

Topologie

Andreas Knauf*

Sommersemester 2016

Zusammenfassung

Vorlesungsbegleitendes Skript zum *Querschnittsmodul Topologie* des 4. Bachelor-Semesters. Die Vorlesung gibt eine Einführung in die mengentheoretische und in die algebraische Topologie. Anregungen und Kritik sind willkommen!

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	2
1.1	Metrische Räume	3
1.2	Topologische Räume	4
1.3	Algebraische Topologie	6
1.4	Die Bedeutung der Abstraktion	8
2	Topologische Räume und stetige Abbildungen	11
2.1	Mengen und Abbildungen	11
2.2	Kategorien	20
2.3	Grundbegriffe der Topologie	24
2.4	Metriken und Topologien	29
3	Universelle Konstruktionen topologischer Räume	36
3.1	Die Initialtopologie	36
3.1.1	Teilraumtopologie und Induzierte Topologie	36
3.1.2	Die Produkttopologie	38
3.1.3	Der Pullback	42
3.2	Die Finaltopologie	47

*Department Mathematik, Universität Erlangen-Nürnberg, Cauerstr. 11, 91058 Erlangen, Raum 02.321, e-mail: knauf@math.fau.de, web: <http://math.fau.de/knauf>

3.2.1	Die Quotiententopologie	49
3.2.2	Die Summentopologie	51
3.2.3	Das Pushout	53
4	Zusammenhang und Trennung	58
4.1	Zusammenhangseigenschaften	58
4.2	Zusammenhangskomponenten	62
4.3	Trennungseigenschaften	64
4.4	Stetige Fortsetzung von Funktionen	65
5	Kompaktheit	68
5.1	Kompaktheitsbegriffe	68
5.2	Vererbung von Kompaktheit	74
5.3	Der Satz von Tychonov	76
5.4	Lokal- und Parakompaktheit, Mannigfaltigkeiten	80
5.5	Die kompakt-offene Topologie	84
6	Die Fundamentalgruppe eines Raums	88
6.1	Gruppen und Gruppoide	88
6.2	Funktoren und Homotopieäquivalenz	99
6.3	Die Homotopieklassen in $C(S^1, S^1)$	105
6.4	Anwendungen des Abbildungsgrads	109
6.5	Die Fundamentalgruppe	113
6.6	Der Satz von Seifert und van Kampen	122
7	Ausblicke	137
7.1	Überlagerungen	137
7.2	Bündel	139
7.3	Homologie und Kohomologie	142
	Kleines Englisch-Wörterbuch zur Topologie	145
	Literatur	146
	Index	148

1 Einführung

In der Topologie werden Eigenschaften von Räumen untersucht, die sich unter stetigen Deformationen nicht ändern. Sie abstrahiert also von dem durch eine

Metrik definierten Abstand zwischen Punkten des Raums und betreibt damit eine Art *qualitativer Geometrie*.

1.1 Metrische Räume

Wir erinnern uns an die Definition eines **metrischen Raums**:

1.1 Definition Ein **metrischer Raum** (M, d) besteht aus einer Menge M und einer Abbildung $d: M \times M \rightarrow [0, \infty)$ (der **Metrik**), die

- **positiv** ist, d.h. $d(x, y) = 0$ genau dann wenn $x = y$,
- **symmetrisch** ist, d.h. $d(x, y) = d(y, x)$ ($x, y \in M$),
- und die **Dreiecksungleichung** erfüllt, d.h.

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad (x, y, z \in M).$$

Man nennt $d(x, y)$ den **Abstand** von x zu y (oder: von x und y).

1.2 Beispiel (Metrik) Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist die *euklidische Metrik* auf $\mathbb{R}^n$ gegeben durch $d(x, y) := \|x - y\|$, mit der *euklidischen Norm* $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$. $\diamond$

Metrische Räume werden überall in der Mathematik benutzt. Jeder Punkt $x \in M$ eines metrischen Raumes ist in den (*offenen*) ε -Kugeln

$$U_\varepsilon(x) := \{y \in M \mid d(x, y) < \varepsilon\} \quad (\varepsilon > 0)$$

enthalten, und wir nennen eine Teilmenge U von M *offen*, wenn sie als Vereinigung von solchen Kugeln dargestellt werden kann. Es stellt sich nun heraus, dass es im Allgemeinen verschiedene Metriken d auf M gibt, die dennoch zum gleichen **Mengensystem**¹ $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(M)$ offener Mengen führen.

1.3 Beispiel (p -Normen und -Metriken)

Für $p \in [1, \infty)$ ist die *p -Norm* auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ durch

$$\|\cdot\|_p: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty) \quad , \quad x \mapsto \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

definiert. Für $p = \infty$ erhält man ebenfalls durch

$$\|\cdot\|_\infty: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty) \quad , \quad x \mapsto \max\{|x_i| \mid i = 1, \dots, n\}$$

eine Norm. Daher ist für $p \in [1, \infty] := [1, \infty) \cup \{\infty\}$

$$d_p: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty) \quad , \quad d_p(x, y) = \|x - y\|_p$$

¹ $\mathcal{P}(M)$ oder auch 2^M bezeichnet die *Potenzmenge* von M , also die Menge aller Teilmengen.

eine Metrik. Die euklidische Norm ist gleich der 2-Norm $\|\cdot\|_2$.

Alle diese Normen sind zueinander *äquivalent*: Für $1 \leq p \leq q \leq \infty$ gilt²

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p \leq n^{1/p-1/q} \|x\|_q \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Daher besitzen die metrischen Räume $(\mathbb{R}^n, d_p)$ für alle $p \in [1, \infty]$ das gleiche System $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ offener Mengen.

Im Folgenden verstehen wir, wenn keine Metrik angegeben wird, unter 'dem metrischen Raum $\mathbb{R}^n$ ' den $\mathbb{R}^n$ mit euklidischer Metrik d_2 . $\diamond$

1.2 Topologische Räume

Für viele Fragestellungen hat nun die Metrik d eines metrischen Raums (M, d) keine Bedeutung, und es kommt nur auf das System $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(M)$ offener Mengen an. Beispiele sind die Konvergenz einer Folge $a: \mathbb{N} \rightarrow M$ oder die Stetigkeit einer Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. Dann bietet es sich an, nur noch mit der sogenannten *Topologie* $\mathcal{O}$ zu arbeiten und von der Metrik d abzusehen.

In einem metrischen Raum sind beliebige Vereinigungen wie auch endliche Schnitte offener Mengen offen. Das führt zu der folgenden allgemeinen Definition.

1.4 Definition Ein Mengensystem $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt eine **Topologie** auf der Menge X , wenn gilt:

(O1) Für jede Indexmenge I und $O_i \in \mathcal{O}$ ($i \in I$) ist auch $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}$.

(O2) Für jede endliche Indexmenge I und $O_i \in \mathcal{O}$ ($i \in I$) ist auch $\bigcap_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}$.

Das Paar $(X, \mathcal{O})$ heißt dann **topologischer Raum**,³

und die Mengen $O \in \mathcal{O}$ heißen **offen**.

Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt **abgeschlossen**, wenn $X \setminus A$ offen ist.

1.5 Bemerkung (Vereinigung und Schnitt) Ist X eine Menge (genannt *Grundmenge*), I eine Menge (genannt *Indexmenge*) und $A_i \subseteq X$ ($i \in I$), dann sind

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \in X \mid \exists i \in I : x \in A_i\} \quad \text{und} \quad \bigcap_{i \in I} A_i := \{x \in X \mid \forall i \in I : x \in A_i\}$$

²mit $1/\infty := 0$.

³oder kurz: **Raum**. Die Elemente eines topologischen Raums heißen auch seine **Punkte**. Ist aus dem Zusammenhang klar, welche Topologie gemeint ist, nimmt man wie oft in der Mathematik den Teil für das Ganze, spricht also kurz vom 'topologischen Raum X '.

Vereinigung und (Durch-) Schnitt der *Mengenfamilie* $(A_i)_{i \in I}$. Es gilt also

$$\bigcup_{i \in \emptyset} A_i = \emptyset \quad \text{und} \quad \bigcap_{i \in \emptyset} A_i = X.$$

Manchmal fügt man zu Definition 1.4 noch als drittes Topologie-Axiom (O3) hinzu, dass die leere Menge $\emptyset$ und X selbst offen sind. Aber eigentlich ist das nicht nötig, denn mit $I := \emptyset$ ergibt sich $\emptyset \in \mathcal{O}$ aus (O1) und $X \in \mathcal{O}$ aus (O2). $\diamond$

Mit dieser Definition finden wir auf jeder Menge X Topologien, insbesondere

- die *diskrete Topologie* $\mathcal{O} := \mathcal{P}(X)$ und
- die *indiskrete Topologie*⁴ $\mathcal{O} := \{\emptyset, X\}$.

Gibt es für den topologischen Raum $(X, \mathcal{O})$ eine Metrik, die die Topologie $\mathcal{O}$ erzeugt, dann heißt er *metrisierbar*.

1.6 Bemerkung (Metrik und (in)diskrete Topologie)

- Für jede Menge M ist die diskrete Topologie metrisierbar, denn sie wird z.B. durch die Metrik d mit $d(x, y) = 1$ für $x \neq y \in M$ erzeugt.
- Besitzt aber M mindestens zwei Elemente $x \neq y$, dann ist die indiskrete Topologie nicht metrisierbar. Denn für eine Metrik d auf M und $\varepsilon := d(x, y) > 0$ ist $y \notin U_{\varepsilon/2}(x)$, obwohl $U_{\varepsilon/2}(x)$ in der von d erzeugten Topologie offen ist. Das zeigt, dass nicht jede Topologie von einer Metrik erzeugt wird. $\diamond$

Man sollte aber nicht glauben, dass das Hauptziel der Topologie sei, mehr oder weniger exotische Räume zu finden, deren Topologie nicht von einer Metrik erzeugt wird. Vielmehr sind viele in Anwendungen der Topologie betrachteten topologischen Räume $(X, \mathcal{O})$ *metrisierbar*, es gibt also eine Metrik d auf X , die die Topologie $\mathcal{O}$ erzeugt.

1.7 Definition Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ von einem topologischen Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ in einen topologischen Raum $(Y, \mathcal{O}_Y)$ heißt **stetig**, wenn die Urbilder offener Mengen offen sind, d.h. aus $O \in \mathcal{O}_Y$ folgt, dass $f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X$.

Die Inversen der stetigen Abbildungen erhalten also die für die Topologie zentrale Eigenschaft der Offenheit.

Eine Fragestellung der Topologie ist es, wie man aus gegebenen topologischen Räumen neue konstruiert. Besitzen etwa die Mengen X und Y schon Topologien, dann wollen wir

⁴auch **Klumpentopologie**, **triviale Topologie** oder **chaotische Topologie** genannt.

- ihr cartesisches Produkt $X \times Y$ und
- die Menge $\text{Abb}(X, Y)$ der Abbildungen $f : X \rightarrow Y$

topologisieren, d.h. mit einer Topologie versehen. Zwei Dinge fallen in diesem Zusammenhang auf:

- Eigentlich geht es fast nie nur um topologische Räume, sondern immer auch um die stetigen Abbildungen zwischen ihnen. So sind die *Projektionen*

$$\text{pr}_1 : X \times Y \rightarrow X, (x, y) \mapsto x \quad \text{und} \quad \text{pr}_2 : X \times Y \rightarrow Y, (x, y) \mapsto y$$

in der sog. *Produkttopologie* stetig.

- Wir sollten uns zunächst etwas um Mengentheorie kümmern, d.h. die in den Grundvorlesungen erworbenen Kenntnisse über den Umgang mit Mengen vertiefen. Denn viele Konstruktionen haben es in sich. So ist schon die Menge $\text{Abb}(\mathbb{N}, \{0, 1\})$ überabzählbar, obwohl die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ja geradezu das Muster einer abzählbar unendlichen Menge darstellt.

Topologie ermöglicht oft, die *Existenz* von Objekten nachzuweisen. Das ist ein Grund für ihre Bedeutung in den verschiedensten mathematischen Disziplinen.

Ein typisches Beispiel ist hier die Existenz einer Maximalstelle einer stetigen Funktion $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem kompakten topologischen Raum.

Kompaktheit kennen Sie schon aus der *Analysis*, und sie ist – wie das Beispiel zeigt – eine erfreuliche Eigenschaft. Leider sind viele topologische Räume wie der $\mathbb{R}^n$ nicht kompakt. Wir werden hier unser begriffliches Arsenal erweitern und etwa feststellen, dass der $\mathbb{R}^n$ immerhin parakompakt und lokalkompakt ist.

1.3 Algebraische Topologie

Soviel einleitend zur sogenannten *mengentheoretischen* Topologie. Im zweiten Teil der Vorlesung wird es um die sogenannte *algebraische* Topologie gehen. Dort werden Methoden der Algebra benutzt, um topologische Fragestellungen zu beantworten.

1.8 Beispiele 1. Ein *Knoten* ist eine injektive stetige Abbildung $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ der Kreislinie S^1 . Besitzen nun zwei solche Knoten f_1, f_2 disjunkte Bilder, dann kann man fragen, ob man diese sogenannte *Verschlingung* lösen kann, siehe Abb. 1.1, links. Dazu muss man sie zunächst einmal beschreiben. Für stetig differenzierbare f_i gelingt das über die *Verschlingungszahl*

$$LK(f_1, f_2) := \frac{1}{4\pi} \int_{S^1 \times S^1} \det(DG(t)) dt$$



Abbildung 1.1: Links: Verschlingung des Unknoten und des Kleeblattknoten. Rechts: Bild einer geschlossenen Kurve $f : S^1 \rightarrow \mathbb{T}^2$.

mit $G : S^1 \times S^1 \rightarrow S^2$, $(t_1, t_2) \mapsto \frac{f_1(t) - f_2(t)}{\|f_1(t) - f_2(t)\|}$.⁵

Wie sich herausstellt ist $LK(f_1, f_2) \in \mathbb{Z}$, und diese Zahl beschreibt genau das, was ihr Name suggeriert. Ist sie ungleich Null, können die beiden Knoten nicht voneinander getrennt werden.

2. Statt ganzer Zahlen können auch Gruppen benutzt werden, um stetige Abbildungen zu klassifizieren. Geometrisch ist $\mathbb{T}^2 := S^1 \times S^1$ ein Torus, etwa vorstellbar als die Oberfläche eines Autoreifens. Betrachtet man nun stetige Abbildungen $f : S^1 \rightarrow \mathbb{T}^2$, dann wird f ein Element $[f]$ der sogenannten *Homotopiegruppe*

$$\pi_1(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{Z}^2$$

zugeordnet, siehe Abb. 1.1, rechts. Ist $[f_1] = [f_2]$, dann können die geschlossenen Kurven stetig ineinander deformiert werden, sonst nicht. $\diamond$

1.9 Aufgabe Versuchen Sie zu verstehen, warum in Abb. 1.1, links die Verschlingungszahl den Betrag 2 besitzt, und in Abb. 1.1, rechts $[f] = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} \in \pi_1(\mathbb{T}^2)$ gilt. $\diamond$

Es gibt nun viele verschiedene Arten und Weisen, topologische Probleme mit algebraischen Mitteln zu lösen. Die meisten davon werden in dieser Vorlesung nicht behandelt werden können, aber Sie sollten hier das Rüstzeug bekommen, um die entsprechenden Methoden später bei Bedarf zu erlernen und anzuwenden. Viele dieser Methoden sind sog. Homologietheorien oder Kohomologietheorien. Beispiele solcher Theorien sind:⁶

⁵Für $n \in \mathbb{N}_0$ bezeichnet $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ die n -dimensionale Sphäre.

⁶Nicht alle Beispiele betreffen direkt die Topologie.

- *singuläre (Ko-) Homologie* für topologische Räume
- *Čech-Kohomologie* für topologische Räume
- *Zelluläre Homologie* für *CW-Komplexe*⁷
- *de Rham-Kohomologie* für differenzierbare Mannigfaltigkeiten
- *Gruppen-Kohomologie* (wofür wohl?)
- *Chevalley-Kohomologie* für Lie-Algebren
- *BRST-Kohomologie* für Quantenfeldtheorien in der Physik
- *Hochschild-Kohomologie* für assoziative Algebren
- *Kristalline Kohomologie* für die Zahlentheorie
- *Floer-Homologie* für die *Hamiltonsche Mechanik*

Die Liste ließe sich beliebig verlängern, etwa um die *perverse Kohomologie* (die heißt wirklich so!).

Es ist klar, dass wir hier Ordnungsprinzipien benötigen. Diese bestehen in der Theorie von Kategorien und Funktoren. Eine solche Kategorie ist **Top**, bestehend aus den topologischen Räumen und den stetigen Abbildungen zwischen ihnen. Eine andere ist etwa die Kategorie **Ab** der abelschen Gruppen und der sie verbindenden Gruppenhomomorphismen. (Ko-) Homologietheorien sind sogenannte *Funktoren*⁸

$$F : \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Ab},$$

die insbesondere einem topologischen Raum eine abelsche Gruppe zuordnen (ähnlich wie in Beispiel 1.8). Werden zwei topologischen Räumen dabei nicht isomorphe Gruppen zugeordnet, dann können sie selbst nicht homöomorph sein.⁹

1.4 Die Bedeutung der Abstraktion

Wir werden schon im Zusammenhang der Mengentheorie die Kategoriensprache benutzen. Während diese ursprünglich für topologische Fragestellungen entwickelt wurde, ist sie inzwischen zu einer Art Meta-Theorie der gesamten Mathematik geworden, und sie wird auch in der Informatik (als zweiter Strukturwissenschaft neben der Mathematik) verwendet.

⁷aus Vollkugeln aufbaubare topologische Räume

⁸Diese Aussage ist je nach Theorie zu modifizieren. Für die zelluläre Homologie etwa betrachtet man die Unterkategorie von **Top**, bestehend aus den *CW*-Komplexen und den Zellabbildungen zwischen ihnen.

⁹d.h. es gibt keine stetige Bijektion zwischen ihnen, deren Umkehrung ebenfalls stetig ist. Beispiel ist etwa die Sphäre S^2 und der Torus $\mathbb{T}^2$.

Wohl aber sind $\mathbb{T}^2$ und die Oberfläche eines *Bierseidels* homöomorph. Internet-Weisheit: 'A topologist, it is said, is someone who can't tell a cup of coffee from a doughnut'.

Die Kategorientheorie stellt für uns eine gemeinsame Sprache für Topologie und Algebra dar. Wir benötigen sie, weil wir ja mit algebraischen Mitteln topologische Probleme lösen werden. Da sie ermöglicht, so verschiedene Gebiete der Mathematik unter einen Hut zu bringen, ist sie notwendig abstrakt.

Auch ein Computer, mit dem man ja sowohl schreiben als auch zeichnen und rechnen kann, ist ja ein komplizierteres und abstrakteren Gesetzen folgendes Werkzeug als etwa ein Bleistift oder ein Rechenschieber.

Abstraktion ist in der Mathematik kein Selbstzweck, um für den Rest der Menschheit unverständliche Gedanken wälzen zu können. Sie ist stattdessen eine wesentliche Stärke der Mathematik, denn sie ermöglicht es, Konzepte in den unterschiedlichsten Bereichen anzuwenden. Sie erleichtert es auch, vorher nur gefühlte Gemeinsamkeiten mathematischer Gebiete zu klären, und sie bildet oft einen Wegweiser für die Entwicklung dieser Gebiete.

Die Geschichte der Mathematik ist auch eine Geschichte zunehmender Abstraktion. So hat in der Form von Flächen- und Volumenberechnung die Integralrechnung schon im Altertum ihren **Ausgangspunkt**. Dagegen wurde die **Differentialrechnung** erst im 17. Jahrhundert begründet, etwa zeitgleich durch **Isaac Newton** und **Wilhelm Leibniz**. Hier waren (im Gegensatz zur Integration) die durch **René Descartes** entwickelten algebraischen Methoden zur Lösung geometrischer Probleme Voraussetzung. So gesehen, haben Sie bis jetzt in Ihrem Studium eher sehr alte Teile der Mathematik kennengelernt.

Der in dieser Vorlesung zentrale Begriff des topologischen Raums wurde erst 1914 von **Felix Hausdorff** definiert, während das etwas anschaulichere Konzept des metrischen Raums schon 1906 von **Maurice Fréchet** verwendet wurde. Die Kategorientheorie, der vielleicht abstrakteste Zweig der Mathematik, begann sogar erst 1945, mit einer Arbeit von **Saunders MacLane** und **Samuel Eilenberg**.

Sie werden also viel modernere Konzepte als in Ihrem bisherigen Studium kennenlernen.

Die mit der neuen Studien- und Prüfungsordnung eingeführten *Querschnitts-module* werden im Sommersemester 2016 zum ersten Mal gehalten. Sie sollen das in *Linearer Algebra* und *Analysis* Gelernte vertiefen und zusammenführen. Dazu einige Beispiele für das Querschnittsmodul *Topologie*:

- In den Grundvorlesungen fehlt oft die Zeit für eine mathematische Begründung der *Mengenlehre*. Das werden wir jetzt (kursorisch) nachholen.
- Die Begriffe der *Offenheit* einer Menge und der *Stetigkeit* einer Abbildung sind zentral in der *Analysis*, aber sie bekommen erst mit der Einführung der topologischen Räume ihre eigentliche Basis.
- In der *Linearen Algebra* wurde der *Gruppen*-Begriff eingeführt. In der algebraischen Topologie werden Räumen wie etwa Flächen Gruppen, die schon

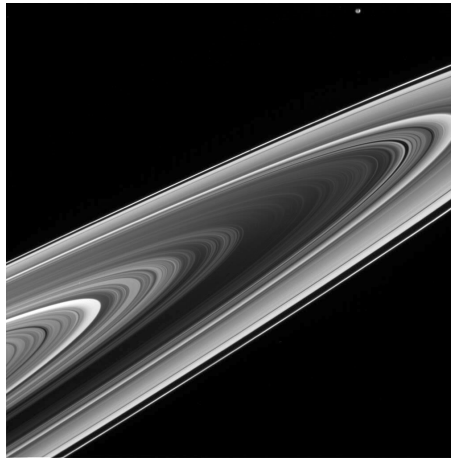


Abbildung 1.2: Saturnringe

erwähnten Homotopiegruppen, zugeordnet. Diese beschreiben, wie viele wesentlich verschiedene geschlossene Wege es in diesen Räumen gibt.

- Jeder n -dimensionale K -Vektorraum ist zwar isomorph zum K^n . Es wird aber spätestens in dieser Vorlesung deutlich werden, warum man nicht einfach mit dem K^n auskommt (und was der Begriff der Isomorphie in der Mathematik bedeutet).

Kurz gesagt, Sie werden schon Gelerntes hoffentlich besser einordnen können.

Tatsächlich steht die Topologie zwischen Algebra und Analysis, benutzt Konzepte aus beiden Gebieten, abstrahiert sie, und stellt ihre neu geschaffenen Werkzeuge für Anwendungen in Algebra und Analysis bereit.

Viele der Beispiele in dieser Vorlesung stellen daher einen Vorgriff auf Objekte dar, die Sie später im Studium benutzen werden – ob in der Maßtheorie, der Wahrscheinlichkeitstheorie, der Funktionalanalysis, oder im Masterbereich etwa für Lie-Gruppen, Klassische Mechanik oder Algebraische Geometrie.

Diese Vorlesung wird Sie aber auch nicht nur inhaltlich, sondern auch in Ihren Fähigkeiten, mit mathematischen Konzepten umzugehen, auf das Masterstudium vorbereiten. Das bedeutet im Umkehrschluss, dass Sie ernsthaft arbeiten müssen, um diesen Sprung in ihren *skills* zu machen.

Zum Schluss: Abstrakte Konzepte können helfen, Dinge zu *sehen*, die vorher unbemerkt blieben. Was sehen Sie, wenn Sie die Saturnringe sehen (Abb. 1.2)? Die Cantor-Menge¹⁰, ein Lieblingsobjekt der Topologie (siehe auch Seite 40).

Vorbemerkungen: Da dieses pdf [intern](#) und [extern](#) verlinkt ist, kann es sinnvoll

¹⁰genauer gesagt, eine Menge, die lokal homöomorph zum Produkt eines Intervalls und der Cantor-Menge ist, die Sie vermutlich aus der *Analysis* kennen. Diese Feststellung kann inzwischen weitgehend dynamisch erklärt werden, siehe MOSER [Mo].

sein, es *online* zu benutzen statt es auszudrucken.

Dieses Skript kann kein Lehrbuch ersetzen. Einige Lehrbücher zur Topologie sind im Literaturverzeichnis zitiert. Ich empfehle besonders den *Grundkurs Topologie* von GERD LAURES und MARKUS SZYMIK, [LS].

Danksagung: Besten Dank an Frau I. Moch für das Schreiben dieses Skripts. Herr St. Fleischer fand zahlreiche Fehler im Manuskript und gab weitere hilfreiche Hinweise. Herzlichen Dank auch ihm.

2 Topologische Räume und stetige Abbildungen

In diesem Kapitel werden wir die mengentheoretischen Grundlagen der Topologie klären, die Kategoriensprache einführen und zuletzt schauen, was wir beim Übergang von metrischen zu topologischen Räumen gewonnen haben.

2.1 Mengen und Abbildungen

Bis zum Jahr 1901 befand sich die Mengentheorie in einem Zustand, der heute etwas herablassend als *naive Mengenlehre* bezeichnet wird. Damals bildete man also noch ganz unbekümmert Mengen.

1901 aber bemerkte *Bertrand Russell*, dass Bildungen wie die "*Menge aller Mengen*" zu Paradoxien führten, also das Gebäude der Mathematik gefährdeten. Als Antwort auf diese Krise entwarfen verschiedene Mathematiker Regeln zur Konstruktion von Mengen. Das üblichste solche Regelwerk ist durch die sogenannten *Zermelo-Fraenkel*-Axiome gegeben. Ergänzt wurden diese durch das *Auswahlaxiom* (*axiom of choice*), weswegen man kurz von ZFC spricht. Darstellungen von ZFC finden sich in *EBBINGHAUS et al* [Eb] und *HOFFMANN* [Ho].

Nun kommen die meisten Mathematikerinnen und Mathematiker ganz gut durchs Berufsleben, ohne unbedingt in der Lage zu sein, die 10 ZFC-Gebote¹¹ aufzuzählen. Das liegt aber daran, dass sie eine Intuition entwickelt haben, die sie Fehler vermeiden lässt.

Wir werden im Folgenden nicht ZFC, sondern ein anderes, auf *LAWVERE* [LR] zurückgehendes System aus zehn Axiomen behandeln. Es ist zu einer abgeschwächten Form von ZFC äquivalent, die für gängige Mathematik ausreicht. Ergänzt um ein elftes *Ersetzungs*-Axiom ist es zu ZFC äquivalent, siehe [Le].

Für uns haben die Axiome gegenüber ZFC den Vorteil, dass sie intuitiv naheliegend sind. Wir werden sie zunächst informell einführen. Ihre Formalisierung wird dann auf die Kategorientheorie hinlenken, die wir ohnehin benötigen.

¹¹Unmathematisch für 'Axiome'.

Umgangssprachliche Formulierung von Axiomen der Mengenlehre:

1. Die Komposition von Funktionen ist assoziativ, und sie besitzt Links- und Rechts-Identitäten $\text{id}_X : X \rightarrow X$.
2. Es gibt eine Menge mit genau einem Element.
3. Es gibt eine Menge ohne Elemente.
4. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist schon durch ihre Werte $f(x)$ für die Elemente x von X festgelegt.
5. Für je zwei Mengen X, Y gibt es deren cartesisches Produkt $X \times Y$.
6. Für je zwei Mengen X, Y existiert die Menge $\text{Abb}(X, Y)$ der Abbildungen von X nach Y .
7. Für eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ und alle $y \in Y$ ist die Urbildmenge $f^{-1}(y)$ definiert.
8. Die Teilmengen der Menge X entsprechen den Abbildungen $f : X \rightarrow \{0, 1\}$.
9. Die natürlichen Zahlen existieren als Menge $\mathbb{N}$, mit einem ausgezeichneten Element $1 \in \mathbb{N}$ und einer Nachfolgerfunktion $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $x \mapsto x + 1$.
10. Für jede surjektive Abbildung $s : X \rightarrow Y$ existiert eine *Rechtsinverse* $i : Y \rightarrow X$, d.h. $s \circ i = \text{id}_Y$. $\diamond$

Man wird zugeben, dass diese Axiome vernünftig erscheinen. Außerdem kann man mit ihnen in der Praxis alle Mengen konstruieren, die man braucht, ohne dass man Monster vom Russellschen Typ gewärtigen muss.

Jetzt wollen wir, bevor wir einen Vertrag mit der Mengenlehre abschließen, doch erst noch das Kleingedruckte lesen, das heißt die Formalisierung der zehn Axiome.

2.1 Bemerkung (Kommutierende Diagramme) In dieser Formalisierung wie überhaupt in der Topologie werden sogenannte kommutierende Diagramme verwendet. *Diagramme* sind gerichtete Graphen, deren Knoten (hier) Mengen bezeichnen, während die gerichteten Kanten oder Pfeile von einer Menge X zu einer Menge Y eine Abbildung $X \rightarrow Y$ symbolisieren.

Es kommen unterschiedliche Formen von Pfeilen vor, hier aber neben $\rightarrow$ nur $\rightarrow$. Letzterer Pfeil symbolisiert, dass die angegebene Abbildung *existiert*.

Es wird dann gefordert, dass das *Diagramm kommutiert*, d.h. die bei der Verkettung von Kanten entlang zweier Wege zwischen zwei Knoten entstehenden

Verknüpfungen von Abbildungen nicht von der Wahl des (gerichteten) Wegs abhängen.

Man kann also kommutierende Diagramme als eine Visualisierung von Gleichungen zwischen Abbildungen verstehen. Bemerkenswert ist, dass in den Diagrammen wie auch in den nachfolgenden Axiomen die elementaren Konzepte Menge, Abbildung und Verknüpfung sind, während etwa das Konzept des Elements einer Menge aus diesen abgeleitet wird. $\diamond$

Doch nun zu den zehn Axiomen:

1. Assoziativität der Komposition und Identische Abbildungen:

Axiom 1 DIE VERKNÜPFUNG VON ABBILDUNGEN IST ASSOZIATIV. FÜR JEDE MENGE X EXISTIERT EINE IDENTISCHE ABBILDUNG $\text{id}_X : X \rightarrow X$.

Assoziativität bedeutet, dass für alle Mengen W, X, Y, Z und Abbildungen $f : W \rightarrow X$, $g : X \rightarrow Y$ und $h : Y \rightarrow Z$ die Kompositionen $g \circ f : W \rightarrow Y$ und $h \circ g : X \rightarrow Z$ die Eigenschaft

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

haben. Eine *identische Abbildung* $\text{id}_X : X \rightarrow X$ für die Menge X hat die definierende Eigenschaft, dass für alle Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow X$ gilt:

$$f \circ \text{id}_X = f \quad \text{und} \quad \text{id}_X \circ g = g. \quad \diamond$$

Diese Assoziativität der Verknüpfung von Abbildungen *beweist* man üblicherweise in den Grundvorlesungen, oft aber auf Basis der naiven Mengenlehre.

2.2 Bemerkung (Notwendigkeit von Axiom 1) Warum muss man hier Axiom 1 *fordern*? Weil wir noch keine Mengentheorie zur Verfügung haben (wir führen sie ja gerade ein). Also *wissen wir noch nicht, was eine Abbildung ist*. Das einzige, was wir bis jetzt wissen, ist,

- dass zu einem *Abbildung* genannten Ding f zwei *Mengen* genannte Dinge gehören (nämlich W und X , falls $f : W \rightarrow X$ geschrieben wurde);
- dass wir aus zwei Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ und $k : U \rightarrow V$ eine Abbildung, genannt $k \circ f : X \rightarrow V$ machen können, falls die Mengen Y und U einander gleich sind.

Für die Definition von Abbildungen in Grundvorlesungen benötigte man die Mengentheorie. Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ wurden dann als spezielle Teilmengen des cartesischen Produkts $X \times Y$ eingeführt. All das wollen wir erst definieren. Da noch nicht einmal das Wort 'Element' gefallen ist, können wir also nicht

die identische Abbildung id_X durch die Eigenschaft $\text{id}_X(x) = x$ für alle $x \in X$ definieren. Stattdessen haben wir sie durch die Eigenschaft definiert, dass die Verkettung von links oder rechts mit Abbildungen diese nicht ändert. $\diamond$

- 2. Existenz einelementiger Mengen:** Auch dass eine Menge mit genau einem Element existiert, kann man schlecht fordern, wenn man noch nicht das Wort 'Element' definiert hat. Wir gehen gerade umgekehrt vor.

2.3 Definition Eine Menge T heißt **terminal**, wenn für jede Menge X genau eine Abbildung $f : X \rightarrow T$ existiert.

Axiom 2 ES EXISTIERT EINE TERMINALE MENGE.

- 2.4 Bemerkungen**
1. Die Intuition hinter der Definition ist, dass aus der Existenz der f folgt, dass T mindestens ein Element besitzt, aus der Eindeutigkeit der f aber, dass T höchstens aus einem Element besteht.
 2. Jede einelementige Menge wird als terminale Menge dienen können. Trotzdem geben wir für diese den Standardnamen 1 , damit wir sie nicht jedes Mal als terminal definieren müssen. Es kommt nicht darauf an, *welche* terminale Menge wir verwenden, denn für terminale Mengen T_1, T_2 gibt es ja eindeutige Abbildungen $t_{i,k} : T_i \rightarrow T_k$ ($i, k \in \{1, 2\}$). Insbesondere sind $\text{id}_{T_i} = t_{i,i}$ eindeutig, und damit $t_{1,2} \circ t_{2,1} = t_{1,1} = \text{id}_{T_1}$. Als konkrete Wahl der terminalen Menge bietet sich aber $\{\emptyset\}$ an, siehe Axiom 3. $\diamond$

Abbildungen $X \rightarrow 1$ mit vorgegebener Menge sind also eindeutig. Jetzt drehen wir wortwörtlich den Spieß um und betrachten Abbildungen $1 \rightarrow X$.

2.5 Definition • Für eine Menge X und eine Abbildung $x : 1 \rightarrow X$ heißt x **Element** von X , in Zeichen: $x \in X$.

- Für $x \in X$ und eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ wird das Element $f \circ x : 1 \rightarrow Y$ von Y mit $f(x)$ bezeichnet.

Die Idee bei dieser Definition ist natürlich, dass das Bild ¹² einer Abbildung $x : 1 \rightarrow X$ eine einelementige Teilmenge von X ist.

3. Existenz der leeren Menge:

2.6 Definition Eine Menge I heißt **initial**, wenn für alle Mengen M genau eine Abbildung $I \rightarrow M$ existiert.

¹²Falls eine solche Abbildung $x : 1 \rightarrow X$ überhaupt existiert; X könnte ja die leere Menge sein (siehe Axiom 3).

Axiom 3 ES GIBT EINE (NICHT ZU **1** ISOMORPHE) INITIALE MENGE **0**.

Es handelt sich also um 'die leere Menge $\emptyset$ '. ¹³

$\emptyset$ ist initiale Menge. Denn das cartesische Produkt $\emptyset \times M$ ist wieder die leere Menge. Also ist jede Relation $R \subseteq \emptyset \times M$ die leere Menge, also existiert genau eine Abbildung $\emptyset \rightarrow M$!

Statt mit $\emptyset$ wird die initiale Menge hier mit **0** bezeichnet.

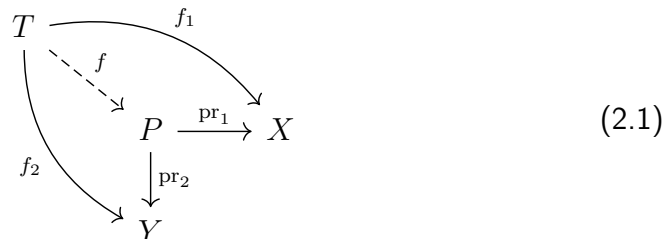
- 4. Charakterisierung von Abbildungen:** Abbildungen $f, g : X \rightarrow Y$ sind genau dann voneinander verschieden, wenn es ein Element $x \in X$ gibt mit $f(x) \neq g(x)$. Mit anderen Worten:

Axiom 4 $f, g : X \rightarrow Y$ SIND GENAU DANN VONEINANDER VERSCHIEDEN, WENN ES EINE ABBILDUNG $h : \mathbf{1} \rightarrow X$ GIBT MIT $f \circ h \neq g \circ h$.

- 5. Cartesisches Produkt:** Die erste Frage ist, wodurch sich das cartesische Produkt $X \times Y$ zweier Mengen X, Y auszeichnet. Wir benötigen also eine Definition.

2.7 Definition Ein **cartesisches Produkt** der Mengen X und Y ist eine Menge P mit zwei Abbildungen $\text{pr}_1 : P \rightarrow X$, $\text{pr}_2 : P \rightarrow Y$, sodass für alle Mengen T mit Abbildungen $f_1 : T \rightarrow X$ und $f_2 : T \rightarrow Y$ genau eine Abbildung $f : T \rightarrow P$ existiert, für die das folgende Diagramm kommutiert, also gilt:

$$f_i = \text{pr}_i \circ f \quad (i = 1, 2).$$

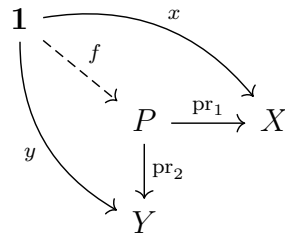


Axiom 5 ALLE PAARE X, Y VON MENGEN BESITZEN EIN CARTESISCHES PRODUKT.

In der Definition steht T für 'Test', und getestet wird $(P, \text{pr}_1, \text{pr}_2)$ darauf, ob es ein cartesisches Produkt ist.

Warum ist die durch das Diagramm beschriebene Bedingung eine, die cartesische Produkte in dem uns bekannten Sinn definiert? Dazu wählen wir als die Testmenge T die terminale Menge **1**. Es ergibt sich das kommutierende Diagramm

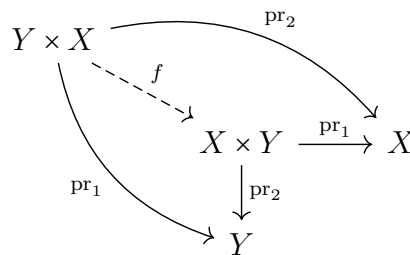
¹³Tatsächlich läßt sich aus den zehn Axiomen folgern, dass es (bis auf eindeutige Isomorphie) genau eine leere Menge gibt.



Mit Absicht wurden jetzt x und y statt f_1 und f_2 geschrieben, denn die Abbildungen $x : 1 \rightarrow X$, $y : 1 \rightarrow Y$ sind ja gerade die Elemente der Mengen X, Y , und $f \in P$.

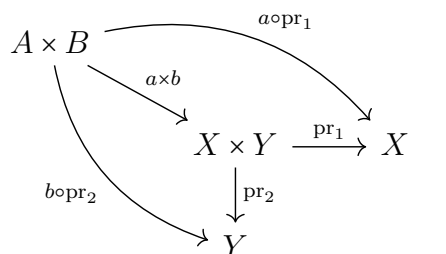
Es muss also $\text{pr}_1(f) = x$ und $\text{pr}_2(f) = y$ für ein eindeutiges $f \in P$ gelten, und das ist gerade unsere Intuition von $P = X \times Y$.

Halt: Ist dann nicht auch $Y \times X$ cartesisches Produkt von X mit Y ? Ja schon, wie sich durch Einsetzen von $T := Y \times X$ in das kommutierende Diagramm ergibt:



$f : Y \times X \rightarrow X \times Y$ vertauscht dabei die Komponenten. Das zeigt, cartesische Produkte von X und Y sind nicht eindeutig. Aber sie sind bis auf eine eindeutige Isomorphie eindeutig.

Betrachtet man Abbildungen $a : A \rightarrow X$ und $b : B \rightarrow Y$, dann ergibt sich eine eindeutige Abbildung $a \times b : A \times B \rightarrow X \times Y$, $(u, v) \mapsto (a(u), b(v))$:



6. Abbildungsmenge: Die Menge $\text{Abb}(X, Y)$ der Abbildungen von X nach Y wird auch mit Y^X bezeichnet, und man spricht folgerichtig von *Exponentizierung*.

Wieder müssen wir erst erklären, was wir damit genau meinen. Daher bezeichnen wir diese Menge erst einmal mit F .

2.8 Definition Für die Mengen X, Y heißt eine Menge F mit einer Abbildung $\varepsilon : F \times X \rightarrow Y$ eine **Abbildungsmenge** von X nach Y , wenn für alle Mengen T und Abbildungen $\delta : T \times X \rightarrow Y$ genau ein $\bar{\delta} : T \rightarrow F$ existiert, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} T \times X & & \\ \bar{\delta} \times \text{id}_X \downarrow & \searrow \delta & \\ F \times X & \xrightarrow{\varepsilon} & Y \end{array} .$$

Es soll also $\varepsilon(\bar{\delta}(t), x) = \delta(t, x)$ gelten. Unter ε stellen wir uns die *Auswertungsabbildung*

$$\varepsilon : \text{Abb}(X, Y) \times X \rightarrow Y \quad , \quad \varepsilon(f, x) := f(x)$$

vor, die also die Abbildungen $f \in \text{Abb}(X, Y)$ auswertet (künftig *ev* genannt) .

In der Tat: Setzen wir für die Test-Menge T die terminale Menge 1 ein, dann gilt $1 \times X \cong X$ (mit $\cong$ als Zeichen für Isomorphie, bitte nachrechnen!), also sind die δ gerade als die Funktionen $\delta : X \rightarrow Y$ zu verstehen. Diese entsprechen nach der Definition gerade den Elementen $\bar{\delta} \in F$.

Axiom 6 FÜR ALLE MENGEN X, Y EXISTIERT EINE ABBILDUNGSMENGE.

- 7. Urbildmenge:** Die Urbildmenge von $y \in Y$ bezüglich der Abbildung $f : X \rightarrow Y$ stellen wir uns als eine Teilmenge A von X vor, für die $f(a) = y$ für alle $a \in A$ und $f(x) \neq y$ für alle $x \in X \setminus A$. Wir besitzen noch nicht das Konzept einer Teilmenge, wohl aber das einer Abbildung $j : A \rightarrow X$. Also definieren wir:

2.9 Definition Für eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ und $y \in Y$ besteht ein **Urbild** von y unter f aus einer Menge A und einer Abbildung $j : A \rightarrow X$, sodass das Folgende gilt: Für alle Mengen T und Abbildungen $q : T \rightarrow X$ mit $f(q(t)) = y$ für alle $t \in T$ existiert genau eine Abbildung $\bar{q} : T \rightarrow A$, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} T & & & & \\ & \searrow \bar{q} & & \searrow q & \\ & A & \xrightarrow{\quad} & 1 & \\ & \downarrow j & & \downarrow y & \\ & X & \xrightarrow{f} & Y & \end{array} .$$

Die Bedingung $f(q(t)) = y$ stellt sicher, dass das 'äußere Quadrat kommutiert'. Setzen wir jetzt $T := \mathbf{1}$, also $q \in X$ und $\bar{q} \in A$, dann muss gelten: für alle $\bar{q} \in A$ ist $f(j(\bar{q})) = f(q) = y$. Die Eindeutigkeit von $\bar{q}$ erzwingt, dass j injektiv ist, die Existenz von $\bar{q}$, dass mit der Injektion $j : A \rightarrow X$ das ganze Urbild von y erreicht wird. Auch das Urbild ist also (bis auf Isomorphie) eindeutig.

Axiom 7 FÜR JEDE FUNKTION $f : X \rightarrow Y$ UND JEDES $y \in Y$ EXISTIERT EIN URBILD VON y UNTER f .

- 8. Teilmengen:** Wir wollen entsprechend Punkt 7 die Teilmengen A einer Menge X als Urbilder $f^{-1}(y)$ von $y \in Y$ unter geeigneten Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ definieren. Dazu muss Y mindestens zwei Elemente besitzen. Wir wissen aber noch nicht, dass überhaupt eine Menge mit mehr als einem Element existiert. Also müssen wir auch das fordern.

2.10 Definition • Eine Abbildung $j : A \rightarrow X$ heißt **injektiv** oder **Injektion**, wenn für alle $a_1, a_2 \in A$ gilt: $j(a_1) = j(a_2)$ impliziert $a_1 = a_2$.

- Ein **Teilmengen-Klassifikator** ist eine Menge K mit einem Element $k \in K$, sodass für alle Mengen A, X und Injektionen $j : A \rightarrow X$ eine eindeutige Abbildung $\chi : X \rightarrow K$ existiert, für die $j : A \rightarrow X$ Urbild von k unter χ ist.

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbf{1} \\ \downarrow j & & \downarrow k \\ X & \xrightarrow{\chi} & K \end{array}$$

Injektionen kamen schon bei der Betrachtung des Urbilds vor. Wir könnten (wenn wir schon die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ zur Verfügung hätten) als Teilmengen-Klassifikator $K := \{0, 1\}$ und $k := 1$ wählen. Dann würde $\chi : X \rightarrow \{0, 1\}$ die Indikatorfunktion $\mathbb{1}_A$ von A sein.

Axiom 8 ES GIBT EINEN TEILMENGEN-KLASSIFIKATOR (K, k) .

Tatsächlich kann man zeigen, dass K genau zwei Elemente haben muss. Daher wird statt K das Symbol $\mathbf{2}$ benutzt.

- 9. Natürliche Zahlen:** In der *Analysis* haben Sie vermutlich die **Peano-Axiome** für die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen kennengelernt. Hier eine Wiederholung.

2.11 Definition (Peano-Axiome) Ein System natürlicher Zahlen $(N, 1, \mathcal{N})$ ist eine Menge N mit einem ausgezeichneten Element $1 \in N$ und einer Abbildung $\mathcal{N} : N \rightarrow N$ (genannt **Nachfolgerfunktion**), für die gilt:

- (a) $\mathcal{N}$ ist injektiv.

(b) $1 \notin \mathcal{N}(N)$.

(c) Falls für eine Teilmenge $M \subseteq N$ gilt: $1 \in M$ und $\mathcal{N}(M) \subseteq M$, dann ist $M = N$.

Ich habe hier N statt $\mathbb{N}$ geschrieben, um zu verdeutlichen, dass es mehrere solche Systeme natürlicher Zahlen geben kann. Schließlich müssen die Elemente von N ja nicht $1, 2, 3, 4, \dots$ heißen, sondern könnten auch $1, 10, 11, 100, \dots$ oder *un, deux, trois, quatre, ...* sein.

Aber, wie man zeigt, kommt es auf die Wahl des Systems natürlicher Zahlen nicht an. Denn statt der obigen drei Peano-Axiome kann man auch definieren:

2.12 Definition Ein **System natürlicher Zahlen** ist ein Tripel $(N, 1, \mathcal{N})$, sodass für alle Tripel $(M, m, \mathcal{M})$ mit Menge M , $m \in M$ und Abbildung $\mathcal{M} : M \rightarrow M$ eine eindeutige Abbildung $I : N \rightarrow M$ existiert, für die das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \xrightarrow{1} & N & \xrightarrow{\mathcal{N}} & N \\ \downarrow \text{id}_1 & & \downarrow I & & \downarrow I \\ 1 & \xrightarrow{m} & M & \xrightarrow{\mathcal{M}} & M \end{array} \quad .$$

kommutiert.

Ist $(M, m, \mathcal{M})$ selbst ein System natürlicher Zahlen, dann lassen sich die vertikalen Pfeile umdrehen, und man sieht, dass es zu $(N, 1, \mathcal{N})$ isomorph ist. Andererseits kann man beweisen, dass $(N, 1, \mathcal{N})$ die Peano-Axiome erfüllt.

Axiom 9 ES GIBT EIN SYSTEM NATÜRLICHER ZAHLEN.

Damit wird auch die Existenz einer unendlichen Menge N postuliert, denn Peano-Axiom 1 und 2 sind für keine endliche Menge N erfüllt.

10. Auswahlaxiom:

Das noch fehlende Auswahlaxiom wird folgendermaßen eingeführt.

2.13 Definition • Eine Abbildung $s : X \rightarrow Y$ heißt **surjektiv** oder **Surjektion**, wenn für alle $y \in Y$ ein $x \in X$ existiert mit $s(x) = y$.

- Eine **Rechtsinverse** einer Abbildung $s : X \rightarrow Y$ ist eine Abbildung $i : Y \rightarrow X$ mit $s \circ i = \text{id}_Y$.

Eine Rechtsinverse i von s wählt also für alle $y \in Y$ ein Urbild $i(y) \in X$ von s aus. Eine solche Rechtsinverse existiert höchstens dann, wenn s surjektiv ist.

Axiom 10 JEDE SURJEKTION BESITZT EINE RECHTSINVERSE.

Kurz und unpräzise zusammengefasst stellen die zehn Axiome die *Existenz* gewisser Mengen, Abbildungen und mengentheoretischer Konstruktionen fest. Aus den Axiomen folgte in vielen Fällen dann deren *Eindeutigkeit* (bis auf eindeutige Isomorphie), oft schon durch Benutzung sehr einfacher Test-Mengen T . In *Anwendungen* der jeweiligen Konstruktion benutzt man dann die eindeutige Existenz der Abbildung zwischen der definierten Menge und T für die jeweils interessierende Menge T .

2.2 Kategorien

Im letzten Kapitel haben wir über Mengen und Abbildungen gesprochen. In diesem Kapitel werden wir sehen, dass diese eine sogenannte **Kategorie** bilden.

Ebenso bilden topologische Räume und stetige Abbildungen eine Kategorie, und wir werden viele weitere Kategorien kennenlernen.

2.14 Bemerkung (Mengen und Klassen) Schon unser **Axiom 1** der Mengenlehre spricht von 'jeder Menge'. Es könnte der Verdacht aufkommen, dass hier die 'Menge aller Mengen' angesprochen wird, also eine widerspruchsvolle Konstruktion. Tatsächlich wird hier die **Klasse** aller Mengen verwendet. Eine **Klasse** enthält Mengen (oder andere mathematische Objekte), ist aber nicht notwendigerweise selbst eine Menge. Ist sie keine Menge, dann spricht man von einer *echten Klasse*. Insbesondere ist die Klasse aller Mengen eine echte Klasse. Klassen darf man nicht für alle mengentheoretischen Operationen verwenden. Dadurch werden Paradoxien vermieden. $\diamond$

2.15 Definition Eine **Kategorie** $\mathcal{C}$ besteht aus

- einer Klasse $\text{Ob}(\mathcal{C})$ von **Objekten**;
- einer Klasse $\text{Mor}(\mathcal{C})$ von **Morphismen**.¹⁴
Dabei ist $\text{Mor}(\mathcal{C})$ die disjunkte Vereinigung von Klassen $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ von Morphismen zwischen den Objekten $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$.
- **Verknüpfungsabbildungen** für $X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Z), \quad (g, f) \mapsto gf.$$

Diese sind **assoziativ**, d.h. $(hg)f = h(gf)$.

- Für alle $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ einem **Identitätsmorphismus** $\text{id}_X \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, X)$, mit

$$\text{id}_X f = f \quad (f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, X)) \quad \text{und} \quad f \text{id}_X = f \quad (f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)).$$

¹⁴auch **Pfeile** oder **Abbildungen** genannt

2.16 Beispiel (Set) In der Kategorie **Set** ist $\text{Ob}(\mathbf{Set})$ die Klasse aller Mengen und $\text{Mor}(\mathbf{Set})$ die Klasse der Abbildungen zwischen Mengen. Hier wird man statt $f \in \text{Mor}_{\mathbf{Set}}(X, Y)$ bequemenhalber wie gewohnt $f : X \rightarrow Y$ schreiben. Für die Verknüpfung gf mit $g : Y \rightarrow Z$ schreibt man üblicherweise $g \circ f : X \rightarrow Z$. **Axiom 1** der Mengenlehre stellt offensichtlich fest, dass **Set** eine Kategorie ist, während die anderen Axiome die Eigenschaften dieser Kategorie beschreiben. $\diamond$

Eigentlich beschäftigen wir uns mit Topologie, nicht mit der Mengenlehre. Daher wird für uns folgende Kategorie wichtig sein:

2.17 Beispiel (Top) Die Kategorie **Top** besteht aus

- der Klasse $\text{Ob}(\mathbf{Top})$ topologischer Räume,
- den Klassen $\text{Mor}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$ der stetigen Abbildungen $f : X \rightarrow Y$.

Tatsächlich ist für jeden topologischen Raum die Identitätsabbildung id_X stetig, denn für jede offene Menge $U \subseteq X$ ist $\text{id}_X^{-1}(U) = U$. Ebenso ist die Verknüpfung zweier stetiger Abbildungen $g : Y \rightarrow Z$ und $f : X \rightarrow Y$ stetig. Denn ist $U \subseteq Z$ offen, dann ist $V := g^{-1}(U) \subseteq Y$ offen. Damit sind auch

$$f^{-1}(V) \subseteq X \quad \text{und} \quad (g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)) = f^{-1}(V)$$

offen. **Top** ist damit eine Kategorie. $\diamond$

Vielleicht stellen Sie sich die Frage, warum man in der Definition 2.15 umständlich schreibt: $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, statt einfach, wie in den beiden Beispielen, $f : X \rightarrow Y$ zu notieren. Das ist deshalb so, weil nicht in allen Kategorien $\mathcal{C}$ die Morphismen $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ Abbildungen vom Objekt X in das Objekt Y sind. Die Objekte selbst brauchen auch keine Mengen zu sein.

2.18 Beispiel (Die Kategorie $\mathbf{Matr}_K$)

Für einen Körper¹⁵ K ist $\mathbf{Matr}_K$ eine (kleine)¹⁶ Kategorie mit

- der Menge $\text{Ob}(\mathbf{Matr}_K) := \mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen von Objekten,
- den Mengen $\text{Mor}_{\mathbf{Matr}_K}(m, n) := \text{Mat}(n \times m, K)$ ¹⁷ von Morphismen.
- Die Verknüpfungsabbildung ordnet einer $p \times n$ -Matrix N und einer $n \times m$ -Matrix M die $p \times m$ -Matrix NM zu.

¹⁵z.B. $K = \mathbb{R}$. Allgemeiner kann K auch ein kommutativer Ring sein, wie z.B. der Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen.

¹⁶**Definition.** Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt **klein**, wenn $\text{Ob}(\mathcal{C})$ und $\text{Mor}(\mathcal{C})$ Mengen (statt echte Klassen) sind, sonst **groß**. Beispiele großer Kategorien sind **Set** und **Top**.

¹⁷also den $n \times m$ -Matrizen mit Einträgen in K

- Für alle Objekte $n \in \mathbb{N}$ ist id_n die Einheitsmatrix $\mathbb{1}_n \in \text{Mat}(n \times n, K)$.

Die Matrix-Multiplikation ist assoziativ, und für alle $M \in \text{Mat}(n \times m, K)$ ist $M\mathbb{1}_m = \mathbb{1}_n M = M$. Also ist **Matr**_K eine Kategorie.

Aber eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ wird normalerweise nicht als Menge aufgefasst. Und selbst wenn man das täte, würde etwa die Matrix $\begin{pmatrix} 2 & -7 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ nicht die 'Menge' 3 in die 'Menge' 2 abbilden. $\diamond$

Was haben wir dadurch gewonnen, die topologischen Räume und die stetigen Abbildungen als die Kategorie **Top** anzusehen? Das wird sich erst im Lauf der Vorlesung ganz erschließen. Einige erste Feststellungen sind aber schon möglich. So besitzt die Kategorientheorie eine einheitliche Sprache, die auf alle Kategorien anwendbar ist. Kategorientheoretische Beschreibungen helfen daher, Strukturähnlichkeiten in verschiedenen Bereichen der Mathematik zu sehen.

Wir schreiben jetzt wieder $f : X \rightarrow Y$ statt $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ und $g \circ f$ statt gf , weil das die gewohntere und anschaulichere Schreibweise ist. Wir sind aber bereit, diese dann aufzugeben, falls Missverständnisse drohen.

2.19 Definition In einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt ein Morphismus $f : X \rightarrow Y$

- **Monomorphismus**, wenn für alle Objekte T und $g, h : T \rightarrow X$ aus $f \circ g = f \circ h$ folgt, dass $g = h$ ist.
- **Epimorphismus**, wenn für alle Objekte T und $g, h : Y \rightarrow T$ aus $g \circ f = h \circ f$ folgt, dass $g = h$ ist.
- **Endomorphismus**, wenn $X = Y$ ist.
- **Isomorphismus**, wenn es ein $g : Y \rightarrow X$ mit $f \circ g = \text{id}_Y$ und $g \circ f = \text{id}_X$ gibt. Wenn ein Isomorphismus $f : X \rightarrow Y$ existiert, heißen X und Y **isomorph**.
- **Automorphismus**, wenn es ein Endomorphismus und ein Isomorphismus ist.

2.20 Beispiele (Morphismen in Set und Top) 1. In der Mengentheorie (also in **Set**) sind die Monomorphismen die injektiven Abbildungen, die Epimorphismen die surjektiven Abbildungen und die Isomorphismen die bijektiven Abbildungen. Die Automorphismen einer Menge heißen auch Permutationen.

2. In der Topologie (also in **Top**) heißen die Isomorphismen auch *Homöomorphismen*. $f : X \rightarrow Y$ ist also ein topologischer Isomorphismus, wenn f bijektiv und stetig ist, und die Umkehrabbildung auch stetig ist.

3. Als Beispiel in **Top** sind alle offenen Kugeln $U_\varepsilon(x)$ des $\mathbb{R}^n$ in der Standardtopologie zueinander und zum $\mathbb{R}^n$ homöomorph, denn

- sowohl die affine Abbildung $f : U_1(0) \rightarrow U_\varepsilon(x)$, $f(y) = x + \varepsilon y$ als auch ihre Inverse $z \mapsto f^{-1}(z) = (z - x)/\varepsilon$ sind stetig.
- $f : \mathbb{R}^n \rightarrow U_1(0)$ mit $f(0) := 0$ und $f(x) := \frac{x}{\|x\|} \tanh(\|x\|)$ sonst ist ein Homöomorphismus. Denn f ist stetig, wegen der strengen Monotonie von $\tanh|_{[0,\infty)} : [0,\infty) \rightarrow [0,1)$ bijektiv und besitzt die stetige Umkehrung $f^{-1}(0)=0$ und $f^{-1}(z) = \frac{z}{\|z\|} \operatorname{artanh}(\|z\|)$ ($z \in U_1(0) \setminus \{0\}$). $\diamond$

Die in den Axiomen 2 bis 10 der Mengentheorie angesprochenen Konstruktionen wurden kategorientheoretisch formuliert. Einige dieser Konstruktionen, etwa das Produkt ([Axiom 5](#)), existieren auch in anderen Kategorien, andere nicht.

