Vorlesung Maßtheorie

Andreas Knauf*

Sommersemester 2012

Zusammenfassung

Vorlesungsbegleitendes Skript. Anregungen und Kritik sind willkommen! Dieses Skript lehnt sich inhaltlich vor Allem an das Buch "Maß– und Integrationstheorie" von Jürgen Elstrodt an. Allen Hörerinnen und Hörern der Vorlesung wird die viel ausführlichere Darstellung in diesem Buch empfohlen.

Inhaltsverzeichnis

*Department Mathematik, Universität Erlangen-Nürnberg, Cauerstr. 11, D–91058 Erlangen, Germany. E-Mail: knauf@mi.uni-erlangen.de, web: www.mathematik.uni-erlangen.de/knauf

Danksagung. Ich danke Frau I. Moch für das Schreiben dieses Skriptes und Herrn G. Keller für den Hinweis auf Fehler.

1 Übersicht

Ein *Maß* μ auf einer Menge M ist eine spezielle *Mengenfunktion*, sie ordnet also gewissen Teilmengen $A \subseteq M$ Zahlen $\mu(A) \in [0, \infty] := [0, \infty) \cup \{\infty\}$ zu.

1.1 Beispiele 1. Das *Lebesgue-Maß* $\mu = \lambda^d$ auf $M := \mathbb{R}^d$, mit Würfel-Maß $\mu([0,1]^d) := 1$ und $\mu(A + a) = \mu(A) \quad (a \in \mathbb{R}^d)$. Dies entspricht für $d = 1$ einer Gesamtlänge, für $d = 2$ einem Flächeninhalt und für $d = 3$ einem Volumen. Es ist $\mu(\mathbb{R}^d) = \infty$.

2. Auf einer Menge M existieren noch weitere interessante Maße. Sei etwa $x \in M$. Dann ist $\mu := \delta_x$ mit $\delta_x(A) := \begin{cases} 1 & , \quad x \in A \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$ ein Maß, das *Dirac-Maß*. Aber auch für Punktfolgen $(x_n)_n$ in M und positive Zahlen c_n ist $\mu := \sum_{n=1}^{\infty} c_n \delta_{x_n}$ ein Maß (mit $\mu(A) := \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, \delta_{x_n}(A)$). Es ist $\mu(M) = \sum_n c_n$.

3. Betrachten wir eine symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$, den ganzen Zahlen. Zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{N}_0$ befinde sich das Teilchen am Punkt x_t. Dann soll es sich zum Zeitpunkt $t + 1$ mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ bei $x_t - 1$ bzw. bei $x_t + 1$ befinden, und die Zufallsvariablen sollen unabhängig sein. Das Teilchen soll bei $x_0 = 0$ starten, siehe Abb. 1. Setzen wir $y_t := x_t - x_{t-1} \in \{-1, +1\}$ und betrachten wir das Teilchen bis zur Zeit $T \in \mathbb{N}$, dann erhalten wir ein Maß $M_T : \{-1, 1\}_y^T \to [0, 1]$ mit $M_T(\{(y_1, \ldots, y_T)\}) := 2^{-N}$ für alle $y \in \{-1, 1\}^T$.

   Betrachten wir das Teilchen für alle Zukunft, dann wollen wir es durch ein Maß auf der Menge $M := \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ der $\{-1, 1\}$-wertigen Folgen beschreiben. $\diamond$

Nimmt man den Maßbegriff von der praktischen Seite, dann besteht die Aufgabe darin, Maße konkreter Mengen $A \subseteq M$ zu *berechnen*, etwa das Volumen $\lambda^d(B_d)$ einer d-dimensionalen Vollkugel.

So wurde die Maßtheorie bis ins 19. Jahrhundert aufgefasst. Bei komplizierteren Mengen wie dem unter 3. betrachteten Raum der Folgen geht es aber offensichtlich auch um die *Konstruktion* des Maßes.

Eine weitere Frage ist die nach Konvergenz einer Folge von Maßen:

1.2 Beispiel 4. Für die symmetrische Irrfahrt aus Beispiel 3. gilt, dass die Varianz von x_t gleich t ist, also die Streuung gleich $\sqrt{t}$. Falls wir für $m \in \mathbb{N}$ die Zeit mittels $t = ms$, also $s \in \mathbb{N}_0/m$ und den Ort mit $Y_s := \frac{1}{\sqrt{m}} X_{ms}$ reskalieren, dann ist die Varianz von Y_s gleich s, unabhängig von m. Für den

Abbildung 1: Symmetrische Irrfahrt (links) und Brownsche Bewegung (rechts)

so genannten Diffusionslimes $m \to \infty$ erhalten wir in natürlicher Weise die sog. brownsche Bewegung auf $\mathbb{R}$, mit einem Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem Raum der stetigen bei Null beginnenden Wege. $\diamond$

2 Mengenfamilien

Schauen wir uns an, welche Eigenschaften ein Maß haben muss.

2.1 σ-Algebren und Maße

Zunächst müssen wir festlegen, welche Teilmengen der Grundmenge M überhaupt messbar sein sollen. Wir wählen also eine *Mengenfamilie* (auch *Mengensystem* genannt) $\mathcal{A} \subseteq 2^M \equiv \mathcal{P}(M)$ in der Potenzmenge von M aus.

Am bequemsten wäre es, alles messen zu können, also $\mathcal{A} = 2^M$, aber das ist nicht immer möglich. Wir fordern, dass $\mathcal{A}$ eine σ–Algebra ist.

2.1 Definition $\mathcal{A} \subseteq 2^M$ *heißt* σ-**Algebra (von** M**)**, *wenn*

1. $M \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A} \implies A^c := M \backslash A \in \mathcal{A}$
3. $A_n \in \mathcal{A}\ (n \in \mathbb{N}) \Longrightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Die kleinste σ–Algebra von M ist damit $\{\emptyset, M\}$, die größte 2^M. In der Praxis wird man etwa für $M = \mathbb{R}$ eine von diesen beiden verschiedene σ–Algebra wählen.

2.2 Definition • *Eine Abbildung* $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ *auf einer* σ*–Algebra* $\mathcal{A}$ *heißt* **Maß**, *wenn*

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. *Für disjunkte (das heißt* $A_m \cap A_n = \emptyset$ $(m \neq n)$*)* $A_n \in \mathcal{A}$ $(n \in \mathbb{N})$ *gilt:*

   $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$ *(*σ**–Additivität** *oder* **abzählbare Addit.***)* .

• *Das Maß* μ *heißt* **endlich**, *wenn* $\mu(M) < \infty$, *und* **Wahrscheinlichkeitsmaß**, *wenn* $\mu(M) = 1$.

2.3 Beispiele 1. Für eine Menge M mit σ–Algebra 2^M wird durch $\mu(A) := |A|$ falls A endlich, und sonst $\mu(A) := \infty$ ein Maß definiert, das *Zählmaß*.

2. Vom Lebesgue-Maß wissen wir zunächst nur, dass die abgeschlossenen achsenparallelen Würfel der Kantenlänge 1 in der Mengenfamilie $\mathcal{A} \subseteq 2^{(\mathbb{R}^d)}$ liegen. Nun folgt aus den Axiomen einer σ–Algebra, dass mit $A, B \in \mathcal{A}$ auch $A \cap B \in \mathcal{A}$ ist, denn mit $D^c := M \backslash D$ ist $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$. Daraus folgern wir, dass alle Quader messbar sind. Diese können sogar durch endlich viele mengentheoretische Operationen aus den Einheitswürfeln gewonnen werden.

   Aber z.B. auch die offene Kreisscheibe $K := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| < 1\}$ ist messbar. Denn wir können sie als abzählbare Vereinigung von Quadraten darstellen. $\diamond$

Wie weit kommen wir mit dieser Konstruktion?

2.4 Definition *Ist eine Mengenfamilie* $\mathcal{E} \subseteq 2^M$ *gegeben, dann wird die kleinste* σ*–Algebra, die* $\mathcal{E}$ *enthält, die von* $\mathcal{E}$ **erzeugte** σ**–Algebra** *genannt und mit* $\sigma(\mathcal{E})$ *bezeichnet.* $\mathcal{E}$ *heißt ein* **Erzeuger** *von* $\sigma(\mathcal{E})$.

