# Lösungen der Aufgaben zum Vorkurs WS 04/05

# "Einführung zum Studium der Mathematik"

Knauf/Ay Mathematisches Institut

**Aufgabe 1 (Kugelvolumen in hohen Dimensionen):**

Ab welcher Dimension $d_{\min}$ ist

$$\mathrm{Vol}\left(K^d_{0.99R}\right) < 0.01\mathrm{Vol}\left(K^d_R\right)? \tag{1}$$

Bestimmen Sie mit dem Taschenrechner $d_{\min}$, und argumentieren Sie, dass (1) für alle $d \geq d_{\min}$ gilt.

**Lösung von Aufgabe 1:**

Es ist laut Vorlesung $\mathrm{Vol}\,(K^d_R) = R^d\mathrm{Vol}\,(K^d_1)$. Also gilt (1) falls $0.99^d < 0.01$ ist. Dies ist für $d > \frac{\ln(0.01)}{\ln(0.99)} \approx 458.21$ der Fall, also für alle $d \in \mathbb{N}$ mit $d \geq d_{\min} := 459$. In Worten: Ab Dimension $459$ befinden sich im äußersten Prozent der Kugel mehr als 99 Prozent des Volumens.

**Aufgabe 2 (Kugelvolumen):**

Finden Sie – unter Verwendung der Formeln

$$\mathrm{Vol}\,(K^d_R) = R^d\mathrm{Vol}\,(K^d_1) \quad , \quad \mathrm{Vol}\left(K^d_1\right) = \mathrm{Vol}\left(K^{d-1}_1\right)F_d$$

für das Volumen einer $d$-dimensionalen Kugel $K^d_R$ vom Radius $R$, mit

$$F_d = \frac{d-1}{d}F_{d-2} \quad , \quad F_1 = 2 \quad \text{und} \quad F_2 = \pi/2$$

eine für alle $d \in \mathbb{N}$ gültige Formel für $F_d$ und den Ausdruck für $\mathrm{Vol}\,(K^d_R)$ aus der Vorlesung.

**Lösung von Aufgabe 2:**

Es ist für gerade $d$, also $d = 2r$

$$F_{2r} = F_2\prod_{i=2}^{r}\frac{2i-1}{2i} = \pi\prod_{i=1}^{r}\frac{2i-1}{2i},$$

denn $F_2 = \pi/2$. Analog ist

$$F_{2r+1} = F_1\prod_{i=1}^{r}\frac{2i}{2i+1} = 2\prod_{i=1}^{r}\frac{2i}{2i+1}.$$

Da vereinbarungsgemäß das Produkt über die leere Menge gleich $1$ ist, gilt die Formel auch für $d = 1$. Für die Kugelvolumina ergibt sich mit $R := 1$ wegen $\mathrm{Vol}\,(K^1_1) = 2 = F_1$

$$\mathrm{Vol}\,(K^d_1) = \mathrm{Vol}\,(K^1_1)\prod_{i=2}^{d}F_i = \prod_{i=1}^{d}F_i.$$

Für die Berechnung der Produkte empfiehlt sich eine Fallunterscheidung: Für $d = 2r$ ist

$$\prod_{i=1}^{d} F_i = \prod_{i=1}^{r} (F_{2i}F_{2i-1}) = (2\pi)^r \prod_{i=1}^{r} \frac{1}{2i} = \frac{\pi^r}{r!}.$$

Dagegen ist für $d = 2r + 1$

$$\prod_{i=1}^{d} F_i = F_d \prod_{i=1}^{r} (F_{2i}F_{2i-1}) = F_d \frac{\pi^r}{r!} = 2\frac{\pi^r}{r!} \frac{r!}{\prod_{i=1}^{r}(i + 1/2)} = 2\frac{\pi^r}{\prod_{i=1}^{r}(i + 1/2)}.$$

Daraus ergeben sich die Formeln

$$\mathrm{Vol}\,(K_R^d) = \begin{cases} R^d \frac{\pi^{d/2}}{(d/2)!} & , d \text{ gerade} \\ R^d \frac{2\ \pi^{(d-1)/2}}{\prod_{i=1}^{(d-1)/2}(i+1/2)} & , d \text{ ungerade} \end{cases}$$

aus der Vorlesung.