2.21 Beispiel (Initiale und terminale Objekte) In einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt

- $X \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})$ **initiales Objekt**, wenn für alle $Y \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})$ genau ein Morphismus $f : X \rightarrow Y$ existiert.
- $X \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})$ **terminales Objekt**, wenn für alle $Y \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})$ genau ein Morphismus $f : Y \rightarrow X$ existiert.

In der Kategorie **Set** waren die terminalen Objekte die einelementigen Mengen und das initiale Objekt die leere Menge. Ähnlich verhält es sich bei **Top**. Dagegen besitzt **Matr_K** (Beispiel 2.18) keine initialen oder terminalen Objekte, denn für alle $m, n \in \mathbb{N}$ besteht $\operatorname{Mat}(n \times m, K)$ aus mehr als einer Matrix. $\diamond$

2.22 Bemerkung (Set als Graph) Die Bezeichnung von Morphismen als Pfeile deutet auf eine graphische Darstellung von Kategorien hin. Dabei werden den Objekten der Kategorie Knoten und den Morphismen gerichtete Kanten zugeordnet. Da es mehrere gerichtete Kanten $f : X \rightarrow Y$ zwischen den Objekten X, Y geben kann, und für jedes Objekt X der Morphismus $\operatorname{id}_X : X \rightarrow X$ existiert, handelt es sich um einen gerichteten Multigraph oder **Köcher** (aber nicht um ein kommutierendes Diagramm!).

In Abbildung 2.1 ist ein Ausschnitt dieser Köchers für **Set** mit den Mengen 0, 1 und 2 (mit Kardinalitäten $|k| = k$) dargestellt. $\diamond$

In Kapitel 3 werden wir universelle Konstruktionen für topologische Räume behandeln, also z.B. schauen,

- wie die Produkttopologie des cartesischen Produkts $X \times Y$ topologischer Räume aussieht,
- oder wie man die Abbildungsmenge $\operatorname{Abb}(X, Y)$ topologisiert.

Das lässt sich mit den gleichen kommutierenden Diagrammen wie für [Axiom 5](#) und [Axiom 6](#) definieren. Denn diese Diagramme lassen sich kategorientheoretisch interpretieren. An ihren Knoten stehen dann statt den Mengen Objekte der jeweiligen Kategorie, und die Pfeile symbolisieren statt Abbildungen Morphismen.

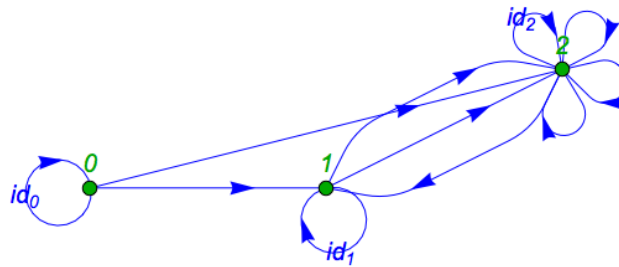


Abbildung 2.1: Darstellung der Kategorie **Set** als Köcher (Ausschnitt!)

2.3 Grundbegriffe der Topologie

In der Einleitung haben wir die offenen Mengen $U \subseteq X$ in einem metrischen Raum als diejenigen Teilmengen charakterisiert, die sich in der Form

$$U = \bigcup_{x \in U} U_{\varepsilon(x)}(x) \quad (2.2)$$

für eine Funktion $\varepsilon : U \rightarrow (0, \infty)$ schreiben lassen, also als Vereinigung geeigneter offener ε -Kugeln um ihre Elemente.

2.23 Beispiel (Intervalle) Eine Teilmenge $I \subseteq \mathbb{R}$ heißt bekanntlich *Intervall*, wenn mit $x < y \in I$ und $z \in \mathbb{R}$ auch $z \in I$ ist, falls $x \leq z \leq y$. Man stelle in der *Analysis I* fest, dass $\emptyset$ damit ein Intervall ist, und für Intervalle $I \neq \emptyset$, mit den Bezeichnungen $a := \inf(I) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und $b := \sup(I) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ die Fälle (a, b) , $[a, b]$, $[a, b)$ und $(a, b]$ auftreten können.¹⁸ (a, b) heißt *offen*, und für $a, b \in \mathbb{R}$ heißt $[a, b]$ *abgeschlossen*, $[a, b)$ und $(a, b]$ *halboffen*. Dieser Sprachgebrauch harmoniert fast, aber leider nicht ganz mit dem der Topologie:

- Als Menge ist $\mathbb{R}$ sowohl offen als auch abgeschlossen (letzteres wegen $\mathbb{R} = \mathbb{R} \setminus \emptyset$). $\mathbb{R}$ lässt sich aber nur als offenes Intervall $(-\infty, +\infty)$, nicht als abgeschlossenes Intervall $[a, b]$ schreiben.
- Offene Intervalle (a, b) sind auch als Mengen offen: Ist $x \in (a, b)$, dann gibt es ein $\varepsilon(x) > 0$ mit $U_{\varepsilon(x)}(x) \subseteq (a, b)$. Für $(a, b) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ wählt man z.B. $\varepsilon(x) := 1$, sonst setzt man etwa $\varepsilon(x) := \min(x - a, b - x) \in (0, +\infty)$.
- Abgeschlossene Intervalle $[a, b]$ sind auch als Mengen abgeschlossen: Für $a \leq b \in \mathbb{R}$ ist $\mathbb{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ die Vereinigung zweier

¹⁸Dabei ist natürlich ausgeschlossen, dass $-\infty$ oder $+\infty$ zu I gehören.

offener Intervalle. Also ist das Komplement von $[a, b]$ offen und damit $[a, b]$ abgeschlossen. Auch das Intervall $\emptyset$ ist abgeschlossen. $\diamond$

Wir lernen jetzt ein allgemeines Verfahren kennen, Topologien zu erzeugen. Angewandt auf den Fall eines metrischen Raums (X, d) erlaubt es, die in (2.2) definierte *metrische, von (X, d) erzeugte Topologie* anders einzuführen.

Sei dazu X eine Menge und $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ ¹⁹. Wir suchen nach der grössten Topologie $\tau(S) \subseteq \mathcal{P}(X)$, für die $S \subseteq \tau(S)$ gilt.

2.24 Definition Es seien $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{P}(X)$ Topologien.

$\mathcal{O}_1$ heißt **größer** als $\mathcal{O}_2$, und $\mathcal{O}_2$ **feiner** als $\mathcal{O}_1$, wenn $\mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}_2$ gilt.

Die Inklusion $\subseteq$ definiert eine Ordnungsrelation auf der Menge der Topologien auf X . Es braucht zwar weder $\mathcal{O}_1 \supseteq \mathcal{O}_2$ noch $\mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}_2$ zu gelten. Dann sind die beiden Topologien *nicht vergleichbar*. Aber die indiskrete Topologie $\{\emptyset, X\}$ ist die grösste und die diskrete Topologie $\mathcal{P}(X)$ die feinste Topologie auf X .

2.25 Definition Für eine Menge X und ein Mengensystem $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ ist der **Hüllenoperator** auf S definiert als

$$\tau(S) := \bigcap \{ \mathcal{O} \mid \mathcal{O} \in T \} \quad \text{mit} \quad T := \{ \mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X) \mid \mathcal{O} \supseteq S \text{ ist Topologie auf } X \}.$$

2.26 Lemma (Erzeugte Topologie) Für alle Mengensysteme $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ gilt:

1. $\tau(S)$ ist eine Topologie auf X .
2. $S \subseteq \tau(S)$.
3. Ist $\mathcal{O} \supseteq S$ eine Topologie auf X , dann ist $\mathcal{O}$ feiner als $\tau(S)$.

Beweis: Die Menge T von Topologien ist nicht leer, denn $\mathcal{P}(X) \in T$.

1. Ist I eine Indexmenge und sind $U_i \in \tau(S)$ ($i \in I$), dann gilt für alle $\mathcal{O} \in T$: $U_i \in \mathcal{O}$ ($i \in I$). Daher erfüllt $\tau(S)$ die Axiome einer Topologie:

- $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau(S)$. Denn nach Axiom (O1) ist auch $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}$ ($\mathcal{O} \in T$).
- $\bigcap_{i \in I} U_i \in \tau(S)$, falls I endlich ist. Denn nach Axiom (O2) ist auch

$$\bigcap_{i \in I} U_i \in \mathcal{O} \quad (\mathcal{O} \in T).$$

2. Ist $U \in S$, dann ist auch $U \in \tau(S)$, denn für alle $\mathcal{O} \in T$ gilt: $U \in \mathcal{O}$.

3. Ist $\mathcal{O} \supseteq S$ eine Topologie auf X , dann gilt: $\mathcal{O} \in T$, also $\mathcal{O} \supseteq \tau(S)$. $\square$

¹⁹Im Fall eines metrischen Raums (X, d) setzt man z.B. $S := \{U_\varepsilon(x) \mid x \in X, \varepsilon > 0\}$.

Wir drehen jetzt die Sichtweise um. Statt ausgehend von einer Teilmenge $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ die von S erzeugte Topologie $\tau(S)$ zu suchen, starten wir mit einem topologischen Raum $(X, \mathcal{O})$ und suchen Teilmengen $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit $\tau(S) = \mathcal{O}$. Natürlich gilt das für $S := \mathcal{O}$, wir suchen aber nach möglichst kleinen Teilmengen $S \subseteq \mathcal{P}(X)$, denn wir wollen $\mathcal{O}$ möglichst einfach beschreiben.

2.27 Definition Für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt

- $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine **Subbasis** von $\mathcal{O}$ (oder von $(X, \mathcal{O})$), wenn $\tau(S) = \mathcal{O}$,
- $B \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine **Basis** von $\mathcal{O}$ (oder von $(X, \mathcal{O})$), wenn $B \subseteq \mathcal{O}$ und alle $U \in \mathcal{O}$ sich in der Form $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ mit $U_i \in B$ darstellen lassen.

2.28 Beispiele (Basen und Subbasen einer Topologie)

1. $B := \{X\}$ ist Basis der indiskreten Topologie auf X .
2. $B := \{\{x\} \mid x \in X\}$ ist Basis der diskreten Topologie auf X .
3. $B_1 := \{(a, b) \mid a < b \in \mathbb{R}\}$ ist die Menge der beschränkten offenen Intervalle²⁰ und erzeugt damit die Standardtopologie auf $\mathbb{R}$ (die *Standardtopologie* auf $\mathbb{R}^n$ ist die durch den Norm-Abstand bezüglich einer beliebigen Norm erzeugte Topologie).
4. $B_2 := \{(a, b) \mid a < b \in \mathbb{Q}\} \subseteq B_1$ ist ebenfalls Basis dieser Topologie auf $\mathbb{R}$.
5. $S := \{(a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, b) \mid b \in \mathbb{R}\}$ ist keine Basis, wohl aber eine Subbasis der Standardtopologie von $\mathbb{R}$, denn $(a, b) = (-\infty, b) \cap (a, +\infty)$. $\diamond$

2.29 Lemma (Subbasen erzeugen Basen) Sei $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Subbasis des topologischen Raums $(X, \mathcal{O})$. Dann ist die Menge

$$\mathcal{B}(S) := \left\{ \bigcap_{i=1}^n U_i \mid n \in \mathbb{N}_0, U_i \in S \right\} \quad (2.3)$$

ihrer endlichen Schnitte eine Basis von $\mathcal{O}$.

Beweis: Nach Voraussetzung ist $\tau(S) = \mathcal{O}$, also $B := \mathcal{B}(S) \subseteq \mathcal{O}$. Da beliebige Vereinigungen in $\mathcal{O}$ offener Mengen in $\mathcal{O}$ offen sind, gilt

$$\mathcal{U}(B) := \left\{ \bigcup_{i \in I} V_i \mid V_i \in B \right\} \subseteq \mathcal{O}. \quad (2.4)$$

Zu zeigen ist, dass gilt: $\mathcal{U}(B) = \mathcal{O}$. Dazu reicht es zu beweisen, dass $\mathcal{U}(B)$ eine Topologie ist, denn wegen $S \subseteq B \subseteq \mathcal{O} = \tau(S)$ ist auch $\tau(B) = \mathcal{O}$.

²⁰genau: der nicht leeren. Die leere Menge braucht nicht in einer Basis enthalten zu sein.

- Axiom (O1) ist für $\mathcal{U}(B)$ offensichtlich erfüllt.
- Zur Überprüfung von Axiom (O2) seien $W_1, \dots, W_n \in \mathcal{U}(B)$.
Wegen des Distributivgesetzes der Mengenlehre ist auch

$$W_1 \cap \dots \cap W_n = \left(\bigcup_{i_1 \in I_1} V_{i_1} \right) \cap \dots \cap \left(\bigcup_{i_n \in I_n} V_{i_n} \right) = \bigcup_{i_1 \in I_1, \dots, i_n \in I_n} V_{i_1} \cap \dots \cap V_{i_n}$$

Vereinigung endlicher Schnitte von Mengen aus S , d.h. Vereinigung von Mengen aus B . Also ist $W_1 \cap \dots \cap W_n \in \mathcal{U}(B)$. $\square$

2.30 Bemerkung (Subbasen und Stetigkeit) Subbasen sind auch nützlich, um die Stetigkeit einer Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen den topologischen Räumen $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ zu überprüfen. Denn ist S_Y eine Subbasis von $\mathcal{O}_Y$, dann ist f schon dann stetig, wenn die Urbilder der Elemente von $S_Y \subseteq \mathcal{O}_Y$ offen sind:

- Wegen $f^{-1}(V_1 \cap \dots \cap V_n) = f^{-1}(V_1) \cap \dots \cap f^{-1}(V_n)$ und (O2) sind dann auch die Urbilder der Basiselemente $V \in B_Y := \mathcal{B}(S_Y)$ offen.
- Wegen $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} V_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(V_i)$ und (O1) sind dann auch die Urbilder aller offenen Mengen $V \in \mathcal{O}_Y = \mathcal{U}(B_Y)$ offen. $\diamond$

Betrachten wir in einem topologischen Raum $(X, \mathcal{O})$ das Mengensystem

$$\mathcal{A} := \{X \setminus O \mid O \in \mathcal{O}\}$$

der abgeschlossenen Mengen, dann erfüllt $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ nach den **De Morganschen Gesetzen** die Axiome

- (A1) Für jede Indexmenge I und $A_i \in \mathcal{A}$ ($i \in I$) ist auch $\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$.
- (A2) Für jede endliche Indexmenge I und $A_i \in \mathcal{A}$ ($i \in I$) ist auch $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$.

Wegen der Dualität der Begriffe 'offen' und 'abgeschlossen' ist für *jedes* Mengensystem $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, das (A1) und (A2) erfüllt, $\mathcal{O} := \{X \setminus A \mid A \in \mathcal{A}\}$ eine Topologie auf X .

2.31 Definition Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $M \subseteq X$.

- Das **Innere**²¹ von M ist die größte offene Menge $\text{int}(M) \equiv \overset{\circ}{M}$, die in M enthalten ist.
- Der **Abschluss** von M ist die kleinste abgeschlossene Menge $\text{cl}(M) \equiv \overline{M}$, die M enthält.

²¹int für *interior*, cl für *closure* und bd für *boundary*.

- Der **Rand** von M ist die (abgeschlossene) Menge $\text{bd}(M) \equiv \partial M := \overline{M} \setminus \overset{\circ}{M}$.
- M heißt **dicht** in X , wenn $\text{cl}(M) = X$.
- M heißt **nirgends dicht**²² in X , wenn $\text{int}(\text{cl}(M)) = \emptyset$.

Aus den Axiomen (O1) und (A1) folgt, dass Definition 2.31 sinnvoll ist, denn

$$\text{int}(M) = \bigcup \{O \in \mathcal{O} \mid O \subseteq M\} \quad \text{und} \quad \text{cl}(M) = \bigcap \{A \in \mathcal{A} \mid A \supseteq M\}.$$

Offensichtlich gilt $\text{cl}(M) = X \setminus \text{int}(X \setminus M)$, Bildung des Abschlusses und des Inneren sind also duale Operationen.

Während $\text{int} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ und $\text{cl} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ idempotent sind, d.h.

$$\text{int} \circ \text{int} = \text{int} \quad \text{und} \quad \text{cl} \circ \text{cl} = \text{cl}$$

gilt, ist dies für den Rand $\text{bd} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ im allgemeinen nicht der Fall.

2.32 Lemma (Rand) Für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{O})$ und $M \subseteq X$ gilt

$$\text{bd}(X \setminus M) = \text{bd}(M) \quad \text{und} \quad \text{bd} \circ \text{bd}(M) \subseteq \text{bd}(M). \quad (2.5)$$

Für abgeschlossene M ist $\text{bd}(M) \subseteq M$. Ist M offen, dann ist $\text{bd}(M) \subseteq X \setminus M$.

Beweis: Die erste Aussage von (2.5) folgt aus der Dualität von cl und int . Nach Definition des Rands ist für alle $N \subseteq X$ der Rand von N abgeschlossen, und

$$\text{cl}(N) = \text{int}(N) \dot{\cup} \text{bd}(N). \quad (2.6)$$

Angewandt auf $N := \text{bd}(M)$ ergibt das

$$\text{bd}(M) = \text{cl}(\text{bd}(M)) = \text{int}(\text{bd}(M)) \dot{\cup} \text{bd}(\text{bd}(M)), \quad (2.7)$$

was die Inklusion in (2.5) beweist. Die weiteren Aussagen folgen aus (2.6). $\square$

Die Inklusion $\text{bd} \circ \text{bd}(M) \subseteq \text{bd}(M)$ in (2.5) ist im Allgemeinen strikt:

2.33 Beispiel Für $\mathbb{Q} \subseteq X := \mathbb{R}$ (mit Standardtopologie) ist $\text{cl}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$ (also $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$) und $\text{int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$, also $\text{bd}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$, woraus $\text{bd} \circ \text{bd}(\mathbb{Q}) = \emptyset$ folgt. $\diamond$

Immerhin gibt es viele Mengen, auf denen der Randoperator idempotent wirkt:

2.34 Lemma (Rand des Rands) Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum.

²²Ein Beispiel ist $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$, denn $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1)$ ist offen, also $\text{cl}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, und $\mathbb{Z}$ enthält kein offenes, nicht leeres Intervall.

1. Falls $M \subseteq X$ offen oder abgeschlossen ist, gilt $\text{bd} \circ \text{bd}(M) = \text{bd}(M)$.
2. Es gilt $\text{bd} \circ \text{bd} \circ \text{bd} = \text{bd} \circ \text{bd}$.

Beweis:

1. Nach (2.7) ist $\text{bd} \circ \text{bd}(M) = \text{bd}(M)$ äquivalent zu $\text{int} \circ \text{bd}(M) = \emptyset$.
Ist M offen bzw. abgeschlossen, ist $\text{bd}(M) \subseteq X \setminus M$ bzw. $\text{bd}(M) \subseteq M$.
Falls M offen ist, ist $A := X \setminus \text{int} \circ \text{bd}(M)$ abgeschlossen und enthält M .
Also gilt auch $\text{int} \circ \text{bd}(M) \subseteq \text{bd}(M) \subseteq \text{cl}(M) \subseteq A$. Damit muss $\text{int} \circ \text{bd}(M) = \emptyset$ sein. Aus (2.7) folgt letzteres auch für abgeschlossene M .
2. Für alle $N \subseteq X$ ist $M := \text{bd}(N)$ abgeschlossen. Die zweite Aussage folgt also aus der ersten. $\square$

Ein weiterer Begriff, mit dem Argumente in der Topologie sehr flexibel geführt werden können, ist der der Umgebung.

2.35 Definition Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum.

- $U \subseteq X$ heißt **Umgebung** von $x \in X$, wenn ein $V \in \mathcal{O}$ mit $x \in V \subseteq U$ existiert.
- $U \subseteq X$ heißt **Umgebung** von $M \subseteq X$, wenn U für alle $x \in M$ Umgebung von x ist.

Umgebungen brauchen also nicht offen zu sein. Sind sie es aber, dann sind sie Umgebung jedes ihrer Elemente und daher von sich selbst (man setze $V := U$).

2.36 Lemma Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $M \subseteq X$. Dann liegt $x \in X$ genau dann in $\text{cl}(M)$, wenn für alle Umgebungen U von x gilt: $U \cap M \neq \emptyset$.

Beweis: Wäre $x \in \text{cl}(M)$ und $U \in \mathcal{O}$ Umgebung von x mit $U \cap M = \emptyset$, dann wäre $A := X \setminus U$ abgeschlossen und enthielte M . Widerspruch zu $x \in \text{cl}(M)$!
Ist umgekehrt $x \notin A := \text{cl}(M)$, dann ist A abgeschlossen, $M \subseteq A$ und $x \notin A$. Also ist $U := X \setminus A$ offene Umgebung von x mit $U \cap M = \emptyset$. $\square$

2.4 Metriken und Topologien

Wir gehen jetzt der Frage nach, wodurch sich die metrischen Topologien von allgemeinen Topologien unterscheiden.

2.37 Definition Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt **hausdorffsch** oder T_2 -Raum, falls je zwei voneinander verschiedene Punkte $x_1, x_2 \in X$ Umgebungen U_1, U_2 besitzen, die disjunkt sind ($U_1 \cap U_2 = \emptyset$).

Wir haben schon in Bemerkung 1.6 festgestellt, dass die metrischen Topologien hausdorffsch sind, topologische Räume aber i. Allg. keine T_2 -Räume sind. Aber es gibt weitere Unterschiede zwischen metrischen und allgemeinen Topologien.

2.38 Definition

Eine Familie $(U_i)_{i \in I}$ von Umgebungen U_i von $x \in X$ heißt **Umgebungsbasis** von x , wenn für jede Umgebung V von x eine Umgebung $U_i \subseteq V$ existiert.

Alle Punkte x eines topologischen Raums besitzen eine Umgebungsbasis (man braucht ja nur die Familie *aller* Umgebungen V von x zu nehmen).

2.39 Definition Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ erfüllt das 1. **Abzählbarkeitsaxiom**, wenn alle $x \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis besitzen.

Dieses ist vor allem deshalb wichtig, weil dann die aus der *Analysis I* bekannten Begriffe der Stetigkeit und der Folgenstetigkeit gleichbedeutend sind (Satz 2.46).

2.40 Lemma Die metrischen Räume erfüllen das 1. Abzählbarkeitsaxiom.

Beweis: Für den metrischen Raum (X, d) und $x \in X$ bildet die abzählbare Familie $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der offenen Kugeln $V_n := U_{1/n}(x)$ eine Umgebungsbasis.

Denn $x \in V_n$, $V_n \in \mathcal{O}$ ($n \in \mathbb{N}$), und jede Umgebung V von x enthält eine offene Umgebung U von x . U ist eine Vereinigung von Kugeln, und eine der Kugeln $U_\delta(y)$ enthält x . Mit $\varepsilon := \delta - d(x, y) > 0$ enthält U wegen der Dreiecksungleichung für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1/\varepsilon$ daher die um x zentrierte Kugel V_n vom Radius $1/n$. $\square$

Nicht alle topologischen Räume besitzen abzählbare Umgebungsbasen:

2.41 Beispiel (Kofinite Topologie)

Auf jeder Menge X kann man diese Topologie wie folgt einführen:

$$\mathcal{O} := \{O \subseteq X \mid O = \emptyset \text{ oder } X \setminus O \text{ ist eine endliche Menge}\}.$$

Überprüfen Sie, dass die Axiome (O1) und (O2) einer Topologie hier erfüllt sind. Ist X selbst eine endliche Menge, dann ist $\mathcal{O}$ gleich der diskreten Topologie. Sonst ist $\mathcal{O}$ keine hausdorffsche Topologie.

Falls X überabzählbar ist, erfüllt $(X, \mathcal{O})$ auch nicht das 1. Abzählbarkeitsaxiom. Denn wäre $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare Umgebungsbasis von $x \in X$, dann müsste zunächst jedes V_n eine offene Umgebung U_n von x enthalten. Da $x \in U_n$, ist $U_n \neq \emptyset$. Also ist $X \setminus U_n$ eine endliche Menge, und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X \setminus U_n)$ abzählbar. Es gibt also in $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = X \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X \setminus U_n)$ ein von x verschiedenes Element y , und kein U_n ist in der Umgebung $X \setminus \{y\}$ von x enthalten. $\diamond$

Es gibt auch T_2 -Räume, die nicht das 1. Abzählbarkeitsaxiom erfüllen, etwa der $\mathbb{R}$ -Vektorraum $\text{Abb}([0, 1], \mathbb{R})$ mit der Topologie der punktweisen Konvergenz (siehe Beispiel 2.47).

2.42 Definition Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum.

- Eine Folge $a : \mathbb{N} \rightarrow X$ hat einen **Häufungspunkt** $x \in X$, wenn es für alle Umgebungen U von x unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $a_n \in U$.
- Eine Folge $a : \mathbb{N} \rightarrow X$ **konvergiert gegen** $x \in X$, wenn es für alle Umgebungen U von x ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $a_n \in U$ ($n \geq N$).
- Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ in einen topologischen Raum $(Y, \mathcal{O}_Y)$ heißt **folgenstetig bei** $x \in X$, wenn für alle gegen x konvergierenden Folgen $a : \mathbb{N} \rightarrow X$ die Bildfolge $f \circ a : \mathbb{N} \rightarrow Y$ gegen $f(x)$ konvergiert.
- f heißt **folgenstetig**, wenn f für alle $x \in X$ bei x folgenstetig ist.
- f heißt **stetig bei** $x \in X$, wenn es für alle Umgebungen V von $f(x)$ eine Umgebung U von x gibt mit $f(U) \subseteq V$.

2.43 Bemerkung (Konvergenz von Folgen) Auf den ersten Blick ist der Begriff der Konvergenz von Folgen eine Anomalie in der Topologie, die ja die Theorie der topologischen Räume und der stetigen Abbildungen ist. Aber Konvergenz einer Folge $a : \mathbb{N} \rightarrow X$ gegen $x \in X$ ist auch eine Form von Stetigkeit.

Wir ergänzen dafür die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen um den Punkt ∞ , setzen also $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Diese Menge wird total geordnet, wenn wir die Ordnung von $\mathbb{N}$ um die Regel $\infty > n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ergänzen.

Wir versehen $\mathbb{N}^*$ mit der Topologie, die von der Mengenfamilie

$$S := \mathcal{P}(\mathbb{N}) \cup \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \text{mit} \quad U_n := \{m \in \mathbb{N}^* \mid m \geq n\}$$

erzeugt wird.²³ Restringsiert auf $\mathbb{N}$ ist das die diskrete Topologie $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, und $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Umgebungsbasis von ∞ . Daher ist die Abbildung

$$a^* : \mathbb{N}^* \rightarrow X, \quad a_n^* := \begin{cases} a_n, & n \in \mathbb{N} \\ x, & n = \infty \end{cases}$$

genau dann stetig, wenn die Folge $a : \mathbb{N} \rightarrow X$ gegen x konvergiert. $\diamond$

2.44 Lemma

$f : X \rightarrow Y$ ist genau dann stetig, wenn f für alle $x \in X$ bei x stetig ist.

²³Das ist die durch die Abbildung $\mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $n \mapsto 1/n$ und $\infty \mapsto 0$ induzierte Topologie, siehe Definition 3.2. Vergleiche auch mit Def. 5.28 der Alexandrov-Kompaktifizierung.

Beweis: • Ist f stetig, dann ist f für alle $x \in X$ bei x stetig, denn jede Umgebung V von $f(x)$ enthält eine offene Umgebung $\tilde{V}$ von $f(x)$, und nach Voraussetzung ist $U := f^{-1}(\tilde{V})$ offen mit $x \in U$.

• Ist f für alle $x \in X$ bei x stetig und $V \subseteq Y$ offen, dann ist auch $U := f^{-1}(V)$ offen. Denn für alle $x \in U$ gibt es eine (offene) Umgebung U_x von x mit $f(U_x) \subseteq V$. Also ist $U_x \subseteq U$ und $U = \bigcup_{x \in U} U_x$, also ist U offen. $\square$

2.45 Aufgabe (Konvergenz und T_2 -Eigenschaft)

Zeigen Sie: In T_2 -Räumen konvergieren Folgen gegen höchstens einen Punkt.

Geben Sie einen nicht hausdorffschen Raum $(X, \mathcal{O})$ und eine Folge $a : \mathbb{N} \rightarrow X$ an, die gegen mindestens zwei Punkte des Raums konvergiert.²⁴ $\diamond$

2.46 Satz (Stetigkeit und Folgenstetigkeit)

1. Ist $f : X \rightarrow Y$ stetig, dann ist f folgenstetig.
2. Erfüllt $(X, \mathcal{O}_X)$ das erste Abzählbarkeitsaxiom, dann folgt umgekehrt aus der Folgenstetigkeit die Stetigkeit von f .

Beweis:

1. Wir betrachten eine beliebige gegen $x \in X$ konvergierende Folge $a : \mathbb{N} \rightarrow X$ und eine offene Umgebung U von $y := f(x) \in Y$. Wegen der Stetigkeit von f ist $V := f^{-1}(U) \subseteq X$ offen, und $x \in V$. Also gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \in V$ für alle $n \geq N$. Für diese n ist auch $f(a_n) \in U$.
2. Für $x \in X$ existiert nach Voraussetzung eine abzählbare Umgebungsbasis $(\tilde{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Setzt man $U_1 := \tilde{U}_1$ und $U_{n+1} := U_n \cap \tilde{U}_{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$), dann ist $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ebenfalls eine abzählbare Umgebungsbasis von x , und zusätzlich gilt: $U_{n+1} \subseteq U_n$. Ist nun f unstetig bei x , dann existiert nach Lemma 2.44 eine offene Umgebung $V \subseteq Y$ von y , für die $U := f^{-1}(V)$ keine der U_n enthält. Wir wählen eine Folge $a : \mathbb{N} \rightarrow X$ mit $a_n \in U_n \setminus U$ ($n \in \mathbb{N}$). Damit konvergiert a gegen x , aber $f \circ a$ konvergiert nicht gegen y , denn für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $f(a_n) \notin V$. Also ist f bei x nicht folgenstetig. $\square$

2.47 Beispiel (Punktweise Konvergenz und Integral)

Wir betrachten die Abbildungsmengen $\text{Abb}(X, Y)$ von einer Menge X in einen Hausdorff-Raum $(Y, \mathcal{O}_Y)$. Eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n : X \rightarrow Y$ konvergiert punktweise gegen $f : X \rightarrow Y$, wenn für alle $x \in X$ gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$.

Als Menge ist $\text{Abb}(X, Y)$ das cartesische Produkt $\prod_{x \in X} Y$. Mit der in Kapitel 3.1.2 eingeführten Produkttopologie wird $\text{Abb}(X, Y)$ ein Hausdorff-Raum.

²⁴Hinweis: Nicht in *jedem* nicht hausdorffschen Raum gibt es eine Folge, die gegen mindestens zwei Punkte konvergiert. Siehe Beispiel 6.7 in QUERENBURG [Qu].

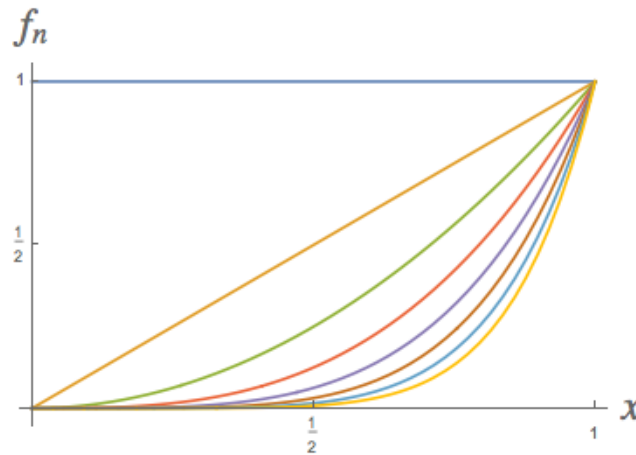


Abbildung 2.2: Punktweise aber nicht gleichmäßige Konvergenz für die Folge der $f_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}_0$) gegen $\mathbb{1}_{\{1\}}$

Hier wählen wir speziell die Intervalle $X := [0, 1]$ und $Y := [0, 1]$, Letzteres versehen mit der metrischen Standardtopologie. F bezeichne den Teilraum von $\text{Abb}([0, 1], [0, 1])$, der aus den **Lebesgue-integrierbaren** Funktionen besteht.²⁵ Es stellt sich nun heraus, dass das bestimmte Integral, also die Abbildung

$$I : F \rightarrow [0, 1], \quad I(f) := \int_{[0,1]} f(x) dx$$

folgenstetig, aber unstetig ist (siehe Abbildung 2.2):

1. **I ist folgenstetig:** Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine punktweise gegen $f \in F$ konvergente Folge. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es dann ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N(\varepsilon)$ die Menge

$$M_n := \{x \in [0, 1] \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$$

das Lebesgue-Maß $\lambda(M_n) < \varepsilon$ besitzt.

Denn sonst gäbe es ein $\varepsilon > 0$ und eine Teilfolge $(n(k))_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\lambda(M_{n(k)}) \geq \varepsilon$, oder – nach Übergang zur Teilfolge – $\lambda(M_n) \geq \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Setze

$$M^* := \limsup_{n \rightarrow \infty} M_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} M_m.$$

M^* ist die Menge der Punkte $x \in [0, 1]$, für die unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ existieren mit $|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$, bei denen also $f_n(x)$ insbesondere nicht gegen $f(x)$

²⁵Siehe Example 1.2.11 im Skript *An Introduction to Topology* von Karl-Hermann Neeb.

konvergiert. Aber $\lambda(M^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\bigcup_{m=n}^{\infty} M_m) \geq \varepsilon$, was der punktweisen Konvergenz widerspricht.

Da also für $n \geq N(\varepsilon)$ wegen $|f_n - f| \leq 1$

$$|I(f_n) - I(f)| \leq \int_{[0,1]} |f_n - f| dx = \int_{M_n} |f_n - f| dx + \int_{[0,1] \setminus M_n} |f_n - f| dx \leq 2\varepsilon,$$

ist das Integral $I : F \rightarrow [0, 1]$ folgenstetig.

2. **I ist unstetig:** I ist aber unstetig, wie sich nach Diskussion der Produkttopologie zeigen wird, denn in jeder Umgebung U der Nullfunktion $f : [0, 1] \rightarrow \{0\}$ gibt es Funktionen $g \in U$ mit $g(x) = 1$ bis auf endlich viele $x \in [0, 1]$.

Das Beispiel zeigt, dass die Topologie der punktweisen Konvergenz ungeeignet für die Integrationstheorie ist. Die tatsächlich in der Integrationstheorie benutzten Funktionenräume erfüllen das 1. Abzählbarkeitsaxiom. Ein Beispiel ist etwa der Raum $C([0, 1], \mathbb{R})$ der stetigen Funktionen $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, mit der Supremumsnorm²⁶

$$\|f\| := \sup\{|f(x)| \mid x \in [0, 1]\}.$$

Die entsprechende metrische Topologie ist die der **gleichmäßigen Konvergenz**. $\diamond$.

Bei erster Betrachtung scheinen nicht- T_2 -Räume wie die unendlichen Mengen mit kofiniter Topologie in Beispiel 2.41 von geringem Nutzen für die Anwendungen der Topologie zu sein. Das stimmt für viele Bereiche der Mathematik, aber nicht durchgehend:

2.48 Beispiel (Zariski-Topologie) Eine *affine algebraische Menge* A im (affin aufgefassten) Vektorraum²⁷ $\mathbb{C}^n$ ist die gemeinsame Nullstellenmenge von komplexen Polynomen $f_1, \dots, f_k \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ in n Unbestimmten, also mit $x := (x_1, \dots, x_n)$

$$A = \{x \in \mathbb{C}^n \mid f_1(x) = \dots = f_k(x) = 0\}. \quad (2.8)$$

Eine *affine Varietät* ist eine solche Menge $A \neq \emptyset$, die *irreduzibel*, also nicht die Vereinigung zweier echter Teilmengen dieser Form ist.²⁸

So ist $A := \{x \in \mathbb{C}^2 \mid x_1 x_2 = 0\}$ die Vereinigung der affinen Varietäten

$$A_1 := \{x \in \mathbb{C}^2 \mid x_1 = 0\} \quad \text{und} \quad A_2 := \{x \in \mathbb{C}^2 \mid x_2 = 0\}. \quad (2.9)$$

²⁶Da die stetige Funktion $x \mapsto |f(x)|$ auf dem kompakten Intervall $[0, 1]$ ihr Maximum annimmt, ist das eine Norm. Siehe auch Korollar 5.15.

²⁷Eine analoge Definition gibt es für den Vektorraum K^n über einem Körper K .

²⁸Oft wird allerdings 'affine Varietät' so definiert wie hier 'affine algebraische Menge'.

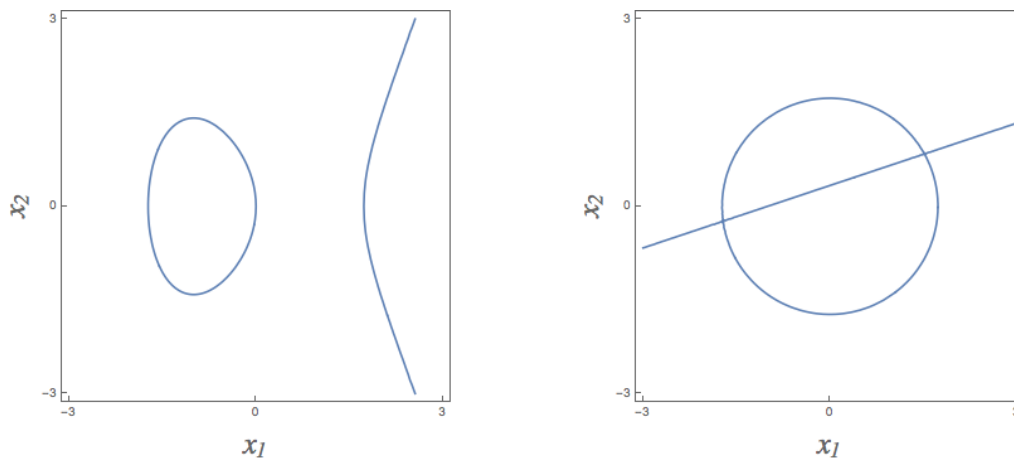


Abbildung 2.3: Links: algebraische Kurve $x_2^2 - x_1^3 + 3x_1 = 0$ in $\mathbb{R}^2$. Rechts: reduzible algebraische Menge $(x_1^2 + x_2^2 - 3)(x_1 - 3x_2 + 1) = 0$. Die dargestellten Mengen sind in der Zariski-Topologie von $\mathbb{R}^2$ abgeschlossen.

Die *Zariski-Topologie* auf $\mathbb{C}^n$ hat als abgeschlossene Mengen gerade $\emptyset$ und die affinen algebraischen Mengen. Wir stellen fest, dass für $n = 1$ die Zariski-Topologie auf $\mathbb{C}$ gerade die kofinite Topologie aus Beispiel 2.41 ist, denn wenn ein Polynom $p \in \mathbb{C}[x]$ unendlich viele Nullstellen hat, ist es das Nullpolynom.

Tatsächlich ist die Zariski-Topologie eine Topologie, denn

- Zwei affine algebraische Mengen kann man miteinander vereinigen, indem man in ihren Darstellungen (2.8) die Polynome miteinander multipliziert, wie in (2.9). Die Vereinigung endlich vieler affiner algebraischer Mengen ist damit wieder eine affine algebraische Menge.
- Beliebige Schnitte affiner algebraischer Mengen sind wieder algebraisch, denn für $A \subseteq \mathbb{C}^n$ ist $I(A) := \{f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \mid \forall a \in A : f(a) = 0\}$ ein Ideal, und nach dem *Hilbertschen Basissatz* ist jedes Ideal in $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ endlich erzeugt. Ist A affin algebraisch, dann kann man A aus $I(A)$ zurückgewinnen.

Die Zariski-Topologie ist nicht hausdorffsch, wie wir schon im Fall $n = 1$ festgestellt haben. Sie ist optimal an die Fragestellungen der *algebraischen Geometrie* angepasst, die solche Varietäten untersucht. Wenn wir uns Varietäten vorstellen wollen, nehmen wir aber doch wieder die (feinere) Standard-Topologie des $\mathbb{C}^n$ in Anspruch, siehe Abbildung 2.3. $\diamond$

3 Universelle Konstruktionen topologischer Räume

Wie im Kapitel 2.1 werden wir jetzt aus topologischen Räumen und stetigen Abbildungen neue topologische Räume (und entsprechende stetige Abbildungen) konstruieren. *Universell* heißen diese Konstruktionen, weil sie (bis auf Isomorphie) eindeutig durch die existierenden Daten festgelegt sind.

3.1 Die Initialtopologie

3.1.1 Teilraumtopologie und Induzierte Topologie

Wir beginnen mit der einfachsten Fragestellung, nämlich wie auf einer Teilmenge eines topologischen Raums $(X, \mathcal{O})$ eine Topologie definiert werden kann.

3.1 Definition Die **Teilraumtopologie**²⁹ auf $M \subseteq X$ ist das Mengensystem

$$\mathcal{O}_M := \{U \subseteq M \mid \exists V \in \mathcal{O} : U = V \cap M\} = \{V \cap M \mid V \in \mathcal{O}\}.$$

Man stellt durch Überprüfung der Axiome (O1) und (O2) fest, dass die Teilraumtopologie tatsächlich eine Topologie auf M ist.

Es ist auch offensichtlich, dass in $M \subseteq X$ (also bezüglich $\mathcal{O}_M$) offene Mengen $U \subseteq M$ nur dann immer auch als Teilmengen $U \subseteq X$ (also bezüglich $\mathcal{O}$) offen sind, wenn $M \in \mathcal{O}$ ist. Denn insbesondere ist ja M selbst Element von $\mathcal{O}_M$.

An dieser Stelle erinnern wir uns daran, dass wir eine Teilmenge $M \subseteq X$ auch als Bild der Injektion $j : M \rightarrow X$, $x \mapsto x$ dargestellt haben. Wir betrachten statt der injektiven Abbildung j jetzt allgemeine Abbildungen.

3.2 Definition Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, M eine Menge und $f : M \rightarrow X$. Die von f induzierte **Initialtopologie** auf M ist

$$\mathcal{O}_M := \{U \subseteq M \mid \exists V \in \mathcal{O} : U = f^{-1}(V)\}.$$

3.3 Lemma Die Initialtopologie $\mathcal{O}_M$ ist eine Topologie auf M , und als Abbildung von $(M, \mathcal{O}_M)$ in $(X, \mathcal{O})$ ist f stetig.

Beweis: Sind $U_i \in \mathcal{O}_M$ ($i \in I$), dann existieren $V_i \in \mathcal{O}$ ($i \in I$) mit $U_i = f^{-1}(V_i)$.

(O1) Es gilt $V := \bigcup_{i \in I} V_i \in \mathcal{O}$ und $U := \bigcup_{i \in I} U_i$ ist das Urbild von V unter f . Also ist $U \in \mathcal{O}_M$.

(O2) Ist die Indexmenge I endlich, dann ist $V := \bigcap_{i \in I} V_i \in \mathcal{O}$, und $U := \bigcap_{i \in I} U_i$ ist das Urbild von V unter f . Also ist $U \in \mathcal{O}_M$.

²⁹auch **induzierte Topologie**, **Spurtopologie**, **Unterraumtopologie** oder **Relativtopologie** genannt

Die Stetigkeit von f folgt, weil nach Definition $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_M$, falls $V \in \mathcal{O}$. $\square$

3.4 Beispiele (Initialtopologie)

1. Die *Kreislinie* $S^1 := \{c \in \mathbb{C} \mid |c| = 1\}$ besitzt als Teilmenge von $\mathbb{C}$ die Teilraumtopologie $\mathcal{O}_{S^1}$, die auch von der Mengenfamilie der Kreissegmente $S_{a,b} := \{\exp(i\varphi) \mid \varphi \in (a,b)\} \subseteq S^1$ erzeugt wird. Denn die Menge der $S_{a,b}$ ist gleich der Menge der Schnitte $U_\varepsilon(z) \cap S^1$ mit offenen Kreisscheiben.
2. Die Abbildung $f : S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^2$ ist surjektiv (und stetig bezüglich der Teilraumtopologie $\mathcal{O}_{S^1}$). Aber die von f induzierte Initialtopologie auf S^1 ist echt gröber als die Teilraumtopologie. Denn für $U = f^{-1}(V)$ ist ³⁰ $-U = U$, während für die Kreissegmente im Allgemeinen nicht $-S_{a,b} = S_{a,b}$ gilt. $\diamond$

Offensichtlich ist die von f auf M induzierte Topologie die gröbste Topologie, bezüglich derer f stetig ist, denn alle $U \in \mathcal{O}_M$ müssen dann als Urbilder $f^{-1}(V)$ offener Mengen $V \subseteq X$ offen sein.

3.5 Definition

Eine Injektion $f : X \rightarrow Y$ heißt **Einbettung** des topologischen Raums $(X, \mathcal{O}_X)$ in den topologischen Raum $(Y, \mathcal{O}_Y)$, wenn $\mathcal{O}_X$ die von f induzierte Topologie ist.

Nichts hindert uns daran, damit die Initialtopologie in noch allgemeineren Situationen zu definieren:

3.6 Definition Es seien $(X_i, \mathcal{O}_i)$ ($i \in I$) topologische Räume, M eine Menge und $f_i : M \rightarrow X_i$ ($i \in I$). Die von der Familie $(f_i)_{i \in I}$ induzierte **Initialtopologie** auf M ist die gröbste Topologie, bezüglich derer die f_i stetig sind.

Wir werden in Kapitel 3.1.2 Beispiele der Initialtopologie betrachten, schauen aber zunächst nach ihren Eigenschaften.

Falls die Indexmenge I mehr als ein Element enthält, ist das $\mathcal{O}_M$ in Definition 3.2 verallgemeinernde Mengensystem

$$\mathcal{S}_M := \{U \subseteq M \mid \exists i \in I, \exists V_i \in \mathcal{O}_i : U = f_i^{-1}(V_i)\}$$

im Allgemeinen nicht die Initialtopologie auf M . Denn $\mathcal{S}_M$ enthält typischerweise nicht endliche Schnitte wie $f_i^{-1}(V_i) \cap f_j^{-1}(V_j)$ mit $i \neq j$. Immerhin gilt:

3.7 Lemma $\mathcal{S}_M$ ist eine Subbasis der Initialtopologie auf M .

³⁰Minkowski-Schreibweise, also $-U = \{-u \mid u \in U\}$.

Beweis: Mit dem Hüllenoperator τ aus Def. 2.25 ist $\tau(\mathcal{S}_M)$ eine Topologie auf M , bezüglich derer die f_j stetig sind. Denn die Urbilder $f_i^{-1}(V_i)$ der in X_i offenen Mengen V_i sind ja schon in $\mathcal{S}_M$ enthalten. Andererseits ist $\tau(\mathcal{S}_M)$ schon die grösste solche Topologie. Denn jede echt gröbere Topologie auf M würde mindestens ein Element von $\mathcal{S}_M$ nicht enthalten. $\square$

Die Initialtopologie besitzt die folgende sie charakterisierende Eigenschaft:

3.8 Lemma Die von den $f_i : M \rightarrow X_i$ induzierte Initialtopologie $\mathcal{O}_M$ ist die einzige Topologie $\mathcal{O}$ auf M , für die die folgende Bedingung gilt:
Jede Abbildung $g : T \rightarrow M$ von einem beliebigen topologischen Raum $(T, \mathcal{O}_T)$ in $(M, \mathcal{O})$ ist genau dann stetig, wenn die Abbildungen $f_i \circ g : T \rightarrow X_i$ stetig sind:

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{g} & M \\ & \searrow f_i \circ g & \downarrow f_i \\ & & X_i \end{array} \quad (i \in I). \quad (3.1)$$

Beweis:

1. $\mathcal{O}_M$ erfüllt die Bedingung:

- Da die f_i stetig sind, ist $f_i \circ g$ bezüglich $\mathcal{O}_M$ stetig, falls g stetig ist.³¹
- Seien die $f_i \circ g$ stetig (dafür braucht M noch keine Topologie zu besitzen). Wir wollen zeigen, dass dann g bezüglich $\mathcal{O}_M$ stetig ist. Es genügt nach Bemerkung 2.30 zu zeigen, dass die Urbilder $g^{-1}(U)$ der $U \in \mathcal{S}_M$ Elemente von $\mathcal{O}_T$ sind, denn $\mathcal{S}_M$ ist eine Subbasis von $\mathcal{O}_M$. Aber für $U \in \mathcal{S}_M$ gibt es ein $i \in I$ und ein $V_i \in \mathcal{O}_i$ mit $U = f_i^{-1}(V_i)$. Also ist $g^{-1}(U) = g^{-1}(f_i^{-1}(V_i)) = (f_i \circ g)^{-1}(V_i)$, und damit nach Voraussetzung offen.

2. Wenn $\mathcal{O}$ die Bedingung erfüllt, dann ist $\mathcal{O} = \mathcal{O}_M$:

$\mathcal{O}$ erfülle die Bedingung. Wir wählen $T := M$ und $g := \text{id}_M$.

- Für $\mathcal{O}_T := \mathcal{O}$ ist $g = \text{id}_M$ stetig. Daher müssen die $f_i = f_i \circ g$ stetig sein, also (nach Definition 3.6 der Initialtopologie) $\mathcal{O}$ feiner als $\mathcal{O}_M$.
- Für $\mathcal{O}_T := \mathcal{O}_M$ sind die Abbildungen $f_i \circ g = f_i : M \rightarrow X_i$ stetig. Daher muss auch $g = \text{id}_M$ stetig sein, also $\mathcal{O}$ gröber als $\mathcal{O}_M$. $\square$

3.9 Bemerkung Man kann Lemma 3.8 praktisch nutzen, wenn man wissen will, ob eine gegebene Abbildung $g : T \rightarrow M$ bezüglich der Initialtopologie stetig ist. Man klärt dann, ob die $f_i \circ g : T \rightarrow X_i$ stetig sind. Das ist oft einfacher. $\diamond$

3.1.2 Die Produkttopologie

Für jede (also auch jede unendliche) Indexmenge I und beliebige Mengen X_i ($i \in I$) ist das *cartesische Produkt* $\prod_{i \in I} X_i$ wieder eine Menge (also ein Objekt

³¹denn **Top** ist eine Kategorie...

in **Set**). Deren Elemente schreiben wir in der Form $(x_i)_{i \in I}$ mit $x_i \in X_i$, und wir benutzen die *Projektionen* auf die *Faktoren*

$$\text{pr}_j : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j \quad , \quad (x_i)_{i \in I} \mapsto x_j \quad (j \in I).$$

Analog zum Diagramm (2.1) für die Produktmenge $X \times Y$ können wir das cartesische Produkt $\prod_{i \in I} X_i$ mit dem Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{f} & \prod_{i \in I} X_i \\ & \searrow f_j & \downarrow \text{pr}_j \\ & & X_j \end{array} \quad (j \in I) \quad (3.2)$$

charakterisieren. Gesucht ist also eine Menge $\prod_{i \in I} X_i$ mit Abbildungen $\text{pr}_j : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j$, sodass für alle Mengen T mit Abbildungen $f_j : T \rightarrow X_j$ genau eine Abbildung $f : T \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ existiert, für die das Diagramm kommutiert.

Dass $\prod_{i \in I} X_i$ (bis auf eindeutige Isomorphie) *eindeutig* ist, ergibt sich aus (3.2). Die *Existenz* einer Bedingung 3.2 erfüllenden Menge $\prod_{i \in I} X_i$ folgte für endlich viele Faktoren aus **Axiom 5**. Für unendlich viele Faktoren können wir Bemerkung 3.11 benutzen. folgt aus der Existenz der Initialtopologie.

3.10 Definition Für topologische Räume $(X_i, \mathcal{O}_i)$ ($i \in I$) heißt die von der Familie $(\text{pr}_i)_{i \in I}$ induzierte Initialtopologie auf $\prod_{i \in I} X_i$ auch die **Produkttopologie**.

3.11 Bemerkungen (Cartesisches Produkt und Produkttopologie)

1. Man kann das cartesische Produkt $\prod_{i \in I} X_i$ auch als Abbildungsmenge auffassen. Sind alle *Faktoren* X_i die gleiche Menge X , dann ist $\prod_{i \in I} X \cong \text{Abb}(I, X)$, und man schreibt entsprechend auch X^I . Im allgemeinen Fall ist

$$\prod_{i \in I} X_i \cong \left\{ f \in \text{Abb}\left(I, \coprod_{i \in I} X_i\right) \mid \forall i \in I : f(i) \in X_i \right\}, \quad (3.3)$$

mit der (in Kapitel 3.2.2 beschriebenen) disjunkten Vereinigung $\coprod_{i \in I} X_i$ der X_i .

2. Für $I = \emptyset$ ist also $\prod_{i \in I} X_i = \{\emptyset\} \neq \emptyset$. Ebenso ergibt sich ³² aus (3.3), dass genau dann $\prod_{i \in I} X_i = \emptyset$, falls es ein $j \in I$ gibt mit $X_j = \emptyset$.

³²denn die Abbildung $s : \coprod_{i \in I} X_i \rightarrow I$, $s(X_i) = \{i\}$ ist surjektiv, wenn $X_i \neq \emptyset$ für alle $i \in I$ gilt. Nach dem **Auswahlaxiom** gibt es dann eine Rechtsinverse $f : I \rightarrow \coprod_{i \in I} X_i$ von s , also ein Element von $\prod_{i \in I} X_i$.

3. Für eine endliche Indexmenge $I \neq \emptyset$ kann man bequemlichkeitshalber $I = \{1, \dots, n\}$ annehmen. Statt $\prod_{i \in I} X_i$ schreibt man dann auch $X_1 \times \dots \times X_n$. Bei dem Produkt topologischer Räume $(X_i, \mathcal{O}_i)$ ist in diesem Fall

$$\{U \subseteq X_1 \times \dots \times X_n \mid \exists U_1 \in \mathcal{O}_1, \dots, U_n \in \mathcal{O}_n : U = \text{pr}_1^{-1}(U_1) \cap \dots \cap \text{pr}_n^{-1}(U_n)\}$$

eine Basis der Produkttopologie. Es reicht auch aus, statt beliebiger offener Mengen $U_i \subseteq X_i$ nur die Elemente einer Basis von $\mathcal{O}_i$ zu benutzen. $\diamond$

3.12 Beispiele (Produkttopologie)

- Wir nennen die von der euklidischen Metrik auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^k$ erzeugte Standardtopologie auch die *euklidische Topologie*. Das cartesische Produkt $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ ist isomorph zu $\mathbb{R}^{m+n}$. Die Produkttopologie auf $\mathbb{R}^{m+n}$ bezüglich der euklidischen Topologien auf $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ ist wieder die euklidische Topologie. Analoges gilt für die Vektorräume $\mathbb{C}^k$ mit Norm $\|z\| := \sqrt{\sum_{i=1}^k |z_i|^2}$, Metrik $d(x, y) := \|x - y\|$ und resultierender Topologie.
- Die Zariski-Topologie auf $\mathbb{C}^{m+n} \cong \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n$ ist für $m, n > 0$ *echt feiner* als die Produkttopologie der Zariski-Topologien auf $\mathbb{C}^m$ und $\mathbb{C}^n$. $\diamond$

Da nach Lemma 3.7 $S := \{U \subseteq \prod_{i \in I} X_i \mid \exists j \in I, \exists V_j \in \mathcal{O}_j : U = \text{pr}_j^{-1}(V_j)\}$ eine Subbasis der Produkttopologie ist, haben die Elemente U der Basis $\mathcal{B}(S)$ die Form

$$U = \text{pr}_{j_1}^{-1}(V_{j_1}) \cap \dots \cap \text{pr}_{j_n}^{-1}(V_{j_n}), \quad (3.4)$$

d.h., es werden auch für eine unendliche Indexmenge I nur endlich viele Faktoren restringiert. Das hat zur Folge, dass cartesische Produkte unendlich vieler ³³ diskreter topologischer Räume nicht mehr diskret sind.

3.13 Beispiel (Irrfahrt und Cantor-Menge)

Für den zweielementigen, diskret topologisierten Raum $(X, \mathcal{O}) := (\{-1, 1\}, \mathcal{P}(X))$ ist

$$F := \prod_{i \in \mathbb{N}} X \cong \text{Abb}(\mathbb{N}, X)$$

der Raum der $\{-1, 1\}$ -Folgen. Die Abbildung

$$\Phi : F \rightarrow \text{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{Z}) \quad , \quad \Phi(a)_n := \sum_{k=1}^n a_k$$

ist stetig (zeigen Sie das!). Sie macht aus den $\{-1, 1\}$ -Folgen in F Folgen, die man als *Irrfahrten* auf $\mathbb{Z}$ interpretieren kann, siehe Abbildung 3.1. Daher haben Produkträume wie F zahlreiche Anwendungen in der *Wahrscheinlichkeitstheorie*.