Vorsicht: Warum gibt es eine kleinste solche σ–Algebra? Zunächst enthält die σ–Algebra 2^M nach Voraussetzung $\mathcal{E}$. Der Schnitt $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ zweier σ–Algebren $\mathcal{A}_i \subseteq 2^M$ ist wieder eine σ–Algebra, und das gleiche gilt auch für den Schnitt beliebig vieler σ–Algebren. Damit ist $\sigma(\mathcal{E}) \subset 2^M$ als dieser Schnitt wohldefiniert.

2.2 Ringe, Algebren und Halbringe

Aus der *Algebra* kennen wir die Definition eines *Rings*.

Abbildung 2: Symmetrische Differenz der Mengen A und B (links), und A, B und C (rechts)

2.5 Definition • *Eine Menge* R *mit zwei Operationen* $+ : R \times R \to R$ *und* $\cdot : R \times R \to R$ *heißt* **Ring**, *wenn* $(R, +)$ *eine abelsche Gruppe ist,*
– das Assoziativitätsgesetz $a(bc) = (ab)c$ *und*
– die Distributivgesetze $a(b + c) = ab + ac$, $(a + b)c = ac + bc$ *gelten.*
• *Ein Ring heißt* **kommutativ**, *wenn* $ab = ba$ *gilt.*

In der Potenzmenge $\mathcal{R} := 2^M$ einer beliebigen Menge M gibt es zwei Operationen, die diese zum kommutativen Ring machen: die *symmetrische Differenz*

$$\triangle : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \to \mathcal{R} \quad , \quad (A, B) \mapsto (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$$

und der Schnitt $\cap$. Das neutrale Element der als Addition aufgefassten Verknüpfung $\triangle$ ist $\emptyset$. Auch der als Multiplikation aufgefasste Schnitt besitzt hier ein neutrales Element, nämlich M selbst.

2.6 Definition *Ein* **(Mengen-) Ring** $\mathcal{R}$ *für* M *ist eine Mengenfamilie* $\emptyset \neq \mathcal{R} \subseteq 2^M$ *mit*

$$A, B \in \mathcal{R} \quad \Longrightarrow \quad A \cup B \in \mathcal{R} \quad \textit{und} \quad A \backslash B \in \mathcal{R}.$$

Ein solcher Ring $\mathcal{R}$ enthält wenigstens die leere Menge. In einem Mengenring $\mathcal{R}$ sind auch alle Schnitte $A \cap B$ von $A, B \in \mathcal{R}$ enthalten[1], denn

$$A \cap B = A \cup B \backslash \big((A \backslash B) \cup (B \backslash A)\big).$$

[1] Man kann aber Ringe **nicht** durch die Bedingung $A, B \in \mathcal{R} \quad \Longrightarrow \quad A \cap B \in \mathcal{R}$ und $A \backslash B \in \mathcal{R}$ an ein Mengensystem $\mathcal{R}$ charakterisieren. Ein Gegenbeispiel ist $\mathcal{R} := \{\emptyset, \{a\}, \{b\}\}$.

2.7 Lemma *Für $\mathcal{R} \subseteq 2^M$ ist $(\mathcal{R}, \cup, \setminus)$ genau dann ein Mengenring, wenn $\mathcal{R}$ im algebraischen Sinn ein Unterring von $(2^M, \triangle, \cap)$ ist.*

Beweis: $\square$ Blatt 1, Aufg. 3

Der Grund, Mengenringe einzuführen ist, dass man mit ihnen leicht Maße festlegen kann. Der in diesem Zusammenhang ebenfalls wichtige maßtheoretische Begriff der Mengenalgebra ist analog zum (algebraischen) Begriff der Algebra gebildet:

2.8 Definition • *Eine* **Algebra** *über einem Körper $\mathbb{K}$ ist ein Ring A mit der Eigenschaft, gleichzeitig $\mathbb{K}$-Vektorraum zu sein mit*

$$k(ab) = (ka)b = a(kb) \qquad (a, b \in A,\ k \in \mathbb{K}).$$

• *Ein Mengenring $\mathcal{A} \subseteq 2^M$ heißt* **(Mengen-) Algebra**, *wenn auch $M \in \mathcal{A}$ ist.*

2.9 Satz *$\mathcal{A} \subseteq 2^M$ ist genau dann Mengen–Algebra, wenn $(\mathcal{A}, \triangle, \cap)$ eine* **unitale** *(also $1 \equiv M \in \mathcal{A}$) Algebra über dem Körper $\mathbb{F}_2 = (\{0,1\}, +, \cdot)$ ist.*

Beweis: Eine Teilmenge $A \in 2^M$ von M ist durch ihre *charakteristische Funktion*

$$\mathbb{1}_A : M \to \mathbb{F}_2 \quad , \quad \mathbb{1}_A(m) = \begin{cases} 1 & , m \in A \\ 0 & , m \notin A \end{cases}$$

charakterisiert, und es gilt (wegen der Rechenregel $1 + 1 = 0$ in $\mathbb{F}_2$)

$$\mathbb{1}_{A \triangle B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B \quad , \quad \mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B \qquad \big(A, B \in 2^M\big).$$

Der Raum $\{\mathbb{1}_A \mid A \in \mathcal{A}\}$ der charakteristischen Funktionen bildet also nach Lemma 2.7 genau dann einen zu $(\mathcal{A}, \triangle, \cap)$ isomorphen $\mathbb{F}_2$-Vektorraum, wenn $\mathcal{A}$ ein Ring ist. Dieser Ring enthält ein Einselement genau dann, wenn $M \in \mathcal{A}$, denn $\mathbb{1}_M \cdot \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_B$. $\square$

Wie erhalten wir nun praktisch Mengenringe? Dies schauen wir uns in unserem wichtigsten Beispiel, dem von $M = \mathbb{R}^d$ an.

2.10 Definition *Für $a, b \in \mathbb{R}^d$ ist $a < b$ genau dann, wenn $a_k < b_k$ $(k = 1, \ldots, d)$ und $a \leq b$, wenn $a_k \leq b_k$ $(k = 1, \ldots, d)$.*

Dies definiert eine *Halbordnung* (= partielle Ordnung) $a \leq b$, also eine transitive, reflexive und antisymmetrische Relation auf $\mathbb{R}^d$. Für $d > 1$ ist das keine Ordnung, denn $\binom{0}{1}$ und $\binom{1}{0}$ lassen sich so in $\mathbb{R}^2$ nicht vergleichen.

2.11 Definition *Für alle $a, b \in \mathbb{R}^d$ sind folgende* **Intervalle** *definiert:*

- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R}^d \mid a \leq x \leq b\}$
- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid a < x < b\}$
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid a \leq x < b\}$
- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R}^d \mid a < x \leq b\}$

Betrachten wir nun das Mengensystem

$$\mathcal{I}^d := \{(a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}^d,\ a \leq b\}$$

oder auch $\mathcal{I}^d_{\mathbb{Q}} := \{(a, b] \mid a, b \in \mathbb{Q}^d,\ a \leq b\}$. Das sind zwar keine Ringe (denn $(a, b]\backslash(c, d]$ ist kein Intervall mehr, wenn $a < c < d < b$), aber es sind Halbringe.

2.12 Definition *Ein Mengensystem $\mathcal{H} \subseteq 2^M$ heißt* **Halbring** *über M, wenn*

1. $\emptyset \in \mathcal{H}$
2. $A, B \in \mathcal{H} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{H}$ *(***durchschnittsstabil***)*
3. $A, B \in \mathcal{H} \Longrightarrow$ *Es gibt disjunkte $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{H}$ mit $A\backslash B = \bigcup_{k=1}^{n} C_k$.*

Es wird also nicht gefordert, dass die Differenz zweier Elemente eines Halbringes wieder im Halbring ist. Das ist auch im Allgemeinen nicht der Fall:

2.13 Lemma *$\mathcal{I}^1$ und $\mathcal{I}^1_{\mathbb{Q}}$ sind Halbringe über $\mathbb{R}$.*

Beweis: Für alle a, b, c, d in $\mathbb{R}$ beziehungsweise in $\mathbb{Q}$ gilt

1. $(a, a] = \emptyset$
2. $(a, b] \cap (c, d] = (\max(a, c), \min(b, d)]$
3. $(a, b]\backslash(c, d] = (a, \min(b, c)] \,\dot\cup\, (\max(a, d), b]$. □

Versteht man $\min$ und $\max$ im $\mathbb{R}^d$ komponentenweise, dann stimmt auch für $\mathcal{I}^d$ die Gleichung $(a, b] \cap (c, d] = (\max(a, c), \min(b, d)]$.