**Bemerkung zu Aufgabe 2:**
Aus diesen Formeln lesen wir ab: Unabhängig davon, wie groß wir den Radius $R$ wählen, geht das Kugelvolumen der $d$–dimensionalen Kugel vom Radius $R$ gegen Null, wenn $d$ gegen unendlich geht. Das mag erstaunen, wenn man mit einem $d$–dimensionalen Würfel der Kantenlänge $R$ vergleicht, denn $\mathrm{Vol}\,([0, R]^d) = R^d$.

## Aufgabe 3 (Minkowskisumme)

Es sei

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x \cos\left(\frac{2\pi k}{3}\right) + y \sin\left(\frac{2\pi k}{3}\right) \geq -1 \quad \text{für} \quad k = 0, 1, 2 \right\}$$

und $B := -A := \left\{ \binom{-x}{-y} \mid \binom{x}{y} \in A \right\}$. Zeichnen Sie $A$, $B$ und deren Minkowskisumme $A + B$.

**Lösung von Aufgabe 3:**

$A$ ist das durch die drei Geraden $x = -1$, $-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = -1$ und $-\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y = -1$ begrenzte gleichseitige Dreieck mit den Eckpunkten

$$E_1^+ := \binom{2}{0} \quad , \quad E_2^+ := \binom{-1}{\sqrt{3}} \quad \text{und} \quad E_3^+ := \binom{-1}{-\sqrt{3}}.$$

$B$ geht aus $A$ durch Punktspiegelung hervor, besitzt also die Eckpunkte

$$E_1^- := \binom{-2}{0} \quad , \quad E_2^- := \binom{1}{-\sqrt{3}} \quad \text{und} \quad E_3^- := \binom{1}{\sqrt{3}}.$$

Die Dreiecke sind die konvexen Hüllen ihrer Ecken. Bei Bildung der Minkowskisumme von $A$ und $B$ kann man daher $A + B$ als die konvexe Hülle der Menge $\{E_i^+ + E_i^- \mid 1 \leq i, k \leq 3\}$ darstellen. Die Summen $E_i^+ + E_i^-$ der Ecken von $A$ und $B$ sind dabei gleich $0$. $A + B$ ist somit ein reguläres Sechseck mit den Eckpunkten $E_i^+ + E_k^-$, $1 \leq i \neq k \leq 3$.

**Bemerkung zu Aufgabe 3:**

Man kann durch Skalierung der Dreiecke und Bildung der Minkowskisumme das Dreieck $A$ 'kontinuierlich' in das Dreieck $B$ überführen.

$$M_c := (1-c)A + cB \qquad (0 \le c \le 1)$$

interpoliert zwischen $M_0 = A$ und $M_1 = B$, wobei $M_{1/2} = \frac{1}{2}(A+B)$ ein reguläres Sechseck ist.

**Aufgabe 4 (Konvexität):**

Zeigen Sie, dass Kugeln konvex sind.

**Lösung von Aufgabe 4:**

Wir gehen von Punkten $A \neq B \in K_R^d$ der Kugel aus und betrachten die durch diese Punkte verlaufende Gerade $g \subset \mathbb{R}^d$. Sie ist von der Form $g = \{\tilde{g}(k) \mid k \in \mathbb{R}\}$ mit $\tilde{g}(k) := kA + (1-k)B$. Der Punkt $\tilde{g}(k)$ der Geraden besitzt quadrierten Abstand

$$\|\tilde{g}(k)\|^2 = ak^2 + bk + c \quad \text{mit} \quad a = \|B - A\|^2 > 0$$