³³aus mehr als einem Element bestehender

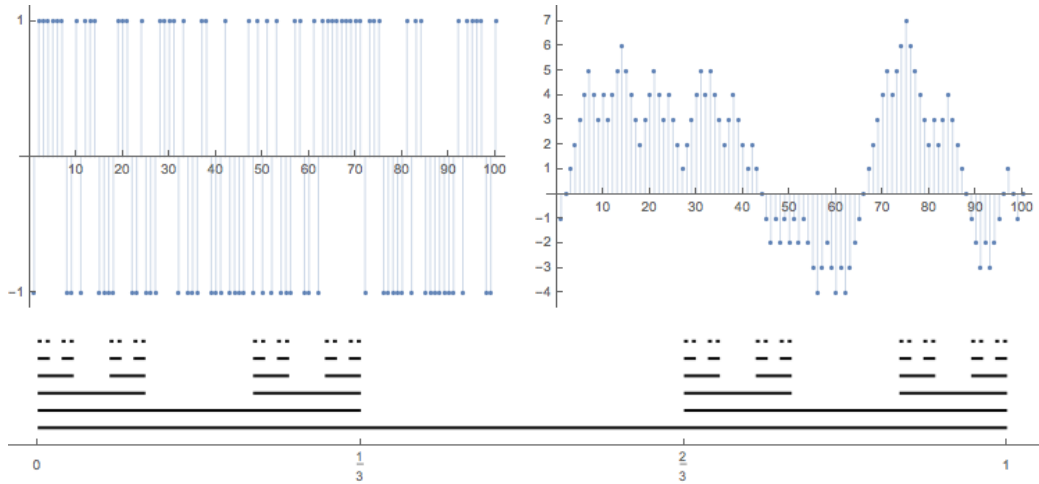


Abbildung 3.1: Aspekte des Produktraums $F = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$.
 Links: $\{-1, 1\}$ -Folge $a \in F$. Rechts: Irrfahrt $\Phi(a)$ auf $\mathbb{Z}$.
 Unten: Approximanten der Cantorschen $1/3$ -Menge $C = \Psi(F)$.

Man kann sich einen Eindruck von der Produkttopologie auf F verschaffen, wenn man die Abbildung

$$\Psi : F \rightarrow [0, 1] \quad , \quad \Psi(a) := \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + 1) 3^{-k}$$

betrachtet. Da die Koeffizienten $(a_k + 1)$ nur die Werte 0 und 2 annehmen, ist $\Psi(F) \subseteq [0, 1]$ die Menge der Punkte im Intervall $[0, 1]$, in deren triadischer Darstellung³⁴ keine 1 vorkommt.

Die Menge $C := \Psi(F)$ ist die *Cantor-Menge*. Diese entsteht, wenn man das mittlere Drittel des Intervalls $[0, 1]$ entfernt, und dieses Verfahren iterativ auf die verbleibenden Teilintervalle anwendet, siehe Abbildung 3.1, unten.

Die Abbildung Ψ ist injektiv und stetig. Letzteres folgt, weil der Wert $\Psi(a)$ bis auf einen Fehler 3^{1-n} schon durch die Folgenglieder $a_1, \dots, a_n$ festgelegt ist. Auch die Umkehrabbildung $\Psi^{-1} : C \rightarrow F$ ist stetig. Denn ist bekannt, dass $c \in C$ in einem Intervall $[a, b] \subseteq C$ der Länge 3^{-n} liegt, dann kann man damit die ersten n Glieder der Folge $\Psi^{-1}(c)$ berechnen.

F ist also homöomorph zu C . Da Homöomorphie der Isomorphismus in der Topologie ist, sagt man: Der Produktraum F ist eine Cantor-Menge. $\diamond$

3.14 Satz Für eine Indexmenge I und einen topologischen Raum $(X, \mathcal{O})$ konvergiert im mit der Produkttopologie versehenen Raum $X^I \cong \text{Abb}(I, X)$ eine

³⁴Für die Basis $b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ist die *b-adische Darstellung* der Zahlen im Intervall $[0, 1]$ von der Form $\sum_{k=1}^{\infty} c_k b^{-k}$ mit $c_k \in \{0, \dots, b-1\}$. *Triadisch* bedeutet: Zur Basis 3.

Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Abbildungen $f_n : I \rightarrow X$ genau dann gegen $g \in \text{Abb}(I, X)$, wenn sie punktweise konvergiert.

Beweis: In Diagramm (3.1) benutzen wir den Testraum $T := \mathbb{N}^*$ aus Bemerkung 2.43. Wir erhalten dann das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* & \xrightarrow{f^*} & \text{Abb}(I, X) \\ & \searrow f^* \circ \text{pr}_i & \downarrow \text{pr}_i \\ & & X \end{array} \quad (i \in I).$$

Dabei ist

$$f^* : \mathbb{N}^* \rightarrow \text{Abb}(I, X), \quad f_n^* = \begin{cases} f_n & , \quad n \in \mathbb{N} \\ g & , \quad n = \infty \end{cases}.$$

Aus der charakterisierenden Eigenschaft der Produkttopologie folgt, dass f^* genau dann stetig ist, wenn die $f^* \circ \text{pr}_i : \mathbb{N}^* \rightarrow X$ für alle $i \in I$ stetig sind.

Letzteres bedeutet (nach Bemerkung 2.43) aber gerade, dass die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen g konvergiert,

Ersteres, dass die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in der Produkttopologie gegen g konvergiert. $\square$

3.1.3 Der Pullback

Betrachten wir für zwei topologische Räume $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ die Produkttopologie auf dem cartesischen Produkt $X \times Y$, dann können wir die beiden Diagramme

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{f} & X \times Y \\ & \searrow \text{pr}_X \circ f & \downarrow \text{pr}_X \\ & & X \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{f} & X \times Y \\ & \searrow \text{pr}_Y \circ f & \downarrow \text{pr}_Y \\ & & Y \end{array} \quad (3.5)$$

aus der charakterisierenden Eigenschaft (3.1) der induzierten Topologie zu einem zusammenfassen:

$$\begin{array}{ccccc} T & & & & \\ & \searrow f & & \searrow \text{pr}_X \circ f & \\ & & X \times Y & \xrightarrow{\text{pr}_X} & X \\ & \searrow \text{pr}_Y \circ f & \downarrow \text{pr}_Y & & \\ & & Y & & \end{array} \quad (3.6)$$

Dieses Diagramm ähnelt nicht zufällig dem in (2.1), denn auch **Top** ist eine Kategorie. Während das Produkt $X \times Y$ in **Set** das cartesische ist, wird mit (3.6) die Produkttopologie von $\mathcal{O}_X$ und $\mathcal{O}_Y$ definiert.

3.15 Bemerkung (Das Diagramm (3.6)) Im Unterschied zum das cartesische Produkt von Mengen definierenden Diagramm (2.1) steht an den gebogenen Pfeilen statt f_i jetzt $\text{pr}_X \circ f$ bzw. $\text{pr}_Y \circ f$. Außerdem ist der Pfeil für $f : T \rightarrow X \times Y$ jetzt durchgezogen gezeichnet. Das liegt daran, dass wir schon wissen, dass das mengentheoretische cartesische Produkt $X \times Y$ und die Abbildung f existieren und eindeutig sind. Es geht hier nur noch um die Stetigkeit. $\diamond$

Wir ergänzen nun das Diagramm (3.6) zu

$$\begin{array}{ccccc}
 T & & \xrightarrow{\text{pr}_X \circ f} & & X \\
 & \searrow f & & \searrow \text{pr}_X & \\
 & X \times Y & \xrightarrow{\text{pr}_X} & & X \\
 & \downarrow \text{pr}_Y & & \downarrow & \\
 & Y & \xrightarrow{\quad} & & 1
 \end{array}
 \quad (3.7)$$

Das terminale Objekt ³⁵ (siehe Def. 2.21) 1 ist hier 'der' einpunktige topologische Raum $(1, \mathcal{O}_1)$ mit der (eindeutigen!) Topologie $\mathcal{O}_1 = \{\emptyset, 1\}$. Daher sind auch die Abbildungen $X \rightarrow 1$ und $Y \rightarrow 1$, die in (3.7) gegenüber (3.6) neu hinzugekommen sind, eindeutig, und stetig, denn die von $Z \rightarrow 1$ auf der Menge Z induzierte Topologie

$$\mathcal{O}_Z = \{U \subseteq Z \mid \exists V \in \mathcal{O}_1 : U = f^{-1}(V)\} = \{\emptyset, Z\}$$

ist die triviale (vergleiche mit Definition 3.2). Das Diagramm (3.7) kommutiert immer, denn man landet immer bei 1 . Man kann also das cartesische Produkt $X \times Y$ statt durch (3.5) oder (3.6) auch durch (3.7) definieren.

Was geschieht nun, wenn man an der Stelle von 1 im Diagramm ein anderes Objekt B der Kategorie schreibt und entsprechend Morphismen $b_X : X \rightarrow B$ und $b_Y : Y \rightarrow B$ wählt? Dann suchen wir ein Objekt, das wir mit $X \times_B Y$ bezeichnen, sodass das Diagramm (3.8) für genau ein f kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc}
 T & & \xrightarrow{f_X} & & X \\
 & \searrow f & & \searrow \text{pr}_X & \\
 & X \times_B Y & \xrightarrow{\text{pr}_X} & & X \\
 & \downarrow \text{pr}_Y & & \downarrow b_X & \\
 & Y & \xrightarrow{b_Y} & & B
 \end{array}
 \quad (3.8)$$

In Worten:

³⁵Wir haben in der Kategorie **Set** 'das' terminale Objekt mit 1 und das initiale Objekt, also die leere Menge $\emptyset$, mit 0 bezeichnet, siehe die Definitionen 2.3 und 2.6.

3.16 Definition Für Morphismen $b_X : X \rightarrow B$ und $b_Y : Y \rightarrow B$ einer Kategorie heißt ein Objekt³⁶ $X \times_B Y$ mit Morphismen $\text{pr}_X : X \times_B Y \rightarrow X$, $\text{pr}_Y : X \times_B Y \rightarrow Y$

• **Faserprodukt oder Pullback** von X und Y über B , wenn

- $b_X \circ \text{pr}_X = b_Y \circ \text{pr}_Y$, und
- es für alle Objekte T und Morphismen $f_X : T \rightarrow X$ und $f_Y : T \rightarrow Y$ mit $b_X \circ f_X = b_Y \circ f_Y$ genau einen Morphismus $f : T \rightarrow X \times_B Y$ gibt, sodass

$$f_X = \text{pr}_X \circ f \quad \text{und} \quad f_Y = \text{pr}_Y \circ f. \quad (3.9)$$

• pr_X und pr_Y heißen dann **natürliche Projektionen**.³⁷

3.17 Bemerkung (Faserprodukt in Set) Betrachten wir zunächst den Pullback in der Kategorie **Set**. Wenn wir zunächst in (3.8) T ignorieren und uns auf das verbleibende Quadrat konzentrieren, dann liegt die folgende Vermutung nahe: Die gesuchte Menge $X \times_B Y$ ist die folgende Teilmenge des cartesischen Produktes:

$$X \times_B Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid b_X(x) = b_Y(y)\}, \quad (3.10)$$

und die Abbildungen pr_X und pr_Y sind die Einschränkungen der gleichnamigen Abbildungen aus (3.7) auf diese Teilmenge.

Tatsächlich bestätigt sich die Vermutung. Denn für das *cartesische* Produkt $X \times Y$ von Mengen wissen wir schon, dass die in (3.8) gesuchte Abbildung f existiert und gleich (f_X, f_Y) ist. Wir müssen also nur noch kontrollieren, dass für alle Elemente $t \in T$ der Bildpunkt $f(t)$ tatsächlich in der Teilmenge (3.10) von $X \times Y$ liegt. Das ist aber durch die für das cartesische Produkt geltende Beziehung (3.9) sichergestellt: Für $t \in T$ und $(x, y) := f(t)$ ist $x = f_X(t)$ und $y = f_Y(t)$, also

$$b_X(x) = b_X \circ f_X(t) = b_Y \circ f_Y(t) = b_Y(y).$$

Siehe Abbildung 3.2 für ein Beispiel des Faserproduktes von Mengen. ◇

3.18 Lemma *Das Faserprodukt existiert in Top.*

Beweis: Nach Bemerkung 3.17 existiert das Faserprodukt von Mengen. Wir nehmen also an, dass stetige Abbildungen $b_X : X \rightarrow B$, $b_Y : Y \rightarrow B$ zwischen den topologischen Räumen $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ und $(B, \mathcal{O}_B)$ gegeben sind. Das mengentheoretische Faserprodukt $X \times_B Y \subseteq X \times Y$ verstehen wir mit der von der

³⁶Diese Schreibweise ist eigentlich unvollständig, und man müsste $X \times_{(B, b_X, b_Y)} Y$ schreiben. Aber wie so oft bedeutet hier Vollständigkeit Umständlichkeit.

³⁷ B wird oft **Basis** des Faserprodukts genannt; mehr dazu später in Bemerkung 3.19.

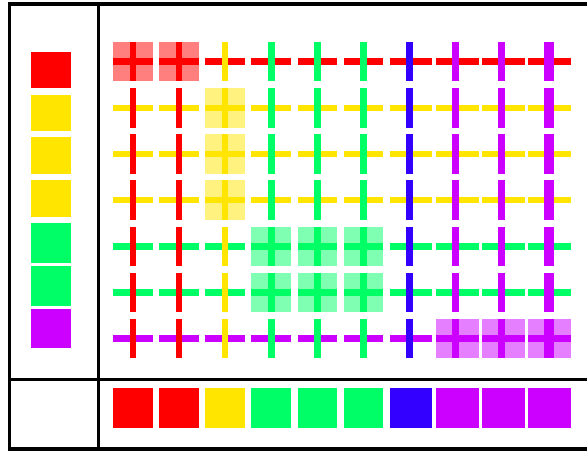


Abbildung 3.2: Pullback $X \times_B Y$ von Mengen X (horizontal, 10 Elemente) und Y (vertikal, 7 Elemente) mit den (farbcodierten) Abbildungen $b_X : X \rightarrow B$ und $b_Y : Y \rightarrow B$ in eine fünf-elementige Menge B . Die Elemente von $X \times_B Y \subseteq X \times Y$ sind durch farbige Quadrate gekennzeichnet.

Produkttopologie auf $X \times Y$ induzierten Topologie. Dann sind die auf das Faserprodukt restringierten Abbildungen pr_X und pr_Y stetig. Die Stetigkeit von $f : T \rightarrow X \times_B Y$ in (3.8) ergibt sich aus der Stetigkeit von f_X und f_Y , denn $f = (f_X, f_Y)$ ist die *Korestriktion* (Einschränkung des Wertebereichs auf das Bild) der gleichnamigen stetigen Abbildung $f : T \rightarrow X \times Y$. $\square$

Während das in Abbildung 3.2 illustrierte Beispiel für das Faserprodukt von Mengen keine über die Verdeutlichung des Begriffs hinausgehende Bedeutung hat, gibt es viele wichtige Anwendungen des Faserprodukts in der Topologie.

3.19 Bemerkung (Basiswechsel)

Eine Abbildung $\pi : X \rightarrow B$ hat die *Fasern* $\pi^{-1}(b) \subseteq X$ ($b \in B$). Insbesondere wenn π surjektiv und die Fasern zueinander isomorph sind, nennt man B auch *Basis* der Abbildung π , und X heißt *Totalraum*.³⁸ Sei nun zusätzlich zu π noch eine Abbildung $b : B' \rightarrow B$ gegeben. Dann können wir im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} B' \times_B X & \xrightarrow{\text{pr}_X} & X \\ \downarrow \text{pr}_{B'} & & \downarrow \pi \\ B' & \xrightarrow{b} & B \end{array}$$

B' als Basis der Abbildung $\text{pr}_{B'}$ und das Faserprodukt $B' \times_B X$ als deren Totalraum ansehen. $\diamond$

³⁸Unter weiteren Bedingungen an π kommt man im Fall topologischer Räume zum Begriff des *Faserbündels*.

3.20 Beispiel (Basiswechsel und Möbiusband)

Es seien in Bemerkung 3.19 die Basen $B := B' := S^1 \subseteq \mathbb{C}$ und X das sogenannte **Möbiusband**. Dieses betten wir in den dreidimensionalen Volltorus $V := S^1 \times U_r$, mit der Kreisscheibe $U_r := \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < r\}$ vom Radius $r \in (0, 1)$ ein, beziehungsweise in dessen Bild unter dem Homöomorphismus

$$H : V \rightarrow H(V) \subseteq \mathbb{R}^3, \quad (u, w) \mapsto \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(u)(1+\operatorname{Re}(w)) \\ \operatorname{Im}(u)(1+\operatorname{Re}(w)) \\ \operatorname{Im}(w) \end{pmatrix}.$$

Wir stellen zunächst fest, dass die

$$D_m : V \rightarrow V, \quad (u, w) \mapsto (u, wu^m) \quad (m \in \mathbb{Z})$$

Homöomorphismen von V sind. Sie verdrehen den Volltorus m -mal. Das Möbiusband definieren wir als

$$X := \left\{ (u, w) \in V \mid \operatorname{Im}\left(\frac{w}{\pm\sqrt{u}}\right) = 0 \right\},$$

den zweidimensionalen Zylinder als

$$Z := \{(u, w) \in V \mid \operatorname{Im}(w) = 0\}.$$

Diese beiden Flächen werden zur Veranschaulichung durch H in $\mathbb{R}^3$ eingebettet, siehe $H(X)$ in Abbildung 3.3, links.

Wir untersuchen jetzt den Basiswechsel bezüglich der stetigen Abbildungen

$$b_k : B' \rightarrow B, \quad z \mapsto z^k \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

wobei wir die Projektion $\pi : V \rightarrow S^1, (u, w) \mapsto u$ auf den ersten Faktor verwenden.

Der Totalraum $B' \times_B X = \{(z, x) \in B' \times X \mid b_k(z) = \pi(x)\}$ ist eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit von $S^1 \times V$.

- Für gerade $k = 2m$ ist sie von der Form

$$\left\{ (z, z^k, w) \in S^1 \times V \mid \operatorname{Im}\left(\frac{w}{z^m}\right) = 0 \right\} \cong \left\{ (z, w) \in S^1 \times V \mid \operatorname{Im}\left(\frac{w}{z^m}\right) = 0 \right\},$$

es handelt sich also um ein m -fach verdrehtes Band. Es besitzt zwei Seiten, ist also **orientierbar**. Anwendung von D_m zeigt, dass $B' \times_B X$ homöomorph zum Zylinder Z ist.

Siehe das Bild $H(B' \times_B X) \subseteq \mathbb{R}^3$ für $k = 2$ in Abbildung 3.3, rechts.

- Für ungerade $k = 2m + 1$ ist sie von der Form

$$\left\{ (z, z^k, w) \in S^1 \times V \mid \operatorname{Im}\left(\frac{w}{\pm z^{m+1/2}}\right) = 0 \right\} \cong \left\{ (z, w) \in S^1 \times V \mid \operatorname{Im}\left(\frac{w}{\pm z^{m+1/2}}\right) = 0 \right\}.$$

Hier ergibt Anwendung von D_m einen Homöomorphismus zum Möbiusband X . Dieses besitzt nur eine Seite. $\diamond$

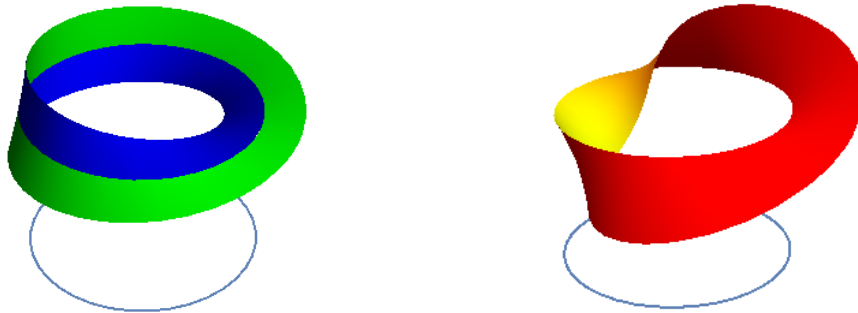


Abbildung 3.3: Anwendung des pullback: Links: Möbiusband über der Basis S^1 . Rechts: Basiswechsel mit Abbildung $S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^2$

3.2 Die Finaltopologie

Als wir in Kapitel 3.1.1 begannen, die Initialtopologie einzuführen, haben wir die von einer Abbildung

$$f : M \rightarrow X$$

einer Menge M in einen topologischen Raum $(X, \mathcal{O})$ auf M induzierte Topologie betrachtet. Diese war die grösste Topologie, für die f noch stetig ist. Jetzt gehen wir umgekehrt vor, indem wir die Pfeilrichtung umdrehen, also die von

$$f : X \rightarrow M$$

auf M *koinduzierte* Topologie als die feinste Topologie definieren, unter der f noch stetig ist. Wir betrachten gleich mehrere solche Abbildungen.

3.21 Definition Es seien $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ topologische Räume, M eine Menge und $f_i : X_i \rightarrow M$ ($i \in I$) Abbildungen. Dann heißt die feinste Topologie $\mathcal{O}_M$ auf M , für die alle f_i stetig sind, die von $(f_i)_{i \in I}$ **koinduzierte** oder **Finaltopologie**.

Diese lässt sich direkt angeben:

3.22 Satz Die Finaltopologie auf M ist das Mengensystem

$$\mathcal{O}_M := \{U \subseteq M \mid \forall i \in I : f_i^{-1}(U) \in \mathcal{O}_i\}.$$

Beweis:

1. $\mathcal{O}_M$ ist eine Topologie auf M . Das gilt (angewandt auf $U_j \in \mathcal{O}_M$) wegen

$$f_i^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} U_j\right) = \bigcup_{j \in J} f_i^{-1}(U_j) \quad \text{und} \quad f_i^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} U_j\right) = \bigcap_{j \in J} f_i^{-1}(U_j),$$

im Fall der Durchschnitte angewandt auf endliche Indexmengen J .

2. Nach Definition von $\mathcal{O}_M$ sind alle $f_i : X_i \rightarrow M$ bezüglich $\mathcal{O}_M$ stetig.
3. Ebenfalls nach Definition von $\mathcal{O}_M$ gibt es keine weitere Teilmenge U' von M , $U' \notin \mathcal{O}_M$, für die alle $f_i^{-1}(U')$ offen sind. Also ist $\mathcal{O}_M$ die feinste solche Topologie. $\square$

Wie die Initialtopologie (siehe Lemma 3.8) besitzt die Finaltopologie eine sie charakterisierende Eigenschaft. Man beachte im Vergleich der Diagramme (3.1) und (3.11), dass sich alle Pfeilrichtungen umkehren:

3.23 Lemma *Die von den $f_i : X_i \rightarrow M$ koinduzierte Finaltopologie $\mathcal{O}_M$ ist die einzige Topologie $\mathcal{O}$ auf M , für die die folgende Bedingung gilt: Jede Abbildung $g : M \rightarrow T$ von $(M, \mathcal{O})$ in einen beliebigen topologischen Raum $(T, \mathcal{O}_T)$ ist genau dann stetig, wenn die Abbildungen $g \circ f_i : X_i \rightarrow T$ stetig sind:*

$$\begin{array}{ccc}
 T & \xleftarrow{g} & M \\
 & \nwarrow g \circ f_i & \uparrow f_i \\
 & & X_i
 \end{array} \quad (i \in I). \quad (3.11)$$

Beweis:

1. $\mathcal{O}_M$ erfüllt die Bedingung.

- Da die f_i stetig sind, ist $g \circ f_i$ bezüglich $\mathcal{O}_M$ stetig, falls g stetig ist.
- Seien die $g \circ f_i$ stetig (dafür braucht M noch keine Topologie zu besitzen). Wir wollen zeigen, dass dann g bezüglich $\mathcal{O}_M$ stetig ist, also für alle $V \in \mathcal{O}_T$ gilt: $U := g^{-1}(V) \in \mathcal{O}_M$. Nach Voraussetzung ist

$$f_i^{-1}(U) = f_i^{-1}(g^{-1}(V)) = (g \circ f_i)^{-1}(V) \in \mathcal{O}_i \quad (i \in I).$$

Damit ist $U \in \mathcal{O}_M$.

2. Wenn $\mathcal{O}$ die Bedingung erfüllt, dann ist $\mathcal{O} = \mathcal{O}_M$:

$\mathcal{O}$ erfülle die Bedingung. Wir wählen $T := M$ und $g := \text{id}_M$.

- Für $\mathcal{O}_T := \mathcal{O}$ ist $g = \text{id}_M$ stetig. Daher müssen die $f_i = g \circ f_i$ stetig sein, also $\mathcal{O}$ gröber als $\mathcal{O}_M$.
- Für $\mathcal{O}_T := \mathcal{O}_M$ sind die Abbildungen $g \circ f_i = f_i$ stetig. Daher muss auch $g = \text{id}_M$ stetig sein, also $\mathcal{O}$ feiner als $\mathcal{O}_M$. $\square$

3.2.1 Die Quotiententopologie

Um ein Gefühl für die Finaltopologie zu bekommen, betrachten wir zunächst den Fall einer einzigen Abbildung

$$f : X \rightarrow M,$$

und lassen sogar die Topologie auf X außer Acht.

Ist f surjektiv, dann erzeugt f auf X die **Äquivalenzrelation** R , mit $x_1 \sim x_2$, falls $f(x_1) = f(x_2)$. X ist also in die disjunkte Vereinigung der Äquivalenzklassen $[x] = \{y \in X \mid y \sim x\}$, und die Äquivalenzklassen entsprechen den Urbildern $f^{-1}(m)$. Damit steht M in Bijektion zur *Quotientenmenge* $X/R = X/\sim$, und mit der *kanonischen Projektion*

$$\text{pr} : X \rightarrow X/R, \quad x \mapsto [x]$$

ist die Abbildung $\Phi : M \rightarrow X/R$, $m \mapsto f^{-1}(m)$ eine Bijektion mit Inverser $\Phi^{-1} : X/R \rightarrow M$, $[x] \mapsto f(x)$. Wir erhalten damit ein kommutierendes Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X/R & \xleftarrow{\Phi} & M \\ & \swarrow \text{pr} & \uparrow f \\ & & X \end{array} \quad (3.12)$$

vom Typ (3.11). Besitzt nun X eine Topologie $\mathcal{O}_X$, dann wird f mit der koinduzierten Topologie $\mathcal{O}_M$ stetig, und mit der Topologie $\{\Phi(U) \mid U \in \mathcal{O}_M\}$ auf X/R (nach Lemma 3.23) auch die natürliche Projektion pr . Diese Topologie heißt **Quotiententopologie**.

Offensichtlich können wir auch umgekehrt für jede Äquivalenzrelation $R \subseteq X \times X$ auf einem topologischen Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ den Quotientenraum X/R mit der Quotiententopologie versehen, nämlich der durch pr koinduzierten Topologie.

Dual zu der in Definition 3.5 eingeführten Einbettung ist folgender Begriff:

3.24 Definition Eine Surjektion $f : X \rightarrow Y$ topologischer Räume $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ heißt **Identifizierung**, wenn $\mathcal{O}_Y$ die von f koinduzierte Topologie ist.

3.25 Beispiel (Kugel und Sphäre) Es sei $X := D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$, also die abgeschlossene Einheitskugel des $\mathbb{R}^n$. Wir versehen $D^n \subseteq \mathbb{R}^n$ mit der Spurtopologie $\mathcal{O}_X$ und definieren eine Äquivalenzrelation durch

$$R := \{(x_1, x_2) \in D^n \times D^n \mid x_1 = x_2 \text{ oder } \|x_1\| = \|x_2\| = 1\}.$$

Die Oberfläche der Vollkugel bildet also eine Äquivalenzklasse.

Dann ist der Quotientenraum³⁹ D^n/R mit Quotiententopologie homöomorph

³⁹Man schreibt auch D^n/S^{n-1} statt D^n/R , denn die einzige nichttriviale Äquivalenzklasse von R ist S^{n-1} . In dieser Schreibweise ist die Homöomorphie von der Form $D^n/S^{n-1} \cong S^n$.

zur Sphäre $S^n = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|y\| = 1\}$ der Dimension n .

Um dies zu sehen, betrachtet man die Abbildung

$$f : D^n \longrightarrow \text{im}(f) \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \quad , \quad x \longmapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{x}{\|x\|} \sin(\pi\|x\|) \\ \cos(\pi\|x\|) \end{pmatrix} & , x \neq 0 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & , x = 0 \end{cases} .$$

Damit ist f stetig. Zunächst stellen wir fest, was das Bild $\text{im}(f)$ ist.

Im einfachsten Fall $n = 1$ ist $f(x) = \begin{pmatrix} \sin(\pi x) \\ \cos(\pi x) \end{pmatrix}$, also $\text{im}(f) = S^1$.

Um allgemein $\text{im}(f) = S^n$ zu zeigen, berechnen wir die Norm

$$\|f(x)\| = (\cos^2(\pi\|x\|) + \sin^2(\pi\|x\|))^{1/2} = 1.$$

Also ist $\text{im}(f) \subseteq S^n$. Tatsächlich ist sogar $\text{im}(f) = S^n$. Denn sei der Vektor $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ in S^n , d.h. $\|y\|^2 + |z|^2 = 1$. Dann können wir ein Urbild x dieses Punktes der Kugeloberfläche S^n unter f wie folgt finden.

- Es muss $\|x\| = \frac{\arccos(z)}{\pi}$ sein. Insbesondere ist das Urbild des Nordpols $f^{-1}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = 0$.
- Für $\|x\| \in (0, 1)$ ist $\sin(\pi\|x\|) \in (0, 1]$, also

$$x = \frac{\|x\|}{\sin(\pi\|x\|)} y = f^{-1}\left(\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}\right).$$

- Für alle $x \in D^n$ mit $\|x\| = 1$ ist $f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, der Südpol in S^n .

Damit sind alle Urbilder $f^{-1}(\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix})$ nicht nur nicht leer, sondern sogar Äquivalenzklassen von R . f ist bezüglich der Spurtopologie von $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ eine Identifizierung. Denn $f|_{\text{int}(D^n)} : \text{int}(D^n) \rightarrow S^n \setminus \{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}$ ist ein Homöomorphismus, und für die Umgebungsbasis $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des Südpols mit $V_n := U_{1/n}(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}) \cap S^n$ sind die $f^{-1}(V_n) \subseteq D^n$ offene Umgebungen des Randes $\partial D^n \cong S^{n-1}$.

f erzeugt damit wie behauptet einen Homöomorphismus $\Phi : \text{im}(f) = S^n \rightarrow X/R$ (bezüglich der Quotiententopologie auf X/R), siehe Diagramm (3.12). $\diamond$

Während die durch Identifizierung der Oberfläche der Vollkugel D^n erzeugte Sphäre S^n ein schon bekannter topologischer Raum ist, kann man durch die gleiche Methode neue und interessante topologische Räume generieren:

3.26 Beispiel (Projektive Räume) Wir betrachten im arithmetischen Vektorraum $\mathbb{R}^{n+1}$ mit seiner Standardtopologie die Menge $E \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ der eindimensionalen Untervektorräume. Diese wird unter Benutzung der Identifizierung

$$f : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow E \quad , \quad x \longmapsto \text{span}(x)$$

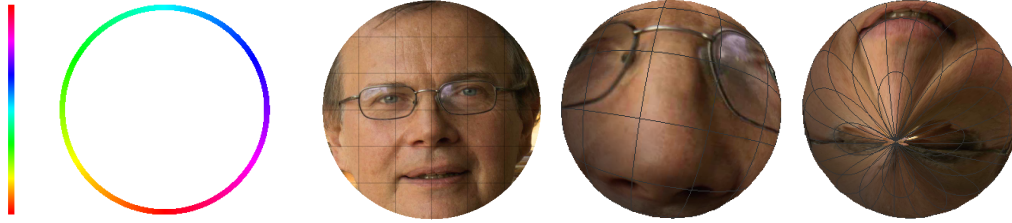


Abbildung 3.4: Quotient $D^n/S^{n-1} \cong S^n$. Von Links nach Rechts: D^1 , S^1 , D^2 , S^2 (Vorder- und Rückansicht).

ein topologischer Raum, der *reell-projektive* n -dimensionale Raum⁴⁰ $\mathbb{R}P(n)$.

Da die Urbilder $f^{-1}(e)$ die Form $e \setminus \{0\}$ haben, also mit der Sphäre $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ genau zwei Schnittpunkte besitzen, können wir $\mathbb{R}P(n)$ auch in der Form S^n/R schreiben, wobei die Äquivalenzrelation R für $x \in S^n$ die Äquivalenzklasse $[x] = \{x, -x\}$ umfasst.

Für $n = 1$ können wir die eindimensionalen Unterräume durch einen Winkel φ parametrisieren: $e_\varphi := \left\{ \begin{pmatrix} x \cos \varphi \\ x \sin \varphi \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$. Dabei reicht es aus, die Winkel φ im Intervall $[0, \pi]$ zu wählen, und die e_φ sind bis auf $e_\pi = e_0$ voneinander verschieden. Daraus ergibt sich, dass $\mathbb{R}P(1)$ zu S^1 homöomorph ist. Ein Homöomorphismus ist durch die Winkelverdopplung gegeben, d.h. $\mathbb{R}P(1) \rightarrow S^1$, $e_\varphi \mapsto \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) \end{pmatrix}$.

Für $n = 2$ wie für alle geraden Dimensionen n besitzt die Punktspiegelung im $\mathbb{R}^{n+1}$ eine negative Determinante: $\det(-\mathbb{1}_{n+1}) = -1$. Das hat zur Folge, dass $\mathbb{R}P(2)$, ähnlich wie das Möbiusband, eine nicht orientierbare Fläche ist.

Eine analoge Konstruktion liefert, ausgehend von eindimensionalen Unterräumen des $\mathbb{C}^{n+1}$, den *komplex-projektiven* Raum $\mathbb{C}P(n)$. Er hat die *reelle* Dimension $2(n+1) - 2 = 2n$, lässt sich also lokal durch $2n$ Koordinaten parametrisieren. $\diamond$

3.2.2 Die Summentopologie

Disjunkte Vereinigung von Mengen:

Was geschieht, wenn wir im Diagramm (3.2) für das cartesische Produkt der Mengen X_i ($i \in I$) die Pfeile umdrehen, d.h.

$$\begin{array}{ccc} T & \xleftarrow{\quad f \quad} & \coprod_{i \in I} X_i \\ & \nwarrow f_j & \uparrow \text{in}_j \\ & & X_j \end{array} \quad (j \in I) \quad (3.13)$$

betrachten? Dann definieren wir (eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie) mit (3.13) die *disjunkte Vereinigung der X_i* genannte Menge $\coprod_{i \in I} X_i$, auch *Summe*

⁴⁰auch $P^n(\mathbb{R})$ oder $P(\mathbb{R}^{n+1})$ geschrieben.

und *Koprodukt* genannt. Die Abbildungen $\text{in}_j : X_j \rightarrow \coprod_{i \in I} X_i$ heißen *Injektionen*. Für die Summe zweier Mengen schreibt man $X_1 \sqcup X_2$ oder einfach $X_1 + X_2$.

3.27 Bemerkungen (Disjunkte Vereinigung)

1. $\coprod_{i \in I} X_i$ ist *nicht* die Vereinigung $\cup_{i \in I} X_i$, denn etwa für gleiche Mengen $X_i = X$ ist $\cup_{i \in I} X_i = X$. Wir können⁴¹ aber

$$\coprod_{i \in I} X_i := \{(x, i) \mid x \in X_i, i \in I\} \quad (3.14)$$

als eine Definition der direkten Summe nehmen. Durch Hinzufügung des Index i werden gemeinsame Elemente $x \in X_i \cap X_j$ für $j \neq i$ voneinander unterscheiden, sodass etwa $\coprod_{i \in I} X$ aus $|I|$ Kopien von X besteht. Offensichtlich ist $\coprod_{i \in I} X_i = \cup_{i \in I} X_i \times \{i\}$, und es wird auch die Schreibweise $\dot{\cup}_{i \in I} X_i$ benutzt.

2. Tatsächlich erfüllt (3.14) zusammen mit den Abbildungen

$$\text{in}_j : X_j \rightarrow \coprod_{i \in I} X_i, \quad \text{in}_j(x) = (x, j) \quad (j \in I) \quad (3.15)$$

das Diagramm (3.13), denn für vorgegebene Abbildungen $f_j : X_j \rightarrow T$ und

$$f : \coprod_{i \in I} X_i \rightarrow T, \quad (x, i) \mapsto f_i(x) \quad (3.16)$$

ist

$$f \circ \text{in}_j(x) = f((x, j)) = f_j(x) \quad (j \in I, x \in M_j).$$

3. Die Abbildungen in_j in (3.15) sind tatsächlich injektiv. $\diamond$

Die Summentopologie:

Da jetzt im Diagramm (3.13) das Koprodukt $\coprod_{i \in I} X_i$ und die Abbildung f durch (3.14) und (3.16) definiert sind, können wir für die Definition der für topologische Räume $(X_i, \mathcal{O}_i)$ koinduzierten Finaltopologie auf der Menge $\coprod_{i \in I} X_i$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T & \xleftarrow{f} & \coprod_{i \in I} X_i \\ & \nwarrow f \circ \text{in}_j & \uparrow \text{in}_j \\ & & X_j \end{array} \quad (j \in I)$$

⁴¹Hier ist zu beachten, dass $\coprod_{i \in I} X_i$ nicht als Teilmenge einer existierenden Menge eingeführt wird. Dass die Menge auf der rechten Seite von (3.14) *existiert*, folgt aus einem Axiom (genauer: *Axiomenschema*) der Mengenlehre, dem *Ersetzungsaxiom* von ZFC. In der in Kapitel 2.1 vorgestellten Begründung der Mengenlehre entspricht dies dem elften Axiom.

verwenden. Satz 3.22 besagt nun, dass die Finaltopologie $\mathcal{O}$ auf $\coprod_{i \in I} X_i$ durch

$$\mathcal{O} = \left\{ U \subseteq \coprod_{i \in I} X_i \mid \forall j \in I : \text{in}_j^{-1}(U) \in \mathcal{O}_j \right\}$$

gegeben ist. Eine Teilmenge $U = \coprod_{i \in I} U_i$ ist also genau dann offen, wenn die $U_j \subseteq X_j$ offen sind. Insbesondere werden alle $U_j \in \mathcal{O}_j$ durch in_j auf offene Teilmengen $\text{in}_j(U_j) = U_j \times \{j\} \in \mathcal{O}$ abgebildet. Die Abbildungen $\text{in}_j : X_j \rightarrow \coprod_{i \in I} X_i$ sind also Einbettungen⁴² der topologischen Räume $(X_j, \mathcal{O}_j)$, siehe Definition 3.5.

Für jeden topologischen Raum $(X, \mathcal{O})$ und jede Indexmenge I ist $\Phi : \coprod_{i \in I} X \rightarrow X \times I$, $(x, i) \mapsto (x, i)$ ein Homöomorphismus auf $X \times I$ mit der Produkttopologie aus $\mathcal{O}$ und der diskreten Topologie auf I .

3.28 Beispiel (Summentopologie für $\mathbb{R}^2$) Wir können mit der Indexmenge $I := \mathbb{R}$ das cartesische Produkt $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ als disjunkte Vereinigung

$$\coprod_{x_2 \in \mathbb{R}} \mathbb{R} = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in I = \mathbb{R}\}$$

auffassen. Die Summanden $\mathbb{R} \times \{x_2\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ entsprechen also horizontalen Geraden. Nun ist die Summentopologie auf $\mathbb{R}^2$ feiner als die Standardtopologie, denn für letztere gilt: Ist $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, dann sind für alle $x_2 \in \mathbb{R}$ auch die Schnitte $U \cap (\mathbb{R} \times \{x_2\})$ in $\mathbb{R} \times \{x_2\} \cong \mathbb{R}$ offen.

Diese Topologien auf $\mathbb{R}^2$ sind verschieden, denn in der Summentopologie ist beispielsweise $\mathbb{R} \times \{x_2\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ für alle $x_2 \in \mathbb{R}$ offen, während das in der Standardtopologie nie gilt. Entsprechend der obigen Bemerkung ist die Summentopologie auf $\mathbb{R}^2$ die Produkttopologie aus Standard- und diskreter Topologie. $\diamond$

3.2.3 Das Pushout

Wir haben durch Identifizierung von Punkten eines Raums einen neuen topologischen Raum erzeugt. Ähnlich können wir auch Punkte zweier Räume identifizieren, also die Räume zusammenkleben. Das bewerkstelligt man mit dem pushout. In der Kategorientheorie ist das pushout dual zum pullback oder Faserprodukt.

⁴²und damit sind die Bilder $\text{in}_j(X_j)$ offen *und* abgeschlossen. Solche Mengen werden manchmal 'abgeschlossen' (englisch: 'clopen') genannt. Diese Wörter wären aber Spitzenkandidaten in einem Hässlichkeitswettbewerb.

Wir drehen also die Pfeile im Diagramm (3.8) um:

$$\begin{array}{c}
 & & T & & \\
 & \nwarrow j_X & & \nearrow j_Y & \\
 & & X +_A Y & & \\
 & \nwarrow i_X & & \nearrow i_Y & \\
 X & & & & Y \\
 \uparrow a_X & & & & \uparrow a_Y \\
 A & & & &
 \end{array}
 \quad (3.17)$$

In Worten:

3.29 Definition Für Morphismen $a_X : A \rightarrow X$, $a_Y : A \rightarrow Y$ einer Kategorie heißt ein Objekt $X +_A Y$ mit Morphismen $i_X : X \rightarrow X +_A Y$, $i_Y : Y \rightarrow X +_A Y$ **Fasersumme** oder **pushout** von a_X und a_Y , wenn

- $i_X \circ a_X = i_Y \circ a_Y$, und
- es für alle Objekte T und Morphismen $j_X : X \rightarrow T$ und $j_Y : Y \rightarrow T$ mit $j_X \circ a_X = j_Y \circ a_Y$ genau einen Morphismus $j : X +_A Y \rightarrow T$ gibt, sodass

$$j_X = j \circ i_X \quad \text{und} \quad j_Y = j \circ i_Y.$$

Als Erstes schauen wir uns die Fasersumme in **Set** an. Beginnen wir mit $A := \emptyset$, also der initialen Menge. Die Abbildungen $a_X : \emptyset \rightarrow X$, $a_Y : \emptyset \rightarrow Y$ sind dann eindeutig, denn es gibt ja nichts abzubilden. Entsprechend ist die Bedingung $i_X \circ a_X = i_Y \circ a_Y$ leer, und wir erhalten das Diagramm (3.13). Also ist

$$X +_{\emptyset} Y = X + Y,$$

die disjunkte Vereinigung.

Bevor wir beliebige Mengen A und Abbildungen $a_X : A \rightarrow X$, $a_Y : A \rightarrow Y$ untersuchen, benötigen wir noch einen Begriff:

3.30 Definition Die von einer Relation $R \subseteq M \times M$ erzeugte **Äquivalenzrelation** ist die kleinste⁴³ Äquivalenzrelation $R^* \subseteq M \times M$ mit $R \subseteq R^*$.

Tatsächlich existiert R^* , denn $M \times M$ ist selbst eine Äquivalenzrelation, die R enthält, und für Äquivalenzrelationen $R_i \subseteq M \times M$ mit $R \subseteq R_i$ ($i \in I$) ist $\bigcap_{i \in I} R_i \subseteq M \times M$ eine R enthaltende Äquivalenzrelation. Siehe Abbildung 3.5 für ein Beispiel.

⁴³bezüglich der Inklusion in $\mathcal{P}(M \times M)$.

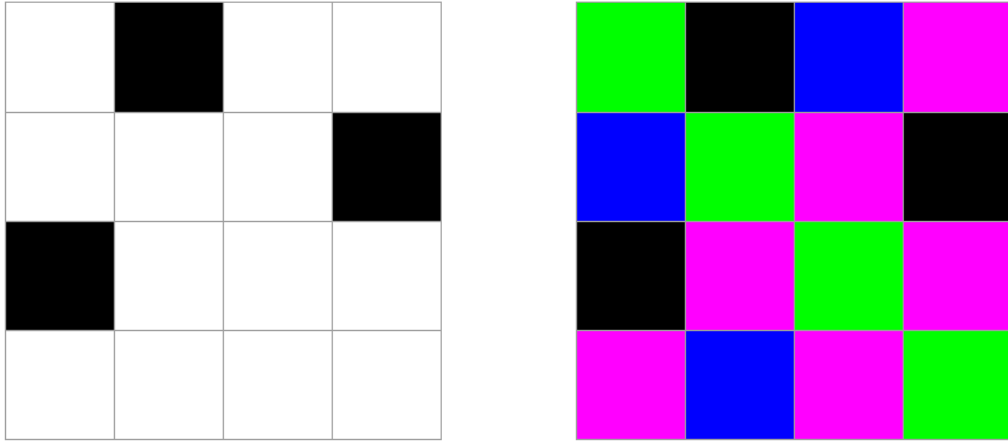


Abbildung 3.5: Die auf einer vierelementigen Menge M durch die Relation $R \subseteq M \times M$ (links; schwarz) erzeugte Äquivalenzrelation $R^* = M \times M$ (rechts). Reflexivität: Grün, Symmetrie: Blau, Transitivität: Magenta.

Nun wird auf der Menge $M := X + Y$ durch die Relation

$$R := \{(x, y) \in X \times Y \subseteq M \times M \mid \exists a \in A : a_X(a) = x, a_Y(a) = y\} \quad (3.18)$$

eine Äquivalenzrelation R^* erzeugt. Wir setzen versuchsweise

$$X +_A Y := (X + Y)/R^*,$$

und mit den Äquivalenzklassen $[z]$ von $z \in X + Y$, die durch R^* gegeben sind,

$$i_X : X \rightarrow X +_A Y, \quad x \mapsto [x] \quad , \quad i_Y : Y \rightarrow X +_A Y, \quad y \mapsto [y].$$

Tatsächlich gilt dann $i_X \circ a_X = i_Y \circ a_Y$, denn für alle $a \in A$ ist $(a_X(a), a_Y(a)) \in R$, also $[a_X(a)] = [a_Y(a)]$. Die Abbildung $j : X +_A Y \rightarrow T$ ist durch

$$j([z]) = \begin{cases} j_X(z) & , \quad z \in X \subseteq M \\ j_Y(z) & , \quad z \in Y \subseteq M \end{cases}$$

wohldefiniert, denn für $z_1 = a_X(a)$, $z_2 = a_Y(a)$ ist

$$j([z_1]) = j_X(z_1) = j_X \circ a_X(a) = j_Y \circ a_Y(a) = j_Y(z_2) = j([z_2]).$$

Abbildung 3.6 zeigt ein Beispiel für die mengentheoretische Fasersumme.

Das topologische pushout wird unter Verwendung des mengentheoretischen definiert. Dann ist die durch (3.17) beschriebene Topologie auf $X +_A Y$ die Quotiententopologie der natürlichen Projektion $\text{pr} : X + Y \rightarrow (X + Y)/R^*$, siehe (3.12). Oft benutzt man die Fasersumme, um etwas an einen topologischen Raum anzukleben.

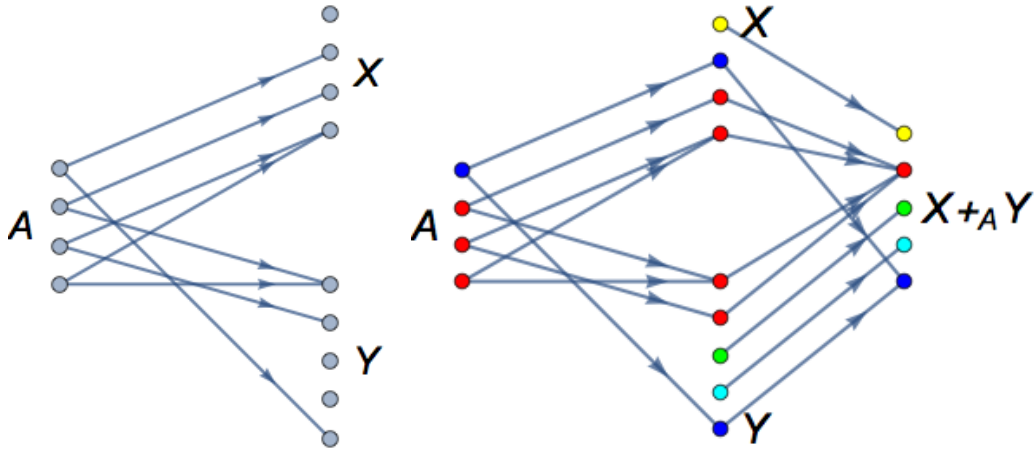


Abbildung 3.6: Pushout $X +_A Y$ in **Set**. Links: Die Abbildungen $a_X : A \rightarrow X$ und $a_Y : A \rightarrow Y$. Rechts: Die dadurch induzierte Äquivalenzrelation auf $X \sqcup Y$ und die resultierende Fasersumme $X +_A Y$.

3.31 Definition

Für topologische Räume $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ und eine stetige Abbildung $f : A \rightarrow X$ einer Teilmenge $A \subseteq Y$ wird das pushout $X +_A Y$ auch $X +_f Y$ geschrieben. Man sagt, $X +_f Y$ entstehe aus X durch **Anheften** von Y mittels f .

Die Konstruktion wird durch das kommutierende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X +_f Y & \xleftarrow{i_X} & X \\ \uparrow i_Y & & \uparrow f \\ Y & \xleftarrow{i_A} & A \end{array}$$

beschrieben, mit der Inklusion $i_A : A \rightarrow Y$. In diesem Fall ist die in (3.8) definierte Relation $R \subseteq M \times M$ auf $M := X + Y$ von der Form

$$R = \{(f(y), y) \in X \times Y \subseteq M \times M \mid y \in A\},$$

also $X +_f Y$ als Menge die disjunkte Vereinigung von X und $Y \setminus A$. Ist A eine abgeschlossene Teilmenge, dann ist X eine abgeschlossene Teilmenge von $X +_f Y$, und $Y \setminus A$ eine offene.

Besonders gern werden Vollkugeln $Y := D^n$ entlang ihres Randes $A := S^{n-1}$ angeheftet. Das führt zu den so genannten *CW-Komplexen*.

3.32 Beispiel (Graphen als topologische Räume)

Ein Graph (V, E) besteht aus einer Menge V von *Vertices* oder *Knoten* und einer Menge E von *Kanten*, wobei $e \in E$ eine Menge $\{v_1, v_2\}$ mit $v_1 \neq v_2 \in V$

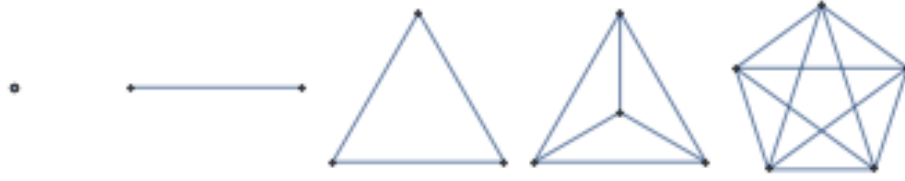


Abbildung 3.7: Topologische Realisierungen der vollständigen Graphen K^n für $n = 1, \dots, 5$. Der Graph K^5 ist nicht planar.

ist. Vermutlich haben Sie schon Beispiele von Graphen gesehen.⁴⁴ Jedenfalls sind sie in vielen Bereichen der Mathematik nützlich. Oft werden Graphen durch Zeichnungen veranschaulicht, bei denen den Knoten Punkte entsprechen und den Kanten Strecken zwischen den entsprechenden Punkten.

Ein Graph heißt *endlich*, wenn V (und damit E) eine endliche Menge ist. Zumindest diese Graphen (tatsächlich sogar beliebige Graphen) kann man durch topologische Räume realisieren. Dazu gibt man V die diskrete Topologie. Man nummeriert dann die Kanten durch, d.h. schreibt $E = \{e_1, \dots, e_{|E|}\}$ und notiert die k -te Kante e_k in der Form $e_k = \{u_k, w_k\}$ mit $u_k, w_k \in V$. Beginnend mit $X_0 := V$ setzt man

$$X_k := X_{k-1} +_{f_k} D^1 \quad (k = 1, \dots, |E|),$$

wobei man das Intervall $D^1 = [-1, +1]$ an seinem Rand $S^0 = \{-1, 1\}$ mittels

$$f_k : S^0 \rightarrow V, \quad f_k(-1) = u_k, \quad f_k(+1) = w_k$$

anheftet. Dann ist $X := X_{|E|}$ ein topologischer Raum, der (bis auf Homöomorphismen) unabhängig unter Umnummerierung der Kanten und Wechsel der Bezeichnungen u_k und w_k der Vertices ist.

Die kombinatorischen Eigenschaften des Graphen (V, E) übersetzen sich in topologische Eigenschaften des Raums X . Es werden durch die topologische Realisierung aber auch wichtige graphentheoretische Fragen deutlich, z.B. ob X in $\mathbb{R}^2$ eingebettet werden kann. Dann heißt (V, E) *planar*.

Beispielsweise ist der *vollständige Graph* K^n mit $n \in \mathbb{N}$ durch

$$V := \{1, \dots, n\} \quad \text{und} \quad E := \{\{i, k\} \mid 1 \leq i < k \leq n\}$$

gegeben. Er ist planar genau für $n \leq 4$, siehe Abbildung 3.7. ◇

⁴⁴Abbildung 3.6 zeigt allerdings *gerichtete Graphen*, bei denen $E \subseteq V \times V$ ist.

4 Zusammenhang und Trennung

In diesem Kapitel fangen wir an, *topologische Eigenschaften* von Räumen zu untersuchen, also solche, die unter Homöomorphismen (also den Isomorphismen in **Top**) erhalten bleiben.

Wenn wir zum Vergleich statt **Top** die Kategorie **Set** betrachten, dann werden die Isomorphismen dort Bijektionen genannt. Eine unter Bijektionen erhaltene Eigenschaft ist die Kardinalität oder Mächtigkeit der Menge. Zwar sind Homöomorphismen bijektiv, die Kardinalität also auch eine topologische Eigenschaft. Wir werden aber viele weitere topologische Eigenschaften kennenlernen.

4.1 Zusammenhangseigenschaften

Vielleicht haben Sie in der Schule gelernt, dass eine (reelle) Funktion dann stetig ist, wenn man ihren Graph zeichnen kann, ohne den Stift abzusetzen. Das ist keine ganz schlechte Heuristik, aber wir müssen sie natürlich präzisieren. Das bringt uns auf den Begriff des Zusammenhangs.

4.1 Definition Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum.

- $(X, \mathcal{O})$ heißt **zusammenhängend**, wenn X und $\emptyset$ die einzigen abgeschlossenen Elemente von $\mathcal{O}$ sind.
- Ein **Weg** in $(X, \mathcal{O})$ ist eine stetige Abbildung $c : I \rightarrow X$ mit $I := [0, 1]$, also ein Element des **Wegeraums** $C(I, X)$.
- Punkte $x_0, x_1 \in X$ heißen **verbindbar**, wenn es einen Weg c mit $c(0) = x_0$ und $c(1) = x_1$ gibt. Man nennt c dann einen Weg **von** x_0 **nach** x_1 .
- $(X, \mathcal{O})$ heißt **wegzusammenhängend**, wenn es für alle $x_0, x_1 \in X$ einen Weg von x_0 nach x_1 gibt.
- $(X, \mathcal{O})$ heißt **lokal zusammenhängend**, wenn es für jede Umgebung $U \subseteq X$ von $x \in X$ eine zusammenhängende Umgebung $V \subseteq U$ von x gibt.
- $(X, \mathcal{O})$ heißt **lokal wegzusammenhängend**, wenn es für jede Umgebung $U \subseteq X$ von $x \in X$ eine wegzusammenhängende Umgebung $V \subseteq U$ von x gibt.

Das sind nun viele neue Begriffe, wir brauchen also Beispiele und Sätze:

4.2 Beispiele (Zusammenhang in $\mathbb{R}$)

1. $\mathbb{R}$ ist zusammenhängend. Genauer ist eine Teilmenge $I \subseteq \mathbb{R}$ (bezüglich der Spurtopologie $\mathcal{O}_I$) genau dann zusammenhängend, wenn I ein Intervall ist.

Denn wäre ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ nicht zusammenhängend, gäbe es Punkte $x_0 < x_1 \in I$ und Umgebungen $U_0 \in \mathcal{O}_I$ von x_0 und $U_1 := I \setminus U_0 \in \mathcal{O}_I$ von x_1 , sowie einen gemeinsamen Randpunkt $x \in \text{bd}(U_0) = \text{bd}(U_1)$ (siehe (2.5)). Das wäre im Widerspruch zu Lemma 2.32.

Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ dagegen kein Intervall, dann gibt es Punkte $x_0 < x_1 \in I$ und $x \in \mathbb{R} \setminus I$ mit $x \in (x_1, x_2)$. Dann sind $I_0 := I \cap (-\infty, x)$ und $I_1 := I \setminus I_0 = I \cap (x, +\infty)$ offen, nicht leer und disjunkt, also I nicht zusammenhängend.

2. Genau die Intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ sind wegzusammenhängend. Denn für $x_0 \leq x_1 \in I$ ist $c: [0, 1] \rightarrow I$, $c(t) := (1-t)x_0 + tx_1$ ein Weg von x_0 nach x_1 .
Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ dagegen kein Intervall, dann ist I mit dem Argument aus 1. auch nicht wegzusammenhängend.
3. Jede offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$ ist lokal zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Denn jede Umgebung $V \subseteq U$ von $x \in U$ enthält ein Intervall $U_\varepsilon(x)$. Damit gibt es viele lokal zusammenhängende aber nicht zusammenhängende Teilmengen von $\mathbb{R}$, z.B. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
4. Das Schulkriterium für die Stetigkeit einer Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ kann nicht richtig sein, weil D kein Intervall sein muss (man denke etwa an rationale Funktionen). Ist aber D ein Intervall, und bedeutet 'Zeichenbarkeit', dass $\text{graph}(f) \subseteq D \times \mathbb{R}$ wegzusammenhängend ist, dann stimmt das Kriterium. Denn f ist genau dann stetig, wenn die Abbildung $\bar{f}: D \rightarrow \text{graph}(f)$, $x \mapsto (x, f(x))$ stetig ist. $\diamond$

Tatsächlich kann man überprüfen, ob ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ zusammenhängt, indem man stetige Funktionen auf diesem Raum betrachtet:

4.3 Lemma $(X, \mathcal{O})$ ist genau dann zusammenhängend, wenn jede stetige Funktion $f: X \rightarrow Y$ in jeden diskreten Raum $(Y, \mathcal{P}(Y))$ konstant ist.

