) := \inf\{d' > 0 \mid \mu_{d'}(A) = 0\}$.

6. Im Zusammenhang mit dem sog. Feynmanschen Pfadintegral der Quantenmechanik wird auf dem unendlich-dimensionalen Raum M der Wege zwischen zwei Punkten des Konfigurationsraumes \mathbb{R}^d ein *Wahrscheinlichkeitsmaß* (also ein Maß μ auf M mit $\mu(M) = 1$) definiert.

Dabei erhalten Wege, die in der Nähe von Lösungskurven der DGL der Klassischen Mechanik sind, ein großes Gewicht.



4.1 Treppenfunktionen

Nach diesem kleinen Überblick wollen wir aber an die Arbeit gehen. Die Darstellung lehnt sich an das Buch *Analysis II* [Ko] von Königsberger an, das sich durch eine originelle Einführung des Lebesgue-Integrals auszeichnet.

Intervallen I der Form $I = [a, b), (a, b), (a, b]$ und $[a, b]$ (mit Intervallgrenzen $-\infty < a \leq b < \infty$) weisen wir das Maß $|I| := b - a$ zu.

Entsprechend setzen wir das Lebesgue-Maß des *Quaders*

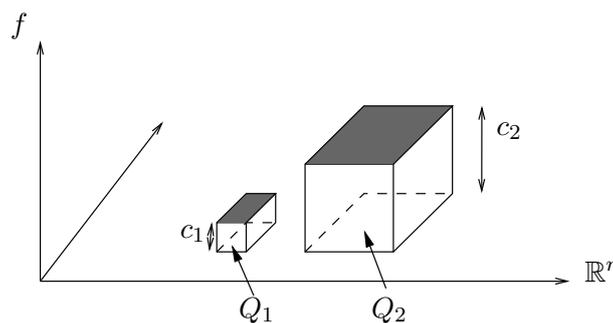
$$Q := I^{(1)} \times \dots \times I^{(n)} \subset \mathbb{R}^n \quad (4.1)$$

gleich $v_n(Q) \equiv v(Q) := |I^{(1)}| \cdot \dots \cdot |I^{(n)}|$.

Die Quader sind jetzt unsere Bausteine, mit denen wir allgemeinere Teilmengen des \mathbb{R}^n ausschöpfen und überdecken.

4.2 Definition • $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **Treppenfunktion**, wenn es disjunkte Quader $Q_1, \dots, Q_s \subset \mathbb{R}^n$ mit $f|_{Q_i}$ konstant und $f|_{\mathbb{R}^n \setminus (Q_1 \cup \dots \cup Q_s)} = 0$ gibt.

• Es sei \mathcal{T}_n die Menge der Treppenfunktionen des \mathbb{R}^n .



Setzen wir $c_i := f|_{Q_i}$, dann gilt

$$f = \sum_{i=1}^s c_i \mathbb{1}_{Q_i}. \quad (4.2)$$

Es seien für $k = 1, \dots, n$

$$\pi^{(k)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_k$$

die Projektionen. Dann ist $\pi^{(k)}(Q) = I^{(k)}$ für den Quader aus (4.1). Wir *verfeinern* nun die Darstellung (4.2) der Treppenfunktion f , indem wir zunächst für die k -te Koordinate die nicht leere endliche Menge

$$M^{(k)} := \bigcup_{i=1}^s \partial\pi^{(k)}(Q_i)$$

der Intervallgrenzen projizierter Quader einführen.

Sind umgekehrt

$$M^{(k)} = \{a_1^{(k)}, \dots, a_{s_k}^{(k)}\} \subset \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad a_i^{(k)} < a_{i+1}^{(k)}$$

solche Mengen, dann ist das Intervall $[a_1^{(k)}, a_{s_k}^{(k)}]$ disjunkte Vereinigung der Intervalle $I_1^{(k)}, \dots, I_{t_k}^{(k)}$ mit $t_k := 2s_k - 1$ und

$$I_{2l}^{(k)} := (a_l^{(k)}, a_{l+1}^{(k)}) \quad , \quad I_{2l-1}^{(k)} := \{a_l^{(k)}\} .$$

Benutzt man nun die aus der Darstellung (4.2) der Treppenfunktion f gewonnenen Mengen $M^{(k)}$, dann ist f auf den Quadern

$$I_{j_1}^{(1)} \times \dots \times I_{j_n}^{(n)} \subset \mathbb{R}^n \quad (j_k \in \{1, \dots, t_k\}) \quad (4.3)$$

konstant, und diese Quader sind disjunkt, siehe Abbildung 4.1.

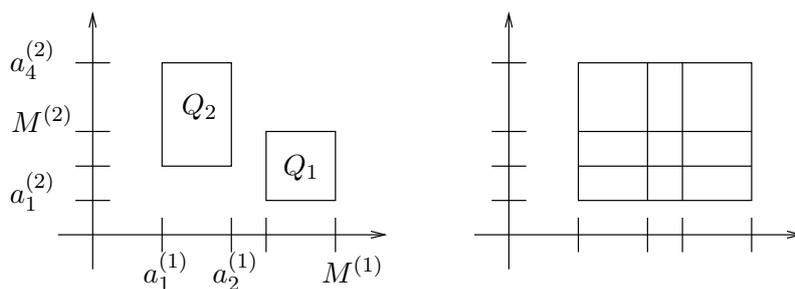


Abbildung 4.1: Quader in der Ebene (links); Partition mittels Intervallgrenzen $M^{(1)}, M^{(2)}$ (rechts)

4.3 Lemma \mathcal{T}_n ist ein \mathbb{C} -Vektorraum, und für $f \in \mathcal{T}_n$ ist auch $|f| \in \mathcal{T}_n$.

Beweis:

1. Es seien $f^I = \sum_{i=1}^{s^I} c_i^I \mathbb{1}_{Q_i^I}$ und $f^{II} = \sum_{j=1}^{s^{II}} c_j^{II} \mathbb{1}_{Q_j^{II}}$ Treppenfunktionen in \mathcal{T}_n , und für $r = I, II$

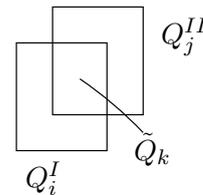
$$M^{(k,r)} := \bigcup_{i=1}^{s^r} \partial \pi^{(k)}(Q_i^r) \quad , \quad M^{(k)} := M^{(k,I)} \cup M^{(k,II)} \quad (k = 1, \dots, n).$$

Wir benutzen nun die unter Benutzung der Mengen $M^{(k)}$ gewonnenen verfeinerten Darstellungen

$$f^r = \sum_{i=1}^{\tilde{s}} \tilde{c}_i^r \mathbb{1}_{\tilde{Q}_i} \quad (r = I, II)$$

mit den disjunkten Quadern \tilde{Q}_i der Form (4.3). Dann ist auch

$$f^I + f^{II} = \sum_{i=1}^{\tilde{s}} (\tilde{c}_i^I + \tilde{c}_i^{II}) \mathbb{1}_{\tilde{Q}_i}$$



eine Treppenfunktion in \mathcal{T}_n .

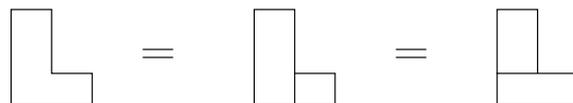
2. Ist $f = \sum_{i=1}^s c_i \mathbb{1}_{Q_i} \in \mathcal{T}_n$, dann ist mit $\lambda \in \mathbb{C}$ auch $\lambda f = \sum_{i=1}^s (\lambda c_i) \mathbb{1}_{Q_i} \in \mathcal{T}_n$ und $|f| = \sum_{i=1}^s |c_i| \mathbb{1}_{Q_i} \in \mathcal{T}_n$. \square

Wir setzen jetzt versuchsweise

$$\mathcal{I}_n : \mathcal{T}_n \rightarrow \mathbb{C} \quad , \quad \mathcal{I}_n \left(\sum_{i=1}^s c_i \mathbb{1}_{Q_i} \right) := \sum_{i=1}^s c_i v(Q_i) \quad (4.4)$$

als *Integral der Treppenfunktion* an. Für positive Treppenfunktionen f entspricht $\mathcal{I}_n(f)$ dem Volumen unterhalb des Graphen.

Wir können zwar eine Treppenfunktion $f \in \mathcal{T}_n$ auf *verschiedene* Weise als gewichtete Summe $f = \sum_i c_i \mathbb{1}_{Q_i}$ charakteristischer Funktionen von Quadern Q_i darstellen, denn die Gebiete $f^{-1}(c) \subset \mathbb{R}^n$ lassen sich ja verschieden in endlich viele Quader zerlegen:



$\mathcal{I}_n(f)$ hängt aber nicht von der Wahl der Darstellung ab:

- 4.4 Satz** 1. $\mathcal{I}_n : \mathcal{T}_n \rightarrow \mathbb{C}$ ist wohldefiniert und ein positives lineares Funktional.

2. Es gilt $\mathcal{I}_n(|f|) \geq |\mathcal{I}_n(f)|$.

3. Für $n = m + p$ und $f \in \mathcal{T}_n$ sind

$$f_y : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C} \quad , \quad f_y(x) := f(x, y) \quad (y \in \mathbb{R}^p)$$

und

$$g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{C} \quad , \quad g(y) := \mathcal{I}_m(f_y)$$

Treppenfunktionen in \mathcal{T}_m bzw. \mathcal{T}_p , und es gilt

$$\mathcal{I}_n(f) = \mathcal{I}_p(g). \quad (4.5)$$

4.5 Bemerkung 1. \mathcal{T}_n ist ein *Funktionsraum*, also ein Vektorraum, dessen Elemente Funktionen sind.

Abbildungen $\mathcal{I} : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{K}$ von einem (unendlich-dimensionalen) Funktionsraum \mathcal{T} über dem Körper \mathbb{K} in \mathbb{K} werden oft *Funktionale* genannt. Ein Funktional \mathcal{I} heißt *positiv*, wenn $\mathcal{I}(f) \geq 0$ für $f \geq 0$ folgt und *linear*, wenn es eine lineare Abbildung bezüglich der Vektorraumstruktur von \mathcal{T} ist.

2. Die Aussage des dritten Teiles ist die Spezialisierung des noch zu behandelnden Satzes von Fubini (Satz 4.14) auf Treppenfunktionen. Schreibt man $\int_{\mathbb{R}^n} f(z) dz$ statt $\mathcal{I}_n(f)$, dann lässt sich (4.5) in der Form

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dx \right) dy$$

schreiben. Man kann also insbesondere mehrdimensionale Integrale durch mehrfache eindimensionale Integration ersetzen.

Beweis:

1. • Um die Wohldefiniertheit des Integrals zu beweisen, ist zu zeigen, dass $\mathcal{I}_n(f)$ unabhängig von der Wahl der Zerlegung (4.2) ist, also für

$$f = \sum_{i=1}^{s^I} c_i^I \mathbb{1}_{Q_i^I} = \sum_{i=1}^{s^{II}} c_i^{II} \mathbb{1}_{Q_i^{II}} \in \mathcal{T}_n$$

gilt:

$$\sum_{i=1}^{s^I} c_i^I v(Q_i^I) = \sum_{i=1}^{s^{II}} c_i^{II} v(Q_i^{II}). \quad (4.6)$$

• Nun genügt es aber zu zeigen, dass beide Seiten in (4.6) gleich der Summe ist, die man für die gemeinsame Verfeinerung mit den Quadern

(4.3) erhält.

• Dafür wiederum genügt der Nachweis, dass das Lebesgue-Maß $v_n(Q)$ eines Quaders Q der Form (4.1) gleich der Summe der Maße der Quader seiner Verfeinerung ist. Dies folgt aber aus

$$v_n(Q) = v_n(I^{(1)} \times \dots \times I^{(n)}) = v_1(I^{(1)}) \cdot \dots \cdot v_1(I^{(n)})$$

und

$$v_1(I^{(k)}) = v_1(I_1^{(k)}) + \dots + v_1(I_{t_k}^{(k)}) \quad (k = 1, \dots, n),$$

wenn $I^{(k)}$ disjunkte Vereinigung der Intervalle $I_l^{(k)}$ ist.

• Die Linearität und Positivität von \mathcal{I}_n folgt jetzt unmittelbar aus der Definition (4.4) von \mathcal{I}_n .

2. Für $f = \sum_{i=1}^s c_i \mathbb{1}_{Q_i}$ ist

$$\mathcal{I}_n(|f|) = \sum_{i=1}^s |c_i| v(Q_i) \geq \left| \sum_{i=1}^s c_i v(Q_i) \right| = |\mathcal{I}_n(f)|.$$

3. Wir benutzen die mittels Verfeinerung gewonnene Darstellung

$$f = \sum_{i=1}^{s_m} \sum_{j=1}^{s_p} c_{ij} \mathbb{1}_{Q_{ij}}$$

mit Quadern $Q_{ij} = Q_i^{(m)} \times Q_j^{(p)}$, wobei die Quader $Q_1^{(m)}, \dots, Q_{s_m}^{(m)} \subset \mathbb{R}^m$ und die Quader $Q_1^{(p)}, \dots, Q_{s_p}^{(p)} \subset \mathbb{R}^p$ disjunkt sind.

Damit gilt wegen $\mathbb{1}_{Q_{ij}}(x, y) = \mathbb{1}_{Q_i^{(m)}}(x) \cdot \mathbb{1}_{Q_j^{(p)}}(y)$

$$g(y) = \mathcal{I}_m(f_y) = \sum_{j=1}^{s_p} \left(\sum_{i=1}^{s_m} c_{ij} v_m(Q_i^{(m)}) \right) \mathbb{1}_{Q_j^{(p)}}(y) \quad (y \in \mathbb{R}^p),$$

also

$$\mathcal{I}_p(g) = \sum_{j=1}^{s_p} \sum_{i=1}^{s_m} c_{ij} v_m(Q_i^{(m)}) \cdot v_p(Q_j^{(p)}).$$

Dies ist aber wegen $v_n(Q_{ij}) = v_m(Q_i^{(m)}) \cdot v_p(Q_j^{(p)})$ gleich $\mathcal{I}_n(f)$. \square

4.2 Das Lebesgue-Integral

Ist $\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathbb{1}_{Q_k}$ mit $c_k \in \mathbb{C}$ und Quadern $Q_k \subset \mathbb{R}^n$, dann ist es naheliegend, das Integral von φ analog zu (4.4) durch

$$\mathcal{I}_n(\varphi) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k v_n(Q_k)$$

zu erklären. Im Allgemeinen konvergiert diese Reihe zwar nicht. Ist allerdings $c_k \geq 0$, dann ist immerhin $\mathcal{I}_n(\varphi) \in [0, \infty]$ wohldefiniert.

4.6 Definition • Eine **Hüllreihe** φ von $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ist eine Reihe $\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathbb{1}_{Q_k}$ mit $c_k \geq 0$ und offenen Quadern Q_k , für die $\varphi \geq |f|$ gilt.

- f besitzt die \mathcal{L}^1 -Halbnorm⁷

$$\|f\|_1 := \inf \{ \mathcal{I}_n(\varphi) \mid \varphi \text{ ist Hüllreihe von } f \}.$$

- f heißt **Lebesgue-integrierbar**, wenn es eine Folge von Treppenfunktionen $\varphi_k \in \mathcal{T}_n$ mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - \varphi_k\|_1 = 0$$

gibt. In diesem Fall heißt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f dx := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx := \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{I}_n(\varphi_k)$$

das **Lebesgue-Integral** von f .

- Die Menge der Lebesgue-integrierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ wird mit $\tilde{\mathcal{L}}^1(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet.

Wir müssen uns zunächst überlegen, dass diese Definition des Lebesgue-Integrals sinnvoll ist.

- Zunächst besitzt jede Funktion $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ eine Hüllreihe, nämlich z.B. $\varphi := \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{Q_k}$ mit $Q_k := (-k, k)^n$, und es ist $\varphi(x) \equiv \infty$. Daher ist

$$\|g\|_1 \in [0, \infty].$$

- Sicher ist *nicht jede Funktion Lebesgue-integrierbar*, denn z.B. die Funktion $\mathbb{1}_{\mathbb{R}}$ hat die Eigenschaft, dass $\mathbb{1}_{\mathbb{R}} - \varphi_k$ für $\varphi_k \in \mathcal{T}_1$ außerhalb eines beschränkten Gebiets gleich 1 ist und damit ist $\|\mathbb{1}_{\mathbb{R}} - \varphi_k\|_1 = \infty$.

⁷Bei einer **Halbnorm** wird im Gegensatz zu einer Norm nicht $\|f\| > 0$ für $f \neq 0$ verlangt. Zusätzlich wird hier der Wert $\|f\|_1 = \infty$ zugelassen.

- Ist aber f Lebesgue-integrierbar, dann existiert auch der Limes auf der rechten Seite der Definition des Lebesgue-Integrals, denn $|\mathcal{I}_n(\varphi_k) - \mathcal{I}_n(\varphi_l)| = |\mathcal{I}_n(\varphi_k - \varphi_l)| \leq \mathcal{I}_n(|\varphi_k - \varphi_l|) = \|\varphi_k - \varphi_l\|_1 \leq \|f - \varphi_k\|_1 + \|f - \varphi_l\|_1$, und der letzte Ausdruck geht für $k, l \rightarrow \infty$ gegen Null⁸. $k \mapsto \mathcal{I}_n(\varphi_k)$ ist also eine Cauchy-Folge.

Aus dem gleichen Grund ist der Limes von der Wahl der Folge $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ unabhängig. Damit ist das Lebesgue-Integral von f wohldefiniert und endlich.

Dass $\|\cdot\|_1$ die Eigenschaften

$$\|\lambda f\|_1 = |\lambda| \|f\|_1 \quad \text{und} \quad \|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1 \quad (f, g \in \tilde{\mathcal{L}}^1(\mathbb{R}^n), \lambda \in \mathbb{C})$$

einer Halbnorm erfüllt, wird klar, wenn man die Koeffizienten der Hüllreihe von f mit dem Betrag von $\lambda \in \mathbb{C}$ multipliziert bzw. die Hüllreihen von f und g addiert. Zwar ist $\tilde{\mathcal{L}}^1(\mathbb{R}^n)$ selbst kein \mathbb{C} -Vektorraum, denn der Wert ∞ ist zugelassen, aber $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ enthält den \mathbb{C} -Vektorraum

$$\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \mid f \in \tilde{\mathcal{L}}^1(\mathbb{R}^n)\}.$$

4.7 Lemma Die Halbnorm erfüllt die verallgemeinerte Dreiecksungleichung

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k \right\|_1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_1. \quad (4.7)$$

Dabei nehmen wir $f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ an, weil sonst die Summe auf der linken Seite von (4.7) evtl. nicht definiert ist. Es muß aber nicht $f_k \in \tilde{\mathcal{L}}^1(\mathbb{R}^n)$ gelten.

Beweis: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es geeignete Hüllreihen φ_k von f_k , für die

$$\mathcal{I}_n(\varphi_k) \leq \|f_k\|_1 + 2^{-k} \varepsilon \quad \text{gilt, also} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (\mathcal{I}_n(\varphi_k) - \|f_k\|_1) \leq \varepsilon.$$

$\varphi := \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k$ ist dann Hüllreihe von $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$, mit $\mathcal{I}_n(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{I}_n(\varphi_k)$. \square

Das Lebesgue-Integral ist eine Abbildung

$$\int_{\mathbb{R}^n} : \tilde{\mathcal{L}}^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}.$$

⁸Die mittlere Identität folgt aus folgendem Lemma (Beweis siehe [Ko], p. 238f):
Lemma. $\|\varphi\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi| dx \quad (\varphi \in \mathcal{T}_n).$

Wir wollen nun die Rechenregeln für das Integral ergründen. Zunächst ist

$$\mathcal{T}_n \subset \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n),$$

die Treppenfunktionen sind also Lebesgue-integrierbar, und für $\varphi \in \mathcal{T}_n$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = \mathcal{I}_n(\varphi),$$

denn φ wird ja durch sich selbst approximiert. Damit *erweitert* das Lebesgue-integral unseren Integralbegriff für Treppenfunktionen, und auch Satz 4.4 besitzt eine Erweiterung:

4.8 Satz *Das Lebesgue-Integral ist ein positives lineares Funktional auf dem \mathbb{C} -Vektorraum $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, und es gilt*

1. $|\int_{\mathbb{R}^n} f dx| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f| dx = \|f\|_1 \quad (f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n))$
2. Sind $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und ist g beschränkt, dann ist auch $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

Beweis:

- Fangen wir mit der Ungleichung in 1. an: Wegen der Dreiecksungleichung gilt

$$||f| - |\varphi_k|| \leq |f - \varphi_k|,$$

also

$$\||f| - |\varphi_k||_1 \leq \|f - \varphi_k\|_1,$$

sodass mit f auch $|f| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ ist, und

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f dx \right| = \left| \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k dx \right| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_k| dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f| dx.$$

Weiter müssen wir noch die zweite Identität in 1. zeigen, indem wir die Dreiecksungleichung der \mathcal{L}^1 -Halbnorm in der Form

$$|\|\varphi_k\|_1 - \|f\|_1| \leq \|\varphi_k - f\|_1$$

anwenden. Die rechte Seite geht für $k \rightarrow \infty$ gegen Null, also ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f| dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{I}_n(|\varphi_k|) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\varphi_k\|_1 = \|f\|_1.$$

Dabei wurde $\mathcal{I}(|\varphi_k|) = \|\varphi_k\|_1 = \|\varphi_k\|_1$ benutzt, siehe Fußnote 8.

- Dass $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ überhaupt ein linearer Raum ist, sehen wir dadurch, dass wir für $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ die approximierenden Treppenfunktionen addieren können, um $f + g$ zu approximieren; analog multipliziert man die φ_k mit $\lambda \in \mathbb{C}$, um λf zu approximieren.

Linearität des Lebesgue-Integrals ergibt sich ebenso wie seine Positivität aus den in Satz 4.4 gezeigten Eigenschaften von \mathcal{I}_n .

- Beweis von 2. Sei $M_g > 0$ eine obere Schranke für $|g|$, und für $\varepsilon > 0$ die f approximierende Treppenfunktion $\varphi \in \mathcal{T}_n$ so gewählt, dass $\|f - \varphi\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{2M_g}$. Ist nun $M_\varphi > 0$ eine obere Schranke für $|\varphi|$, dann wird $\gamma \in \mathcal{T}_n$ so gewählt, dass $\|g - \gamma\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{2M_\varphi}$. Es folgt für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$|f(x)g(x) - \varphi(x)\gamma(x)| \leq |f(x) - \varphi(x)| |g(x)| + |\varphi(x)| |g(x) - \gamma(x)|,$$

also

$$\begin{aligned} \|fg - \varphi\gamma\|_1 &\leq M_g \|f - \varphi\|_1 + M_\varphi \|g - \gamma\|_1 \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit approximiert $\varphi\gamma \in \mathcal{T}_n$ das Produkt von f und g . □

Da erstere auch auf Teilintervallen definiert sein können, müssen wir zunächst das Lebesgue-Integral solcher Funktionen definieren.

4.9 Definition 1. Für $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : A \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ heißt

$$f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} \quad , \quad x \mapsto \begin{cases} f(x) & , \quad x \in A \\ 0 & , \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus A \end{cases}$$

die **triviale Fortsetzung** von f .

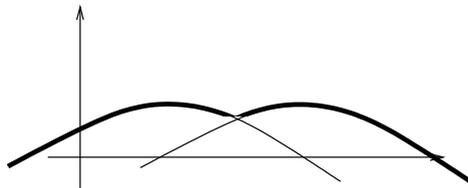
2. f heißt **über A integrierbar**, wenn $f_A \in \tilde{\mathcal{L}}^1(\mathbb{R}^n)$.
Dann heißt $\int_A f dx := \int_{\mathbb{R}^n} f_A dx$ das **Lebesgue-Integral** von f
und $\|f\|_{1,A} := \|f_A\|_1$ seine **1-Norm**.
3. Die Menge der über A Lebesgue-integrierbaren Funktionen $f : A \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ wird mit $\tilde{\mathcal{L}}^1(A)$ bezeichnet, die der über A Lebesgue-integrierbaren Funktionen $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\mathcal{L}^1(A)$.

4.10 Bemerkungen 1. Die Existenz von $\int_A f dx$ hängt nicht nur von der Regularität von f , sondern auch von A ab. Insbesondere sind nicht alle $A \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar. Noch nicht einmal für alle beschränkten A existiert das Maß $\lambda(A) = \int \mathbb{1}_A dx$.

2. Satz 4.8 sagt uns unter anderem, dass wir, wenn wir *komplexwertige* Funktionen f integrieren wollen, uns auf die getrennte Integration von Real- und Imaginärteil von f zurückziehen können (dies folgt aus der Linearität des Lebesgue-Integrals).
3. Für reellwertige $f, g \in \tilde{\mathcal{L}}^1(\mathbb{R}^n)$ sind Maximum bzw. Minimum der beiden Funktionen wegen Satz 4.8

$$\max(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|) \quad , \quad \min(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$$

in $\tilde{\mathcal{L}}^1(\mathbb{R}^n)$. Daher können wir uns auf die Integration *nichtnegativer* Funktionen beschränken:



Mit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ sind Positivteil $f^+ = \max(f, 0)$ und Negativteil $f^- = \max(-f, 0)$ von f in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, und $f^\pm \geq 0$. Aus $f = f^+ - f^-$ folgt also

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^+ \, dx - \int_{\mathbb{R}^n} f^- \, dx.$$

Nach Einführung des Lebesgue-Integrals haben wir in Satz 4.8 erste Rechenregeln für seine Auswertung kennen gelernt. Wir sind aber noch nicht in der Lage, das Lebesgue-Integral in relevanten Anwendungen auszurechnen. Im Folgenden werden die dazu notwendigen Sätze bereitgestellt.

Die triviale Fortsetzung $f|_{[a,b]} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ einer Riemann-integrierbaren Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist Lebesgue-integrierbar. Aus der Art der Approximation von $f|_{[a,b]}$ durch Treppenfunktionen folgt dann sofort, dass das Lebesgue-Integral von $f|_{[a,b]}$ gleich dem Riemann-Integral von f ist.

Allgemeiner gilt:

4.11 Satz *Ist die auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definierte Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ absolut⁹ Riemann-integrierbar, dann ist f auch Lebesgue-integrierbar und die Werte beider Integrale sind gleich.*

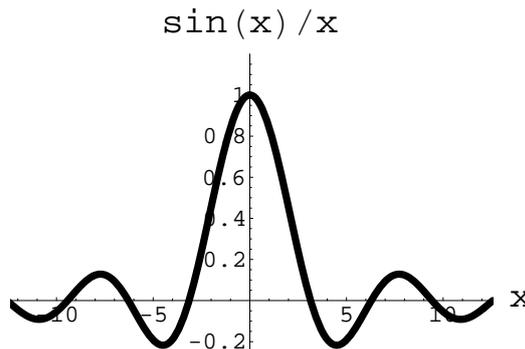
⁹d.h. die Restriktionen $f|_J$ auf kompakte Teilintervalle $J \subseteq I$ sind Riemann-integrierbar und das uneigentliche Riemann-Integral von $|f|$ existiert, siehe z.B. Def. 1.1 der *Analysis II*, erhältlich unter www.mathematik.uni-erlangen.de/~knauf.

4.12 Bemerkungen 1. Die Voraussetzung des Satzes ist z.B. für stetige oder monotone Funktionen auf kompakten Intervallen erfüllt.

2. Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

ist nach de l'Hospital stetig, und ihr uneigentliches Riemann-Integral existiert¹⁰ (mit $\int_{-\infty}^{\infty} f dx = \pi$).

Aber f ist nicht absolut Riemann-integrierbar, und es gilt auch $f \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, die Funktion ist nicht Lebesgue-integrierbar. Allerdings existiert der Limes der Lebesgue-Integrale der Funktionen $f \cdot \mathbb{1}_{[-c,c]}$ und gleicht dem uneigentlichen Riemann-Integral von f .



4.13 Satz Es sei $f \in C(A)$ beschränkt und $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt bzw. A offen und beschränkt. Dann ist $f \in \mathcal{L}^1(A)$.

Beweis: Gemäß den Bemerkungen 4.10 können wir $f \geq 0$ annehmen.