vom Nullpunkt.
Da $\tilde{g}(0) = B$ und $\tilde{g}(1) = A$, mit $\|A\| \le R$ und $\|B\| \le R$, gibt es genau zwei Schnittpunkte von $g$ und der Oberfläche der Kugel $K_R^d$, die sich durch die Lösung $k_- < k_+$ der quadratischen Gleichung $ak^2 + bk + c = R^2$ ergeben. Da der Abstand des Geradenpunktes $\tilde{g}(k)$ vom Nullpunkt für $k \to \pm\infty$ gegen Unendlich geht, ist $k_- \le 0$ und $k_+ \ge 1$. Damit gilt auch für $0 \le k \le 1$ die Ungleichung $\|\tilde{g}(k)\| \le R$. Also liegt die Strecke zwischen $A$ und $B$ in der Kugel $K_R^d$.

**Aufgabe 5 (Wurstpackung):**

Zeigen Sie unter Benutzung der Formeln

$$\delta(M) := \frac{\mathrm{Vol}\,(M + K_1^d)}{\mathrm{Vol}\,\left(\mathrm{konv}\,\left(M + K_1^d\right)\right)} \quad , \quad \mathrm{Vol}\,\left(\mathrm{konv}\,\left(M + K_1^d\right)\right) = \mathrm{Vol}\,(K_1^d) + 2(n-1)\mathrm{Vol}\,(K_1^{d-1})$$

und des Ausdrucks für $\mathrm{Vol}\,(K_1^d)$ aus der Vorlesung, dass die Dichte $\delta(M)$ der dichten Wurstpackung $M$ in $d$ Dimensionen mindestens $\frac{1}{d}$ ist (unabhängig von der Zahl $n$ der Kugeln).

**Lösung von Aufgabe 5:**

In einer Dimension ist die Dichte der dichten Wurstpackung gleich 1, die Aussage also wahr.

Nach Einsetzen der Formeln findet man für $d \ge 2$ die zu beweisende Ungleichung

$$\frac{n\mathrm{Vol}\,(K_1^d)}{\mathrm{Vol}\,(K_1^d) + 2(n-1)\mathrm{Vol}\,(K_1^{d-1})} \ge \frac{1}{d}$$

oder bequemer

$$\frac{1}{n} + 2\left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{\mathrm{Vol}\,(K_1^{d-1})}{\mathrm{Vol}\,(K_1^d)} \le d.$$

Diese ist für $n = 1$ und alle $d \ge 2$ trivial erfüllt und folgt für alle $n \ge 2$ und $d \ge 2$ aus

$$\frac{\mathrm{Vol}\,(K_1^{d-1})}{\mathrm{Vol}\,(K_1^d)} \le \frac{d - 1/2}{2}.$$

Wir benutzen die expliziten Formeln für die Kugelvolumina und erhalten für $d = 2r + 1$

$$\frac{\mathrm{Vol}\,(K_1^{d-1})}{\mathrm{Vol}\,(K_1^d)} = \frac{\pi^r \prod_{i=1}^r (i+1/2)}{2\pi^r r!} = \frac{1}{2}\prod_{i=1}^{r}\frac{i+1/2}{i} = \frac{1}{2}(r+\tfrac{1}{2})\prod_{i=1}^{r-1}\frac{i+1/2}{i+1} \le \frac{1}{2}(r+\tfrac{1}{2}) = \frac{d}{4} \le \frac{d-1/2}{2}.$$

Für $d = 2r$ ergibt sich

$$\frac{\mathrm{Vol}\,(K_1^{d-1})}{\mathrm{Vol}\,(K_1^d)} = \frac{2r}{\pi}\prod_{i=1}^{r-1}\frac{i}{i+1/2} \le \frac{2r}{\pi} = \frac{d}{\pi} \le \frac{d-1/2}{2}.$$