Beweis:

- Ist $(X, \mathcal{O})$ zusammenhängend und $f: X \rightarrow Y$ stetig, dann ist für alle $x \in X$ die Teilmenge $U := f^{-1}(f(x)) \subseteq X$ und $f^{-1}(Y \setminus \{f(x)\}) = X \setminus U$ offen.
- Ist $(X, \mathcal{O})$ von der Form $X = X_0 \dot{\cup} X_1$ mit $X_0, X_1 \in \mathcal{O}$ nicht leer, dann ist die Indikatorfunktion $\mathbb{1}_{X_0}: X \rightarrow \{0, 1\}$ stetig und nicht konstant. $\square$

Es reicht also aus, auszutesten, ob jede stetige Funktion in den (mit diskreter Topologie versehenen) Raum $\{0, 1\}$ konstant ist.

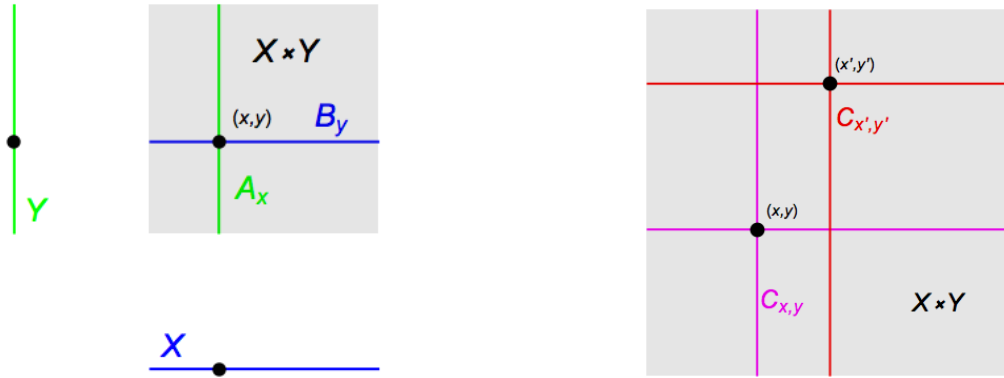


Abbildung 4.1: Zusammenhang des cartesischen Produkts $X \times Y$

Wir benötigen aber weitere Kriterien für den Zusammenhang – wir wissen ja noch nicht einmal, ob $\mathbb{R}^2$ in der Standardtopologie zusammenhängend ist.

4.4 Satz *Es seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume.*

1. *Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ zusammenhängend und gibt es eine stetige Surjektion $f : X \rightarrow Y$, dann ist auch $(Y, \mathcal{O}_Y)$ zusammenhängend.*
2. *Sind $A_i \subseteq X$ ($i \in I$) zusammenhängend, und $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ für $i, j \in I$, dann ist auch $\bigcup_{i \in I} A_i$ zusammenhängend.*
3. *Falls $X \neq \emptyset \neq Y$, dann ist $X \times Y$ in der Produkttopologie genau dann zusammenhängend, wenn $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ es sind.*⁴⁵
4. *Ist der Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ wegzusammenhängend, dann ist er auch zusammenhängend.*
5. *Ist der Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ lokal wegzusammenhängend, dann ist er auch lokal zusammenhängend.*

Beweis:

1. Sei $A \in \mathcal{O}_Y$ abgeschlossen, mit $\emptyset \neq A \neq Y$. Dann ist $B := f^{-1}(A) \in \mathcal{O}_X$ abgeschlossen, mit $\emptyset \neq B \neq X$. Also ist $(X, \mathcal{O}_X)$ nicht zusammenhängend.
2. Sei $A := \bigcup_{i \in I} A_i$ und $C \subseteq A$. Ist die Indikatorfunktion $\mathbb{1}_C : A \rightarrow \{0, 1\}$ stetig, dann sind auch deren Einschränkungen $\mathbb{1}_C|_{A_i}$ stetig, also nach Lemma 4.3 konstant. Damit ist für $i, j \in I$ auch $\mathbb{1}_C|_{A_i \cup A_j}$ konstant, denn $A_i \cap A_j \neq \emptyset$. Daher ist $\mathbb{1}_C$ konstant, also $C = \emptyset$ oder $C = A$.

⁴⁵Die Aussage überträgt sich durch Induktion auf endlich viele Faktoren, ist aber für beliebig viele Faktoren wahr, siehe [En, Theorem 6.1.15].

3. Ist $X \times Y \neq \emptyset$ zusammenhängend, dann nach Teil 1. auch X und Y , denn die Projektionen $\text{pr}_X : X \times Y \rightarrow X$ und $\text{pr}_Y : X \times Y \rightarrow Y$ sind stetige Surjektionen.

Sind $X \neq \emptyset \neq Y$ zusammenhängend, dann auch die Teilmengen

$$A_x := \{x\} \times Y \quad (x \in X) \quad \text{und} \quad B_y := X \times \{y\} \quad (y \in Y)$$

von $X \times Y$, denn A_x ist zu Y homöomorph und B_y ist zu X homöomorph. Nach Teil 2. sind damit die Teilmengen $C_{x,y} := A_x \cup B_y$ zusammenhängend, denn $A_x \cap B_y = \{(x,y)\} \neq \emptyset$, siehe Abbildung 4.1. Wieder nach Teil 2. ist auch $X \times Y = \bigcup_{(x,y) \in X \times Y} C_{x,y}$ zusammenhängend, denn $C_{x,y} \cap C_{x',y'} \neq \emptyset$.

4. $\emptyset$ ist (weg-) zusammenhängend. Sei also $X \neq \emptyset$ und $x_0 \in X$. Nach Annahme gibt es für alle $x \in X$ einen Weg $\tilde{A}_x$ von x_0 nach x . Da $A_x := \text{im}(\tilde{A}_x)$ nach Teil 1. zusammenhängend ist, und für $x, x' \in X$ der Schnitt $A_x \cap A_{x'}$ den Punkt x_0 enthält, ist $X = \bigcup_{x \in X} A_x$ nach Teil 2. zusammenhängend.

5. ergibt sich aus Teil 4. □

Teil 1. hat den **Zwischenwertsatz** der *Analysis 1* als Spezialfall: Man erhält ihn, wenn man von einer stetigen reellwertigen Funktion auf einem Intervall ausgeht und für Y ihr Bild nimmt.

4.5 Beispiele (Zusammenhang in $\mathbb{R}^n$) 1. Jede **konvexe** Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ (also insbesondere $\mathbb{R}^n$ selbst) ist wegzusammenhängend,⁴⁶ also zusammenhängend. Denn nach Definition der Konvexität ist für alle $x, y \in X$ der Weg

$$c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad c(t) = (1-t)x + ty$$

in $\mathbb{R}^n$ ein Weg in X . Daher ist X auch lokal wegzusammenhängend.

2. Da die ε -Umgebungen $U_\varepsilon(x) \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex sind, ist auch jede offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ lokal wegzusammenhängend.
3. Für $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(0) := 0$ und $f(x) := \sin(1/x)$ falls $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist der **Sinuskurvenraum** $X := \text{graph}(f) \subseteq \mathbb{R}^2$ (siehe Abb. 4.2) zusammenhängend, aber weder wegzusammenhängend noch lokal zusammenhängend. Denn
- $X^+ := \text{graph}(f|_{(0,+\infty)})$ und $X^- := \text{graph}(f|_{(-\infty,0)})$ sind zusammenhängend, denn auf diesen Intervallen ist f stetig. Weiter enthält jede Umgebung von $(0,0) \in X$ Punkte von X^+ und von X^- . Also ist X zusammenhängend.
 - Es gibt keinen Weg $c : [0, 1] \rightarrow X$ von $(0,0)$ nach $(1, f(1))$, denn f ist bei 0 unstetig.

⁴⁶und damit auch $\mathbb{C}^n$, denn die Standardtopologie auf $\mathbb{C} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist die Produkttopologie.

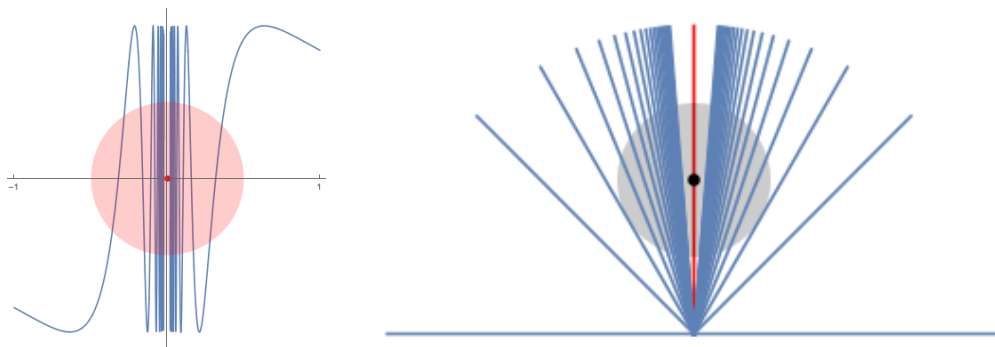


Abbildung 4.2: Links: Der Graph von $x \mapsto \sin(1/x)$. Rechts: Das Buch mit unendlich vielen Seiten.

- Für $x := (0, 0) \in X \subseteq \mathbb{R}^2$ ist $U_{1/2}(x) \cap X$ (rot in Abb. 4.2) eine Umgebung von x , die keine zusammenhängende Umgebung V von x enthält.
4. Die Strecken $I_\infty := \{ix \in \mathbb{C} \mid x \in [0, 1]\}$ und $I_n := \exp\left(\frac{i\pi}{2n}\right) I_\infty$ ($n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) sind die 'Seiten des Buchs' $X := I_\infty \cup \bigcup_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} I_n \subseteq \mathbb{C}$ (siehe Abb. 4.2, rechts). X ist wegzusammenhängend, aber nicht lokal zusammenhängend:
- Für alle $x \in X$ ist $c_x : [0, 1] \rightarrow X$, $c_x(t) := tx$ ein Weg von $0 \in X$ nach x und $\tilde{c}_x : [0, 1] \rightarrow X$, $\tilde{c}_x(t) := (1-t)x$ ein Weg von x nach 0 . Für $x, y \in X$ ist damit

$$c_{x,y} : [0, 1] \rightarrow X \quad , \quad c_{x,y}(t) = \begin{cases} \tilde{c}_x(2t) & , \quad t \in [0, 1/2] \\ c_y(2t-1) & , \quad t \in (1/2, 1] \end{cases}$$

ein Weg von x nach y .

- Für $x \in I_\infty \setminus \{0\}$ und $\varepsilon := |x|/2 > 0$ ist $U := U_\varepsilon(x) \cap X$ (grau in Abb. 4.2) eine Umgebung von x , die keine zusammenhängende Umgebung $V \subseteq U$ von x enthält. Denn wir können annehmen, dass V offen ist. Da $0 \notin V$, ist $I_n \cap V = (I_n \setminus \{0\}) \cap V$ offen. Außerdem ist für große $n \in \mathbb{Z}$ diese Menge nicht leer, und ihr (x enthaltendes) Komplement in V ebenfalls offen. $\diamond$

4.2 Zusammenhangskomponenten

4.6 Definition Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum.

- Die **Zusammenhangskomponente** $C(x)$ von $x \in X$ ist die Vereinigung der x enthaltenden zusammenhängenden Teilmengen von X .
- Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt eine **Zusammenhangskomponente** von X , wenn es ein $x \in X$ gibt mit $U = C(x)$.

- $(X, \mathcal{O})$ heißt **total unzusammenhängend**, wenn immer $C(x) = \{x\}$ gilt.

Wegen Satz 4.4.2 ist $C(x)$ selbst zusammenhängend, also die maximale x enthaltende zusammenhängende Teilmenge von X .

4.7 Lemma Die Relation $y \sim x$, falls $y \in C(x)$ ist eine Äquivalenzrelation auf X . X ist also die disjunkte Vereinigung seiner Zusammenhangskomponenten.

Beweis: • Es gilt $x \sim x$, denn $x \in C(x)$.

- Für $y \sim x$ ist $y \in C(y) \cap C(x)$, also nach Satz 4.4.2 die x enthaltende Menge $C(y) \cup C(x)$ zusammenhängend. Daher ist $C(y) \subseteq C(x)$. Da $C(y) \cup C(x)$ auch y enthält, ist $C(y) = C(x)$. Also ist auch $x \sim y$.
- Aus dem gleichen Grund folgt aus $x \sim y$ und $y \sim z$ auch $x \sim z$. □

4.8 Lemma Die Zusammenhangskomponenten sind abgeschlossene Mengen.

Beweis: Es sei $C \subseteq X$ eine Zusammenhangskomponente und $f : \text{cl}(C) \rightarrow \{0, 1\}$ stetig. Dann ist $f|_C$ wegen Lemma 4.3 konstant; wir nennen den Wert w . Da $\{w\} \subseteq \{0, 1\}$ abgeschlossen und f stetig ist, ist auch $f^{-1}(w) \subseteq X$ abgeschlossen und enthält C , ist also gleich $\text{cl}(C)$. Also ist nach der auf Lemma 4.3 folgenden Feststellung $\text{cl}(C)$ zusammenhängend und damit gleich ihrer Teilmenge C . □

Man könnte nun denken, dass die Zusammenhangskomponenten auch offen sind, ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ also die topologische Summe seiner Zusammenhangskomponenten ist. Das ist nicht immer der Fall (siehe Beispiel 4.9.2 und 3).

4.9 Beispiele (Zusammenhangskomponenten) 1. Von den deutschen *Kleinbuchstaben* besitzen die Umlaute ä, ö und ü drei Zusammenhangskomponenten, i und j zwei, und alle anderen sind zusammenhängend.

2. Die Menge $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ der *rationalen Zahlen* ist total unzusammenhängend. Denn für alle $x \in \mathbb{Q}$ ist nach Beispiel 4.2.1 $C(x) \subseteq \mathbb{Q}$ ein Intervall. Da $x \in C(x)$, kommt nur das Intervall $C(x) = \{x\}$ in Frage.

Die einelementigen Mengen $\{x\} \subseteq \mathbb{Q}$ sind aber nicht offen, also ist $\mathbb{Q}$ nicht deren topologische Summe.

3. Auch die *Cantor-Menge* $C \subseteq [0, 1]$ aus Beispiel 3.13 ist total unzusammenhängend, und ihre Punkte sind nicht offen. Denn alle in ihr enthaltenen Intervalle $I \neq \emptyset$ bestehen aus nur einem Punkt, und jeder Punkt $x \in C$ ist Häufungspunkt von C . Letzteres folgt aus seiner triadischen Darstellung $x = 2 \sum_{k=1}^{\infty} b_k 3^{-k} \in C$ mit $b_k \in \{0, 1\}$ und der Konvergenz der Folge der $x_n := x + 2(-1)^{b_n} 3^{-n} \in C \setminus \{x\}$ ($n \in \mathbb{N}$) gegen x .

4. Ist aber ein topologischer Raum lokal zusammenhängend, dann ist er die topologische Summe seiner Zusammenhangskomponenten C . Denn C ist nach Lemma 4.8 immer abgeschlossen, in diesem Fall aber auch offen, denn jeder Punkt $x \in C$ besitzt eine zusammenhängende Umgebung, also auch eine offene in C enthaltene Umgebung U_x , und $C = \bigcup_{x \in C} U_x$ ist offen.

Insbesondere ist jeder diskrete Raum, wie etwa $\mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$, topologische Summe seiner Punkte.

Gleichmaßen ist jede offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nach Beispiel 4.5.2 lokal wegzusammenhängend, d.h. wegen Satz 4.4 lokal zusammenhängend, also U die topologische Summe ihrer Zusammenhangskomponenten.

Besitzt $(X, \mathcal{O})$ nur endlich viele Zusammenhangskomponenten, dann ist er ihre topologische Summe. Denn das Komplement $X \setminus C$ jeder Zusammenhangskomponente C ist als endliche Vereinigung der anderen (abgeschlossenen) Zusammenhangskomponenten abgeschlossen. C ist also offen. $\diamond$

4.10 Aufgabe Finden Sie in **Top** ein Beispiel nicht isomorpher Räume X, Y mit Monomorphismen $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow X$ (siehe Definition 2.19). Vergleichen Sie mit dem Satz von Cantor-Bernstein-Schröder in **Set**. $\diamond$

4.3 Trennungseigenschaften

Mit der Hausdorff-Eigenschaft (Def. 2.37) haben Sie die erste Trennungseigenschaft kennengelernt. Denn besitzt der topologische Raum $(X, \mathcal{O})$ die Eigenschaft T_2 , dann gibt es für $x_1 \neq x_2 \in X$ disjunkte (offene) Umgebungen U_1 von x_1 und U_2 von x_2 . Diese Umgebungen trennen also die beiden Punkte.

Analog kann man fragen, ob Trennung durch Umgebungen auch für andere Paare disjunkter Mengen möglich ist, z.B. bestehend aus einem Punkt und einer abgeschlossenen Menge. Man kommt so zu vielen voneinander verschiedenen Trennungseigenschaften, u.A. T_0 bis T_6 . Aber nicht alle diese Trennungseigenschaften sind so wichtig wie die von Hausdorff eingeführte.

Wir haben am Beispiel der Zariski-Topologie gesehen, dass auch nicht T_2 -Räume Anwendungen besitzen. Es gibt noch weitere Beispiele:

4.11 Beispiel (Pseudometriken) Eine Abbildung $d : M \times M \rightarrow [0, \infty)$ heißt *Pseudometrik*, wenn sie symmetrisch ist ($d(x, y) = d(y, x)$), die Dreiecksungleichung $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ erfüllt und immer $d(x, x) = 0$ gilt. Man lässt also im Vergleich zur Metrik die Definitheitsbedingung $d(x, y) > 0$ für $x \neq y$ weg.

Die von den *offenen Kugeln* $U_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$ erzeugte Topologie heißt *pseudometrische Topologie* von d . Ist beispielsweise d die Nullfunktion, dann ist die pseudometrische Topologie von d die indiskrete Topologie.

In der Funktionalanalysis tauchen Pseudometriken häufig auf. So wird bei der Einführung des Lebesgue-Integrals auf dem Raum $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ der integrierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ die Pseudometrik

$$d : \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty) \quad , \quad d(f, g) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - g(x)| dx$$

benutzt. Da jede nur auf einer Nullmenge $N \subseteq \mathbb{R}^n$ von Null verschiedene Funktion Lebesgue-integrierbar mit Integral Null ist, ist die pseudometrische Topologie von d nicht Hausdorffsch. $\diamond$

Trotzdem ist in Anwendungen der Topologie die T_2 -Eigenschaft die Regel, und oft besitzen die betrachteten Räume noch bessere Trennungseigenschaften:

4.12 Definition Ein topologischer Raum heißt **normal**, wenn er hausdorffsch ist und je zwei disjunkte abgeschlossene Mengen disjunkte Umgebungen besitzen.

4.13 Beispiele 1. Alle metrischen Räume (X, d) sind (in der metrischen Topologie) normal. Denn sie sind hausdorffsch (Bemerkung 1.6), und für abgeschlossene disjunkte Teilmengen $A, B \subseteq X$ ist die zweite definierende Eigenschaft erfüllt, falls A oder B die leere Menge ist. Sonst sind

$$d_A, d_B : X \rightarrow [0, \infty) \quad , \quad d_A(x) := \inf_{a \in A} d(x, a), \quad d_B(x) := \inf_{b \in B} d(x, b)$$

stetig und auf $X \setminus A$ bzw. $X \setminus B$ positiv. Setzt man

$$U_A := \{x \in X \mid d_A(x) < d_B(x)\} \quad \text{und} \quad U_B := \{x \in X \mid d_B(x) < d_A(x)\} \quad ,$$

dann sind U_A und U_B offen, disjunkt, und $A \subseteq U_A, B \subseteq U_B$.

2. In der Literatur wird Normalität teilweise ohne Voraussetzung der Hausdorff-Eigenschaft definiert. Dann sind auch die pseudometrischen Räume normal.
3. Der $\mathbb{R}$ -Vektorraum $X := \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, versehen mit der Topologie der punktweisen Konvergenz, also nach Satz 3.14 der Produkttopologie, ist hausdorffsch. Aber X ist nicht normal, siehe [StSe], Part II, 103.6. $\diamond$

4.4 Stetige Fortsetzung von Funktionen

Mannigfaltigkeiten, wie die Sphäre S^n oder der Torus $\mathbb{T}^n := S^1 \times \dots \times S^1$ (n Faktoren) sehen *lokal* aus wie ein $\mathbb{R}^n$, ohne notwendigerweise zum $\mathbb{R}^n$ homöomorph zu sein. In der Analysis gibt es zahlreiche Möglichkeiten, stetige Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zu definieren, und man hätte diese Möglichkeit gern auch bei Mannigfaltigkeiten oder noch allgemeineren topologischen Räumen. Eine naheliegende

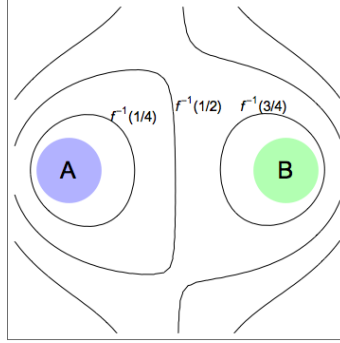


Abbildung 4.3: Urysohn-Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ für die Kreisscheiben $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$

Idee ist es, solche Funktionen zunächst lokal zu definieren und dann stetig auf den Raum fortzusetzen.

Ein Schlüsselresultat ist dabei das Lemma von **Urysohn**, siehe Abbildung 4.3.

4.14 Lemma (Urysohn) *Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein Hausdorff-Raum. $(X, \mathcal{O})$ ist genau dann normal, wenn für je zwei disjunkte abgeschlossene Mengen $A, B \subseteq X$ eine stetige Funktion $f : X \rightarrow [0, 1]$ mit $f|_A = 0$ und $f|_B = 1$ existiert.*

Beweis:

- Existiert ein solches f , dann sind $f^{-1}([0, 1/2))$ und $f^{-1}((1/2, 1])$ disjunkte offene Umgebungen von A bzw. B . $(X, \mathcal{O})$ ist also dann normal.
- Es sei $(X, \mathcal{O})$ normal. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $\mathbb{D}_n := \{k2^{-n} \mid k = 0, \dots, 2^n\} \subseteq [0, 1]$, also $\mathbb{D}_{n+1} \supseteq \mathbb{D}_n$. Dann heißt

$$\mathbb{D} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{D}_n \subseteq [0, 1]$$

die Menge der *dyadischen Zahlen* in $[0, 1]$. Den dyadischen Zahlen $r \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_0$ werden wir offene Mengen $U_A(r)$ und $U_B(r)$ zuordnen, mit

$$U_A(r) \supseteq A, \quad U_B(r) \supseteq B, \quad U_A(r) \cap U_B(r) = \emptyset, \quad (4.1)$$

und

$$U_A(t) \supseteq X \setminus U_B(s), \quad U_B(s) \supseteq X \setminus U_A(t) \quad (s < t \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_0). \quad (4.2)$$

Aus (4.1) und (4.2) folgt

$$\text{cl}(U_A(s)) \subseteq U_A(t) \quad \text{und} \quad \text{cl}(U_B(t)) \subseteq U_B(s) \quad (s < t \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_0), \quad (4.3)$$

denn $\text{cl}(U_A(s)) \subseteq X \setminus U_B(s) \subseteq U_A(t)$, und analog für die zweite Inklusion.

Als Beginn der induktiven Definition ordnen wir $\mathbb{D}_0 = \{0, 1\}$ die offenen Teilmengen $U_A(1) := X \setminus B$, $U_B(0) := X \setminus A$ zu. Dann wählen wir als Induktionsschritt für $n \in \mathbb{N}$ disjunkte offene Umgebungen

$$U_A(r) \supseteq X \setminus U_B(s) \quad \text{und} \quad U_B(r) \supseteq X \setminus U_A(t) \quad (r \in \mathbb{D}_n \setminus \mathbb{D}_{n-1}),$$

mit $s := r - 2^{-n} \in \mathbb{D}_{n-1}$ und $t := r + 2^{-n} \in \mathbb{D}_{n-1}$. Bedingung (4.2) bleibt also erfüllt. Tatsächlich sind die abgeschlossenen Mengen $X \setminus U_B(s)$ und $X \setminus U_A(t)$ disjunkt, denn ihr Schnitt ist das Komplement von $U_A(t) \cup U_B(s)$, und nach (4.2) ist $U_B(s) \supseteq X \setminus U_A(t)$. Es *gibt* also wegen der Normalitätsvoraussetzung an $(X, \mathcal{O})$ solche Mengen $U_A(r)$ und $U_B(r)$, und Bedingung (4.1) bleibt auch erhalten.

Die Mengen

$$I_A(x) := \{r \in \mathbb{D} \mid x \in U_A(r)\}, \quad I_B(x) := \{r \in \mathbb{D} \mid x \in U_B(r)\} \quad (x \in X \setminus (A \cup B))$$

sind von der Form $I_A(x) = \mathbb{D} \cap \tilde{I}_A$ und $I_B(x) = \mathbb{D} \cap \tilde{I}_B$, wobei $\tilde{I}_A$ und $\tilde{I}_B$ wegen (4.3) Intervalle sind. Das Intervall $\tilde{I}_A$ enthält wegen $U_A(1) = X \setminus B$ die 1 und das Intervall $\tilde{I}_B$ wegen $U_B(0) = X \setminus A$ die 0.

- Da nach (4.1) $U_A(r) \cap U_B(r) = \emptyset$ gilt, ist $\inf I_A(x) \geq \sup I_B(x)$.
- Da nach (4.2) für $s < t \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_0$ folgt: $U_A(t) \supseteq X \setminus U_B(s)$, und $\text{cl}(\mathbb{D}) = [0, 1]$ gilt, ist $\inf I_A(x) \leq \sup I_B(x)$.
- Also ist $\inf I_A(x) = \sup I_B(x)$.

Wir definieren $f : X \rightarrow [0, 1]$ durch $f|_A := 0$, $f|_B := 1$ und

$$f(x) := \inf I_A(x) = \sup I_B(x) \quad (x \in X \setminus (A \cup B)).$$

Dann ist f stetig, denn für $x \in (0, 1)$ sind

$$f^{-1}([0, x)) = \bigcup_{r \in \mathbb{D}, r < x} U_A(r) \quad \text{und} \quad f^{-1}((x, 1]) = \bigcup_{r \in \mathbb{D}, r > x} U_B(r)$$

als Vereinigungen offener Mengen offen. Die in $[0, 1]$ offenen (!) Intervalle $[0, x)$ und $(x, 1]$ bilden aber eine Subbasis der Topologie von $[0, 1]$. $\square$

Das Lemma von Urysohn kann man benutzen, um Funktionen fortzusetzen. ⁴⁷

⁴⁷Wir benutzen dabei, dass für $a, b \in \mathbb{R}$ durch $\tilde{F}(x) := (b - a)F(x) + a$ eine stetige Funktion $\tilde{F} : X \rightarrow [a, b]$ definiert wird, die auf A den Wert a und auf B den Wert b besitzt.

4.15 Lemma (Erweiterungslemma von Tietze) Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein normaler topologischer Raum, $C \subseteq X$ abgeschlossen und $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ stetig (und beschränkt⁴⁸). Dann gibt es eine stetige Funktion $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F|_C = f$.

Beweis: Wir können durch Multiplikation von f mit einer geeigneten Konstante voraussetzen, dass $f : C \rightarrow [-1, 1]$ gilt. Wir konstruieren $F : X \rightarrow [-1, 1]$ als Reihe $F = \sum_{k=1}^{\infty} F_k$ mit stetigen $F_k : X \rightarrow [-\frac{1}{2}c_k, \frac{1}{2}c_k]$ und $c_k := (\frac{2}{3})^k$. Damit konvergiert die Reihe gleichmäßig, F ist stetig und hat wegen $\sum_{k=1}^{\infty} c_k/2 = 1$ Werte in $[-1, 1]$. Die n -te Partialsumme wird mit $S_n := \sum_{k=1}^n F_k$ bezeichnet.

Verlangen wir für die Approximationsgüte des Fehlers nach dem n -ten Schritt

$$g_n := (f - S_n)|_C : C \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad \text{dass} \quad |g_n| \leq c_n, \quad (4.4)$$

dann ist (4.4) mit $S_0 : X \rightarrow \{0\}$ für $n = 0$ erfüllt. Wir setzen induktiv für $x \in C$

$$F_{n+1}(x) := \begin{cases} \frac{c_n}{3} & , \quad g_n(x) \in [c_n/3, c_n] \\ -\frac{c_n}{3} & , \quad g_n(x) \in [-c_n, -c_n/3] \end{cases}$$

(falls eine der beiden Bedingungen erfüllt ist) und setzen zu einer stetigen Funktion $F_{n+1} : X \rightarrow [-\frac{c_n}{3}, \frac{c_n}{3}] = [-\frac{c_{n+1}}{2}, \frac{c_{n+1}}{2}]$ fort. Das ist nach dem Urysohn-Lemma möglich, denn $A := g_n^{-1}([-c_n, -c_n/3])$ und $B := g_n^{-1}([c_n/3, c_n])$ sind in C wegen der Stetigkeit von g_n und in X wegen der Abgeschlossenheit von C abgeschlossen. Nach Konstruktion gilt auf C dann $|f - S_{n+1}| = |g_n - F_{n+1}| \leq \frac{2}{3}c_n = c_{n+1}$, also die Induktionsannahme (4.4). $\square$

5 Kompaktheit

In der *Analysis* wurde eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt genannt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist. Kompaktheit einer Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine willkommene Eigenschaft, denn dann besitzen Folgen $a : \mathbb{N} \rightarrow K$ nach dem **Satz von Bolzano-Weierstraß** einen Häufungspunkt (also eine konvergente Teilfolge), und stetige Funktionen $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ nehmen Minimum und Maximum an.

5.1 Kompaktheitsbegriffe

Wir wollen diesen Begriff nun auf beliebige topologische Räume verallgemeinern und entsprechende Eigenschaften dieser Räume beweisen. Während die Abgeschlossenheit dabei keine Probleme bereitet, steht der Begriff der Beschränktheit nicht mehr zur Verfügung. Daher definiert man Kompaktheit in der Topologie anders, und die entsprechende Definition haben Sie vielleicht schon gelesen.

⁴⁸Die Beschränktheitsbedingung kann man mit einem einfachen Zusatzargument wegfallen lassen, siehe z.B. JÄNICH [Ja], Korollar 2, Kapitel VIII.2.

5.1 Definition • Eine **offene Überdeckung** eines topologischen Raums $(X, \mathcal{O})$ ist eine Mengenfamilie $(U_i)_{i \in I}$ mit $U_i \in \mathcal{O}$ und $\bigcup_{i \in I} U_i = X$.

- Ist dann $J \subseteq I$ eine Teilmenge der Indexmenge und $(U_j)_{j \in J}$ eine offene Überdeckung, dann heißt $(U_j)_{j \in J}$ eine **Teilüberdeckung** von $(U_i)_{i \in I}$.
- Der T_2 -Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt **kompakt**⁴⁹, wenn jede offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ eine **endliche** Teilüberdeckung besitzt, d.h. eine Teilüberdeckung $(U_j)_{j \in J}$ mit endlicher Indexmenge $J \subseteq I$.
- $K \subseteq X$ heißt **kompakt**, wenn K in der Spurtopologie kompakt ist.

Man spricht in Abgrenzung von der *Analysis I*-Definition auch von **Überdeckungskompaktheit**. Nach dem **Satz von Heine und Borel** stimmen aber auf dem $\mathbb{R}^n$ die beiden Kompaktheitsdefinitionen überein.

Wir schauen uns jetzt ihr Verhältnis für allgemeinere topologische Räume an.

5.2 Lemma Ist eine Teilmenge $K \subseteq X$ eines Hausdorff-Raums $(X, \mathcal{O})$ kompakt, dann ist sie abgeschlossen.

Beweis: Wir zeigen, dass $U := X \setminus K$ offen ist, indem wir U als Vereinigung $U = \bigcup_{x \in U} U_x$ offener Umgebungen U_x von x darstellen.

Für $x \in U$ und $y \in K$ gibt es disjunkte offene Umgebungen $V_{x,y}$ von x und $W_{y,x}$ von y , denn X ist T_2 . Die offene Überdeckung $(W_{y,x} \cap K)_{y \in K}$ von K enthält eine endliche Teilüberdeckung $(W_{y_1,x} \cap K, \dots, W_{y_n,x} \cap K)$, denn K ist kompakt. Also ist $U_x := \bigcap_{i=1}^n V_{x,y_i}$ eine offene Umgebung von x , und $U_x \cap K = \emptyset$. $\square$

Die Implikation

$$"K \text{ überdeckungskompakt} \implies K \text{ abgeschlossen und beschränkt}" \quad (5.1)$$

des Satzes von Heine und Borel verallgemeinert sich von Teilmengen K des $\mathbb{R}^n$ auf Teilmengen *metrischer* Räume, wo wir einen Beschränktheits-Begriff haben:

5.3 Definition Eine Teilmenge $B \subseteq X$ eines metrischen Raums (X, d) heißt **beschränkt**, wenn $B = \emptyset$ oder der **Durchmesser**

$$\text{diam}(B) := \sup\{d(x, y) \mid x, y \in B\}$$

von B endlich ist.

5.4 Lemma Ist eine Teilmenge $K \subseteq X$ eines metrischen Raums (X, d) kompakt, dann ist sie beschränkt.

⁴⁹ oft wird in der Definition von Kompaktheit *nicht* die T_2 -Eigenschaft von $(X, \mathcal{O})$ gefordert.

Beweis: Es sei $K \neq \emptyset$ kompakt. Dann besitzt die in K offene Überdeckung $(U_1(x) \cap K)_{x \in K}$ von K eine endliche Teilüberdeckung $(U_1(x_i) \cap K)_{i=1, \dots, n}$. Wegen der Dreiecksungleichung ist also der Durchmesser von K beschränkt:

$$\text{diam}(K) \leq \text{diam}(\{x_1, \dots, x_n\}) + 2 < \infty. \quad \square$$

Im Gegensatz zum $\mathbb{R}^n$ muss aber in metrischen Räumen die zu (5.1) inverse Implikation nicht gelten. Aus der Beschränktheit und Abgeschlossenheit einer Teilmenge muss also nicht ihre Kompaktheit folgen.

Statt ihrer Abgeschlossenheit sollte (wie das Gegenbeispiel der abgeschlossenen und beschränkten, aber nicht kompakten Teilmenge $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ von $\mathbb{Q}$ nahelegt) ihre **Vollständigkeit**⁵⁰ gefordert werden.

Aber auch Vollständigkeit und Beschränktheit impliziert nicht die Kompaktheit:

5.5 Beispiel (Einheits-Kugel im Hilbert-Raum ℓ^2)

Der *Hilbertsche Folgenraum* ist der vollständige unitäre Vektorraum

$$\ell^2 := \{a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \mid \sum_{\ell \in \mathbb{N}} |a_\ell|^2 < \infty\}$$

mit Skalarprodukt $\langle a, b \rangle := \sum_{\ell \in \mathbb{N}} a_\ell \overline{b_\ell}$. $a \in \ell^2$ besitzt die Norm $\|a\|_2 := \sqrt{\sum_{\ell \in \mathbb{N}} |a_\ell|^2} = \langle a, a \rangle^{1/2}$ und den Abstand $d(a, b) := \|a - b\|_2$ zu $b \in \ell^2$. Die Einheitskugel

$$B := \{a \in \ell^2 \mid \|a\|_2 \leq 1\}$$

ist beschränkt (mit Durchmesser $\text{diam}(B) = 2$) und abgeschlossen⁵¹, denn die Norm ist eine stetige Abbildung $\|\cdot\|_2 : \ell^2 \rightarrow [0, \infty)$. Aber B ist nicht kompakt.

Denn sei $e(m) \in \ell^2$ für $m \in \mathbb{N}$ der Punkt mit $e_\ell(m) = \delta_{m, \ell}$, also $\|e(m)\|_2 = 1$, d.h. $e(m) \in B$.⁵² Dann gilt für alle $n \neq m \in \mathbb{N}$: $d(e(n), e(m)) = \|e(n) - e(m)\|_2 = \sqrt{2}$. Damit gibt es für die Überdeckung $(U_{1/2}(a))_{a \in B}$ von B mit offenen Kugeln vom Radius $1/2$, also Durchmesser $1 < \sqrt{2}$ keine endliche Teilüberdeckung. $\diamond$

Eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie folgenkompakt ist:

5.6 Definition Eine topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt **folgenkompakt**, wenn jede Folge $a : \mathbb{N} \rightarrow X$ eine konvergente Teilfolge besitzt.

Folgenkompakte Räume müssen noch nicht einmal hausdorffsch sein, also (im Sinn unserer Definition) auch nicht kompakt. Und es gibt auch folgenkompakte Räume, die das eigentliche Kompaktheitskriterium, die Existenz einer endlichen Teilüberdeckung verletzen.

Umgekehrt müssen kompakte Räume nicht folgenkompakt sein:

⁵⁰Ein metrischer Raum heißt **vollständig**, wenn in ihm jede Cauchy-Folge konvergiert.

⁵¹also als abgeschlossene Teilmenge des vollständigen metrischen Raums ℓ^2 vollständig.

⁵²Nebenbei ist $\{e(m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis des Hilbert-Raums ℓ^2 .

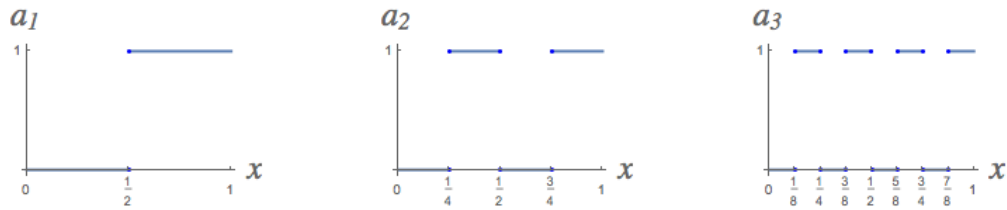


Abbildung 5.1: Der Abbildungsraum $\text{Abb}([0, 1], \{0, 1\})$ ist kompakt. Aber er ist nicht folgenkompakt, denn die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt keinen Häufungspunkt.

5.7 Beispiel (Kompakter, aber nicht folgenkompakter Raum)

Die Produkttopologie $\mathcal{O}$ für die Abbildungsmenge $X := \text{Abb}(I, \{0, 1\}) = \{0, 1\}^I$ ist nach Bemerkung 3.11.1 die der punktweisen Konvergenz. Wir benutzen das Intervall $I := [0, 1)$ und die diskrete Topologie auf $\{0, 1\}$. Damit ist $(X, \mathcal{O})$ ein Hausdorff-Raum, und nach Kapitel 5.3 kompakt. Aber $(X, \mathcal{O})$ ist nicht folgenkompakt. Das zeigen wir, indem wir die Folge

$$a : \mathbb{N} \rightarrow X, \quad a_n(x) := x_n \quad \text{für die 2-adische Darstellung } x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n 2^{-n}$$

benutzen. ⁵³ Die ersten drei Glieder der Folge sind in Abbildung 5.1 dargestellt.

Ist nun $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge, dann konvergiert sie an keinem Punkt $x \in I$ mit dyadischer Darstellung $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n 2^{-n}$, für den $x_{n_k} = \frac{1}{2}(1 + (-1)^k)$ ist. $\diamond$

Für metrische Räume aber sind die beiden Kompaktheitsbegriffe identisch:

5.8 Satz *Ist der topologische Raum $(X, \mathcal{O})$ metrisierbar, dann ist er genau dann kompakt, wenn er folgenkompakt ist.*

Beweis: Es sei d eine Metrik auf X , welche die Topologie $\mathcal{O}$ erzeugt.

- Ist $(X, \mathcal{O})$ kompakt, und $a : \mathbb{N} \rightarrow X$ eine Folge, dann gibt es einen Häufungspunkt $x^* \in X$ von a . Denn sonst würde für alle $x \in X$ ein $n(x) \in \mathbb{N}$ existieren, sodass die Kugel $U_{1/n(x)}(x)$ nur endlich oft von der Folge getroffen würde. Da diese offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt, hätte die Folge nur endlich viele Glieder.
- Es sei $(X, \mathcal{O})$ folgenkompakt und $(V_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung. Dann gibt es für die Metrik d die folgende Überdeckung von K durch Kugeln: Es sei

$$\varepsilon(x) := \frac{1}{2} \sup \{ r \in (0, 1] \mid \exists i \in I : U_r(x) \subseteq V_i \} \quad (x \in X).$$

⁵³Die Darstellung ist eindeutig, weil wir fordern, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht die Endperiode 1 hat.

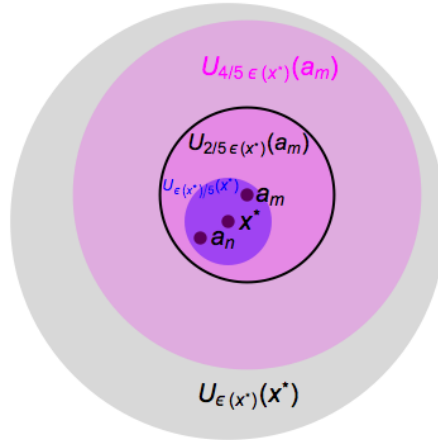


Abbildung 5.2: Zu Satz 5.8: $a_n \in U_{\varepsilon(a_m)}(a_m)$ für Punkte $a_m, a_n \in U_{\varepsilon(x^*)/5}(x^*)$.

Dann gibt es tatsächlich ein $i(x) \in I$ mit $U_{\varepsilon(x)}(x) \subseteq V_{i(x)}$. Wir nehmen nun an, dass die offene Überdeckung $(V_i)_{i \in I}$ keine endliche Teilüberdeckung besitzt. Daher können wir induktiv eine Folge

$$a : \mathbb{N} \rightarrow X \quad \text{mit} \quad a_n \notin \bigcup_{m=1, \dots, n-1} V_{i(a_m)} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (5.2)$$

wählen. Eine Teilfolge von a konvergiert nach Annahme. Wir nennen diese Teilfolge wieder a , und ihren Grenzwert x^* . Wir wählen $m < n \in \mathbb{N}$, sodass a_m und a_n in $U_{\varepsilon(x^*)/5}(x^*)$ enthalten sind. Dann ist $U_{4/5 \varepsilon(x^*)}(a_m) \subseteq U_{\varepsilon(x^*)}(x^*) \subseteq V_{i(x^*)}$, also $\varepsilon(a_m) \geq 2/5 \varepsilon(x^*)$ und analog $\varepsilon(a_n) \geq 2/5 \varepsilon(x^*)$.

Wegen $d(a_m, a_n) \leq d(a_m, x^*) + d(x^*, a_n) < 2/5 \varepsilon(x^*)$ folgt entgegen unserer Annahme (5.2), dass $a_n \in U_{\varepsilon(a_m)}(a_m) \subseteq V_{i(a_m)}$, siehe Abbildung 5.2. $\square$

Der Abbildungsraum $\text{Abb}(I, \{0, 1\})$ mit der Topologie der punktweisen Konvergenz aus Beispiel 5.7 ist also nicht metrisierbar.

5.9 Aufgabe Der Abbildungsraum ⁵⁴ $\text{Abb}(I, \{0, 1\})$ ist metrisierbar, wenn I eine abzählbare Menge ist. Geben Sie für $I = \mathbb{N}$ eine solche Metrik an. $\diamond$

Man kann daher die Folgenkompaktheit eines metrischen Raums zeigen, wenn man seine Kompaktheit beweisen will.

5.10 Beispiel (Kompakta in ℓ^2 und der Satz von Bolzano–Weierstraß)

Wir zeigen hier mit Satz 5.8, dass die Teilmenge

$$K := \{a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \mid \forall \ell \in \mathbb{N} : |a_\ell| \leq 1/\ell\}$$

⁵⁴wieder mit Produkttopologie für die diskrete Topologie auf $\{0, 1\}$

des hilbertschen Folgenraums ℓ^2 kompakt ist. Zunächst sollte man sich klar machen, dass die Elemente a von K tatsächlich in ℓ^2 liegen, denn

$$\|a\|_2^2 = \sum_{\ell=1}^{\infty} |a_\ell|^2 \leq \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell^{-2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty.$$

- K ist eine abgeschlossene Teilmenge des vollständigen metrischen Raums ℓ^2 . Wenn also eine Folge $g : \mathbb{N} \rightarrow K$ in ℓ^2 konvergiert, konvergiert sie auch in K . Um mit Satz 5.8 zu zeigen, dass K kompakt ist, werden wir also beweisen, dass jede Folge $f : \mathbb{N} \rightarrow K$, $m \mapsto f(m)$ eine in ℓ^2 konvergente Teilfolge g besitzt.
- Eine Folge $g : \mathbb{N} \rightarrow K$ konvergiert in ℓ^2 , wenn für alle $\ell \in \mathbb{N}$ die Folge

$$g_\ell : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}, \quad m \mapsto g_\ell(m)$$

konvergiert.⁵⁵ Denn sei $h_\ell := \lim_{m \rightarrow \infty} g_\ell(m) \in \mathbb{C}$ der Grenzwert der ℓ -ten Koordinate. Dann gibt es für alle $\varepsilon > 0$ und $N_1 \equiv N_1(\varepsilon) := \lceil 5/\varepsilon^2 \rceil$ ein $N_2 \equiv N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$|g_\ell(m) - h_\ell| < 1/N_1 \quad (\ell \leq N_1, m \geq N_2).$$

Für $\ell > N_1$ wissen wir immerhin, dass $|g_\ell(m) - h_\ell| \leq 2/\ell$, denn g, h sind in K . Wegen

$$\sum_{\ell=N_1+1}^{\infty} \frac{1}{\ell^2} \leq \sum_{\ell=N_1}^{\infty} \frac{1}{\ell(\ell+1)} = \sum_{\ell=N_1}^{\infty} \left(\frac{1}{\ell} - \frac{1}{\ell+1} \right) = 1/N_1$$

folgt für $m \geq N_2$

$$\|g(m) - h\|_2 = \left(\sum_{\ell=1}^{\infty} |g_\ell(m) - h_\ell|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{\ell=1}^{N_1} |g_\ell(m) - h_\ell|^2 + \sum_{\ell=N_1+1}^{\infty} |g_\ell(m) - h_\ell|^2 \right)^{1/2}$$

$$\leq (N_1/N_1^2 + 4/N_1)^{1/2} = (5/N_1)^{1/2} \leq \varepsilon.$$

• Nun zeigen wir die Existenz einer Teilfolge $g : \mathbb{N} \rightarrow K$ von $f = (f(m))_{m \in \mathbb{N}}$, für die die $g_\ell : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ tatsächlich konvergieren. An dieser Stelle ist es nützlich, sich an den Beweis des Satzes von Bolzano-Weierstraß für beschränkte vektorwertige Folgen $a \equiv a^{(0)} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ (Satz 7.41 meiner *Analysis I*) zu erinnern: Das m -te Glied ist ein Vektor $a(m) = (a_1(m), \dots, a_n(m)) \in \mathbb{R}^n$ der Länge n .

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß für reellwertige Folgen existiert daher eine konvergente Teilfolge $(a_1(k^{(1)}(m)))_{m \in \mathbb{N}}$ mit streng monoton wachsender Indizierung $k^{(1)} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Damit ist die Teilfolge $a^{(1)} := a \circ k^{(1)} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$

⁵⁵Das ist erst einmal gar nicht selbstverständlich, denn z.B. für die Folge $e : \mathbb{N} \rightarrow B$, $m \mapsto e(m)$ mit der Orthonormalbasis von ℓ^2 aus Beispiel 5.5 konvergiert ja für alle $\ell \in \mathbb{N}$ die Koordinatenfolge $m \mapsto e_\ell(m) = \delta_{m,\ell}$ gegen Null. Trotzdem ist die Folge e keine Cauchy-Folge, konvergiert also nicht in ℓ^2 , denn $\|e(m) - e(n)\|_2 = \sqrt{2}$ für $m \neq n \in \mathbb{N}$.

Der Unterschied ist, dass unsere Folge g Werte in K statt in der Einheitskugel B annimmt.

mit der gleichen Schranke beschränkt. Induktiv finden wir für alle $\ell = 1, \dots, n$ streng monoton wachsende Indizierungen $k^{(\ell)} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, sodass für die Teilfolge $a^{(\ell)} := a^{(\ell-1)} \circ k^{(\ell)} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ der Grenzwert $\lim_{m \rightarrow \infty} a^{(\ell)}(m) \in \mathbb{R}$ der ℓ -ten Koordinate existiert. Damit konvergiert dann die Teilfolge $g := a^{(n)} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Bei der Übertragung des Satzes von Bolzano-Weierstraß auf unsere Fragestellung stört es nicht, dass dort $\mathbb{R}^n$ -wertige statt $\mathbb{C}^n$ -wertige Folgen betrachtet werden. Das Problem ist, dass wir jetzt mit ℓ^2 einen unendlich-dimensionalen statt eines n -dimensionalen Vektorraums vorliegen haben.

Wir fangen bei der Definition von g wie im n -dimensionalen Fall an, definieren also mit $a^{(0)} := a : \mathbb{N} \rightarrow K$ induktiv die Teilfolgen

$$a^{(\ell)} := a^{(\ell-1)} \circ k^{(\ell)} : \mathbb{N} \rightarrow K \quad (\ell \in \mathbb{N}),$$

für die die ersten ℓ Koordinatenfolgen $a_1^{(\ell)}, \dots, a_\ell^{(\ell)} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ alle konvergieren.

Wir werden aber nie fertig mit der Auswahl der Teilfolgen $a^{(\ell)}$ von a , denn $\ell \in \mathbb{N}$. Daher benutzen wir ein sogenanntes *Diagonalargument*: Wir setzen als Teilfolge von a die Diagonalfolge

$$g : \mathbb{N} \rightarrow K \quad , \quad g(m) := a^{(m)}(m).$$

Damit konvergiert g gegen ein Element von K , denn alle Koordinatenfolgen $g_\ell : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$, $g_\ell(m) = a_\ell^{(m)}(m)$ konvergieren. $\diamond$

Kompakte Teilmengen von Banach-Räumen sind in der Operatortheorie wichtig.

5.11 Definition Eine lineare Abbildung $A : X \rightarrow Y$ zwischen den Banach-Räumen X und Y heißt **kompakt**, wenn für jede beschränkte Teilmenge $M \subseteq X$ gilt: $\text{cl}(A(M)) \subseteq Y$ ist kompakt.

Wir können aus Beispiel 5.10 schließen, dass für den Hilbert-Raum ℓ^2 der Multiplikationsoperator $A : \ell^2 \rightarrow \ell^2$, $(Af)_n = f_n/n$ kompakt ist. Denn er bildet die Einheitskugel in die kompakte Menge K ab.

Kompakte Endomorphismen haben ähnliche Eigenschaften wie Endomorphismen endlich-dimensionaler Vektorräume (siehe etwa REED und SIMON [RS, Kapitel VI.5]. Beispielsweise gelten für A die Eigenwertgleichungen $Ae(n) = \lambda_n e(n)$ ($n \in \mathbb{N}$), mit Eigenwerten $\lambda_n := 1/n$.

5.2 Vererbung von Kompaktheit

Da Kompaktheit eines topologischen Raums $(X, \mathcal{O})$ mittels Überdeckungen von X durch offene Mengen $U_i \in \mathcal{O}$ definiert wurde, ist sie offensichtlich eine unter Homöomorphismen erhaltene *topologische Eigenschaft*.⁵⁶

⁵⁶Siehe die Diskussion am Anfang von Kapitel 4.

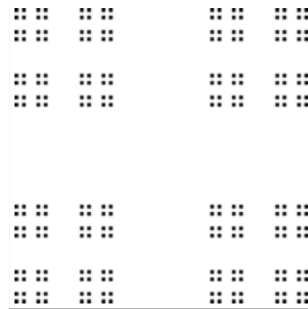


Abbildung 5.3: Die Cantor-Menge C^2 .

Dass Kompaktheit wie Zusammenhang eine topologische Eigenschaft ist, erlaubt eine topologische Charakterisierung gewisser Mengen.

5.12 Beispiel (Cantor-Menge) Wir können einen topologischen Raum $(X, \mathcal{O})$ *Cantor-Menge* nennen, wenn er homöomorph zur cantorschen $1/3$ -Menge C aus Beispiel 3.13 ist. Wir stellen fest, dass C nicht leer, kompakt und total unzusammenhängend ist, sowie dass jeder Punkt Häufungspunkt von C ist. Diese topologischen Eigenschaften übertragen sich also auf $(X, \mathcal{O})$.

Man kann aber zeigen, dass *jeder* topologische Raum mit diesen relativ leicht überprüfbareren Eigenschaften homöomorph zu C ist (siehe FRANZ [Fr]).

Beispiele sind die $n \in \mathbb{N}$ -fachen Produkte C^n von C mit sich (Abbildung 5.3). $\diamond$

Aber Kompaktheit wird auch anders als durch Homöomorphismen vererbt:

5.13 Lemma *Eine abgeschlossene Teilmenge $K \subseteq X$ eines kompakten topologischen Raums $(X, \mathcal{O})$ ist kompakt.*

Beweis: • Teilmengen von T_2 -Räumen erben die T_2 -Eigenschaft.

• Ist $K \subseteq X$ abgeschlossen und $(U_i)_{i \in I}$ eine (bezüglich der Spurtopologie) offene Überdeckung von K , dann existieren $V_i \in \mathcal{O}$ mit $U_i = V_i \cap K$.

Ergänzt man die V_i um die offene Menge $X \setminus K$, dann besitzt diese offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung, bestehend aus den V_j mit $j \in J \subseteq I$ und $X \setminus K$. Damit ist $(U_j)_{j \in J}$ eine endliche Teilüberdeckung von K . $\square$

5.14 Lemma *Ist die Abbildung $f: X \rightarrow Y$ stetig, der Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ kompakt und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ hausdorffsch, dann ist auch das Bild $\text{im}(X) \subseteq Y$ kompakt.*

Beweis: Es sei $(U_i)_{i \in I}$ eine in der Teilraumtopologie offene Überdeckung von $\text{im}(X) \subseteq Y$. Dann sind wegen der Stetigkeit von f die Urbilder $V_i := f^{-1}(U_i)$ offen, und sie bilden damit eine offene Überdeckung $(V_i)_{i \in I}$ von X . Wegen der Kompaktheit von X gibt es eine endliche Teilüberdeckung $(V_j)_{j \in J}$ von X . Damit ist auch $(U_j)_{j \in J}$ eine endliche Teilüberdeckung von $\text{im}(X)$. $\square$

Da jede kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$ beschränkt und abgeschlossen ist, also (falls sie nicht leer ist) ihr Supremum und Infimum enthält, folgt aus Lemma 5.14:

5.15 Korollar *Eine stetige Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem kompakten topologischen Raum $X \neq \emptyset$ nimmt Minimum und Maximum an, d.h. es existieren Minimal- und Maximalstellen $x_{\min}, x_{\max} \in X$ mit*

$$f(X) \subseteq [f(x_{\min}), f(x_{\max})]. \quad \diamond$$

Kompaktheit hilft auch, wenn man feststellen will, ob eine stetige Abbildung ein Homöomorphismus ist:

5.16 Lemma *Es sei $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Bijektion eines kompakten Raums auf einen T_2 -Raum. Dann ist f ein Homöomorphismus.*

Beweis: Es ist zu zeigen, dass $g := f^{-1} : Y \rightarrow X$ stetig ist. Sei dazu $A \subseteq X$ abgeschlossen, also kompakt (siehe Lemma 5.13). Dann ist $g^{-1}(A) = f(A)$. Nach Lemma 5.14 ist damit auch $g^{-1}(A)$ kompakt, und nach Lemma 5.2 abgeschlossen. g ist also stetig. $\square$

5.17 Bemerkungen (Lemma 5.16)

1. Lemma 5.16 ist schon deshalb nützlich, weil die Inverse einer explizit⁵⁷ gegebenen Bijektion $f : X \rightarrow Y$ oft nicht explizit geschrieben werden kann.
2. Am Beispiel der stetigen Bijektion $f : [0, 2\pi) \rightarrow S^1$, $x \mapsto \exp(ix)$ sehen wir, dass die Aussage von Lemma 5.16 ohne die Kompaktheitsforderung an den Definitionsbereich X nicht wahr ist. Denn das Bild der im nicht kompakten Raum $[0, 2\pi)$ offenen Teilmenge $[0, \pi)$ unter f ist ein halboffener Halbkreis, also nicht offen, und f^{-1} ist daher unstetig. $\diamond$

Im nächsten Kapitel werden wir sehen, dass sich Kompaktheit auch auf das Produkt beliebig vieler kompakter Räume vererbt.

5.3 Der Satz von Tychonov

Wir beginnen mit einer Umformulierung von Kompaktheit, das die Dualität zwischen Offenheit und Abgeschlossenheit benutzt.

5.18 Definition • *Eine Familie $(A_i)_{i \in I}$ von Teilmengen einer Menge X besitzt die **endliche Durchschnittseigenschaft**, wenn alle Schnitte $\bigcap_{j \in J} A_j$ mit endlicher Indexmenge $J \subseteq I$ nicht leer sind.*

⁵⁷z.B. mit elementaren Funktionen. Beispiel: Die stetige Bijektion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x + e^x$.

- Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ besitzt die **endliche Durchschnittseigenschaft**, wenn jede Familie $(A_i)_{i \in I}$ abgeschlossener Teilmengen mit endlicher Durchschnittseigenschaft einen nicht leeren Schnitt $\bigcap_{i \in I} A_i$ besitzt.