1. Wir betrachten zunächst den Fall einer *offenen beschränkten* Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$. Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ können wir den \mathbb{R}^n als disjunkte Vereinigung der "halboffenen Würfel" mit Kantenlänge 2^{-k}

$$W_k(a) := \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in [2^{-k}a_i, 2^{-k}(a_i+1))\} \quad (a \in \mathbb{Z}^n)$$

darstellen, und sie sind in der Form

$$W_k(a) = \bigcup_{b \in \mathbb{Z}^n: b_i \in \{2a_i, 2a_i+1\}} W_{k+1}(b) \quad (k \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{Z}^n) \quad (4.8)$$

ineinander geschachtelt. Wir setzen nun

$$\varphi_k := \sum_{a \in \mathbb{Z}^n} c_{k,a} \mathbb{1}_{W_k(a)} \quad (k \in \mathbb{N}) \quad (4.9)$$

mit $c_{k,a} := \inf f_A \upharpoonright_{W_k(a)}$, wobei f_A die triviale Fortsetzung von f bezeichnet.

Wegen der Beschränktheit von f sind die $c_{k,a} \in [0, \infty)$. Wegen der Beschränktheit von $A \subseteq \mathbb{R}^n$ sind für jedes k nur endlich viele Koeffizienten

¹⁰Einen Beweis findet man in Bsp. 1.5 der *Analysis II* (www.mathematik.uni-erlangen.de/~knauf).

$c_{k,a}$ ungleich Null. Also sind die φ_k Treppenfunktionen, mit $\varphi_k \leq f_A$ und $\varphi_k \upharpoonright_{\mathbb{R}^n - A} = 0$.

Andererseits gilt wegen (4.8) $\varphi_{k+1} \geq \varphi_k$. Da A offen ist, gibt es für jeden Punkt $x \in A$ ein $k \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{Z}^n$ mit $x \in W_k(a) \subseteq A$. Wegen (4.8) und der Stetigkeit von f (Vorsicht: f_A ist i.A. unstetig!) ist damit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(x) = f_A(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Also folgt aus der verallgemeinerten Dreiecksungleichung (4.7) für alle k

$$\begin{aligned} \|f_A - \varphi_k\|_1 &= \left\| \sum_{m=k}^{\infty} (\varphi_{m+1} - \varphi_m) \right\|_1 \leq \sum_{m=k}^{\infty} \|\varphi_{m+1} - \varphi_m\|_1 \\ &= \sum_{m=k}^{\infty} \mathcal{I}_n(|\varphi_{m+1} - \varphi_m|) \\ &= \sum_{m=k}^{\infty} \mathcal{I}_n(\varphi_{m+1} - \varphi_m) = \sum_{m=k}^{\infty} (\mathcal{I}_n(\varphi_{m+1}) - \mathcal{I}_n(\varphi_m)), \end{aligned}$$

was für $k \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert¹¹. Also ist $f \in \mathcal{L}^1(A)$.

- Ist dagegen $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, dann existiert nach dem Fortsetzungssatz von Tietze¹² eine stetige Fortsetzung $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ von f . Ist nun $k > 0$ so gewählt, dass der Würfel $W := (-k, k)^n$ das Kompaktum A beinhaltet, dann ist $\tilde{f} \upharpoonright_W$ und auch $\tilde{f} \upharpoonright_{W-A}$ nach Teil 1 des Beweises integrabel, also auch die triviale Fortsetzung $f_A = \tilde{f} \cdot \mathbb{1}_W - \tilde{f} \cdot \mathbb{1}_{W-A}$. \square

4.3 Der Satz von Fubini (stetige Version)

Zur praktischen Durchführung der Integration führen wir sie auf die eindimensionale Integration zurück, wie wir das in Satz 4.4 schon für Treppenfunktionen getan haben. Allgemeiner zerlegen wir den \mathbb{R}^n in das Produkt $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$.

¹¹Diese Argumentation wird später im **Satz von Beppo Levi** (Satz 5.11) auf monoton wachsende Folgen von Funktionen $f_k \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} f_k dx \leq C$ und ihren punktweisen Limes f verallgemeinert, der dann ebenfalls integrabel ist.

¹²**Fortsetzungssatz von Tietze:** Ist A eine abgeschlossene Teilmenge eines metrischen Raumes X und $f \in C(A)$, dann existiert ein $\tilde{f} \in C(X)$ mit $\tilde{f} \upharpoonright_A = f$. Beweis unter Benutzung von $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x) := f(x)$ für $x \in A$, $\tilde{f}(x) := \inf_{y \in A} (f(y) + \frac{d(x,y)}{d(x,A)}) - 1$ sonst. Beweise in [Ja] unter noch schwächeren Voraussetzungen an den topologischen Raum X .

4.14 Satz (Fubini) Es sei $f \in C(A)$ beschränkt und $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt bzw. A offen und beschränkt. Für alle $p \in \{1, \dots, n-1\}$, $m := n-p$ ist dann für den y -Schnitt von A

$A_y := \{x \in \mathbb{R}^m \mid (x, y) \in A\}$ und $f_y : A_y \rightarrow \mathbb{C}$, $f_y(x) := f(x, y)$ ($y \in \mathbb{R}^p$)
 $f_y \in \mathcal{L}^1(A_y)$, und es gilt

$$\int_A f(z) dz = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{A_y} f(x, y) dx \right) dy. \quad (4.10)$$

Beweis: Die Bedingungen an f und A sind die gleichen wie die im Satz 4.13. Wir können auch wieder o.B.d.A. $f \geq 0$ voraussetzen.

1. Sei zunächst $A \subset \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ beschränkt und offen.
 - Also ist $A_y \subset \mathbb{R}^m$ ebenfalls offen. Von den Treppenfunktionen φ_k aus (4.9) erben die $\varphi_{k,y} := \varphi_k \upharpoonright_{\mathbb{R}^m \times \{y\}}$ die Eigenschaften

$$\varphi_{k,y} \in \mathcal{T}_m, \quad \varphi_{k,y} \leq \varphi_{k+1,y} \leq \dots \leq f_y \quad (y \in \mathbb{R}^p) \quad (4.11)$$

und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{k,y}(x) = f_y(x) \quad (y \in \mathbb{R}^p, x \in \mathbb{R}^m). \quad (4.12)$$

Mit der gleichen Argumentation wie im Beweis von Satz 4.13 gilt daher $\|f_y - \varphi_{k,y}\|_1 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, also mit den Treppenfunktionen

$$\Phi_k \in \mathcal{T}_p, \quad \Phi_k(y) := \int_{\mathbb{R}^m} \varphi_{k,y} dx$$

$$f_y \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m) \quad \text{und} \quad F(y) := \int_{A_y} f_y(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_k(y) \quad (y \in \mathbb{R}^p).$$

- Die $\Phi_k \in \mathcal{T}_p$ haben wegen (4.11) und (4.12) die Eigenschaften

$$\Phi_k \leq \Phi_{k+1} \leq \dots \leq F \quad \text{und} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_k(y) = F(y)$$

Daher gilt wieder $\|F - \Phi_k\|_1 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, also

$$F \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^p) \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}^p} F dy = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^p} \Phi_k dy.$$

- Der Satz von Fubini für Treppenfunktionen (Satz 4.4, Teil 3) besagt

$$\int_{\mathbb{R}^p} \Phi_k dy = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k dz.$$

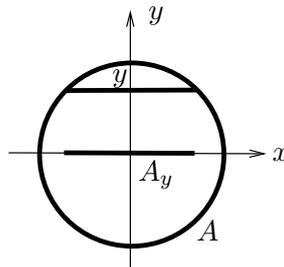
Nach Satz 4.13 gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k dz = \int_{\mathbb{R}^n} f(z) dz$.
Zusammen zeigt das die Richtigkeit von (4.10):

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f dz &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k dz = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^p} \Phi_k dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^p} F dy = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{A_y} f_y(x) dx \right) dy. \end{aligned}$$

2. Ist dagegen $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, dann betrachten wir wieder einen A enthaltenden offenen Würfel W und wenden die obige Aussage auf eine stetige Fortsetzung \tilde{f} von f auf \mathbb{R}^n an, indem wir \tilde{f} über W bzw. $W - A$ integrieren und die Differenz der Integrale bilden. \square

4.15 Beispiel Kreisscheibe $A := \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \|z\| \leq R\}$ vom Radius R , $f := \mathbb{1}$, also $f_A = \mathbb{1}_A$.

Für $p = 1$ ergibt sich $A_y = \begin{cases} [-\sqrt{R^2 - y^2}, \sqrt{R^2 - y^2}] & , |y| \leq R \\ \emptyset & , |y| > R \end{cases}$.



$$\int_A f(z) dz = \int_{\mathbb{R}} \int_{A_y} 1 dx dy = \int_{[-R, R]} 2\sqrt{R^2 - y^2} dy = \pi R^2.$$

Eigentlich haben wir im letzten Beispiel die Fläche der Kreisscheibe A gemessen. Allgemein definieren wir:

4.16 Definition $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt (**Lebesgue–**) **messbar**, wenn $\mathbb{1}_A \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.
In diesem Fall heißt

$$\lambda^n(A) := \int_A dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A dx \in [0, \infty)$$

das n -dimensionale **Lebesgue-Maß** (oder **Volumen**) von A .

4.17 Bemerkung Nach dieser Definition haben alle Lebesgue-messbaren Mengen endliches Maß. Dies ist vielleicht naheliegend, aber von Standpunkt der *Maßtheorie* aus etwas unbefriedigend.

Diese versteht unter einem Maß μ auf einer Menge M eine Abbildung

$$\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$$

mit einem geeigneten Mengensystem $\mathcal{M} \subseteq 2^M$, einer sogenannten σ -Algebra¹³. Es ist nach Definition $\mu(\emptyset) = 0$, und für disjunkte $A_k \in \mathcal{M}$ ($k \in \mathbb{N}$) ist μ dabei σ -additiv, d.h.

$$\mu \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Der Vorteil, den Wert $\mu(A) = \infty$ zuzulassen, liegt dabei in der einfacheren Struktur des Mengensystems \mathcal{M} .

Im Fall des Lebesgue-Maßes folgt aus der σ -Additivität $\lambda^n(\mathbb{R}^n) = \infty$, denn der \mathbb{R}^n ist disjunkte Vereinigung abzählbar vieler Würfel.

Von Def. 4.16 kommen wir zu der maßtheoretischen Definition der Meßbarkeit, indem wir diejenigen Mengen hinzunehmen, die durch die in einer σ -Algebra erlaubten Operationen von Komplementbildung und abzählbarer Vereinigung aus den Def. 4.16 erfüllenden Mengen gebildet werden können.

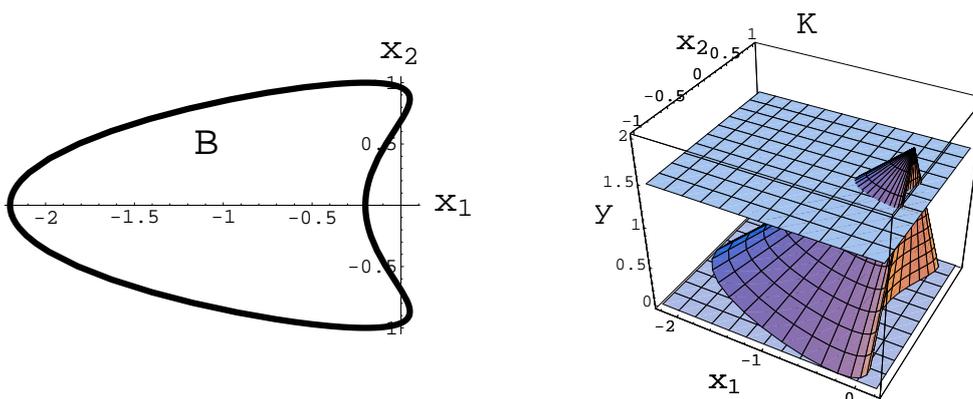
Aus den Sätzen 4.13 und 4.14 folgt unmittelbar das sog. *Prinzip von Cavalieri*:

4.18 Korollar *Beschränkte offene sowie kompakte Mengen $A \subset \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ sind messbar, und $\lambda^n(A) = \int_{\mathbb{R}^p} \lambda^m(A_y) dy$ für $A_y = \{x \in \mathbb{R}^m \mid (x, y) \in A\}$.*

4.19 Beispiel (Kegelvolumen) Es sei $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ kompakt, und für $h > 0$

$$K := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times [0, h] \mid x \in \left(1 - \frac{y}{h}\right) B \right\}$$

der Kegel mit Basis B und Höhe h .



¹³Def.: • Eine nichtleere Familie \mathcal{M} von Teilmengen von M heißt **Algebra**, wenn mit $A, B \in \mathcal{M}$ auch $M \setminus A$, $A \cap B$ und $A \cup B \in \mathcal{M}$ sind.

• \mathcal{M} heißt σ -**Algebra**, wenn zusätzlich gilt: $(\forall n \in \mathbb{N} : A_n \in \mathcal{M}) \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

Es ist also $A_y = \ell B$ mit $\ell := 1 - y/h$ die um den Faktor $\ell \in [0, 1]$ skalierte (und verschobene) Basis. Als Bild des Kompaktums $B \times [0, h]$ unter der stetigen Abbildung $(x, y) \mapsto ((1 - y/h)x, y)$ ist K kompakt, also nach Kor. 4.18 messbar.

Es ist naheliegend (und wird noch besprochen), dass

$$\lambda^{n-1}(\ell B) = \ell^{n-1} \lambda^{n-1}(B)$$

gilt, also

$$\begin{aligned} \lambda^n(K) &= \int_{[0,h]} \lambda^{n-1}(A_y) dy = \int_{[0,h]} (1 - y/h)^{n-1} \lambda^{n-1}(B) dy \\ &= \lambda^{n-1}(B) \cdot \frac{h(1 - y/h)^n}{n} \Big|_0^h = \lambda^{n-1}(B) \cdot \frac{h}{n}. \end{aligned}$$

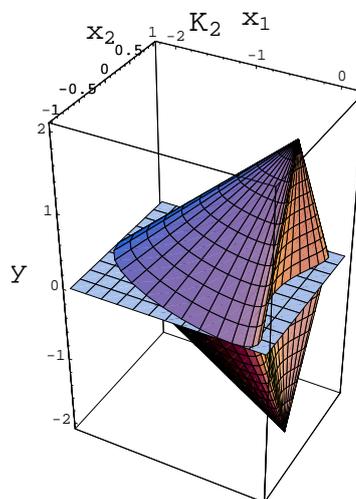
In Anwendungen der Lebesgue-Integration über dem \mathbb{R}^n möchte man gerne von Gebieten niedrigerer Dimension absehen können:

4.20 Beispiel (Volumen des Doppelkegels) Für $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ kompakt und $h > 0$ sei

$$K_2 := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times [-h, h] \mid x \in \left(1 - \frac{|y|}{h}\right) B \right\}.$$

Wir können K_2 als Vereinigung von K und der Spiegelung von K an der Hyperebene $y = 0$ in \mathbb{R}^n darstellen. K und sein Spiegelbild haben Maß $\lambda^n(K) = \lambda^{n-1}(B) \frac{h}{n}$.

Es liegt also nahe zu vermuten, dass K_2 das doppelte Volumen besitzt. Allerdings treffen sich die beiden einfachen Kegel in ihrer Basis B , und wir würden gerne argumentieren, dass diese Schnittmenge n -dimensionales Maß 0 besitzt.



In diesem Beispiel haben wir folgende Rechenregeln angewandt:

4.21 Satz Sind $A, B \subset \mathbb{R}^n$ messbar, dann sind

1. $A \cup B$ und $A \cap B$ messbar, und $\lambda^n(A \cup B) = \lambda^n(A) + \lambda^n(B) - \lambda^n(A \cap B)$.
2. Für $A \subset B$ gilt $\lambda^n(A) \leq \lambda^n(B)$.

Bew: Wir benutzen Linearität und Positivität des Lebesgue-Integrals:

1. $\lambda^n(A \cup B) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{A \cup B} dx$, und $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B}$
2. $\mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$. □

4.4 Nullmengen

Wir wollen jetzt Kriterien dafür entwickeln, dass eine Teilmenge des \mathbb{R}^n Maß 0 besitzt.

4.22 Definition $N \subset \mathbb{R}^n$ heißt (**Lebesgue–**) **Nullmenge** im \mathbb{R}^n , wenn N messbar ist, und $\lambda^n(N) = 0$.

Ist nun eine Hyperebene eine Nullmenge? Zwar ist sie "unendlich dünn", aber sie hat doch auch "unendliche Größe".

- 4.23 Satz**
1. $N \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Nullmenge, wenn $\|\mathbb{1}_N\|_1 = 0$.
 2. Teilmengen von Nullmengen sind Nullmengen.
 3. Die Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen ist eine Nullmenge.

Beweis:

1. " \Rightarrow ": Wir wissen schon (Satz 4.8), dass $\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_N dx = \|\mathbb{1}_N\|_1$, wenn $\mathbb{1}_N \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.
" \Leftarrow ": Da für die konstante Folge von verschwindenden Treppenfunktionen $\varphi_k = 0$ auch $\|\mathbb{1}_N - \varphi_k\|_1 = 0$ ist, ist $\mathbb{1}_N$ integrierbar, N also messbar und hat daher Maß 0.
2. $M \subset N \Rightarrow \mathbb{1}_M \leq \mathbb{1}_N \Rightarrow \lambda^n(M) \leq \lambda^n(N) := 0$
3. $N = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k \Rightarrow \mathbb{1}_N \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{N_k}$. Mit $\lambda^n(A) = \|\mathbb{1}_A\|_1$ folgt unter Benutzung der verallgemeinerten Dreiecksungleichung (4.7)

$$\lambda^n(N) = \|\mathbb{1}_N\|_1 \leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{N_k} \right\|_1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|\mathbb{1}_{N_k}\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^n(N_k) = 0.$$

□

Natürlich braucht eine *überabzählbare* Vereinigung von Nullmengen keine Nullmenge zu sein. Beispielsweise ist für alle $x \in \mathbb{R}$ $v_1(\{x\}) = 0$, aber $\lambda^n\left(\bigcup_{x \in [0,1]} \{x\}\right) = 1$.

4.24 Definition Eine Eigenschaft, die Punkten des \mathbb{R}^n zukommen kann, gilt **fast überall**, falls die Teilmenge von Punkten des \mathbb{R}^n , für die die Eigenschaft nicht gilt, eine Nullmenge ist.

Formalisiert ist die Eigenschaft eine Aussageform $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \{w, f\}$ mit den Werten 'wahr' und 'falsch'. A gilt fast überall, falls $\lambda^n(A^{-1}(f)) = 0$.

4.25 Beispiel Die Eigenschaft " $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ " gilt in \mathbb{R} fast überall, d.h.

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} dx = 0.$$

Mit anderen Worten: Die rationalen Zahlen bilden eine Nullmenge.

Beweis: Dies folgt aus Satz 4.23.3, denn einelementige Teilmengen von \mathbb{R} sind Nullmengen, und \mathbb{Q} ist abzählbar. Trotzdem ist es interessant, einen Beweis unter Verwendung von Hüllreihen zu sehen:

• Es sei zunächst $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \mathbb{1}_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$. Wir weisen konkret nach, dass $\int_{\mathbb{R}} f dx = 0$, indem wir f durch die Nullfunktion $0 \in \mathcal{T}_n$ approximieren. Als Hüllreihen für f nehmen wir die

$$\varphi_\varepsilon := \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\left(\frac{k}{n} - \frac{\varepsilon}{n^3}, \frac{k}{n} + \frac{\varepsilon}{n^3}\right)} \quad (\varepsilon > 0),$$

die für alle rationalen Zahlen $\frac{k}{n}$ in $[0, 1)$ größergleich 1 sind. Es gilt

$$\mathcal{I}_1(\varphi_\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2\varepsilon}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon}{n^2} = \varepsilon \frac{\pi^2}{3},$$

sodass $\int_{\mathbb{R}} f dx = \|f\|_1 \leq \lim_{\varepsilon \searrow 0} \mathcal{I}_1(\varphi_\varepsilon) = 0$.

Man beachte, dass die zugehörige offene Überdeckung

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n} - \frac{\varepsilon}{n^3}, \frac{k}{n} + \frac{\varepsilon}{n^3} \right) \quad \text{von} \quad \mathbb{Q} \cap [0, 1)$$

die meisten irrationalen Zahlen nicht trifft, wenn ε klein ist.

• Nach Satz 4.23 ist damit auch \mathbb{Q} selbst als abzählbare Vereinigung der Nullmengen $\mathbb{Q} \cap [n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$ eine Nullmenge. \square

4.26 Satz Besitzt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ eine endliche Halbnorm ($\|f\|_1 < \infty$), dann nimmt f den Wert ∞ nur auf einer Nullmenge an.

Beweis: Setze $N := f^{-1}(\infty) \subseteq \mathbb{R}^n$. Für alle $\varepsilon > 0$ gilt $\mathbb{1}_N \leq \varepsilon|f|$, also $\|\mathbb{1}_N\|_1 \leq \varepsilon\|f\|_1$. \square

4.27 Satz Es sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ fast überall gleich f . Dann ist auch $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und $\int_{\mathbb{R}^n} g dx = \int_{\mathbb{R}^n} f dx$.

Beweis: • Wir können $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ mit Treppenfunktionen $\varphi_k \in \mathcal{T}_n$ approximieren, d.h. $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - \varphi_k\|_1 = 0$, und wir wollen zeigen, dass auch gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|g - \varphi_k\|_1 = 0.$$

• Nun ist $|g - \varphi_k| \leq |f - \varphi_k| + U_N$ ($k \in \mathbb{N}$) für

$$N := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq g(x)\} \quad , \quad U_N := \infty \cdot \mathbb{1}_N = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_N.$$

N ist nach Voraussetzung eine Nullmenge. Damit ist nach Satz 4.23

$$\|U_N\|_1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|\mathbb{1}_N\|_1 = 0.$$

Daher folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|g - \varphi_k\|_1 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \| |f - \varphi_k| + U_N \|_1 \leq \|U_N\|_1 + \lim_{k \rightarrow \infty} \|f - \varphi_k\|_1 = 0,$$

also auch $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und $\int g dx = \int f dx$. □

Wir haben in der *Analysis* an verschiedenen Stellen (z.B. dem lokalen Existenz- und Eindeigkeitssatz für die Lösungen von DGLn) den Vorteil des Arbeitens in vollständigen metrischen Räumen gesehen. In diesen konvergieren ja alle Cauchy-Folgen. Wir hätten gerne, dass auch der Raum $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ der Lebesgue-integrierbaren Funktionen einen solchen Raum bildet. Nun ist $\|\cdot\|_1$ nur eine Halbnorm. Andererseits gilt der folgende Satz:

4.28 Satz Für $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ gilt

$$\|f\|_1 = 0 \iff f(x) = 0 \text{ fast überall.}$$

Beweis: " \Leftarrow ": Dies folgt nach Satz 4.27 durch Vergleich mit der Nullabbildung.

" \Rightarrow ": Wir beweisen, daß $N := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}$ eine Nullmenge ist. Dazu schreiben wir N in der Form

$$N = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k \quad \text{für} \quad N_k := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)| \geq 1/k\}.$$

Aus $\lambda^n(N_k) = \|\mathbb{1}_{N_k}\|_1 \leq \|k|f|\|_1 = k\|f\|_1 = 0$ folgt nach Satz 4.23.3 für die abzählbare Vereinigung $\lambda^n(N) = 0$. □

Es liegt also nahe, aus $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ durch Äquivalenzklassenbildung einen neuen Raum zu machen, indem man $f \sim g$ setzt, falls $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq g(x)\}$ eine Nullmenge ist.

4.5 Abbildungen von Nullmengen

Die in (4.1) eingeführten Quader des \mathbb{R}^n sind die Bausteine unserer Maßtheorie. Um das Verhalten von Maßen unter Abbildungen zu untersuchen, sind aber *Würfel*, also Quader gleicher Seitenlänge, praktischer.

4.29 Satz Für jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert eine abzählbare Menge $(Q_i)_{i \in I}$ von bis auf Nullmengen disjunkten (d.h. $\lambda^n(A_i \cap A_j) = 0$ für $i \neq j$) kompakten Würfeln $Q_i \subset U$ mit

$$U = \bigcup_{i \in I} Q_i.$$

Beweis: Für $k \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}^n$ ist $Q_{k,a}$ der kompakte Würfel

$$Q_{k,a} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in [2^{-k}a_i, 2^{-k}(a_i + 1)]\}$$

der Kantenlänge 2^{-k} . Es gilt $\lambda^n(Q_{k,a} \cap Q_{k,a'}) = \delta_{a,a'} 2^{-nk}$,

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{a \in \mathbb{Z}^n} Q_{k,a} \quad \text{und} \quad Q_{k,a} = \sum_{\substack{b \in \mathbb{Z}^n \\ b_i \in \{2a_i, 2a_i+1\}}} Q_{k+1,b}. \quad (4.13)$$

Setzen wir $K_0 := \emptyset$ und induktiv für $\ell \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} I_\ell &:= \{(\ell, a) \mid Q_{\ell,a} \subset U \setminus \overset{\circ}{K}_{\ell-1}\}, \\ K_\ell &:= K_{\ell-1} \cup \bigcup_{i \in I_\ell} Q_i, \end{aligned}$$

dann sind die I_ℓ abzählbar. Damit ist auch $I := \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} I_\ell$ abzählbar.

Jeder Punkt $x \in U$ liegt in einem Kompaktum K_ℓ , denn wegen der Offenheit von U und (4.13) gibt es einen Würfel $Q_{k,a}$ mit $x \in Q_{k,a} \subset U$. Ist $\ell \in \mathbb{N}$ das kleinste solche k , dann ist auch $Q_{\ell,a} \cap \overset{\circ}{K}_{\ell-1} = \emptyset$. \square

4.30 Definition Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen metrischen Räumen heißt **lokal lipschitzstetig**, wenn für jedes Kompaktum $K \subset X$ die Restriktion $f|_K$ lipschitzstetig ist.

4.31 Satz Alle Abbildungen $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ mit offenem Definitionsbereich $U \subseteq \mathbb{R}^m$ sind lokal lipschitzstetig.

Beweis: Es reicht aus, dies für die Komponenten f_i von $f = (f_1, \dots, f_n)$ zu zeigen. Sei also o.B.d.A. $n = 1$. Wäre $f|_K$ nicht lipschitzstetig, dann würde es eine Folge $(x_k, y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $x_k \neq y_k \in K$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|f(x_k) - f(y_k)|}{\|x_k - y_k\|} = \infty$ geben.

Da K kompakt ist, können wir die Existenz der Limiten $x := \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \in K$ und $y := \lim_{k \rightarrow \infty} y_k \in K$ annehmen.

- Der Fall $x \neq y$ kann nicht auftreten, denn dann ist

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|f(x_k) - f(y_k)|}{\|x_k - y_k\|} = \frac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|} < \infty.$$

- Der Fall $x = y$ ist ebenfalls unmöglich, denn wegen der Offenheit von U gibt es eine abgeschlossene Vollkugel $B_r(x) \subset U$ von positivem Radius r . Wegen der Stetigkeit von Df gilt

$$L := \sup\{\|Df(z)\| \mid z \in B_r(x)\} < \infty.$$

Für große $k \in \mathbb{N}$ sind x_k und y_k in $B_r(x)$, wie auch ihre Verbindungsstrecke S_k . Es gibt also nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ein $\xi_k \in S_k$ mit $f(x_k) - f(y_k) = Df(\xi_k) \cdot (x_k - y_k)$, also $\frac{|f(x_k) - f(y_k)|}{\|x_k - y_k\|} \leq \|Df(\xi_k)\| \leq L$. \square

4.32 Satz Ist $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ (mit $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $m \leq n$) lokal lipschitzstetig und $N \subseteq U$ eine Nullmenge, dann ist $f(N) \subseteq \mathbb{R}^n$ ebenfalls eine Nullmenge.

Beweis: • Nach Satz 4.29 können wir U durch abzählbar viele kompakte Würfel K_ℓ ausschöpfen. Für jedes dieser Kompakta K_ℓ ist $N_\ell := N \cap K_\ell$ nach Satz 4.23.2 ebenfalls eine Nullmenge. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine Hüllreihe $\varphi = \sum_{r=1}^{\infty} c_r \mathbb{1}_{Q_r}$ von $2\mathbb{1}_{N_\ell}$ mit $\|\varphi\|_1 < \varepsilon$. φ lässt sich (bezüglich $\|\cdot\|_1$) durch ihre Partialsummen $\sum_{r=1}^{r'} c_r \mathbb{1}_{Q_r}$ approximieren und ist daher in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, mit $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi dx = \|\varphi\|_1$. Die Menge

$$V := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) > 1\}$$

enthält N_ℓ , denn $\varphi \geq 2\mathbb{1}_{N_\ell}$. Außerdem ist V offen, denn ist $\sum_{r=1}^{r'} c_r \mathbb{1}_{Q_r}(x) > 1$, dann gilt diese Ungleichung auf dem (wegen $r' < \infty$ offenen) Schnitt der x enthaltenden offenen Quader Q_ℓ . Wir können also über V integrieren. Ferner ist

$$\lambda^m(V) \leq \int_V \varphi dx \leq \int_{\mathbb{R}^m} \varphi dx < \varepsilon.$$

- Nach Satz 4.29 können wir V durch abzählbar viele bis auf Nullmengen disjunkte Würfel W_r ausschöpfen. Die Vereinigung der Bilder $f(W_r)$ überdeckt damit $f(V)$, also auch $f(N_\ell)$. Auch wenn diese Würfel nicht ganz in K_n enthalten sein müssen, können wir o.B.d.A. annehmen, dass für eine geeignete Lipschitz-Konstante L gilt:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\| \quad (x, y \in W_r, r \in \mathbb{N}).$$

Damit ist das Bild $f(W_r)$ von W_r in einem Würfel $W'_r \subset \mathbb{R}^n$ enthalten, dessen Kantenlängen $L\sqrt{m}$ -mal¹⁴ so groß ist wie die Kantenlänge D_r von W_r . Nach Definition der Würfel in Satz 4.29 ist $D_r \leq 1$. Daher gilt mit $c := (L\sqrt{m})^n$

$$\lambda^n(W'_r) \leq cD_r^n \leq cD_r^m = c\lambda^m(W_r),$$

denn nach Annahme ist $n \geq m$.