**Aufgabe 6 (Elementarzelle):**

Das durch die Basisvektoren $\ell_1, \ldots, \ell_d \in \mathbb{R}^d$ des Gitters $\mathcal{L}$ aufgespannte Parallelepiped

$$E := \{x_1\ell_1 + \ldots + x_d\ell_d \mid 0 \le x_i \le 1\} \subset \mathbb{R}^d$$

wird auch *Elementarzelle* genannt. Zeigen Sie, dass für eine Gitterpackung mit Gitter $\mathcal{L}$ das Gesamtvolumen $\mathrm{Vol}\,(E\cap(\mathcal{L}+K_1^d))$ der in der Elementarzelle befindlichen Teilstücke von Kugeln gleich $\mathrm{Vol}\,\left(K_1^d\right)$ ist. (*Tip:* Betrachten Sie zuerst den Fall $d = 2$.)

**Lösung von Aufgabe 6:**

Wir benutzen drei Eigenschaften des Volumens:

- Es ist *translationsivariant*, d.h. das $d$-dimensionale Volumen $\mathrm{Vol}\,(K + a)$ eines um $a \in \mathbb{R}^d$ verschobenen Körpers $K \subset \mathbb{R}^d$ ist gleich seinem ursprünglichen Volumen $\mathrm{Vol}\,(K)$.
- Es ist *additiv*, d.h. das Gesamtvolumen disjunkter Körper $A_1, \ldots, A_n \subset \mathbb{R}^d$ ist die Summe ihrer Volumina:

  $$\mathrm{Vol}\,(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \mathrm{Vol}\,(A_1) + \mathrm{Vol}\,(A_2) + \ldots + \mathrm{Vol}\,(A_n)$$

  (eine analoge Aussage gilt sogar für abzählbare disjunkte Vereinigungen).
- Es ist *monoton*, d.h. $\mathrm{Vol}\,(A_1) \le \mathrm{Vol}\,(A_2)$ falls $A_1 \subset A_2$.

Mit diesen Regeln können wir die in der Elementarzelle $E$ enthaltenen, durch den Index $\ell \in \mathcal{L}$ nummerierten Kugelstücke

$$K_\ell := (K_1^d + \ell) \cap E$$

neu zusammensetzen. Für $\ell \ne \ell'$ überlappen die (um $-\ell$ bzw. $-\ell'$ verschobenen) Elementarzellen $E - \ell$ und $E - \ell'$ nur an ihrer Oberfläche. Diese besitzt aber Volumen Null. Daher gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}\,(K_1^d) &= \mathrm{Vol}\,(\cup_{\ell\in\mathcal{L}}(K_1^d \cap (E-\ell))) = \sum_{\ell\in\mathcal{L}} \mathrm{Vol}\,(K_1^d \cap (E-\ell)) = \sum_{\ell\in\mathcal{L}} \mathrm{Vol}\,((K_1^d+\ell)\cap E) \\
&= \sum_{\ell\in\mathcal{L}} \mathrm{Vol}\,(K_\ell) = \mathrm{Vol}\,(E \cap (\mathcal{L} + K_1^d)).
\end{aligned}$$

Nebenbei: Die Summen in dieser Gleichungskette besitzen nur endlich viele von Null verschiedene Summanden.

**Aufgabe 7 (Gitterpackungen $(d = 2)$):**

a) Welche Fläche $F$ besitzt ein reguläres die Kreisscheibe $K_1^2$ umschreibendes Sechseck?

b) Welche Packungsdichte besitzt demnach die hexagonale Scheibenpackung?

**Lösung von Aufgabe 7:**

a) Das reguläres die Kreisscheibe $K_1^2$ umschreibende Sechseck besteht aus 12 rechtwinkligen Dreiecken, mit Winkel $\pi/6$ am Ursprung und einem Eckpunkt auf der Kreislinie. Deren Fläche ergibt sich aus der Formel "$\frac{1}{2}$ Grundseite $\times$ Höhe" zu $\frac{1}{2}\tan(\pi/6) = 1/(2\sqrt{3})$. Damit ist die Gesamtfläche der Sechsecks gleich $F = 12/(2\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$.
b) Andererseits ist die Fläche der Kreisscheibe $K_1^2$ gleich $\pi$. Da die Voronoizellen die Ebene überdecken und nur an ihren Rand-Kanten überlappen, jede Voronoizelle aber eine Kreisscheibe beinhaltet, ergibt sich die Packungsdichte der hexagonalen Scheibenpackung zu