Die Gleichung $(a, b]\backslash(c, d] = (a, \min(b, c)] \,\dot\cup\, (\max(a, d), b]$ lässt sich zwar nicht so leicht auf mehrere Dimensionen übertragen. Wegen des folgenden Lemmas gilt aber eine zu Lemma 2.13 analoge Aussage auch im $\mathbb{R}^d$.

Abbildung 3: $(A \times B) \backslash (C \times D)$ (links), dargestellt als disjunkte Vereinigung (rechts)

2.14 Lemma *Sind $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ Halbringe (über M_1 und M_2), dann ist*

$$\mathcal{H}_1 * \mathcal{H}_2 := \{A \times B \mid A \in \mathcal{H}_1, B \in \mathcal{H}_2\} \tag{1}$$

Halbring (über $M_1 \times M_2$).

Beweis:

1. $\emptyset = \emptyset \times \emptyset \in \mathcal{H}_1 * \mathcal{H}_2$

2. Für alle $A, C \in \mathcal{H}_1,\ B, D \in \mathcal{H}_2$ gilt wegen der Durchschnittsstabilität der $\mathcal{H}_i$:

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D) \in \mathcal{H}_1 * \mathcal{H}_2.$$

3. $(A \times B) \backslash (C \times D) = \big((A \backslash C) \times B\big) \,\dot{\cup}\, \big((A \cap C) \times (B \backslash D)\big)$, und die beiden disjunkten Mengen der rechten Seite sind jeweils disjunkte Vereinigungen endlich vieler Elemente des Mengensystems $\mathcal{H}_1 * \mathcal{H}_2$. $\square$

2.15 Korollar *Also sind in beliebiger Dimension $\mathcal{I}^d$ und $\mathcal{I}^d_{\mathbb{Q}}$ Halbringe über $\mathbb{R}^d$.*

Beweis: Denn $\mathcal{I}^{k+1} = \mathcal{I}^k * \mathcal{I}$ und $\mathcal{I}^{k+1}_{\mathbb{Q}} = \mathcal{I}^k_{\mathbb{Q}} * \mathcal{I}_{\mathbb{Q}}$. $\square$

Wir erhalten allgemein aus einem Mengensystem $\mathcal{S} \subseteq 2^M$ den von $\mathcal{S}$ **erzeugten Ring** (also den kleinsten $\mathcal{S}$ enthaltenden Ring in 2^M) durch Schnittbildung.

2.16 Lemma *Für Elemente $A, B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{H}$ eines Halbringes $\mathcal{H} \subseteq 2^M$ gibt es disjunkte $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{H}$ mit*

$$A \Big\backslash \Big(\bigcup_{k=1}^{m} B_k \Big) \;=\; \bigcup_{\ell=1}^{n} C_\ell. \tag{2}$$

2.17 Beispiel (Intervalle) Es ist nützlich, sich zu überlegen, wie man etwa im Fall des Halbringes $\mathcal{I}^d$ der halboffenen Intervalle die Intervalle C_ℓ konstruiert.

Dort wird (wegen der Ordnung von $\mathbb{R}$) durch jedes $B_k = (c, d]$ eine Zerlegung von $A = (a, b]$ in höchstens 3^d disjunkte Intervalle definiert, deren Intervallgrenzen bezüglich der j–ten Koordinate aufeinanderfolgende Zahlen in der Menge $\{a_j, b_j, c_j, d_j\}$ sind. Schnitt dieser zu verschiedenen B_k gehörenden Intervalle liefert die C_ℓ. $\diamond$

Beweis: • Für $m = 1$ ist das wie bemerkt Teil der Definition eines Halbringes.
• Für den Induktionsschritt $m \mapsto m + 1$ sei die disjunkte Zerlegung (2) gegeben, und wir wollen $A \Big\backslash \Big(\bigcup_{k=1}^{m+1} B_k \Big)$ als disjunkte Vereinigung von Elementen des Halbrings $\mathcal{H}$ darstellen. Dazu stellen wir die disjunkten Mengen $C_\ell \backslash B_{m+1}$ jeweils als disjunkte Vereinigungen

$$C_\ell \backslash B_{m+1} \;=\; \bigcup_{r=1}^{R_\ell} \tilde{C}_{\ell,r} \quad \text{mit} \quad \tilde{C}_{\ell,r} \in \mathcal{H} \qquad (\ell = 1, \ldots, n)$$

dar. Das ist wegen der dritten Eigenschaften von Halbringen möglich. Damit ist

$$A \Big\backslash \Big(\bigcup_{k=1}^{m+1} B_k \Big) = \bigcup_{\ell=1}^{n} \bigcup_{r=1}^{R_\ell} \tilde{C}_{\ell,r}. \qquad \square$$

2.18 Satz *Der von einem Halbring $\mathcal{H} \subseteq 2^M$ erzeugte Ring ist von der Form*

$$\mathcal{R} := \left\{ \bigcup_{k=1}^{m} A_k \mid m \in \mathbb{N},\; A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{H} \text{ disjunkt} \right\}.$$

Beweis: • $\mathcal{R}$ ist im von $\mathcal{H}$ erzeugten Ring enthalten.
• Um zu beweisen, dass $\mathcal{R}$ ein Ring ist, benutzen wir:

1. $\emptyset \in \mathcal{R}$, denn $\emptyset \in \mathcal{H}$.
2. Für $A = \bigcup_{k=1}^{m} A_k$ und $B = \bigcup_{\ell=1}^{n} B_\ell$ mit jeweils disjunkten $A_k, B_\ell \in \mathcal{H}$ ist $A \cap B = \bigcup_{\substack{1 \le k \le m \\ 1 \le \ell \le n}} A_k \cap B_\ell$ endliche Vereinigung disjunkter Elemente von $\mathcal{H}$, also $A \cap B \in \mathcal{R}$.

Abbildung 4: Ausschöpfung einer Kreisscheibe durch Elemente von $\mathcal{F}^2$

3. $A \backslash B = \bigcup_{k=1}^{m}(A_k \setminus \bigcup_{\ell=1}^{n} B_\ell)$ ist nach Lemma 2.16 disjunkte Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{H}$, also $A \backslash B \in \mathcal{R}$.

4. Also ist auch die symmetrische Differenz als disjunkte Vereinigung $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ in $\mathcal{R}$. $\square$

2.19 Definition • *Der von $\mathcal{I}^d$ erzeugte Ring $\{\bigcup_{k=1}^{m} I_k \mid m \in \mathbb{N},\ I_k \in \mathcal{I}^d \text{ disjunkt}\}$ d–dimensionaler* **Intervallsummen** *heißt $\mathcal{F}^d$.*
• *Analog definiert man den von $\mathcal{I}^d_{\mathbb{Q}}$ erzeugten Ring $\mathcal{F}^d_{\mathbb{Q}}$.*

2.3 Inhalte, Prämaße und Maße

Wir wissen schon, dass ein Maß auf der σ–Algebra $\mathcal{A} \subseteq 2^M$ eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ist mit

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $A_n \in \mathcal{A}$ disjunkt $(n \in \mathbb{N}) \implies \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Wie kommen wir zur σ–Algebra und dem Maß, wenn wir nur einen Halbring $\mathcal{H} \subseteq 2^M$ und eine "vernünftige" Volumenmessung auf $\mathcal{H}$ haben?

2.20 Definition • *$\nu : \mathcal{H} \to [0, \infty]$ heißt* **Inhalt**, *wenn*

1. $\nu(\emptyset) = 0$

2. Für $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{H}$ disjunkt mit $A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathcal{H}$ gilt:

$$\nu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \nu(A_k) \qquad \textit{(endliche Additivität).}$$

- *Ein Inhalt ν heißt σ–**additiv**, wenn für disjunkte $A_k \in \mathcal{H}$ $(k \in \mathbb{N})$ gilt:*

$$\nu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \nu(A_k) \quad \text{, falls} \quad \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{H}.$$

  *Ein σ–additiver Inhalt $\nu : \mathcal{H} \to [0,\infty]$ heißt **Prämaß**.*

- *Ein Inhalt ν heißt **endlich**[2] , wenn $\nu(A) \in [0,\infty) \qquad (A \in \mathcal{H})$.*

- *$A \in \mathcal{H}$ heißt **Nullmenge**, wenn $\nu(A) = 0$ ist.*

Durch die Forderung der endlichen Additivität wird z.B. ausgeschlossen, dass es Mengen $A, B \in \mathcal{H}$ mit $A \subseteq B$ gibt mit $\nu(A) > \nu(B)$.