Insgesamt ist für alle $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \|\mathbb{1}_{f(N_\ell)}\|_1 &\leq \|\mathbb{1}_{f(V)}\|_1 \leq \sum_{r=1}^{\infty} \|\mathbb{1}_{f(W_r)}\|_1 \leq \sum_{r=1}^{\infty} \|\mathbb{1}_{W'_r}\|_1 \\ &\leq c \sum_{r=1}^{\infty} \|\mathbb{1}_{W_r}\|_1 = c\|\mathbb{1}_{\bigcup_{r=1}^{\infty} W_r}\|_1 = c\|\mathbb{1}_V\|_1 \leq c\varepsilon, \end{aligned}$$

also auch $f(N_\ell)$ eine Nullmenge. □

4.33 Bemerkungen 1. Auf die lokale Lipschitzstetigkeit von f kann nicht verzichtet werden. Es gibt nämlich stetige $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, die Nullmengen auf Mengen von positivem Maß abbilden.

Ein Beispiel ergibt sich durch Verwendung der Peano-Kurve $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ (siehe Bsp. 4.2.3 der *Analysis II*). Diese ist stetig, und ihr Bild $c([0, 1]) = [0, 1]^2$ hat Lebesgue-Maß 1 in \mathbb{R}^2 .

$$\hat{c} : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \hat{c}(x, y) := c(x)$$

ist stetig, und das Bild der Nullmenge $[0, 1] \times \{0\}$ unter \hat{c} besitzt Maß 1.

Dass hier von einem nicht offenen Intervall $[0, 1]$ ausgegangen wurde, ist für das Argument nicht wesentlich.

Ein weiteres Beispiel ist die so genannte Cantor-Funktion.

2. Für Bilddimensionen $n < m$ wird die Aussage des Satzes ebenfalls falsch, wie man schon durch Betrachtung von linearen Abbildungen $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ sieht.

Auch wenn unter der Projektion $\pi_2 : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ Nullmengen N i.Allg. nicht auf Nullmengen abgebildet werden, sind die Schnitte von N mit den Fasern $\pi_2^{-1}(y)$ i.Allg. λ^m -Nullmengen:

¹⁴Der Faktor \sqrt{m} ist das Verhältnis der Länge der Raumdiagonale eines m -dimensionalen Würfels zu seiner Seitenlänge.

4.34 Satz Für $m, p \in \mathbb{N}$, $n := m + p$, eine Nullmenge $N^{(n)} \subset \mathbb{R}^n$ und

$$N_y^{(m)} := \{x \in \mathbb{R}^m \mid (x, y) \in N^{(n)}\}$$

ist $N^{(p)} := \{y \in \mathbb{R}^p \mid N_y^{(m)} \text{ ist keine Nullmenge in } \mathbb{R}^m\}$ eine Nullmenge in \mathbb{R}^p .

Beweis: Wie im Beweis des Satzes 4.32 können wir für alle $\varepsilon > 0$ die Nullmenge $N^{(n)}$ durch abzählbar viele Quader $Q_k \subset \mathbb{R}^n$ überdecken mit $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^n(Q_k) < \varepsilon$. Ähnlich wie $\pi_2 : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ bezeichnen wir mit $\pi_1 : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ die Projektion auf den ersten Faktor. Da die Quader achsenparallel sind, sind ihre Projektionen ebenfalls Quader. Wegen $\mathbb{1}_{N^{(n)}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{Q_k}$ gilt auch

$$\mathbb{1}_{N_y^{(m)}} \leq \varphi_y := \sum_{k=1}^{\infty} c_k(y) \mathbb{1}_{\pi_1(Q_k)} \quad \text{mit} \quad c_k(y) := \mathbb{1}_{\pi_2(Q_k)}(y).$$

Es ist

$$N^{(p)} = \{y \in \mathbb{R}^p \mid f(y) > 0\} \quad \text{für} \quad f(y) := \|\mathbb{1}_{N_y^{(m)}}\|_1,$$

also $f(y) \leq \|\varphi_y\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(y) \lambda^m(\pi_1(Q_k))$ und damit

$$\|f\|_1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^p(\pi_2(Q_k)) \cdot \lambda^m(\pi_1(Q_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^n(Q_k) < \varepsilon.$$

Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt, ist $\|f\|_1 = 0$, also $N^{(p)}$ nach Satz 4.28 eine Nullmenge in \mathbb{R}^p . \square

5 Sätze und Rechenregeln der Lebesgueintegration

5.1 Der Banach-Raum $L^1(\mathbb{R}^n)$

Wir rekapitulieren den bisherigen Stand der Integrationstheorie:

Wir haben für eine große Klasse von Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ das sogenannte Lebesgue-Integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$$

eingeführt, und zwar zunächst auf dem Raum \mathcal{T}_n der Treppenfunktionen, und dann für den Raum $\tilde{\mathcal{L}}^1(\mathbb{R}^n)$ der sogenannten Lebesgue-integrierbaren Funktionen f . Dies waren solche Funktionen, die sich durch Folgen $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen $\varphi_k \in \mathcal{T}_n$ approximieren ließen im Sinn von

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \varphi_k\|_1 = 0.$$

Dabei ist $\|\cdot\|_1$ die sogenannte \mathcal{L}^1 -Halbnorm, definiert über das Infimum der Integrale von Hüllreihen. Ist dies der Fall, dann nimmt f den Wert ∞ nur auf einer Nullmenge an, und eine Abänderung der Funktion auf einer solchen Menge beeinflusst den Wert des Integrals nicht. Wir betrachten daher im Weiteren den \mathbb{C} -Vektorraum $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \subset \tilde{\mathcal{L}}^1(\mathbb{R}^n)$ der Lebesgue-integrierbaren $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$. Nun unterscheidet sich die Abbildung

$$\|\cdot\|_1 : \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty)$$

von einer Norm dadurch, dass es von der Nullfunktion verschiedene Funktionen $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\|f\|_1 = 0$ gibt. Ein Beispiel bildet die charakteristische Funktion einer Hyperfläche.

Normen sind ausgesprochen nützlich bei allen Konvergenzfragen. Wir hatten also gern eine Norm auf dem Raum der Lebesgue-integrierbaren Funktionen.

Hier hilft der Begriff der Nullmenge. Das ist eine Teilmenge des $N \subset \mathbb{R}^n$ vom Lebesgue-Maß $\lambda^n(N)$ Null oder, äquivalent, mit verschwindender Halbnorm

$$\|\mathbb{1}_N\|_1 = 0$$

der charakteristischen Funktion.

5.1 Lemma $\mathcal{N} := \{f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \mid \|f\|_1 = 0\}$ ist ein Unterraum von $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

Beweis: • $0 \in \mathcal{N}$.

• Sind $f, g \in \mathcal{N}$, dann gilt nach der Dreiecksungleichung

$$\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1 = 0, \text{ also auch } f + g \in \mathcal{N}.$$

• Ist $f \in \mathcal{N}$ und $c \in \mathbb{C}$, dann ist $\|cf\|_1 = |c| \|f\|_1 = 0$, also $cf \in \mathcal{N}$. □

Wir nennen nun zwei Funktionen $g_1, g_2 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ *äquivalent*, wenn sie sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden, oder gleichbedeutend, wenn $g_1 - g_2 \in \mathcal{N}$.

5.2 Definition Es sei $L^1(\mathbb{R}^n)$ der \mathbb{C} -Vektorraum

$$L^1(\mathbb{R}^n) := \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)/\mathcal{N} \quad \text{mit} \quad \|g + \mathcal{N}\|_1 := \|g\|_1.$$

Wir haben nun eine *Norm* auf diesem Faktorraum erklärt, dessen Elemente Äquivalenzklassen von Funktionen der Form $g + \mathcal{N}$ sind, denn der Wert der \mathcal{L}^1 -Halbnorm hängt nicht vom Repräsentanten der Äquivalenzklasse ab:

$$\|g_1\|_1 = \|g_2\|_1 \quad \text{für} \quad g_1, g_2 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \quad \text{und} \quad g_1 - g_2 \in \mathcal{N}.$$

Außerdem ist nach Definition von \mathcal{N} die Halbnorm genau auf der Äquivalenzklasse \mathcal{N} der Nullfunktion $0 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ gleich Null.

5.3 Bemerkung Der in der Analysis so wesentliche Raum $L^1(\mathbb{R}^n)$ besteht nun nicht mehr aus Funktionen, sondern aus Äquivalenzklassen. Für solche Äquivalenzklassen $\tilde{f} := f + \mathcal{N} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist aber der Ausdruck $\tilde{f}(x)$ undefiniert (wir können $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ ja an abzählbar vielen Stellen abändern, ohne $f + \mathcal{N}$ zu verlassen).

Immerhin, in jeder Äquivalenzklasse $f + \mathcal{N}$ gibt es höchstens eine stetige Funktion, und nichts hindert uns dann daran, gegebenenfalls mit diesem Repräsentanten zu arbeiten.

Die Elemente von $L^1(\mathbb{R}^n)$ als Funktionen zu bezeichnen ist ein schlampiger aber üblicher Sprachgebrauch, und wir wollen hier mit der Tradition nicht brechen.

Wir haben also jetzt aus $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ den normierten Raum

$$(L^1(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_1)$$

konstruiert, und das Lebesgue-Integral induziert ein positives lineares Funktional auf $L^1(\mathbb{R}^n)$, das wir ebenfalls mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, dx \equiv \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, dx \quad (f \in L^1(\mathbb{R}^n))$$

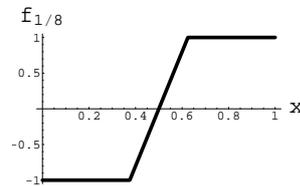
bezeichnen. Die Frage ist nun, ob in $L^1(\mathbb{R}^n)$ Cauchy-Folgen von [Äquivalenzklassen von] Funktionen konvergieren, ob dieser Raum also ein Banach-Raum ist. A priori muss dies nicht so sein:

5.4 Beispiel Es sei $V := C([0, 1], \mathbb{C})$ der Vektorraum der stetigen Funktionen auf dem Einheitsintervall, und wir wollen ihn mit der Norm

$$\|f\| := \int_{[0,1]} |f(x)| \, dx \quad (f \in V)$$

versehen (Auf V ist dies tatsächlich eine Norm, denn es gibt keine von $0 \in V$ verschiedene stetige Funktion f mit $\int_{[0,1]} |f(x)| \, dx = 0$.) Es sei für $\varepsilon > 0$

$$f_\varepsilon \in V \quad , \quad f_\varepsilon(x) := \begin{cases} -1 & , \quad x \leq \frac{1}{2} - \varepsilon \\ \frac{x - \frac{1}{2}}{\varepsilon} & , \quad |x - \frac{1}{2}| < \varepsilon \\ 1 & , \quad x \geq \frac{1}{2} + \varepsilon \end{cases} .$$



f_ε ist stetig und

$$\|f_\varepsilon - f_{\varepsilon'}\| < \varepsilon \quad \text{für alle } \varepsilon' \in (0, \varepsilon),$$

aber der punktweise Limes f_0 (mit $f_0(x) := \text{sign}(x - \frac{1}{2})$) ist nicht in V , $(V, \|\cdot\|)$ also kein Banach-Raum.

Wir können auch nicht einfach so argumentieren, dass wir schon $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ durch Grenzwertbildung (für Treppenfunktionen) gewonnen haben, denn daraus folgt noch nicht automatisch, dass $L^1(\mathbb{R}^n)$ unter erneuter Grenzwertbildung abgeschlossen ist. Trotzdem gilt:

5.5 Satz (Riesz–Fischer) 1. $L^1(\mathbb{R}^n)$ ist ein Banach–Raum.

2. Ist $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ mit \mathcal{L}^1 –Grenzwert f , dann konvergiert eine geeignete Teilfolge fast überall gegen f .

5.6 Definition Obwohl $\|\cdot\| : \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty)$ nur eine Halbnorm ist, spricht man

- von einer **Cauchy–Folge** $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall m, n \geq N(\varepsilon) : \|f_m - f_n\|_1 < \varepsilon;$$

- von **Konvergenz gegen** $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, falls $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_1 = 0$. In Zeichen: $f = \mathcal{L}^1\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$.

5.7 Bemerkung Folgt nicht die zweite Behauptung aus der ersten? Cauchy–Folgen konvergieren doch immer gegen ihren Grenzwert, soweit dieser existiert! Ja, aber hier geht es nicht um L^1 –Konvergenz, d.h. $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - f\|_1 = 0$, sondern um $\lim_{k \rightarrow \infty} (f_k(x) - f(x)) = 0$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$!

Beweis: Wir gehen von den Äquivalenzklassen $f_k \in L^1(\mathbb{R}^n)$ zu Repräsentanten in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ über, die wir ebenfalls mit f_k bezeichnen.

Zunächst konstruieren wir eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, gegen die eine geeignete Teilfolge der Cauchy–Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ fast überall konvergiert. Danach zeigen wir, dass f \mathcal{L}^1 –Grenzwert der Cauchy–Folge ist.

2) Wir können eine Teilfolge $(f_{k_\ell})_{\ell \in \mathbb{N}}$ mit $\|f_k - f_{k_\ell}\|_1 \leq 2^{-\ell}$ für $k \geq k_\ell$ auswählen, sodass insbesondere

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \|f_{k_{\ell+1}} - f_{k_\ell}\|_1 \leq \sum_{\ell=1}^{\infty} 2^{-\ell} = 1$$

ist. Setzen wir $g_\ell := f_{k_{\ell+1}} - f_{k_\ell}$ und $g := \sum_{\ell=1}^{\infty} |g_\ell|$, dann folgt mit der verallgemeinerten Dreiecksungleichung (4.7)

$$\|g\|_1 \leq \sum_{\ell=1}^{\infty} \|g_\ell\|_1 \leq 1 < \infty.$$

Nach Satz 4.26 (der Integrabilität nicht voraussetzt!) ist $\mathcal{N} := g^{-1}(\infty) \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge, $\sum_{\ell=1}^{\infty} g_{\ell}$ konvergiert also fast überall absolut. Daher ist

$$f(x) := \begin{cases} \lim_{\ell \rightarrow \infty} f_{k_{\ell}}(x) & , \quad x \notin \mathcal{N} \\ 0 & , \quad x \in \mathcal{N} \end{cases}$$

wegen

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} f_{k_{\ell}}(x) = f_{k_1}(x) + \sum_{\ell=1}^{\infty} g_{\ell}(x) \quad \text{für } x \notin \mathcal{N}$$

wohldefiniert, für alle $x \in \mathbb{R}^n$ endlich, und die Teilfolge $(f_{k_{\ell}})_{\ell \in \mathbb{N}}$ konvergiert fast überall gegen f (nämlich auf $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{N}$).

- 1) Diese punktweise Konvergenz sagt aber noch nichts darüber aus, dass die f_k (oder auch nur die $f_{k_{\ell}}$) in $L^1(\mathbb{R}^n)$ gegen f konvergieren.

Dazu müssen wir ja zeigen, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $k(\varepsilon)$ mit

$$\|f - f_k\|_1 \leq \varepsilon \quad (k \geq k(\varepsilon)) \quad (5.1)$$

gibt. Dazu sei $m = m(\varepsilon)$ so gewählt, dass $2^{2-m} \leq \varepsilon$ und $k(\varepsilon) := k_m$. Dann ist

- $\sum_{\ell=m}^{\infty} \|g_{\ell}\|_1 \leq \sum_{\ell=m}^{\infty} 2^{-\ell} = 2^{1-m} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ und
- $\|f_k - f_{k_m}\|_1 \leq 2^{-m} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (k \geq k(\varepsilon))$.

Andererseits lässt sich $f_{k_m} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ durch Treppenfunktionen $\varphi \in \mathcal{T}_n$ beliebig genau (im L^1 -Sinn) approximieren, es existiert also ein φ mit

$$\|f_{k_m} - \varphi\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Daraus folgt mit der verallgemeinerten Dreiecksungleichung (4.7)

$$\begin{aligned} \|f - \varphi\|_1 &\leq \|f - f_{k_m}\|_1 + \|f_{k_m} - \varphi\|_1 = \left\| \sum_{\ell=m}^{\infty} g_{\ell} \right\|_1 + \|f_{k_m} - \varphi\|_1 \\ &\leq \sum_{\ell=m}^{\infty} \|g_{\ell}\|_1 + \|f_{k_m} - \varphi\|_1 \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

also $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. (5.1) zeigen wir mit

$$\|f - f_k\|_1 \leq \|f - f_{k_m}\|_1 + \|f_{k_m} - f_k\|_1 \leq \varepsilon \quad (k \geq k(\varepsilon)).$$

Also ist $f = \mathcal{L}^1\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} f_k$. □

5.8 Bemerkungen 1. Das Lebesgue-Integral ist wegen

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f \, dx - \int_{\mathbb{R}^n} g \, dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f - g| \, dx = \|f - g\|_1 \quad (f, g \in L^1(\mathbb{R}^n))$$

eine Lipschitz-stetige Abbildung $L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ (mit Lipschitz-Konstante 1), also ein *stetiges* (lineares) Funktional. Aus $f = L^1\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} f_k$ folgt also

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f \, dx.$$

2. Die Folge der f_k selbst braucht *nicht* punktweise zu konvergieren:

5.9 Beispiel einer im L^1 -Sinn aber nicht punktweise konvergenten Folge

Zu $k \in \mathbb{N}$ seien $\nu, q \in \mathbb{N}_0$ durch $\nu := \lfloor \log_2 k \rfloor$ und $q := k - 2^\nu$ definiert, also $0 \leq q < 2^\nu$. Wir wählen die Funktionenfolge

$$f_k := \mathbb{1}_{I_k} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \quad \text{mit} \quad I_k := [q2^{-\nu}, (q+1)2^{-\nu}].$$

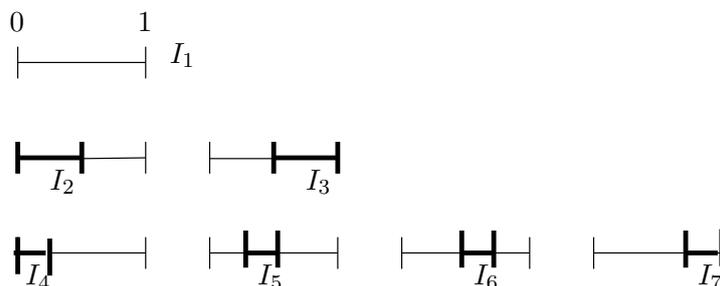


Abbildung 5.1: Folge der Intervalle I_k

Es ist $L^1\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = 0$, aber für **kein** $x \in [0, 1]$ existiert der punktweise Limes

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x),$$

denn x ist in mindestens einem, höchstens zwei Intervallen I_k der Länge $2^{-\nu}$ enthalten.

Man sollte auch ein Beispiel in umgekehrter Richtung im Kopf behalten:

5.10 Beispiel einer punktweise aber nicht im \mathcal{L}^1 -Sinn konvergenten Folge Es sei $f_k := k \mathbb{1}_{[1/k, 2/k]}$ ($k \in \mathbb{N}$). Dann ist $f_k \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = 0$.

Würde aber die Folge im \mathcal{L}^1 -Sinn gegen ein $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ konvergieren, dann müsste $\int_{\mathbb{R}} f \, dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_k \, dx = 1$ gelten; gleichzeitig aber nach dem Satz von Riesz–Fischer (Satz 5.5) $f(x) = 0$ für fast alle $x \in \mathbb{R}$ gelten, im Widerspruch zu Satz 4.28.

Oft kann man für eine Folge integrierbarer Funktionen die Existenz ihres punktweisen Limes nachprüfen, will aber wissen, ob sie auch im \mathcal{L}^1 -Sinn gegen diesen konvergieren. Wir werden dafür im folgenden Satz, in Lemma 5.13 und im Satz 5.18 unterschiedliche Kriterien kennenlernen.

5.11 Satz (Beppo Levi) *Es sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge integrierbarer Funktionen $f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, sodass die Folge ihrer Integrale $\int_{\mathbb{R}^n} f_k \, dx$ beschränkt ist. Dann ist $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $f(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$ in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, und*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, dx. \quad (5.2)$$

Beweis: Zunächst existiert $I := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, dx \in \mathbb{R}$, denn die Folge dieser reellen Zahlen ist monoton wachsend und beschränkt. Wegen

$$\|f_m - f_k\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} (f_m - f_k) \, dx \leq I - \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, dx \quad \text{für } m \geq k$$

ist $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine \mathcal{L}^1 -Cauchy-Folge und damit ist nach dem Satz von Riesz–Fischer (Satz 5.5) f ein \mathcal{L}^1 -Limes der Folge. Nach Bemerkung 5.8.1. gilt (5.2). \square

5.12 Bemerkungen 1. Satz 5.11 wird auch **Satz von der monotonen Konvergenz** genannt.

Die Voraussetzung der Monotonie kann nicht weggelassen werden:

Ähnlich wie in Beispiel 5.10 besitzen die Funktionen $f_k := k^{-1} \mathbb{1}_{(0,k]} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ein (durch 1) beschränktes Integral, besitzen sogar einen punktweisen Limes $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = 0$, konvergieren aber nicht im \mathcal{L}^1 -Sinn gegen diesen.

2. Man kann also unter diesen Voraussetzungen (punktweisen) Limes und Integral vertauschen.
3. Eine analoge Aussage gilt für eine monoton *fallende* Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Oft ist die Monotonievoraussetzung nicht erfüllt, man kann aber auf den punktweisen Limes Inferior trotzdem den Satz von der monotonen Konvergenz anwenden:

5.13 Lemma (Fatou) Es seien $f_k \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ ($k \in \mathbb{N}$) nicht negative Funktionen, für die $I := \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k dx < \infty$ gilt. Dann ist die durch

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty] \quad , \quad f(x) := \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$$

definierte Funktion ebenfalls integrierbar, und

$$\int_{\mathbb{R}^n} f dx \leq I. \tag{5.3}$$

5.14 Bemerkung Beispiel 5.10 zeigt, dass in (5.3) selbst dann i.Allg. keine Gleichheit gilt, wenn der Limes $I = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k dx$ existiert.

Beweis: • Die Folge der durch

$$F_k(x) := \inf\{f_\ell(x) \mid \ell \geq k\} \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

definierten Funktionen $(F_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist monoton wachsend. Nach Definition des Limes Inferior (Definition 7.13 der *Analysis I*) gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_k(x) = f(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

• Definiert man für $\ell \geq k \in \mathbb{N}$

$$G_{k,\ell}(x) := \min\{f_m(x) \mid m \in \{k, \dots, \ell\}\} \quad (x \in \mathbb{R}^n),$$

dann ist $G_{k,\ell} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist die Folge $(G_{k,\ell})_{\ell \geq k}$ monoton fallend, und

$$F_k(x) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} G_{k,\ell}(x) \geq 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Nach dem Satz von Beppo Levi folgt damit auch $F_k \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

• Andererseits ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} F_k(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \inf_{\ell \geq k} f_\ell(x) dx \leq \inf_{\ell \geq k} \int_{\mathbb{R}^n} f_\ell(x) dx.$$

Also ist wegen $I = \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{\ell \geq k} \int_{\mathbb{R}^n} f_\ell(x) dx < \infty$

$$\int_{\mathbb{R}^n} F_k(x) dx \leq I$$

und der Satz von Beppo Levi auf die $F_k \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ anwendbar. Deren punktweiser Limes f ist damit integrierbar mit $\int f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} F_k dx \leq I$. \square

Als zweite Anwendung des Satzes von Beppo Levi zeigen wir die folgende wichtige Eigenschaft des Lebesgue-Maßes.

5.15 Satz Das Lebesgue-Maß λ^n ist σ -additiv. Sogar für messbare $A_k \subset \mathbb{R}^n$ ($k \in \mathbb{N}$), die bis auf Nullmengen disjunkt sind ($\lambda^n(A_k \cap A_l) = 0$ für $(l \neq k)$) gilt

$$\lambda^n \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^n(A_k)$$

zumindest falls die Summe endlich ist (siehe Bemerkung 4.17).

Beweis: Für $B_l := \bigcup_{k=1}^l A_k$ ist die Folge der Funktionen $\mathbb{1}_{B_l}$ monoton wachsend. Wenn zunächst die A_k disjunkt sind, gilt $\mathbb{1}_{B_l} = \sum_{k=1}^l \mathbb{1}_{A_k}$, also

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{B_l} dx = \sum_{k=1}^l \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{A_k} dx = \sum_{k=1}^l \lambda^n(A_k) \quad (k \in \mathbb{N}).$$

$(\mathbb{1}_{B_l})_{l \in \mathbb{N}}$ konvergiert dann punktweise gegen die charakteristische Funktion von $B := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Sind die Integrale $\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{B_l} dx$ beschränkt, dann ist nach Satz 5.11

$$\lambda^n(B) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_B dx = \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{B_l} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^n(A_k).$$

Sind die A_k nur bis auf Nullmengen disjunkt, dann ändert dies nach Satz 4.23 nichts an der Richtigkeit der Aussage. \square

5.16 Satz Lebesgue-Integral und Lebesgue-Maß sind **translationsinvariant**, d.h.

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x+a) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \quad (f \in L^1(\mathbb{R}^n), a \in \mathbb{R}^n)$$

und

$$\lambda^n(A+a) = \lambda^n(A) \quad (A \subset \mathbb{R}^n \text{ meßbar}, a \in \mathbb{R}^n).$$

Beweis: Alle unsere relevanten Definitionen, angefangen mit der Definition des Quader-Volumen über die der Treppenfunktionen und ihres Integrals, bis zu den \mathcal{L}^1 -Funktionen und meßbaren Mengen, waren translationsinvariant. \square

5.17 Bemerkung Zusammen mit der Translationsinvarianz und der *Normierung* $\lambda^n([0, 1]^n) = 1$ des Würfelvolumens legt die σ -Additivität das Lebesgue-Maß $\lambda^n : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ auf einer geeigneten σ -Algebra \mathcal{M} des \mathbb{R}^n eindeutig fest, siehe z.B. Bauer [Ba], §8.

Ein weiteres Kriterium, für den punktweisen Limes einer Funktionenfolge zu zeigen, dass er auch der L^1 -Limes ist, bietet die folgende, auch *Satz von Lebesgue* genannte Aussage:

5.18 Satz von der majorisierten Konvergenz Es sei $f_k \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ ($k \in \mathbb{N}$), und der punktweise Limes

$$f(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$$

existiere fast überall. Wenn eine gemeinsame Majorante $F \geq |f_k|$, $F \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ existiert, dann ist $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, dx.$$

Beweis:

- Für Real- und Imaginärteile der f_k gelten die gleichen Voraussetzungen wie für die f_k selbst. Gleiches gilt für Positiv- und Negativteile reeller f_k .

Daher nehmen wir o.B.d.A. $f_k \geq 0$ an und zeigen den Satz in diesem Spezialfall. Die Aussage für komplexwertige f_k folgt dann durch Zerlegung.