$$\delta(M) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

**Aufgabe 8 (Determinante):**

Zeigen Sie, dass für das von $\ell_1, \ell_2$ und $\ell_3' := \ell_3 + c_1\ell_1 + c_2\ell_2$ aufgespannte gescherte Parallelotop $E'$ tatsächlich das gleiche Volumen $\mathrm{Vol}\,(E') = |\det(\ell_1, \ell_2, \ell_3')|$ herauskommt wie für das von $\ell_1, \ell_2$ und $\ell_3$ aufgespannte Parallelotop $E$.

**Lösung von Aufgabe 8:**

Man überprüft durch Einsetzen in die Formel von Sarrus die Multilinearitätseigenschaften

$$\det(\ell_1, \ell_2, m + n) = \det(\ell_1, \ell_2, m) + \det(\ell_1, \ell_2, n) \quad \text{und} \quad \det(\ell_1, \ell_2, km) = k\det(\ell_1, \ell_2, m)$$

der Determinante einer $3 \times 3$–Matrix (wobei $\ell_1, \ell_2, m, n \in \mathbb{R}^3$ und $k \in \mathbb{R}$ sind). Weiter gilt

$$\det(\ell_1, \ell_2, \ell_1) = \det(\ell_1, \ell_2, \ell_2) = 0.$$

Zusammen ergibt sich die Aussage:

$$\begin{aligned} \det(\ell_1, \ell_2, \ell_3') &= \det(\ell_1, \ell_2, \ell_3 + c_1\ell_1 + c_2\ell_2) \\ &= \det(\ell_1, \ell_2, \ell_3) + c_1\det(\ell_1, \ell_2, \ell_1) + c_2\det(\ell_1, \ell_2, \ell_2) = \det(\ell_1, \ell_2, \ell_3). \end{aligned}$$

**Aufgabe 9 (kubisch–flächenzentriertes Gitter):**

a) Zeigen Sie, dass die Basisvektoren $\ell_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\ell_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$, $\ell_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ des kubisch–flächenzentrierten Gitters tatsächlich linear unabhängig sind.

b) Berechnen Sie das Volumen der von ihnen aufgespannten Elementarzelle $E = \{x_1\ell_1 + x_2\ell_2 + x_3\ell_3 \mid 0 \le x_i \le 1\} \subset \mathbb{R}^3$.

c) Was ist die Packungsdichte dieser Gitterpackung?

**Lösung von Aufgabe 9:**

a) Wäre $\ell_1 = c_2\ell_2 + c_3\ell_3$, dann müsste wegen des ersten und des zweiten Eintrags $c_2 = c_3 = 1$ sein, was aber für den letzten Eintrag den Widerspruch $0 = 2\sqrt{2}$ ergäbe. Analog zeigt man, dass auch $\ell_2$ und $\ell_3$ keine Linearkombinationen der jeweils anderen Vektoren sind.
b) Einsetzen in die Formel von Sarrus ergibt $\det(\ell_1, \ell_2, \ell_3) = -4\sqrt{2}$, also $\mathrm{Vol}\,(E) = 4\sqrt{2}$.
c) Damit ist die Packungsdichte gleich

$$\delta(\mathcal{L}) = \frac{\mathrm{Vol}\,(K_1^3)}{4\sqrt{2}} = \frac{\pi}{3\sqrt{2}}.$$

**Aufgabe 10 (kubische Gitterpackung):**

Betrachten Sie das kubische Gitter $\mathcal{L}$ im $\mathbb{R}^d$ mit Basis $\ell_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ell_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \ell_d = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Welche Packungsdichte besitzt die Gitterpackung mit dem Gitter $\mathcal{L}$?