Es liegt nahe, den Inhalt $\nu_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \to [0,\infty]$ auf dem Halbring $\mathcal{H}$ zu einem Inhalt $\nu_{\mathcal{R}} : \mathcal{R} \to [0,\infty]$ auf dem vom Halbring erzeugten Ring $\mathcal{R}$ zu erweitern. Für disjunkte $A_k \in \mathcal{H}$ müssen wir dabei

$$\nu_{\mathcal{R}}\left(\bigcup_{k=1}^m A_k\right) := \sum_{k=1}^m \nu_{\mathcal{H}}(A_k) \tag{3}$$

setzen, damit $\nu_{\mathcal{R}}$ endlich additiv ist. Wir wissen aber noch nicht, ob $\nu_{\mathcal{R}}$ damit wohldefiniert ist (also $\nu_{\mathcal{R}}$ existiert), denn die Menge $A := \bigcup_{k=1}^m A_k \in \mathcal{R}$ kann eventuell auch in anderer Form $\bigcup_{\ell=1}^n B_\ell$ mit disjunkten $B_\ell \in \mathcal{H}$ dargestellt werden, und es fragt sich, ob dann $\sum_{k=1}^m \nu_{\mathcal{H}}(A_k) = \sum_{\ell=1}^n \nu_{\mathcal{H}}(B_\ell)$ gilt.

2.21 Satz
- *Es gibt genau eine Fortsetzung $\nu_{\mathcal{R}}$ von $\nu_{\mathcal{H}}$ zu einem Inhalt auf $\mathcal{R}$, und diese ist durch (3) gegeben.*
- *$\nu_{\mathcal{R}}$ ist genau dann ein Prämaß, wenn $\nu_{\mathcal{H}}$ eines ist.*

Beweis:

- Für die beiden Darstellungen von A setzen wir $C_{k,\ell} := A_k \cap B_\ell \in \mathcal{H}$. Diese sind disjunkt. Da $\nu_{\mathcal{H}}$ ein Inhalt ist, gilt $\sum_{k=1}^m \nu_{\mathcal{H}}(A_k) = \sum_{k=1}^m \sum_{\ell=1}^n \nu_{\mathcal{H}}(C_{k,\ell}) = \sum_{\ell=1}^n \nu_{\mathcal{H}}(B_\ell)$. Also ist $\nu_{\mathcal{R}}$ darstellungsunabhängig definiert, und

$$\nu_{\mathcal{H}} = \nu_{\mathcal{R}}\restriction_{\mathcal{H}}. \tag{4}$$

- Um zu überprüfen, ob $\nu_{\mathcal{R}}$ ein Inhalt auf $\mathcal{R}$ ist, betrachten wir nun disjunkte Mengen $A, B \in \mathcal{R}$. Für diese gibt es disjunkte $A_k, B_\ell \in \mathcal{H}$ mit

$$A = \bigcup_{k=1}^m A_k \quad \text{und} \quad B = \bigcup_{\ell=1}^n B_\ell.$$

[2]Das harmoniert mit der Definition der Endlichkeit von Maßen auf Seite 5.

Also ist $\nu_{\mathcal{R}}(A \cup B)$ gleich

$\nu_{\mathcal{R}}\big((\bigcup_{k=1}^m A_k) \cup (\bigcup_{\ell=1}^n B_\ell)\big) = \sum_{k=1}^m \nu_{\mathcal{H}}(A_k) + \sum_{\ell=1}^n \nu_{\mathcal{H}}(B_\ell) = \nu_{\mathcal{R}}(A) + \nu_{\mathcal{R}}(B)$.

- Ist $\nu_{\mathcal{R}}$ ein Prämaß, dann ist wegen (4) auch $\nu_{\mathcal{H}}$ eines.
- Ist dagegen $\nu_{\mathcal{H}}$ ein Prämaß, dann ist für disjunkte $A_k \in \mathcal{R}$ $(k \in \mathbb{N})$ und $A := \bigcup_{k=1}^\infty A_k \in \mathcal{R}$ zu zeigen, dass gilt:

$$\nu_{\mathcal{R}}(A) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \nu_{\mathcal{R}}(A_k). \tag{5}$$

Diese Ringelemente besitzen disjunkte Zerlegungen

$$A = \bigcup_{j=1}^m B_j \quad , \quad A_k = \bigcup_{\ell=1}^{m_k} C_{k,\ell} \quad \text{mit} \quad B_j, C_{k,\ell} \in \mathcal{H}.$$

Also ist $\nu_{\mathcal{R}}(A) = \sum_{j=1}^m \nu_{\mathcal{H}}(B_j)$ und $\nu_{\mathcal{R}}(A_k) = \sum_{\ell=1}^{m_k} \nu_{\mathcal{H}}(C_{k,\ell})$. Wir erhalten mit $D_{j,k,\ell} := B_j \cap C_{k,\ell} \in \mathcal{H}$ wegen der Prämaßeigenschaft von $\nu_{\mathcal{H}}$

$$\begin{aligned} \nu_R(A) &= \sum_{j=1}^m \nu_{\mathcal{H}}(B_j) = \sum_{j=1}^m \nu_{\mathcal{H}}\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{\ell=1}^{m_k} D_{j,k,\ell}\right)\right) \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^\infty \sum_{\ell=1}^{m_k} \nu_{\mathcal{H}}(D_{j,k,\ell}) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{\ell=1}^{m_k} \nu_{\mathcal{H}}(C_{k,\ell}) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \nu_{\mathcal{R}}(A_k). \end{aligned}$$

□

2.22 Beispiel (Inhalt und Prämaß) Sie haben schon bewiesen, dass für eine abzählbar unendliche Menge M und den Ring

Blatt 2, Aufg. P3

$$\mathcal{A} := \{A \subseteq M \mid |A| < \infty \text{ oder } |M \backslash A| < \infty\}$$

$$\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty] \quad , \quad \mu(A) := \begin{cases} 0 & , \quad |A| < \infty \\ \infty & , \quad |A| = \infty \end{cases}$$

einen Inhalt auf $\mathcal{A}$ definiert. Dieser ist aber kein Prämaß.

Letzteres folgt auch aus der mangelnden Stetigkeit der Mengenfunktion μ von unten. Dieser Begriff soll zunächst geklärt werden. ◇

Sei allgemein A_k $(k \in \mathbb{N})$ eine Familie von Teilmengen A_k eines Raumes M. Dann definieren wir $\limsup$ und $\liminf$ durch

$$\limsup_{k\to\infty} A_k \;:=\; \overline{\lim}_{k\to\infty} A_k \;:=\; \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{\ell=k}^{\infty} A_\ell$$

und

$$\liminf_{k\to\infty} A_k \;:=\; \underline{\lim}_{k\to\infty} A_k \;:=\; \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{\ell=k}^{\infty} A_\ell.$$

Falls also $x \in \overline{\lim}_{k\to\infty} A_k$, dann kommt x in unendlich vielen A_k vor, falls $x \in \underline{\lim}_{k\to\infty} A_k$, dann liegt x in allen A_k außer endlich vielen. Es gilt insbesondere

$$\limsup_{k\to\infty} A_k \;\supseteq\; \liminf_{k\to\infty} A_k.$$

Falls $\limsup_{k\to\infty} A_k = \liminf_{k\to\infty} A_k$ gilt, sprechen wir vom *Limes*

$$\lim_{k\to\infty} A_k \;:=\; \limsup_{k\to\infty} A_k = \liminf_{k\to\infty} A_k.$$

Diese Definitionen stimmen insofern mit denen aus der "Analysis 1" überein, als die charakteristischen Funktionen die Beziehung

$$\mathbb{1}_{\overline{\lim}_{k\to\infty} A_k}(x) = \overline{\lim}_{k\to\infty} \mathbb{1}_{A_k}(x) \qquad (x \in M)$$

erfüllen, und analog für $\liminf$. Daraus ergibt sich insbesondere, dass *(monoton) wachsende* $(A_{k+1} \supseteq A_k)$ und *(monoton) fallende* $(A_{k+1} \subseteq A_k)$ Folgen konvergieren. Schreibweise: $A_k \uparrow A$ bzw. $A_k \downarrow A$. Damit können wir die Eigenschaft, ein Prämaß zu sein, folgendermaßen charakterisieren:

2.23 Satz *Ein Inhalt $\mu : \mathcal{R} \to [0,\infty]$ auf dem Ring $\mathcal{R}$ ist genau dann ein Prämaß, wenn μ* **von unten stetig** *ist, d.h.*

$$A_k \in \mathcal{R} \text{ und } A_k \uparrow A \in \mathcal{R} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu(A).$$

[**Bemerkung:** Das ist in Beispiel 2.22 nicht erfüllt.]