- Wir setzen

$$f^+(x) := \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \quad \text{und} \quad f^-(x) := \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k(x).$$

Damit ist

$$0 \leq f^-(x) \leq f^+(x) \leq F(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

und nach Annahme der fast überall-Existenz von $f(x)$ gilt außerhalb einer Nullmenge

$$f^+(x) = f(x) = f^-(x).$$

- Nach dem Lemma von Fatou (Lemma 5.13) ist f^- integrierbar mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^- \, dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, dx.$$

Andererseits können wir dieses Lemma auch auf die Funktionen $g_k := F - f_k$ anwenden, denn es ist $g_k \geq 0$, $g_k \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und $\int_{\mathbb{R}^n} g_k \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} F \, dx$. Wir erhalten die Abschätzung für

$$g(x) := \liminf_{k \rightarrow \infty} g_k(x) = F(x) - f^+(x),$$

$\int_{\mathbb{R}^n} g \, dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k \, dx = \int F \, dx - \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, dx$, also

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^+ \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} (F - g) \, dx \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, dx.$$

- Damit ist

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k dx \geq \int_{\mathbb{R}^n} f^- dx = \int_{\mathbb{R}^n} f dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^+ dx \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k dx.$$

Hier muss offensichtlich Gleichheit gelten. \square

5.19 Bemerkung Wir wissen schon, dass Entsprechendes für den \mathcal{L}^1 -Limes einer \mathcal{L}^1 -Cauchy-Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ integrierbarer Funktionen gilt (Satz 5.5 von Riesz-Fischer) und ebenso für eine monoton wachsende Folge mit beschränktem Integral (Satz von Beppo Levi). Aber oft ist eben nur der Satz 5.18 anwendbar, denn die \mathcal{L}^1 -Konvergenz ist oft nur schwer zu überprüfen und die Monotonie oft nicht gegeben.

5.20 Beispiel (Die Gammafunktion) In der *Analysis II* haben wir auf der Halbebene $D = \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > 0\}$ die Gamma-Funktion durch $\Gamma(s) := \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt$ definiert. Dies ist für diese Integralformel die größtmögliche Halbebene, denn schon für $s = 0$ ist der Integrand nicht mehr in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+)$.

Andererseits ist für viele mathematische Fragen, etwa in der analytischen Zahlentheorie, eine Ausweitung des Definitionsbereiches wünschenswert.

Um dies durchzuführen, erinnern wir uns daran (Satz 8.33 der *Analysis I*), dass

$$e^{-t} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \quad (t \in \mathbb{C}) \quad (5.4)$$

gilt. Wir würden gern die Polynome $t \mapsto \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ statt e^{-t} in die Integraldefinition eintragen, explizit integrieren und dann den Limes bilden. Dies ist nicht direkt möglich, denn dann wäre der Integrand nicht mehr in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+)$. Allerdings ist dies für $s \in D$ der Fall, wenn wir $f_s(t) := t^{s-1} e^{-t}$ durch

$$f_{s,n}(t) := \begin{cases} t^{s-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n & , \quad 0 < t \leq n \\ 0 & , \quad t > n \end{cases}$$

ersetzen, denn die $f_{s,n}$ sind stetig (beachte $f_{s,n}(n) = 0$) und integrierbar.

Wegen (5.4) gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{s,n}(t) = f_s(t) \quad (t > 0).$$

Außerdem ist für reelle $s > 0$

$$0 \leq f_{s,n}(t) < f_s(t),$$

denn für $t < n$ ist wegen $\log(1-x) = -\sum_{k=1}^\infty x^k/k$

$$\log \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = n \log \left(1 - \frac{t}{n}\right) = -t - \sum_{k=2}^\infty \frac{t^k}{kn^{k-1}} \leq -t,$$

also $(1 - \frac{t}{n})^n \leq e^{-t}$. Damit ist für beliebige $s \in D$ und $\Gamma_n(s) := \int_0^\infty f_{s,n}(t) dt$

$$\begin{aligned} |\Gamma_n(s)| &\leq \int_0^\infty |f_{s,n}(t)| dt = \int_0^n t^{\operatorname{Re}(s)-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt \\ &\leq \int_0^\infty t^{\operatorname{Re}(s)-1} e^{-t} dt = \Gamma(\operatorname{Re}(s)). \end{aligned}$$

Der Satz von Lebesgue ergibt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n(s) = \Gamma(s) \quad (s \in D).$$

Andererseits folgt durch partielle Integration

$$\begin{aligned} \Gamma_n(s) &= \int_0^n t^{s-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \frac{n}{ns} \int_0^n t^s \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} dt \\ &= \dots = \frac{n! n^{s+n}}{n^n s(s+1) \cdot \dots \cdot (s+n)} = \frac{n! n^s}{s(s+1) \cdot \dots \cdot (s+n)}. \end{aligned}$$

Damit sind alle $\Gamma_n(s)$ auf dem gemeinsamen Definitionsbereich $\tilde{D} := \{s \in \mathbb{C} \mid s \notin \mathbb{Z} - \mathbb{N}_0\}$ definiert, es gilt

$$\Gamma_{n+1}(s) = \Gamma_1(s) \prod_{k=1}^n \frac{\Gamma_{k+1}(s)}{\Gamma_k(s)} \quad (s \in \tilde{D}),$$

und wegen

$$\frac{\Gamma_{k+1}(s)}{\Gamma_k(s)} = \frac{(k+1) \left(\frac{k+1}{k}\right)^s}{s+k+1} = \frac{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^s}{1 + \frac{s}{k+1}} = \frac{1 + \frac{s}{k} + \mathcal{O}(k^{-2})}{1 + \frac{s}{k} + \mathcal{O}(k^{-2})} = 1 + \mathcal{O}(k^{-2})$$

existiert der Limes

$$\Gamma(s) := \lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n(s) = \Gamma_1(s) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{\Gamma_{k+1}(s)}{\Gamma_k(s)} \quad (s \in \tilde{D}).$$

Wie stellen wir nun fest, ob eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ Lebesgue-integrierbar ist? Hier ist oft das folgende Kriterium nützlich:

5.21 Satz *Es sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ fast überall stetig und $|f| \leq g$ für ein $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$; dann ist auch $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.*

Satz 5.21 wird unter Zuhilfenahme des Satzes von Lebesgue bewiesen, siehe [Ko], Kap. 5.3. Um den Satz anwenden zu können, braucht man natürlich einen gewissen Vorrat an Majoranten $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Beispielsweise kann man sich fragen, wie schnell eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ lokal, d.h. in der Umgebung eines Punktes $x \in \mathbb{R}^n$, divergieren kann, bzw. wie langsam sie bei Unendlich gegen Null streben kann, damit noch $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt. Entsprechende Majoranten für f diskutieren wir in Bsp. 5.35, wenn wir die Transformationsformel zur Verfügung haben.

Eine weitere Anwendung findet der Satz 5.18 bei der Theorie der Fourier-Transformation:

5.22 Definition Die Fourier-Transformierte \hat{f} von $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist definiert durch

$$\hat{f}(k) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ik \cdot x} dx \quad (k \in \mathbb{R}^n).$$

5.23 Bemerkung Oft wird die Fourier-Transformation auch unter Weglassung der Konstante $(2\pi)^{-n/2}$ definiert. Wenn wir später quadratintegrale Funktionen Fourier-transformieren, ist allerdings diese Wahl nötig, um die Unitarität dieser linearen Abbildung sicherzustellen.

Zunächst wissen wir noch nicht einmal, ob für $k \neq 0$ das Integral konvergiert. Wir würden gern Satz 4.8 benutzen, nach dem das Produkt von f und einer beschränkten \mathcal{L}^1 -Funktion g wieder integrierbar ist, aber $g(x) := e^{-ik \cdot x}$ ist nicht integrierbar. Tatsächlich ist das auch nicht nötig:

5.24 Satz Das Produkt von $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und einer beschränkten Funktion $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ist integrierbar, wenn g lokal integrierbar ist, d.h. wenn für alle $r > 0$ die Funktionen

$$g_r(x) := \begin{cases} g(x) & , \|x\| \leq r \\ 0 & , \|x\| > r \end{cases}$$

integrierbar sind.

Beweis: Nach Satz 4.8 ist $f \cdot g_r \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Außerdem ist $|f \cdot g_r| \leq F$ mit $F := M \cdot |f|$ und $M := \sup_x |g(x)| < \infty$. Damit ist nach dem Satz von Lebesgue auch $f \cdot g$ integrierbar. \square

Für $g(x) := e^{-ik \cdot x}$ ist $M = 1$, und g ist stetig, also nach Satz 5.21 g_r integrierbar. Satz 5.24 garantiert uns also, dass die Fourier-Transformierte \hat{f} überhaupt wohldefiniert ist. Der Satz von der majorisierten Konvergenz liefert uns aber noch genauere Informationen über \hat{f} :

5.25 Satz Die Fourier-Transformierte \hat{f} von $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist stetig.

Beweis: Für eine beliebige Folge $(k_l)_{l \in \mathbb{N}}$ von $k_l \in \mathbb{R}^n$ mit $\lim_{l \rightarrow \infty} k_l = k$ gilt punktweise

$$\lim_{l \rightarrow \infty} f(x) e^{-ik_l \cdot x} = f(x) e^{-ik \cdot x}.$$

Damit ist für $f_l(x) := f(x) e^{-ik_l \cdot x}$ die Voraussetzung von Satz 5.18 erfüllt, und es folgt $\hat{f}(k) = \lim_{l \rightarrow \infty} \hat{f}(k_l)$. \square

Diese Stetigkeitseigenschaft der Fourier-Transformierten geht allerdings verloren, wenn wir die quadratintegrierbaren Funktionen $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ betrachten, siehe Kapitel 6.2.

5.2 Der Satz von Fubini (L^1 -Version)

Praktisch wird man die Lebesgue-Integration im \mathbb{R}^n mithilfe des Satzes von Fubini auf die eindimensionale Integration zurückführen. Wir benutzen dabei den Satz in der folgenden Form (die im Gegensatz zur Version 4.14 für den gesamten \mathbb{R}^n als Integrationsgebiet anwendbar ist).

5.26 Satz von Fubini Für $m, p \in \mathbb{N}$, $n = m + p$ und $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ ist

$$N^{(p)} := \{y \in \mathbb{R}^p \mid f(\cdot, y) \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m)\} \quad (5.5)$$

eine Nullmenge, und für

$$F(y) := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dx & , y \in \mathbb{R}^p \setminus N^{(p)} \\ 0 & , y \in N^{(p)} \end{cases} \quad (5.6)$$

ist $F \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^p)$. Es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(z) dz = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dx \right) dy. \quad (5.7)$$

5.27 Bemerkungen 1. Da $N^{(p)}$ eine Nullmenge ist, braucht F auf dieser Menge nicht definiert zu werden, um als Element von $L^1(\mathbb{R}^p)$, also als Äquivalenzklasse von Funktionen in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^p)$ festgelegt zu sein.

2. Es gibt $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p)$, für die $N^{(p)} \neq \emptyset$ gilt, ja sogar eine dichte Teilmenge des \mathbb{R}^p ist.

Ein Beispiel ist die charakteristische Funktion der Teilmenge $\mathbb{R}^m \times \mathbb{Q}^p$ des Vektorraums \mathbb{R}^n , mit $N^{(p)} = \mathbb{Q}^p$.

3. In Satz 4.14, im wesentlichen einem Spezialfall des obigen Satzes von Fubini, bekommt man wegen der Beschränktheitsannahmen an die Funktion und ihren Definitionsbereich aber noch die Zusatzinformation $N^{(p)} = \emptyset$.

4. Der folgende Beweis ist kompliziert. Es ist daher sinnvoll, sich zunächst die Strategie zu überlegen. Wegen $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ gibt es eine L^1 -approximierende Folge von $\varphi_k \in \mathcal{T}_n$. Aus dieser wird eine Folge von $\varphi_{k,y} := \varphi_k(\cdot, y) \in \mathcal{T}_m$ gewonnen, die $f_y := f(\cdot, y)$ L^1 -approximiert. Deren Integrale $y \mapsto \Phi_k(y)$ sind Treppenfunktionen, die $y \mapsto F(y)$ im L^1 -Sinn approximieren. Daher ist $F \in L^1(\mathbb{R}^p)$. Der Satz von Fubini für Treppenfunktionen impliziert dann die Richtigkeit der Formel 5.7.

Beweis: • Benutzung des Satzes von Riesz-Fischer auf \mathbb{R}^n : Es sei $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ approximierende Folge von $\varphi_k \in \mathcal{T}_n$, die der Bedingung

$$\|\varphi_{k+1} - \varphi_k\|_1 \leq 2^{-k} \quad (k \in \mathbb{N}) \quad (5.8)$$

genügt und für die

$$N^{(n)} := \{z \in \mathbb{R}^n \mid f(z) \text{ ist nicht Grenzwert von } (\varphi_k(z))_{k \in \mathbb{N}}\}$$

eine Nullmenge ist. Der Satz von Riesz-Fischer (Satz 5.5) garantiert die Existenz einer solchen Folge.

Unser Ziel ist zunächst, durch die Treppenfunktionen

$$\varphi_{k,y} \in \mathcal{T}_m \quad , \quad \varphi_{k,y}(x) := \varphi_k(x, y) \quad (y \in \mathbb{R}^p)$$

die Funktion $f_y : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ zu approximieren.

Punktweise gelingt dies für fast alle $y \in \mathbb{R}^p$ fast überall in \mathbb{R}^m , denn die φ_k konvergieren außerhalb der Nullmenge $N^{(n)} \subset \mathbb{R}^n$ gegen f , und nach Satz 4.34 ist für $N_y^{(m)} := \{x \in \mathbb{R}^m \mid (x, y) \in N^{(n)}\}$

$$N_I^{(p)} := \{y \in \mathbb{R}^p \mid N_y^{(m)} \text{ ist keine Nullmenge in } \mathbb{R}^m\}$$

eine Nullmenge in \mathbb{R}^p .

• Benutzung des Satzes von Fubini für Treppenfunktionen: Wir wollen diese Konvergenz gegen f_y aber auch *im L^1 -Sinn* zeigen.

Nach Satz 4.4.3 ist für die Treppenfunktion

$$\Psi_k \in \mathcal{T}_p \quad , \quad \Psi_k(y) := \int_{\mathbb{R}^m} |\varphi_{k+1}(x, y) - \varphi_k(x, y)| dx$$

$$\int_{\mathbb{R}^p} \Psi_k(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_{k+1} - \varphi_k| dz = \|\varphi_{k+1} - \varphi_k\|_1 \leq 2^{-k} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Also bilden die Ψ_k eine L^1 -konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k$, und für fast alle $y \in \mathbb{R}^p$ stimmen nach dem Satz von Beppo Levi der punktweise Grenzwert $\sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(y)$

mit dem L^1 -Grenzwert überein. Insbesondere existiert nach Satz 4.26 eine Nullmenge $N_{II}^{(p)}$ mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(y) < \infty \quad (y \in \mathbb{R}^p \setminus N_{II}^{(p)}). \quad (5.9)$$

• **Benutzung des Satzes von Riesz–Fischer auf \mathbb{R}^m :**

Wir setzen $\tilde{N}^{(p)} := N_I^{(p)} \cup N_{II}^{(p)}$. Dies ist ebenfalls eine Nullmenge in \mathbb{R}^p .

Für $y \in \mathbb{R}^p \setminus \tilde{N}^{(p)}$ ist wegen (5.9) die Folge der $\varphi_{k,y} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m)$ eine Cauchy-Folge, die nach dem Satz von Riesz–Fischer gegen eine Funktion in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m)$ konvergiert. Diese Funktion muß aber f_y sein, denn die $\varphi_{k,y}$ konvergieren (da $y \notin N_I^{(p)}$) auch fast überall gegen f_y . Also ist auch $f_y \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m)$, und $N^{(p)}$ aus (5.5) ist wegen $N^{(p)} \subseteq \tilde{N}^{(p)}$ eine Nullmenge.

Nach dem Satz von Riesz–Fischer konvergieren damit auch die Integrale: Die Treppenfunktionen

$$\Phi_k \in \mathcal{T}_p \quad , \quad \Phi_k(y) := \int_{\mathbb{R}^m} \varphi_{k,y} dx$$

konvergieren also punktweise bis auf eine Nullmenge gegen das in (5.6) definierte $F : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{C}$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_k(y) = \int_{\mathbb{R}^m} f_y dx = F(y) \quad (y \in \mathbb{R}^p \setminus \tilde{N}^{(p)}).$$

• **Benutzung des Satzes von Riesz–Fischer auf \mathbb{R}^p :** Die Φ_k konvergieren aber auch im L^1 -Sinn, denn nach (5.8) ist

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^p} |\Phi_{k+1} - \Phi_k| dy &= \int_{\mathbb{R}^p} \left| \int_{\mathbb{R}^m} (\varphi_{k+1}(x, y) - \varphi_k(x, y)) dx \right| dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_{k+1} - \varphi_k| dz = \|\varphi_{k+1} - \varphi_k\|_1 \leq 2^{-k}, \end{aligned}$$

die Φ_k bilden also eine L^1 -Cauchy-Folge.

Nach dem Satz von Riesz–Fischer ist damit ihr punktwieser Limes F integrierbar, und

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f_y dx \right) dy &= \int_{\mathbb{R}^p} F dy \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^p} \Phi_k dy = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^m} \varphi_k(x, y) dx \right) dy \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k dz = \int_{\mathbb{R}^n} f dz. \end{aligned}$$

Hierbei wurde in der vorletzten Identität nochmals der Satz von Fubini für Treppenfunktionen benutzt, in der letzten die L^1 -Stetigkeit des Lebesgue-Integrals. \square

Praktisch einfach zu überprüfen sind oft die Voraussetzungen des folgenden Satzes (eines Korollars des Satzes von Tonelli):

5.28 Satz Die Funktionen f und F seien fast überall stetig auf $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ und es gelte:

1. $|f| \leq F$
2. Es existiert wenigstens eines der Integrale

$$\int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^m} F(x, y) dx \right) dy \quad , \quad \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^p} F(x, y) dy \right) dx.$$

Dann ist $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und $\int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x, y) dy \right) dx$.

Beweis: Siehe Königsberger [Ko]. \square

5.3 Der Transformationssatz

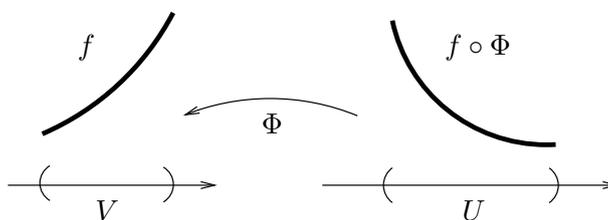
Oft nimmt eine Funktion in einem Koordinatensystem eine viel einfachere Form an als in einem anderen, und dies will man bei der Integration nutzen. Nun bezieht sich aber das Lebesgue-Integral zunächst auf die kartesischen Koordinaten des \mathbb{R}^n .

Koordinatenwechsel bewerkstelligt man (zumindest lokal) durch Diffeomorphismen. Der Transformationssatz sagt uns, wie sich das Integral unter einem solchen Diffeomorphismus transformiert.

Schauen wir uns dazu zunächst die vertraute eindimensionale Situation an, d.h. ein offenes Intervall $V \subset \mathbb{R}$, $f \in L^1(V)$ und einen Diffeomorphismus

$$\Phi : U \rightarrow V.$$

Dann ist Φ nach Definition bijektiv und wie auch Φ^{-1} stetig differenzierbar, also $\Phi' \neq 0$ (und damit Φ entweder streng monoton wachsend oder fallend). $V \subset \mathbb{R}$ ist wieder ein offenes Intervall, und es gilt



$$\int_V f(y) dy = \int_U f \circ \Phi(x) |\Phi'(x)| dx.$$

Für Riemann-integrierte f entspricht dies der Substitutionsregel. Man beachte, dass sich die Intervallgrenzen durch monoton fallende Φ umdrehen; daher die Verwendung des Gewichtungsfaktors $|\Phi'|$.

Der Transformationssatz erweitert nun diese Formel auf beliebige L^1 -Funktionen und Diffeomorphismen in beliebigen Dimensionen. Dazu müssen wir $|\Phi'|$ geeignet verallgemeinern.

5.29 Bemerkung Ist in n Dimensionen der Diffeomorphismus Φ von der Form $\Phi(x) = (\Phi_1(x_1), \dots, \Phi_n(x_n))^T$, dann ergibt die Anwendung des Satzes von Fubini als Gewichtungsfaktor

$$\left| \prod_{i=1}^n \Phi'_i(x_i) \right| = |\det D\Phi(x)|.$$

Letzterer Ausdruck stimmt auch allgemein:

5.30 Satz (Transformationssatz) *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus. Es gilt für $f : V \rightarrow \mathbb{C}$*

$$f \in L^1(V) \iff f \circ \Phi \cdot |\det D\Phi| \in L^1(U),$$

und dann

$$\int_V f(y) dy = \int_U f(\Phi(x)) |\det(D\Phi(x))| dx.$$

Eine Grundidee des Beweises ist, dass der Betrag der Determinante der Ableitung von Φ bei $x \in U$ der lokale Faktor der Volumenvergrößerung ist. Dazu betrachten wir zunächst eine *affine Abbildung* $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Für diese existieren eindeutige $v \in \mathbb{R}^n, L \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$ mit

$$\Phi(x) = Lx + v \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Affine Abbildungen bilden Parallelotope auf Parallelotope ab. Dabei verstehen wir unter einem *Parallelotop* eine durch $A \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$ und $z \in \mathbb{R}^n$ fixierte Teilmenge des \mathbb{R}^n der Form

$$P(A, z) := \{Ac + z \mid c = (c_1, \dots, c_n)^T, c_i \in [0, 1]\}.$$

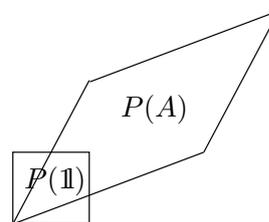
Für die affine Abbildung Φ gilt

$$\Phi(P(A, z)) = P(LA, Lz + v). \quad (5.10)$$

Das Parallelotop wird also wieder in ein Parallelotop überführt, welches durch die Bilder $b_i := La_i$ der Spaltenvektoren a_1, \dots, a_n von A aufgespannt wird. Da x -unabhängig $D\Phi(x) = L$ ist, ist unter Benutzung von (5.10) und des folgenden Satzes

$$|\det(D\Phi)|$$

der Faktor, um den das Lebesgue-Maß des Parallelotops $P(A, z)$ durch Anwendung von Φ vergrößert wird.



5.31 Satz Für $A \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$ und $z \in \mathbb{R}^n$ ist das Volumen des Parallelotops $P(A, z)$ gleich

$$\lambda^n(P(A, z)) = |\det A|.$$

Beweis: Wir schreiben abkürzend $P(A) := P(A, 0)$.

- Als kompakte Mengen sind Parallelotope nach Satz 4.18 messbar.
- Dass $\lambda^n(P(\mathbb{1})) = 1$ ist (Lebesgue-Maß des Einheitswürfels $P(\mathbb{1}) = [0, 1]^n$), haben wir im letzten Kapitel gezeigt.
- Wegen der Translationsinvarianz von λ^n (Satz 5.16) sind verschobene Parallelotope von unverändertem Volumen.
- Aus dem gleichen Grund ist

$$\lambda^n(P(a_1, \dots, a_{i-1}, -a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)) = \lambda^n(P(a_1, \dots, a_n)).$$

- Für $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ kann $P(a_1, \dots, a_{i-1}, ca_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$ aus $|c|$ verschobenen, bis auf Nullmengen disjunkten Parallelotopen zusammengesetzt werden. Für $c = 0$ ist das Parallelotop eine λ^n -Nullmenge. Daher hat es für alle $c \in \mathbb{Z}$ das $|c|$ -fache Volumen des ursprünglichen Parallelotops.
- Gleiches gilt für $c \in \mathbb{Q}$, denn man kann für $c = p/q$ aus q solchen Parallelotopen einen vom $|p|$ -fachen Volumen wie $P(A)$ zusammensetzen.
- Für beliebige $c \in \mathbb{R}$ folgt die Formel

$$\lambda^n(P(a_1, \dots, a_{i-1}, ca_i, a_{i+1}, \dots, a_n)) = |c| \lambda^n(P(A))$$

durch rationale Approximation von c und die Monotonie des Lebesgue-Integrals (Satz 4.21.2) aus dem Fall $c \in \mathbb{Q}$.

- Weiter gilt

$$\lambda^n(P(a_1, \dots, a_i + a_j, \dots, a_j, \dots, a_n)) = \lambda^n(P(A)) \quad (i \neq j),$$

wie sich unter Benutzung der Translationsinvarianz des Lebesgue–Maßes aus

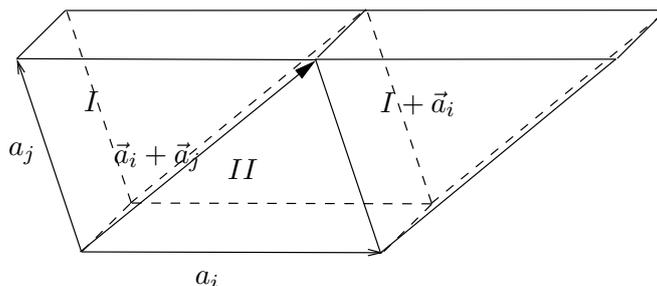


Abbildung 5.2: Volumentreue Scherung eines Parallelotops

der Zerlegung des Parallelotops in zwei Polytope und Neuzusammensetzung ergibt, siehe Abb. 5.2.

Da sich jede Matrix $A \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$ aus der Einheitsmatrix $\mathbb{1}$ mit den genannten Spaltenoperationen gewinnen lässt, und wir für das Lebesgue–Maß Transformationsformeln abgeleitet haben, die denen des Betrages der Determinante von A gleichen, haben wir den Satz bewiesen unter der Voraussetzung verschwindender Translation z . Das Lebesgue–Maß ist aber translationsinvariant. \square

Beweis des Transformationssatzes 5.30:

- Wir nehmen zunächst an, dass $f \circ \Phi : U \rightarrow \mathbb{C}$ (genauer: die triviale Fortsetzung von f) eine Treppenfunktion mit Träger in U ist. Wegen der Linearität des Integrals genügt es, den Fall $f \circ \Phi = \mathbb{1}_Q$ für einen Quader $Q \subset U$ zu betrachten. In diesem Fall reduziert sich die zu beweisende Transformations-Formel

$$\int_U f(\Phi(x)) |\det(D\Phi(x))| dx = \int_V f(y) dy$$

wegen $\int_U f(\Phi(x)) |\det(D\Phi(x))| dx = \int_U \mathbb{1}_Q(x) |\det(D\Phi(x))| dx$
und $\int_V f(y) dy = \int_V \mathbb{1}_Q \circ \Phi^{-1}(y) dy = \int_V \mathbb{1}_{\Phi(Q)} dy = \lambda^n(\Phi(Q))$ auf

$$\int_Q |\det(D\Phi(x))| dx = \lambda^n(\Phi(Q)) \quad (5.11)$$

- Wegen der Eigenschaft des Diffeomorphismus Φ , Nullmengen in Nullmengen abzubilden (Satz 4.31 und 4.32) und wegen $\lambda^n(\overline{Q}) = \lambda^n(Q)$ nehmen wir auch

an, dass Q kompakt ist, also von der Form $Q = [z_1, z_1 + \ell_1] \times \dots \times [z_n, z_n + \ell_n]$ oder

$$Q = P(A, z) \quad \text{mit der Matrix } A := \text{diag}(\ell_1, \dots, \ell_n).$$

$D\Phi|_Q$ ist zwar i.Allg. nicht konstant, aber wegen der Kompaktheit von Q und Stetigkeit von $D\Phi$ gleichmäßig stetig. Betrachten wir daher die Zerlegungen von Q in die 2^{nk} bis auf Seiten, d.h. Mengen vom Maß 0 disjunkten Teilquader

$$Q_{k,m} := P(2^{-k}A, z + 2^{-k}m) \quad (m = (m_1, \dots, m_n)^T, m_i/\ell_i \in \{0, \dots, 2^k - 1\})$$

mit Ecke $z_{k,m} := z + 2^{-k}m$. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $k = k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$|\partial_i \Phi_j(x) - \partial_i \Phi_j(y)| < \varepsilon \quad (i, j = 1, \dots, n, x, y \in Q_{k,m})$$

für alle Teilwürfel $Q_{k,m} \subset Q$, oder

$$\Phi(x) = \Phi(z_{k,m}) + D\Phi(z_{k,m})(x - z_{k,m}) + \mathcal{O}(2^{-k}\varepsilon) \quad (x \in Q_{k,m}). \quad (5.12)$$

Damit weicht das Bild $\Phi(Q_{k,m})$ nur wenig von einem Parallelotop ab. Wir benutzen zum Vergleich die um $P(A, z) = P^0(A, z)$ zentrierten Parallelotope

$$P^\delta(A, z) := \{Ac + z \mid c = (c_1, \dots, c_n)^T, c_i \in [-\delta, 1 + \delta]\}$$

mit Volumen $\lambda^n(P^\delta(A, z)) = (1 + 2\delta)^n \lambda^n(P(A, z))$ ($\delta > -\frac{1}{2}$). Wegen (5.12) und der Regularität von $D\Phi$ auf dem kompakten Quader Q finden wir für jedes $\delta > 0$ ein k mit

$$P^{-\delta}(D\Phi(z_{k,m})(2^{-k}A), z_{k,m}) \subseteq \Phi(Q_{k,m}) \subseteq P^\delta(D\Phi(z_{k,m})(2^{-k}A), z_{k,m})$$

Damit ist nach Satz 5.31

$$\lambda^n(\Phi(Q)) = \sum_m \lambda^n(\Phi(Q_{k,m})) \leq (1 + 2\delta)^n \sum_m \lambda^n(Q_{k,m}) |\det(D\Phi(z_{k,m}))|$$

(man bedenke, dass nach Satz 4.32 gilt $\lambda^n(\Phi(Q_{k,m}) \cap \Phi(Q_{k,m'})) = 0$ für $m \neq m'$, denn Φ ist ein Diffeomorphismus). Analog ist

$$\lambda^n(\Phi(Q)) \geq (1 - 2\delta)^n \sum_m \lambda^n(Q_{k,m}) |\det(D\Phi(z_{k,m}))|.$$

Die Riemann-Summe auf dem Quader Q konvergiert gegen das Integral:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_m \lambda^n(Q_{k,m}) |\det(D\Phi(z_{k,m}))| = \int_Q |\det(D\Phi(z))| dz.$$

Insgesamt erhalten wir $\lambda^n(\Phi(Q)) = \int_Q |\det(D\Phi(z))| dz$, also (5.11).