5.19 Beispiele (endliche Durchschnittseigenschaft von Räumen)

1. Die kompakten Intervalle $X := [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ mit Spurtopologie besitzen diese Eigenschaft, was man sich bei der **Intervallschachtelung** zunutze macht.
2. $\mathbb{R}$ besitzt nicht die endliche Durchschnittseigenschaft.
Denn für die durch $i \in \mathbb{R}$ indizierten abgeschlossenen Intervalle $A_i := [i, \infty)$ ist $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k} = A_i$ mit $i := \max(i_1, \dots, i_k)$, aber $\bigcap_{i \in \mathbb{R}} A_i = \emptyset$. $\diamond$

Dies verallgemeinert sich folgendermaßen:

5.20 Lemma *Ein topologischer Raum besitzt genau dann die endliche Durchschnittseigenschaft, wenn jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung enthält. Also ist sie für T_2 -Räume zur Kompaktheit äquivalent.*

Beweis:

- $(U_i)_{i \in I}$ sei eine offene Überdeckung von X . Dann sind die $A_i := X \setminus U_i$ abgeschlossen, und $\bigcap_{i \in I} A_i = X \setminus \bigcup_{i \in I} U_i = \emptyset$. $(X, \mathcal{O})$ habe nun die endliche Durchschnittseigenschaft. Wegen $\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset$ gibt es dann eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ mit $\bigcap_{j \in J} A_j = \emptyset$, und entsprechend $\bigcup_{j \in J} U_j = X \setminus \bigcap_{j \in J} A_j = X$.
- $(X, \mathcal{O})$ habe nicht die endliche Durchschnittseigenschaft, d.h. es gibt eine Familie $(A_i)_{i \in I}$ abgeschlossener Teilmengen, für die alle Schnitte $\bigcap_{j \in J} A_j$ mit endlicher Indexmenge $J \subseteq I$ nicht leer sind, aber $\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset$.
Dann ist $(U_i)_{i \in I}$ mit $U_i := X \setminus A_i$ eine offene Überdeckung, die aber keine endliche Teilüberdeckung enthält, denn $\bigcup_{j \in J} U_j = X \setminus \bigcap_{j \in J} A_j \subsetneq X$. $\square$

5.21 Lemma *Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Für eine Familie $(A_i)_{i \in I}$ abgeschlossener Teilmengen mit endlicher Durchschnittseigenschaft gibt es eine maximale Familie $(A_m)_{m \in M}$, mit Indexmenge $M \supseteq I$ und $A_m \subseteq X$ mit endlicher Durchschnittseigenschaft.*

Beweis: Wichtig für den Beweis ist, dass nicht die Abgeschlossenheit der hinzukommenden $A_m \subseteq X$, $m \in M \setminus I$ gefordert wird. Er benutzt das Auswahlaxiom der Mengentheorie.⁵⁸ Siehe HOCKING und YOUNG [HY, Lemma 1-29]. $\square$

5.22 Lemma *Für eine Menge X sei $(A_m)_{m \in M}$ mit $A_m \subseteq X$ eine maximale Familie mit endlicher Durchschnittseigenschaft. Dann gilt:*

⁵⁸Die Geltung des Satzes von Tychonov ist sogar **äquivalent** zur Geltung des Auswahlaxioms!

1. Für jede endliche Indexmenge $J \subseteq M$ ist $\bigcap_{j \in J} A_j \in \{A_m \mid m \in M\}$.
2. Hat $A \subseteq X$ nicht leeren Schnitt mit allen A_m , dann ist $A \in \{A_m \mid m \in M\}$.

Beweis:

1. Für $A := \bigcap_{j \in J} A_j$ und jede endliche Indexmenge $\tilde{J} \subseteq M$ ist auch $\hat{J} := J \cup \tilde{J} \subseteq M$ endlich, also $A \cap \bigcap_{j \in \tilde{J}} A_j = \bigcap_{j \in \hat{J}} A_j \neq \emptyset$. Da $(A_m)_{m \in M}$ eine maximale Familie mit endlicher Durchschnittseigenschaft ist, ist A in ihr enthalten.
2. Zu zeigen ist wegen der Maximalität von $(A_m)_{m \in M}$ nur, dass für jede endliche Indexmenge $J \subseteq M$ gilt: $A \cap \bigcap_{j \in J} A_j \neq \emptyset$. Das folgt aber aus 1., denn $\bigcap_{j \in J} A_j \in \{A_m \mid m \in M\}$. $\square$

5.23 Satz (Tychonov) Beliebige Produkte kompakter Räume sind kompakt.

Beweis: Für alle Indices $h \in H$ seien die Räume $(X_h, \mathcal{O}_h)$ kompakt, und die Menge $X := \prod_{h \in H} X_h$ sei mit der Produkttopologie $\mathcal{O}$ versehen. Falls ein X_h leer wäre, dann wäre nach Bem. 3.11.2 auch $X = \emptyset$. Wir nehmen also $X_h \neq \emptyset$ an.

- $(X, \mathcal{O})$ ist hausdorffsch. Denn für je zwei Punkte $x = (x_h)_{h \in H} \neq y = (y_h)_{h \in H}$ von X gibt es einen Index h_0 mit $x_{h_0} \neq y_{h_0}$. Weil $(X_{h_0}, \mathcal{O}_{h_0})$ hausdorffsch ist, gibt es disjunkte Umgebungen $U_{h_0}, V_{h_0} \in \mathcal{O}_{h_0}$ von x_{h_0} bzw. y_{h_0} . Wenn wir für alle $h \in H \setminus \{h_0\}$ die Wahl $U_h := V_h := X_h$ treffen, sind $U := \prod_{h \in H} U_h$ und $V := \prod_{h \in H} V_h$ disjunkte offene Umgebungen von x bzw. y .
- Wir zeigen mit Lemma 5.20, dass $(X, \mathcal{O})$ kompakt ist, indem wir die endliche Durchschnittseigenschaft von $(X, \mathcal{O})$ beweisen. Wir benutzen dabei natürlich, dass die Räume $(X_h, \mathcal{O}_h)$ kompakt sind.

Sei also $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen $A_i \subseteq X$ mit endlicher Durchschnittseigenschaft. Wir müssen zeigen, dass $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ gilt. Da $(X_h, \mathcal{O}_h)$ kompakt ist, gibt es nach Lemma 5.20 ein $x_h \in \bigcap_{i \in I} \text{cl}(\text{pr}_h(A_i))$, und wir setzen $x := (x_h)_{h \in H} \in X$. Wenn $x \in A_i$ für alle $i \in I$ gelten würde, dann wäre $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ und damit wäre $(X, \mathcal{O})$ kompakt. Leider wissen wir das nicht, siehe Abbildung 5.4, links.

Nach Lemma 5.21 gibt es aber eine maximale Familie $(A_m)_{m \in M}$ mit endlicher Durchschnittseigenschaft und $M \supseteq I$. Auch deren Projektionen $(\text{pr}_h(A_m))_{m \in M}$ in den Faktoren X_h besitzen die endliche Durchschnittseigenschaft. Diese geht auch nicht beim Übergang zu den abgeschlossenen Mengen $\text{cl}(\text{pr}_h(A_m)) \subseteq X_h$ verloren. Da $(X_h, \mathcal{O}_h)$ kompakt ist, gibt es ein $x_h \in \bigcap_{m \in M} \text{cl}(\text{pr}_h(A_m))$, und wir setzen $x := (x_h)_{h \in H} \in X$, siehe Abb. 5.4, rechts.

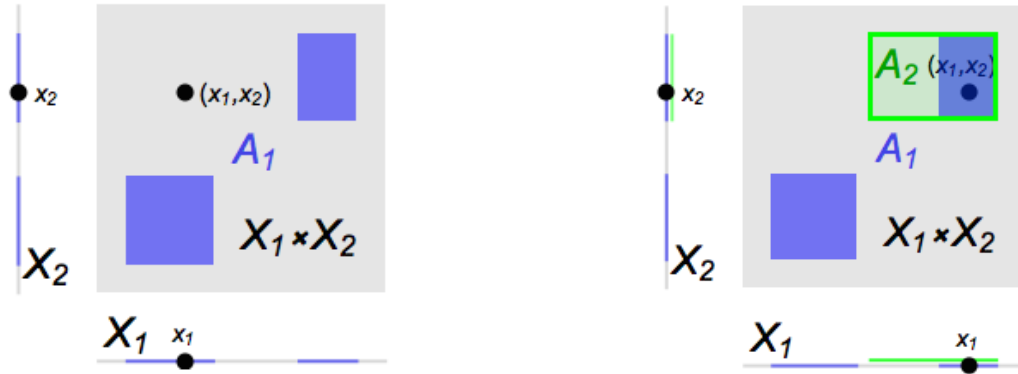


Abbildung 5.4: Endliche Durchschnittseigenschaft für Mengenfamilien in $X_1 \times X_2$. Links: Aus den Punkten $x_h \in \text{pr}_h(A_1)$ der Projektionen von $A_1 \subseteq X_1 \times X_2$ kann kein Punkt von A_1 sicher rekonstruiert werden. Rechts: Eine maximale, A_1 und A_2 enthaltende Familie lässt eine solche Rekonstruktion zu.

- Ist nun $U \in \mathcal{O}$ ein Element der Basis (3.4) der Produkttopologie, und ist U Umgebung von x , dann ist $U \in \{A_m \mid m \in M\}$.

Denn nach (3.4) hat U die Form

$$U = \text{pr}_{h_1}^{-1}(U_{h_1}) \cap \dots \cap \text{pr}_{h_n}^{-1}(U_{h_n}) \in \mathcal{O} \quad (U_{h_i} \in \mathcal{O}_{h_i}).$$

$U \neq \emptyset$, denn $x \in U$. Ergänzen wir mit $U_h := X_h$ falls $h \in H \setminus \{h_1, \dots, h_n\}$, dann ist also $\text{pr}_h(U) = U_h \in \mathcal{O}_h$ ($h \in H$).

Damit hat U nicht leeren Schnitt mit allen A_m . Denn da $x_{h_i} \in U_{h_i} \cap \text{cl}(\text{pr}_{h_i}(A_m))$, ist mit Lemma 2.36 auch $U_{h_i} \cap \text{pr}_{h_i}(A_m) \neq \emptyset$, was

$$\text{pr}_{h_i}^{-1}(U_{h_i}) \cap A_m \neq \emptyset \quad (m \in M, i = 1, \dots, n)$$

impliziert. Damit ist nach Lemma 5.22.2 $\text{pr}_{h_i}^{-1}(U_{h_i}) \in \{A_m \mid m \in M\}$, also nach Lemma 5.22.1 auch $U \in \{A_m \mid m \in M\}$.

- Nach Definition der maximalen Familie $(A_m)_{m \in M}$ haben damit alle Basiselemente $U \ni x$ der Produkttopologie nicht leeren Schnitt mit allen A_i ($i \in I$). Die $A_i \subseteq X$ sind abgeschlossene Mengen. Da jede Umgebung von x die Menge A_i schneidet, ist nach Lemma 2.36 $x \in \text{cl}(A_i) = A_i$. Damit ist $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$. $\square$

Der Satz von Tychonov wurde schon in Beispiel 5.7 benutzt. Es ist klar, dass er nützlich ist, denn wir haben ja gesehen, dass kompakte Räume angenehme Eigenschaften haben. Seine vielleicht wichtigste Konsequenz ist der **Satz von Banach–Alaoglu** der Funktionalanalysis, mit dessen Hilfe man eine Vielzahl von Lösungen mathematischer Probleme finden kann, etwa Maße mit gewissen Eigenschaften oder Lösungen partieller Differentialgleichungen.

5.4 Lokal- und Parakompaktheit, Mannigfaltigkeiten

Der $\mathbb{R}^n$ ist nur für $n = 0$ (also $\mathbb{R}^0 = \{0\}$) kompakt. Er besitzt aber eine nützliche schwächere Eigenschaft.

5.24 Definition Ein T_2 -Raum⁵⁹ $(X, \mathcal{O})$ heißt **lokalkompakt**, wenn jede Umgebung eines Punktes eine kompakte Umgebung des Punktes enthält.

5.25 Beispiele 1. $\mathbb{R}^n$ ist lokalkompakt. Jede Umgebung U von $x \in \mathbb{R}^n$ enthält nach Definition der metrischen Topologie für ein $\varepsilon > 0$ die offene Kugel $U_\varepsilon(x)$, also auch die kompakte Kugel $\{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| \leq \varepsilon/2\}$.

2. ℓ^2 ist nicht lokalkompakt. Das folgt aus Beispiel 5.5, denn mit der abgeschlossenen Einheitskugel $B \subseteq \ell^2$ sind auch die Kugeln rB mit Radius $r > 0$ nicht kompakt. Diese bilden aber eine Umgebungsbasis der Null. $\diamond$

Zunächst vereinfachen wir die Definition der Lokalkompaktheit ein wenig:

5.26 Lemma Ein T_2 -Raum $(X, \mathcal{O})$ ist genau dann lokalkompakt, wenn jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt.

Beweis: Wir müssen nur zeigen, dass aus der Existenz einer kompakten Umgebung K von x für alle Umgebungen U von x die Existenz einer kompakten Umgebung $K' \subseteq U$ von x folgt. Dabei können wir annehmen, dass $U \subseteq K$ und dass U offen ist. Damit ist $K \setminus U$ abgeschlossen, also nach Lemma 5.13 kompakt. Deshalb gibt es offene disjunkte Umgebungen V von x und W von $K \setminus U$ (siehe den Beweis von Lemma 5.2). Damit ist $K' := K \setminus W$ abgeschlossene Umgebung von x mit $K' \subseteq U$. Aus Lemma 5.13 folgt, dass $K' \subseteq K$ kompakt ist. $\square$

Insbesondere sind kompakte Räume lokalkompakt.

5.27 Lemma Eine offene oder abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq X$ eines lokalkompakten Raums ist in der Spurtopologie lokalkompakt.

Beweis:

- Die T_2 -Eigenschaft vererbt sich auf beliebige Teilmengen.
- Ist A offen und $x \in A$, dann besitzt x eine kompakte Umgebung $K \subseteq A$, A ist also nach Lemma 5.26 lokalkompakt.
- Ist A abgeschlossen und $x \in A$, dann besitzt x eine kompakte Umgebung $K \subseteq X$, und $K \cap A$ ist in A eine kompakte Umgebung von x . $\square$

⁵⁹Oft wird Lokalkompaktheit ohne Forderung der Hausdorff-Eigenschaft definiert.

Wie man am Beispiel $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ sieht, vererbt sich Lokalkompaktheit aber nicht auf beliebige Teilmengen.

5.28 Definition Die **Alexandrov-Kompaktifizierung** $(X^*, \mathcal{O}^*)$ eines lokal-kompakten Raums $(X, \mathcal{O})$ ist die Menge $X^* := X \sqcup \{\infty\}$ mit der Topologie

$$\mathcal{O}^* := \mathcal{O} \cup \{X^* \setminus K \mid K \subseteq X \text{ kompakt}\}.$$

5.29 Satz (Alexandrov-Kompaktifizierung)

1. $\mathcal{O}^*$ ist eine Topologie auf X^* .
2. $(X^*, \mathcal{O}^*)$ ist kompakt.
3. Ist $(X, \mathcal{O})$ schon kompakt, dann ist seine Alexandrov-Kompaktifizierung die topologische Summe $X \sqcup \{\infty\}$.
4. Sonst ist $X \subseteq X^*$ dicht.

Beweis:

1. Da beliebige Schnitte $\bigcap_{i \in I} K_i$ von Kompakta K_i als abgeschlossene Teilmengen jedes K_j kompakt sind, gilt (O1).
Da endliche Vereinigungen von Kompakta kompakt sind, gilt (O2).
2. • $(X^*, \mathcal{O}^*)$ ist ein Hausdorff-Raum. Denn sei $x \in X$ und $y = \infty$. Dann gibt es wegen der Lokalkompaktheit von $(X, \mathcal{O})$ eine kompakte Umgebung $K \subseteq X$ von x . Diese ist auch in $(X^*, \mathcal{O}^*)$ kompakt. Sie enthält eine offene Umgebung von x , die disjunkt zur offenen Umgebung $X^* \setminus K$ von ∞ ist.
• Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X^* , dann ist $(U_i \cap X)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X . Außerdem gibt es eine Umgebung U_{j^*} von ∞ . Deren Komplement $X^* \setminus U_{j^*} \subseteq X$ ist kompakt, wird also für eine endliche Indexmenge $J \subseteq I$ von $(U_j \cap X)_{j \in J}$ überdeckt. Damit ist $(U_j)_{j \in J \cup \{j^*\}}$ eine endliche Teilüberdeckung von X^* .
3. $\{\infty\}$ ist abgeschlossen. Ist X kompakt, dann ist $\{\infty\} = X^* \setminus X$ auch offen.
4. Ist $(X, \mathcal{O})$ nicht kompakt, und ist $A \supseteq X$ in X^* abgeschlossen, dann ist $A = X^*$, denn $\{\infty\}$ ist nach Definition von $\mathcal{O}^*$ nicht offen. $\square$

Natürlich will man meistens keine kompakten Räume kompaktifizieren.

5.30 Beispiel (Kompaktifizierung des $\mathbb{R}^n$) Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{R}^n$ lokalkompakt, aber nicht kompakt. Seine Alexandrov-Kompaktifizierung ist homöomorph zur Sphäre S^n (vergleichen Sie mit Beispiel 3.25). $\diamond$

Eine typische Anwendung der Alexandrov-Kompaktifizierung ist die folgende:

5.31 Beispiel Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein lokalkompakter, aber nicht kompakter Raum und die stetige Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ *verschwinde bei Unendlich*, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein Kompaktum $K \subseteq X$ mit

$$|f(x)| < \varepsilon \quad (x \in X \setminus K).$$

Dann ist $f^* : X^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f^*(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \in X \\ 0 & , \quad x = \infty \end{cases}$ stetig, besitzt also nach

Korollar 5.15 Minimal- und Maximalstellen $x_{\min}, x_{\max} \in X^*$.

Gibt es ein $x^+ \in X$ mit $f(x^+) > 0$, dann ist $x_{\max} \in X$ eine Maximalstelle von f .

Gibt es ein $x^- \in X$ mit $f(x^-) < 0$, dann ist $x_{\min} \in X$ eine Minimalstelle von f . $\diamond$

Eine wichtige Klasse topologischer Räume bilden die Mannigfaltigkeiten. ⁶⁰

5.32 Definition Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum.

- $(X, \mathcal{O})$ heißt **lokal euklidisch**, wenn es ein $n \in \mathbb{N}_0$ (die **Dimension** des Raums) gibt, sodass jeder Punkt von X eine zu $\mathbb{R}^n$ homöomorphe offene Umgebung besitzt.
- $(X, \mathcal{O})$ heißt **topologische Mannigfaltigkeit**, wenn der Raum hausdorffsch und lokal euklidisch ist.

5.33 Bemerkung Die *Gerade mit zwei Ursprüngen* ist die Menge

$$X := (\mathbb{R} \times \{1\} \cup \mathbb{R} \times \{2\}) / \sim$$

mit von $(x, 1) \sim (x, 2)$, falls $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ erzeugter Äquivalenzrelation und Quotiententopologie. Wie dieses Beispiel zeigt, gibt es auch lokal euklidische Räume, die keine topologischen Mannigfaltigkeiten sind. $\diamond$

Viele topologische Räume wie die Sphären S^n , die Tori $\mathbb{T}^n$ und das Möbiusband werden als Untermannigfaltigkeiten eines $\mathbb{R}^k$ definiert.

5.34 Beispiel (Flächen im $\mathbb{R}^3$)

Die in Abbildung 5.5 dargestellten kompakten zweidimensionalen Untermannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^3$ wurden durch die folgenden Polynomgleichungen definiert:

- Sphäre: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$

⁶⁰Wir sprechen hier von *topologischen* Mannigfaltigkeiten statt einfach Mannigfaltigkeiten, um diese insbesondere von den *differenzierbaren Mannigfaltigkeiten* abzugrenzen.

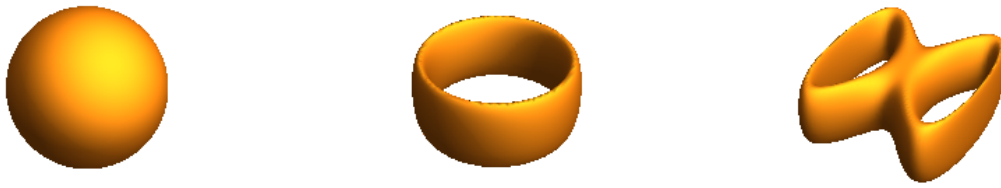


Abbildung 5.5: Flächen im $\mathbb{R}^3$. Links: Kugel, Mitte: Torus, Rechts: Fläche mit zwei Henkeln

- Torus: $(x_1^2 + x_2^2 - 4)^2 + x_3^2 = 1$
- Fläche mit zwei Henkeln: $(4x_1^2(1 - x_1^2) - x_2^2)^2 + x_3^2 = 1/6$. $\diamond$

Während die topologischen Mannigfaltigkeiten per Definition lokalkompakt sind, sind sie nicht notwendigerweise parakompakt.

5.35 Definition • Eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ eines topologischen Raums $(X, \mathcal{O})$ heißt **lokal-endlich**, wenn es für alle $x \in X$ eine Umgebung V von x gibt, sodass die Indexmenge $\{i \in I \mid U_i \cap V \neq \emptyset\}$ endlich ist.

- Für die Familien $(A_i)_{i \in I}, (B_j)_{j \in J}$ von Teilmengen einer Menge X heißt $(B_j)_{j \in J}$ **Verfeinerung** von $(A_i)_{i \in I}$, wenn es für jedes $j \in J$ ein $i \in I$ gibt mit $B_j \subseteq A_i$.
- Ein Hausdorff-Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt **parakompakt**, wenn es zu jeder offenen Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von X eine feinere, lokal endliche offene Überdeckung $(V_j)_{j \in J}$ von X gibt.

Das sind leider technische, aber wichtige Begriffe.

5.36 Beispiele (Parakompaktheit) 1. Die Familie $(U_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine offene, aber nicht lokal endliche Überdeckung des $\mathbb{R}^n$, siehe Abbildung 5.6, links.

Sie besitzt die lokal-endliche offene Überdeckung $(U_R(z))_{z \in \mathbb{Z}^n}$ als Verfeinerung. Dabei muss für den Radius der an den Gitterpunkten $z \in \mathbb{Z}^n$ zentrierten Kugeln $R > \sqrt{n}/2$ gewählt werden, um zu gewährleisten, dass der $\mathbb{R}^n$ auch wirklich überdeckt wird, siehe Abbildung 5.6, rechts.

2. Es gibt eine nicht parakompakte eindimensionale topologische Mannigfaltigkeit, die sogenannte *lange Gerade*. $\diamond$

Nicht parakompakte Räume sind (außer für Topologen) uninteressant. Dagegen besitzen parakompakte Räume nützliche Eigenschaften, zum Beispiel sind sie normal [HY, Theorem 2-63]. Alle metrisierbaren Räume sind parakompakt (siehe z.B. [Qu], Satz 10.12). Oft wird gefordert, dass topologische Mannigfaltigkeiten

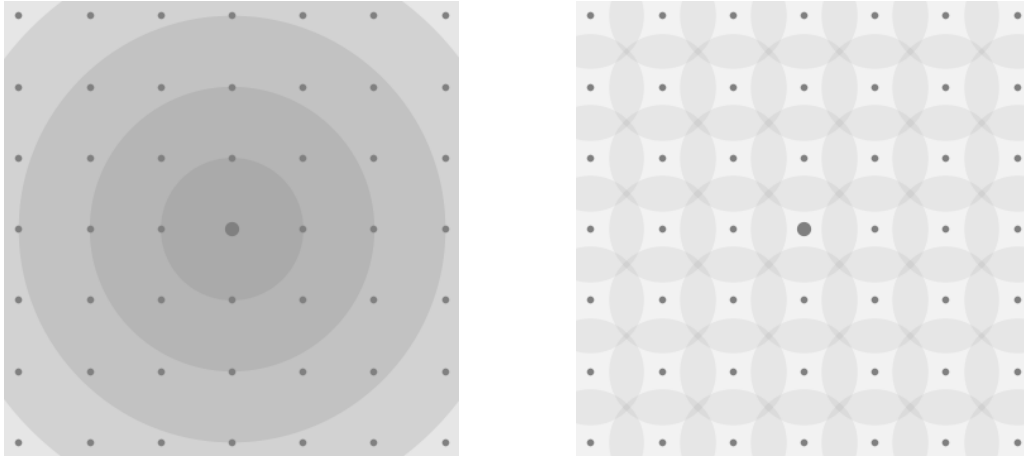


Abbildung 5.6: Überdeckungen des $\mathbb{R}^2$. Links: Nicht lokal endliche Überdeckung $(U_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$. Rechts: Lokal endliche Überdeckung $(U_R(z))_{z \in \mathbb{Z}^n}$ (mit $R = 3/4$).

X auch parakompakt sind, um mit sogenannten *Zerlegungen der Eins* Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ mittels Funktionen zu analysieren, die außerhalb eines Kompaktums gleich Null sind.

5.5 Die kompakt-offene Topologie

Für topologische Räume X, Y wird die Menge der Morphismen von X nach Y mit

$$C(X, Y) := \{f \in \text{Abb}(X, Y) \mid f \text{ stetig}\}$$

bezeichnet. C steht dabei für *continuous*.

Man kann auf der Menge $C(X, Y)$ wie auf jeder Menge Topologien einführen, und wir haben das auch schon im Zusammenhang mit der Produkttopologie gemacht (siehe Bemerkung 3.11.2).

Aber diese *Topologie der punktweisen Konvergenz* auf $C(X, Y)$ hängt gar nicht von der Topologie von X ab und ist daher praktisch nicht so nützlich.

Unsere (noch vage) Frage ist: Gibt es eine 'beste Topologie' auf $C(X, Y)$?

1. Um einer Antwort näher zu kommen, erinnern wir uns daran, wie in Definition 2.8 für Mengen X, Y die Abbildungsmenge $\text{Abb}(X, Y)$ eingeführt wurde. Das geschah mittels der *Auswertungsabbildung*

$$\text{ev} : \text{Abb}(X, Y) \times X \rightarrow Y \quad , \quad \text{ev}(f, x) = f(x).$$

2. Für Mengen A, B, T und $g \in \text{Abb}(T \times A, B)$ ist die *Transponierte* oder *Adjungierte* von g

$$\text{tr}(g) \in \text{Abb}(T, \text{Abb}(A, B)) \quad , \quad (\text{tr}(g)(t))(a) = g(t, a) \quad (a \in A). \quad (5.3)$$

Offensichtlich ist $\text{tr} : \text{Abb}(T \times A, B) \longrightarrow \text{Abb}(T, \text{Abb}(A, B))$ eine Bijektion. tr macht gewissermaßen aus T einen Parameterraum.

3. Wählt man speziell $T := \text{Abb}(X, Y)$, $A := X$, $B := Y$ und $g := \text{ev}$, dann ist

$$\text{tr}(\text{ev}) : \text{Abb}(X, Y) \rightarrow \text{Abb}(X, Y) \quad , \quad (\text{tr}(\text{ev})(f))(x) = \text{ev}(f, x) = f(x).$$

Die Transponierte der Auswertungsabbildung ist also gleich $\text{id}_{\text{Abb}(X, Y)}$.

4. Wir betrachten jetzt wieder für *topologische Räume* X, Y statt $\text{Abb}(X, Y)$ die Menge $C(X, Y) \subseteq \text{Abb}(X, Y)$ der stetigen Abbildungen. Auf $C(X, Y)$ suchen wir nach einer Topologie $\mathcal{O}$, die zwei gegenläufige Bedingungen erfüllt:

- a) $\text{ev} : C(X, Y) \times X \rightarrow Y$ ist stetig, d.h. $\mathcal{O}$ muss möglichst fein sein.
- b) Für beliebige topologische Räume T impliziert die Stetigkeit einer Abbildung $g : T \times X \rightarrow Y$ die Stetigkeit von $\text{tr}(g) : T \rightarrow C(X, Y)$, d.h. $\mathcal{O}$ muss möglichst grob sein.

Da b) insbesondere für $g := \text{ev}$ gelten muss, und $\text{tr}(\text{ev}) = \text{id}_{C(X, Y)}$ ist, gibt es höchstens eine Topologie $\mathcal{O}$ auf $C(X, Y)$, die a) und b) erfüllt. Details sind in ESCARDÓ und HECKMANN [EH] zu finden.

Die Kandidatin für die gesuchte Topologie $\mathcal{O}$ ist die *kompakt-offene* Topologie.

5.37 Definition Für topologische Räume $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ wird die **kompakt-offene Topologie** $\mathcal{O}_{\text{KO}}$ auf $C(X, Y)$ von der Subbasis

$$\mathcal{S}(X, Y) := \{\mathcal{U}(K, V) \mid K \subseteq X \text{ kompakt, } V \subseteq Y \text{ offen}\}$$

mit $\mathcal{U}(K, V) := \{f \in C(X, Y) \mid f(K) \subseteq V\}$ erzeugt.

5.38 Beispiele (kompakt-offene Topologie) 1. Ist X terminal (Def. 2.3), also $X = \mathbf{1}$, dann entsprechen die Abbildungen $f \in C(\mathbf{1}, Y) = \text{Abb}(\mathbf{1}, Y)$ den einelementigen Mengen $f(\mathbf{1})$ von Y . Also ist $(C(\mathbf{1}, Y), \mathcal{O}_{\text{KO}}) \cong (Y, \mathcal{O}_Y)$.

2. In der kompakt-offenen Topologie auf $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ konvergiert die Folge

$$a : \mathbb{N} \rightarrow C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad , \quad a_n(x) = (x/n)^n$$

von Monomen gegen die Nullfunktion. Denn für jedes Intervall $V := (-\varepsilon, \varepsilon)$ und jedes kompakte Intervall $K := [a, b]$ ist $a_n \in \mathcal{U}(K, V)$ für n groß, siehe Abbildung 5.7.

Man sieht an diesem Beispiel, dass die kompakt-offene Topologie nicht das Verhalten der stetigen Funktionen $f : X \rightarrow Y$ bei Unendlich kontrolliert. $\diamond$

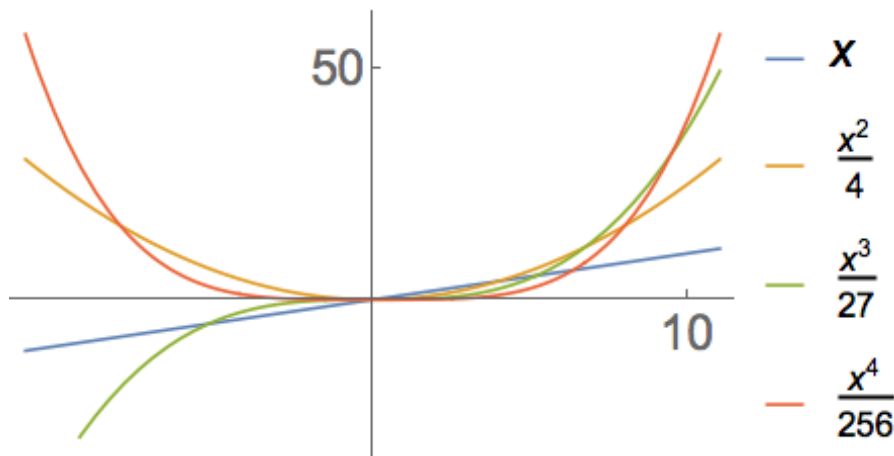


Abbildung 5.7: Kompakt-offene Topologie: Konvergenz einer Folge reeller Monome gegen die Nullfunktion

5.39 Aufgabe (Gleichmäßige Konvergenz) Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ kompakt und (Y, d) ein metrischer Raum, dann ist die von der Metrik

$$(f, g) \mapsto d_{C(X,Y)}(f, g) := \sup \{d(f(x), g(x)) \mid x \in X\}$$

auf $C(X, Y)$ erzeugte Topologie die kompakt-offene Topologie. $\diamond$

5.40 Lemma Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokalkompakter topologischer Raum, dann ist die kompakt-offene Topologie $\mathcal{O}_{KO}$ die gesuchte Topologie auf $C(X, Y)$, und die (wieder mit tr bezeichnete) Restriktion

$$\text{tr} : C(T \times X, Y) \longrightarrow C(T, C(X, Y))$$

von (5.3) ist für alle Räume $(T, \mathcal{O}_T)$ bijektiv.

Beweis: Wir beweisen für $\mathcal{O}_{KO}$ die Gültigkeit von a) und b) aus Punkt 4.

b) ist sogar für beliebige topologische Räume $(X, \mathcal{O}_X)$ erfüllt.

Denn ist $g : T \times X \rightarrow Y$ stetig, dann ist für alle $V \in \mathcal{O}_Y$ in der Produkttopologie $g^{-1}(V)$ offen, enthält also ein offenes Rechteck $U \times W \in \mathcal{O}_T \times \mathcal{O}_X$. Daher ist $\text{tr}(g) : T \rightarrow C(X, Y)$ stetig: Für alle $\mathcal{U}(K, V) \in \mathcal{S}(X, Y)$ ist $\text{tr}(g)^{-1}(\mathcal{U}(K, V)) = \{t \in T \mid \text{tr}(g)(t) \in \mathcal{U}(K, V)\} = \{t \in T \mid g(t, K) \subseteq V\}$. Da K kompakt und g stetig ist, ist diese Menge in T offen.

a) Wir zeigten gerade, dass tr die Teilmenge $C(T \times X, Y) \subseteq \text{Abb}(T \times X, Y)$ in $C(T, C(X, Y)) \subseteq \text{Abb}(T, C(X, Y))$ abbildet. Jetzt beweisen wir zunächst, dass diese Abbildung eine Bijektion ist.

1. tr ist injektiv, weil das schon in (5.3) galt.

2. tr ist surjektiv. Denn alle Elemente von $C(T, C(X, Y))$ lassen sich in der Form $\text{tr}(f)$ mit $f \in \text{Abb}(T \times X, Y)$ schreiben. Die Frage ist nur, ob f stetig ist, also $f \in C(T \times X, Y)$. Die Stetigkeit von f bei $(t, x) \in T \times X$ würde bedeuten, dass für jede Umgebung $U_y \in \mathcal{O}_Y$ von $y := f(t, x)$ eine Umgebung $U_t \times K_x \subseteq T \times X$ von (t, x) durch f in U_y abgebildet wird. Da $\text{tr}(f)(t) \in C(X, Y)$, gibt es eine Umgebung U_x von x mit $\text{tr}(f)(t)(U_x) \subseteq U_y$. Da nach Annahme $(X, \mathcal{O}_X)$ lokalkompakt ist, finden wir eine kompakte Umgebung $K_x \subseteq U_x$ von x . Da $\text{tr}(f)$ bei t stetig ist, ist für die Umgebung $\mathcal{U}(K_x, U_y) \subseteq C(X, Y)$ von $(\text{tr}(f))(t)$ die Urbildmenge

$$U_t := (\text{tr}(f))^{-1}(\mathcal{U}(K_x, U_y)) = \{t' \in T \mid f(t', K_x) \subseteq U_y\}$$

eine Umgebung von t . Also: $f(U_t \times K_x) \subseteq U_y$.

Also ist auch $\text{ev} : C(X, Y) \times X \rightarrow Y$ stetig, denn $\text{tr}(\text{ev}) = \text{id}_{C(X, Y)}$ ist es. $\square$

Man könnte jetzt fragen, wann die Adjunktionsabbildung⁶¹

$$\text{tr} : C(T \times X, Y) \longrightarrow C(T, C(X, Y))$$

selbst stetig und sogar ein Homöomorphismus ist. Wenn Ihnen nicht schon der Kopf vor lauter Stetigkeit brummt, erfahren Sie die Antwort in Theorem 2.4.7 von TOM DIEK [TD].

Lemma 5.40 hat das folgende Korollar. Dessen Aussage sollte natürlich nicht mit der Feststellung verwechselt werden, dass die Verknüpfung $f \circ g$ stetiger Abbildungen $f : Y \rightarrow Z$ und $g : X \rightarrow Y$ stetig ist!

5.41 Korollar

Für kompakt-offen topologisierte Abbildungsräume ist die Komposition

$$\circ : C(Y, Z) \times C(X, Y) \longrightarrow C(X, Z) \quad , \quad (f, g) \longmapsto f \circ g$$

stetig, wenn von den topologischen Räumen X, Y und Z die beiden ersten lokalkompakt sind.

Beweis: Wir schreiben hier comp statt $\circ$, denn wir betrachten ja die Komposition als Abbildung und verknüpfen diese selbst mit einer anderen Abbildung.

Durch Komposition von

$$\text{comp} \times \text{id}_X : (C(Y, Z) \times C(X, Y)) \times X \longrightarrow C(X, Z) \times X$$

⁶¹Man kann anschaulicher $\text{tr} : Y^{T \times X} \rightarrow (Y^X)^T$ schreiben, was auch den Namen 'Exponentialgesetz' erläutert. Man muss dabei nur beachten, dass mit B^A nicht mehr $\text{Abb}(A, B)$ sondern $C(A, B)$ gemeint ist.

mit $\text{ev} : C(X, Z) \times X \longrightarrow Z$ erhalten wir

$$\text{ev} \circ (\text{comp} \times \text{id}_X) : (C(Y, Z) \times C(X, Y)) \times X \longrightarrow Z. \quad (5.4)$$

Nach Punkt 4 a) und Lemma 5.40 ist die Auswertungsabbildung $\text{ev} : C(X, Z) \times X \rightarrow Z$ stetig, denn X ist lokalkompakt. Damit ist $\text{comp} \times \text{id}_X$ (und damit comp) genau dann stetig, wenn (5.4) stetig ist.

Dies folgt aber aus dem kommutierenden Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C(Y, Z) \times C(X, Y) \times X & \xrightarrow{\text{comp} \times \text{id}_X} & C(X, Z) \times X \\ \downarrow \text{id}_{C(Y, Z)} \times \text{ev} & & \downarrow \text{ev} \\ C(Y, Z) \times Y & \xrightarrow{\text{ev}} & Z \end{array}$$

Denn die Auswertungsabbildungen $\text{ev} : C(X, Y) \times X \rightarrow Y$ ist (wegen der Lokalkompaktheit von X) stetig, also auch $\text{id}_{C(Y, Z)} \times \text{ev}$; ebenso ist $\text{ev} : C(Y, Z) \times Y \rightarrow Z$ wegen der Lokalkompaktheit von Y stetig. $\square$

6 Die Fundamentalgruppe eines Raums

Nach der mengentheoretischen Topologie beschäftigen wir uns jetzt im zweiten Teil der Vorlesung mit der algebraischen Topologie. Wie der Name suggeriert, werden algebraische Strukturen wichtig.

6.1 Gruppen und Gruppoide

Als erstes wenden wir uns den Gruppen zu. Diese benutzen wir für zwei Zwecke:

- zur Klassifikation von topologischen Räumen, in Form ihrer Fundamentalgruppe (und ihrer höheren Homotopiegruppen);
- um Gruppen mit topologischen Mitteln besser zu verstehen. Dazu versehen wir sie mit einer Topologie, die mit der Gruppenverknüpfung verträglich ist.

Wir beginnen mit einer kleinen Wiederholung. Sie kennen den Gruppenbegriff:

6.1 Definition Eine **Gruppe** $(G, \circ)$ besteht aus einer Menge G und einer **Verknüpfung** genannten Abbildung

$$G \times G \longrightarrow G, \quad (a, b) \longmapsto a \circ b,$$

mit den Eigenschaften

1. $\forall a, b, c \in G : a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ (Assoziativität)
2. $\exists e \in G \quad \forall a \in G : e \circ a = a$ (Existenz eines neutralen Elements)
3. $\forall a \in G \quad \exists a' \in G : a' \circ a = e$ (Existenz der inversen Elemente)
4. Die Gruppe heißt **abelsch** oder **kommutativ**, wenn

$$\forall a, b \in G : a \circ b = b \circ a \quad (\text{Kommutativgesetz}).$$

Für Gruppen $(G, \circ)$ und $(H, *)$ heißt eine Abbildung $f : G \rightarrow H$ **Gruppenhomomorphismus**, wenn gilt: $f(g_1 \circ g_2) = f(g_1) * f(g_2)$ ($g_1, g_2 \in G$).

Statt $(G, \circ)$ werden wir oft der Einfachheit halber nur G schreiben. Ist die Gruppe abelsch, dann benutzen wir oft $+$ als Verknüpfungszeichen.

Sie kennen auch die folgenden Aussagen und sollten sie selbst beweisen können:

- 6.2 Satz (Elementare Eigenschaften von Gruppen)**
1. Aus $a' \circ a = e$ folgt $a \circ a' = e$, rechtsinverse Elemente sind also auch linksinvers.
 2. Aus $e \circ a = a$ folgt $a \circ e = a$, das links-neutrale Element e ist also auch rechts-neutral.
 3. Es gibt nur ein neutrales Element $e \in G$ (für abelsche Gruppen mit 0 notiert).
 4. Zu $a \in G$ gibt es nur ein inverses Element (geschrieben a^{-1} bzw. $-a$).

Beweis: In den folgenden Beweisen bezeichnen wir die verwendeten Gruppenaxiome mit ihrer Nummer, die schon bewiesenen Aussagen des Satzes mit 'Teil'.

1. Es sei $a'' \in G$ inverses Element von a' , also $a'' \circ a' = e$. Dann ist

$$a \circ a' \stackrel{2}{=} e \circ (a \circ a') = (a'' \circ a') \circ (a \circ a') \stackrel{1}{=} a'' \circ ((a' \circ a) \circ a') \stackrel{3}{=} a'' \circ (e \circ a') \stackrel{2}{=} a'' \circ a' = e.$$

2. Für alle $a \in G$ gilt $a \circ e \stackrel{3}{=} a \circ (a' \circ a) \stackrel{1}{=} (a \circ a') \circ a \stackrel{\text{Teil 1.}}{=} e \circ a \stackrel{2}{=} a$.

3. Es sei auch $\tilde{e} \in G$ neutrales Element, also $\tilde{e} \circ a = a$ für alle $a \in G$. Dann ist mit $a := e$: $\tilde{e} \stackrel{\text{Teil 2.}}{=} \tilde{e} \circ e = e$.

4. Es sei neben a' auch $a'' \in G$ inverses Element von a . Dann ist

$$a'' \stackrel{\text{Teil 2.}}{=} a'' \circ e \stackrel{\text{Teil 1.}}{=} a'' \circ (a \circ a') \stackrel{1}{=} (a'' \circ a) \circ a' = e \circ a' \stackrel{2}{=} a'. \quad \square$$

6.3 Aufgabe (Gruppen) Zeigen Sie für beliebige $a, b \in G$ die eindeutige Existenz der Lösungen $x, y \in G$ der Gleichungen $x \circ a = b$ und $a \circ y = b$. $\diamond$

6.4 Beispiele (Gruppen) 1. Die komplexen Zahlen bilden bezüglich der Addition eine abelsche Gruppe $(\mathbb{C}, +)$, und $(\mathbb{C}^\times, \cdot)$ mit $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ebenfalls. Für eine beliebige nicht leere Menge M bildet die Menge der Bijektionen von M mit Komposition der Bijektionen eine Gruppe $(S(M), \circ)$, die *symmetrische Gruppe* von M . Für $M = \{1, \dots, n\}$ schreibt man S_n statt $S(M)$. S_n besitzt $n!$ Elemente. Für $n \geq 3$ ist S_n nicht abelsch.

2. Eine Teilmenge $H \subseteq G$ der Gruppe $(G, \circ)$ heißt **Untergruppe**, wenn $e \in H$ und H bei Verknüpfung $\circ$ und Inversenbildung $g \mapsto g^{-1}$ abgeschlossen ist.

$\mathbb{R}, \mathbb{Q}$ und $\mathbb{Z}$ (allgemeiner $n\mathbb{Z} = \{nz \mid z \in \mathbb{Z}\}$ für $n \in \mathbb{N}$) sind Untergruppen von $(\mathbb{C}, +)$. $S^1, \{-1, 1\}$ und allgemeiner die Menge der n -ten *Einheitswurzeln*

$$\{\exp(2\pi i k/n) \mid k = 0, 1, \dots, n-1\},$$

$\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $(0, +\infty)$ sind Untergruppen von $(\mathbb{C}^\times, \cdot)$. In *Zyklischreibweise* ist die Teilmenge $\{\text{id}, (12)\} \subseteq S_3$ eine abelsche Untergruppe.

3. Für eine Untergruppe H der Gruppe $(G, \circ)$ und $g \in G$ heißt die Teilmenge $gH := \{g \circ h \mid h \in H\}$ eine **Linksnebenklasse**, $Hg := \{h \circ g \mid h \in H\}$ eine **Rechtsnebenklasse** von H . Zwei Linksnebenklassen von H sind einander gleich oder disjunkt. Gleiches gilt für die Rechtsnebenklassen.

Die Untergruppe $2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ der geraden Zahlen besitzt außer sich selbst die Nebenklasse $1 + 2\mathbb{Z}$ der ungeraden Zahlen.

4. Eine Untergruppe H von G heißt **Normalteiler** von G , wenn $gH = Hg$ für alle $g \in G$ gilt. Daher sind alle Untergruppen abelscher Gruppen Normalteiler. Der **Kern** $f^{-1}(e) \subseteq G$ eines Gruppenhomomorphismus $f : G \rightarrow H$ ist ein Normalteiler von G , denn für $g \in G$, $H := f^{-1}(e)$ ist $gH = f^{-1}(f(g)) = Hg$.

$\text{sgn} : S_n \rightarrow \{-1, 1\}$, $\sigma \mapsto \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$ ist ein Gruppenhomomorphismus. Die *Alternierende Gruppe* $A_n := \text{Kern}(\text{sgn})$ ist also ein Normalteiler von S_n . $\{\text{id}, (123), (132)\} = A_3$ ist damit Normalteiler von S_3 , $\{\text{id}, (12)\} \subseteq S_3$ nicht.

5. Ist H Normalteiler von G , dann ist $g_1 H g_2 H = g_1 g_2 H$, also die Menge G/H der Nebenklassen eine Gruppe, die **Faktorgruppe**.

So ist die *Restklassengruppe* $(\mathbb{Z}/(n\mathbb{Z}), +)$ eine n -elementige abelsche Gruppe. Ihre Elemente heißen *Kongruenzklassen bezüglich der Addition modulo n* .

6. Ist $(G, \circ)$ eine Gruppe, M eine Menge und $\Phi : G \times M \rightarrow M$ eine Abbildung, dann heißt diese **Gruppenwirkung**, wenn (in der Schreibweise $\Phi_g : M \rightarrow M$, $m \mapsto \Phi(g, m)$) gilt:

$$\Phi_e = \text{id}_M \quad \text{und} \quad \Phi_g \circ \Phi_h = \Phi_{g \circ h} \quad (g, h \in G).$$

Gruppenwirkungen wurden gewissermaßen schon vor der Einführung des Gruppenbegriffs untersucht, nämlich als **Symmetrien** eines geometrischen Objekts.

Sei z.B. $M := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, also die Ecken eines zentrierten Quadrats $Q \subseteq \mathbb{R}^2$. Welche Drehspiegelungen des $\mathbb{R}^2$ führen die Menge M in sich über? Diejenigen, die auch Q auf sich abbilden. Diese bilden eine Gruppe, die Symmetriegruppe von Q . Diese **Diedergruppe** D_4 besitzt acht Elemente und ist nicht abelsch. Wir erhalten also eine Gruppenwirkung $\Phi : D_4 \times M \rightarrow M$.

7. Die Automorphismen einer Gruppe $(G, \circ)$ sind die Bijektionen $\Phi : G \rightarrow G$, die die Gruppenverknüpfung erhalten, d.h. $\Phi(g \circ h) = \Phi(g) \circ \Phi(h)$. Diese bilden unter Komposition selbst eine Gruppe, ihre **Automorphismengruppe**⁶² $\text{Aut}(G)$, mit neutralem Element id_G und zu Φ inversem Element $\Phi^{-1} : G \rightarrow G$.

Die Automorphismengruppe $\text{Aut}(\mathbb{Z})$ der Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ ist isomorph zur Restklassengruppe $(\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z}), +)$. Denn jeder Automorphismus $\Phi : G \rightarrow G$ einer Gruppe G bildet das neutrale Element auf sich ab, also $\Phi(0) = 0$ für $G = \mathbb{Z}$. Das Bild von $m \in \mathbb{N}$ unter Φ ist

$$\Phi(m) = \Phi(1 + \dots + 1) = \Phi(1) + \dots + \Phi(1) = \Phi(1)m.$$

Also ist $\Phi(\mathbb{Z}) = \Phi(1)\mathbb{Z}$. Damit Φ injektiv ist, muss $\Phi(1) \neq 0$ sein. Damit Φ surjektiv ist, muss $\Phi(1) \in \{-1, 1\}$ sein. Die Gruppe $(\{-1, 1\}, \cdot)$ ist aber isomorph zur Restklassengruppe $(\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z}), +)$, unter $I(1) := 0$, $I(-1) := 1$.

8. Die Menge $\text{Aut}(X)$ der Homöomorphismen $h : X \rightarrow X$ eines topologischen Raums $(X, \mathcal{O})$ ist mit Komposition der Homöomorphismen eine Gruppe. $\diamond$

Das letzte Beispiel lädt dazu ein, Gruppen zu topologischen Räumen zu machen, denn $\text{Aut}(X) \subseteq C(X, X)$ erbt die kompakt-offene Topologie. Wie immer aber, wenn in der Mathematik auf einem Objekt zwei Strukturen eingeführt werden, stellt sich die Frage nach ihrer Verträglichkeit:

6.5 Definition Eine Gruppe $(G, \circ)$ mit einer Topologie auf G heißt **topologische Gruppe**, wenn Komposition und Inversenbildung stetig sind.

6.6 Beispiele (Topologische Gruppen)

⁶²Allgemeiner bildet für jedes Objekt X einer Kategorie $\mathcal{C}$ die Menge

$$\text{Aut}(X) := \{f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, X) \mid f \text{ ist Automorphismus}\}$$

eine **Automorphismengruppe von X** genannte Gruppe, denn die Verknüpfung von Automorphismen ist ein Automorphismus, die Verknüpfung ist assoziativ und id_X das neutrale Element.

1. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist die *allgemeine lineare Gruppe*

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) := \{M \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K}) \mid \det(M) \neq 0\}$$

in der Spurtopologie von $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^{n^2}$ eine topologische Gruppe. Das folgt für die Matrixmultiplikation aus der Stetigkeit von Summe und Produkt in $\mathbb{K}$ und für die Inversion aus der *Cramerschen Regel*.

2. Untergruppen topologischer Gruppen sind topologische Gruppen. Beispiele sind die *orthogonalen* und die *unitären Gruppen*

$$\mathrm{O}(n) := \{M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid M^{-1} = M^t\}, \quad \mathrm{U}(n) := \{M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \mid M^{-1} = M^*\}.$$

Nebenbei: $\mathrm{O}(n)$ und $\mathrm{U}(n)$ sind auch Untermannigfaltigkeiten von $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$, denn $\mathbb{I}_n \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$ ist regulärer Wert der Abbildung $M \mapsto MM^*$.

3. Jede Gruppe ist mit der diskreten Topologie eine topologische Gruppe (aber für viele Gruppen ist die diskrete Topologie nicht angemessen). $\diamond$

6.7 Lemma Für Kompakta X ist $\mathrm{Aut}(X)$ eine topologische Gruppe.

Beweis: Nach Korollar 5.41 ist die Verknüpfung stetig. Nach Definition 5.37 ist für $K \subseteq X$ kompakt, $V \subseteq X$ offen und $\mathcal{U}(K, V) = \{f \in C(X, X) \mid f(K) \subseteq V\}$ die Menge der

$$\tilde{\mathcal{U}}(K, V) := \mathcal{U}(K, V) \cap \mathrm{Aut}(X) = \{f \in \mathrm{Aut}(X) \mid f(K) \subseteq V\}$$

eine Subbasis der kompakt-offenen Topologie von $\mathrm{Aut}(X)$. Die Gruppen-Inversion

$$I : \mathrm{Aut}(X) \longrightarrow \mathrm{Aut}(X) \quad , \quad f \longmapsto f^{-1}$$

erfüllt $I^{-1} = I$ und bildet $\tilde{\mathcal{U}}(K, V)$ auf

$$\{f \in \mathrm{Aut}(X) \mid K \subseteq f(V)\} = \{f \in \mathrm{Aut}(X) \mid X \setminus K \supseteq f(X \setminus V)\} = \tilde{\mathcal{U}}(K', V')$$

mit $K' := X \setminus V$ und $V' := X \setminus K$ ab. K' ist nach Lemma 5.13 als abgeschlossene Teilmenge von X kompakt, und V' ist nach Lemma 5.2 offen. Also ist $\tilde{\mathcal{U}}(K', V')$ Element der Subbasis der kompakt-offenen Topologie von $\mathrm{Aut}(X)$.

Das beweist die Stetigkeit von I bezüglich der kompakt-offenen Topologie. $\square$

6.8 Bemerkung (Aut(X) für lokalkompakte X) Es gibt Beispiele *lokal* kompakter Räume X , für die $\mathrm{Aut}(X)$ keine topologische Gruppe ist, weil die Inversion I nicht mehr stetig ist. Aber wenn man zusätzlich voraussetzt, dass X lokal zusammenhängend ist (und das ist oft erfüllt), wird $\mathrm{Aut}(X)$ mit der kompakt-offenen Topologie wieder eine topologische Gruppe. Siehe DIJKSTRA [Di]. $\diamond$

Gruppen haben auf zweierlei Weise mit Kategorien zu tun.
Im ersten Fall betrachtet man die Kategorie *aller* Gruppen, im später zu diskutierenden zweiten Fall jede Gruppe als Kategorie.

6.9 Definition Die Kategorie **Grp** besteht aus

- der Klasse $\text{Ob}(\mathbf{Grp})$ aller Gruppen,
- den Klassen $\text{Mor}_{\mathbf{Grp}}(G, H)$ der Gruppenhomomorphismen $f : G \rightarrow H$,
- den Verknüpfungsabbildungen $g \circ f : F \rightarrow H$ für Gruppenhomomorphismen $f \in \text{Mor}_{\mathbf{Grp}}(F, G)$ und $g \in \text{Mor}_{\mathbf{Grp}}(G, H)$,
- und den Identitätsmorphisimen $\text{id}_G \in \text{Mor}_{\mathbf{Grp}}(G, G)$, mit $\text{id}_G(g) = g$.

Man überprüfe, dass **Grp** eine Kategorie ist.

Zunächst fällt auf, dass hier die einelementige (auch *trivial* genannte) Gruppe $\{0\}$ sowohl initiales als auch terminales Objekt ist, (während in **Set** und **Top** $1 \neq 0$ ist). Denn für jede Gruppe G gibt es je genau einen Gruppenhomomorphismus

$$\{0\} \rightarrow G \quad \text{und} \quad G \rightarrow \{0\}.$$

Dies hat wichtige Folgen für die universellen Konstruktionen, die wir mit Gruppen anstellen können. Denn

- zwar ist für eine beliebige Familie $(G_i, \circ_i)$ ($i \in I$) das cartesische Produkt $\prod_{i \in I} G_i$ der Mengen G_i mit der Multiplikation

$$(g_i)_{i \in I} \circ (h_i)_{i \in I} := (g_i \circ_i h_i)_{i \in I} \quad ((g_i)_{i \in I}, (h_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} G_i)$$

eine Gruppe, ihr *direktes Produkt*. Durch Einsetzen überprüft man, dass es das kategorientheoretische Produkt in **Grp** ist. d.h. im kommutierenden Diagramm erscheint:

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{f} & \prod_{i \in I} G_i \\ & \searrow f_j & \downarrow \text{pr}_j \\ & & G_j \end{array} \quad (j \in I) \quad (6.1)$$

Hier ist T eine beliebige Gruppe, und $f_i : T \rightarrow G_i$ sind Gruppenhomomorphismen. Also ist auch $f := (f_i)_{i \in I} : T \rightarrow \prod_{i \in I} G_i$ ein Gruppenhomomorphismus.

- Aber es ist klar, dass schon das kategorientheoretische *Koprodukt* zweier Gruppen G und H nicht die Menge $G \sqcup H$ mit einer entsprechenden Verknüpfung sein kann. Denn diese würde in beiden Komponenten ein neutrales Element

enthalten, was Satz 6.2.3 widersprechen würde. Schauen wir uns also das Diagramm des Koprodukts⁶³ an:

$$\begin{array}{ccc}
 T & \xleftarrow{f} & \star_{i \in I} G_i \\
 & \nwarrow f_j & \uparrow i_j \\
 & & G_j
 \end{array} \quad (j \in I) \quad (6.2)$$

6.10 Satz (Koprodukt von Gruppen) *Das Koprodukt oder freie Produkt $\star_{i \in I} G_i$ der Gruppen $(G_i, \circ_i)$ besteht als Menge aus der disjunkten Vereinigung*

$$\star_{i \in I} G_i = \coprod_{m \in \mathbb{N}_0} W_m \text{ mit } W_0 = \{e\} \text{ und } W_m = \{g_1 \dots g_m \mid g_k \in G_{i_k} \setminus \{e\}, i_k \neq i_{k+1}\}$$

für $m \in \mathbb{N}$. Die Elemente von W_m nennen wir **Wörter der Länge m** . Das Produkt von $g_1 \dots g_m \in W_m$ und $h \in W_1$ ist

$$g_1 \dots g_m \star h := \begin{cases} g_1 \dots g_{m-1} (g_m \circ_i h) & , \exists i \in I : g_m, h \in G_i, g_m \circ_i h \neq e \\ g_1 \dots g_{m-1} & , \exists i \in I : g_m, h \in G_i, g_m \circ_i h = e \\ g_1 \dots g_m h & , \text{sonst} \end{cases}$$

Das Produkt von $g_1 \dots g_m \in W_m$ und $h_1 \dots h_n \in W_n$ ist induktiv definiert durch

$$g_1 \dots g_m \star h_1 \dots h_n := (g_1 \dots g_m \star h_1) \star h_2 \dots h_n.$$

Die Injektionen $i_j : G_j \rightarrow \star_{i \in I} G_i$, $g \mapsto g$ sind Gruppenhomomorphismen.

Beweis: Zunächst einmal wird durch die Multiplikation $g_m \circ_i h_1$ und Kürzung von $e \in W_0$ (dem leeren Wort, also dem neutralen Element von $\star_{i \in I} G_i$) erreicht, dass auch das Produkt von $g_1 \dots g_m$ und $h_1 \dots h_n$ in $\star_{i \in I} G_i$ ist, wie auch das Inverse $g_m^{-1} \dots g_1^{-1}$ von $g_1 \dots g_m$. Der gesuchte Gruppenhomomorphismus

$$f \equiv \star_{i \in I} f_i : \star_{i \in I} G_i \longrightarrow T$$

in (6.2) bildet das neutrale Element e des freien Produkts auf das von $(T, \circ)$ ab. Wenn wir

$$f(g_1 \dots g_m) := f_{i_1}(g_1) \circ \dots \circ f_{i_m}(g_m) \quad \text{mit } g_k \in G_{i_k}$$

setzen, ist das wegen der Homomorphismeigenschaft der f_j die gesuchte Abbildung. Eindeutigkeit des Koprodukts (bis auf eindeutige Isomorphie) gilt wegen der universellen Eigenschaft des Koprodukts in jeder Kategorie. $\square$

⁶³Wir notieren das Koprodukt in der Form $\star_{i \in I} G_i$ statt $\coprod_{i \in I} G_i$, um eine Verwechslung mit dem Koprodukt der Mengen G_i auszuschließen. Das ist eine übliche Schreibweise.