Beweis:

- Ist μ Prämaß, und ist die wachsende Folge $A_k \in \mathcal{R}$ $(k \in \mathbb{N})$ und $A_k \uparrow A \in \mathcal{R}$, dann gilt mit $A_0 := \emptyset \in \mathcal{R}$: A ist die disjunkte Vereinigung der $A_k \backslash A_{k-1} \in \mathcal{R}$, also

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k \backslash A_{k-1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k \backslash A_{k-1}) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

  Eventuell handelt es sich um einen uneigentlichen Limes mit Wert ∞.

- Sei umgekehrt ein Inhalt μ auf dem Ring $\mathcal{R}$ von unten stetig. Sind die $B_k \in \mathcal{R}$ disjunkt und ist $B := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k \in \mathcal{R}$, dann gilt $A_k \uparrow B$ für $A_k := \bigcup_{\ell=1}^{k} B_\ell \in \mathcal{R}$, also $\mu(B) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \lim_{k\to\infty} \sum_{\ell=1}^{k} \mu(B_\ell) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \mu(B_\ell)$. $\square$

Wir haben in Korollar 2.15 festgestellt, dass die Mengenfamilien

$$\mathcal{I}^d = \{(a,b] \mid a,b \in \mathbb{R}^d,\ a \le b\} \quad \text{und} \quad \mathcal{I}^d_{\mathbb{Q}} = \{(a,b] \mid a,b \in \mathbb{Q}^d,\ a \le b\}$$

Halbringe auf $\mathbb{R}^d$ sind. Wir setzen nun

$$\lambda^d_{\mathcal{I}} : \mathcal{I}^d \to [0,\infty)\ , \quad \lambda^d_{\mathcal{I}}\big((a,b]\big) := \prod_{k=1}^{d} (b_k - a_k) \quad \text{und} \quad \lambda^d_{\mathcal{I},\mathbb{Q}} := \lambda^d_{\mathcal{I}}\restriction_{\mathcal{I}^d_{\mathbb{Q}}},$$

also anschaulich das Produkt der Kantenlängen des Quaders $(a,b]$.

2.24 Satz *$\lambda^d_{\mathcal{I}}$ und $\lambda^d_{\mathcal{I},\mathbb{Q}}$ sind Prämaße auf den Halbringen $\mathcal{I}^d$ und $\mathcal{I}^d_{\mathbb{Q}}$. Sie definieren damit Prämaße $\lambda^d_{\mathcal{F}}$ und $\lambda^d_{\mathcal{F},\mathbb{Q}}$ auf den Ringen $\mathcal{F}^d$ und $\mathcal{F}^d_{\mathbb{Q}}$ (Def. 2.19). Man nennt $\lambda^d_{\mathcal{F}}$ das* **Lebesgue–Prämaß** *auf dem $\mathbb{R}^d$.*

Beweis:

- Zunächst sind $\lambda^d_{\mathcal{I}}$ und $\lambda^d_{\mathcal{I},\mathbb{Q}}$ Inhalte, denn $\lambda^d_{\mathcal{I}}(\emptyset) = \lambda^d_{\mathcal{I}}((a,a]) = 0$, und für endliche disjunkte Zerlegungen des Quaders stimmt die Summenformel.

- Sei $d = 1$ und $(a_k, b_k]$ $(k \in \mathbb{N})$ eine abzählbare disjunkte Zerlegung eines Intervalls $(a,b]$, $a < b$. Man könnte nun denken, dass dann nach Umnummerierung gelten muss: $a_{k+1} = b_k$, aber so einfach ist es nicht, denn die Intervallgrenzen können sich ja im Inneren von $(a,b]$ häufen.

  Stattdessen benutzen wir den Überdeckungssatz von Heine-Borel. Dazu finden wir für alle $\varepsilon > 0$ ein $\alpha \in (a,b)$ mit $\alpha - a \le \varepsilon$ und $\beta_k > b_k$ mit $\beta_k - b_k \le \varepsilon 2^{-k}$. Damit ist $[a,b] \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k] \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, \beta_k)$.

Nach Heine-Borel wird das kompakte Intervall $[\alpha, b]$ durch endlich viele der offenen Intervalle (a_k, β_k) überdeckt. Es gibt also nach Umnummerierung ein $N \in \mathbb{N}$ mit $[\alpha, b] \subseteq \bigcup_{k=1}^N (a_k, \beta_k) \subseteq \bigcup_{k=1}^N (a_k, \beta_k]$, also

$$\lambda_{\mathcal{I}}^1\big((\alpha, b]\big) \leq \lambda_{\mathcal{I}}^1\big(\bigcup_{k=1}^N (a_k, \beta_k]\big) \leq \sum_{k=1}^N \lambda_{\mathcal{I}}^1\big((a_k, \beta_k]\big).$$

(siehe Elstrodt [El], Satz II.1.7). Daher ist

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathcal{I}}^1\big((a, b]\big) &\leq \varepsilon + \lambda_{\mathcal{I}}^1\big((\alpha, b]\big) \leq \varepsilon + \textstyle\sum_{k=1}^N \lambda^1\big((a_k, \beta_k]\big) \\ &\leq \varepsilon + \sum_{k=1}^N \Big(\lambda_{\mathcal{I}}^1\big((a_k, b_k]\big) + \varepsilon 2^{-k}\Big) \leq 2\varepsilon + \sum_{k=1}^\infty \lambda_{\mathcal{I}}^1\big((a_k, b_k]\big). \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt eine Ungleichung der für Prämaße geforderten Gleichung. Die umgekehrte Ungleichung gilt nach dem folgenden Satz 2.25 allgemein für Inhalte.

- Die Prämaß-Eigenschaft von $\lambda_{\mathcal{I},\mathbb{Q}}$ folgt durch Restriktion.
- Der Fall $d > 1$ ist ähnlich, und wir schauen ihn uns später an.
- Sind aber $\lambda_{\mathcal{I}}^d$ und $\lambda_{\mathcal{I},\mathbb{Q}}^d$ Prämaße, dann nach Satz 2.21 auch $\lambda_{\mathcal{F}}^d$ und $\lambda_{\mathcal{F},\mathbb{Q}}^d$. □

2.25 Satz *Ist $\nu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ Inhalt auf einem Ring $\mathcal{R}$, dann gilt für disjunkte $A_k \in \mathcal{R}$ mit $A := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{R}$:*

$$\sum_{k=1}^\infty \nu(A_k) \leq \nu(A) \qquad \textit{(}\sigma\textbf{–Superadditivität).}$$

Beweis: Die Ungleichung $\sum_{k=1}^N \nu(A_k) = \nu\left(\cup_{k=1}^N A_k\right) \leq \nu(A)$ gilt dann für alle $N \in \mathbb{N}$. Also ist auch $\sum_{k=1}^\infty \nu(A_k) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^N \nu(A_k) \leq \nu(A)$. □ Blatt 2, Auf. 6.4

Bis jetzt wissen wir noch nicht, ob wir das lebesguesche Prämaß $\lambda_{\mathcal{F}}^d$ zu einem Maß machen können. Die von Carathéodory stammende Technik dafür ist aber sehr allgemein. Bevor ich sie behandle, werde ich noch mehr Prämaße auf $\mathbb{R}$ beschreiben, damit wir mehr Anschauungsmaterial haben. Die Konstruktion wird sogar alle endlichen Prämaße auf $\mathbb{R}$ liefern und ermöglichen, den Unterschied zwischen Inhalten und Prämaßen präziser zu verstehen.

2.4 Stieltjes-Inhalte auf $\mathbb{R}$

Wir benutzen den Halbring $\mathcal{I} \equiv \mathcal{I}^1 = \{(a,b] \mid a,b \in \mathbb{R}, a \le b\}$ über $\mathbb{R}$.