• Die Aussage für beliebige integrable f erhält man durch Approximation von $f \circ \Phi$ durch Treppenfunktionen. \square

5.32 Beispiel Bei Verwendung von Polarkoordinaten $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$ und der Substitution $u := r^2$ ist $D\Phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$, also $\det(D\Phi(r, \varphi)) = r$ und

$$\begin{aligned} \left[\int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2) dx \right]^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-x^2) \exp(-y^2) dx dy = \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-(x^2 + y^2)) dx dy \\ &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \exp(-r^2) r d\phi dr = \pi \int_0^\infty \exp(-r^2) 2r dr = \pi \int_0^\infty \exp(-u) du = \pi. \end{aligned}$$

Also ist $\Gamma(1/2) = \int_0^\infty t^{-1/2} \exp(-t) dt = 2 \int_0^\infty \exp(-x^2) dx = \int_{-\infty}^\infty \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}$, siehe die *Analysis II*, Kap. 1.3.

5.4 Anwendung: Polarkoordinaten im \mathbb{R}^n

Wir benutzen nun den Transformationssatz 5.30, um mithilfe der Polarkoordinaten das Volumen einer n -dimensionalen Kugel zu berechnen. Unter *Polarkoordinaten* auf dem \mathbb{R}^n verstehen wir für $n \geq 2$ den Diffeomorphismus

$$\Phi_n = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} : U \rightarrow V$$

mit den offenen Teilmengen des \mathbb{R}^n

$$\begin{aligned} U &:= (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi)^{n-2}, \\ V &:= \mathbb{R}^n \setminus N \quad , \quad N := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0, x_2 \geq 0\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \varphi_1(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) &= r \cdot \prod_{l=1}^{n-1} \sin \theta_l \\ \varphi_2(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) &= r \cos \theta_1 \prod_{l=2}^{n-1} \sin \theta_l \\ \varphi_3(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) &= r \cos \theta_2 \prod_{l=3}^{n-1} \sin \theta_l \\ &\vdots \\ \varphi_n(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) &= r \cos \theta_{n-1} \end{aligned}$$

(wobei das Produkt über die leere Menge 1 ist).

Für $n = 2$ ergibt sich ähnlich wie in Beispiel 5.32

$$\varphi_1(r, \theta) = r \sin \theta \quad , \quad \varphi_2(r, \theta) = r \cos \theta,$$

also $D\Phi_2(r, \theta) = \begin{pmatrix} \sin \theta & r \cos \theta \\ \cos \theta & -r \sin \theta \end{pmatrix}$, woraus sich $|\det D\Phi_2(r, \theta)| = r$ ergibt.

Es sei nun $A := D\Phi_{n-1}(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-2}) \in \text{Mat}(n-1, \mathbb{R})$. Diese Matrix verwenden wir zur Berechnung von $D\Phi_n$.

Es ist nämlich wegen

$$(\Phi_n)_k = \begin{cases} \sin \theta_{n-1} (\Phi_{n-1})_k & , k \in \{1, \dots, n-1\} \\ r \cos \theta_{n-1} & , k = n \end{cases}$$

$$D\Phi_n = \left(\begin{array}{c|c} \sin \theta_{n-1} \cdot A & \begin{matrix} r A_{1,1} \cos \theta_{n-1} \\ \vdots \\ r A_{n-1,1} \cos \theta_{n-1} \end{matrix} \\ \hline \cos \theta_{n-1} \ 0 \ \dots \ 0 & -r \sin \theta_{n-1} \end{array} \right),$$

sodass aus einer Entwicklung nach der letzten Zeile

$$\begin{aligned} |\det D\Phi_n| &= |\det D\Phi_{n-1}| \cdot (\sin \theta_{n-1})^{n-1} \cdot \left| r \sin \theta_{n-1} + r \frac{\cos^2 \theta_{n-1}}{\sin \theta_{n-1}} \right| \\ &= |\det D\Phi_{n-1}| r (\sin \theta_{n-1})^{n-2} \end{aligned}$$

folgt. Es ergibt sich also durch Induktion die Formel

$$|\det D\Phi_n| = r^{n-1} \left| \prod_{l=1}^{n-1} (\sin \theta_l)^{l-1} \right|.$$

Man beachte, dass das Komplement N des Bildes von Φ_n eine Nullmenge ist, es also für Volumenberechnungen keine Rolle spielt.

Wir benutzen nun die Transformationsformel zur Berechnung des Volumens einer n -dimensionalen Vollkugel $B^n \subset \mathbb{R}^n$. Wegen $\int_0^1 r^{n-1} dr = \frac{1}{n}$ ist

$$\lambda^n(B_n) = \frac{I_n}{n} \quad \text{mit} \quad I_n := 2 \prod_{l=2}^n \int_0^\pi (\sin \theta)^{l-2} d\theta$$

(und dieser Ausdruck stimmt auch für $n = 1$). Nun besteht unsere erste Aufgabe in der Berechnung der Integrale

$$J_m := \int_0^\pi (\sin \theta)^m d\theta.$$

Die Rekursion beginnt bei $J_0 = \pi$ bzw. $J_1 = 2$. Für $m \geq 2$ ist mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (\sin \theta)^m d\theta &= (\sin \theta)^{m-1} (-\cos \theta) \Big|_0^\pi + (m-1) \int_0^\pi (\sin \theta)^{m-2} \cos^2 \theta d\theta \\ &= (m-1) \int_0^\pi (\sin \theta)^{m-2} (1 - \sin^2 \theta) d\theta, \end{aligned}$$

also

$$m \int_0^\pi (\sin \theta)^m d\theta = (m-1) \int_0^\pi (\sin \theta)^{m-2} d\theta$$

oder

$$J_m = \frac{m-1}{m} J_{m-2}.$$

Daraus ergibt sich unter Benutzung der *Doppelfakultät* $n!! := \prod_{l=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (n-2l)$

$$J_{2m} = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \pi \quad \text{und} \quad J_{2m+1} = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!} 2.$$

Damit ist $I_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$, denn $J_{n-1} J_n = \frac{\pi}{n/2}$ und $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

$$\boxed{\lambda^n(B_n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}}$$

Gleichzeitig legt die Rechnung nahe, dass das $(n-1)$ -dimensionale Volumen der Kugeloberfläche $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ gleich I_n ist.

5.5 L^p -Räume

5.33 Definition Für $p \in [1, \infty)$ ist $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ der Raum der Funktionen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, die über jede kompakte Teilmenge des \mathbb{R}^n integrierbar sind, und für die

$$\|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p dx \right)^{1/p} < \infty.$$

Analog zum Fall $p=1$ setzt man $\mathcal{N} := \{f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) \mid \|f\|_p = 0\}$ und bildet die Äquivalenzklassen bezüglich dieses Unterraums, setzt also

$$L^p(\mathbb{R}^n) := \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) / \mathcal{N}.$$

Da $\|\cdot\|_p$ für alle Repräsentanten einer Äquivalenzklasse den gleichen Wert besitzt, und $\|\cdot\|_p$ eine Halbnorm ist, wird

$$\|[f]\|_p := \|f\|_p \quad \text{auf} \quad L^p(\mathbb{R}^n)$$

zur Norm, wie im Fall $p=1$.

Dass es sich um einen normierten Vektorraum handelt, muss man nachrechnen. Da die Gültigkeit der Dreiecksungleichung für die p -Normen nicht offensichtlich (und für $0 < p < 1$ sogar falsch!) ist, heißt sie hier *Minkowski-Ungleichung*. Der folgende Satz fasst wesentliche Eigenschaften der L^p -Räume zusammen:

5.34 Satz 1. $\|f_1 + f_2\|_p \leq \|f_1\|_p + \|f_2\|_p$ ($f_1, f_2 \in L^p(\mathbb{R}^n)$)
(Minkowski-Ungleichung)

2. $L^p(\mathbb{R}^n)$ ist ein Banach-Raum (Satz von Riesz-Fischer)

3. für $p, q, r \geq 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ folgt aus $f \in L^p(\mathbb{R}^n), g \in L^q(\mathbb{R}^n)$
 $f \cdot g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ und $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$ (Hölder-Ungleichung).

Beweis: • Der Satz von Riesz-Fischer wird analog zum Fall $p = 1$ (Satz 5.5) bewiesen.

• Einen Beweis der Hölder-Ungleichung findet man z.B. in [LL].

• Wir zeigen, wie aus ihr die Minkowski-Ungleichung folgt.

Wir können dabei annehmen, dass $f_1, f_2 \geq 0$ und $p \in (1, \infty)$ gilt, denn der Fall $p = 1$ ist schon bekannt. Falls $\|f_1 + f_2\|_p = 0$ ist, ist nichts mehr zu beweisen. Sonst ist nach der Hölder-Ungleichung mit $r = 1$, also $q = p/(p - 1)$

$$\|f_1 + f_2\|_p^p = \sum_{i=1}^2 \int_{\mathbb{R}^n} f_i (f_1 + f_2)^{p-1} dx \leq \sum_{i=1}^2 \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_i^p d\mu \right)^{1/p} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} (f_1 + f_2)^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}},$$

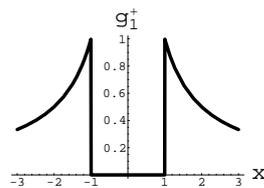
also nach Division durch den zweiten Faktor der rechten Seite

$$\|f_1 + f_2\|_p^{p+(1-p)} \leq \|f_1\|_p + \|f_2\|_p. \quad \square$$

Je größer p ist, umso langsamer darf eine Funktion in $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ bei ∞ gegen Null gehen, und umso weniger ausgeprägt dürfen andererseits lokale Singularitäten sein.

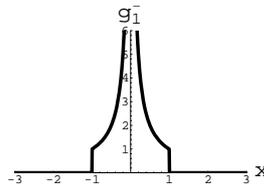
5.35 Beispiel Es sei $g_\lambda^\pm : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$g_\lambda^+(x) := \begin{cases} 0 & , \quad \|x\| < 1 \\ \|x\|^{-\lambda} & , \quad \|x\| \geq 1 \end{cases}$$



und

$$g_\lambda^-(x) := \begin{cases} \|x\|^{-\lambda} & , \quad \|x\| \leq 1 \\ 0 & , \quad \|x\| > 1 \end{cases}$$



definiert. Dann gilt

$$g_\lambda^+ \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) \iff \lambda > \frac{n}{p}$$

und

$$g_{\lambda}^{-} \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) \iff \lambda < \frac{n}{p},$$

denn

$$\|g_{\lambda}^{+}\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} (g_{\lambda}^{+}(x))^p dx = I_n \int_1^{\infty} r^{-p\lambda} r^{n-1} dr$$

mit $I_n := \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ wie in Kapitel 5.4 (als Flächeninhalt der $(n-1)$ -dimensionalen Sphäre interpretiert), also

$$\|g_{\lambda}^{+}\|_p^p = I_n \int_1^{\infty} r^{n-p\lambda-1} dr,$$

und analog

$$\|g_{\lambda}^{-}\|_p^p = I_n \int_0^1 r^{n-p\lambda-1} dr.$$

5.6 Der Hilbert-Raum $L^2(\mathbb{R}^n)$

Von den Banach-Räumen $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \geq 1$ ist der Raum $L^2(\mathbb{R}^n)$ der wichtigste. Dieser Raum der quadratintegrablen Funktionen besitzt nämlich ein inneres Produkt:

5.36 Definition $\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)} dx \quad (f, g \in L^2(\mathbb{R}^n))$

5.37 Bemerkung Dies ist die Mathematiker-Konvention. Physiker benutzen

$$\int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)}g(x) dx.$$

Das innere Produkt lässt sich durch die 2-Norm ausdrücken:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{4} [(\|f + g\|_2^2 - \|f - g\|_2^2) - i(\|f + ig\|_2^2 - \|f - ig\|_2^2)]$$

(*Polarisationsidentität*), und existiert damit insbesondere.

Dass diese Identität gilt, sieht man, wenn man den Zusammenhang

$$\|h\|_2^2 = \langle h, h \rangle \quad (h \in L^2(\mathbb{R}^n))$$

benutzt, um die rechte Seite umzuformen.

Mit diesem inneren Produkt wird nach dem Satz von Riesz-Fischer der Raum $L^2(\mathbb{R}^n)$ zum *C-Hilbert-Raum*, also einem unitären Vektorraum, der mit der vom inneren Produkt abgeleiteten Norm ein Banach-Raum ist.

Wir erinnern uns an dieser Stelle an die Lineare Algebra. Für $p = q = 2$ wird die Hölder–Ungleichung (Satz 5.34.3) zur *Cauchy–Schwarz–Ungleichung*

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 \quad (f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)). \quad (5.13)$$

Da $|\langle f, g \rangle| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f \bar{g} \, dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f \bar{g}| \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f g| \, dx = \|f \cdot g\|_1$ ist, folgt

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 \quad (f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)).$$

Insbesondere ist das innere Produkt stetig. Außerdem können wir den Minimalwinkel $\varphi \in [0, \pi/2]$ zwischen den von zwei Vektoren f, g positiver Länge aufgespannten Unterräumen durch

$$\cos \varphi = \frac{|\langle f, g \rangle|}{\|f\|_2 \|g\|_2}$$

definieren. Ist $\varphi = \frac{\pi}{2}$, dann heißen die Vektoren f und g zueinander *senkrecht* oder *orthogonal*. Oft ist es für konkrete Rechnungen nützlich, eine Orthonormalbasis zu benutzen:

5.38 Definition • Eine Teilmenge E eines Hilbertraumes heißt **Orthonormalsystem**, wenn für $e, e' \in E$ gilt

$$\langle e, e' \rangle = \begin{cases} 1 & , \quad e = e' \\ 0 & , \quad e \neq e'. \end{cases}$$

- Sie heißt **Orthonormalbasis (ONB)**, wenn sie in keinem echt größeren Orthonormalsystem enthalten ist.

5.39 Bemerkungen 1. Jeder Hilbertraum besitzt eine Orthonormalbasis (das folgt aus einer Anwendung des Zornschen Lemmas der Mengentheorie).

2. In endlich-dimensionalen unitären Vektorräumen sind die Eigenvektoren normaler Endomorphismen¹⁵ zueinander orthogonal, soweit sie zu verschiedenen Eigenwerten gehören. Außerdem stimmen algebraische und geometrische Multiplizität von Eigenwerten überein. Man kann damit eine Basis, und durch Normierung eine ONB von Eigenvektoren bilden.

Ähnliches gilt auch für viele selbstadjungierte Operatoren auf dem $L^2(\mathbb{R}^n)$.

5.40 Satz Es sei E eine Orthonormalbasis des Hilbertraumes \mathcal{H} . Dann gilt

¹⁵**Def.:** Ein Endomorphismus $\varphi : V \rightarrow V$ heißt *normal*, wenn $\varphi^* \varphi = \varphi \varphi^*$ gilt.

Bsp.: Selbstadjungierte, antiselbstadjungierte und unitäre Operatoren sind normal.

1. Für jede endliche Teilmenge $E' \subseteq E$ ist

$$\sum_{e \in E'} |\langle x, e \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad (x \in \mathcal{H})$$

(Bessel–Ungleichung), und es gilt der **Satz von Pythagoras**:

$$\|x\|^2 = \sum_{e \in E'} |\langle x, e \rangle|^2 + \left\| x - \sum_{e \in E'} \langle x, e \rangle e \right\|_2^2.$$

2. Falls E abzählbar ist, dann gilt für alle $x \in \mathcal{H}$

$$x = \sum_{e \in E} \langle x, e \rangle e \quad \text{und} \quad \|x\|_2^2 = \sum_{e \in E} |\langle x, e \rangle|^2.$$

Beweis:

1. Der Satz von Pythagoras folgt aus der Zerlegung $x = x' + x''$ mit $x' := \sum_{e \in E'} \langle x, e \rangle e$. x' und x'' sind orthogonal:

$$\begin{aligned} \langle x', x'' \rangle &= \sum_{e \in E'} \langle x, e \rangle \left\langle e, x - \sum_{f \in E'} \langle x, f \rangle f \right\rangle = \sum_{e \in E'} \langle x, e \rangle \langle e, x - \langle x, e \rangle e \rangle \\ &= \sum_{e \in E'} \langle x, e \rangle (\langle e, x \rangle - \overline{\langle x, e \rangle} \langle e, e \rangle) = \sum_{e \in E'} \langle x, e \rangle (\langle e, x \rangle - \langle e, x \rangle) = 0. \end{aligned}$$

Es folgt $\|x\|_2^2 = \|x' + x''\|_2^2 = \langle x', x' \rangle + \langle x', x'' \rangle + \langle x'', x' \rangle + \langle x'', x'' \rangle = \langle x', x' \rangle + \langle x'', x'' \rangle = \|x'\|_2^2 + \|x''\|_2^2$, also auch die Bessel–Ungleichung $\|x'\|_2^2 \leq \|x\|_2^2$.

2. Für endlich–dimensionale unitäre Vektorräume ist die Behauptung aus der *Linearen Algebra* bekannt. Es sei also $E = \{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Die Folge $n \mapsto \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2$ ist monoton wachsend und wegen der Bessel–Ungleichung durch $\|x\|_2^2$ beschränkt, besitzt also einen endlichen Limes. Setzen wir $x_n := \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$, dann ist für $n > m$ wegen der Orthonormalität der Basisvektoren

$$\|x_n - x_m\|_2^2 = \left\| \sum_{k=m+1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right\|_2^2 = \sum_{k=m+1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2.$$

Die $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind also eine Cauchy–Folge. Diese konvergiert im Hilbertraum gegen ein $x' \in \mathcal{H}$. Der Differenzvektor $y := x - x'$ steht senkrecht auf allen

Basisvektoren $e_k \in E$:

$$\begin{aligned}\langle y, e_k \rangle &= \langle x, e_k \rangle - \left\langle \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, e_k \right\rangle = \langle x, e_k \rangle - \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, e_k \rangle \\ &= \langle x, e_k \rangle - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^n \langle x, e_\ell \rangle \langle e_\ell, e_k \rangle \\ &= \langle x, e_k \rangle - \langle x, e_k \rangle \langle e_k, e_k \rangle = 0.\end{aligned}$$

Wäre $\|y\|_2 > 0$, dann würde auch der normierte Vektor $y/\|y\|_2$ senkrecht auf allen e_k stehen, E wäre also keine Basis. \square

Aus der *Linearen Algebra* ist bekannt, dass jeder n -dimensionale unitäre Vektorraum \mathcal{H} isomorph zum unitären Vektorraum $(\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ mit kanonischem inneren Produkt $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \bar{y}_k$ ist. Ähnliches gilt für abzählbare Orthonormalbasen.

5.41 Satz *Es sei \mathcal{H} ein \mathbb{C} -Hilbertraum mit abzählbar unendlicher Orthonormalbasis $E = \{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist*

$$\Pi : \mathcal{H} \rightarrow \ell^2, \quad (\Pi(x))_k := \langle x, e_k \rangle$$

eine unitäre Abbildung auf den Hilbertschen Folgenraum

$$\ell^2 = \left\{ f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \mid \sum_{n \in \mathbb{N}} |f(n)|^2 < \infty \right\}$$

mit Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)g(n)$.

Beweis: Es ist nach Satz 5.40

$$\|\Pi(x)\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|x\|_2^2,$$

Π also eine Isometrie. Umgekehrt gilt

$$\Pi^{-1}(f) = \sum_{k=1}^{\infty} f(k)e_k \quad (f \in \ell^2),$$

denn für $x_n := \sum_{k=1}^n f(k)e_k$ und $n > m$ ist

$$\begin{aligned}\|x_n - x_m\|_2^2 &= \left\| \sum_{k=m+1}^n f(k)e_k \right\|_2^2 \\ &= \left\langle \sum_{k=m+1}^n f(k)e_k, \sum_{\ell=m+1}^n f(\ell)e_\ell \right\rangle = \sum_{k=m+1}^n \langle f(k)e_k, f(k)e_k \rangle \\ &= \sum_{k=m+1}^n |f(k)|^2 \leq \|f\|_2^2,\end{aligned}$$

die x_n bilden also eine gegen $x := \sum_{k=1}^{\infty} f(k)e_k \in \mathcal{H}$ konvergierende Cauchy-Folge. \square

5.42 Satz Es sei $E := \{e_{n,k} \mid n, k \in \mathbb{Z}\}$ mit

$$e_{n,k}(x) := 2^{-n/2}e(2^{-n}x - k) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

und

$$e(x) := \begin{cases} 1 & , \quad x \in [0, 1/2) \\ -1 & , \quad x \in (1/2, 1) \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases} . \quad (5.14)$$

Dann ist E eine Orthonormalbasis von $L^2(\mathbb{R})$, genannt die **Haar-Basis**.

Beweis: • E ist ein Orthonormalsystem:

Es ist $\|e\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |e(x)|^2 dx = \int_0^1 1 dx = 1$, und $\|e_{n,k}\|_2^2 = 2^{-n} \int_{\mathbb{R}} |e(2^{-n}x - k)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |e(y)|^2 dy = 1$. Für $k \neq k'$ sind die Träger von $e_{n,k}$ und $e_{n,k'}$ (bis auf Randpunkte) disjunkt, die beiden Vektoren also senkrecht:

$$\text{supp}(e_{n,k}) = [2^n k, 2^n(k+1)].$$

Für $\ell > n$ ist $e_{\ell,k'}$ (bis auf Randpunkte) auf $\text{supp}(e_{n,k})$ konstant, also ebenfalls $\langle e_{\ell,k'}, e_{n,k} \rangle = 0$.

• E ist eine Orthonormalbasis:

Es genügt zu zeigen, dass jede L^2 -Funktion f durch Linearkombination der $e_{n,k}$ beliebig genau approximiert werden kann. Dabei kann man sich auf Treppenfunktionen $f \in \mathcal{T}_1$ beschränken. Siehe Blatter [B12], Kapitel 1.6. \square

Insbesondere ist also $L^2(\mathbb{R})$ (und analog $L^2(\mathbb{R}^n)$) isomorph zum Hilbertschen Folgenraum ℓ^2 . Wavelets wie das in (5.14) definierte sog. *Haar-Wavelet* werden in der Signalverarbeitung eingesetzt, siehe [B12].

6 Die Fourier–Transformation

Im folgenden Kapitel schneiden wir einige Aspekte der Fourier–Transformation an. Vertiefungen finden sich z.B. in Reed und Simon, Band 2 [RS2].

6.1 Fourier–Transformation integrierbarer Funktionen

Wir haben die Definition der Fourier–Transformation einer Funktion $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ schon kennen gelernt:

$$\hat{f}(k) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ik \cdot x} dx \quad (k \in \mathbb{R}^n).$$

$\hat{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ ist, wie wir aus Satz 5.25 wissen, eine stetige Funktion, und offensichtlich gilt

$$|\hat{f}(k)| \leq (2\pi)^{-n/2} \|f\|_1 \quad (k \in \mathbb{R}^n),$$

die Fourier–Transformierte ist also beschränkt.

6.1 Beispiel Die Gaußsche Glockenkurve $f(x) = e^{-ax^2}$ ist für $a > 0$ in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Mit der Substitution $y := \sqrt{a}x$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \hat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2 - ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2 - \frac{iky}{\sqrt{a}}} dy \\ &= \frac{e^{-\frac{k^2}{4a}}}{\sqrt{2\pi a}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\left(y + \frac{ik}{2\sqrt{a}}\right)^2} dy = \frac{e^{-\frac{k^2}{4a}}}{\sqrt{2a}}. \end{aligned}$$

Der letzte Schritt, nämlich die Substitution mit $z = y + c$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-(y+c)^2} dy = \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2} dz,$$

ist für reelle c vertraut, aber wegen der komplexen Differenzierbarkeit = Holomorphie von $z \mapsto e^{-z^2}$ auch für unser imaginäres c legitim. Auch ohne Kenntnis der *Funktionentheorie* kann man diese Identität durch Differentiation des c -abhängigen Integrals nach c mittels Vertauschung von uneigentlichem Integral und Differentiation nach dem Parameter beweisen.

Wir erhalten damit wieder eine Gaußsche Glockenkurve, und speziell für $a = 1/2$ ist $\hat{f} = f$. Wenn a groß ist, also die Glockenkurve f ein schmales Profil hat, besitzt \hat{f} ein weites Profil und umgekehrt.

Warum ist die Fourier–Transformation wichtig? Unter anderem, weil sie die Lösung von partiellen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten ermöglicht. Unter der Fourier–Transformation werden nämlich solche Differentialoperatoren zu Polynomen:

6.2 Satz *Es sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}_0$, und für alle Multiindizes $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq k$ auch $x \mapsto x^\alpha f(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Dann ist*

$$\hat{f} \in C^k(\mathbb{R}^n) \quad \text{und} \quad \partial^\alpha \hat{f} = (-i)^{|\alpha|} \widehat{x^\alpha f(x)}. \quad (6.1)$$

6.3 Bemerkung Die Notation in (6.1) ist folgendermaßen zu verstehen:

$$\widehat{x^\alpha f(x)} \equiv \hat{g} \quad \text{für} \quad g(x) := x^\alpha f(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

In der Physik ist es üblich, eine Funktion f in der Form $f(x)$ zu notieren, während man in der Mathematik darunter normalerweise den Funktionswert von f an der Stelle x versteht. An dieser Stelle ist die Physiker-Notation einfacher.

Beweis: • Für $|\alpha| = 1$ ist für $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ mit $x \mapsto x_j f(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ zu zeigen, dass

$$\frac{\partial}{\partial k_j} \hat{f}(k) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ik \cdot x} \cdot (-ix_j) dx \quad (k \in \mathbb{R}^n), \quad (6.2)$$

denn nach Satz 5.25 ist die rechte Seite von (6.2) stetig in k .

Der Integrand $h(k, x) := -ix_j f(x) e^{-ik \cdot x}$ in (6.2) ist gleich

$$h(k, x) = \frac{\partial}{\partial k_j} f(x) e^{-ik \cdot x}.$$

Andererseits ist diese Ableitung punktweiser Limes der Differenzenquotienten

$$h_l(k, x) := f(x) e^{-ik \cdot x} \frac{(e^{-ix_j/l} - 1)}{1/l} \quad (l \in \mathbb{N}).$$

Wegen $l|e^{-ix_j/l} - 1| \leq |x_j|$ ist für alle $k \in \mathbb{R}^n$ die Funktion $x \mapsto |h_l(k, x)|$ durch $x \mapsto |h(k, x)| = |x_j f(x)|$ majorisiert. Nach Annahme ist letztere Funktion in $L^1(\mathbb{R}^n)$. Nach dem Satz 5.18 über die majorisierte Konvergenz gilt daher

$$\begin{aligned} (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} h(k, x) dx &= (2\pi)^{-n/2} \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} h_l(k, x) dx \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\hat{f}(k + \frac{1}{l} e_j) - \hat{f}(k)}{1/l} = \frac{\partial}{\partial k_j} \hat{f}(k). \end{aligned}$$

• Die Aussage für $|\alpha| = k$ erhält man durch Induktion. □

Auch umgekehrt gilt Analoges:

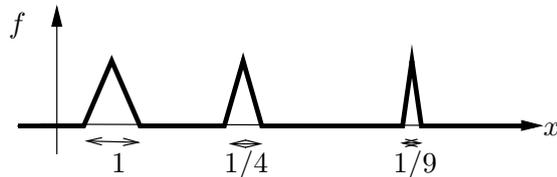
6.4 Satz Sei $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ und $\partial^\alpha f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ für alle Multiindices $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq k$. Dann gilt für diese α

$$\widehat{\partial^\alpha f} = i^{|\alpha|} k^\alpha \hat{f}.$$

Beweis: Wir können uns auf eine einzelne Ableitung und $n = 1$ zurückziehen. Nun zeigt eine partielle Integration

$$\begin{aligned} \widehat{f'}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(f(x) e^{-ikx} \Big|_{-\infty}^{\infty} + ik \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \right) \\ &= ik \hat{f}(k). \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ verwendet. Für $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ muss dieser Limes nicht existieren (siehe Abb.), hier aber wegen $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = f(0) + \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \int_0^y f'(y) dy$ schon.