6.11 Beispiele (Produkt und Koprodukt von Gruppen)

1. Das cartesische Produkt $G \times H$ zweier Gruppen $(G, \circ)$, $(H, \tilde{\circ})$ mit der Multiplikation

$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) := (g_1 \circ g_2, h_1 \tilde{\circ} h_2) \quad (g_i \in G, h_i \in H)$$

ist ihr direktes Produkt.

2. Um ein erstes Beispiel für ein freies Produkt von Gruppen zu konstruieren, betrachten wir zunächst die Isometrien $\Phi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ des metrischen Raums $(\mathbb{Z}, d)$, mit $d(a, b) := |a - b|$. Das sind also bijektive Abbildungen mit $|\Phi(a) - \Phi(b)| = |a - b|$. Insbesondere ist damit $|\Phi(a) - \Phi(0)| = |a|$, d.h. $\Phi(a) = \Phi(0) + c_a a$ mit $c_a \in \{-1, 1\}$. c_a hängt nicht von $a \in \mathbb{Z}$ ab, denn

$$|a - b| = |\Phi(a) - \Phi(b)| = |c_a a - c_b b| = |a - c_a c_b b| \quad (a, b \in \mathbb{Z}),$$

was für $a, b \neq 0$ nur für $c_a c_b = 1$, also $c_a = c_b$ sein kann.⁶⁴ Also sind die Isometrien von der Form $\Phi_{(n,c)}(a) = n + ca$ mit $(n, c) \in \mathbb{Z} \times \{-1, 1\}$, aber

$$\Phi_{(n_2, c_2)} \circ \Phi_{(n_1, c_1)} = \Phi_{(n_2 + c_2 n_1, c_1 c_2)} \quad ((n_i, c_i) \in \mathbb{Z} \times \{-1, 1\}).$$

Diese Gruppenverknüpfung auf der Menge $\mathbb{Z} \times \{-1, 1\}$ ist also nicht die des direkten Produkts⁶⁵ der Gruppen $\mathbb{Z}$ und $\{-1, 1\}$. Diese *unendliche Diedergruppe* Dih_∞ genannte Gruppe ist auch nicht abelsch, denn $n_2 + c_2 n_1 \neq n_1 + c_1 n_2$.

Das freie Produkt $\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z}) \star \mathbb{Z}/(2\mathbb{Z})$ zweier zweielementiger Gruppen $\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z})$ ist isomorph zu Dih_∞ . Denn $\Phi_{(0,-1)}$ und $\Phi_{(1,-1)}$ sind Spiegelungen (an 0 bzw. an 1/2), mit der Translation $\Phi_{(1,-1)} \circ \Phi_{(0,-1)} = \Phi_{(1,1)}$. Sie erzeugen damit Dih_∞ , denn für $(n, c) \in \mathbb{Z} \times \{-1, 1\}$ ist $\Phi_{(n,c)} = (\Phi_{(1,1)})^n \circ \Phi_{(0,-1)}$.

Schreiben wir zur besseren Unterscheidung im linken Faktor des freien Produkts l statt $1 \in \mathbb{Z}/(2\mathbb{Z})$ und im rechten Faktor r statt 1 , dann sind die nichtleeren Wörter $g_1 \dots g_m \in \mathbb{Z}/(2\mathbb{Z}) \star \mathbb{Z}/(2\mathbb{Z})$ endliche Folgen von sich abwechselnden Buchstaben l und r .

Ein Isomorphismus $I : \mathbb{Z}/(2\mathbb{Z}) \star \mathbb{Z}/(2\mathbb{Z}) \rightarrow \text{Dih}_\infty$ ist dann von der Form

$$I(g_1 \dots g_m) = I(g_1) \circ \dots \circ I(g_m) \quad \text{mit } I(l) = \Phi_{(0,-1)} \quad , \quad I(r) = \Phi_{(1,-1)}$$

und $I(e) = \Phi_{(0,1)}$, das neutrale Element der unendlichen Diedergruppe (siehe Abbildung 6.1).

3. Das freie Produkt $\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z}) \star \mathbb{Z}/(3\mathbb{Z})$ ist isomorph zur *modularen Gruppe* und wirkt auf einen dreiregulären *Baum*. Jeder Knoten dieses Baums gehört also zu genau drei Kanten, siehe Abbildung 6.2. Die modulare Gruppe ist in der Zahlentheorie sehr wichtig. $\diamond$

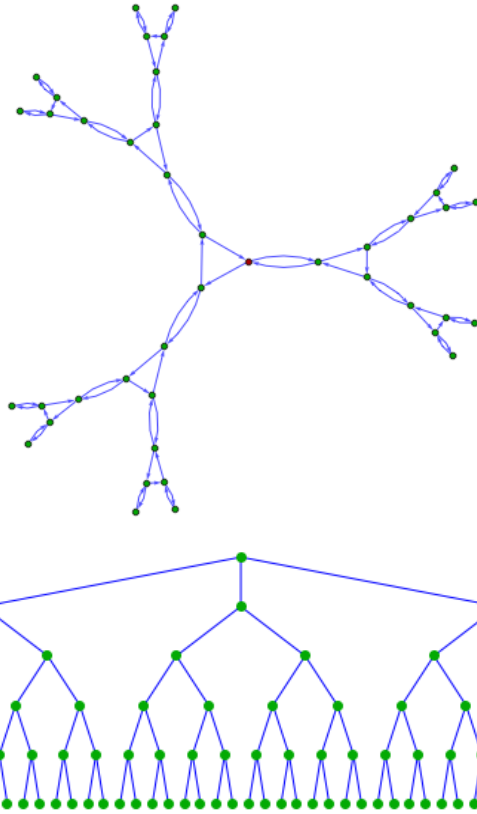


Abbildung 6.2: Oben: Freies Produkt $\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z}) \star \mathbb{Z}/(3\mathbb{Z})$. Unten: Dieses wirkt auf den 3-regulären Baum.

3. Das **Schiebepuzzle** (Abbildung 6.3) modellieren wir mit Gruppoiden. Es gibt 16 *Felder*, an denen sich die 15 *Kacheln* und die *Leerstelle* befinden.

- Nehmen wir zunächst vereinfachend an, dass alle Kacheln schwarz und damit ununterscheidbar sind. Dann besitzt unser Gruppoid $\mathcal{G}_1$ eine 16-elementige Objektmenge $\text{Ob}(\mathcal{G}_1)$, nämlich die Position der Leerstelle. Je nachdem, ob $X \in \text{Ob}(\mathcal{G}_1)$ eine Ecke, Kante oder eines der mittleren vier Felder ist, ist eine Verschiebung $f \in \text{Mor}_{\mathcal{G}_1}(X, Y)$ der Leerstelle auf 2, 3 oder 4 benachbarte Felder Y möglich. Dies ist dann ein Morphismus, genauso wie der Identität id_X , die die Leerstelle an der Position X belässt. Wir haben aber nicht nur $64 = 16 + 4 \times 2 + 8 \times 3 + 4 \times 4$ Morphismen, denn auch Kombinationen dieser elementaren Spielzüge sind nach der Definition einer Kategorie Morphismen. Es lassen sich aber nur Spielzüge $f \in \text{Mor}_{\mathcal{G}_1}(X, Y)$ und $g \in \text{Mor}_{\mathcal{G}_1}(Y, W)$ zu $gf \in \text{Mor}_{\mathcal{G}_1}(X, W)$ kombinieren, wenn $Y = W$ ist, also die Leerstelle nach dem ersten Zug auf der Anfangsposition des zweiten Zuges ist. Wir können offensichtlich die Leerstelle zwischen beliebigen Feldern verschieben, kommen also mit 16×16 Morphismen aus.
- In Wirklichkeit sind die Kacheln des Schiebepuzzles unterscheidbar, z.B. mit den Zahlen 1 bis 15 nummeriert. Eine *Konfiguration* ist also eine Bijektion,

die jeder Kachel einschließlich der Leerstelle ihr Feld zuordnet. Das definiert ein neues Gruppoid $\mathcal{G}_2$ mit den von der Ausgangskonfiguration (siehe Abb. 6.3, rechts) *erreichbaren Konfigurationen* als Objektmenge $\text{Ob}(\mathcal{G}_2)$. Die Morphismen sind die durch wiederholte Verschiebung der Leerstelle auf Nachbarfelder entstehenden Änderungen der Konfiguration.

A priori könnte es $16!$ Objekte geben, von denen $15!$ die Leerstelle im rechten unteren Feld haben, entsprechend der symmetrischen Gruppe S_{15} . In Wirklichkeit besteht aber jeder Zugfolge, an deren Anfang und Ende sich die Leerstelle im sechzehnten Feld befindet, aus einer geraden Zahl von Transpositionen. Also kann höchstens die Untergruppe A_{15} von S_{15} diese Änderungen der Konfiguration beschreiben.

In den 1880er Jahren bot der **Spiele-Erfinder** und Schwindler Sam Loyd 1000 \$ darauf, eine Lösung zu finden, bei denen nur die Kacheln 14 und 15 vertauscht werden. Da aber dies eine Transposition ist, also nicht in der alternierenden Gruppe A_{15} liegt, war die Aufgabe Loyds unlösbar.⁶⁶

Dass tatsächlich alle durch A_{15} beschriebenen Permutationen der Kacheln möglich sind, kann man im Artikel [Ar] von ARCHER nachlesen.

- Man kann auch die beiden Modellierungen zu einem Gruppoid $\mathcal{G}_3$ kombinieren, mit Objektmenge $\text{Ob}(\mathcal{G}_3) := \text{Ob}(\mathcal{G}_1) \cong \{1, \dots, 16\}$ und

$$\text{Mor}_{\mathcal{G}_3}(X, Y) := \{\pi \in S_{16} \mid \pi(X) = Y, \pi \text{ realisierbar}\}.$$

Dann ist für alle Positionen $X \in \{1, \dots, 16\}$ der Leerstelle

$$\text{Mor}_{\mathcal{G}_3}(X, X) = \{\pi \in A_{16} \mid \pi(X) = X\} \cong A_{15}$$

eine Gruppe. ◇

Die letzte Feststellung gilt für alle Gruppoide, siehe auch Fußnote 62:

6.14 Lemma *Für jedes Objekt $X \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ eines Gruppoids ist $\text{Mor}_{\mathcal{G}}(X, X)$ eine Gruppe. Für eine Gruppe G ist das die Automorphismengruppe $\text{Aut}(G)$.*

Beweis: Jeder Morphismus $f \in \text{Mor}_{\mathcal{G}}(X, Y)$ des Gruppoids besitzt eine Inverse $g \in \text{Mor}_{\mathcal{G}}(Y, X)$ mit $fg = \text{id}_Y$ und $gf = \text{id}_X$. Da $X = Y$, folgt die Aussage. $\square$

⁶⁶Das Spiel muss gegen Ende des 19ten Jahrhunderts extrem populär gewesen sein. So schrieb Sam Loyd (zitiert nach [Ar]): "People became infatuated with the puzzle and ludicrous tales are told of shopkeepers who neglected to open their stores; of a distinguished clergyman who stood under a street lamp all through a wintry night trying to recall the way he had performed the feat. ...Pilots are said to have wrecked their ships, and engineers rush their trains past stations. A famous Baltimore editor tells how he went for his noon lunch and was discovered by his frantic staff long past midnight pushing little pieces of pie around on a plate!"

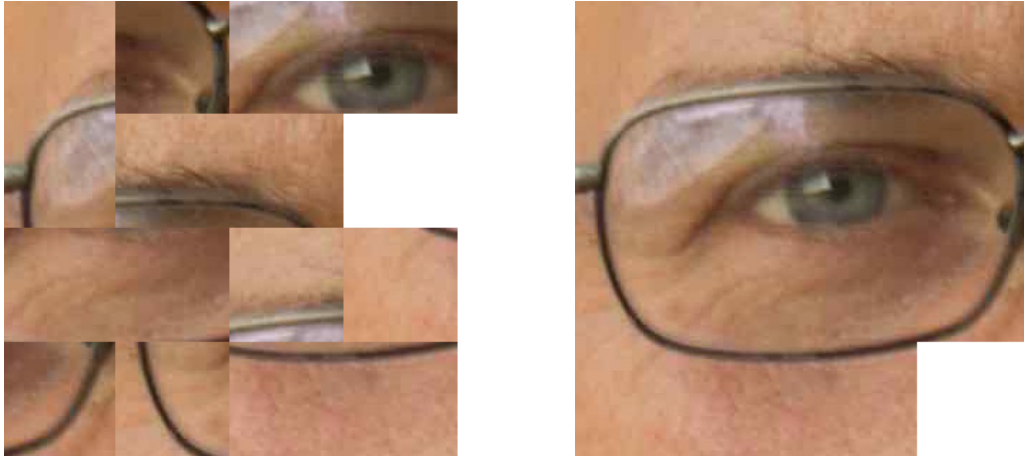


Abbildung 6.3: Das Schiebepuzzle als Gruppoid. Links: Erreichbare Konfiguration, Rechts: Ausgangskonfiguration

6.2 Funktoren und Homotopieäquivalenz

In Kapitel 6.1 haben wir die Kategorie **Grp** aller Gruppen eingeführt. Die Morphismen $f : G_1 \rightarrow G_2$ zwischen Gruppen G_1 und G_2 sind dann die Gruppenhomomorphismen.

Andererseits haben wir festgestellt, dass jede Gruppe G selbst eine Kategorie (mit einem Objekt) ist. Mit einem Funktor können wir die Kategorien $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ wieder aufeinander beziehen.

6.15 Definition Ein (kovarianter) **Funktor** F von der Kategorie $\mathcal{C}$ in die Kategorie $\mathcal{D}$ ordnet jedem Objekt $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ ein $F(X) \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ und jedem Morphismus $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ein $F(f) \in \text{Mor}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ zu, sodass

1. $F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)} \quad (X \in \text{Ob}(\mathcal{C})),$
2. $F(gf) = F(g)F(f) \quad (f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y), g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, Z)).$

Ein Funktor ist also gewissermaßen ein Homomorphismus zwischen Kategorien. Er erhält Isomorphismen. Denn seien zwei Objekte X, Y von $\mathcal{C}$ isomorph, d.h. es existieren Morphismen $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow X$ mit $gf = \text{id}_X$ und $fg = \text{id}_Y$. Dann ist

$$F(g)F(f) = F(gf) = F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)} \quad \text{und analog} \quad F(f)F(g) = \text{id}_{F(Y)}.$$

Also sind auch die Objekte $F(X)$ und $F(Y)$ von $\mathcal{D}$ isomorph.

Wir werden Funktoren **Top** $\rightarrow$ **Grp** benutzen, um topologische Räume und stetige Abbildungen zu klassifizieren.

6.16 Beispiele (Funktoen)

1. Ist $F : G_1 \rightarrow G_2$ ein Gruppenhomomorphismus, dann bildet er das neutrale Element von G_1 auf das von G_2 ab, und $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$. Also ist F ein Funktor von der Kategorie G_1 in die Kategorie G_2 . Umgekehrt ist jeder Funktor $G_1 \rightarrow G_2$ zwischen Gruppen ein Gruppenhomomorphismus.
2. Für jede Kategorie $\mathcal{C}$ gibt es den *Identitätsfunktor* $\text{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, der jedes Objekt von $\mathcal{C}$ und jeden Morphismus in $\mathcal{C}$ auf sich abbildet. Dieser ist für sich genommen nicht besonders spannend, erlaubt aber die Definition des Begriffs eines zu einem Funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ *linksinversen Funktors* $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$, mit $GF = \text{id}_{\mathcal{C}}$.⁶⁷ Analog muss ein zu F *rechtsinverser* Funktor $H : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ die Bedingung $FH = \text{id}_{\mathcal{D}}$ erfüllen.
3. Der *Vergissfunktor* $U : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$ ordnet einem topologischen Raum $(X, \mathcal{O})$ die Menge $U((X, \mathcal{O})) := X$ zu und der stetigen Abbildung $f \in C(X, Y)$ die Abbildung $f \in \text{Abb}(X, Y)$ der Mengen.
Es gibt auch einen Vergissfunktor $U : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$, der der Gruppe $(G, \circ)$ die Menge G zuordnet. Aber (im Gegensatz zu $U : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$) bildet er das initiale Objekt $(\{e\}, \circ)$ nicht in das initiale Objekt $\emptyset$ ab. Wir haben in (6.2) auch gesehen, dass dieser das Koproduct nicht in das Koproduct überführt.
4. Der *Potenzmengen-Funktor* $\mathcal{P} : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ ordnet einer Menge $M \in \text{Ob}(\mathbf{Set})$ ihre Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ und einer Abbildung $f : M \rightarrow N$ die Abbildung $\mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathcal{P}(N)$, $U \mapsto f(U) = \{f(m) \mid m \in U\}$ zu.
5. Wir fassen eine Gruppe $(G, \circ)$ als Kategorie $\mathcal{G}$ auf, und wollen verstehen, welche Bedeutung die Funktoen $F : \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{Set}$ besitzen. Da $\mathcal{G}$ nur ein Objekt X besitzt, ist $M := F(X)$ eine (durch die Wahl von F festgelegte) Menge. $\text{Mor}_{\mathcal{G}} = G$ wird durch F in $\text{Mor}_{\mathbf{Set}}(M, M) = \text{Abb}(M, M)$ abgebildet. Da

$$F(e) = F(\text{id}_G) = \text{id}_F(G) = \text{id}_M \quad \text{und} \quad F(g \circ h) = F(g) \circ F(h)$$

gilt, ist F eine Gruppenwirkung von G auf M , siehe Beispiel 6.4.6. $\diamond$

6.17 Bemerkung (Grpd) Analog zur Definition 6.9 von **Grp** wird die Kategorie

Grpd

aller (kleinen) Gruppoide (als Objekt-Klasse $\text{Ob}(\mathbf{Grpd})$) und der Funktoen zwischen ihnen als Morphismen-Klasse eingeführt. Das verallgemeinert Beispiel 6.16.1.

⁶⁷Solche Linksinversen, konkret *Retraktions-Funktoen*, werden in Kapitel 6.6 benutzt.

Aber **Grpd** hat ganz andere Eigenschaften als **Grp**. Zum Beispiel ist die einelementige Gruppe initiales und terminales Objekt von **Grp**. Sie ist zwar auch terminales Objekt von **Grpd**. Aber es gibt im allgemeinen viele Morphismen der einelementigen Gruppe in ein Gruppoid. Sie kann also nicht das initiale Objekt von **Grpd** sein. Diese Rolle übernimmt das *leere Gruppoid* (ein Gruppoid ohne Objekte und Morphismen). Entsprechend ist auch das Koprodukt von Gruppoiden deren disjunkte Vereinigung, was bei Gruppen ja keine Gruppe ergäbe. $\diamond$

Wir haben uns scheinbar weit von der Topologie entfernt. Jetzt wenden wir die neuen Konzepte auf topologische Fragen an. I bezeichnet das Intervall $[0, 1]$.

6.18 Definition Für die topologischen Räume X, Y heißt $f \in C(X, Y)$ **homotop** zu $g \in C(X, Y)$, wenn eine **Homotopie** von f nach g , also ein

$$H \in C(X \times I, Y) \quad , \quad (x, t) \mapsto H_t(x) := H(x, t)$$

mit $H_0 = f$ und $H_1 = g$ existiert.

$f \in C(X, Y)$ heißt **nullhomotop**, wenn f homotop zu einer konstanten Abbildung $g : X \rightarrow Y$, $\text{im}(g) = \{y\}$ ist.

Man sagt dann, dass f durch H stetig in g *deformiert* wird, und schreibt $f \sim g$. Stellen wir uns die Funktionen f, g als Punkte des topologischen Raums $C(X, Y)$ vor, dann ist $t \mapsto H_t$ ein Weg von f nach g . Ein zweiter Weg $K \in C(X \times I, Y)$ lässt sich an H anschließen, wenn $K_0 = H_1$ ist, also der Endpunkt des ersten Wegs der Anfangspunkt des zweiten ist. Damit sind wir schon sehr nah an der Idee eines Gruppoids, und das werden wir in Kapitel 6.5 nutzen.

6.19 Lemma und Definition

Auf $C(X, Y)$ ist Homotopie eine Äquivalenzrelation.

Die Menge ihrer **Homotopieklassen** genannten Äquivalenzklassen in $C(X, Y)$ wird mit $[X, Y]$ bezeichnet.

Beweis: Wir testen auf Reflexivität, Symmetrie und Transitivität:

1. Für $f \in C(X, Y)$ ist $F \in C(X \times I, Y)$, $F_t := f$ eine Homotopie von f nach f .
2. Sei $H \in C(X \times I, Y)$ eine Homotopie von f nach g , dann ist $G \in C(X \times I, Y)$, $G_t := H_{1-t}$ eine Homotopie von g nach f .
3. Seien $F \in C(X \times I, Y)$ eine Homotopie von f nach g und $G \in C(X \times I, Y)$ eine Homotopie von g nach h , dann ist

$$H \in C(X \times I, Y) \quad , \quad H_t = \begin{cases} F_{2t} & , t \in [0, 1/2] \\ G_{2t-1} & , t \in (1/2, 1] \end{cases}$$

eine Homotopie von f nach h : $H_0 = F_0 = f$, $H_1 = G_1 = h$ und $F_1 = g = G_0$. $\square$

6.20 Lemma *Homotopie ist verträglich mit der Komposition: Sind $f_0, f_1 \in C(X, Y)$ und $g_0, g_1 \in C(Y, Z)$ homotop, dann auch $g_0 \circ f_0, g_1 \circ f_1 \in C(X, Z)$.*

Beweis: Es seien $F \in C(X \times I, Y)$ eine Homotopie von f_0 nach f_1 und $G \in C(Y \times I, Z)$ eine Homotopie von g_0 nach g_1 . Dann gilt mit $\text{pr}_2 : X \times I \rightarrow I$ und

$$H \in C(X \times I, Z) \quad , \quad H_t := G_t \circ F_t \quad , \quad \text{also} \quad H = G \circ (F \times \text{pr}_2)$$

$$g_t \circ f_t = G_t \circ F_t = H_t \quad (t = 0, 1). \quad \square$$

6.21 Beispiele (Homotopie) 1. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sind alle stetigen Funktionen $f, g \in C(X, \mathbb{K})$ zueinander homotop, z.B. mit der Homotopie

$$H \in C(X \times I, \mathbb{K}) \quad , \quad H(x, t) := (1 - t)f(x) + tg(x).$$

Das nennt man eine *lineare* Homotopie.

2. Gibt es für $f \in C(X, Y)$ und $g \in C(X, Y)$ einen Punkt $x \in X$, dessen Bilder $f(x)$ und $g(x)$ in verschiedenen Wegzusammenhangskomponenten von Y liegen, dann sind f und g nicht homotop.

Denn für eine Homotopie $H \in C(X \times I, Y)$ von f nach g wäre die Abbildung $I \rightarrow Y, t \mapsto H(x, t)$ ein Weg von $f(x)$ nach $g(x)$. $\diamond$

6.22 Bemerkungen (hTOP) 1. Wir haben implizit eine Kategorie **hTOP**, die **Homotopiekategorie** konstruiert.

- Deren Objekte sind die topologische Räume, also $\text{Ob}(\mathbf{hTOP}) = \text{Ob}(\mathbf{TOP})$,
- aber die Morphismen sind nicht mehr wie in **TOP** die stetigen Abbildungen, sondern deren Homotopieklassen, also $\text{Mor}_{\mathbf{hTOP}}(X, Y) = [X, Y]$.
- Die Verknüpfungsabbildungen $[g][f] := [g \circ f]$ für $f \in C(X, Y)$ und $g \in C(Y, Z)$ sind nach Lemma 6.20 wohldefiniert. Sie sind assoziativ, denn für Homotopien $F \in C(X \times I, Y)$, $G \in C(Y \times I, Z)$ und $H \in C(Z \times I, W)$ gilt

$$(H_t \circ G_t) \circ F_t = H_t \circ (G_t \circ F_t) \quad (t \in I).$$

- Die Homotopieklassse ⁶⁸ $\text{id}_X^{\mathbf{hTOP}} := [\text{id}_X^{\mathbf{TOP}}]$ der identischen Abbildung $\text{id}_X^{\mathbf{TOP}} \in C(X, X)$ ist der Identitätsmorphismus in $[X, X]$.

2. Zwar sind die Objekte dieser Kategorie Mengen mit einer Zusatzstruktur (nämlich einer Topologie). Aber die Morphismen, also die Homotopieklassen stetiger Abbildungen, sind nicht mehr Abbildungen zwischen diesen Mengen. Konsequentermaßen haben wir $[g][f]$ statt $[g] \circ [f]$ geschrieben.

⁶⁸Wir indizieren hier mit der jeweiligen Kategorie, um die Konstruktion zu klären.

3. Die beiden Abbildungen $\text{Ob}(\mathbf{TOP}) \rightarrow \text{Ob}(\mathbf{hTOP}), X \mapsto X$ und

$$\text{Mor}_{\mathbf{TOP}}(X, Y) = C(X, Y) \rightarrow \text{Mor}_{\mathbf{hTOP}}(X, Y) = [X, Y] \quad , \quad f \mapsto [f]$$

definieren wegen $\text{id}_X^{\mathbf{hTOP}} = [\text{id}_X^{\mathbf{TOP}}]$ und $[g][f] = [g \circ f]$ einen Funktor $\mathbf{TOP} \rightarrow \mathbf{hTOP}$. In $\mathbf{hTOP}$ interessieren wir uns also statt für die stetige Funktion $f : X \rightarrow Y$ für die Familie ihrer stetigen Deformationen.

4. Wann sind zum Beispiel in $\mathbf{hTOP}$ zwei topologische Räume X, Y isomorph, wann also enthält $[X, Y]$ einen Isomorphismus, eine so genannte **Homotopieäquivalenz**? Wenn es Abbildungen $f \in C(X, Y)$ und $g \in C(Y, X)$ mit

$$[g][f] = \text{id}_X^{\mathbf{hTOP}} \quad \text{und} \quad [f][g] = \text{id}_Y^{\mathbf{hTOP}}$$

gibt, wenn also $g \circ f$ homotop zu $\text{id}_X^{\mathbf{TOP}}$ und $f \circ g$ homotop zu $\text{id}_Y^{\mathbf{TOP}}$ sind. $\diamond$

- 6.23 Beispiele (Homotopieäquivalenz)** 1. Ein Raum heißt *kontrahierbar* oder *zusammenziehbar*, wenn er homotopieäquivalent zu einem Punkt ist. Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig bezüglich* $y \in X$, wenn für alle $x \in X$ die Strecke $\{(1-t)x + ty \in \mathbb{R}^n \mid t \in I\}$ zwischen x und y ganz in X liegt. X heißt *sternförmig*, wenn es so ein $y \in X$ gibt.

Insbesondere sind der $\mathbb{R}^n$ selbst und nicht leere konvexe Teilmengen sternförmig. Sternförmige Mengen sind kontrahierbar, denn mit $f : X \rightarrow Y := \{y\}$ und der Injektion $g := \text{in}_Y : Y \rightarrow X$ ist $f \circ g = \text{id}_Y$, während mit der Homotopie

$$H \in C(X \times I, X) \quad , \quad H_t(x) = (1-t)y + tx$$

die Abbildung $g \circ f : X \rightarrow X$ homotop zu id_X ist.

2. Für einen kontrahierbaren, lokalkompakten Raum X ist der Abbildungsraum $C(X, Z)$ homotopieäquivalent zu Z . Denn da X kontrahierbar ist, gibt es eine Homotopie $H \in C(X \times I, X)$ von einer konstanten Abbildung $X \rightarrow X$ mit Bild $Y := \{y\}$ nach id_X . Daher ist

$$\tilde{H} : C(X, Z) \times I \rightarrow C(X, Z) \quad , \quad \tilde{H}_t(f) := f \circ H_t$$

eine Homotopie von der stetigen Auswertungsabbildung bei y

$$\text{ev}_y : C(X, Z) \rightarrow C(Y, Z) \quad , \quad f \mapsto f(y)$$

nach $\text{id}_{C(X, Z)}$. Andererseits ist $C(Y, Z)$ nach Bsp. 5.38.1 homöomorph zu Z . Insbesondere ist für einen topologischen Raum Z der Wegeraum $C(I, Z)$ homotopieäquivalent zu Z , denn das Intervall I ist kompakt und kontrahierbar.

3. Für kein $n \in \mathbb{N}_0$ ist die Sphäre S^n kontrahierbar.
 Das sieht man für $n = 0$ daran, dass S^0 zwei (Weg-) Zusammenhangskomponenten besitzt, während kontrahierbare Räume wegzusammenhängend sind. Für $n = 1$ wird das aus Satz 6.28.2 folgen.
4. Aber wir bemerken etwas anderes, nämlich, dass für $n \in \mathbb{N}_0$ und $X := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ der Teilraum $Y := S^{n-1} \subseteq X$ zu X homotopieäquivalent ist. Dazu betrachten wir die Homotopie

$$H \in C(X \times I, X) \quad , \quad H_t(x) = (1-t) \frac{x}{\|x\|} + tx$$

von der Abbildung $X \rightarrow X$, $x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$ mit Bild S^n nach id_X . $\diamond$

Wenn wir den einelementigen topologischen Raum wieder mit 1 bezeichnen, bringt uns Beispiel 6.21.2 zur folgenden Definition:⁶⁹

6.24 Definition Für einen topologischen Raum X ist die **Wegekomponenten-Menge** $\pi_0(X)$ die Menge $[1, X]$ der Homotopie-Äquivalenzklassen in $C(1, X)$.

Wir interessieren uns also statt für einen einzelnen Punkt $x \in X$ für die Menge $[x] \subseteq X$ der Punkte, die mit x durch einen Weg verbunden werden können.

Nach Beispiel 6.21.2 ist diese Klasseneinteilung *a priori* feiner als die der Zusammenhangskomponenten von X , aber oft doch gleich:

6.25 Lemma Ist ein topologischer Raum X lokal wegzusammenhängend, dann sind seine Wegekomponenten $[x]$, $x \in X$ offene Zusammenhangskomponenten.

Beweis: Zunächst ist dann X nach Satz 4.4.5 auch lokal zusammenhängend. Nach Beispiel 4.9.4 ist damit für alle $x \in X$ die Zusammenhangskomponente $C(x)$ von x nicht nur abgeschlossen, sondern auch offen.

Die Wegekomponente $[x] \in \pi_0(X)$ von x ist ebenfalls offen. Denn ist $y \in [x]$, also $[y] = [x] \subseteq C(x)$, dann besitzt nach Definition 4.1 des lokalen Wegzusammenhangs y eine offene wegzusammenhängende Umgebung $U_y \subseteq C(x)$, d.h. $U_y \subseteq [y]$. Also ist $[x] = \bigcup_{y \in [x]} U_y \subseteq C(x)$ offen, und wegen $x \in [x]$ nicht leer. Mit dem gleichen Argument ist aber auch $C(x) \setminus [x]$ offen, also $[x] = C(x)$. $\square$

6.26 Beispiel (Mannigfaltigkeiten) Lemma 6.25 ist auf topologische Mannigfaltigkeiten anwendbar. Denn diese sind nach ihrer Definition 5.32 lokal zu einem $\mathbb{R}^n$ homöomorph, und damit lokal wegzusammenhängend. $\diamond$

⁶⁹denn $f(1)$ und $g(1)$ bestehen aus je einem Punkt von X . Sind also f und g homotop, dann sind die beiden Punkte durch einen Weg verbunden.



Abbildung 6.4: Die orthogonale Gruppe $O(n)$ als topologische Gruppe (Aufgabe 6.27): $O(2)$ mit Untergruppe $SO(2)$ und dem neutralen Element e

6.27 Aufgabe Zeigen Sie für $n \leq 2$, dass für die orthogonale Gruppe $O(n)$ (siehe Bsp. 6.6.2) mit der **Drehgruppe** $SO(n) := \{M \in O(n) \mid \det(M) = 1\}$ gilt:

$$\pi_0(O(n)) = \{SO(n), O(n) \setminus SO(n)\} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

sie also die Wegekompenten der Drehungen und der Spiegelungen besitzt. $\diamond$

6.3 Die Homotopieklassen in $C(S^1, S^1)$

An dem in diesem Unterkapitel betrachteten Beispiel kann man ablesen, was wir ganz allgemein mit Homotopietheorie erreichen wollen. Wir betrachten also den Raum

$$C(S^1, S^1)$$

der stetigen Selbstabbildungen der Kreislinie. Unser Ziel ist es, seine Homotopieklassen, also $[S^1, S^1]$ zu verstehen.

Im Gegensatz zu $C(X, Y)$ für beliebige topologische Räume X, Y sind hier Definitions- und Wertebereich, also S^1 , eine kompakte topologische Gruppe und auch ein metrischer Raum, mit $d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2|$. Das werden wir uns zunutze machen, denn wir haben noch nicht genügend andere Techniken zur Verfügung.

Betrachten wir zunächst besonders einfache Selbstabbildungen, nämlich die Gruppenendomorphismen (auch *Charaktere* genannt)

$$e_n \in C(S^1, S^1) \quad , \quad e_n(z) = z^n \quad (n \in \mathbb{Z}). \quad (6.3)$$

Diese wickeln, anschaulich gesprochen, die Kreislinie n Mal um sich selbst. Die richtige Intuition ist, dass jedes $f \in C(S^1, S^1)$ zu genau einem dieser e_n homotop ist. Wie könnten wir das zu f passende n finden? Dazu müssen wir mit dem Gruppenhomomorphismus

$$\Phi : \mathbb{R} \rightarrow S^1 \quad , \quad x \mapsto \exp(2\pi i x) \quad , \quad \text{also} \quad \Phi(x + y) = \Phi(x)\Phi(y) \quad (6.4)$$

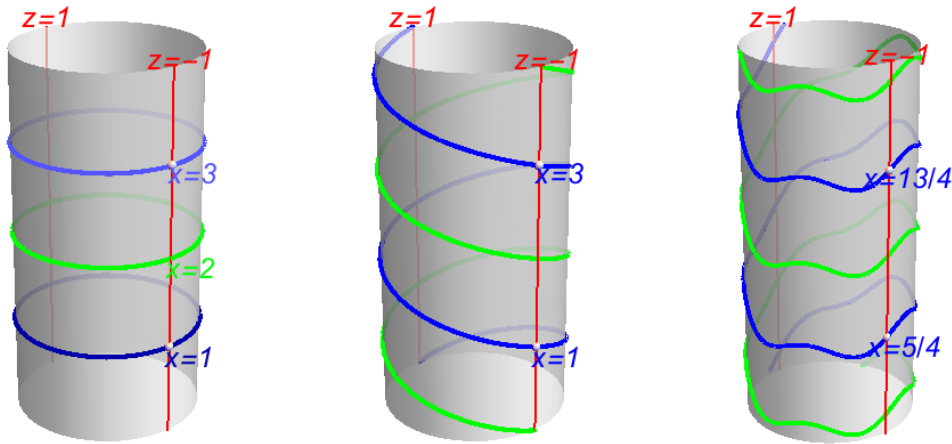


Abbildung 6.5: Abbildungsgrad. Links: $G(e_0) \subseteq S^1 \times \mathbb{R}$ (grün und blau). Mitte: $G(e_{-2})$, Rechts: $G(f)$ für $f \in C(S^1, S^1)$ mit $\deg(f) = -2$.

die totale, durch 2π dividierte Winkeländerung für f finden. Das Problem ist aber gerade, dass Winkel nur modulo 2π definiert sind. Wir betrachten nun die Teilmenge

$$G(f) := \{(z, x) \in S^1 \times \mathbb{R} \mid \Phi(x) = f(z)\} \quad , \text{ also } G(f) = (\text{id}_{S^1} \times \Phi)^{-1}(\text{graph}(f))$$

des Zylinders $S^1 \times \mathbb{R}$. Diese besitzt für alle $z \in S^1$ Fasern der Form $\{z\} \times (x(z) + \mathbb{Z})$, siehe Abb. 6.5, rechts. Da f stetig ist, können wir für die geöffneten Kreise $\tilde{S}^1 := S^1 \setminus \{-1\}$ Abbildungen $\tilde{f} \in C(\tilde{S}^1, \mathbb{R})$ mit $\Phi \circ \tilde{f} = f|_{\tilde{S}^1}$ finden. $\tilde{f}$ ist zwar nicht eindeutig durch f bestimmt, aber die verschiedenen Wahlen unterscheiden sich nur durch ganze Zahlen. Daher ist der *Abbildungsgrad* ⁷⁰

$$\deg(f) := \lim_{z \searrow -1} \tilde{f}(z) - \lim_{z \nearrow -1} \tilde{f}(z) \quad (6.5)$$

von f unabhängig von der Wahl von $\tilde{f}$ und ganzzahlig.

Da für die Homomorphismen $e_n : S^1 \rightarrow S^1$ die Teilmenge $G(e_n)$ gleich $\bigcup_{z \in S^1} \{z\} \times \left(\frac{n}{2\pi} \arg(z) + \mathbb{Z}\right)$ ist, gilt

$$\deg(e_n) = n \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

siehe Abbildung 6.5, Links und Mitte. $\deg : C(S^1, S^1) \rightarrow \mathbb{Z}$ ist also surjektiv.

6.28 Satz (Abbildungsgrad)

1. Die Wegekomponten in $C(S^1, S^1)$ sind offene Zusammenhangskomponenten.
2. Der Abbildungsgrad $\deg$ ist eine Homotopieinvariante.
3. Der Abbildungsgrad $\deg : C(S^1, S^1) \rightarrow \mathbb{Z}$ ist stetig⁷¹.

⁷⁰ $z \nearrow -1$ ($z \searrow -1$) heißt, dass $z \in \tilde{S}^1$ mit negativem (positivem) Imaginärteil gegen -1 strebt.

⁷¹ für die kompakt-offene Topologie auf $C(S^1, S^1)$ und die diskrete Topologie auf $\mathbb{Z}$

4. Versieht man $C(S^1, S^1)$ mit der punktweisen Multiplikation, betrachtet den Abbildungsraum also als abelsche Gruppe (mit neutralem Element e_0 und zu f inversem Element $\bar{f}$), dann ist $\deg$ ein Epimorphismus der Gruppen. Insbesondere gilt $\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g)$.
5. Der Kern des Gruppenhomomorphismus $\deg$ besteht aus den nullhomotopen (also z.B. zu e_0 homotopen) Abbildungen.
6. Die Menge $[S^1, S^1]$ der Wegekompenten wird mit

$$[f] \cdot [g] := [f \cdot g] \quad (f, g \in C(S^1, S^1)) \quad (6.6)$$

eine Gruppe. Damit ist

$$\widetilde{\deg} : [S^1, S^1] \rightarrow \mathbb{Z} \quad , \quad \widetilde{\deg}([f]) := \deg(f)$$

wohldefiniert und ein Isomorphismus.

Beweis:

1. Für $f \in C(S^1, S^1)$ bilden die Kugeln

$$U_\varepsilon(f) = \{g \in C(S^1, S^1) \mid \sup_{z \in S^1} d(g(z), f(z)) < \varepsilon\} \quad (\varepsilon > 0)$$

nach Aufgabe 5.39 auch in der lokal-kompakten Topologie eine Umgebungsbasis von f . Wird die Konstante $\varepsilon \in (0, 1)$ gewählt, während ja (S^1, d) den Durchmesser 2 besitzt, ist für $h_0, h_1 \in U_\varepsilon(f)$ nie $h_0(z) = -h_1(z)$.

Als Homotopie auf $U_\varepsilon(f)$ von h_0 nach h_1 können wir daher

$$H : I \rightarrow U_\varepsilon(f) \quad , \quad H_t(z) = h_0(z) \left(\frac{h_1(z)}{h_0(z)} \right)^t \quad (z \in S^1) \quad (6.7)$$

wählen, denn für $w \in \tilde{S}^1$ lassen sich die Potenzen $w^t \in \tilde{S}^1$ eindeutig und stetig definieren. Damit ist die Umgebung $U_\varepsilon(f)$ wegzusammenhängend, $C(S^1, S^1)$ also lokal wegzusammenhängend. Aus Lemma 6.25 folgt die Aussage.

2. Es seien $h_0, h_1 \in C(S^1, S^1)$ homotop, d.h. es gebe eine Homotopie $H \in C(S^1 \times I, S^1)$ von $h_0 = H_0$ nach $h_1 = H_1$. Für $\tilde{h}_0 \in C(\tilde{S}^1, \mathbb{R})$ gelte $\Phi \circ \tilde{h}_0 = h_0|_{\tilde{S}^1}$, sodass der Abbildungsgrad $\deg(h_0)$ analog zu (6.5) durch $\tilde{h}_0$ bestimmt ist.

Wir müssen $\deg(h_1) = \deg(h_0)$ zeigen, was aus der Konstanz von $t \mapsto \deg(H_t)$ folgt. Ist diese Abbildung $I \rightarrow \mathbb{Z}$ aber stetig, dann ist sie nach Lemma 4.3 konstant, denn das Intervall I ist zusammenhängend.

Nun existiert ein eindeutiger *lift* $\tilde{H} : \tilde{S}^1 \times I \rightarrow \mathbb{R}$ (d.h. $\Phi \circ \tilde{H}_t = H_t$) von $H|_{\tilde{S}^1}$ mit $\tilde{H}_0 = \tilde{h}_0$, denn für jedes $z \in \tilde{S}^1$ ist ja die stetige Abbildung $t \mapsto \tilde{H}_t(z)$

durch die Forderung $\tilde{H}_0(z) = \tilde{h}_0(z)$ eindeutig festgelegt. Aber $\tilde{H}$ ist sogar insgesamt stetig, nicht nur in der Variable t . Denn $H|_{\tilde{S}^1 \times I} = \Phi \circ \tilde{H}$ ist stetig, und Φ ist ein lokaler Homöomorphismus.⁷²

3. Stetigkeit von $\deg : C(S^1, S^1) \rightarrow \mathbb{Z}$ ist gleichbedeutend damit, dass für alle $n \in \mathbb{Z}$ die Urbildmenge $\deg^{-1}(n)$ offen ist. Nach Aussage 2. ist diese Vereinigung von Wegzusammenhangskomponenten, nach Aussage 1. ist sie Vereinigung offener Zusammenhangskomponenten.⁷³
4. Da Φ ein Gruppenhomomorphismus ist, siehe (6.4), folgt für $f, g \in C(S^1, S^1)$ und $\tilde{f}, \tilde{g} \in C(\tilde{S}^1, \mathbb{R})$ mit $\Phi \circ \tilde{f} = f|_{\tilde{S}^1}$ und $\Phi \circ \tilde{g} = g|_{\tilde{S}^1}$:

$$\Phi \circ (\tilde{f} + \tilde{g})(z) = \Phi \circ \tilde{f}(z) \cdot \Phi \circ \tilde{g}(z) = f(z) \cdot g(z) \quad (z \in \tilde{S}^1),$$

also für $\widetilde{fg} := \tilde{f} + \tilde{g}$

$$\begin{aligned} \deg(fg) &= \lim_{z \searrow -1} \widetilde{fg}(z) - \lim_{z \nearrow -1} \widetilde{fg}(z) = \lim_{z \searrow -1} (\tilde{f} + \tilde{g})(z) - \lim_{z \nearrow -1} (\tilde{f} + \tilde{g})(z) \\ &= \lim_{z \searrow -1} \tilde{f}(z) - \lim_{z \nearrow -1} \tilde{f}(z) - \lim_{z \searrow -1} \tilde{g}(z) - \lim_{z \nearrow -1} \tilde{g}(z) = \deg(f) + \deg(g). \end{aligned}$$

Da $\deg$ auch surjektiv ist (denn $\deg(e_n) = n$), ist $\deg$ ein Epimorphismus.

5. Ist der Abbildungsgrad von $f \in C(S^1, S^1)$ Null, dann gibt es ein $\tilde{f} \in C(\tilde{S}^1, \mathbb{R})$ mit $\Phi \circ \tilde{f} = f|_{\tilde{S}^1}$ und $\lim_{z \searrow -1} \tilde{f}(z) = \lim_{z \nearrow -1} \tilde{f}(z)$. Nennen wir diesen Limeswert einfachheitshalber $\tilde{f}(-1)$, dann erhalten wir eine stetige Abbildung $\tilde{f} : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$. Für diese existiert nach Beispiel 6.21.1 eine Homotopie $\tilde{F} \in C(S^1 \times I, \mathbb{R})$ nach der Nullfunktion in $C(S^1, \mathbb{R})$, und mit $F_t := \Phi \circ \tilde{F}_t$ ($t \in I$) erhalten wir eine Homotopie $F \in C(S^1 \times I, S^1)$ von f nach e_0 .
6. Die Wohldefiniertheit von (6.6) bedeutet, dass für

$$[f_0] = [f_1] \quad \text{und} \quad [g_0] = [g_1] \quad \text{auch gilt:} \quad [f_0 \cdot g_0] = [f_1 \cdot g_1]. \quad (6.8)$$

Sind aber $F, G \in C(S^1 \times I, S^1)$ Homotopien mit $F_i = f_i$ und $G_i = g_i$ ($i = 0, 1$), dann ist $H \in C(S^1 \times I, S^1)$, $H_t := F_t \cdot G_t$ eine Homotopie mit $H_i = f_i \cdot g_i$ ($i = 0, 1$). (6.6) besagt, dass die Abbildung

$$\Psi : C(S^1, S^1) \rightarrow [S^1, S^1] \quad , \quad f \mapsto [f]$$

⁷²**Definition.** $f \in C(X, Y)$ heißt **lokaler Homöomorphismus**, wenn alle $x \in X$ offene Umgebungen U_x besitzen, deren Bild $f(U_x) \subseteq Y$ ebenfalls offen ist, und für die die restringierte Abbildung $f|_{U_x} : U_x \rightarrow f(U_x)$ ein Homöomorphismus ist.

⁷³tatsächlich bestehen sie aus je einer Zusammenhangskomponente.

ein Epimorphismen der Gruppen ist. $\widetilde{\deg}$ ist wegen Aussage 2. wohldefiniert, und $\widetilde{\deg} \circ \Psi = \deg$. Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & & [S^1, S^1] \\ & \nearrow \Psi & \downarrow \widetilde{\deg} \\ C(S^1, S^1) & & \mathbb{Z} \\ & \searrow \deg & \end{array}$$

kommutiert also. Da $\deg$ surjektiv ist, und nach Aussage 5. $\ker(\deg) = \ker(\Psi)$ gilt, ist $\widetilde{\deg}$ ein Isomorphismus. $\square$

Wir werden im nächsten Kapitel, Beispiel 6.37 sehen, dass wir damit unter Anderem die Fundamentalgruppe $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ der Kreislinie S^1 berechnet haben.

6.4 Anwendungen des Abbildungsgrads

Obwohl S^1 kein sonderlich komplizierter topologischer Raum ist, kann man mit dem in (6.5) eingeführten Abbildungsgrad praktisch viel anfangen. In diesem Kapitel werden einige der Anwendungen vorgestellt.

6.29 Beispiel (Windungszahl) Es sei $c : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ eine Schleife in der komplexen Ebene. Nach Lemma 5.14 ist $\text{im}(c) \subseteq \mathbb{C}$ kompakt, also abgeschlossen und beschränkt. Damit ist das Komplement $U \subseteq \mathbb{C}$ des Bildes offen und enthält eine Umgebung von ∞ . U ist die direkte Summe seiner Zusammenhangskomponenten, die nach Lemma 6.25 auch die Wegkomponenten sind.

Wir definieren nun für einen Punkt $u \in U$ die *Windungszahl*

$$w_c(u) := \deg(p_c(u)) \quad \text{mit} \quad p_c(u) \in C(S^1, S^1), \quad p_c(u)(z) := \frac{c(z) - u}{|c(z) - u|}.$$

Diese ganze Zahl kommt zum Beispiel im *Residuensatz* der Funktionentheorie vor (wobei für u die isolierten Polstellen einer meromorphen Funktion verwendet werden). Wir stellen fest, dass $p_c : U \rightarrow \mathbb{Z}$ auf den Zusammenhangskomponenten von U konstant ist, denn für jeden Weg $H \in C(I, U)$ ist die Abbildung

$$S^1 \times I \rightarrow S^1, \quad (z, t) \mapsto p_c(H_t)(z)$$

stetig, der Abbildungsgrad $t \mapsto w_c(H_t)$ also konstant. Außerdem ist für die Zusammenhangskomponente U_∞ von U , die eine Umgebung von ∞ darstellt, die Windungszahl Null. Denn für eine $\text{im}(c)$ enthaltende Kreisscheibe D mit Mittelpunkt 0 und jeden Punkt $u \in U_\infty \setminus D$ ist das Bild $p_c(u)(S^1) \subseteq S^1$ ein Kreissegment, das den Punkt $u/|u|$ nicht enthält. Siehe Abbildung 6.6. $\diamond$

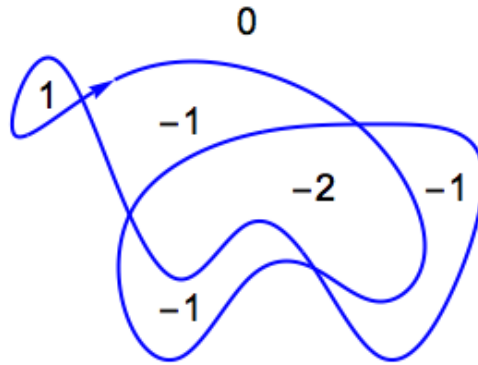


Abbildung 6.6: Windungszahlen

Der **Fundamentalsatz der Algebra** kann mithilfe der Homotopieinvarianz des Abbildungsgrads bewiesen werden:

6.30 Satz *Jedes nicht konstante Polynom $p \in \mathbb{C}[x]$ besitzt eine Nullstelle.*

Beweis: Es sei $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ mit $n \in \mathbb{N}$, Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$ und $a_n \neq 0$. Bei Übergang zum Polynom p/a_n ändern sich die Nullstellen nicht. Wir können also annehmen, dass $a_n = 1$ ist. Jedenfalls besitzt das Leitmonom $q \in \mathbb{C}[x]$, $q(x) = x^n$ von p eine Nullstelle (bei 0, sogar eine n -fache). Für genügend große $r \in (0, \infty)$ gilt

$$|p(x) - q(x)| < |q(x)| = r^n \quad (x \in \mathbb{C}, |x| = r), \quad (6.9)$$

denn $|p(x) - q(x)| = |\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| |x|^k < r^n$, falls r so groß ist, dass die Koeffizienten die Ungleichungen $|a_k| < r^{n-k}/n$ ($k = 0, \dots, n-1$) erfüllen. Für diese r ist nach der Dreiecksungleichung also $p(x) \neq 0$ ($|x| = r$).

Der Abbildungsgrad von $c_p \in C(S^1, S^1)$, $c_p(z) := \frac{p(rz)}{|p(rz)|}$ ist nach Satz 6.28.2

$$\deg(c_p) = \deg(c_q) = n,$$

denn für die Polynome $p_t := (1-t)p + tq \in \mathbb{C}[x]$ ($t \in I$), also

$$p_t(x) = x^n + (1-t) \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$$

gilt das Analog von (6.9). Daher ist die Homotopie

$$H \in C(S^1 \times I, S^1) \quad , \quad H_t = c_{(1-t)p+ tq}$$

von c_p zu c_q wohldefiniert, und $t \mapsto \deg(H_t)$ ist konstant.⁷⁴

Andererseits bedeutet $\deg(c_p) = n$, dass p in der Kreisscheibe $D_r \subseteq \mathbb{C}$ mit Radius

⁷⁴In FULTON [Fu] heißt eine etwas allgemeinere Aussage (3.11) *dog on a leash theorem*: Ein Mann umkreist einen Hydranten, wobei der Abstand immer größer als die Länge der Leine ist, mit der er seinen Hund festhält. Dann umkreist der Hund den Hydranten gleich oft wie sein Herrchen.

r und Mittelpunkt 0 eine Nullstelle hat. Andernfalls wäre für *alle* $r > 0$ der Abbildungsgrad definiert und wegen Stetigkeit $\deg(c_p) = n$. Aber $\lim_{r \searrow 0} \frac{p(rz)}{|p(rz)|} = \frac{p(0)}{|p(0)|}$. Damit wäre für kleine $r > 0$ der Abbildungsgrad gleich $0 \neq n$. Widerspruch! $\square$

6.31 Definition

Für einen Unterraum $A \subseteq X$ heißt $f \in C(X, A)$ **Retraktion**, wenn $f|_A = \text{id}_A$. $A \subseteq X$ heißt **Retrakt** von X , wenn es eine Retraktion $f : X \rightarrow A$ gibt.

Zum Beispiel ist der Punkt, auf den ein kontrahierbarer Raum X zusammengezogen wird, ein Retrakt von X . Man muss aber zwei Dinge beachten:

- Für einen Hausdorff-Raum X kann $A \subseteq X$ nur dann ein Retrakt von X sein, wenn $A \subseteq X$ abgeschlossen ist.⁷⁵
- Für einen Hausdorff-Raum ist jeder seiner Punkte ein Retrakt, auch wenn er nicht kontrahierbar ist.

6.32 Beispiel (Retraktion von D^n auf S^n ; Fixpunktsatz von Brouwer)

1. Es gibt keine Retraktion der Vollkugel $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ auf ihren Rand S^{n-1} . Für $n = 1$ ist das offensichtlich, denn das Intervall D^1 ist zusammenhängend, S^0 aber nicht. Für $n = 2$, $D^2 \subseteq \mathbb{C}$ folgt die Aussage aus dem Abbildungsgrad 1 der Restriktion einer Retraktion $f : D^2 \rightarrow S^1$ auf ihren Rand S^1 (denn $f|_{S^1} = \text{id}_{S^1} = e_1$). Da die Abbildung $F : S^1 \times I \rightarrow S^1$, $F_t(z) := f(tz)$ stetig ist, muss auch der Abbildungsgrad $\deg(F_t) = \deg(e_1) = 1$ sein. Andererseits ist $F_0(z) = f(0)$, also ist $\deg(F_0) = 0$. Widerspruch!
2. Eine Selbstabbildung $f : M \rightarrow M$ einer Menge besitzt einen *Fixpunkt* $m \in M$, wenn $f(m) = m$ gilt. Für Mengen M mit mehr als einem Element gibt es immer Selbstabbildungen und sogar Bijektionen ohne Fixpunkt. Das sieht man für die endlichen Mengen $M := \{1, \dots, n\}$ durch Verwendung der zyklischen Permutation $f := (1, \dots, n)$.
3. Anders sieht es für topologische Räume X und stetige Abbildungen $f : X \rightarrow X$ aus. Beispielsweise hat für ein kompaktes Intervall jede solche Abbildung einen Fixpunkt, für die anderen Intervalle aber gibt es fixpunktfreie f (warum?).
4. In Verallgemeinerung von $n = 1$ auf $n \in \mathbb{N}$ Dimensionen besagt der **Fixpunktsatz von Brouwer**: Für $f \in C(D^n, D^n)$ besitzt f einen Fixpunkt.

⁷⁵Denn $x \in X \setminus A$ und $a := f(x) \in A$ haben dann disjunkte offene Umgebungen $U_a, U_x \subseteq X$, und $U_x \cap f^{-1}(U_a) \subseteq X \setminus A$ ist eine offene Umgebung von x . Also ist $X \setminus A$ offen.

Wir beweisen ihn für $n = 2$, also die Kreisscheibe D^2 . Besitzt f keinen Fixpunkt, dann ist die durch

$$g : D^2 \rightarrow S^1, \quad g(x) := x + t \frac{x - f(x)}{\|x - f(x)\|} \quad \text{mit } t \geq 0$$

definierte ⁷⁶ Abbildung stetig, siehe Abbildung 6.7. Widerspruch zu 1.! $\diamond$

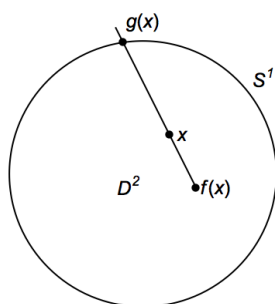


Abbildung 6.7: Die Retraktion $g : D^2 \rightarrow S^1$ im Beweis des Fixpunktsatzes von Brouwer

6.33 Satz (Borsuk-Ulam) Für $n \in \mathbb{N}$ und jede Abbildung $a \in C(S^n, \mathbb{R}^n)$ gibt es einen Punkt $x \in S^n$ mit $a(-x) = a(x)$.

Beweis (für $n \leq 2$): Wir nehmen an, dass es keinen solchen Punkt gibt. Dann können wir die stetige Abbildung

$$g : S^n \rightarrow S^{n-1}, \quad g(x) := \frac{a(-x) - a(x)}{\|a(-x) - a(x)\|}$$

definieren. Es gilt also $g(-x) = -g(x)$. Für $n = 1$ ist aber g lokal konstant, also konstant, denn S^1 ist zusammenhängend. Wir haben also einen Widerspruch erzeugt. Für $n \geq 2$ betrachtet man die Abbildung

$$h : D^n \rightarrow S^n \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \quad x \mapsto (x, \sqrt{1 - \|x\|^2})$$

der Vollkugel auf die Nordhalbkugel (eigentlich: Nordhalbsphäre). Diese ist stetig, und die Restriktion von $k := g \circ h : D^n \rightarrow S^{n-1}$ auf den Rand S^{n-1} von D^n ist ungerade:

$$k(-x) = g \circ h(-x) = g((-x, 0)) = -g((x, 0)) = -k(x) \quad (\|x\| = 1).$$

⁷⁶Man rechnet nach, dass dann $t = \sqrt{1 - \|x - f(x)\|^2} - \langle x, v \rangle$ mit $v := \frac{x - f(x)}{\|x - f(x)\|}$ gilt.