2.26 Satz *1. Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und ist*

$$\mu_F : \mathcal{I} \to [0,\infty) \quad , \quad \mu_F\big((a,b]\big) := F(b) - F(a),$$

dann ist μ_F ein endlicher Inhalt, genannt der **Stieltjes-Inhalt** *zu F.*

2. Es ist $\mu_F = \mu_G$ genau dann, wenn $F - G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konstant ist.

3. Ist $\mu : \mathcal{I} \to [0,\infty)$ ein endlicher Inhalt, dann ist $\mu = \mu_F$ mit

$$F(x) := \begin{cases} \mu\big((0,x]\big) & , \quad x \ge 0 \\ -\mu\big((x,0]\big) & , \quad x < 0. \end{cases}$$

Beweis:

1. • $\mu_F(\emptyset) = \mu_F\big((a,a]\big) = F(a) - F(a) = 0$

   • Sei $(a,b]$ disjunkte Vereinigung der Intervalle $(a_k,b_k]$ $(k = 1,\ldots,N)$. Dann muss nach Umnummerierung gelten: $a_1 = a,\ b_k = a_{k+1}$ und $b_N = b$, also $\mu_F\big((a,b]\big) = F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^N (F(b_k) - F(a_k)) = \sum_{k=1}^N \mu_F((a_k,b_k])$.

2. Sei $\mu_F = \mu_G$ und $C := G(0) - F(0)$. Dann ist für alle $x \ge 0$

$$G(x) - F(x) = \big(\mu_G((0,x]) + G(0)\big) - \big(\mu_F((0,x]) + F(0)\big) = C.$$

   Analog für $x < 0$.

3. Wir zeigen die Gleichheit der Inhalte von $(a,b]$ für $0 \le a \le b$. Die anderen Fälle sind analog. Für das angegebene F ist

$$\mu_F\big((a,b]\big) = F(b) - F(a) = \mu\big((0,b]\big) - \mu\big((0,a]\big) = \mu\big((a,b]\big). \qquad \square$$

2.27 Beispiele 1. Das Lebesgue–Prämaß $\lambda^1_{\mathcal{I}}$ ist für alle $c \in \mathbb{R}$ gleich μ_{F_c}, mit

$$F_c(x) = c + x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

2. Das Dirac-Maß $\delta_a,\ a \in \mathbb{R}$ ist der zur (rechtsseitig stetigen) Funktion $F(x) = \begin{cases} 0 & , x < a \\ 1 & , x \ge a \end{cases}$ gehörende Stieltjes-Inhalt.

3. Wie in einer Aufgabe zu zeigen ist, gibt es stetige monotone Funktionen F, deren Ableitung außerhalb der Cantor–Menge $C \subseteq [0,1]$ existiert und Null ist, mit $F(0) = 0,\ F(1) = 1$. Das Stieltjes-Prämaß dieses F ist nicht auf einen Punkt, sondern auf der Cantor-Menge "konzentriert". Letztere hat aber Lebesgue-Maß Null. $\diamond$

Ich spreche die ganze Zeit von Prämaßen, obwohl ich nach Satz 2.26 nur Inhalte bekomme. Warum darf ich das?

2.28 Beispiel (Inhalt, aber kein Prämaß) Sei $F(x) := \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$. Dann ist $\mu_F((0,1]) = F(1) - F(0) = 1$, und $(0,1] = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$ (disjunkt).
Aber $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu_F\left(\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}}(1-1) = 0$, also ist der Stieltjes-Inhalt kein Prämaß auf $\mathcal{I}$.

F ist linkssseitig stetig (d.h. $\lim_{x\nearrow a} F(x) = F(a)$ für alle $a \in \mathbb{R}$), aber unstetig. Das passt nicht zur Wahl unseres Halbrings linksseitig offener Intervalle. $\diamond$

Die letzte Beobachtung verallgemeinert sich zu folgendem Satz:

2.29 Satz *Der Stieltjes-Inhalt μ_F von $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann ein Prämaß auf $\mathcal{I}$, wenn F rechtsseitig stetig ist (d.h. $\lim_{x\searrow a} F(x) = F(a)$ für alle $a \in \mathbb{R}$).*

Beweis:

- Sei F rechtsseitig stetig. Dann argumentiert man mit Heine-Borel analog zum Beweis der Prämaß-Eigenschaft für den Fall $F(x) = x$ (Lebesgue) in Satz 2.24. Die Bedingung $\beta_k - b_k \leq \varepsilon 2^{-k}$ verallgemeinert sich zu $F(\beta_k) - F(b_k) \leq \varepsilon 2^{-k}$, etc. Dass man ein solches $\beta_k > b$ finden kann, liegt an der rechtsseitigen Stetigkeit von F.

- Sei umgekehrt μ_F ein Prämaß auf $\mathcal{I}$, also nach Satz 2.21 auch auf $\mathcal{F}$. Sei weiter $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton gegen a fallende Folge reeller Zahlen. Dann ist $\lim_{k\to\infty} F(x_k) = F(a) + \lim_{k\to\infty} \mu_F((a, x_k])$. Die Behauptung folgt damit aus folgendem Lemma. $\square$

Man nennt dann μ_F ein *Lebesgue–Stieltjes–Prämaß*. Eine analoge Konstruktion ist auch im $\mathbb{R}^d$ möglich, siehe [El] II,§3.

2.30 Lemma *Sei $\mu : \mathcal{R} \to [0,\infty]$ ein Prämaß auf dem Ring $\mathcal{R}$ und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $A_n \in \mathcal{R}$ eine monoton gegen $A \in \mathcal{R}$ fallende Folge (also $A_n \downarrow A$). Falls $\mu(A_1) < \infty$, gilt $\mu(A_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu(A)$* **(Stetigkeit von oben)**.

Beweis: Wegen $A_1 \backslash A_n \uparrow A_1 \backslash A$ folgt dies aus der in Satz 2.23 bewiesenen Stetigkeit eines Prämaßes von unten, denn $\mu(A_1) - \mu(A_n) = \mu(A_1 \backslash A_n) \uparrow \mu(A_1 \backslash A) = \mu(A_1) - \mu(A)$. In der ersten Gleichung wurde dabei $\mu(A_1) < \infty$ verwandt! □ Blatt 4, Aufg. 8

2.31 Beispiel Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ Riemann-integrabel, dann ist $F(x) := \int_0^x f(y)\, dy$ stetig und monoton wachsend. Also ist μ_F ein Prämaß. Wir stellen uns f als *Dichte* von μ_F im Vergleich zum Lebesgue-Prämaß $\lambda^1_{\mathcal{I}}$ vor. ◇

3 Vom Prämaß zum Maß

Prämaße unterscheiden sich von Maßen dadurch, dass sie auf Halbringen $\mathcal{H}$ statt auf σ-Algebren definiert sind. Wir haben schon gesehen (Satz 2.21), dass wir sie problemlos auf den von $\mathcal{H}$ erzeugten Ring $\mathcal{R}$ fortsetzen können.
Warum gehen wir nicht direkt einen Schritt weiter und setzen das Prämaß von $\mathcal{R}$ auf die von $\mathcal{R}$ erzeugte σ–Algebra $\sigma(\mathcal{R})$ fort? Das hat mindestens zwei Gründe:

1. Es ist nicht so leicht nachzuprüfen, dass diese Fortsetzung existiert und eindeutig ist.

2. Manchmal ist $\sigma(\mathcal{R})$ gar nicht die angemessene σ–Algebra. Beispielsweise kann man die Dirac–Maße δ_a mit $a \in \mathbb{R}^d$ problemlos auf ganz $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ statt auf der Borel–σ–Algebra definieren, die vom Halbring $\mathcal{I}^d$ erzeugt wird.

Man geht daher (und diese mathematische Idee war wirklich gut!) über das sogenannte *äußere Maß* (was aber selbst meist gar kein Maß ist).

3.1 Die Carathéodory–Konstruktion

3.1 Definition *Ein* **äußeres Maß** *auf M ist eine Abbildung $\eta : 2^M \to [0, \infty]$ mit*

1. $\eta(\emptyset) = 0$

2. $A \subseteq B \subseteq M \implies \eta(A) \subseteq \eta(B)$ *(**Monotonie**)*

3. $A_n \subseteq M \ (n \in \mathbb{N}) \implies \eta\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \eta(A_n)$ *(σ–**Subadditivität**).*

Es wird also auch für disjunkte A_n nicht die σ–Additivität gefordert. Aus dieser zusätzlichen Forderung gewinnt man aber die angemessene σ–Algebra, auf der anschließend das von η induzierte Maß durch Restriktion definiert wird.

3.2 Definition *Ist $\eta : 2^M \to [0,\infty]$ ein äußeres Maß, dann heißt A η–**messbar**, wenn*

$$\eta(Q) \geq \eta(Q \cap A) + \eta(Q \cap A^c) \qquad (Q \subseteq M).$$

Achtung:

1. Die Menge Q ist dabei im Allgemeinen *nicht* η–messbar.
2. Diese Definition erlaubt auch von η–Messbarkeit von Mengen A mit $\eta(A) = \infty$ zu sprechen.
3. Wegen der Subadditivität ist A genau dann η–messbar, wenn

   $$\eta(Q) = \eta(Q \cap A) + \eta(Q \cap A^c) \qquad (Q \subseteq M)$$

   gilt.