**Lösung von Aufgabe 10:**

Das Volumen des von den Vektoren $\ell_1, \dots, \ell_d$ aufgespannten Würfels $E \subset \mathbb{R}^d$ ergibt sich als Produkt seiner Kantenlängen zu $\mathrm{Vol}\,(E) = 2^d$. Andererseits ist das genutzte Volumen pro Elementarzelle gleich $\mathrm{Vol}\,(K_1^d)$. Es ergibt sich damit für die Packungsdichte

$$\delta(\mathcal{L}) = \frac{\mathrm{Vol}\,(K_1^d)}{2^d} = \begin{cases} \frac{\pi^{d/2}}{2^d (d/2)!} & , d \text{ gerade} \\ \frac{2\ \pi^{(d-1)/2}}{2^d \prod_{i=1}^{(d-1)/2} (i+1/2)} & , d \text{ ungerade} \end{cases} .$$

**Bemerkung zu Aufgabe 10:**

Betrachtung von $\delta(\mathcal{L})$ zeigt, dass die Dichte mit der Dimension sehr schnell sinkt (denn die Fakultät schlägt die Exponentialfunktion). Vergleich mit Aufgabe 5 zeigt, um wieviel dichter die Wurstpackung ist.

**Aufgabe 11 (Jensen-Ungleichung):**

Zeigen Sie für $0 \le \vartheta_i < \pi$ die Ungleichung $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \tan\left(\frac{\vartheta_i}{2}\right) \ge \tan\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{\vartheta_i}{2}\right)$.
(*Tip:* Betrachten Sie zuerst den Fall $n = 2$.)

**Lösung von Aufgabe 11:**

Wir zeigen dies in zwei Schritten:
**(1)** Die Einschränkung der Tangensfunktion auf das Intervall $[0, \frac{\pi}{2}[$ ist konvex: Ein hinreichendes Kriterium hierfür ist die Nichtnegativität der zweiten Ableitung.

$$\tan'(x) \ = \ \frac{1}{\cos^2(x)}, \qquad \tan''(x) \ = \ \frac{2\,\sin(x)}{\cos^3(x)}.$$

Die zweite Ableitung kann also auf dem Intervall $[0, \frac{\pi}{2}[$ nicht negativ werden. Für zwei Punkte $x_1, x_2 \in [0, \frac{\pi}{2}[$ und eine reelle Zahl $t \in [0, 1]$ gilt daher

$$\tan\big((1-t)\,x_1 + t\,x_2\big) \ \le \ (1-t)\tan(x_1) + t\tan(x_2).$$

**(2)** Wir beweisen nun die Ungleichung mit vollständiger Induktion:
Induktionsanfang für $n = 2$: Dies ist offensichtlich eine direkte Folgerung der in (a) gezeigten Konvexitätseigenschaft mit

$$x_1 = \frac{\vartheta_1}{2}, \qquad x_2 = \frac{\vartheta_2}{2}, \qquad t = \frac{1}{2}.$$

Induktionsschritt $n \to n+1$:

$$\begin{aligned}
\tan\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}\frac{\vartheta_i}{2}\right) &= \tan\left(\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\vartheta_i}{2}\right)+\frac{1}{n+1}\left(\frac{\vartheta_{n+1}}{2}\right)\right)\\
&\leq \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\tan\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\vartheta_i}{2}\right)+\frac{1}{n+1}\tan\left(\frac{\vartheta_{n+1}}{2}\right)\\
&\leq \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tan\left(\frac{\vartheta_i}{2}\right)\right)+\frac{1}{n+1}\tan\left(\frac{\vartheta_{n+1}}{2}\right)\\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}\tan\left(\frac{\vartheta_i}{2}\right).
\end{aligned}$$

**Bemerkung zu Aufgabe 11:** Die *Jensen-Ungleichung* $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geq f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$ für konvexe Funktionen $f$ beweist man ganz analog.