Damit muss für ⁷⁷ $n = 2$ der Abbildungsgrad von $f := k|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ ungerade sein: Mit (6.5) ist allgemein

$$\deg(f) = \lim_{z \searrow -1} [\tilde{f}(z) - \tilde{f}(1)] - \lim_{z \nearrow -1} [\tilde{f}(z) - \tilde{f}(1)],$$

hier ist aber wegen $\Phi \circ \tilde{f}(z) = f(z)$ und $f(-z) = -f(z)$

$$\deg(f) = 2 \lim_{z \searrow -1} [\tilde{f}(z) - \tilde{f}(1)],$$

und modulo 1 ist $\lim_{z \searrow -1} \tilde{f}(z)$ gleich $\tilde{f}(1) + 1/2$.

Das kann aber nicht sein, denn mit dem Argument aus dem Beweis von Satz 6.30 (Fundamentalsatz der Algebra) kann eine stetige Abbildung $S^1 \rightarrow S^1$ nicht stetig zu einer Abbildung $D^2 \rightarrow S^1$ fortgesetzt werden, wenn ihr Abbildungsgrad ungleich 0 ist. k wäre aber solch eine Fortsetzung von f . $\square$

Für $n = 1$ folgt als dem Satz von Borsuk und Ulam zum Beispiel, dass auf dem Äquator zwei Antipoden mit der gleichen Temperatur existieren, und für $n = 2$, dass es auf der Erdoberfläche zwei Punkte mit gleicher Temperatur und gleichem Luftdruck gibt. Eine weitere Anwendung ist der Satz vom Sandwich.

6.5 Die Fundamentalgruppe

Ein topologischer Wunschtraum ist die Existenz eines Verfahrens, mit dem man feststellen kann, ob zwei vorgegebene topologische Räume homöomorph sind. Wir haben schon viele notwendige Voraussetzungen für Homöomorphie kennengelernt, nämlich die Gleichheit von *invarianten Eigenschaften* wie Kompaktheit oder Zusammenhang.

Es gibt aber kompakte, zusammenhängende Flächen, die nicht zueinander homöomorph sind, etwa die Sphäre S^2 und der Torus $\mathbb{T}^2$. Wir werden jetzt mit der Fundamentalgruppe eines topologischen Raums eine weitere topologische Invariante einführen, mit der man feststellen kann, dass S^2 und $\mathbb{T}^2$ tatsächlich nicht homöomorph sind.

Dazu schauen wir uns den Wegeraum $PX := C(I, X)$ des Raums X genauer an. Für $x_0, x_1 \in X$ bezeichnen wir den Teilraum der Wege von x_0 nach x_1 mit

$$PX(x_0, x_1) := \{c \in PX \mid c(0) = x_0, c(1) = x_1\} \quad \text{und} \quad PX(x) := PX(x, x). \quad (6.10)$$

Für Wege $c_1 \in PX(x_0, x_1)$ und $c_2 \in PX(x_1, x_2)$ ist

$$c_2 * c_1 : I \rightarrow X, \quad c_2 * c_1(s) := \begin{cases} c_1(2s) & , s \in [0, 1/2] \\ c_2(2s - 1) & , s \in (1/2, 1] \end{cases} \quad (6.11)$$

⁷⁷Tatsächlich kann man für alle $m \in \mathbb{N}$ einen *Abbildungsgrad* auf $C(S^m, S^m)$ definieren (siehe HIRSCH, [Hi, Kapitel 5.1]), und das gleiche Argument wie für $m = 1$ gilt.

ein Weg in $PX(x_0, x_2)$. Wir können auch Wege $c \in PX(x_0, x_1)$ umkehren, indem wir $c^-(s) := c(1 - s)$ setzen, also $c^- \in PX(x_1, x_0)$.

6.34 Bemerkung Jeder Weg $c \in PX(x, y)$ ist in PX homotop zum konstanten Weg mit Wert x , mit Homotopie $H \in C(I \times I, X)$, $H_t(s) := c(ts)$.

Ist X wegzusammenhängend, besteht also $\pi_0(X)$ nur aus einem Element, dann ist $\pi_0(PX)$ daher ebenfalls einelementig und damit nicht sehr spannend.

Daher betrachtet man statt beliebiger Homotopien in PX (die zur besseren Unterscheidung *frei* genannt werden) Weghomotopien: $\diamond$

6.35 Definition • Eine Homotopie $H \in C(I \times I, X)$ von $h_0 \in PX(x_0, x_1)$ nach $h_1 \in PX(x_0, x_1)$ heißt **Weghomotopie**, wenn $H_t \in PX(x_0, x_1)$ ($t \in I$) gilt, Anfangs- und Endpunkte also festgehalten werden.

• Das **Fundamentalgruppoid** $\Pi_1(X)$ von X besteht aus

- der Objektmenge $\text{Ob}(\Pi_1(X)) := X$,
- für $x_0, x_1 \in X$ der Morphismenmenge $\text{Mor}_{\Pi_1(X)}(x_0, x_1) := \pi_0 PX(x_0, x_1)$,
- der von (6.11) induzierten Komposition von Morphismen,
- und den von den konstanten Wegen c_x induzierten Identitätsmorphismen id_x .

• Die **Fundamentalgruppe** von X bei x ist

$$\pi_1(X, x) := \pi_0 PX(x, x).$$

Mit den gleichen Argumenten wie für freie Homotopien $H \in C(I \times I, X)$ ist Weghomotopie von Wegen in $PX(x_0, x_1)$ eine Äquivalenzrelation.

6.36 Bemerkung (Schleifen)

Durch den Übergang von freien zu Weghomotopien, also Fixierung von Anfangs- und Endpunkt, ist $\pi_0 PX(x, y)$ oft viel reichhaltiger als $\pi_0(PX)$.

Das sieht man am einfachsten, wenn $x = y$ ist, denn dann sind die Wege $c \in PX(x)$ geschlossen und werden *Schleifen* genannt. Da Anfangs- und Endpunkt von $c : I \rightarrow X$ übereinstimmen, wird c auch durch $I/\sim$ parametrisiert, mit der durch $x \sim y$, falls $x = y$ oder $\{x, y\} = \{0, 1\}$ definierten Äquivalenzrelation.

Man kann die Schleife auch mit der zu $I/\sim$ homöomorphen Kreislinie S^1 parametrisieren, denn die stetige Abbildung $\Phi|_I : I \rightarrow S^1$ ist surjektiv und bis auf die Intervallgrenzen mit $\Phi(0) = \Phi(1) = 1 \in S^1$ injektiv. Siehe auch Bsp. 3.25. $\diamond$

6.37 Beispiel (Fundamentalgruppe von S^1)

$X := S^1$ ist zusammenhängend, also $\pi_0(PX)$ einelementig. Setzen wir in (6.10) Einfachheit halber $x := y := 1 \in S^1$, dann ist die Fundamentalgruppe

$$\pi_1(S^1, 1) = \pi_0 PS^1(1) \cong \mathbb{Z},$$

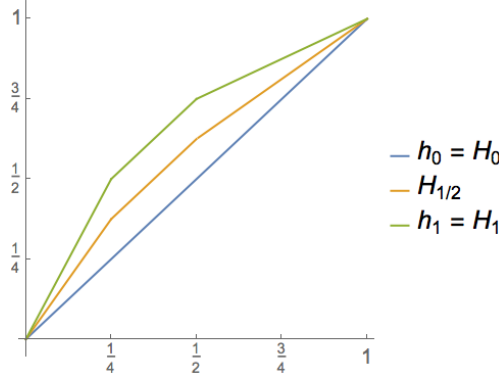


Abbildung 6.8: Die Wege $d_0 = c_3 * (c_2 * c_1)$ und $d_1 = (c_3 * c_2) * c_1$ sind weghomotop.

mit den Charakteren $e_n : S^1 \rightarrow S^1$ ($n \in \mathbb{Z}$) aus (6.3) als Repräsentanten der Weghomotopie-Klassen. Das folgt aus Satz 6.28, denn alle $f \in C(S^1, S^1)$ mit $\deg(f) = n$ sind zu e_n homotop. Sei speziell $f \in PS^1(1)$ und $\hat{H} \in C(S^1 \times I, S^1)$ eine Homotopie von f nach e_n . Dann ist $H \in C(S^1 \times I, S^1)$, $H_t := \hat{H}_t / \hat{H}_t(1)$ eine Homotopie in $PS^1(1)$ von f nach e_1 , das heißt $H_t(1) = 1$ ($t \in I$). $\diamond$

Wir zeigen nun, dass das Fundamentalgruppoid $\Pi_1(X)$ tatsächlich ein Gruppoid ist (also eine Kategorie, deren Morphismen Isomorphismen sind).

Wenn wir stattdessen versuchsweise die Menge X als Objektmenge, den Wegraum PX als Morphismenmenge, $*$ als Komposition und den konstanten Weg $c_x \in PX(x, x)$ als Identitätsmorphismus für $x \in X$ wählen, dann erhalten wir nur *beinahe* eine Kategorie, sogar ein Gruppoid. Nur beinahe,

- weil $c^- * c \in PX(x)$ für $c \in PX(x, y)$ nicht der konstante Weg c_x , sondern nur weghomotop⁷⁸ zu diesem ist, und
- weil das Produkt nicht assoziativ ist. Allerdings sind für einen dritten Weg $c_3 \in PX(x_2, x_3)$ die Wege

$$d_0 := c_3 * (c_2 * c_1) \quad \text{und} \quad d_1 := (c_3 * c_2) * c_1 \quad \text{in} \quad PX(x_0, x_3)$$

zueinander weghomotop. Denn offensichtlich sind sie nur verschieden parametrisiert. Abb. 6.8 zeigt die Weghomotopie von I für ihre Umparametrisierung.

6.38 Lemma *Gibt es für die Wege $d_0, d_1 \in PX(x, y)$ eine Umparametrisierung $h_1 \in PI(0, 1)$ mit $d_1 = d_0 \circ h_1$, dann ist d_0 zu d_1 weghomotop.*

⁷⁸mit Weghomotopie $H \in C(I \times I, X)$, $H_t(s) := c^- * c(t)$ für $s \in [t/2, 1 - t/2]$ und $H_t(s) := c^- * c(s)$ für $s \in I \setminus [t/2, 1 - t/2]$. Der Weg c wird also nur bis Parameterwert t durchlaufen, dann angehalten, um zuletzt wieder zurückzulaufen.

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass es für $h_0 := \text{id}_I$ (also $d_0 = d_0 \circ h_0$) eine Weghomotopie $H \in C(I \times I, I)$ von h_0 nach h_1 gibt, denn dann ist $t \mapsto d_0 \circ H_t$ eine Weghomotopie von d_0 nach d_1 . Wir benutzen die lineare Weghomotopie $H_t(s) := (1-t)h_0(s) + th_1(s)$, also $H_0 = h_0$, $H_1 = h_1$ und $H_t \in PI(0, 1)$. $\square$

6.39 Satz (Fundamentalgruppoid und Fundamentalgruppe)

Das Fundamentalgruppoid $\Pi_1(X)$ eines topologischen Raums X ist tatsächlich ein Gruppoid. Also ist für alle $x \in X$ die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x)$ eine Gruppe.

Beweis: • In der Definition 6.35 von $\Pi_1(X)$ haben wir die Komposition von Morphismen in $\Pi_1(X)$ (also von Wegeklassen) durch die Komposition (6.11) von Wegen erklärt. Es muss zunächst die Repräsentantenunabhängigkeit dieser Definition überprüft werden.

Für Wege $f_0, f_1 \in PX(y, z)$ und $g_0, g_1 \in PX(x, y)$ muss also analog zu (6.8) aus

$$[f_0] = [f_1] \quad \text{und} \quad [g_0] = [g_1] \quad \text{folgen} \quad [f_0 * g_0] = [f_1 * g_1].$$

Das kann aber nicht mehr analog zu (6.8) durch punktweise Multiplikation der Homotopien bewiesen werden. Sind $F, G \in C(I \times I, X)$ mit $F_t \in PX(y, z)$ und $G_t \in PX(x, y)$ Homotopien mit $F_i = f_i$ und $G_i = g_i$ ($i = 0, 1$), dann ist

$$H : I \times I \rightarrow X \quad , \quad H_t = \begin{cases} F_{2t} * g_0 & , t \in [0, 1/2] \\ f_1 * G_{2t-1} & , t \in (1/2, 1] \end{cases}$$

stetig mit $H_t \in PX(x, z)$, $H_0 = f_0 * g_0$ und $H_1 = f_1 * g_1$.

- Zwar gilt für $f \in PX(x, y)$ im Allgemeinen nicht $f * c_x = f$, aber aus Lemma 6.38 folgt $[f][c_x] = [f * c_x] = [f]$ (und analog $[c_y][f] = [f]$), also $\text{id}_x = [c_x]$.
- Dass Assoziativität gilt, zeigt die angegebene Upparametrisierung und Lemma 6.38.
- Auch dass $c^- * c \in PX(x)$ für $c \in PX(x, y)$ zum konstanten Weg c_x weghomotop ist, haben wir schon überprüft. Also sind alle Morphismen $[c]$ Isomorphismen:

$$[c^-][c] = [c][c^-] = \text{id}_x. \quad (6.12)$$

- Da die Fundamentalgruppe bei $x \in X$ durch $\pi_1(X, x) := \pi_0 PX(x, x)$ definiert wurde, und da $\Pi_1 X$ wie gerade festgestellt, ein Gruppoid ist, ist nach Lemma 6.14 $\pi_1(X, x)$ eine Gruppe. $\square$

Die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x)$ hängt vom Punkt $x \in X$ ab. Ist etwa X die disjunkte Vereinigung $X = X_1 \sqcup X_2$, dann ist $\pi_1(X, x) = \pi_1(X_i, x)$ falls $x \in X_i$. Denn es gibt ja keinen Weg zwischen einem Punkt von X_1 und einem Punkt von X_2 . Immerhin gilt:

6.40 Lemma Für einen Raum X sind die Fundamentalgruppen $\pi_1(X, x)$ an verschiedenen Punkten x einer Wegekomponeute isomorph.

Beweis: Es gebe für zwei Punkte $x, y \in X$ einen Weg $c \in PX(x, y)$. Dann existiert auch die Abbildung

$$\Phi_{[c]} : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, y) \quad , \quad [g] \mapsto [c][g][c^-] \quad (g \in \pi_1(X, x)), \quad (6.13)$$

denn $g \in \pi_1(X, x)$ lässt sich zu $(c * g) * c^- \in \pi_1(X, y)$ komponieren, und

$$[c][g][c^-] = [(c * g) * c^-] \in \pi_1(X, y).$$

$\Phi_{[c]}$ ist ein Gruppenhomomorphismus, denn mit (6.12) ist

$$\begin{aligned} \Phi_{[c]}([g_1])\Phi_{[c]}([g_2]) &= [c][g_1][c^-][c][g_2][c^-] = [c][g_1]\text{id}_y[g_2][c^-] \\ &= [c][g_1][g_2][c^-] = \Phi_{[c]}([g_1][g_2]). \end{aligned}$$

Aber dieser besitzt $\Phi_{[c^-]} : \pi_1(X, y) \rightarrow \pi_1(X, x)$, $[h] \mapsto [c^-][h][c]$ als Linksinverse:

$$\Phi_{[c^-]} \circ \Phi_{[c]}([g]) = \Phi_{[c^-]}([c][g][c^-]) = [c^-][c][g][c^-][c] = \text{id}_x[g]\text{id}_x = [g],$$

und damit aus Symmetriegründen auch als Rechtsinverse. Also ist $\Phi_{[c]}$ ein Gruppenisomorphismus. $\square$

Damit sind alle Fundamentalgruppen $\pi_1(X, x)$ eines wegzusammenhängenden Raums X als abstrakte Gruppen gleich. Man kann dann also von der Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ sprechen. Man muss sich allerdings darüber klar sein, dass sich für nicht homotope Wege $c_1, c_2 \in PX(x, y)$ die Isomorphismen $\Phi_{[c_1]}$ und $\Phi_{[c_2]}$ von $\pi_1(X, x)$ und $\pi_1(X, y)$ unterscheiden können:

6.41 Lemma Unter den Voraussetzungen von Lemma 6.40 sind für $c, d \in PX(x, y)$ die Gruppenisomorphismen (6.13) konjugiert:

$$\Phi_{[d]}(g) = k \Phi_{[c]}(g) k^{-1} \quad (g \in \pi_1(X, x)),$$

mit $k := [d * c^-] \in \pi_1(X, y)$. Insbesondere sind die Fundamentalgruppen $\pi_1(X, x)$ und $\pi_1(X, y)$ kanonisch isomorph, wenn sie abelsch sind.

Beweis: Es gilt

$$\Phi_{[d]}(g) = [d]g[d^-] = [d * c^-][c]g[c^-][c * d^-] = [d * c^-]\Phi_{[c]}(g)[c * d^-] = k \Phi_{[c]}(g) k^{-1}.$$

Ist $\pi_1(X, y)$ abelsch, dann ist $\Phi_{[d]}(g) = k \Phi_{[c]}(g) k^{-1} = k k^{-1} \Phi_{[c]}(g) = \Phi_{[c]}(g)$. $\square$

Da $\pi_1(S^1, x) \cong \mathbb{Z}$ abelsch ist und S^1 wegzusammenhängend ist, konnten wir also mit noch mehr Begründung von der Fundamentalgruppe $\pi_1(S^1)$ sprechen.

Lemma 6.41 kann auch auf folgende Weise interpretiert werden. Die Kategorie $\Pi_1(X)$, also das in Def. 6.35 eingeführte Wegegruppoid des Raums X , wird durch die Zuordnungen

$$x \mapsto \pi_1(X, x) \quad (x \in X) \quad \text{und} \quad c \mapsto \Phi_c : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, y) \quad (c \in \pi_0 PX(x, y))$$

mit der Kategorie **Grp** der Gruppen in Beziehung gesetzt. Diese Zuordnung ist ein Funktor

$$\Pi_1(X) \longrightarrow \mathbf{Grp} . \quad (6.14)$$

Das bedeutet, dass $\Phi_{[c]}$ für nullhomotope Wege c die Fundamentalgruppe nicht ändert, und dass bei Zusammensetzung von Wegen gilt: $\Phi_{[d \star c]} = \Phi_{[d]} \circ \Phi_{[c]}$.

Möchte man das Verhalten der Fundamentalgruppe unter stetigen Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ verstehen, betrachtet man statt dessen den Funktor

$$\Pi_1 : \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Grpd}$$

der Kategorie aller topologischen Räume in die Kategorie aller Gruppoide, der durch die Zuordnungen $(X, \mathcal{O}) \mapsto \Pi_1((X, \mathcal{O})) := X$ der Objekte und der Morphismen

$$f \longmapsto \Pi_1(f) : \Pi_1(X) \rightarrow \Pi_1(Y) \quad , \quad \Pi_1(f)([c]) := [f \circ c] \quad (f \in C(X, Y))$$

definiert wird. Dabei bildet also $\Pi_1(f)$ die Wegeklasse des Wegs $c \in PX(x_1, x_2)$ auf die Wegeklasse des Bildwegs $f \circ c \in PY(f(x_1), f(x_2))$ ab. Dass Π_1 ein solcher Funktor ist, hat insbesondere zur Folge, dass die durch f induzierte Abbildung

$$\pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(Y, f(x))$$

ein Homomorphismus der Fundamentalgruppen ist. Ziemlich offensichtlich ist es, dass daher homöomorphe Räume X, Y isomorphe Fundamentalgruppen haben. Das ist nicht besonders nützlich, um für einen gegebenen Raum die Fundamentalgruppe zu bestimmen. Aber es reicht aus, dass X und Y homotopieäquivalent sind, siehe Satz 6.44. Im Beweis benutzt man den Begriff der Äquivalenz von Kategorien:

6.42 Definition Für zwei Kategorien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ betrachten wir diejenigen Funktoren $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, für welche die Abbildungen

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X_1, X_2) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(F(X_1), F(X_2)) \quad (X_1, X_2 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}))$$

bijektiv sind.⁷⁹ Dann heißen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$

⁷⁹Das allein bedeutet natürlich noch nicht, dass $F : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}} \rightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}$ eine Bijektion ist.

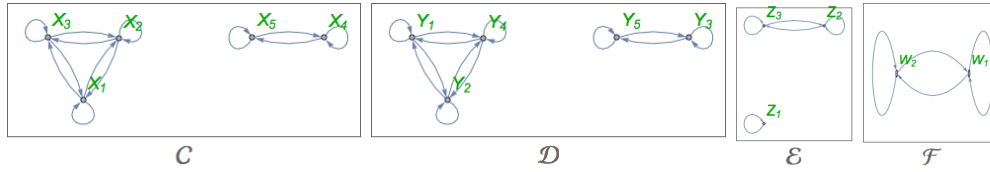


Abbildung 6.9: Beispiele für Isomorphie und Äquivalenz von Kategorien. Von den abgebildeten Gruppoiden sind $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ isomorph, und beide äquivalent aber nicht isomorph zu $\mathcal{E}$. $\mathcal{F}$ ist zu keinem anderen Gruppoid äquivalent.

- **isomorph**, wenn es ein solches F gibt, für das $F: \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D})$ bijektiv ist;
- **äquivalent**, wenn es ein solches F gibt, für das für jedes $Y \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ ein $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ existiert, sodass Y isomorph zu $F(X)$ ist.

Offensichtlich ist Äquivalenz eine Abschwächung von Isomorphie. Man braucht sie, weil es eher selten vorkommt, dass zwei Kategorien isomorph sind.

Insbesondere kann ja ein Raum X homotopieäquivalent (siehe Bemerkung 6.22.4) zu einem Punkt Y sein. Wir können dann nicht erwarten, dass die Fundamentalgruppoiden $\Pi_1(X)$ und $\Pi_1(Y)$ isomorph sind, denn die Objektmenge $\text{Ob}(\Pi_1(X)) = X$ besteht im Allgemeinen aus mehr als einem Punkt.

Obwohl hier Äquivalenz der Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ unsymmetrisch definiert wurde, sind sowohl Isomorphie als auch Äquivalenz Äquivalenzrelationen auf der Klasse aller Kategorien.

6.43 Beispiele (Isomorphie und Äquivalenz von Kategorien)

1. Gruppoiden können äquivalent, aber nicht isomorph sein, siehe Abbildung 6.9.
2. Dagegen sind zwei Gruppen, als Kategorien mit einem Objekt verstanden, genau dann äquivalent, wenn sie isomorph (also auch als Objekte in **Grp** isomorph) sind. Denn jeder Funktor muss ja das einzige Objekt der ersten Gruppe auf das der zweiten abbilden. $\diamond$

6.44 Satz Für eine durch $f \in C(X, Y)$ und $g \in C(Y, X)$ gegebene Homotopieäquivalenz sind die Fundamentalgruppoiden $\Pi_1(X)$, $\Pi_1(Y)$ äquivalent und die Fundamentalgruppen $\pi_1(X, x)$ und $\pi_1(Y, f(x))$ isomorph.

Beweis: Der $f: X \rightarrow Y$ zugeordnete Funktor ist $\Pi_1(f): \Pi_1(X) \rightarrow \Pi_1(Y)$ mit

$$\text{Ob}(\Pi_1(X)) = X \longrightarrow Y = \text{Ob}(\Pi_1(Y)) \quad , \quad x \longmapsto f(x),$$

$$\text{Mor}_{\Pi_1(X)}(x_0, x_1) \longrightarrow \text{Mor}_{\Pi_1(Y)}(f(x_0), f(x_1)) \quad , \quad [\gamma] \longmapsto [f \circ \gamma],$$

wobei $\gamma \in C(I, X)$ ein Weg von x_0 nach x_1 ist. Die zweite Definition ist unabhängig von der Wahl der Repräsentanten γ . Sei $\Pi_1(g)$ ist der g zugeordnete Funktor. Nach Voraussetzung gibt es Homotopien $H \in C(X \times I, X)$ mit $H_0 = g \circ f$, $H_1 = \text{id}_X^{\text{TOP}}$ und $K \in C(Y \times I, Y)$ mit $K_0 = f \circ g$, $K_1 = \text{id}_Y^{\text{TOP}}$.

Für $y \in Y$ betrachten wir $x := g(y) \in X$ und $y' := f(x) \in Y$. Dann ist y' isomorph zu y , denn $K_0(y') = y$, $K_1(y') = y'$ und $I \rightarrow Y$, $t \mapsto K_t(y)$ ist ein Weg von y nach y' .

Da Gruppen Kategorien mit einem Objekt sind, sind die Fundamentalgruppen $\pi_1(X, x)$ und $\pi_1(Y, y)$ damit sogar isomorph. $\square$

Insbesondere sind kontrahierbare Räume einfach zusammenhängend:

6.45 Definition Ein topologischer Raum heißt **einfach zusammenhängend**, wenn er wegzusammenhängend und seine Fundamentalgruppe einelementig ist.

6.46 Beispiel ($\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$) Es folgt aus Beispiel 6.23.4, dass für $n \in \mathbb{N}$ der Raum $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ zu S^{n-1} homotopieäquivalent ist.

- Also ist $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \pi_1(S^{n-1})$, und insbesondere $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \cong \mathbb{Z}$.
- Für $n > 2$ wird aus Beispiel 6.49 folgen, dass $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \{e\}$ gilt. $\diamond$

6.47 Satz Das Produkt $X \times Y$ topologischer Räume hat die Fundamentalgruppen

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \quad ((x_0, y_0) \in X \times Y).$$

Beweis: Wir definieren explizit einen Isomorphismus und berechnen dessen Inverse. Mit den Projektionen $\text{pr}_X : X \times Y \rightarrow X$, $\text{pr}_Y : X \times Y \rightarrow Y$ und den Injektionen

$$\text{in}_X : X \rightarrow X \times Y, x \mapsto (x, y_0) \quad , \quad \text{in}_Y : Y \rightarrow X \times Y, y \mapsto (x_0, y)$$

gilt $\text{pr}_X \circ \text{in}_X = \text{id}_X$, und analog $\text{pr}_Y \circ \text{in}_Y = \text{id}_Y$. Die Abbildung

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \rightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \quad , \quad [c] \mapsto ([\text{pr}_X \circ c], [\text{pr}_Y \circ c]) \quad (6.15)$$

(also mit Wegen $c \in C(I, X \times Y)$, $c(0) = c(1) = (x_0, y_0)$) ist ein Isomorphismus. Zunächst sind die beiden Abbildungen $[c] \mapsto [\text{pr}_X \circ c]$ und $[c] \mapsto [\text{pr}_Y \circ c]$ Gruppenhomomorphismen, denn die Projektionen sind bezüglich der Produkttopologie stetig. Damit ist auch (6.15) ein Gruppenhomomorphismus.

Wir zeigen durch Angabe seiner Inversen, dass (6.15) ein Isomorphismus ist. Mit der Diagonalabbildung $\delta : I \rightarrow I \times I$, $t \mapsto (t, t)$ ist

$$\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \quad , \quad ([a], [b]) \mapsto [(a \times b) \circ \delta]$$

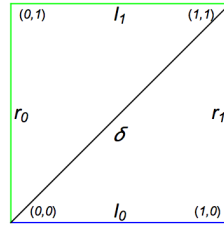


Abbildung 6.10: Die Wege $l_1 * r_0$ (grün), δ und $r_1 * l_0$ (blau) sind weghomotop.

ein Gruppenhomomorphismus, wenn $(a \times b) \circ \delta : I \rightarrow X \times Y$ weghomotop zu

$$(\text{in}_X \circ a) * (\text{in}_Y \circ b) : I \rightarrow X \times Y \quad \text{und} \quad (\text{in}_Y \circ b) * (\text{in}_X \circ a) : I \rightarrow X \times Y$$

ist. Die Wghomotopie der letzten beiden Abbildungen impliziert, dass auf der Menge $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ das direkte Produkt gewählt wurde. Aber mit

$$l_i, r_i : I \rightarrow I \times I, \quad l_i(t) = (t, i), \quad r_i(t) = (i, t) \quad (i = 0, 1)$$

(siehe Abb. 6.10) sind $l_1 * r_0$, $r_1 * l_0$ und δ alle linear weghomotop, und daher

$$(\text{in}_X \circ a) * (\text{in}_Y \circ b) = (a \times b) \circ l_1 * r_0 \text{ homotop zu } (\text{in}_Y \circ b) * (\text{in}_X \circ a) = (a \times b) \circ r_1 * l_0.$$

Damit ist (6.15) ein Isomorphismus. $\square$

6.48 Beispiel (Fundamentalgruppe des Torus) Es folgt aus Satz 6.47 und der Bestimmung der Fundamentalgruppe $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ in Beispiel 6.37, dass

$$\pi_1(\mathbb{T}^n) \cong \pi_1(S^1) \times \dots \times \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}^n$$

gilt. Da $\mathbb{T}^n$ (weg-)zusammenhängend und die Gruppe abelsch ist, durften wir nach Lemma 6.41 den Fußpunkt $x \in \mathbb{T}^n$ weglassen; siehe Beispiel 1.8.2. $\diamond$

Wir können noch nicht viele Fundamentalgruppen berechnen:

6.49 Beispiel ($\pi_1(S^n)$) Wir wissen schon, dass $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ gilt, und dass $\pi_1(S^0, 1)$ und $\pi_1(S^0, -1)$ einelementig sind.

Naheliegender und wahr ist die Vermutung, dass auch $\pi_1(S^n, x)$ für $n \geq 2$ trivial ist. Ein Argument könnte so gehen: Sei $c \in C(S^1, S^n)$ eine beim Fußpunkt $c(1) = x$ beginnende und endende Schleife. Man nehme einen Punkt $y \in S^n \setminus c(S^1)$. Dann ist $S^n \setminus \{y\}$ homöomorph zum $\mathbb{R}^n$. Da der $\mathbb{R}^n$ kontrahierbar ist, können wir auch eine Wghomotopie der Schleife c zum konstanten Weg c_x konstruieren.

Dieses Argument krankt daran, dass es *surjektive* Schleifen $c : S^1 \rightarrow S^n$ gibt, man also dann gar keinen solchen Punkt y findet. Das folgt aus der Existenz von *Peano-Kurven*, siehe auch ⁸⁰.

⁸⁰Beispiel 4.2.3 in meiner *Analysis II*.

Man kann es dadurch retten, dass man in der Nähe eines Punktes $y \in S^n \setminus \{x\}$ die Kurve durch eine Homotopie von y wegschiebt. Wir werden mit dem Lemma 6.54 von Lebesgue im nächsten Kapitel ein allgemeines Argument kennenlernen, das nur die Kompaktheit des Definitionsbereichs (hier: S^1) benutzt. $\diamond$

Um Fundamentalgruppen komplizierterer Räume zu berechnen, benötigen wir definitiv ein besseres Werkzeug, den Satz von Seifert und van Kampen.

6.6 Der Satz von Seifert und van Kampen

Dieser Satz ermöglicht es im Prinzip, die Fundamentalgruppe eines topologischen Raums zu berechnen, indem man ihn aus offenen Teilmengen zusammensetzt. Um seine Anwendungen zu motivieren, beginnen wir mit einem Beispiel.

6.50 Beispiel (Fundamentalgruppe $\pi_1(S^1 \vee S^1)$ des Bouquets)

Wenn wir die beiden Kreislinien der Summe⁸¹ $S_l^1 \sqcup S_r^1$ an beliebigen Punkten, etwa jeweils bei $1 \in S^1$, miteinander identifizieren, erhalten wir den topologischen Raum⁸² $X := S_l^1 \vee S_r^1$, der aussieht wie eine 8, oder wie ∞ (Abbildung 6.11, links). Den Kreuzungspunkt nennen wir x , und wir wollen $\pi_1(X, x)$ berechnen.

X wird durch wegzusammenhängende offene Mengen $U_i \supseteq S_i^1$ ($i \in \{l, r\}$) überdeckt, wobei beide echte Teilmengen von X sein sollen. Nun ist $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, und da die U_i homotopieäquivalent zu S^1 sind, gilt nach Satz 6.44 $\pi_1(U_i, x) \cong \mathbb{Z}$. Eine Schleife $c \in PX(x)$ kann zwar in unendlich vielen Parameterintervallen den Fußpunkt x treffen, was die Berechnung von $\pi_1(S^1 \vee S^1)$ unübersichtlich zu machen droht. Aber wir können I in endlich viele Intervalle $[s_{k-1}, s_k]$ mit $0 = s_0 < s_1 \dots < s_n = 1$ zerlegen, in denen c abwechselnd in U_l und in U_r liegt. Wir können in diesem Fall sogar annehmen, dass $c(s_k) = x$ ($k = 0, \dots, n$) ist. Dann sind $c|_{[s_{k-1}, s_k]}$ bei x basierte Schleifen, denen jeweils ein Element der Fundamentalgruppe $\pi_1(U_{i_k}, x) \cong \mathbb{Z}$ zugeordnet werden kann, und $i_k \neq i_{k+1}$.

Der Verdacht liegt also nahe (und wird durch eine Anwendung des Satzes von Seifert und van Kampen bestätigt), dass gilt

$$\pi_1(S^1 \vee S^1, x) \cong \mathbb{Z} \star \mathbb{Z},$$

die Fundamentalgruppe also das freie Produkt von $\mathbb{Z}$ mit sich ist (Abb. 6.11). $\diamond$

6.51 Aufgabe (Freie Gruppe mit zwei Erzeugern)

Zeigen Sie unter Verwendung von Beispiel 6.50, dass die Fundamentalgruppe von $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ isomorph zu $\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}$ ist.

⁸¹die Indizes l und r dienen nur der Benennung der beiden Summanden.

⁸²Damit ist X Spezialfall eines **Wedge-Produktes** oder **Bouquets** $\bigvee_{i \in I} X_i := \coprod_{i \in I} X_i / \coprod_{i \in I} \text{pt}_i$ topologischer Räume X_i , mit Identifikation der Punkte $\text{pt}_i \in X_i$.

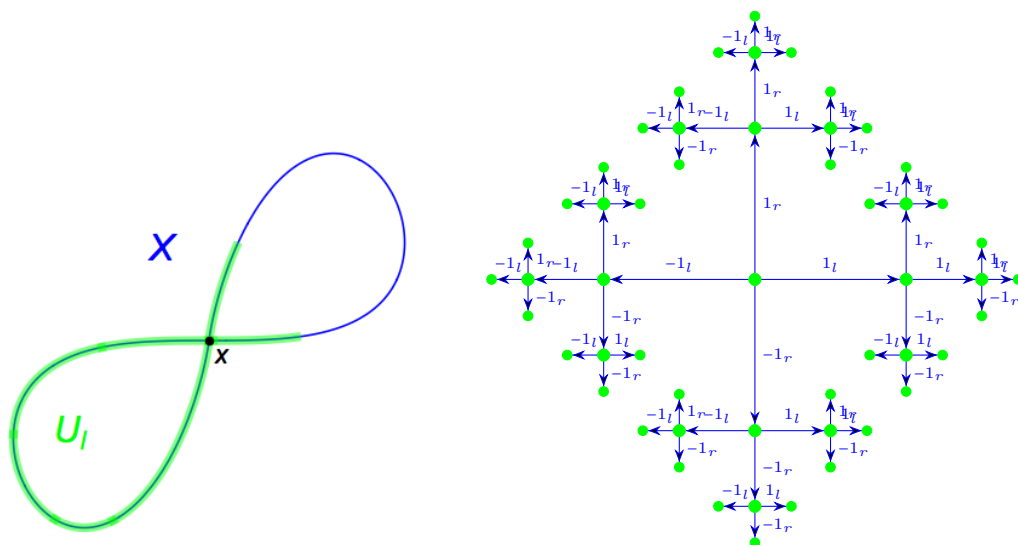


Abbildung 6.11: Links: Bouquet $X = S^1 \vee S^1$, mit offener Teilmenge U_l . Rechts: Freies Produkt $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z} \star \mathbb{Z}$. $1_l \in \mathbb{Z}_l$ und $1_r \in \mathbb{Z}_r$ erzeugen die Gruppen.

Kann man ein Bild so mit einer Schnur an zwei Nägeln aufhängen, dass bei Entfernung eines Nagels das Bild immer von der Wand fällt? An n Nägeln? $\diamond$

Wir verallgemeinern jetzt die im Beispiel benutzten Konzepte. Wenn wir statt $U_l, U_r \subseteq X = S^1 \vee S^1$ jetzt beliebige offene Teilmengen $U, V \subseteq X$ eines topologischen Raums X betrachten, dann erkennen wir, dass hier ein besonders einfaches pushout topologischer Räume stattfindet, nämlich eines, in dem nur Einbettungen vorkommen:

$$\begin{array}{ccc} U \cup V & \xleftarrow{i_V} & V \\ \uparrow i_U & & \uparrow j_V \\ U & \xleftarrow{j_U} & U \cap V \end{array} \quad (6.16)$$

Die Idee ist es, dieses pushout in **Top** funktoriell auf ein pushout von Gruppen, also in **Grp** abzubilden, und so die Fundamentalgruppe von $U \cup V$ zu berechnen. Das ist aber noch nicht präzise genug, denn in der Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x)$ kommt ja nicht nur der topologische Raum X vor, sondern auch der Punkt $x \in X$.

6.52 Bemerkung (Pushout und Seifert–van Kampen)

In Beispiel 6.50 war $U \cap V$ zusammenhängend und sogar einfach zusammenhängend. Beides muss im Allgemeinen nicht erfüllt sein. So werden wir in Bsp. 6.61 die Fundamentalgruppen der Sphären (wieder) berechnen, indem wir S^n als Vereinigung offener, die Nord- bzw. Südhalbkugel enthaltender Teilmengen U

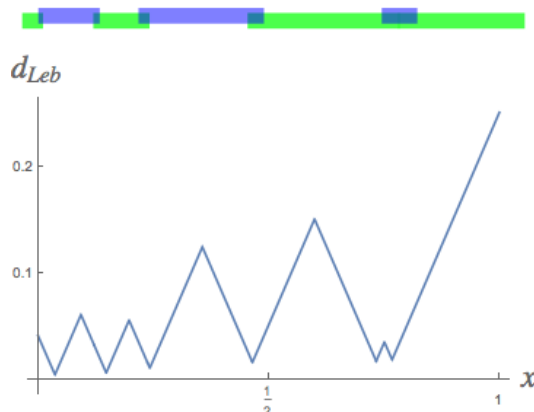


Abbildung 6.12: Zur Definition der Lebesgue-Zahl einer Überdeckung: Die das Intervall I überdeckenden offenen Mengen sind blau und grün dargestellt. Darunter abgebildet ist die Funktion d_{Leb} .

und V darstellen. Dabei ist der verdickte Äquator $U \cap V$ für $n = 2$ nicht einfach zusammenhängend, und für $n = 1$ noch nicht einmal zusammenhängend. $\diamond$

Ist $U \cap V$ aber nicht wegzusammenhängend, dann kann es sein, dass die Fundamentalgruppen $\pi_1(U \cup V, x)$ für verschiedene $x \in U \cap V$ nicht isomorph sind. Um diese Problematik zu behandeln, werden wir zunächst die Kategorie **Top** statt in **Grp** in die Kategorie **Grpd** der Gruppoide abbilden.⁸³ Vorher klären wir aber die schon in Beispiel 6.50 auftretende Endlichkeitsfrage.

6.53 Definition Für eine Überdeckung $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ eines metrischen Raums (X, d) heißt $\delta > 0$ eine **Lebesgue-Zahl**, wenn es für alle Punkte $x \in X$ einen Index $i_x \in I$ gibt mit $U_\delta(x) \subseteq U_{i_x}$.

Offensichtlich sind mit δ auch alle Zahlen in $(0, \delta)$ Lebesgue-Zahlen. Wie das Beispiel der Überdeckung $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des (nicht kompakten) Intervalls $(0, 1)$ mit $U_n := (\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n})$ zeigt, braucht aber keine Lebesgue-Zahl zu existieren.

6.54 Lemma (Lebesgue) Jede offene Überdeckung $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ eines kompakten metrischen Raums (X, d) besitzt eine Lebesgue-Zahl.

Beweis: Wegen der Kompaktheit von (X, d) können wir annehmen, dass die Indexmenge I endlich ist. Setzt man

$$\delta(\mathcal{U}) := \inf_{x \in X} d_{\text{Leb}}(x) \quad \text{mit} \quad d_{\text{Leb}}(x) := \max_{i \in I} \text{dist}(x, X \setminus U_i),$$

dann ist zunächst einmal wegen der Überdeckungseigenschaft von $\mathcal{U}$ und der Offenheit der U_i die Zahl $d_{\text{Leb}}(x) > 0$. Die offene Kugel von Radius $d_{\text{Leb}}(x)$

⁸³Diese Idee geht auf den Artikel [Br] von RONALD BROWN zurück.

um x ist in U_j enthalten, falls $d_{\text{Leb}}(x) = \text{dist}(x, X \setminus U_j)$, siehe Abbildung 6.12. Weiter ist $d_{\text{Leb}} : X \rightarrow (0, \infty)$ wegen der Dreiecksungleichung stetig:

$$\text{dist}(y, A) = \inf_{a \in A} d(y, a) \leq d(y, x) + \text{dist}(x, A) \quad (x, y \in X, A \subseteq X).$$

Daher wird das Infimum $\delta(\mathcal{U})$ angenommen und ist damit positiv. $\square$

Wir wenden auf das pushout (6.16) in **Top** den Funktor Π_1 aus (6.14) an.

6.55 Satz (Seifert-van Kampen für Gruppoide) *Es seien U und V offene Teilmengen eines topologischen Raums X . Dann ist (mit den Bezeichnungen aus (6.16)) das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \Pi_1(U \cup V) & \xleftarrow{\Pi_1(i_V)} & \Pi_1(V) \\ \uparrow \Pi_1(i_U) & & \uparrow \Pi_1(j_V) \\ \Pi_1(U) & \xleftarrow{\Pi_1(j_U)} & \Pi_1(U \cap V) \end{array} \quad (6.17)$$

ein pushout in **Grpd**.

6.56 Bemerkung (Bedeutung der Aussage) Dass das Diagramm von Satz 6.55 ein pushout ist, bedeutet, dass man bei Kenntnis von $\Pi_1(U)$, $\Pi_1(V)$ und $\Pi_1(U \cap V)$ das Fundamentalgruppoid $\Pi_1(U \cup V)$ bestimmen kann. Damit kann man (im Prinzip), ausgehend von einer endlichen offenen Überdeckung des topologischen Raums X , in endlich vielen Schritten dessen Fundamentalgruppoid berechnen. In der Praxis kommt es natürlich darauf an, eine Überdeckung von X zu wählen, bei der die einzelnen Berechnungen übersichtlich bleiben. $\diamond$

Beweis von Satz 6.55: Das Diagramm kommutiert, denn wegen der Funktor-Eigenschaft von Π_1 und der Kommutativität von (6.16) ist

$$\Pi_1(i_V) \circ \Pi_1(j_V) = \Pi_1(j_V \circ j_V) = \Pi_1(j_U \circ j_U) = \Pi_1(i_U) \circ \Pi_1(j_U). \quad (6.18)$$

Das ist in Definition 3.29 das erste Kriterium dafür, dass $\Pi_1(U \cup V)$ ein pushout in der Kategorie **Grpd** ist. Als zweite Bedingung in Def. 3.29 ist die universelle Eigenschaft nachzuweisen. Wir ergänzen also für ein beliebiges Gruppoid T und Morphismen $t_U \in \text{Mor}_{\text{Grpd}}(\Pi_1(U), T)$, $t_V \in \text{Mor}_{\text{Grpd}}(\Pi_1(V), T)$ mit $t_U \circ \Pi_1(j_U) = t_V \circ \Pi_1(j_V)$ das Diagramm (6.17) zu

$$\begin{array}{ccc} T & & \\ \uparrow t_U & \xleftarrow{t_V} & \\ \Pi_1(U \cup V) & \xleftarrow{\Pi_1(i_V)} & \Pi_1(V) \\ \uparrow \Pi_1(i_U) & & \uparrow \Pi_1(j_V) \\ \Pi_1(U) & \xleftarrow{\Pi_1(j_U)} & \Pi_1(U \cap V) \end{array} \quad (6.19)$$

Wir müssen nachweisen, dass es genau einen Morphismus $t : \Pi_1(U \cup V) \rightarrow T$ gibt, sodass das Diagramm (6.19) kommutiert, d.h. dass gilt:

$$t \circ \Pi_1(i_U) = t_U \quad \text{und} \quad t \circ \Pi_1(i_V) = t_V. \quad (6.20)$$

1. **Eindeutigkeit von t :** Wir betrachten $t([c])$ für ein beliebiges Element $[c]$ von $\Pi_1(U \cup V)$. Also ist $c \in P(U \cup V)$. Nach dem Lemma 6.54 von Lebesgue gibt es eine Zerlegung des kompakten Definitionsbereichs I der stetigen Abbildung $c : I \rightarrow U \cup V$ mit Teilpunkten $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = 1$ und $W_\ell \in \{U, V\}$, sodass für alle $\ell = 1, \dots, n$ gilt: $c([s_{\ell-1}, s_\ell]) \subseteq W_\ell$.

$$\tilde{c}_\ell : I \rightarrow W_\ell, \quad s \mapsto c(s_{\ell-1} + (s_\ell - s_{\ell-1})s)$$

sind Wege in W_ℓ von $c(s_{\ell-1})$ nach $c(s_\ell)$, und alle Reparametrisierungen sind zu dieser weghomotop. Setzen wir $c_\ell := i_{W_\ell} \circ \tilde{c}_\ell : I \rightarrow U \cup V$, dann gilt nach Satz 6.39 und Definition 6.15.2.

$$t([c]) = t([c_n * \dots * c_1]) = t([c_n] \dots [c_1]) = t([c_n]) \dots t([c_1]), \quad (6.21)$$

denn $t \in \text{Mor}_{\mathbf{Grpd}}(\Pi_1(U \cup V), T)$ ist ja ein Funktor vom Gruppoid $\Pi_1(U \cup V)$ in T . Aber aus der Definition von c_ℓ folgt mit (6.20):

$$t([c_\ell]) = t([i_{W_\ell} \circ \tilde{c}_\ell]) = t \circ \Pi_1(i_{W_\ell})([\tilde{c}_\ell]) = t_{W_\ell}([\tilde{c}_\ell]),$$

was (bei gegebener Zerlegung des Intervalls I), eingesetzt in (6.21), $t([c])$ eindeutig durch die bekannten $t_{W_\ell}([\tilde{c}_\ell])$ festlegt.

2. **Existenz von t :** Letztere Festlegung könnte aber von Wahl des Repräsentanten c der gebundenen Homotopieklasse $[c]$ und von der Intervall-Zerlegung für den Weg c abhängen. Dann würde die Abbildung t nicht existieren.

Zunächst einmal kann man für eine zweite Zerlegung von I mit Teilpunkten $0 = s'_0 < s'_1 < \dots < s'_{n'} = 1$ die *gemeinsame Verfeinerung*

$$s''_0 < s''_1 < \dots < s''_{n''} \quad \text{mit} \quad \{s''_0, s''_1, \dots, s''_{n''}\} := \{s_0, s_1, \dots, s_n\} \cup \{s'_0, s'_1, \dots, s'_{n'}\}$$

verwenden. Will man nachweisen, dass (für analog zu c_ℓ definierte $c'_{\ell'}$) der Term $t([c_n]) \dots t([c_1])$ in (6.21) gleich $t([c'_{n'}]) \dots t([c'_{1'}])$ ist, reicht es also aus zu zeigen, dass

$$t([c_\ell]) = t([c''_{m_\ell}]) t([c''_{m_\ell+1}]) \dots t([c''_{m_{\ell+1}}]) \quad (\ell = 1, \dots, n) \quad (6.22)$$

ist (wobei die Indices m_ℓ so gewählt sind, dass $s''_{m_\ell} = s_\ell$ gilt). (6.22) ergibt sich aber aus der funktoriellen Eigenschaft von t_U und t_V , dass Produkte in Produkte abgebildet werden.

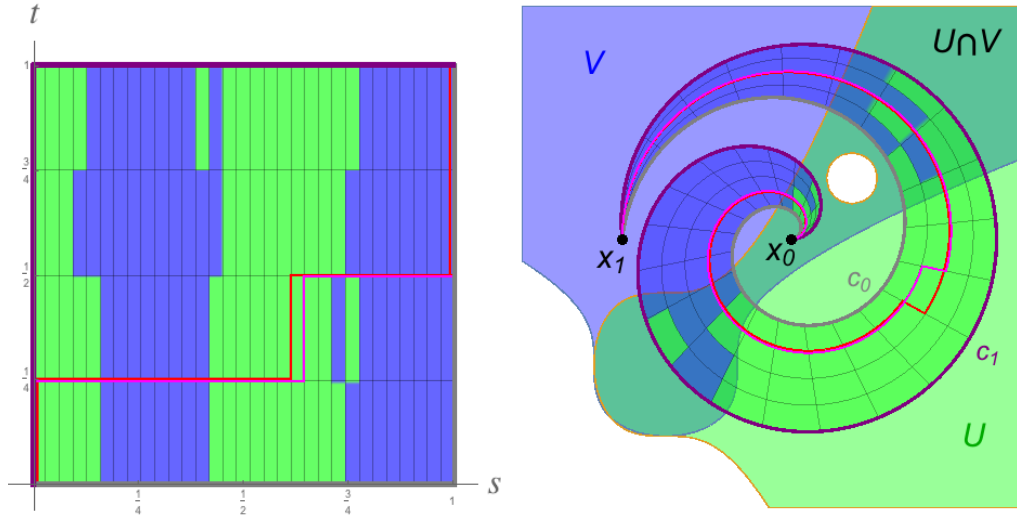


Abbildung 6.13: Zum Beweis von Satz 6.55. Links: Parameterraum $I \times I$ der Weghomotopie, mit den $n \times m$ Rechtecken $R_{i,j}$. Rechts: Bild der Homotopie in $U \cup V$. Den weghomotopen Kurven c_0 und c_1 in $U \cup V$ wird das gleiche Element von $\Pi_1(U \cup V)(x_0, x_1)$ zugeordnet. Der Übergang von der magentafarbenen zur roten Kurve in der Abbildung ist einer der $m \times n$ Schritte, aus denen die im Beweis verwendete Weghomotopie von c_0 nach c_1 besteht.

Für zwei weghomotope Kurven $c_0, c_1 \in P(U \cup V)(x_0, x_1)$ mit Weghomotopie $H : I \times I \rightarrow U \cup V$ wird das Quadrat von den offenen Mengen $H^{-1}(U)$ und $H^{-1}(V)$ überdeckt. Nach dem Lemma 6.54 von Lebesgue gibt es also Teilpunkte $\{s_0, s_1, \dots, s_n\}$ des Zeitintervalls I und $\{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ des Parameterintervalls I , sodass die $n \times m$ Rechtecke $R_{i,j} := [s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$ der entsprechenden Zerlegung von $I \times I$ jeweils ganz durch das Urbild der offenen Mengen $W_{i,j} \in \{U, V\}$ überdeckt werden. In Abbildung 6.13 (links) ist $W_{i,j}$ durch die Farbe des jeweiligen Rechtecks dargestellt.

Da $c_0 = H_0$ und $c_1 = H_1$ gilt, ist unser Ziel ist der Nachweis von

$$t([H_0]) = t([H_1]). \quad (6.23)$$

Dabei werden beide Seiten mittels t_U und t_V definiert.

$H_0 = H \circ h_0$ mit $h_j : I \rightarrow I \times I, \tau \mapsto (\tau, j)$ ist aber weghomotop zu $H \circ (v_1 * h_0)$ mit $v_i : I \rightarrow I \times I, \tau \mapsto (i, \tau)$, und H_1 ist weghomotop zu $H \circ (h_1 * v_0)$.⁸⁴ Vorteil dieser Darstellung ist, dass beide Wege $v_1 * h_0$ und $h_1 * v_0$ in $I \times I$ den Anfangspunkt $(0, 0)$ und Endpunkt $(1, 1)$ haben.

Der Beweis von (6.23) reduziert sich damit auf den Nachweis, dass für jedes

⁸⁴Die beiden Wege $v_1 * h_0$ und $h_1 * v_0$ am Rand des Quadrats sind in Abb. 6.13, links grau bzw. purpurfarben dargestellt, ebenso ihre Bilder unter H in $U \cup V$ (rechts).

Rechteck $R_{i,j}$ und die 'horizontalen' bzw. 'vertikalen' Wege

$$\begin{aligned} h_{i,j} : I &\rightarrow I \times I, \quad \tau \mapsto ((1-\tau)s_{i-1} + \tau s_i, t_j) \\ v_{i,j} : I &\rightarrow I \times I, \quad \tau \mapsto (s_i, (1-\tau)t_{j-1} + \tau t_j) \end{aligned} \quad (i \in \{0, \dots, n\}, j \in \{0, \dots, m\})$$

gilt: $t([v_{i,j} * h_{i,j-1}]) = t([h_{i,j} * v_{i-1,j}])$. Damit würde der roten und der magentafarbenen Kurve in Abb. 6.13 der gleiche Gruppoid-Morphismus zugeordnet. Diese Beziehung wird aber durch eine lineare Weghomotopie der beiden Kurven bestätigt, die nach Konstruktion im Rechteck $R_{i,j}$ die Abbildung $t_{W_{i,j}}$ verwendet.

Die Rechtecke $R_{i,j}$, bei denen eine Wahl für $W_{i,j}$ besteht, werden von H in $U \cap V$ abgebildet. Dort gilt aber $t_U \circ \Pi_1(j_U) = t_V \circ \Pi_1(j_V)$, es kommt also nicht auf die Wahl an. $\square$

Die in Satz 6.55 vorkommenden Fundamentalgruppoiden $\Pi_1(W)$ offener Teilmengen $W \subseteq X$ haben den Nachteil, dass ihre Objektmenge ganz W , also eine im allgemeinen unendliche Menge ist. Das ist für kombinatorische Betrachtungen, wie sie bei der Berechnung von Fundamentalgruppen vorkommen, unhandlich. Daher betrachtet man geeignete (möglichst: endliche) Teilmengen $A \subseteq W$ und ihnen zugeordnete Gruppoiden $\Pi_1^A(W)$.

6.57 Definition ($\Pi_1^A(W)$) Für eine Teilmenge $A \subseteq X$ eines topologischen Raums $(X, \mathcal{O}_X)$ und $W \in \mathcal{O}_X$ ist $\Pi_1^A(W)$ das Unter-Gruppoid des Fundamentalgruppoids $\Pi_1(W)$ von W , dessen Objektmenge $A \cap W$ ist, mit Morphismenmenge

$$\text{Mor}_{\Pi_1^A(W)}(a_1, a_2) := \text{Mor}_{\Pi_1(W)}(a_1, a_2) \quad (a_1, a_2 \in A \cap W).$$

Offensichtlich ist $\Pi_1^A(W)$ ein Gruppoid. Außerdem ist $\Pi_1^W(W) = \Pi_1(W)$, es handelt sich also bei $\Pi_1^A(W)$ um eine Verallgemeinerung des Fundamentalgruppoids, bei der Anfangs- und Endpunkte von Wegeklassen in A liegen.

6.58 Satz (Seifert-van Kampen für Π_1^A) Es seien U und V offene Teilmengen eines topologischen Raums X und $A \subseteq U \cup V$. Falls A jede Wegekomponente von U , V und $U \cap V$ trifft, dann ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Pi_1^A(U \cup V) & \xleftarrow{\Pi_1(i_V)} & \Pi_1^A(V) \\ \uparrow \Pi_1(i_U) & & \uparrow \Pi_1(j_V) \\ \Pi_1^A(U) & \xleftarrow{\Pi_1(j_U)} & \Pi_1^A(U \cap V) \end{array} \quad (6.24)$$

ein pushout in **Grpd**.

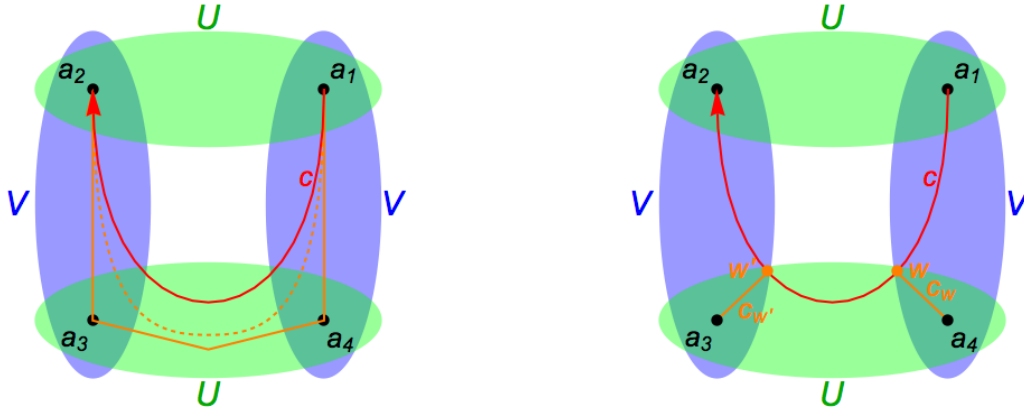


Abbildung 6.14: Links: Die Teilmenge $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\} \subseteq U \cup V$ trifft beide Wegekompenten von U , die beiden von V und die vier Wegekompenten von $U \cap V$. Ein Weg $c : I \rightarrow U \cup V$ (rot), beginnend in a_1 und endend in a_2 . Eine Homotopie von c zu einer Wegfolge (orange). Rechts: Tatsächlich wird Homotopie von c zu einer Wegfolge durch Komposition mit den Wegen c_w und $c_{w'}$ definiert.

Beweis: • Für $W \in \{U, V, U \cap V, U \cup V\}$ werden die Inklusionen der A zugeordneten Untergruppe mit

$$I_W : \Pi_1^A(W) \rightarrow \Pi_1(W)$$

bezeichnet. Wir zeigen zunächst, dass diese Linksinverse, d.h. Funktoren

$$R_W : \Pi_1(W) \rightarrow \Pi_1^A(W) \quad \text{mit} \quad R_W \circ I_W = \text{id}_{\Pi_1^A(W)} \quad (6.25)$$

besitzen.⁸⁵ Da nach Definition 6.57 $\Pi_1^A(W)$ die Menge $A \cap W$ als Objektmenge hat, muss die Retraktion R_W diese identisch auf sich abbilden. In $A \cap W$ beginnende und endende Wegekassen dürfen durch $\Pi_1^A(W)$ ebenfalls nicht geändert werden. Beides wird durch Angabe einer Familie von Wegen $c_w \in C(I, W)$, beginnend bei $w \in W$ und endend bei $a \in A \cap W$, bewirkt, siehe Abb. 6.14, rechts.