3.3 Satz (Carathéodory) *Ist $\eta : 2^M \to [0,\infty]$ ein äußeres Maß, dann ist*

$$\mathcal{A}_\eta := \{A \subseteq M \mid A \textit{ ist } \eta - \textit{messbar}\}$$

eine σ–Algebra und die Restriktion $\eta\restriction_{\mathcal{A}_\eta}$ ein Maß.

Beweis:

1. Die leere Menge ist η–messbar, denn $\eta(\emptyset) = 0$, also $\eta(Q) = \eta(\emptyset) + \eta(Q)$.
2. Ist $A \in \mathcal{A}_\eta$, dann auch $A^c \in \mathcal{A}_\eta$, da die Definition der η–Messbarkeit symmetrisch in A und A^c ist. Insbesondere ist $M \in \mathcal{A}_\eta$.
3. Wenn wir noch die Implikation $A, B \in \mathcal{A}_\eta \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{A}_\eta$ gezeigt haben, wissen wir immerhin, dass $\mathcal{A}_\eta$ eine Algebra ist. Es ist also

   $$\eta\big(Q \cap (A \cup B)\big) + \eta\big(Q \cap A^c \cap B^c\big) = \eta(Q) \qquad (Q \subseteq M) \qquad (6)$$

   zu beweisen, denn $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$. Wendet man die für A und B gültigen Identitäten nacheinander auf die rechte Seite von (6) an, erhält man

   $$\eta(Q) = \eta(Q \cap A \cap B) + \eta(Q \cap A \cap B^c) + \eta(Q \cap A^c \cap B) + \eta(Q \cap A^c \cap B^c). \quad (7)$$

   Während der letzte Term schon in dieser Form auf der linken Seite von (6) auftaucht, können wir für die anderen drei Terme benutzen, dass die disjunkte Vereinigung

   $$(A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = A \cup B$$

ist. Daraus folgt mit $\tilde{Q} := Q \cap (A \cup B)$ für den letzten Term in (6) wie in (7), dass $\eta(\tilde{Q})$ gleich

$$\begin{aligned} & \eta(\tilde{Q} \cap A \cap B) + \eta(\tilde{Q} \cap A \cap B^c) + \eta(\tilde{Q} \cap A^c \cap B) + \eta(\tilde{Q} \cap A^c \cap B^c) \\ = \; & \eta(Q \cap A \cap B) + \eta(Q \cap A \cap B^c) + \eta(Q \cap A^c \cap B) + 0 \qquad (8) \end{aligned}$$

ist – also, in die linke Seite von (6) eingesetzt, der Beweis von (6).

Für disjunkte $A, B \in \mathcal{A}_\eta$ ist $A = A \cap B^c$ und $B = A^c \cap B$, also nach (8)

$$\eta\big(Q \cap (A \cup B)\big) = \eta(Q \cap A) + \eta(Q \cap B). \qquad (9)$$

4. Um nun zu zeigen, dass $\mathcal{A}_\eta$ nicht nur eine Algebra, sondern eine σ–Algebra ist, betrachten wir eine Folge von $A_n \in \mathcal{A}_\eta$, und wir wollen zeigen, dass dann auch $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ in $\mathcal{A}_\eta$ liegt. Seien dazu die A_n zunächst disjunkt (wie auch in der Formel für die σ–Additivität eines Maßes vorausgesetzt). Dann ist $B_n := \bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{A}_\eta$, denn $\mathcal{A}_\eta$ ist ja eine Algebra. Außerdem folgt aus der Regel (9) durch Induktion

$$\eta(Q \cap B_n) = \sum_{k=1}^n \eta(Q \cap A_k) \qquad (n \in \mathbb{N}). \qquad (10)$$

Nun gilt $B_n \uparrow A$, also wegen der Monotonieeigenschaft 2) des äußeren Maßes η

$$\eta(Q) = \eta(Q \cap B_n) + \eta(Q \cap B_n^c) \geq \eta(Q \cap B_n) + \eta(Q \cap A^c) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Durch Einsetzen von (10) und Bildung des Limes $n \to \infty$ ergibt sich damit

$$\eta(Q) \geq \sum_{k=1}^\infty \eta(Q \cap A_k) + \eta(Q \cap A^c) \geq \eta(Q \cap A) + \eta(Q \cap A^c), \qquad (11)$$

Letzteres wegen der σ–Subadditivität des äußeren Maßes η. Damit ist also A η–messbar, und gleichzeitig die Formel

$$\eta(A) = \textstyle\sum_{k=1}^\infty \eta(A_k)$$

der σ–Additivität bewiesen (man setze $Q := A$ in (11)).

5. Trotzdem sind wir mit dem Beweis noch nicht ganz fertig. Wir haben die Implikation
$$A_n \in \mathcal{A}_\eta \ (n \in \mathbb{N}) \implies A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}_\eta$$
bis jetzt nur für *disjunkte* A_n bewiesen. Solche Mengensysteme tragen den Namen *Dynkin–Systeme*, und wir zeigen als Nächstes, dass schnittsstabile Dynkin–Systeme schon σ–Algebren sind. $\square$

3.4 Definition *Ein Mengensystem $\mathcal{D} \subseteq 2^M$ heißt* **Dynkin–System**, *wenn*

1. $M \in \mathcal{D}$,

2. mit $A \in \mathcal{D}$ auch $A^c \in \mathcal{D}$ ist,

3. für eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ disjunkter $A_n \in \mathcal{D}$ auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$ ist.

3.5 Beispiele (Dynkin–Systeme) 1. Jede σ–Algebra ist ein Dynkin–System, denn die Definitionen unterscheiden sich nur in der Forderung der Disjunktheit.

2. Nicht jedes Dynkin–System ist eine σ–Algebra. Für alle Mengen M mit $|M| = 2n$, $n \in \mathbb{N}$ bildet $\mathcal{D} := \{A \subseteq M \mid |A| \in 2\mathbb{N}_0\}$ ein Dynkin–System mit $2^{|M|-1}$ Teilmengen A.
   Aber für $n > 1$ und etwa $M := \{1, 2, \ldots, 2n\}$ ist zwar $A := \{1, 2\}$ und $B := \{2, 3\}$ in $\mathcal{D}$, nicht aber $A \cup B$. $\mathcal{D}$ ist also nicht einmal eine Algebra.

3. Im Beweis von Satz 3.3 wurde gezeigt, dass $\mathcal{A}_\eta$ ein Dynkin–System ist, sogar ein durchschnittsstabiles (denn $\mathcal{A}_\eta$ ist ja auch eine Algebra). $\diamond$

3.6 Satz *Ein Dynkin–System $\mathcal{D} \subseteq 2^M$ ist genau dann eine σ–Algebra, wenn aus $A, B \in \mathcal{D}$ folgt: $A \cap B \in \mathcal{D}$.*

Beweis: Blatt 4, Aufg. 9

- Es ist nur noch zu zeigen, dass aus der Durchschnittsstabilität von $\mathcal{D}$ folgt, dass die Eigenschaft
$$A_n \in \mathcal{D} \ (n \in \mathbb{N}) \implies \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$$
einer σ–Algebra erfüllt ist.