□

Nicht nur Polynommultiplikation und Differenziation werden durch die Fourier-Transformation verknüpft, sondern auch punktweise Multiplikation und Faltung.

6.5 Definition Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ sei $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ durch

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy$$

definiert. $f * g$ heißt die **Faltung von f und g** .

Im allgemeinen ist dieser Ausdruck nicht für alle $x \in \mathbb{R}^n$ definiert.

6.6 Beispiel Die reelle Funktion¹⁶

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = \begin{cases} |x|^{-1/2} & , |x| \leq 1 \\ 0 & , |x| > 1 \end{cases}$$

ist in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, aber ihre Faltung $f * f$ mit sich selbst divergiert bei 0:

$$(f * f)(0) = \int_{\mathbb{R}} f(-y)f(y) dy = \int_{-1}^1 \frac{1}{|y|} dy = \infty.$$

¹⁶ An der (schlampigen, aber kurzen) Definition von f sieht man einen praktischen Nutzen der Lebesgue-Integration: Die Funktion $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ist bei 0 undefiniert. Die Wahl von $f(0)$ spielt aber für die Äquivalenzklasse $[f] \in L^1(\mathbb{R})$ keine Rolle.

Da aber $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, ist die Faltung insbesondere fast überall definiert:

6.7 Satz Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist auch $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, und

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$$

Beweis: Dazu betrachten wir mit Fubini

$$\begin{aligned} \|f * g\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} |f * g(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy \right| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)| dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(\tilde{x})g(y)| dy d\tilde{x} = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1. \end{aligned}$$

Der Diffeomorphismus

$$\varphi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}, \quad \varphi(\tilde{x}, y) = (x - y, y)$$

besitzt die Funktionaldeterminante $\det D\varphi = 1$, woraus nach dem Transformationssatz die vorletzte Gleichung folgt. \square

6.8 Beispiel Für $r > 0$ und $g_r := \frac{1}{2r} \mathbb{1}_{[-r,r]}$ gilt $g_r \in L^1(\mathbb{R})$ und $\int_{\mathbb{R}} g_r dx = 1$.

Die Faltung einer (nicht stetigen) charakteristischen Funktion f eines Intervalls mit g_r ergibt eine stückweise affine stetige Funktion, siehe Abbildung 6.1 links. Die Faltung einer Dreiecksfunktion f mit g_r ergibt sogar eine stetig differenzierbare Funktion, siehe Abbildung 6.1 rechts.

6.9 Bemerkung Es gilt $f * g = g * f$, denn für $z := x - y$ folgt

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(x-z) dz = g * f(x).$$

Damit wird $*$ zu einer ungewohnten Form der Multiplikation auf $L^1(\mathbb{R}^n)$; die Fourier-Transformation verknüpft sie mit der gewöhnlichen (punktweisen) Multiplikation:

6.10 Satz Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt $\widehat{f * g} = (2\pi)^{n/2} \hat{f} \cdot \hat{g}$.

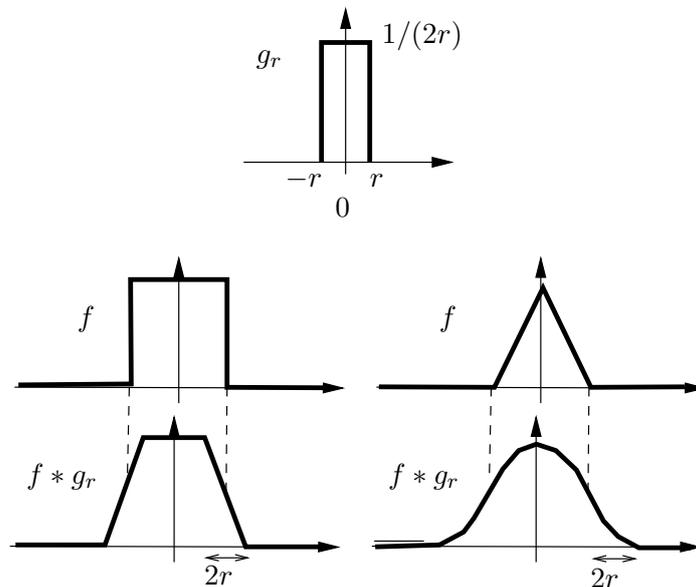


Abbildung 6.1: Faltung der Funktionen f mit g_r

Beweis: Mit der Transformationsregel und dem Satz 5.24 von Fubini ergibt sich

$$\begin{aligned}
 (2\pi)^{n/2} \widehat{f * g}(k) &= \int_{\mathbb{R}^n} f * g(x) e^{-ik \cdot x} dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy \right) e^{-ik \cdot x} dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) e^{-ik \cdot (x-y)} g(y) e^{-ik \cdot y} dx dy \\
 &= (2\pi)^n \widehat{f}(k) \widehat{g}(k),
 \end{aligned}$$

denn tatsächlich ist der Integrand $f(z) e^{-ik \cdot z} g(y) e^{-ik \cdot y}$ in $L^1(\mathbb{R}^{2n})$. \square

Das Beispiel 6.8 suggeriert, dass die Faltung einer beliebigen \mathcal{L}^1 -Funktion mit einer glatten Funktion $\delta \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ glatt ist.

Oft betrachtet man dabei eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

- $\delta \geq 0$
- $\|\delta\|_1 = 1$
- $\delta \in C^k(\mathbb{R}^n)$, und die partiellen Ableitungen $\partial^\alpha \delta$, $|\alpha| \leq k$ seien beschränkt.

Damit ist sichergestellt, dass $\|f * \delta\|_1 \leq \|f\|_1$ (denn nach Satz 6.7 ist $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$), und für $f \geq 0$ die \mathcal{L}^1 -Norm von f erhalten bleibt, denn in diesem Fall wird die Ungleichung im Beweis des Satzes zur Gleichung. Weiter gilt

6.11 Satz Für $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| \leq k$ ist

$$f * \delta \in C^k(\mathbb{R}^n) \quad \text{und} \quad \partial^\alpha(f * \delta) = f * (\partial^\alpha \delta).$$

Beweis: Formal ergibt sich die Richtigkeit von Formel und Satz aus der Kommutativität der Faltung: $f * \delta(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \delta(x-y) dy$. Dass wir die Differenziation unter das Integral ziehen dürfen, folgt (wie im Beweis von Satz 6.2) aus dem Satz über die majorisierte Konvergenz, denn falls $|\partial^\alpha \delta| \leq M$, ($|\alpha| \leq k$), folgt $|\partial^\alpha f(y) \delta(x-y)| \leq M|f(y)|$, $M|f|$ ist also eine Majorante des Integranden. \square

Manchmal wollen wir eine \mathcal{L}^1 -Funktion f durch glatte Funktionen approximieren, und zwar im \mathcal{L}^1 -Sinn. Hier helfen sogenannte δ -Scharen bzw. Dirac-Folgen.

6.12 Definition Eine Folge von Funktionen $\delta_k \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\delta_k \geq 0$, $\|\delta_k\|_1 = 1$ und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{B_r} \delta_k dx = 1 \quad (r > 0)$$

(mit den Vollkugeln $B_r := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}$) heißt **Dirac-Folge**.

6.13 Satz Für eine Dirac-Folge $(\delta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\mathcal{L}^1\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} f * \delta_k = f.$$

Beweis: Wir approximieren f durch Treppenfunktionen und zeigen für letztere die Aussage. Dafür genügt es wegen der Linearität der Faltung mit δ_k , die charakteristische Funktion $\mathbb{1}_Q$ eines Quaders $Q \subset \mathbb{R}^n$ zu betrachten. Für $\varepsilon > 0$ sei r so gewählt, dass das Lebesguemaß der symmetrischen Differenz durch

$$\lambda^n(Q \Delta (Q + y)) \leq \varepsilon/2 \quad (y \in B_r)$$

beschränkt ist. Dann ist nach Fubini

$$\begin{aligned} \|\mathbb{1}_Q - \mathbb{1}_Q * \delta_k\|_1 &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \delta_k(y) |\mathbb{1}_Q(x) - \mathbb{1}_Q(x-y)| dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \delta_k(y) \lambda^n(Q \Delta (Q + y)) dy \\ &= \int_{B_r} \delta_k(y) \lambda^n(Q \Delta (Q + y)) dy + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_r} \delta_k(y) \lambda^n(Q \Delta (Q + y)) dy \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{B_r} \delta_k(y) dy + 2\lambda^n(Q) \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_r} \delta_k(y) dy \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2\lambda^n(Q) \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_r} \delta_k(y) dy. \end{aligned}$$

Für $k \rightarrow \infty$ ist δ_k bei 0 lokalisiert, also auch der zweite Summand $\leq \varepsilon/2$. \square

6.14 Beispiel Hat man eine Funktion $\delta \geq 0$ mit $\|\delta\|_1 > 0$, dann kann man zunächst durch Division durch die Norm erreichen, dass $\|\delta\|_1 = 1$; danach setzt man z.B.

$$\delta_k(x) := k^n \delta(kx) \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Dadurch erreicht man bei Verwendung der Substitution $y := kx$

$$\|\delta_k\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(kx) k^n dx = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(y) dy = \|\delta\|_1 = 1,$$

und $\int_{U_r} \delta_k dx = \int_{U_{kr}} \delta dx \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$.

Ist zusätzlich $\delta \in C^k(\mathbb{R}^n)$, dann auch die δ_k . Dies gilt z.B. für

$$\delta(x) := (2\pi)^{-n/2} \exp(-x^2/2),$$

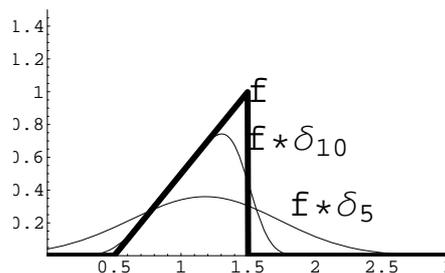
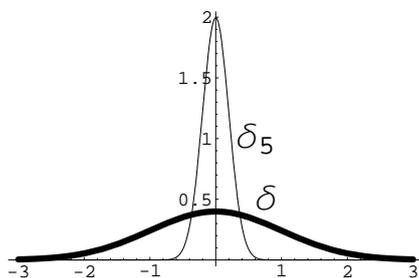
also

$$\delta_k(x) = \left(\frac{k}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \exp(-k^2 x^2/2).$$

In diesem Fall sind nach Satz 6.11 die f approximierenden Funktionen $f * \delta_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, und

$$L^1\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} f * \delta_k = f,$$

obwohl f vielleicht nicht einmal stetig ist, siehe nebenstehende Abbildung.



Mithilfe von δ -Scharen können wir klären, was bei zweimaliger Anwendung der Fourier-Transformation geschieht:

6.15 Satz (Umkehratz) • Ist neben $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ auch $\hat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, dann gilt fast überall

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(k) e^{ik \cdot x} dk, \quad (6.3)$$

d.h. $\hat{\hat{f}}(x) = f(-x)$.

- Gleichung (6.3) gilt in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$, in dem f stetig ist.

Beweis: • Wir zeigen zunächst, dass die mit den Elementen δ_l einer Dirac-Folge gefalteten f die Gleichung erfüllen. Dazu verwenden wir die Gaußsche Dirac-Folge aus Beispiel 6.14. Diese hat nämlich die (aus der Rechnung in Beispiel 6.1 folgende) Eigenschaft

$$\hat{\delta}_l = l^n \delta_{1/l}$$

oder $\delta_l = l^n \hat{\delta}_{1/l}$ oder $\delta_l(r) = \delta_l(-r) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-k^2/(2l^2)} e^{ikr} dk$. Also ist

$$\begin{aligned} f * \delta_l(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \delta_l(x-y) dy \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{ik(x-y)} e^{-k^2/(2l^2)} dk \right) dy \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-ik \cdot y} dy \right) e^{ikx} e^{-k^2/(2l^2)} dk \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(k) e^{ikx} e^{-k^2/(2l^2)} dk, \end{aligned} \quad (6.4)$$

wobei die Vertauschung der Integrationsreihenfolge (dritte Identität) durch Fubini gerechtfertigt ist.

- Nach Satz 6.13 gilt $\mathcal{L}^1\text{-}\lim_{l \rightarrow \infty} f * \delta_l = f$.
- Die Konvergenz fast überall für eine geeignete Teilfolge $(l_k)_{k \in \mathbb{N}}$ folgt dann nach Riesz–Fischer (Satz 5.5).
- Andererseits wird der Integrand in (6.4) durch $|\hat{f}|$ majorisiert. Nach dem Satz über die majorisierte Konvergenz (Satz 5.18) gilt daher

$$\lim_{l \rightarrow \infty} (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(k) e^{ik \cdot x} e^{-k^2/(2l^2)} dk = \hat{f}(-x) \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Damit ist die erste Aussage bewiesen.

- Wir wissen schon, dass die Fourier–Transformierte \hat{f} von $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ stetig ist (Satz 5.25). Daher folgt $f(x) = \hat{f}(-x)$ dort, wo f stetig ist, also die zweite Aussage. \square

Der Umkehrsatz zeigt nun, dass die ebene Welle $x \mapsto e^{ik \cdot x}$ desto stärker zu f beiträgt, je größer $\hat{f}(k)$ betragsmäßig ist. Daher wird \hat{f} auch das *kontinuierliche Spektrum* von f genannt.

Bevor wir uns nun einer Anwendung der Fourier–Transformation in der Differentialgleichungstheorie zuwenden, ist eine Bemerkung über den Zusammenhang von Glattheit von f und Abfall von \hat{f} nötig.

Und zwar fällt $\hat{f}(k)$ für große $|k|$ desto stärker ab, je glatter f ist.

Wir wissen nämlich, dass die Fourier–Transformierte \hat{g} einer Funktion $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ beschränkt ist. Existiert nun $g := \partial^\alpha f$ und ist sogar eine L^1 –Funktion, dann folgt nach Satz 6.4, dass

$$k \mapsto k^\alpha \hat{f}(k) \quad \text{als Fourier–Transformierte von} \quad i^{|\alpha|} g$$

beschränkt ist. Daher fällt die Fourier-Transformierte einer Funktion f , deren partielle Ableitungen $\partial^\alpha f$ L^1 -Funktionen sind, schnell genug ab, um integrierbar zu sein.

6.16 Beispiel Wir betrachten nun die inhomogene lineare DGL

$$x'' - x = f \quad \text{mit} \quad f \in L^1(\mathbb{R}), \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}). \quad (6.5)$$

Eine partikuläre Lösung $t \mapsto \varphi(t)$ der DGL, die mit ihren ersten beiden Ableitungen in $L^1(\mathbb{R})$ liegt, lässt sich nach Satz 6.4 mit diesen Ableitungen fourier-transformieren, und wir erhalten

$$-(k^2 + 1)\hat{\varphi}(k) = \hat{f}(k) \quad , \text{ also } \hat{\varphi}(k) = \frac{-\hat{f}(k)}{k^2 + 1}.$$

Nun ist $(k^2 + 1)^{-1} = \hat{g}(k)$ mit $g(t) := \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|t|}$, sodass $\varphi(t) = \hat{\varphi}(-t) = -\widehat{\hat{f} \cdot \hat{g}}(-t) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}}f * g(-t)$ oder

$$\boxed{\varphi(t) = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-|t-s|} f(s) ds.}$$

Die allgemeine Lösung von (6.5) besitzt daher die Form

$$t \mapsto c_1 \cosh t + c_2 \sinh t + \varphi(t).$$

6.2 Fourier-Transformation auf $L^2(\mathbb{R}^n)$

Bisher haben wir \mathcal{L}^1 -Funktionen fourier-transformiert. Jetzt wollen wir dasselbe für \mathcal{L}^2 -Funktionen tun. Das ist aber nicht unmittelbar möglich; das Integral braucht nicht zu existieren. Daher gehen wir zunächst einmal auf eine Klasse "gutartiger" Funktionen zurück:

6.17 Definition Der **Schwartz-Raum** $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist der Funktionenraum

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n : t \mapsto t^\alpha \partial^\beta f(t) \text{ ist beschränkt}\}.$$

Die Schwartzfunktionen fallen also nicht nur schneller als jede Potenz ab, das gleiche gilt auch für ihre partiellen Ableitungen. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist ein \mathbb{C} -Vektorraum.

6.18 Beispiel Die Funktionen $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger sind ebenso wie die

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = p(x) \exp(-\|x\|^2)$$

mit einem Polynom p Schwartz-Funktionen.

Aus der Definition des Schwartz-Raums folgt, dass $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Wir können also Schwartzfunktionen fourier-transformieren. Andererseits liegt $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ *dicht*; man kann ja $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ durch $f \cdot \chi_R$ approximieren, mit der Abschneidefunktion $\chi_R(x) := \begin{cases} 1 & , \quad \|x\| \leq R \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$, und $f \cdot \chi_R \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ durch Faltung mit einer geeigneten δ -Schar durch glatte Funktionen mit kompaktem Träger approximieren.

6.19 Satz 1. Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist auch $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

2. Die Restriktion $\mathcal{F}_S : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ der Fourier-Transformation auf den Schwartzraum ist ein Isomorphismus.

3. $\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = \langle f, g \rangle \quad (f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) \quad (\text{Plancherel-Formel})$

Beweis:

1. Nach Satz 6.2 und Satz 6.4 gilt $k^\alpha \partial^\beta \hat{f} = (-i)^{|\alpha|+|\beta|} \widehat{\partial^\alpha \chi^\beta f}$. Also ist für alle Multiindices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ die Funktion $k \mapsto k^\alpha \partial^\beta \hat{f}(k)$ beschränkt.

2. Wir kennen schon die inverse Fourier-Transformation und wissen, dass sie bis auf Inversion des Arguments gleich der Fourier-Transformation ist.

3. Das Skalarprodukt der Fourier-Transformierten ist

$$\begin{aligned} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(k) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \overline{g(x) e^{-ik \cdot x}} dx \right) dk \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(k) e^{ik \cdot x} dk \right) \overline{g(x)} dx = \langle f, g \rangle \end{aligned}$$

nach Fubini (Satz 5.24). □

Da nicht alle Funktionen $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ integrierbar sind, konvergiert zwar im Allgemeinen

$$\hat{f}(k) := \lim_{R \rightarrow \infty} (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_R(x) \cdot f(x) e^{-ik \cdot x} dx$$

nicht für alle $k \in \mathbb{R}^n$, aber für λ^n -fast alle:

6.20 Satz Die Fourier-Transformation $\mathcal{F}_S : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ läßt sich eindeutig stetig zur **Fourier-Transformation** \mathcal{F} auf $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n) \supset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen, und

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$$

ist eine **unitäre lineare Abbildung**.

Beweis: • Da nach $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ ein dichter Untervektorraum ist, gibt es für jedes $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ eine gegen f \mathcal{L}^2 -konvergente Cauchy-Folge $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ von Schwartz-Funktionen.

- Da nach der Plancherel-Formel $\mathcal{F}_S : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_2$ eine Isometrie auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist, ist auch $(\mathcal{F}_S(f_m))_{m \in \mathbb{N}}$ eine \mathcal{L}^2 -Cauchy-Folge.
- $L^2(\mathbb{R}^n)$ ist aber ein Banach-Raum, der Limes

$$\mathcal{F}(f) := L^2\text{-}\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{F}_S(f_m)$$

existiert also, und er ist unabhängig von der Wahl der gegen f konvergenten Cauchy-Folge.

- Die Linearität von \mathcal{F} und die Isometrie-Eigenschaft überträgt sich von \mathcal{F}_S . Damit ist nach Satz 3.28 die Abbildung \mathcal{F} stetig
- Die Surjektivität von \mathcal{F} folgt aus der Eigenschaft $\mathcal{F}_S(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (Satz 6.19.2), denn damit können wir jedes $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ durch eine Cauchy-Folge $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$ von $g_m = \mathcal{F}_S(f_m)$ mit $f_m \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ approximieren, und aus $f_m(x) = \mathcal{F}_S(g_m)(-x)$ (Umkehrsatz 6.15) schließen wir, dass auch die f_m eine Cauchy-Folge bilden, also

$$g = \lim_{m \rightarrow \infty} g_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{F}(f_m) = \mathcal{F}\left(\lim_{m \rightarrow \infty} f_m\right)$$

wegen der Stetigkeit von \mathcal{F} . □

6.21 Bemerkung Dass also die Fourier-Transformation eine stetige Abbildung

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$$

ist, impliziert *nicht* die Stetigkeit der Fourier-Transformierten von L^2 -Funktionen. Im Gegensatz zur Fourier-Transformierten von L^1 -Funktionen (Satz 5.25) ist im Gegenteil die Fourier-Transformierte einer L^2 -Funktion im Allgemeinen unstetig. Denn jede L^2 -Funktion (wie z.B. $\mathbb{1}_{[0,1]}$) ist ja selbst Fourier-Transformierte einer L^2 -Funktion.

6.3 Fourier-Transformation für abelsche Gruppen

Abschließend wollen wir uns die Fourier-Transformation etwas allgemeiner anschauen.

- Vielleicht wissen Sie, dass auch periodische Funktionen fourier-transformiert werden können, das Ergebnis dann aber eine Reihe ist (und nicht z.B. wieder eine periodische Funktion).

- Auch auf dem Vektorraum \mathbb{C}^n lässt sich eine Fourier-Transformation einführen. Wir setzen dazu $c := \exp(-2\pi i/n)$ und die *Fourier-Matrix*

$$U \in \text{Mat}(n, \mathbb{C}) \quad , \quad U = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & c & c^2 & \dots & c^{n-1} \\ 1 & c^2 & c^4 & \dots & c^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & c^{n-1} & c^{2(n-1)} & \dots & c^{(n-1)^2} \end{pmatrix}.$$

Die c^k sind n -te Einheitswurzeln, und man kann zeigen, dass U unitär ist.

Was ist das verbindende Band zwischen diesen drei Fällen?

1. Zunächst sehen wir, dass jeweils Funktionen transformiert werden, deren Definitionsbereich eine *abelsche Gruppe* ist:

- Für $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ die Gruppe \mathbb{R}^n .
- Für die Fourier-Transformation der periodischen Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit Periode $a > 0$ (d.h. $f(x+a) = f(x)$) lässt sich f als Funktion auf $\mathbb{R} \pmod{(a)}$ auffassen. Letzteres ist eine abelsche Gruppe (die via der Bijektion

$$\varphi : \mathbb{R}/a\mathbb{Z} \rightarrow S^1 \quad , \quad \varphi(x) := \exp(2\pi i x/a)$$

isomorph zur multiplikativen Gruppe $S^1 := \{c \in \mathbb{C} \mid |c| = 1\}$ ist).

- Für die Fourier-Transformation $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ wird der Vektorraum \mathbb{C}^n als der Raum der Funktionen $f : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ aufgefasst, wobei $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ die Restklassengruppe ist.

2. Ein *Gruppencharakter* einer abelschen Gruppe G ist eine Abbildung

$$\chi : G \rightarrow S^1$$

mit der Eigenschaft

$$\chi(g_1 + g_2) = \chi(g_1) \cdot \chi(g_2).$$

Er ist also ein Gruppenhomomorphismus, denn S^1 mit Multiplikation ist selbst eine Gruppe.

- Für $k \in \mathbb{R}^n$ ist $\chi_k : \mathbb{R}^n \rightarrow S^1$ mit $\chi_k(x) := \exp(-2\pi i k \cdot x)$ ein Gruppencharakter.
- Entsprechendes gilt für $k \in \mathbb{Z}$, $G := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ und

$$\chi_k : G \rightarrow S^1 \quad , \quad \chi_k(x) := e^{-2\pi i k x}.$$

- Für $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sind χ_k von der Form

$$\chi_k(x) := \exp(-2\pi i k x / n) \quad (x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

mit $k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ Gruppencharaktere.

In all diesen Fällen ist jeder stetige Gruppencharakter so darstellbar.

- Die stetigen Gruppencharaktere bilden selbst eine (multiplikativ geschriebene) abelsche Gruppe G^* , die zu G *duale Gruppe*.

- Für $G = \mathbb{R}^n$ ist auch $G^* \cong \mathbb{R}^n$. Die Abbildung $\chi_k \mapsto k$ ist ein Isomorphismus der abelschen Gruppen, denn $\chi_k \cdot \chi_l = \chi_{k+l}$.
- Für $G = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ist $G^* \cong \mathbb{Z}$ (mit Isomorphismus $\chi_k \mapsto k$).
- Für $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist $G^* \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

- Die Gruppen wirken durch Verschiebung auf sich selbst, und es gibt bis auf Normierung nur ein unter dieser Verschiebung invariantes Maß, das *Haar-Maß*.

- Für $G = \mathbb{R}^n$ das Lebesgue-Maß λ^n .
- Für $G = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ das durch das Lebesgue-Maß $\lambda|_{[0,1]}$ induzierte Maß.
- Für $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ das zählende Maß.

Die Fourier-Transformation bildet nun integrable Funktionen

$$f : G \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{auf Funktionen} \quad \hat{f} : G^* \rightarrow \mathbb{C}$$

ab. Nennt man das Haarsche Maß μ , dann kann man die Fourier-Transformation in der Form

$$\hat{f}(k) := \int_G f(x) \chi_k(x) d\mu(x) \quad (k \in G^*)$$

schreiben. Statt auf $L^1(G, \mu)$ kann man (analog zum Fall $G = G^* = \mathbb{R}^n$) die Fourier-Transformation als unitäre Abbildung $\mathcal{F} : L^2(G, \mu) \rightarrow L^2(G^*, \mu^*)$ redefinieren.

Die Rechenregeln übertragen sich daher (mit leichten Modifikationen) vom \mathbb{R}^n auf beliebige (lokal kompakte¹⁷) abelsche Gruppen G .

¹⁷**Def.:** Ein topologischer Raum heißt **lokal kompakt**, wenn jeder Punkt des Raumes eine kompakte Umgebung besitzt.

6.22 Beispiel Die reelle Funktion

$$f := \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{1}_{[2\pi(j-1/4), 2\pi(j+1/4)]}$$

ist 2π -periodisch, kann also als Funktion auf der abelschen Gruppe $G := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ aufgefasst werden. Da sie beschränkt und stückweise stetig ist, ist $f \in L^2(G)$, und ihre *Fourierkoeffizienten*, d.h. die Werte der Fourier-Transformierten auf der dualen Gruppe $\hat{G} = \mathbb{Z}$, sind (bei Wahl der Normierung, für die $\hat{f}(0)$ der Mittelwert von f ist)

$$\begin{aligned} \hat{f}(k) &:= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-ikx} dx \\ &= \begin{cases} 1/2 & , k = 0 \\ \frac{i^{-k} - i^k}{-2\pi ik} & , k \neq 0 \end{cases} . \end{aligned}$$

Sie sind also gleich Null, falls $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gerade ist.

Wegen der Symmetrie $\hat{f}(-k) = \hat{f}(k)$ gilt für alle Stetigkeitsstellen x von f

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos((2k+1)x) \quad (6.6)$$

mit den Koeffizienten

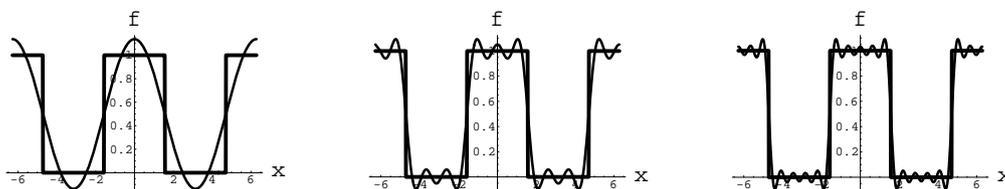
$$a_k = \frac{2(-1)^k}{\pi(2k+1)} .$$

Dies folgt aus einem Satz, der analog zum Umkehrsatz (Satz 6.15) bewiesen wird.

Diese Zusammensetzung von f aus trigonometrischen Funktionen wird auch *Fouriersynthese* genannt. Die Partialsummen

$$f_l(x) := \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^l a_k \cos((2k+1)x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

sind für $l = 0, 2$ und 4 zusammen mit f abgebildet.