- Man ordnet damit dem Objekt $w \in W$ das Objekt $c_w(1) \in A \cap W$
- und dem Morphismus $[\gamma]$ mit $\gamma \in C(I, W)$ den Morphismus $[c_{\gamma(1)} * \gamma * c_{\gamma(0)}^{-1}]$ zu.

Da nach Voraussetzung des Satzes A jede Wegekompente von W trifft, gibt es solche Wege c_w . Wir wählen sie zunächst für $w \in U \cap V$, dann für $w \in U \setminus V$ und $w \in V \setminus U$. Dadurch hängen sie nur vom Punkt w und nicht von der Menge $W \ni w$

⁸⁵Siehe Beispiel 6.16.2. Man nennt diese auch *Retraktions-Funktoren*. Man muss sie von topologischen Retraktionen unterscheiden. Insbesondere muss die durch R_W gegebene Abbildung $W \rightarrow A \cap W$ der Objektmengen nicht stetig sein.

ab. Wenn wir für $w \in A$ den konstanten Weg c_w wählen, gilt $R_W \circ I_W = \text{id}_{\Pi_1^A(W)}$ auch für die Morphismen.

- Unsere Aufgabe besteht darin nachzuweisen, dass (6.24), also das äußere Rechteck in (6.26), ein pushout in **Grpd** ist.

$$(6.26)$$

Das erste Kriterium in Definition 3.29, die Kommutativität, ist mit (6.18) erfüllt. Das zweite Kriterium ist die universelle Eigenschaft. Es ist also zu zeigen, dass für alle Gruppoide T und Funktoren $t_U^A : \Pi_1^A(U) \rightarrow T$ und $t_V^A : \Pi_1^A(V) \rightarrow T$ mit

$$t_U^A \circ \Pi_1(j_U) = t_V^A \circ \Pi_1(j_V) \quad (6.27)$$

genau einen Funktor $t^A : \Pi_1^A(U \cup V) \rightarrow T$ gibt, sodass

$$t_U^A = t^A \circ \Pi_1(i_U) \quad \text{und} \quad t_V^A = t^A \circ \Pi_1(i_V). \quad (6.28)$$

Wir begeben uns auf Diagrammjagd in (6.26).

- Setzen wir nun (rot in (6.26))

$$t_U := t_U^A \circ R_U \quad \text{und} \quad t_V := t_V^A \circ R_V, \quad (6.29)$$

dann gilt die Bedingung $t_U \circ \Pi_1(j_U) = t_V \circ \Pi_1(j_V)$ für die Existenz eines eindeutigen Funktors $t : \Pi_1(U \cup V) \rightarrow T$ mit

$$t_U = t \circ \Pi_1(i_U) \quad \text{und} \quad t_V = t \circ \Pi_1(i_V), \quad (6.30)$$

denn (unter Vertauschung von U durch V in '...')

$$\begin{aligned} t_U \circ \Pi_1(j_U) &= t_U \circ I_U \circ \Pi_1(j_U) \circ R_{U \cap V} \stackrel{(6.29)}{=} t_U^A \circ R_U \circ I_U \circ \Pi_1(j_U) \circ R_{U \cap V} \\ &\stackrel{(6.25)}{=} t_U^A \circ \text{id}_{\Pi_1^A(U)} \circ \Pi_1(j_U) \circ R_{U \cap V} = t_U^A \circ \Pi_1(j_U) \circ R_{U \cap V} \\ &\stackrel{(6.27)}{=} t_V^A \circ \Pi_1(j_V) \circ R_{U \cap V} = \dots = t_V \circ \Pi_1(j_V). \end{aligned}$$

- t existiert und ist eindeutig, denn nach Satz 6.55 ist das innere Quadrat in (6.26), also (6.17), ein pushout in **Grpd**. Setzen wir für den Pfeil $\rightarrow$ in (6.26)

$$t^A := t \circ I_{U \cup V}, \quad (6.31)$$

dann ist

$$\begin{aligned} t^A \circ \Pi_1(i_U) &\stackrel{(6.31)}{=} t \circ I_{U \cup V} \circ \Pi_1(i_U) = t \circ \Pi_1(i_U) \circ I_U \\ &\stackrel{(6.30)}{=} t_U \circ I_U \stackrel{(6.29)}{=} t_U^A \circ R_U \circ I_U \stackrel{(6.25)}{=} t_U^A \circ \text{id}_{\Pi_1^A(U)} = t_U^A \end{aligned}$$

und analog $t^A \circ \Pi_1^A(i_V) = t_V^A$. Also erfüllt t^A die Bedingung (6.28). $\square$

6.59 Beispiel (Fundamentalgruppoid für S^1) Wir haben das Beispiel der Kreislinie schon ausführlich in Kapitel 6.3 behandelt. Wir können also vergleichend feststellen, was der Satz von Seifert und van Kampen in einer Anwendung bedeutet. Zunächst ist $S^1 = U \cup V$ mit den offenen wegzusammenhängenden Mengen $U := S^1 \setminus \{-i\}$ und $V := S^1 \setminus \{+i\}$. Wählen wir $A := \{-1, 1\} \subseteq U \cap V$, dann sind die Bedingungen von Satz 6.58 erfüllt. Da U und V nullhomotop sind, sind (siehe Abbildung 6.15, links)

$$\text{Mor}_{\Pi_1^A(U)} = \{\text{id}_1, \text{id}_{-1}, u, u^{-1}\} \quad \text{und} \quad \text{Mor}_{\Pi_1^A(V)} = \{\text{id}_1, \text{id}_{-1}, v, v^{-1}\},$$

mit Morphismen u, v von -1 zu $1 \in A$. Beide Komponenten von $U \cap V$ sind kontrahierbar und enthalten nur je einen Punkt von A . Entsprechend ist

$$\text{Mor}_{\Pi_1^A(U \cap V)} = \{\text{id}_1, \text{id}_{-1}\}.$$

Jetzt kommt die allgemein wichtige Frage auf, wie wir $\text{Mor}_{\Pi_1^A(U \cup V)}$ aus diesen Daten berechnen können. Kategorientheoretisch ist **Grpd** in manchen Aspekten **Set** ähnlicher als **Grp**. Insbesondere ist das leere Gruppoid initial, und das Koproduct von Gruppoiden ist ihre disjunkte Vereinigung (d.h. der Objektmengen und der Morphismenmengen). Allerdings kann das pushout die Morphismenmenge wieder vergrößern, da nun Wege kombiniert werden können.

So ist das auch im vorliegenden Fall. Das Gruppoid für die disjunkte Vereinigung ist in Abbildung 6.15, links dargestellt. Nach Identifikation der Kopien von $+1 \in A$ und der von $-1 \in A$ ergeben sich etwa für 1 die Potenzen des Isomorphismus $u^{-1}v$ mit Inverser $v^{-1}u$ (Abbildung 6.15, rechts⁸⁶). Wir erkennen die Fundamentalgruppe $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$.

Zu beachten ist, dass diese Rechnung nicht auf Basis des nächsten Satzes erfolgen könnte, weil dessen Bedingung des Zusammenhangs von $U \cap V$ hier nicht erfüllt ist. $\diamond$

⁸⁶Zu beachten ist, dass hier nicht alle Morphismen, sondern nur Erzeuger dargestellt wurden.



Abbildung 6.15: Gruppoiden für die Überdeckung $S^1 = U \cup V$ und $A = \{-1, 1\} \subseteq U \cap V$. Links: Gruppoid der disjunkten Vereinigung $U \sqcup V$. Rechts: Vereinigung $U \sqcupdot V$.

6.60 Satz (Seifert-van Kampen für Gruppen) *Es seien U und V offene Teilmengen eines topologischen Raums X , $U \cap V$ wegzusammenhängend und $x \in U \cap V$. Dann ist das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U \cup V, x) & \xleftarrow{\Pi_1(i_V)} & \pi_1(V, x) \\ \uparrow \Pi_1(i_U) & & \uparrow \Pi_1(j_V) \\ \pi_1(U, x) & \xleftarrow{\Pi_1(j_U)} & \pi_1(U \cap V, x) \end{array}$$

ein pushout in Grp.

Beweis: Wir wollen Satz 6.58 mit $A := \{x\}$ anwenden. Um dessen Voraussetzungen zu erfüllen, können wir nicht U und V verwenden, sondern wir schneiden mit der Wegekomponekte $[x] \in \pi_0(U \cup V)$, setzen also $U' := U \cap [x]$ und $V' := V \cap [x]$.

Damit trifft A jede Wegekomponekte von U' , V' und $U' \cap V'$. Das ist für den nach Voraussetzung wegzusammenhängenden Raum $U' \cap V' \subseteq U \cap V$ klar, denn $x \in U \cap V$, und $U \cap V$ ist wegzusammenhängend, also auch $U' \cap V' = U \cap V$.

Ist $y \in U'$, dann gibt es nach Definition von U' einen Weg $c: I \rightarrow U' \cup V'$ von x nach y . Es gibt aber auch einen solchen Weg $\tilde{c}: I \rightarrow U' \subseteq U' \cup V'$. Denn auch im Fall $c(I) \cap (V' \setminus U') \neq \emptyset$ gibt es ein $s_0 \in (0, 1)$ mit $c([s_0, 1]) \subseteq U'$ und $c(s_0) \in U' \cap V'$. Es gibt aber einen Weg in $U' \cap V'$ von $c(0)$ nach $c(s_0)$, denn $U' \cap V'$ ist wegzusammenhängend. Zusammensetzung ergibt den Weg $\tilde{c}$. Analog ist auch V' wegzusammenhängend.

Nach Definition der Fundamentalgruppe ist aber $\pi_1(U \cap V, x) = \pi_1(U' \cap V', x)$,

$$\pi_1(U, x) = \pi_1(U', x), \quad \pi_1(V, x) = \pi_1(V', x) \quad \text{und} \quad \pi_1(U \cup V, x) = \pi_1(U' \cup V', x). \quad \square$$

Um die Fundamentalgruppe von S^1 zu bestimmen, haben wir die Gruppoidversion 6.58 und nicht die Gruppenversion 6.60 des Satzes von Seifert und van Kampen benutzt, weil für den letztgenannten Satz die Voraussetzung des Zusammenhangs von $U \cap V$ nicht erfüllt war. Anders sieht das für S^n aus, falls $n \geq 2$:

6.61 Beispiel ($\pi_1(S^n)$) Im Gegensatz zu $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ ist für $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ die Fundamentalgruppe $\pi_1(S^n)$ der n -Sphäre trivial. Wir schauen uns einen Beweis an, der im Gegensatz zu Beispiel 6.49 Satz 6.60 benutzt. Seien also $U := S^n \setminus \{-e_{n+1}\}$ und $V := S^n \setminus \{e_{n+1}\}$ die Sphäre ohne Süd- bzw. Nordpol. Dann sind U und V homöomorph zu $\mathbb{R}^n$, während $U \cap V$ homöomorph zu $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist. Wegen $n \geq 2$ ist $U \cap V$ zusammenhängend, wir erfüllen also für $x \in U \cap V$ die Voraussetzungen von Satz 6.60. Da $\pi_1(U, x) \cong \pi_1(V, x) \cong \{0\}$ ist, ist auch das freie Produkt der beiden Gruppen trivial, also auch $\pi_1(U \cup V, x) = \pi_1(S^n, x)$. $\diamond$

Wir wollen natürlich die Gruppe $\pi_1(U \cup V, x)$ auch berechnen können. Dazu schauen wir uns das in Definition 3.29 kategoriell eingeführte pushout in der Kategorie **Grp** an. Dieses wird auch **amalgamiertes Produkt** genannt. Für Gruppenhomomorphismen $h_i : H \rightarrow G_i$ sind also eine Gruppe $G_1 \star_H G_2$ und Gruppenhomomorphismen $g_i : G_i \rightarrow G_1 \star_H G_2$ ($i = 1, 2$) gesucht, für die einerseits

$$g_1 \circ h_1 = g_2 \circ h_2$$

gilt und andererseits für beliebige Gruppen T und Gruppenhomomorphismen $t_i : G_i \rightarrow T$ mit $t_1 \circ h_1 = t_2 \circ h_2$ genau ein Gruppenhomomorphismus $t : G_1 \star_H G_2 \rightarrow T$ existiert, sodass das Diagramm (6.32) kommutiert, also gilt:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & T \\
 & & & \nwarrow t & \\
 & & G_1 \star_H G_2 & \xleftarrow{g_1} & G_1 \\
 & \uparrow g_2 & & & \uparrow h_1 \\
 G_2 & \xleftarrow{h_2} & H
 \end{array} \quad (6.32)$$

Wenn H die einelementige Gruppe $\{e\}$, also das initiale Element in **Grp** ist, ist das pushout das in Satz 6.10 beschriebene freie Produkt $G_1 \star G_2$.

Für den Fall beliebiger Gruppen H erinnern wir uns an die Konstruktion des pushout in **Set**. Wir versuchen also, durch Äquivalenzklassenbildung in $G_1 \star G_2$ die Gruppe $G_1 \star_H G_2$ zu finden.

6.62 Satz (Pushout von Gruppen) $G_1 \star_H G_2 = (G_1 \star G_2)/N$. Dabei ist N die kleinste normale Untergruppe von $G_1 \star G_2$, für die mit

$$\begin{array}{ccc}
 G_1 \star G_2 & \xleftarrow{i_1} & G_1 \\
 \uparrow i_2 & & \uparrow h_1 \\
 G_2 & \xleftarrow{h_2} & H
 \end{array}$$

(also einem im Allgemeinen nicht kommutierenden Diagramm!) gilt:

$$(i_2 \circ h_2(x)) (i_1 \circ h_1(x^{-1})) \in N \quad (x \in H). \quad (6.33)$$

Mit dem Homomorphismus $\pi : (G_1 \star G_2) \rightarrow (G_1 \star G_2)/N$, $g \mapsto gN = Ng$ ist dann in (6.32)

$$g_k = \pi \circ i_k \quad (k = 1, 2).$$

Beweis: Zunächst einmal *existiert* N , denn der Durchschnitt eines Systems normaler Untergruppen ist eine normale Untergruppe. Damit ist $(G_1 \star G_2)/N$ eine Gruppe. Mit (6.33) kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (G_1 \star G_2)/N & \xleftarrow{\pi \circ i_1} & G_1 \\ \uparrow \pi \circ i_2 & & \uparrow h_1 \\ G_2 & \xleftarrow{h_2} & H \end{array} ,$$

also auch das entsprechende Quadrat in (6.32). Dass dafür die universelle Eigenschaft (6.32) gilt, sieht man wie folgt. Im Diagramm

$$(6.34)$$

kommutiert das innere ($G_1 \star_H G_2$ enthaltende) und das äußere (T enthaltende) Quadrat. Wenn $\ker(t_1 \star t_2) \equiv (t_1 \star t_2)^{-1}(e)$ die normale Untergruppe N enthält, ist die Definition

$$t : G_1 \star_H G_2 \longrightarrow T \quad , \quad [y] \longmapsto t_1 \star t_2(y)$$

des gesuchten Gruppenhomomorphismus repräsentantenunabhängig. Dies ist in der Tat so, denn für alle $x \in H$ ist

$$t_1 \star t_2(i_1 \circ h_1(x) \cdot i_2 \circ h_2(x^{-1})) = t_1 \circ h_1(x) \cdot t_2 \circ h_2(x^{-1}) = t_1 \circ h_1(x) \cdot (t_2 \circ h_2(x))^{-1} = e,$$

da ja das äußere Quadrat kommutiert. Ebenso gilt

$$t([g_k(y_k)]) = (t_1 \star t_2) \circ i_k(y_k) = t_k(y_k) \quad (k = 1, 2, y_k \in G_k).$$

t ist eindeutig definiert, denn die minimale normale Untergruppe N wird ja durch die Elemente in (6.33) erzeugt. $\square$

Mannigfaltigkeiten sind besonders wichtige topologische Räume. Um ihre Fundamentalgruppen zu berechnen, kann man versuchen, sie selbst aus topologisch einfacheren Mannigfaltigkeiten aufzubauen. Eine Technik dafür ist die der zusammenhängenden Summe:

6.63 Definition *Es seien U und V zwei n -dimensionale Mannigfaltigkeiten, und $h_U : D^n \rightarrow U$, $h_V : D^n \rightarrow V$ Einbettungen der n -dimensionalen Kreisscheibe D^n . Dann ist die **zusammenhängende Summe** von U und V der Raum*

$$U \# V := (U \setminus h_U(\mathring{D}^n)) \bigcup_{\partial(D^n)} (V \setminus h_V(\mathring{D}^n)).$$

Es wird also das Innere der Kreisscheiben entfernt, und die Mannigfaltigkeiten werden an den so entstehenden Rändern zusammengeklebt. Das Anheften geschieht mit dem Homöomorphismus der (zu S^{n-1} homöomorphen) Ränder

$$h_V \circ h_U^{-1}|_{h_U(\partial D^n)} : h_U(\partial D^n) \rightarrow h_V(\partial D^n).$$

Da jede Umgebung eines Punktes einer n -Mannigfaltigkeit eine Kreisscheibe enthält, gibt es viele Möglichkeiten, die zusammenhängende Summe $U \# V$ zu bilden. Es lässt sich aber zeigen, dass die so entstehenden topologischen Räume wieder n -Mannigfaltigkeiten sind, und dass diese zueinander homöomorph sind, zumindest, wenn U und V zusammenhängend und orientierbar sind.⁸⁷ Man spricht dann vereinfachend von *der* zusammenhängenden Summe.

Natürlich lässt sich das Verfahren iterieren. Während etwa $M^n \# S^n$ wieder homöomorph zur n -Mannigfaltigkeit M^n ist (denn $S^n \setminus \mathring{D}^n \cong D^n$), ist die g -fache zusammenhängenden Summe

$$M_g^2 := \mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2 \quad (6.35)$$

des zweidimensionalen Torus $\mathbb{T}^2$ eine (orientierbare) Fläche vom *Geschlecht* g , also mit g Henkeln (siehe Abbildung 6.16). Tatsächlich ist M_g^2 nur für $g = g' \in \mathbb{N}$ homöomorph zu $M_{g'}^2$. Das kann man durch Berechnung der Fundamentalgruppen zeigen. Wir klären dazu, was die Fundamentalgruppe einer disjunkten Vereinigung ist. In höheren Dimensionen ist die Antwort ganz einfach:

6.64 Lemma *Für $n \geq 3$ ist die Fundamentalgruppe der disjunkten Vereinigung wegzusammenhängender n -Mannigfaltigkeiten U, V gleich*

$$\pi_1(U \# V) \cong \pi_1(U) * \pi_1(V).$$

⁸⁷siehe HIRSCH [Hi], Kapitel 9.1.

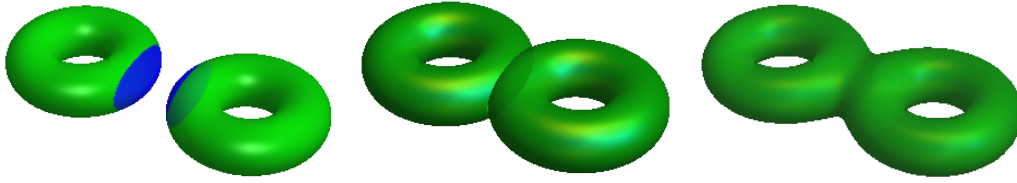


Abbildung 6.16: Rechts: Zusammenhängende Summe $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$ zweier Tori (links)

Beweis: • Wegen der Voraussetzung des Wegzusammenhangs von U und V ist auch $U \# V$ wegzusammenhängend, und der Fußpunkt der Fundamentalgruppe muss tatsächlich nicht angegeben werden.

• Technisch müssen wir mit dem Problem umgehen, dass der Schnitt der Bilder von $\tilde{U} := U \setminus \mathring{D}^n$ und $\tilde{V} := V \setminus \mathring{D}^n$ in $U \# V$ homöomorph zu S^{n-1} , also nicht offen ist, im Gegensatz zu den Voraussetzungen des Satzes von Seifert und van Kampen.⁸⁸ Daher verdicken wir $\tilde{U}$ und $\tilde{V}$, indem wir Einbettungen $\hat{h}_U : \hat{O}^n \rightarrow U$, $\hat{h}_V : \hat{O}^n \rightarrow V$ der offenen Vollkugel $\hat{O}^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 2\}$ benutzen, und $h_U := \hat{h}_U|_{D^n}$, $h_V := \hat{h}_V|_{D^n}$ setzen. Dann sind

$$\check{U} := \tilde{U} \cup \hat{h}_V(O^n \setminus D^n) \quad \text{und} \quad \check{V} := \tilde{V} \cup \hat{h}_U(O^n \setminus D^n)$$

offene Teilmengen von $U \# V$, mit $\check{U} \cup \check{V} = U \# V$. $\check{U} \cap \check{V}$ ist homöomorph zu $S^{n-1} \times (-1, 1)$, also homotopieäquivalent zu S^{n-1} . Ebenso ist $\check{U}$ homotopieäquivalent zu $\tilde{U}$, und $\check{V}$ homotopieäquivalent zu $\tilde{V}$.

Weil auch $\check{U} \cap \check{V}$ in $U \# V$ ist, können wir Seifert-van Kampen für $\check{U}$ und $\check{V}$ anwenden. Da aber homotopieäquivalente (wegzusammenhängende) Räume isomorphe Fundamentalgruppen besitzen, können wir stattdessen direkt für $\tilde{U}$ und $\tilde{V}$ das pushout von Satz 6.60:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\tilde{U} \cup \tilde{V}, x) & \xleftarrow{\Pi_1(i_{\tilde{V}})} & \pi_1(\tilde{V}, x) \\ \uparrow \Pi_1(i_{\tilde{V}}) & & \uparrow \Pi_1(j_{\tilde{V}}) \\ \pi_1(\tilde{U}, x) & \xleftarrow{\Pi_1(j_{\tilde{U}})} & \pi_1(\partial D^n, x) \end{array}$$

betrachten. Es ist dabei $\tilde{U} \cup \tilde{V} = U \# V$. Da $n \geq 3$ angenommen wurde, ist $\pi_1(\tilde{U}, x) \cong \pi_1(U, x)$, $\pi_1(\tilde{V}, x) \cong \pi_1(V, x)$ und $\pi_1(\partial D^n, x) \cong \pi_1(S^{n-1}) \cong \{0\}$. $\square$

Für zweidimensionale Mannigfaltigkeiten, also Flächen, ist die Aussage des Lemmas falsch, denn dann ist $\pi_1(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$. Für die orientierbaren zusammenhängenden Flächen M_g^2 vom Geschlecht g aus (6.35) ergibt sich mit Satz 6.62 ihre Fundamentalgruppe als isomorph zur Gruppe mit $2g$ Erzeugern $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$ und der Relation

$$[b_g, a_g] \dots [b_2, a_2][b_1, a_1] = 1.$$

⁸⁸Es gibt allerdings Versionen des Satzes, die direkt auf diese Situation anwendbar wären.

Dabei ist der **Kommutator** zweier Elemente a, b einer Gruppe durch

$$[a, b] := a^{-1}b^{-1}ab$$

definiert. Details findet man z.B. in [Fu, Part IX] und in Kapitel 3.4 des Skripts⁸⁹.

7 Ausblicke

Wir konnten in dieser Vorlesung nur an der Oberfläche der Topologie kratzen.

Im kommenden Semester werden wir im Seminar zum Querschnittsmodul als Vertiefung die Differentialtopologie betrachten.⁹⁰ Dort werden **differenzierbare Mannigfaltigkeiten** untersucht, also topologische Mannigfaltigkeiten, auf denen eine differenzierbare Struktur ermöglicht, Ableitungen und andere analytische Konzepte zu definieren.

Unabhängig davon stellen die drei folgenden Abschnitte interessante Vertiefungsrichtungen für das Selbststudium auf Basis der jeweiligen Literaturangaben dar.

7.1 Überlagerungen

7.1 Definition Eine stetige Surjektion $p : E \rightarrow B$ heißt **Überlagerung** (der Basis B durch den **Totalraum** E), wenn für jedes $b \in B$ gilt:

- Die **Faser** $p^{-1}(b) \subseteq E$ ist diskret
- es gibt eine Umgebung $U_b \subseteq B$ von b und für $V_b := p^{-1}(U_b)$ einen Homöomorphismus $h_b : V_b \rightarrow U_b \times p^{-1}(b)$ mit $p|_{V_b} = \text{pr}_1 \circ h_b$.

Ein Homöomorphismus $f : E \rightarrow E$ mit $p \circ f = p$ heißt **Decktransformation**.

Die Überlagerung ist also ein lokaler Homöomorphismus, und h_b wird *Trivialisierung* genannt. Die Decktransformationen bilden eine Gruppe.

7.2 Beispiele 1. (Triviale Überlagerungen)

Eine einfache Klasse von Überlagerungen ist von der Form $p : E \rightarrow B$, für das cartesische Produkt $E := B \times F$ mit einem diskreten Raum F und der Projektion $p := \text{pr}_1$ auf den ersten Faktor.

Man kann hier $U_b := B$ wählen, und E ist nicht zusammenhängend, wenn die 'typische Faser' F aus mehr als einem Punkt besteht. Die Gruppe der Decktransformationen ist die der Permutationen der Menge F .

⁸⁹Catherine Meusburger: *Algebraic Topology*, 2015

⁹⁰Wir werden u.A. die Lehrbücher [Hi] von HIRSCH und [BJ] von BRÖCKER und JÄNICH verwenden.

2. (Überlagerung $\mathbb{R} \rightarrow S^1$)

Ein Beispiel für eine Überlagerung, das wir häufig benutzt haben, ist

$$p_1 : \mathbb{R} \rightarrow S^1, \quad x \mapsto \exp(2\pi i x). \quad (7.1)$$

Hier sind der Totalraum $\mathbb{R}$ und die Basis S^1 zusammenhängende Mannigfaltigkeiten, und die Decktransformationen sind von der Form $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x + n$ ($n \in \mathbb{Z}$). Die Gruppe der Decktransformationen ist also $\mathbb{Z}$. $\diamond$

Man kann nun fragen, welche Überlagerungen ein gegebener topologischer Raum B besitzt. Es stellt sich dabei heraus, dass diese eng mit seiner Fundamentalgruppe zusammenhängen. Praktisch besonders wichtig ist die Frage bei Mannigfaltigkeiten B .

7.3 Beispiel (Überlagerungen des Torus) Nach Bsp. 6.48 ist die Fundamentalgruppe $\mathbb{T}^n = (S^1)^n$ des n -dimensionalen Torus durch $\pi_1(\mathbb{T}^n) = \pi_1(S^1)^n \cong \mathbb{Z}^n$ gegeben. Direkt kann man das sehen, wenn man mit (7.1) die Überlagerung

$$p_n := p_1 \times \dots \times p_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto (\exp(2\pi i x_1), \dots, \exp(2\pi i x_n))$$

mit Totalraum $\mathbb{R}^n$ benutzt. Denn dann ist die Faser $p_n^{-1}(1) = \mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$.

Nun ist der $\mathbb{R}^n$ nicht der einzige Raum, der $\mathbb{T}^n$ überlagert. Tatsächlich können wir für jede Untergruppe $G \subseteq \mathbb{Z}^n$ den topologischen $\mathbb{R}^n/G$ definieren.

Da $\mathbb{Z}^n$ – und damit G – auf $\mathbb{R}^n$ fixpunktfrei wirkt ($x + g = x$ impliziert ja $g = 0$), ist $\mathbb{R}^n/G$ sogar eine Mannigfaltigkeit.

Der Totalraum $E := \mathbb{R}^n/G$ überlagert den Torus $B := \mathbb{T}^n$, denn B ist ja homöomorph zu $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, und damit ist

$$p : E \rightarrow B, \quad x + G \mapsto x + \mathbb{Z}^n$$

eine Überlagerung. Man sieht leicht, dass die Fundamentalgruppe von E isomorph zu G ist, und die Fasern $p^{-1}(b)$ der Überlagerung $p : E \rightarrow B$ wie auch die Gruppe der Decktransformationen isomorph zur diskreten abelschen Gruppe $\mathbb{Z}^n/G$.

Für Flächen ($n = 2$) sind in Abb. 7.1 einige überlagernde Räume dargestellt. $\diamond$

In diesem Beispiel spielte der $\mathbb{T}^n$ überlagernde Raum $\mathbb{R}^n$ eine besondere Rolle.

7.4 Definition Ist der Totalraum E einer Überlagerung $p : E \rightarrow B$ einfach zusammenhängend, dann heißt p **universelle Überlagerung**.

7.5 Bemerkung (Universelle Überlagerung)

Eine solche universelle Überlagerung existiert unter Bedingungen, die etwa für zusammenhängende Mannigfaltigkeiten, also z.B. von Flächen erfüllt sind:

- Die Sphäre S^2 mit Genus $g = 0$ ist ihre eigene universelle Überlagerung.
- Der Torus $\mathbb{T}^2$ ($g = 1$) wird von $\mathbb{R}^2$ universell überlagert (Beispiel 7.3).
- Für kompakte Flächen vom Genus $g \geq 2$ ist die offene Kreisscheibe universelle Überlagerung. Die entsprechende Geometrie taucht in Arbeiten des Grafikers **M. C. Escher** auf.

Auch der topologische Graph auf der rechten Seite von Abbildung 6.11 ist eine universelle Überlagerung des Bouquets $S^1 \vee S^1$, (Abb. 6.11, links) obwohl letzteres keine Mannigfaltigkeit ist. $\diamond$

Überlagerungen werden etwa in FULTON [Fu, Part VI und VII] und LAURES und SZYMIK [LS, Kapitel 8] behandelt.

7.2 Bündel

In der Bemerkung 3.19 über den topologischen Basiswechsel haben wir die Urbildmengen $\pi^{-1}(b) \subseteq X$ ($b \in B$) einer Abbildung $\pi : X \rightarrow B$ als Fasern bezeichnet, und für den Fall einer Surjektion π und zueinander isomorpher Fasern B die Basis und X den Totalraum der Abbildung π genannt.

Der einfachste Fall ist wieder die Projektion $\pi : X \rightarrow B$ eines Produktraums $X = B \times F$ auf den ersten Faktor, wobei die Faser im Gegensatz zu einer Überlagerung nicht diskret sein muss. Wir wollen diese Struktur nun nur lokal fordern:

7.6 Definition Eine stetige Abbildung $\pi : X \rightarrow B$ heißt **lokal trivial mit typischer Faser F** oder auch **Faserbündel**, wenn es eine Überdeckung von B mit offenen Mengen U_i ($i \in I$) gibt, sodass gilt: Für die Restriktionen von π auf $\pi^{-1}(U_i)$ gibt es Homöomorphismen $\Phi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times F$ mit

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\Phi_i} & U_i \times F \\ \downarrow \pi & \swarrow \text{pr}_1 & \\ U_i & & \end{array} \quad (i \in I).$$

Die Abbildung π ist dann surjektiv. Wenn wir in der Definition einfach die Überdeckung von B durch sich selbst wählen können, dann ist X homöomorph zu $B \times F$ und das Faserbündel heißt *trivialisierbar*.

Das Möbiusband über der Basis S^1 aus Beispiel 3.20 ist ein nicht trivialisierbares Faserbündel, mit typischer Faser $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Eine wichtige Klasse von Faserbündeln sind die Tangentialbündel von Untermannigfaltigkeiten eines reellen Vektorraums. Zur Erinnerung:

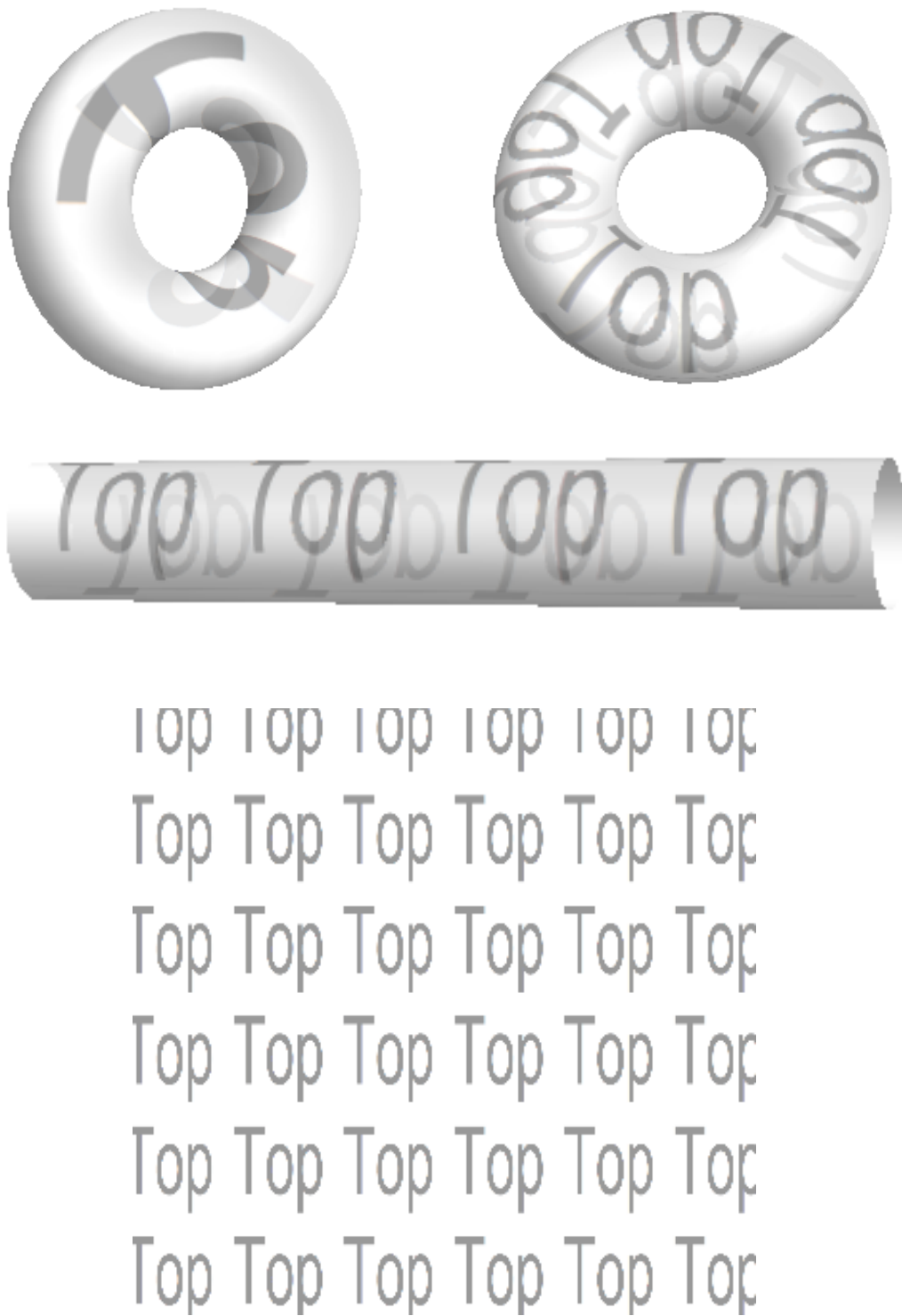


Abbildung 7.1: Der Torus $\mathbb{T}^2$ (oben links) und einige seiner Überlagerungen.
 Oben rechts: Torus, mit Gruppe $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ von Decktransformationen.
 Mitte: Zylinder $\mathbb{R} \times S^1$, Unten: Ebene $\mathbb{R}^2$, also universelle Überlagerung

7.7 Definition Für $p \in \{0, \dots, m\}$ heißt eine Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}^m$ eine **p -dimensionale Untermannigfaltigkeit** des $\mathbb{R}^m$, wenn jeder Punkt $b \in B$ eine Umgebung $V_b \subseteq \mathbb{R}^m$ besitzt, so dass gilt:

Für eine geeignete Abbildung $f \in C^\infty(V_b, \mathbb{R}^{m-p})$ mit regulärem Wert 0 ist

$$B \cap V_b = f^{-1}(0).$$

In Beispiel 5.34 wurden Flächen als Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^3$ definiert. Das Beispiel 3.20 des Möbiusbandes zeigt, dass man nicht jede Untermannigfaltigkeit als Urbildmenge einer einzigen Abbildung f darstellen kann.

Untermannigfaltigkeiten tragen die Spurtopologie der Standard-Topologie des $\mathbb{R}^m$. Als solche sind sie topologische Mannigfaltigkeiten im Sinn von Definition 5.32. Der Satz von der impliziten Funktion besagt aber noch mehr, nämlich, dass B lokal Graph einer Abbildung $g \in C^\infty(U, \mathbb{R}^m)$ einer offenen Teilmenge U eines Unterraums $\mathbb{R}^p \subseteq \mathbb{R}^m$ ist.

Das impliziert, dass auch das Tangentialbündel von B ,

$$TB := \{(b, v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \mid b \in B, Df_b(v) = 0\}$$

(für ein $f \in C^\infty(V_b, \mathbb{R}^{m-p})$, nach Definition 7.7) eine Untermannigfaltigkeit ist. Und die glatte Abbildung

$$\pi : TB \rightarrow B, \quad (b, v) \mapsto b$$

definiert ein Faserbündel mit typischer Faser $\mathbb{R}^p$. Wann ist dieses trivialisierbar?

7.8 Beispiel (Trivialisierbarkeit von Tangentialbündeln)

Das Tangentialbündel der n -Sphäre ist

$$TS^n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1, \langle x, y \rangle = 0\}.$$

Es stellt sich heraus, dass es genau für $n = 0, 1, 3$ und 7 trivialisierbar ist. Das hängt mit der Struktur der reellen Divisionsalgebren zusammen und kann hier nur sehr ansatzweise erklärt werden⁹¹. Zunächst gibt es für $n = 0$ nichts zu trivialisieren, denn S^0 besteht aus nur zwei Elementen.

Für ungerade n kann man die Sphäre auch durch $S^n = \{x \in \mathbb{C}^{(n+1)/2} \mid \|x\| = 1\}$ charakterisieren. Daher wirkt die Gruppe S^1 in diesen Fällen auf S^n durch

$$\Phi_t : S^n \rightarrow S^n, \quad x \mapsto tx \quad (t \in S^1).$$

Damit gibt es auch ein nicht verschwindendes Tangentialvektorfeld

$$X : S^n \rightarrow TS^n, \quad X(x) = \left. \frac{d}{dt} \Phi_t(x) \right|_{t=0} = ix.$$

⁹¹Siehe aber: H.D. Ebbinghaus et al.: Zahlen. Berlin: Springer, 1992, Teil B

Für $n = 1$ ist $X(x)$ eine Basis des Tangentialraums $T_x S^1 := \{y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, y \rangle = 0\}$ bei $x \in S^1$, und eine Trivialisierung des Tangentialbündels ist

$$TS^1 \rightarrow S^1 \times \mathbb{R} \quad , \quad (x, y) \mapsto (x, y/(ix)).$$

Dagegen gibt es für gerade $n \in \mathbb{N}$ kein nicht verschwindendes Tangentialvektorfeld auf S^n . In Folge kann S^n dann nicht trivialisierbar sein. Insbesondere für $n = 2$ wird diese Aussage auch der **Satz vom Igel** genannt.

Zuletzt ist S^3 **diffeomorph** zur **Lie-Gruppe** $SU(2)$, und daher trivialisierbar. $\diamond$

Überlagerungen sind ebenfalls Faserbündel, aber mit diskreten Fasern. Weiteres zu Faserbündeln erfahren Sie z.B. in Kapitel 9 von LAURES und SZYMIK [LS].

7.3 Homologie und Kohomologie

Wie wir gesehen haben, ist die Fundamentalgruppe eines topologischen Raums oft nicht leicht zu berechnen, selbst, wenn es sich bei dem Raum um eine Mannigfaltigkeit handelt. Ein Grund ist die Tatsache, dass sie nicht abelsch sein muss.⁹²

Stattdessen kann man die so genannten Homologien und Kohomologien topologischer Räume oft algorithmisch berechnen. Sie liefern dafür eher weniger Informationen als die Homotopiegruppen.

Homologie

Die Grundidee der Homologie eines Raums X war die seiner Euler-Charakteristik. Historisch hat **Euler** 1758 bewiesen, dass für ein konvexes Polytop mit E Ecken, K Kanten und F Seiten die Beziehung $E - K + F = 2$ gilt. Das gilt insbesondere für die fünf **platonischen Körper**, siehe Tabelle 1.

Tabelle 1: Die Euler-Charakteristik der platonischen Körper.

Polyeder	E	K	F	$E - K + F$
Tetraeder	4	6	4	2
Würfel	8	12	6	2
Oktaeder	6	12	8	2
Dodekaeder	20	30	12	2
Ikosaeder	12	30	20	2

⁹²Aber auch die (abelschen) höheren **Homotopiegruppen** sind nicht immer leicht zu berechnen. So sind die **Homotopiegruppen der Sphären** S^n nicht vollständig bekannt.

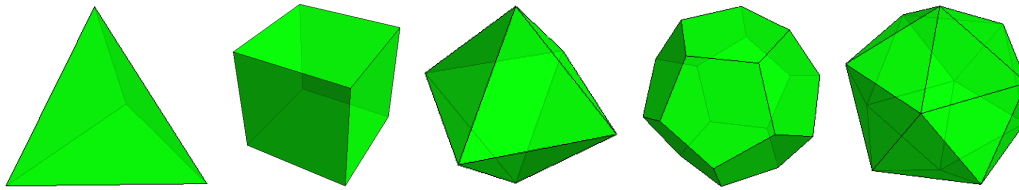


Abbildung 7.2: Die Oberflächen der platonischen Körper (Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder) sind homöomorph zur Sphäre S^2 .

Nun ist die Oberfläche eines konvexen Polytops zu S^2 homöomorph. Die Invarianz des Werts von $E - K + F$ legt daher nahe, S^2 selbst die Euler-Charakteristik $\chi(S^2) = 2$ zuzuordnen.

Wenn wir auch andere Mannigfaltigkeiten ähnlich betrachten wollen, verwenden wir dazu wieder Simples.

7.9 Definition • Für $k \in \mathbb{N}_0$ ist ein k -**Simplex** $\Delta \subseteq \mathbb{R}^\ell$ ein Polytop, das die konvexe Hülle

$$\left\{ \sum_{m=0}^k x_m e_m \mid \forall m : x_m \geq 0, \sum_{m=0}^k x_m = 1 \right\}$$

seiner $k + 1$ affin unabhängigen⁹³ Ecken $e_0, \dots, e_k \in \mathbb{R}^\ell$ ist.

- Jeder Simplex, der durch eine nichtleere Teilmenge der Eckenmenge von Δ aufgespannt wird, wird eine **Seite** von Δ genannt.
- Ein **simplicialer Komplex** $\mathcal{K}$ ist eine Menge von Simplicen, wobei für Simples $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{K}$ gilt: entweder ist $\Delta_1 \cap \Delta_2$ leer oder ein Element von $\mathcal{K}$.
- Die Vereinigung der Simples eines simplicialen Komplexes heißt **Polyeder**.

Für $k = 0, 1, 2, 3$ wird ein k -Simplex auch Punkt, Strecke, Dreieck bzw. Tetraeder genannt. Simples sind besonders flexible Bausteine. So sind die als Seitenflächen eines Polytops auftauchenden Quadrate, Fünfecke etc aus Dreiecken zusammensetzbare Polyeder.

Ähnlich wie bei der Sphäre S^2 können wir daher auch den anderen Flächen, wie etwa dem Torus $\mathbb{T}^2$, homöomorphe Polyeder zuordnen, die aus Dreiecken bestehen. Man spricht dann von einer *Triangulierung* der Fläche und kann für diese wieder die von der Wahl der Triangulierung unabhängige Euler-Charakteristik berechnen. Insbesondere ist $\chi(\mathbb{T}^2) = 0$. Da die Euler-Charakteristik sich unter Homöomorphismen nicht ändert, kann man also durch sie S^2 von $\mathbb{T}^2$ topologisch voneinander unterscheiden.

⁹³es gibt also keinen $(k - 1)$ -dimensionalen affinen Unterraum von $\mathbb{R}^\ell$, in dem die $k + 1$ Punkte liegen

Etwas systematischer werden zunächst dem topologischen Raum X *Homologiegruppen* $H_k(X)$ $k \in \mathbb{N}_0$ zugeordnet, die mithilfe seiner Triangulierung berechnet, aber von der Wahl der Triangulierung unabhängig sind. Aus diesen kann dann z.B. die *Euler-Charakteristik* berechnet werden. Das kann man etwa im Buch [Cr] von CROOM nachlesen.

Kohomologie

Sie haben laut *Modulbeschreibung* in der *Analysis III/Mehrdimensionalen Integration Differentialformen* kennengelernt. Diese sind für eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ Elemente des $\mathbb{R}$ -Vektorraums

$$\Omega^*(U) := \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(U).$$

Eine *Differentialform* $\omega \in \Omega^k(U)$ k -ter Stufe ist dabei von der Gestalt

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

mit Funktionen $\omega_{i_1, \dots, i_k} \in \Omega^0(U) \cong C^\infty(U, \mathbb{R})$. Die *äußere Ableitung* $d\omega \in \Omega^{k+1}(U)$ ist durch

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial \omega_{i_1, \dots, i_k}}{\partial x_{i_\ell}} dx_\ell \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

definiert, sodass $dd\omega = 0$ gilt. Analog wird eine Differentialform $\omega \in \Omega^k(X)$ auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X durch unter Kartenwechsel invariante Wahl von Differentialformen in den Kartenbildern (also offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$) definiert.

7.10 Definition $\omega \in \Omega^k(X)$ heißt

- **geschlossen**, wenn $d\omega = 0$ gilt,
- **exakt**, wenn eine $(k-1)$ -Form $\varphi \in \Omega^{k-1}(X)$ existiert mit $\omega = d\varphi$.

Ist daher ω exakt, dann ist die Differentialform geschlossen, die exakten k -Formen bilden also einen Untervektorraum des Vektorraums der geschlossenen k -Formen. Man definiert die k -te (*de Rham*-) Kohomologiegruppe von X als Quotientenraum

$$H^k(X) := \frac{\{\text{exakte } k\text{-Formen}\}}{\{\text{geschlossene } k\text{-Formen}\}}.$$

Für kompakte und für viele nicht kompakte Mannigfaltigkeiten X sind die *Betti-Zahlen* $b_k(X) := \dim(H^k(X))$ endlich. So ist $b_k(\mathbb{T}^n) = \binom{n}{k}$.

Die Theorie ist etwa im Buch [BT] von BOTT und TU beschrieben, in sehr rudimentärer Form in ⁹⁴.

⁹⁴Andreas Knauf: *Klassische Mechanik*. Springer 2012, Anhänge A und B.

Kleines Englisch-Wörterbuch zur Topologie

abelian	abelsch	integer	ganze Zahl
accumulation point	Häufungspunkt	interior	Inneres
attaching map	Anheftungsabbildung	intermediate value	Zwischenwert
axiom of choice	Auswahlaxiom	intersection	Schnitt
ball	Vollkugel	loop	Schleife
base	Basis	manifold	Mannigfaltigkeit
base- b	b -adisch	mapping	Abbildung
boundary	Rand	natural number	natürliche Zahl
bounded	beschränkt	neighbourhood	Umgebung
bundle	Bündel	open	offen
circle	Kreislinie	path space	Wegeraum
closed	abgeschlossen	power set	Potenzmenge
closure operator	Hüllenoperator	pullback	Faserprodukt
coarser	gröber	pushout	Fasersumme
complete	vollständig	random walk	Irrfahrt
connected	zusammenhängend	refinement	Verfeinerung
continuous	stetig	sequence	Folge
contractible	zusammenziehbar	sequentially compact	folgenkompakt
coset	Nebenklasse	simply connected	einfach zusammenhängend
countable	abzählbar	space	Raum
cover	Überdeckung	subspace	Teilraum
covering space	Überlagerung	star-shaped	sternförmig
cov. transformation	Decktransformation	subspace	Teilraum
dense	dicht	support	Träger
diameter	Durchmesser	trace	Spur
disk	Kreisscheibe	uniform	gleichmäßig
distance	Abstand	union	Vereinigung
embedding	Einbettung	universal property	universelle Eigenschaft
evaluation	Auswertung		
fibre	Faser		
finer	feiner		
forgetful functor	Vergissfunktor		
function set, $\sim$ space	Abbildungsmenge		
group action	Gruppenwirkung		
groupoid	Gruppoid		
homeomorphism	Homöomorphismus		
image	Bild		

Literatur

- [Ar] Aaron F Archer: *A Modern Treatment of the 15 Puzzle*. The American Mathematical Monthly **106**, 793–799 (1999)
- [BJ] Theodor Bröcker, Klaus Jänich: *Einführung in die Differentialtopologie*. Springer-Verlag, Heidelberger Taschenbücher 1973, Nachdruck 1990
- [Br] Ronald Brown: *Groupoids and van Kampen's Theorem*. Proceedings of the London Mathematical Society **17**, 385–401 (1967)
- [BT] Raoul Bott, Loring W. Tu: *Differential forms in algebraic topology*. (Graduate Texts in Mathematics **82**). New York: Springer, 1982
- [Cr] Fred Croom: *Basic Concepts of Algebraic Topology*. Springer UTM
- [Di] Jan Dijkstra: *On Homeomorphism Groups and the Compact-Open Topology*. The American Mathematical Monthly **112**, 910–912 (2005)
- [Eb] Heinz-Dieter Ebbinghaus et al: *Zahlen*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1992
- [EH] Martín Escardó, Reinhold Heckmann: *Topologies on spaces of continuous functions*. Topology Proc. **26**, 545–564 (2001–2002)
- [En] Ryszard Engelking: *General Topology*. Berlin: Heldermann, 1989
- [Fr] Wolfgang Franz: *Topologie I*. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1973
- [Fu] William Fulton: *Algebraic Topology: A First Course*. (Graduate Texts in Mathematics **153**). Springer, 2013
- [Hi] Morris W. Hirsch: *Differential Topology*. (Graduate Texts in Mathematics **33**). New York: Springer, 1994
- [HY] John Hocking, Gail Young: *Topology*. Dover Publications 1988
- [Ho] Dirk Hoffmann: *Grenzen der Mathematik. Eine Reise durch die Kerngebiete der mathematischen Logik*. Berlin: Springer Spektrum, 2013
- [Ja] Klaus Jänich: *Topologie*. Hochschultext. Springer, 1987
- [LS] Gerd Laures, Markus Szymik: *Grundkurs Topologie*. Berlin: Springer Spektrum, 2015

- [LR] F. William Lawvere, Robert Rosebrugh: *Sets for Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2003
- [Le] Tom Leinster: *Rethinking Set Theory*. The American Mathematical Monthly **121**, 403–415 (2014)
- [Mo] Jürgen Moser: *Is the Solar System Stable?* The Mathematical Intelligencer **1**, 65–71 (1978)
- [Qu] Boto von Querenburg: *Mengentheoretische Topologie*. Springer, 1973
- [RS] Reed, M., Simon, B.: *Methods in Mathematical Physics, Vol. I: Functional Analysis*. New York: Academic Press 1980
- [StSe] Lynn Arthur Steen, J. Arthur Seebach: *Counterexamples in Topology*. Dover Publ., 1978
- [TD] Tammo tom Diek: *Algebraic Topology*. EMS Textbooks in Mathematics, Zürich, European Mathematical Society (2008)
- [We] Alan Weinstein: *Groupoids: unifying internal and external symmetry*. Notices of the American Mathematical Society **43**, 744–752 (1996)

Index

- Abbildungsgrad 106
- Abbildungsmenge 17
- Abschluss 27
- Abzählbarkeitsaxiom 30
- Adjungierte 84
- Alexandrov-Kompaktifizierung 81
- Anheften 56
- Äquivalenz von Kategorien 118
- assoziativ 20
- Assoziativität 13
- Auswahlaxiom 19, 39, 77
- Auswertungsabbildung 17, 84
- Automorphismengruppe 91, 98
- Basis einer Topologie 26, 45
- Bouquet 122
- Buch mit unendlich vielen Seiten 62
- Basiswechsel 45
- Cantor-Menge 10, 41, 63, 75
- cartesisches Produkt 38
- Darstellung, b -adische 41
- Decktransformation 137
- de Rham-Kohomologie 144
- Diagramm 12, 23
- dicht 28
- Differentialform 144
- disjunkte Vereinigung 51
- Durchmesser 69
- Einbettung 37
- einfach zusammenhängend 120
- Einheitswurzeln 90
- Element 14
- endliche Durchschnittseigenschaft 76
- erzeugte Äquivalenzrelation 54
- Euler-Charakteristik 144
- Exponenzierung 16
- Faser 45
- Faserbündel 139
- Faserprodukt 44
- Fasersumme 54
- Finaltopologie 47
- folgenkompakt 70
- folgenstetig 31
- Fundamentalgruppe 114
- Fundamentalgruppoid 114
- Funktor 99
- Gerade
 - lange 83
 - mit zwei Ursprüngen 82
- Graph 56
- Gruppe 88
 - allgemeine lineare 91
 - alternierende 90
 - Automorphismen- 91
 - Dieder- 91, 95
 - Fundamental- 114
 - modulare 95
 - orthogonale 92, 105
 - Restklassen- 90
 - symmetrische 90
 - topologische 91
 - triviale 93
 - unitäre 92
- Gruppenwirkung 90
- Gruppoid 96
 - Fundamental- 114
- Häufungspunkt 31
- hausdorffsch 29
- Hilbertscher Folgenraum 70, 72
- Homöomorphismus 22, 76
 - lokaler 108
- Homotopie 101
 - lineare 102
- Homotopieäquivalenz 103
- Homotopiegruppe 7
- Homotopiekategorie 102
- Homotopieklasse 101

- Hüllenoperator 25
- Identifizierung 49
- identische Abbildung 13
- Initialtopologie 36, 37
- Injektion 18, 52
- Inneres 27
- Intervall 24
- Irrfahrt 40
- Isomorphie
 - von Kategorien 118
 - von Objekten 22
- Kategorie 20
 - Ab** 8
 - Gruppoid 96
 - Grp** 93
 - Grpd** 100
 - hTOP** 102
 - kleine 21
 - Matr_K** 21
 - $\Pi_1(X)$ 114
 - Set** 21
 - Top** 21
- Kern 90
- Klasse 20
- Knoten 6
- koinduziert 47
- kompakt 69
- kompakter Operator 74
- kontrahierbar 103
- Konvergenz
 - Folge 31
 - gleichmäßige 34, 86
 - punktweise 32, 32, 84
- konvex 61
- Koprodukt
 - Gruppen 94
 - Mengen 52
 - Topologische Räume 52
- Korestriktion 45
- Kreislinie 37, 105
- Lebesgue-Integral 33, 65
- Lebesgue-Zahl 124
- lokal euklidisch 82
- lokalkompakt 80
- lokal trivial 139
- Mannigfaltigkeit 82
- Maximum 76
- Menge
 - initiale 14
 - leere 15
 - terminale 14
- Mengenfamilie 5
- Mengenlehre 12
- Mengensystem 3
- metrischer Raum 3
- metrisierbar 5
- Möbiusband 46
- Morphismus 20
 - Auto-, Endo-, Epi-, Iso-, Mono- 22
- natürliche Zahlen 18
- Nebenklasse 90
- nirgends dicht 28
- normal 65
- Normalteiler 90
- nullhomotop 101
- Objekt 20
 - initiales 23
 - terminales 23
- parakompakt 83
- Potenzmenge 3, 100
- Produkt
 - amalgamiertes von Gruppen 56
 - cartesisches von Mengen 15
 - cartesisches von Gruppen 95
 - direktes 93
 - freies 94
 - semidirektes 96
 - wedge- 122
- Produkttopologie 39
- Projektion 6, 39, 44
- projektive Räume 50
- Pseudometrik 64

- pullback 44
- pushout 54
 - von Gruppen 133
 - von topologischen Räumen 56
- Quotiententopologie 49
- Rand 28
- Retraktion 111
- Retraktions-Funktor 129
- Sinuskurvenraum 61
- Rechtsinverse 19
- Satz
 - Alexandrov 81
 - Bolzano-Weierstraß 72
 - Borsuk-Ulam 112
 - Brouwer 111
 - Fundamentalsatz der Algebra 110
 - Heine und Borel 69
 - Lebesgue 124
 - Tietze 68
 - Seifert und van Kampen 125
 - Tychonov 78
 - Urysohn 66
- Satz vom Igel 142
- Schleife 114
- Signum 90
- Simplex 143
- simplicialer Komplex 143
- Sphäre 50
- Spurtopologie 36
- sternförmig 103
- stetig 5
 - bei 31
- Subbasis einer Topologie 26
- Summe 51
- Summentopologie 52
- Surjektion 19
- Symmetrie 91
 - lokale 96
- Tangentialbündel 141
- Teilmengen-Klassifikator 18
- Teilraumtopologie 36
- Tietzesches Erweiterungslemma 68
- Topologie 4
 - diskrete 5
 - erzeugte 25
 - euklidische 40
 - feiner 25
 - gröber 25
 - indiskrete 5
 - induzierte 36
 - kofinite 30
 - kompakt-offene 85
 - pseudometrische 64
 - Standard- (auf $\mathbb{R}^n$) 26
 - Zariski- 34, 40
- Torus 65
- Totalraum 45
- total unzusammenhängend 63
- Überdeckung 69
 - lokal-endlich 83
 - Verfeinerung 83
- Überlagerung 137
- Umgebung 29
- Umgebungsbasis 30
- Untermannigfaltigkeit 82, 141
- Urbild 17
- Urysohn-Lemma 66
- Verschlingungszahl 6
- vollständig 70
- Weg, Wegeraum 58
- Wegekomponenten-Menge 104
- Weghomotopie 114
- wegzusammenhängend 58
 - lokal 58
- Windungszahl 109
- Wirkungsgruppoid 96
- Wort 94
- zusammenhängend 58
 - lokal 58
- zusammenhängende Summe 135
- Zusammenhangskomponente 62
- Zwischenwertsatz 61