**Aufgabe 12 (Endliche Packungen):**

Es sollen $n$ Kreisscheiben mit Radius $1$ so in der Ebene gepackt werden, dass ihre Mittelpunkte auf Gitterpunkten des Quadratgitters $\mathcal{L} = \left\{\binom{2m_1}{2m_2} \mid m_i \in \mathbb{Z}\right\}$ liegen. Welche Packungsdichte lässt sich erreichen?

**Lösung von Aufgabe 12:**

**(1)** Behauptung: Alle Packungen $M \subset \mathcal{L}$ von $n$ Kreisscheiben, bei denen diese in Rechtecksform angeordnet sind, besitzen die selbe Packungsdichte.
Beweis: Wir zeigen, daß das benutzte (2-dimensionale) Volumen für alle möglichen Faktorisierungen $n = a \cdot b$ den selben Wert annimmt. Hierzu zerlegen wir die benutzte Fläche $F$ in die folgenden Teilflächen:

$$\begin{aligned}
F_1 &= \text{die vier Kreisausschnitte, an den 'Ecken' des Rechtecks}\\
F_2 &= \text{das innere Rechteck, das die Mittelpunkte der 'Eckkreise' als Extremalpunkte besitzt}\\
F_3 &= \text{die zwei verbleibenden horizontalen Rechtecke}\\
F_4 &= \text{die zwei verbleibenden vertikalen Rechtecke}
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich der Flächeninhalt:

$$\mathrm{Vol}(F) \;=\; \sum_{i=1}^{4}\mathrm{Vol}(F_i) \;=\; \pi + 2(a-1)\cdot 2(b-1) + 4(a-1) + 4(b-1) \;=\; \pi + 4(n-1).$$

Packungsdichte:

$$\delta(M) \;=\; \frac{n\,\pi}{\pi + 4(n-1)}.$$

**(2)** Tatsächlich ist dies die maximale Packungsdichte für Scheibenpackungen $M \subset \mathcal{L}$. Denn für beliebige Packungen von $n$ Kreisscheiben besagt die

**Formel von Steiner:**

$$\mathrm{Vol}\,(\mathrm{konv}\,(M + K_1^2)) = \mathrm{Vol}\,(\mathrm{konv}\,(M)) + U(\mathrm{konv}\,(M)) + \pi,$$

siehe Leppmeier, Lemma 3.1. Hierbei ist $U(\mathrm{konv}\,(M))$ der Umfang des Gittergolygon-Gebiets $\mathrm{konv}\,(M)$ (und die Formel gilt auch für Wurstpackungen, wenn wir den Umfang als den doppelten Abstand der Endpunkte von $\mathrm{konv}\,(M)$ interpretieren).
Andererseits besagt für *Gitterpolygone*, also Polygone, deren Eckpunkte in einem Gitter $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^2$ liegen, der

**Satz von Pick:** Die Fläche $F$ eines einfachen geschlossenen Gitterpolygons ist für das Gitter $\mathbb{Z}^2$ gleich

$$F = I + \tfrac{1}{2}R - 1.$$

Dabei bezeichnet $I$ die Zahl der Gitterpunkte im Inneren des Polygons und $R$ die Zahl der Gitterpunkte auf seinem Rand.

Da wir das Gitter $\mathcal{L} = 2\mathbb{Z}^2$ benutzen, ist die Fläche mit $4$ zu multiplizieren:

$$\mathrm{Vol}\,(\mathrm{konv}\,(M)) = 4\left(I + \tfrac{1}{2}R - 1\right).$$

Da die Punkte von $\mathcal{L}$ Minimalabstand 2 besitzen, ist $U(\mathrm{konv}\,(M)) \geq 2R$. Eintragen in die Formel von Steiner ergibt

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}\,(\mathrm{konv}\,(M + K_1^2)) &\geq 4\left(I + \tfrac{1}{2}R - 1\right) + 2R + \pi \\ &= 4(I + R - 1) + \pi \\ &= 4(n-1) + \pi, \end{aligned}$$

was die Behauptung beweist.