Bei den Sprungstellen von f ist die Reihe (6.6) nicht konvergent, überschießt aber asymptotisch die Pulshöhe um ca. 9 % (sog. *Gibbs-Phänomen*).

7 Differentialformen und Mannigfaltigkeiten

In zahlreichen Anwendungen der Analysis wird *über Untermannigfaltigkeiten* des \mathbb{R}^n *integriert*. Um diese Integration durchzuführen, entwickeln wir den Kalkül der Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten.

Dieser Kalkül lässt auch den *geometrischen Gehalt* physikalischer Theorien wie Elektrodynamik oder Allgemeine Relativitätstheorie klar hervortreten (beispielsweise lassen sich die sog. Maxwell'schen Gleichungen der Elektrodynamik mit Differentialformen als $dF = 0$, $d^*F = j$ schreiben, siehe Beispiel 7.18).

Eine gute Einführung gibt das Buch [AF] von Agricola und Friedrich.

7.1 Multilinearformen

Der erste Schritt ist die algebraische Theorie der *äußeren Formen*, denn diese beschreiben das lokale Verhalten der Differentialformen an einem Punkt der Mannigfaltigkeit.

7.1 Definition *Es sei E ein n -dimensionaler reeller Vektorraum. Eine Abbildung $\varphi : E \times \dots \times E \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **multilinear**, wenn sie in jedem Argument linear ist, d.h. für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x_j, x_j^{I/II} \in E$*

$$\varphi(x_1, \dots, x_{j-1}, \lambda x_j, x_{j+1}, \dots, x_k) = \lambda \varphi(x_1, \dots, x_k)$$

und

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j^I + x_j^{II}, x_{j+1}, \dots, x_k) \\ = \varphi(x_1, \dots, x_j^I, \dots, x_k) + \varphi(x_1, \dots, x_j^{II}, \dots, x_k). \end{aligned}$$

Genauer spricht man bei k Argumenten von einer **k -linearen** Abbildung.

Einige multilineare Abbildungen sind schon aus der Linearen Algebra vertraut:

7.2 Beispiel 1. $k = 1$. Dann ist $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ eine *Linearform*, und für $\varphi \neq 0$ ist $\varphi^{-1}(0) \subset E$ ein Unterraum der Dimension $n - 1$.

Auf $E = \mathbb{R}^n$ mit Standardbasis $e_1, \dots, e_n \in E$ bezeichne $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in E^*$ die *Dualbasis* (d.h. diejenige Basis des Dualraumes E^* von E , für die $\alpha_i(e_j) = \delta_{ij}$ gilt). Dann ist $\varphi = \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i$ mit Koeffizienten $c_i := \varphi(e_i)$.

2. $k = 2$, $E = \mathbb{R}^n$ mit kanonischem innerem Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Für $A \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$ ist

$$\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad \varphi(x, y) := \langle x, Ay \rangle$$

eine *Bilinearform*. Sie heißt (*anti-*) *symmetrisch*, wenn

$$\varphi(x, y) = \pm \varphi(y, x) \quad (x, y \in E).$$

3. $k = n$, $E = \mathbb{R}^n$. Die n -lineare Abbildung

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) := \det(x_1, \dots, x_n) \quad (x_i \in E)$$

heißt *Determinantenform*. Sie gibt das orientierte Volumen des von x_1, \dots, x_n aufgespannten Parallelotops an.

Offensichtlich können wir zwei k -lineare Abbildungen φ_1, φ_2 *addieren*, indem wir

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(x_1, \dots, x_k) := \varphi_1(x_1, \dots, x_k) + \varphi_2(x_1, \dots, x_k)$$

setzen und eine k -lineare Abbildung φ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ *multiplizieren*:

$$(\lambda\varphi)(x_1, \dots, x_k) := \lambda(\varphi(x_1, \dots, x_k)).$$

Damit wird die Menge $L^k(E, \mathbb{R})$ der k -linearen Abbildungen von E in \mathbb{R} zu einem \mathbb{R} -Vektorraum.

7.3 Definition Es sei E ein n -dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum.

• Dann heißt $\varphi \in L^k(E, \mathbb{R})$ **äußere k -Form**, wenn sie **antisymmetrisch** ist, d.h. für alle $1 \leq i < l \leq k$ und $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_l, \dots, x_k) = -\varphi(x_1, \dots, x_l, \dots, x_i, \dots, x_k).$$

• Der Unterraum der äußeren k -Formen wird mit $\Lambda^k(E) \subset L^k(E, \mathbb{R})$ bezeichnet.

7.4 Beispiel Betrachten wir die Beispiele 7.2:

1. $\Lambda^1(E) = L^1(E, \mathbb{R}) = E^*$.
2. $(x, y) \mapsto \langle x, Ay \rangle$ definiert eine äußere 2-Form auf \mathbb{R}^n genau, wenn die Matrix A antisymmetrisch ist.
3. Die Determinantenform ist bis auf ihre Vielfachen die einzige äußere n -Form auf dem \mathbb{R}^n .

7.5 Definition Das **äußere Produkt** von $\omega_1, \dots, \omega_k \in \Lambda^1(E)$ ist die durch

$$\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k(x_1, \dots, x_k) := \det \begin{pmatrix} \omega_1(x_1) & \dots & \omega_k(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_1(x_k) & \dots & \omega_k(x_k) \end{pmatrix} \quad (x_i \in E)$$

definierte k -lineare Abbildung.

Offensichtlich ist $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k$ eine k -Form, also in $\Lambda^k(E)$.

Insbesondere ist damit für die Dualbasis $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ von E^*

$$\alpha_{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{i_k} \in \Lambda^k(E).$$

Wegen der Eigenschaften der Determinante stimmt diese äußere Form bis auf Vorzeichen mit derjenigen überein, bei der i_1, \dots, i_k aufsteigend geordnet sind und ist genau dann $\neq 0$, wenn alle Indizes voneinander verschieden sind.

Wir können nun jede k -Form $\omega \in \Lambda^k(E)$ eindeutig als Linearkombination

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k} \alpha_{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{i_k}$$

mit Koeffizienten

$$\omega_{i_1 \dots i_k} := \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \in \mathbb{R}$$

darstellen. Da die Indexmengen $\{i_1, \dots, i_k\}$ die k -elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$ durchlaufen, gilt für $\dim(E) = n$

$$\dim(\Lambda^k(E)) = \binom{n}{k}.$$

Das *äußere Produkt* der k -Form ω mit einer l -Form

$$\psi := \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq n} \psi_{j_1 \dots j_l} \alpha_{j_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{j_l}$$

wird nun als $\omega \wedge \psi \in \Lambda^{k+l}(E)$,

$$\omega \wedge \psi := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k} \psi_{j_1 \dots j_l} \alpha_{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{i_k} \wedge \alpha_{j_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{j_l}$$

definiert. All diejenigen Summanden, bei denen ein Indexpaar $i_r = j_s$ vorkommt, sind gleich Null, denn $\alpha_l \wedge \alpha_l = -\alpha_l \wedge \alpha_l = 0$.

- Offensichtlich ist das äußere Produkt *assoziativ*, d.h. für beliebige äußere Formen auf E gilt

$$(\omega \wedge \psi) \wedge \rho = \omega \wedge (\psi \wedge \rho).$$

- Weiter gilt für eine k -Form ω und eine l -Form ψ

$$\omega \wedge \psi = (-1)^{k \cdot l} \psi \wedge \omega,$$

denn wir müssen $k \cdot l$ -mal 1-Formen kommutieren, um von der einen zur anderen Form zu gelangen.

7.6 Beispiel Symplektische Form auf dem \mathbb{R}^{2n}

$$\omega := \sum_{i=1}^n \alpha_i \wedge \alpha_{i+n} \in \Lambda^2(\mathbb{R}^{2n}).$$

Für $n = 2$ ergibt sich

$$\omega = \alpha_1 \wedge \alpha_3 + \alpha_2 \wedge \alpha_4,$$

also

$$\begin{aligned} \omega \wedge \omega &= (\alpha_1 \wedge \alpha_3 + \alpha_2 \wedge \alpha_4) \wedge (\alpha_1 \wedge \alpha_3 + \alpha_2 \wedge \alpha_4) \\ &= \underbrace{\alpha_1 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_3}_0 + \alpha_2 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_3 \\ &\quad + \alpha_1 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_4 + \underbrace{\alpha_2 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_4}_0 \\ &= (-1)^3 \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4 + (-1)^1 \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4 \\ &= -2\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4. \end{aligned}$$

Die symplektische Form ω hat eine Schlüsselrolle in der klassischen Mechanik. Dort bezeichnet man die Koordinaten x_1, \dots, x_n als Impulskoordinaten, die Koordinaten x_{n+1}, \dots, x_{2n} als Ortskoordinaten.

7.7 Beispiel Wir betrachten jetzt speziell den (physikalisch wichtigen) \mathbb{R}^3 , und ordnen Vektoren $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3 \in \mathbb{R}^3$ verschiedene äußere Formen zu:

- Allgemein vermittelt das kanonische innere Produkt im \mathbb{R}^n einen Isomorphismus

$$v \mapsto v^* \quad , \quad v^*(w) := \langle v, w \rangle \quad (w \in \mathbb{R}^n)$$

des \mathbb{R}^n und seines Dualraumes. Die 1-Form v^* besitzt dabei die Gestalt

$$v^* = \sum_{i=1}^n v_i \alpha_i \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n).$$

- $v \in \mathbb{R}^n$ wird auch eine $(n-1)$ -Form $\omega_v \in \Lambda^{n-1}(\mathbb{R}^n)$,

$$\omega_v(w_2, \dots, w_n) := \det(v, w_2, \dots, w_n) \quad (w_2, \dots, w_n \in \mathbb{R}^n)$$

zugeordnet. Speziell im \mathbb{R}^3 finden wir die 2-Form

$$\omega_v = v_1 \alpha_2 \wedge \alpha_3 + v_2 \alpha_3 \wedge \alpha_1 + v_3 \alpha_1 \wedge \alpha_2.$$

- Das äußere Produkt zweier solcher 1-Formen ergibt auf dem \mathbb{R}^3 die 2-Form

$$\begin{aligned} v^* \wedge w^* &= (v_1\alpha_1 + v_2\alpha_2 + v_3\alpha_3) \wedge (w_1\alpha_1 + w_2\alpha_2 + w_3\alpha_3) \\ &= (v_1w_2 - v_2w_1)\alpha_1 \wedge \alpha_2 + (v_2w_3 - v_3w_2)\alpha_2 \wedge \alpha_3 \\ &\quad + (v_3w_1 - v_1w_3)\alpha_3 \wedge \alpha_1 \\ &= \omega_{v \times w}. \end{aligned}$$

Wir haben auf diese Weise das *Kreuzprodukt*

$$v \times w = \begin{pmatrix} v_2w_3 - v_3w_2 \\ v_3w_1 - v_1w_3 \\ v_1w_2 - v_2w_1 \end{pmatrix}$$

zweier Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$ gewonnen.

7.8 Satz Die Vektoren $w_1, \dots, w_k \in E^*$ sind genau dann linear abhängig, wenn

$$w_1 \wedge \dots \wedge w_k = 0.$$

Beweis:

- Wenn sie linear abhängig sind, können wir einen Index $i \in \{1, \dots, k\}$ mit $w_i = \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^k c_l w_l$ finden. Damit gilt aber

$$w_1 \wedge \dots \wedge w_k = \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^k c_l w_1 \wedge \dots \wedge w_l \wedge \dots \wedge w_k = 0,$$

denn in jedem Summanden kommt w_l doppelt vor.

- Andernfalls können wir die Vektoren zu einer Basis

$$w_1, \dots, w_n \quad \text{mit} \quad n := \dim(E^*)$$

ergänzen, sodass $w_1 \wedge \dots \wedge w_n \neq 0$ ist. Dann ist aber auch $w_1 \wedge \dots \wedge w_k \neq 0$.

□

7.9 Definition Der reelle Vektorraum

$$\Lambda^*(E) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Lambda^k(E) \cong \bigoplus_{k=0}^{\dim(E)} \Lambda^k(E)$$

(mit $\Lambda^0(E) := \mathbb{R}$) mit der durch das Dachprodukt gegebenen Multiplikation heißt die **äußere** oder **Grassmann-Algebra** über E .

7.10 Bemerkungen 1. $\dim(\Lambda^*(E)) = 2^{\dim(E)}$, denn $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

2. Für beliebige $k, l \in \mathbb{N}_0$ ist für alle $\omega \in \Lambda^k(E)$ und $\varphi \in \Lambda^l(E)$:
 $\omega \wedge \varphi \in \Lambda^{k+l}(E)$, aber für $m > \dim(E)$ ist $\dim(\Lambda^m(E)) = 0$.

7.11 Definition Für eine lineare Abbildung $f : E \rightarrow F$ endlich dimensionaler \mathbb{R} -Vektorräume und $\omega \in \Lambda^k(F)$ heißt die durch

$$f^*(\omega)(v_1, \dots, v_k) := \omega(f(v_1), \dots, f(v_k))$$

definierte k -Form $f^*(\omega)$ die **Zurückziehung** (engl. **pull-back**) von ω mit f .

Es gilt offensichtlich $f^*(\omega) \in \Lambda^k(E)$, denn $f^*(\omega)$ ist k -linear und antisymmetrisch.

7.12 Satz 1. Die Abbildung $f^* : \Lambda^*(F) \rightarrow \Lambda^*(E)$ ist linear.

2. Für $g \in L(F, G)$ ist $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

3. Für die identische Abbildung $\text{Id}_E : E \rightarrow E$ ist $\text{Id}_E^* = \text{Id}_{\Lambda^*(E)}$.

4. Für eine invertierbare Abbildung $f \in GL(E, F)$ ist $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.

5. $f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*(\alpha) \wedge f^*(\beta)$.

Beweis: Wir beweisen die Behauptungen für die Summanden Λ^k , $k \in \mathbb{N}_0$ von Λ^* : Für alle Vektoren $v_1, \dots, v_k \in E$ gilt

1. Mit $\alpha, \beta \in \Lambda^k(F)$ und $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} f^*(c_1\alpha + c_2\beta)(v_1, \dots, v_k) &= (c_1\alpha + c_2\beta)(f(v_1), \dots, f(v_k)) \\ &= c_1\alpha(f(v_1), \dots, f(v_k)) + c_2\beta(f(v_1), \dots, f(v_k)) \\ &= c_1f^*\alpha(v_1, \dots, v_k) + c_2f^*\beta(v_1, \dots, v_k). \end{aligned}$$

2. $(g \circ f)^*\alpha(v_1, \dots, v_k) = \alpha(g \circ f(v_1), \dots, g \circ f(v_k)) = g^*\alpha(f(v_1), \dots, f(v_k))$
 $= f^* \circ g^*\alpha(v_1, \dots, v_k)$

3. $\text{Id}_E^*(\alpha)(v_1, \dots, v_k) = \alpha(\text{Id}_E(v_1), \dots, \text{Id}_E(v_k)) = \alpha(v_1, \dots, v_k)$.

4. Folgt aus 2. und 3.: $(f^{-1})^*f^* = (f \circ f^{-1})^* = \text{Id}_F^* = \text{Id}_{\Lambda^*(F)}$.

5. Hausaufgabe □

7.2 Differentialformen

Wir wollen nun Differentialformen einführen, aus Zeitgründen aber nur auf offenen Teilmengen $U \subset \mathbb{R}^n$, nicht auf Mannigfaltigkeiten.

Eine *Differentialform* ω auf $U \subset \mathbb{R}^n$ ist eine von Ort zu Ort variierende äußere Form, deren Variation wir als glatt voraussetzen.

Wir schreiben eine allgemeine k -Form ω in der *Grundform*

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \in \Omega^k(U), \quad (7.1)$$

wobei die $\omega_{i_1 \dots i_k} \in \Omega^0(U) := C^\infty(U, \mathbb{R})$ sind, und die dx_i den Koordinatenfunktionen $x_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zugeordnete 1-Differentialformen sind ($dx_i \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$). Den Raum der k -Differentialformen schreiben wir ab jetzt zur Unterscheidung vom Raum der äußeren k -Formen mit dem Symbol Ω statt Λ .

Die dx_i sind durch ihre Wirkung auf ein Vektorfeld $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert, und $dx_i(v)(y) := v_i(y)$. 1-Differentialformen machen also aus Vektorfeldern Funktionen, und für k Vektorfelder $v^{(l)} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist für das ω aus (7.1)

$$\omega(v^{(1)}, \dots, v^{(k)}) := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k} \cdot \det \begin{pmatrix} dx_{i_1}(v^{(1)}) & \dots & dx_{i_k}(v^{(1)}) \\ \vdots & & \vdots \\ dx_{i_1}(v^{(k)}) & \dots & dx_{i_k}(v^{(k)}) \end{pmatrix}$$

definiert. Das Ergebnis ist also eine reelle Funktion auf U .

Die Rechenregeln übertragen sich von den äußeren Formen auf die Differentialformen.

Auf dem \mathbb{R} -Vektorraum

$$\Omega^*(U) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Omega^k(U) \cong \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(U)$$

der Differentialformen betrachten wir jetzt den *Differentialoperator* d , der durch

- $df := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ für Funktionen $f \in C^\infty(U, \mathbb{R}) = \Omega^0(U)$
- und $d\omega := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} d\omega_{i_1 \dots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ für k -Formen $\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$

definiert ist. d verwandelt eine k -Form also in eine $(k+1)$ -Form.

7.13 Definition Die lineare Abbildung $d : \Omega^*(U) \rightarrow \Omega^*(U)$ heißt **äußere Ableitung**.

7.14 Beispiel 1. Für $\omega \in \Omega^0(\mathbb{R}^3)$ ist $d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \omega}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \omega}{\partial x_3} dx_3$.

2. Für $\omega = \omega_1 dx_1 + \omega_2 dx_2 + \omega_3 dx_3 \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ ist

$$\begin{aligned} d\omega &= (d\omega_1) \wedge dx_1 + (d\omega_2) \wedge dx_2 + (d\omega_3) \wedge dx_3 \\ &= \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 + \left(\frac{\partial \omega_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x_3} \right) dx_2 \wedge dx_3 \\ &\quad + \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1} \right) dx_3 \wedge dx_1 \end{aligned}$$

3. Für $\omega = \omega_{12} dx_1 \wedge dx_2 + \omega_{23} dx_2 \wedge dx_3 + \omega_{31} dx_3 \wedge dx_1 \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ ist

$$d\omega = \left(\frac{\partial \omega_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \omega_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \omega_{31}}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

4. Für $\omega \in \Omega^3(\mathbb{R}^3)$ ist $d\omega = 0$.

7.15 Satz d ist eine **Antiderivation**, d.h. für $\alpha \in \Omega^k(U)$ und $\beta \in \Omega^l(U)$ ist

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta.$$

Beweis: Wegen der Linearität von d genügt es, diese Gleichung für Monome

$$\alpha := f \underbrace{dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}}_{\tilde{\alpha}}, \quad \beta := g \underbrace{dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l}}_{\tilde{\beta}}, \quad f, g \in C^\infty(U, \mathbb{R})$$

zu beweisen. Es gilt

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= d(f \cdot g) \tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta} = ((df)g + f(dg)) \tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta} \\ &= (df) \tilde{\alpha} \wedge g \tilde{\beta} + (-1)^k f \tilde{\alpha} \wedge (dg) \tilde{\beta} = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta. \end{aligned}$$

□

7.16 Satz Auf $\Omega^*(U)$ gilt $\boxed{dd = 0}$.

Beweis:

1. Für $f \in \Omega^0(U)$ ist $ddf = d\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_l} dx_l \wedge dx_i = \sum_{1 \leq r < s \leq n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_r \partial x_s} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_s \partial x_r} \right) dx_r \wedge dx_s = 0$, da wir wegen der Glattheit von f die partiellen Ableitungen vertauschen können.

2. Für $\omega = \sum \omega_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \in \Omega^k(U)$ ist

$$d\omega = \sum \underbrace{(d\omega_{i_1 \dots i_k})}_0 \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = 0,$$

denn gemäß Satz 7.15 wird die äußere Ableitung auf die 1-Formen $d\omega_{i_1 \dots i_k}$ und dx_{i_l} angewandt, und nach 1. ist das Ergebnis Null. □

7.17 Definition Eine Differentialform $\varphi \in \Omega^*(U)$ heißt

- **geschlossen**, wenn $d\varphi = 0$,
- **exakt**, wenn $\varphi = d\psi$ für ein $\psi \in \Omega^*(U)$ gilt.

Nach Satz 7.16 sind exakte Differentialformen geschlossen.

Für k -Formen auf $U = \mathbb{R}^n$ gilt (für $k \geq 1$) auch die Umkehrung (sog. *Poincaré-Lemma*, siehe [AF]).

7.3 Vektoranalysis

Wir erinnern uns an Beispiel 7.7, in dem wir Vektoren in 1-Formen bzw. $(n-1)$ -Formen umgewandelt haben. Gleiches wollen wir jetzt auch für Vektorfelder und Differentialformen tun. Wir ordnen also mithilfe des kanonischen Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf dem \mathbb{R}^n dem Vektorfeld $v \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$

1. die durch $v^* \in \Omega^1(U)$, $v^*(w) := \langle v, w \rangle$ ($w \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$) definierte 1-Form zu. In Koordinaten ist $v^* = \sum_{i=1}^n v_i dx_i$.
2. Die Zuordnung einer $(n-1)$ -Form $\omega_v \in \Omega^{n-1}(U)$ zum Vektorfeld v wird durch

$$\omega_v(w_1, \dots, w_{n-1}) := \det(v, w_1, \dots, w_{n-1}) \quad (w_i \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)) \quad (7.2)$$

definiert, also durch ihre Anwendung auf $n-1$ Vektorfelder. In Koordinaten ergibt sich $\omega_v = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n(v, \cdot, \dots, \cdot)$, also

$$\omega_v = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} v_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n. \quad (7.3)$$

Dabei bedeutet \widehat{dx}_i Entfernen von dx_i .

Im ersten Fall sieht man die Rechenregel

$$\boxed{\text{grad}(f)^* = df} \quad (7.4)$$

für den *Gradienten*

$$\text{grad}(f) \equiv \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

einer reellen Funktionen f , im zweiten gilt

$$\boxed{\text{div}(v) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = d\omega_v} \quad (7.5)$$

für die *Divergenz*

$$\operatorname{div}(v) \equiv \nabla \cdot v := \sum_{k=1}^n \frac{\partial v_k}{\partial x_k}$$

eines Vektorfeldes v . Denn nach (7.3) ist

$$d\omega_v = \sum_{i,k=1}^n (-1)^i \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n,$$

und die Summanden sind für $k \neq 0$ gleich Null. Da $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ die kanonische Volumenform auf dem \mathbb{R}^n ist, ergibt dies eine Relation, die praktisch nützlich ist.

Speziell für $n = 3$ Dimensionen ist die *Rotation*

$$\operatorname{rot} v \equiv \nabla \times v := \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

des Vektorfeldes v durch die Relation

$$\boxed{\omega_{\operatorname{rot} v} = d(v^*)} \tag{7.6}$$

mit der äußeren Ableitung verknüpft, siehe Beispiel 7.14.2.

- Es ergibt sich aus (7.5), (7.6) und Satz 7.16

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} v) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = d\omega_{\operatorname{rot} v} = ddv^* = 0,$$

also mit $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \neq 0$

$$\boxed{\operatorname{div} \operatorname{rot} v = 0.}$$

Diese und ähnliche Relationen sind übrigens, da sie aus $dd = 0$ abgeleitet sind, auch bei einer anderen Wahl der Riemannschen Metrik¹⁸ gültig.

- Auch die Relation

$$\boxed{\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0,}$$

die für beliebige glatte Funktionen f gültig ist, entpuppt sich als eine Manifestation des Gesetzes $dd = 0$: Wegen (7.6) und (7.4) gilt

$$\omega_{\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f)} = d(\operatorname{grad} f)^* = dd f = 0.$$

¹⁸**Def.:** Eine **Riemannsche Metrik** auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung $g \in C^\infty(U, \operatorname{Mat}(n, \mathbb{R}))$, wobei $g(x)$ für $x \in U$ eine symmetrische positiv definite Matrix ist. $g(x)$ definiert also ein Skalarprodukt $(Y, Z) \mapsto \langle Y, g(x)Z \rangle$ bei x ; siehe auch [AF], Kapitel 3.2.

- Als letztes Beispiel für die Nützlichkeit der Differentialformen in der Vektoranalysis soll die Identität

$$\boxed{\operatorname{div}(v \times w) = \langle \operatorname{rot} v, w \rangle - \langle v, \operatorname{rot} w \rangle}$$

abgeleitet werden: Wir haben schon im Beispiel 7.7 gesehen, dass

$$\boxed{v^* \wedge w^* = \omega_{v \times w}} \quad (7.7)$$

gilt, denn die entsprechende Rechenregel für äußere Formen überträgt sich direkt auf Differentialformen im \mathbb{R}^3 . Also gilt unter Benutzung von (7.5), (7.7) und (7.6)

$$\begin{aligned} & \operatorname{div}(v \times w) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ &= d\omega_{v \times w} = d(v^* \wedge w^*) \\ &= (dv^*) \wedge w^* - v^* \wedge dw^* = \omega_{\operatorname{rot} v} \wedge w^* - v^* \wedge \omega_{\operatorname{rot} w} \\ &= (\langle \operatorname{rot} v, w \rangle - \langle v, \operatorname{rot} w \rangle) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3, \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

7.18 Beispiel Die kartesischen Koordinaten x_1, \dots, x_4 auf der Raumzeit \mathbb{R}^4 bezeichnen den Raumpunkt $x := (x_1, x_2, x_3)$ und den Zeitpunkt $t := x_4$. Die Feldstärke $F \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$ sei durch

$$F := B_1 dx_2 \wedge dx_3 + B_2 dx_3 \wedge dx_1 + B_3 dx_1 \wedge dx_2 + \sum_{i=1}^3 E_i dx_i \wedge dx_4$$

gegeben, wobei $E := (E_1, E_2, E_3) \in C^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ das elektrische und $B := (B_1, B_2, B_3) \in C^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ das magnetische Feld bezeichnet.

Die *homogene Maxwellgleichung* $dF = 0$ ist äquivalent zu

$$\operatorname{div}_x(B) = 0 \quad , \quad \frac{\partial B}{\partial t} = -\operatorname{rot}_x E.$$

Aus dem Poincaré-Lemma schließen wir auf die Existenz eines so genannten *Eichfeldes* $A \in \Omega^1(\mathbb{R}^4)$ mit $F = dA$.

Ein weiterer Aspekt von Differentialformen ist ihr Verhalten unter Abbildungen.

7.19 Definition Es seien $U \subseteq \mathbb{R}^m, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} : U \rightarrow V$ glatt. Die **Zurückziehung (pull-back)** $\varphi^* \omega$ der Differentialform

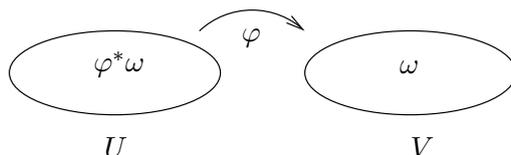
$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \in \Omega^k(V)$$

ist durch

$$\varphi^* \omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k} \circ \varphi \cdot d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k}$$

definiert.

Der Pull-back $\varphi^* \omega$ ist also eine k -Form auf $U \subseteq \mathbb{R}^m$.



7.20 Beispiel Die Polarkoordinaten sind durch $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\varphi_1(r, \psi) := r \cos \psi \quad , \quad \varphi_2(r, \psi) := r \sin \psi$$

definiert. Es soll die 2-Form $\omega = f dx_1 \wedge dx_2$ zurückgezogen werden. Mit $\tilde{f} := f \circ \varphi$, also der in Polarkoordinaten geschriebenen Funktion f , ergibt sich wegen

$$d\varphi_1 = \cos(\psi)dr - r \sin(\psi)d\psi \quad , \quad d\varphi_2 = \sin(\psi)dr + r \cos(\psi)d\psi$$

$$\varphi^* \omega = \tilde{f} d\varphi_1 \wedge d\varphi_2 = \tilde{f} r (\cos^2 \psi + \sin^2 \psi) dr \wedge d\psi = \tilde{f} r dr \wedge d\psi.$$

7.21 Satz Für alle $\varphi \in C^\infty(U, V)$ gilt

$$\boxed{\varphi^* d = d\varphi^* .}$$

Beweis: Durch Anwendung der Kettenregel:

$$\begin{aligned} d\varphi^*(f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) &= d((f \circ \varphi) \cdot d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k}) \\ &= d(f \circ \varphi) \wedge d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k}. \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \varphi^* d(f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) &= \varphi^* \left(\sum_{l=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_l} dx_l \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \right) \\ &= \underbrace{\sum_{l=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_l} \circ \varphi}_{df \circ \varphi} d\varphi_l \wedge d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k}. \end{aligned}$$

□

Durch Spezialisierung auf Diffeomorphismen φ schließen wir aus Satz 7.21, dass die äußere Ableitung einer Differentialform unabhängig vom verwendeten Koordinatensystem definiert ist.

7.4 Integration von Differentialformen

Vorbetrachtung: In der *Analysis I* wurden für geeignete Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Integralbegriffe eingeführt:

- das *Riemannsche Integral* $\int_a^b f(x) dx$, interpretiert als (signierte) Fläche unter dem Graphen von f auf dem Intervall $[a, b]$
- das *unbestimmte Integral* $\int f(x) dx$, d.h. die Menge aller Stammfunktionen $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F' = f$.

Die Stammfunktionen unterscheiden sich nur durch eine reelle Konstante voneinander.

- Der *Hauptsatz der Infinitesimalrechnung* verknüpfte die beiden Integralbegriffe folgendermaßen: Für eine beliebige Stammfunktion F von f gilt

$$\int_a^b f dx = F(b) - F(a).$$

Wir beachten, dass

1. auf der rechten Seite der *Rand* $\{a, b\} = \partial I$ des Intervalls $I := [a, b]$ auftaucht, über das auf der linken Seite integriert wird und
2. dass der Integrand $f dx$, als 1-Form aufgefasst, gleich der *äußeren Ableitung* dF der Stammfunktion F ist.

Bei der Integration von geeigneten Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ haben wir den Riemannschen Integralbegriff erweitert, indem wir für geeignete Gebiete $M \subset \mathbb{R}^n$

$$\int_M f dx = \int_{\mathbb{R}^n} f \mathbb{1}_M dx$$

als (signiertes) Volumen unter dem Graphen von f , restringiert auf M , interpretiert haben.

Unbeachtet blieb dabei die Frage, ob auch für $n > 1$ Dimensionen ein Zusammenhang zwischen Integration und Differentiation existiert.

Nun ist die Ableitung einer Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ die 1-Form $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$. Nur für $n = 1$ konnten wir dieser Ableitung wieder eine Funktion (nämlich $f' = \frac{\partial f}{\partial x}$) zuordnen.

Tatsächlich liefert uns, wie wir sehen werden, die Integration von *Differentialformen* k -ter Stufe über k -dimensionale Flächen die adäquate Verallgemeinerung des Hauptsatzes, den Satz von Stokes. Wir integrieren zunächst n -Formen auf dem \mathbb{R}^n , und danach k -Formen auf k -dimensionalen Flächen im \mathbb{R}^n .

7.22 Definition Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und $\omega \in \Omega^n(U)$ habe kompakten Träger (d.h. für $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ ist $f(x) = 0$ außerhalb eines Kompaktums $K \subset U$). Das **Integral** von ω ist dann

$$\int_U \omega := \int_U f(x) dx_1 \dots dx_n.$$

7.23 Satz Es seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi : V \rightarrow U$ ein Diffeomorphismus mit konstantem Vorzeichen ε von $\det(D\varphi(x))$. Dann gilt

$$\int_V \varphi^* \omega = \varepsilon \int_U \omega.$$

Beweis: Nach Definition des pull-back ist unter Benutzung der symmetrischen Gruppe S_n

$$\begin{aligned} \varphi^* \omega &= f \circ \varphi d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_n = f \circ \varphi \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^n \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{i_1}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_{i_n}} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n} \\ &= f \circ \varphi \sum_{\pi \in S_n} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{\pi(1)}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_{\pi(n)}} dx_{\pi(1)} \wedge \dots \wedge dx_{\pi(n)} \\ &= f \circ \varphi \left(\sum_{\pi \in S_n} \text{sign}(\pi) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{\pi(1)}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_{\pi(n)}} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= f \circ \varphi \det(D\varphi) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n. \end{aligned}$$

Nach dem Transformationssatz (Satz 5.30) ergibt die Integration dieser n -Form auf V

$$\int_V f \circ \varphi \det(D\varphi) dx_1 \dots dx_n = \varepsilon \int_V f \circ \varphi |\det D\varphi| dx = \varepsilon \int_U f dx = \varepsilon \int_U \omega. \quad \square$$

Wir sehen insbesondere, dass das Integral über die n -Form ω nicht von der Wahl des (orientierten) Koordinatensystems abhängt.

Betrachten wir $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ als die *Standardvolumenform* auf dem \mathbb{R}^n , dann können wir $\int_U \omega$ auch als Integral der *Funktion* f über U auffassen.

Wenn wir als nächstes Funktionen über k -dimensionale Flächen im \mathbb{R}^n integrieren wollen, müssen wir uns zunächst über die Standardvolumenform klar werden. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und für $n \geq k$

$$\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

eine injektive glatte Abbildung mit $\text{rang}(D\varphi(x)) = k \quad (x \in U)$, also vom maximalen Rang. φ parametrisiert die k -dimensionale Fläche $V := \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$. Gesucht ist nun eine Form $\omega^{(\varphi)} \in \Omega^k(U)$, für die für jedes in V offene $V' \subseteq V$

$$\int_{\varphi^{-1}(V')} \omega^{(\varphi)}$$

der Flächeninhalt von V' ist.

Drei vernünftige Forderungen an die φ -abhängige Definition von $\omega^{(\varphi)}$ sind, dass

- das Quadrat $V' := (0, 1)^k \times \{0\}^{n-k} \subset \mathbb{R}^n$ den Flächeninhalt 1 besitzt.
- sich unter einer Drehung $O \in SO(n)$ der Flächeninhalt von V' nicht ändert, und ebenso wenig unter Translationen.
- der Flächeninhalt von V sich nicht ändert, wenn die Parametrisierung (orientierungserhaltend) geändert wird.

Diese Forderungen werden von der **Volumenform**

$$\omega^{(\varphi)} := \sqrt{|g|} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k \quad (7.8)$$

der parametrisierten Fläche V erfüllt, wobei die symmetrische $k \times k$ -Matrix g durch

$$g := (D\varphi)^t D\varphi$$

definiert ist, und für reguläre Parametrisierung ($\text{rang}(D\varphi(x)) = k \quad (x \in U)$) wegen

$$\langle v, g(x)v \rangle = \langle D\varphi(x)v, D\varphi(x)v \rangle = \|D\varphi(x)v\|_2^2 > 0 \quad (v \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\})$$

$g(x) > 0$ gilt, die Matrix also positiv definiert ist.

g heißt *metrischer Tensor*. $|g|$ bezeichnet in der Literatur oft $\det(g)$.

Ist beispielsweise $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch $\psi = O \circ \varphi$ mit $O \in SO(n)$ gegeben, dann ist g invariant unter der Drehung:

$$(D\psi)^t D\psi = (OD\varphi)^t (OD\varphi) = (D\varphi)^t O^t O D\varphi = (D\varphi)^t D\varphi = g.$$

Wir können eine Funktion $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ integrieren, indem wir das Integral

$$\int_U f \circ \varphi \cdot \omega^{(\varphi)}$$

bilden. Dieser Ausdruck ist invariant unter einer Veränderung der Parametrisierung. Der Spezialfall $f = \mathbb{1}_V$ liefert wieder das k -dimensionale Volumen von V .

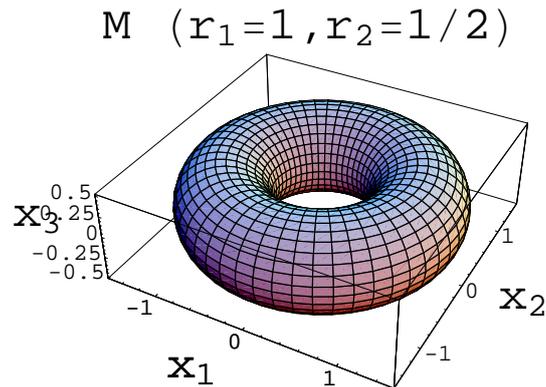
7.24 Beispiel Wir wollen den Flächeninhalt eines zweidimensionalen Torus $M \subset \mathbb{R}^3$ berechnen. Dieser sei für Parameter $r_1 > r_2 > 0$ durch $M := \varphi(U)$ mit

$$\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad U := [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$$

und

$$\varphi(\psi_1, \psi_2) := \begin{pmatrix} (r_1 + r_2 \cos \psi_2) \cos \psi_1 \\ (r_1 + r_2 \cos \psi_2) \sin \psi_1 \\ r_2 \sin \psi_2 \end{pmatrix}$$

parametrisiert. Wir scheren uns nicht weiter um die Tatsache, dass $U \subset \mathbb{R}^2$ nicht offen ist, denn der Rand von U ist eine Lebesgue-Nullmenge.



Die Koeffizienten der Riemannschen Metrik $g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$ mit $g_{21} = g_{12}$ sind

$$\begin{aligned} g_{11}(\psi_1, \psi_2) &= \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \psi_1} \right)^2 = (r_1 + r_2 \cos \psi_2)^2 (\sin^2 \psi_1 + \cos^2 \psi_1) \\ &= (r_1 + r_2 \cos \psi_2)^2 \\ g_{12}(\psi_1, \psi_2) &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \varphi_i}{\partial \psi_1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \psi_2} = r_2 \sin \psi_2 (r_1 + r_2 \cos \psi_2) \sin \psi_1 \cos \psi_1 \\ &\quad - r_2 \sin \psi_2 (r_1 + r_2 \cos \psi_2) \cos \psi_1 \sin \psi_1 \\ &= 0 \\ g_{22}(\psi_1, \psi_2) &= \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \psi_2} \right)^2 = r_2^2 [\sin^2 \psi_2 (\cos^2 \psi_1 + \sin^2 \psi_1) + \cos^2 \psi_1] \\ &= r_2^2, \end{aligned}$$

also $\sqrt{|g|} = \sqrt{\det g} = r_2 (r_1 + r_2 \cos \psi_2) > 0$ und damit die Torus-Fläche

$$\int_U \omega^{(\varphi)} = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{|g|} d\psi_1 d\psi_2 = (2\pi)^2 r_1 r_2.$$

Betrachten wir den im Beispiel vorliegenden Spezialfall einer *Hyperfläche* V des \mathbb{R}^n genauer. $V = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ besitzt eine Parametrisierung

$$\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{für } U \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \text{ offen} .$$

Auf V existiert ein bis auf Vorzeichen eindeutiges stetiges *Normalenvektorfeld*

$$N : V \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \|N(y)\| = 1 \quad (y \in V),$$

das senkrecht auf V steht, also

$$\langle N \circ \varphi(x), D\varphi(x)w \rangle = 0 \quad (x \in U, w \in \mathbb{R}^{n-1}).$$

Es gilt dann für die $n \times n$ -Matrix $M(x) := (N \circ \varphi(x), D\varphi(x))$

$$M^t(x)M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & g(x) & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad (x \in U)$$

also $\det g(x) = \det(M^t(x)M(x)) = (\det(M(x)))^2$, oder, bei geeigneter Wahl der Orientierung des Normalenvektorfeldes

$$\sqrt{|g|} = \det M. \quad (7.9)$$

Damit ergibt sich für die in (7.2) definierte zum Normalenvektorfeld N duale $(n-1)$ -Form ω_N auf V die Gleichheit zur Volumenform der Hyperfläche V :

7.25 Satz $\varphi^*\omega_N = \omega^{(\varphi)}$ für $\omega^{(\varphi)}$ aus (7.8).

Beweis: Bezeichnen wir mit $\widehat{d\varphi}_k$ wieder das Entfernen von $d\varphi_k$, dann ist

$$\begin{aligned} \varphi^*\omega_N &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} N_k \circ \varphi d\varphi_1 \wedge \dots \wedge \widehat{d\varphi}_k \wedge \dots \wedge d\varphi_n \\ &= \det M dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt also aus (7.9). □

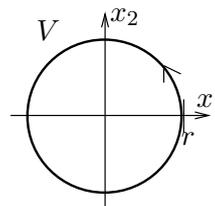
Eine weitere wichtige Situation ist die, dass im die k -Fläche V umgebenden Raum eine k -Form $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ existiert, deren Integral über die (mit einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^k$ und $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ parametrisierten) k -Fläche $V = \varphi(U)$ wir durch

$$\int_V \omega := \int_U \varphi^*\omega$$

definieren. Nach Satz 7.23 ist dieses Integral bis auf das Vorzeichen unabhängig von der Wahl der Parametrisierung.

7.26 Beispiel 1-Form $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$, $\omega := x_1 dx_2$

$U := [0, 2\pi)$, $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$,
 $\varphi(\psi) := \begin{pmatrix} r \cos \psi \\ r \sin \psi \end{pmatrix}$, also $V = \varphi(U)$ der Kreis
 vom Radius $r > 0$ um den Ursprung.



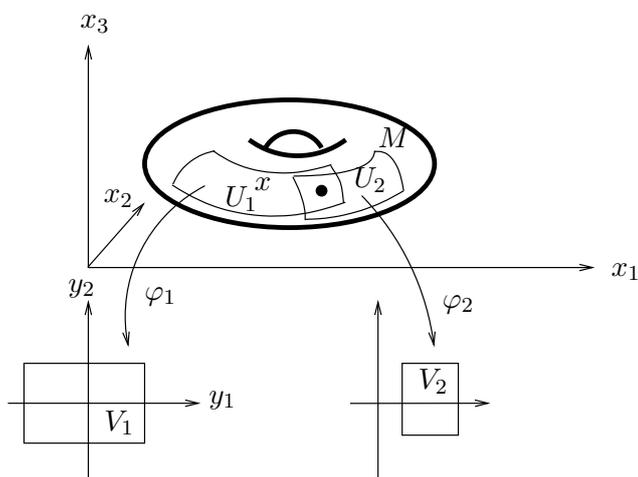
$$\int_V \omega = \int_U \varphi^* \omega = \int_U r \cos \psi d(r \sin \psi) = r^2 \int_U \cos^2 \psi d\psi = \pi r^2.$$

In diesem Beispiel fällt auf, dass das Integral von $d\omega = dx_1 \wedge dx_2$, also dem kanonischen orientierten Flächenelement des \mathbb{R}^2 , über die von V eingeschlossene Kreisscheibe vom Radius r gleich dem Integral von ω über die Kreislinie ist.

Dies ist kein Zufall, sondern die Manifestation eines allgemeinen Satzes, des sogenannten Satzes von Stokes. Dieser stellt eine Beziehung zwischen Integralen über Mannigfaltigkeiten und Integralen über ihren Rand her. Ohne wegen der Kürze der Zeit den allgemeinen Mannigfaltigkeitsbegriff einführen zu können, möchte ich doch kurz das Wichtigste skizzieren.¹⁹

Die in der *Analysis II* eingeführten, in den \mathbb{R}^n eingebettete k -dimensionale Mannigfaltigkeiten $M \subset \mathbb{R}^n$ sehen zunächst in einer geeigneten Umgebung $U \subset M$ jedes ihrer Punkte $x \in M$ wie das Bild einer offenen Umgebung $V \subset \mathbb{R}^k$ unter einem Diffeomorphismus $V \rightarrow U$ aus.

Das heißt aber nicht, dass die gesamte Mannigfaltigkeit notwendig homöomorph zu irgendeiner Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^k$ ist. Beispielsweise ist dies für den in Beispiel 7.24 besprochenen $k = 2$ -dimensionalen Torus M im \mathbb{R}^3 nicht der Fall.



- Wohl aber kann man den topologischen Raum M durch *Kartengebiete*, d.h. offene Teilmengen $U_i \subset M$ überdecken, die zu offenen Teilmengen $V_i \subseteq \mathbb{R}^k$

¹⁹Siehe z.B. [AF] für eine genauere und weitergehende Einführung.

homöomorph sind. Für kompakte Mannigfaltigkeiten genügen endlich viele U_i .

- Die inversen Abbildungen $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i \subseteq \mathbb{R}^k$ (*Kartenabbildungen*) sollen *verträglich* sein, d.h. $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ auf dem Definitionsbereich $\varphi_j(U_i \cap U_j) \subseteq V_j$ glatt.
- Besitzt die Mannigfaltigkeit M einen *Rand*, dann verlangen wir, dass die Kartenbilder V_i als Teilmengen des Halbraumes

$$\mathbb{R}_+^k := \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_k \geq 0\}$$

offen sind.

- Der *Rand* ∂M von M ist dann Vereinigung der Mengen $\varphi_i^{-1}(\mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}) \subset M$. ∂M ist eine $(k - 1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.

7.27 Beispiel Berandeter halb-unendlicher Zylinder

$$M := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = R^2, x_3 \geq 0\}$$

mit Radius $R > 0$.

Wir können z.B. die folgenden vier Karten (U_i^\pm, φ_i^\pm) , $i = 1, 2$ benutzen:

$$U_i^\pm := \{x \in M \mid \pm x_i > 0\}$$

$$\varphi_i^\pm : U_i^\pm \rightarrow \mathbb{R}_+^2$$

$$\varphi_1^\pm(x_1, x_2, x_3) := (\pm x_2, x_3)$$

$$\varphi_2^\pm(x_1, x_2, x_3) := (\pm x_1, x_3).$$

Der Rand des Zylinders ist $\partial M = \{x \in M \mid x_3 = 0\}$, also ein Kreis mit Radius R in der (x_1, x_2) -Ebene des \mathbb{R}^3 .

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung besitzt die folgende Verallgemeinerung:

7.28 Satz (Stokes) *Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine (orientierte) k -dimensionale Mannigfaltigkeit und ω eine $(k - 1)$ -Form (mit kompaktem Träger) auf M . Dann gilt*

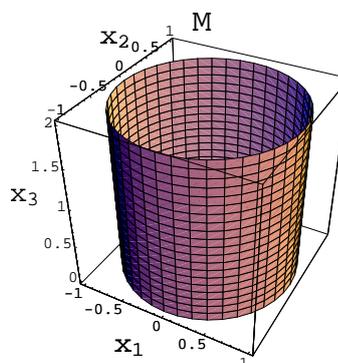
$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

7.29 Beispiel 1. Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$ das Bild einer (regulären, injektiven) Kurve

$$c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

und $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion.

Dann besteht ∂M aus den Punkten $c(0)$ und $c(1)$. Diese bekommen als Anfangs- und Endpunkte aber unterschiedliche Orientierung, sodass die



Formel

$$\int_0^1 \underbrace{\frac{\partial F \circ c}{\partial t}(t)}_{dF \circ c} dt = F \circ c(1) - F \circ c(0) \quad (7.10)$$

entsteht. Ist $F = \tilde{F}|_M$ mit einer glatten Funktion $\tilde{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, dann ist das Integral in (7.10) gleich $\tilde{F}(c(1)) - \tilde{F}(c(0))$, unabhängig von der Wahl des Weges c mit vorgegebenem Anfangs- und Endpunkt.

2. Symplektische 2-Form $\omega = -d\theta = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$ auf dem Phasenraum $P := \mathbb{R}_p^n \times \mathbb{R}_q^n$ mit 1-Form $\theta := \sum_{i=1}^n p_i dq_i$.

Es sei $c : S^1 \rightarrow P$ eine Schleife, deren Bild das Bild M einer Kreisscheibe berandet, d.h.

$$c(S^1) = \partial M.$$

Dann ist das Integral $\int_{\partial M} \theta = - \int_M \omega$, unabhängig von der Wahl von M .

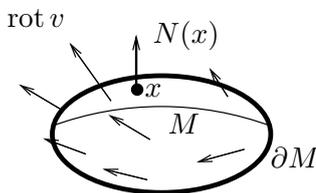
3. Wir bleiben bei dem Bild M einer Kreisscheibe. Diese soll aber diesmal im \mathbb{R}^3 liegen.

Weiter sei $v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld. Dann ist v^* eine 1-Form, dv^* eine (auf M integrierbare) 2-Form, und nach (7.6) gilt

$$\omega_{\text{rot } v} = dv^*.$$

Also ist das Integral von dv^* über M gleich dem Integral des Skalarproduktes von $\text{rot } v$ mit der Flächennormale N (bezüglich des Flächenelementes $\sqrt{|g|} dx_1 \wedge dx_2$) und es folgt nach Satz 7.25

$$\begin{aligned} & \int_M \langle \text{rot } v, N \rangle \sqrt{|g|} dx_1 \wedge dx_2 \\ &= \int_M \langle \text{rot } v, N \rangle \omega_N = \int_M \omega_{\text{rot } v} = \int_M dv^* = \int_{\partial M} v^*. \end{aligned}$$



Beispielsweise könnte v das Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeit sein. Dann sieht man aus der obigen Formel, dass bei Rotationsfreiheit der Strömung die Tangentialkomponente der Geschwindigkeit bezüglich der Schleife ∂M im Mittel verschwindet.

4. Die Divergenz eines Vektorfeldes ist nach (7.5) via

$$\operatorname{div}(v) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = d\omega_v$$

mit der äußeren Ableitung verbunden.

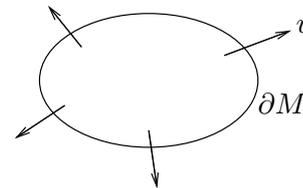
Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ eine n -dimensionale berandete Untermannigfaltigkeit (z.B. eine Vollkugel), dann gilt nach dem Satz von Stokes

$$\int_M d\omega_v = \int_{\partial M} \omega_v.$$

Für die Randpunkte $x \in \partial M$ bezeichne $N(x)$ den Normalenvektor. $v(x)$ lässt sich eindeutig in der Form

$$v(x) = \langle v(x), N(x) \rangle N(x) + w(x) \quad (7.11)$$

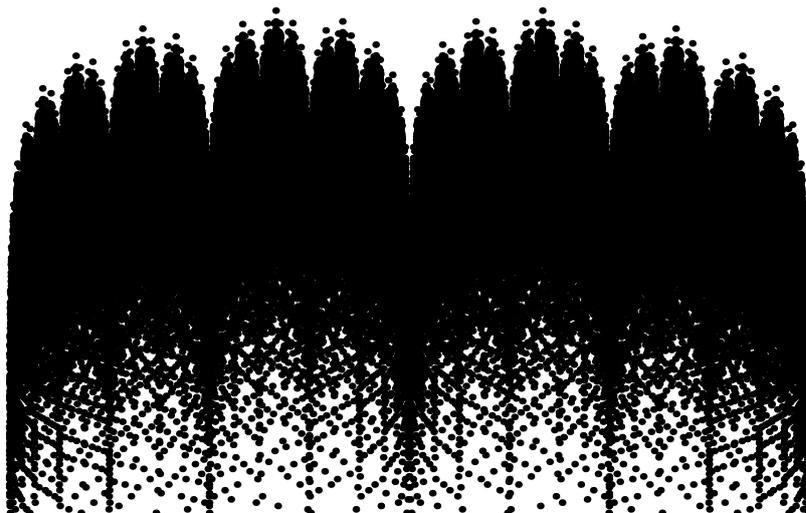
schreiben, wobei dann $w(x)$ tangential an ∂M bei x ist, also $\int_{\partial M} \omega_w = 0$ und mit (7.11) $\int_{\partial M} \omega_v = \int_{\partial M} \langle v, N \rangle \omega_N$. Es ergibt sich also



$$\int_M \operatorname{div}(v) dx_1 \dots dx_n = \int_M d\omega_v = \int_{\partial M} \omega_v = \int_{\partial M} \langle v, N \rangle \omega_N.$$

Ist das Vektorfeld divergenzfrei (wie beispielsweise das Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeit), dann fließt also durch die Randfläche ∂M genauso viel aus M heraus wie herein.

Ende



Literatur

- [AF] Agricola, I., Friedrich, T.: *Globale Analysis*. Vieweg, 2001
- [An] Knauf, A.: *Vorlesungen Analysis I/II*. Skripten, Erlangen 2005
- [Ar] Arnol'd, V.I.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Springer, 1980
- [Ba] Bauer, H.: *Maß- und Integrationstheorie*. de Gruyter 1992
- [Bl] Blatter, Ch.: *Analysis I-III*. Springer, 1974
- [Bl2] Blatter, Ch.: *Wavelets — Eine Einführung*. Vieweg, 1998
- [Br] Bröcker, T.: *Analysis, Bd. 1 und 2*. Spektrum der Wissenschaft, 1995
- [Ca] do Carmo, M.P.: *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen*. Vieweg, 1998
- [DB] Deuffhard, P., Bornemann, F.: *Numerische Mathematik II: Gewöhnliche Differentialgleichungen*. de Gruyter, 2002
- [Fi] Fischer, G.: *Lineare Algebra*. Vieweg 2000
- [Fo] Forster, O.: *Analysis, Bd. 1-3*. Vieweg, 1999
- [Hi] Hildebrandt, S.: *Analysis 1 und 2*. Springer, 2002
- [Ja] Jänich, K.: *Topologie*. Springer, 1999
- [Ko] Königsberger, K.: *Analysis, Bd. 1 und 2*. Springer, 1997
- [LL] Lieb, E.H., Loss, M.: *Analysis*. AMS, 1997
- [MV] Meyberg, K., Vachnauer, P.: *Höhere Mathematik, Bd 1 und 2*. Springer, 1999
- [RS2] Reed, M., Simon, B.: *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. II: Fourier Analysis, Self-Adjointness*. Academic Press 1975

Index

- abgeschlossen 17
- abgeschlossene Hülle 17
- Anfangswertproblem 1
- Antiderivation 106
- äußere Ableitung 105
- äußere Form 100
- asymptotisch stabil 9, 12
- Basis einer Topologie 18
- Bessel–Ungleichung 82
- Bilinearform 99
- Cauchy–Schwarz–Ungleichung 81
- Differentialform 105
 - exakte 107
 - geschlossene 107
- Differentialgleichung 1
 - hamiltonsche 3
 - inhomogene lineare 93
- Dimension 32
- Dirac–Folge 90
- Dirac–Maß 32
- Divergenz 108
- Doppelfakultät 78
- Dualbasis 99
- Faltung 87
- fast überall 50
- folgenkompakt 25
- folgenstetig 22
- Fourier–Koeffizient 98
- Fourier–Synthese 98
- Fourier–Transformation 67, 94, 97
 - Umkehrsatz 91
- Funktional 36
- Funktionaldeterminante 88
- Gammafunktion 76
- Gaußsche Glockenkurve 85
- Gibbs–Phänomen 98
- Gleichgewichtslage 5
- Gradient 107
- Grassmann–Algebra 103
- Grenzwert 18
- Gronwall–Ungleichung 11
- Gruppencharakter 96
- Haar–Basis 84
- Haar–Maß 97
- Häufungspunkt
 - einer Folge 18
 - einer Menge 17
- Halbnorm 38
- Hausdorff–Raum 18
- Hölder–Ungleichung 79
- Homöomorphismus 21
- Hüllreihe 38
- Inneres einer Menge 17
- instabil 8
- Integral 112
- Jordan–Normalform 14
- Kegel 47
- kompakt 25
- Kreuzprodukt 103
- Lebesgue–Integral 38
- Lebesgue–Maß 46
- liapunov–stabil 8, 13
- Limes 18
- Linearisierung einer Differentialgl. 5
- Lösung einer Differentialgleichung 1
 - lokal integrierbar 67
 - lokal kompakt 97
 - lokal lipschitz–stetig 52
- Mannigfaltigkeit 116
- Maß 32
 - messbar 46
 - metrischer Tensor 113
- Minkowski–Ungleichung 79
- multilinear 99
- Nullmenge 49
- offene Überdeckung 25

Operatornorm 24
 orthogonal 81
 Orthonormalbasis 81
 Orthonormalsystem 81
 Parallelotop 72
 Pendel 5
 Phasenraum 1
 Plancherel–Formel 94
 Polarisationsidentität 80
 Polarkoordinaten 76, 110
 Produkt
 inneres 80
 äußeres 101
 pull–back 104, 109
 Quader 33
 Randpunkt 17
 Rotation 108
 Ruhelage 5
 Satz
 Beppo Levi 61
 Fatou 62
 Fubini 35, 45, 68
 Heine–Borel 26
 majorisierte Konvergenz 64
 monotone Konvergenz 61
 Lebesgue 64
 Pythagoras 82
 Riesz–Fischer 58, 79
 Stokes 117
 Tietze 44
 Transformationssatz 72
 Schwartz–Raum 93
 σ –additiv 47
 Sphäre 27, 28
 Spurtopologie 19
 stetig 21
 Standardvolumenform 112
 symplektische Form 102
 topologischer Raum 16
 Topologie 16
 induzierte 19
 Produkttopologie 19
 Teilraum 19
 Torus 20
 Transformationssatz 72
 Translationsinvarianz 63
 Trennung der Variablen 2
 Treppenfunktion 33
 Umgebung 17
 Verfeinerung 34