- Zunächst ist mit $A, B \in \mathcal{D}$ auch $A \backslash B = A \cap B^c$ in $\mathcal{D}$. Setzen wir daher $B_n := \bigcup_{k=1}^n A_k$, dann ist (mit $B_0 := \emptyset$)

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (B_n \backslash B_{n-1})$$

  als disjunkte Vereinigung der $B_n \backslash B_{n-1} \in \mathcal{D}$ dargestellt, also nach der dritten definierenden Eigenschaft eines Dynkin–Systems $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$. □

Damit ist auch Satz 3.3 vollständig bewiesen.
Wie erhalten wir nun ein äußeres Maß? Schönerweise durch Rückgriff auf die am einfachsten zu kontrollierende Mengenfunktion, den Inhalt auf einem Halbring:

3.7 Satz (Fortsetzungssatz) *Es sei $\mu : \mathcal{H} \to [0, \infty]$ ein Inhalt auf einem Halbring $\mathcal{H} \subseteq 2^M$, dann gilt:*

1. $\eta : 2^M \to [0, \infty],\ \eta(A) := \inf\left\{\sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) \mid A_n \in \mathcal{H},\ A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right\}$ *(mit $\inf\emptyset = \infty$) ist ein äußeres Maß, und alle $A \in \mathcal{H}$ sind η–messbar.*
2. *Ist μ sogar ein Prämaß, dann ist $\eta\restriction_{\mathcal{H}} = \mu$.*
3. *Sonst gibt es ein $A \in \mathcal{H}$ mit $\eta(A) < \mu(A)$.*

Beweis:

1. Wir überprüfen zunächst die Eigenschaften eines äußeren Maßes:
   - $\eta(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$.
   - Monotonie: $\eta(B) \geq \eta(A)$ für $B \supseteq A$, weil eine Überdeckung von B auch eine Überdeckung von A ist.
   - σ–Subadditivität: Für Folgen $A_n \subseteq M$ $(n \in \mathbb{N})$ von Teilmengen ist zu zeigen: $\eta\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \eta(A_n)$. Wir können o.B.d.A. $\eta(A_n) < \infty$ voraussetzen, denn sonst ist die Ungleichung erfüllt (da $\infty \leq \infty$).

   Wir wissen damit, dass es überhaupt eine Überdeckung von A_n durch Elemente des Halbrings gibt. Wegen der Eigenschaft des Infimums einer Teilmenge von $\mathbb{R}$ finden wir für alle $\varepsilon > 0$ auch eine solche Familie von $B_{n,k} \in \mathcal{H}$ mit

$$A_n \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_{n,k} \quad \text{und} \quad \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(B_{n,k}) \leq \eta(A_n) + \varepsilon 2^{-n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

   Da die Doppelindizierung immer noch abzählbar ist, folgt

$$\eta(A) \leq \sum_{n,k\in\mathbb{N}} \mu(B_{n,k}) \leq \varepsilon + \sum_{n\in\mathbb{N}} \eta(A_n),$$

woraus für $\varepsilon \searrow 0$ die σ–Subadditivität folgt. Damit ist η ein äußeres Maß.

Die Elemente $A \in \mathcal{H}$ des Halbrings erfüllen die Messbarkeitseigenschaft $A \in \mathcal{A}_\eta$, also[3]

$$\eta(Q) \geq \eta(Q \cap A) + \eta(Q \cap A^c) \qquad (Q \subseteq M).$$

Denn für den von $\mathcal{H}$ erzeugten Ring $\mathcal{R}$ und eine Überdeckung $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \supseteq Q$ mit $B_n \in \mathcal{R}$ sind die $B_n \cap A$ eine Überdeckung von $Q \cap A$ und analog $B_n \cap A^c$ eine Überdeckung für $Q \cap A$. Da $\mu_\mathcal{R}$ ein Inhalt ist, folgt $\mu_\mathcal{R}(B_n) = \mu_\mathcal{R}(B_n \cap A) + \mu_\mathcal{R}(B_n \cap A^c)$, also

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_\mathcal{R}(B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_\mathcal{R}(B_n \cap A) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_\mathcal{R}(B_n \cap A^c).$$

Rechts hat man noch mehr Möglichkeiten zur Infimumsbildung.

2. Wie man aus der dritten Behauptung ablesen kann, muss man zum Nachweis der Gleichheit von äußerem und Prämaß auf $\mathcal{H}$ mehr Struktur benutzen.

   • Trivial ist die Ungleichung $\eta(A) \leq \mu(A)$ für $A \in \mathcal{H}$, denn A überdeckt sich selbst.

   • Umgekehrt würde bei Verletzung der Gleichheit eine Überdeckung $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \supseteq A$ mit $A_n \in \mathcal{H}$ und $\sum_n \mu(A_n) < \mu(A)$ existieren. Das würde der Prämaßeigenschaft widersprechen. Denn aus den A_n konstruieren wir die disjunkte Überdeckung von A mit $B_n := A \cap \left(A_n \backslash \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right) \in \mathcal{H}$, also $\mu(B_n) \leq \mu(A_n)$, aber

$$\mu(A) = \sum_n \mu(B_n) \qquad (\sigma\text{–Additivität}).$$

3. Ist dagegen μ nur ein Inhalt, kein Prämaß, finden wir $A_n \in \mathcal{H}$ und $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{H}$ mit

$$\mu(A) > \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \geq \eta(A). \qquad \square$$

3.8 Bemerkung (Hausdorff–Maße) Es sei (M, d) ein metrischer Raum, Blatt 5, Aufg. 11

$$\mathrm{diam}(\emptyset) := 0 \quad \text{und} \quad \mathrm{diam}(U) := \sup\{d(x,y) \mid x, y \in U\} \text{ für } U \subseteq M,\ U \neq \emptyset.$$

[3]Die umgekehrte Ungleichung gilt nach dem eben Bewiesenen.

1. Für $D, \delta \in (0, \infty)$ ist

$$\mathcal{H}^D_\delta(A) := \inf \Big\{ \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{diam}(U_i)^D \mid A \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i,\ \mathrm{diam}(U_i) \le \delta \Big\} \qquad (A \subseteq M)$$

ein äußeres Maß. Denn

   (a) $\mathcal{H}^D_\delta(\emptyset) = 0$, denn $\mathrm{diam}(U_i)^D = 0$ für $U_i := \emptyset$.

   (b) Ist $A \subseteq B \subseteq M$ und $B \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i$, dann auch $A \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i$, also $\mathcal{H}^D_\delta(A) \le \mathcal{H}^D_\delta(B)$.

   (c) Für $A_n \subseteq M$ $(n \in \mathbb{N})$, $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ und $A_n \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_{i,n}$ mit $\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{diam}(U_{i,n})^D \le \mathcal{H}^D_\delta(A_n) + 2^{-n}\varepsilon$ ist $A \subseteq \bigcup_{i,n\in\mathbb{N}} U_{i,n}$, also $\mathcal{H}^D_\delta(A) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^D_\delta(A_n) + \varepsilon$. Mit $\varepsilon \searrow 0$ folgt die σ–Subadditivität.

2. Der Limes $\mathcal{H}^D(A) := \lim_{\delta\searrow 0} \mathcal{H}^D_\delta(A)$ existiert und definiert ein äußeres Maß $\mathcal{H}^D$. Denn für $0 < \delta_1 \le \delta_2$ ist $\mathcal{H}^D_{\delta_1}(A) \ge \mathcal{H}^D_{\delta_2}(A)$, sodass der (eventuell uneigentliche) Limes $\mathcal{H}^D(A)$ existiert. Es ist

   (a) $\mathcal{H}^D(\emptyset) = \lim_{\delta\searrow 0} \mathcal{H}^D_\delta(\emptyset) = \lim_{\delta\searrow 0} 0 = 0$,

   (b) für $A \subseteq B \subseteq M$ gilt nach 1.b)

$$\mathcal{H}^D(A) = \lim_{\delta\searrow 0} \mathcal{H}^D_\delta(A) \le \lim_{\delta\searrow 0} \mathcal{H}^D_\delta(B) = \mathcal{H}^D(B),$$

   (c) und für $A_n \subseteq M$ $(n \in \mathbb{N})$ und $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ist nach 1.c)

$$\mathcal{H}^D(A) = \lim_{\delta\searrow 0} \mathcal{H}^D_\delta(A) \le \lim_{\delta\searrow 0} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^D_\delta(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lim_{\delta\searrow 0} \mathcal{H}^D_\delta(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^D(A_n).$$

Das durch $\mathcal{H}^D$ induzierte Maß heißt das *D–dimensionale Hausdorff–Maß* auf (M, d). Man definiert als 0–dimensionales Hausdorff–Maß das Zählmaß auf M. Es läßt sich zeigen, dass alle Borel–Mengen $\mathcal{H}^D$–messbar sind, denn das äußere Maß ist *metrisch*: Für alle nichtleeren Mengen $A, B \subseteq M$ mit positivem Minimalabstand ist $\mathcal{H}^D(A \cup B) = \mathcal{H}^D(A) + \mathcal{H}^D(B)$.

Während für $M = \mathbb{R}^d$ mit euklidischer Metrik $d(x, y) = \|x - y\|$ das d–dimensionale Hausdorff–Maß bis auf eine Konstante gleich λ^d ist, sind für $D \ne d$ die Hausdorff–Maße davon verschieden. Insbesondere sind die Maße von Vollkugeln für $D < d$ unendlich. Sie fallen also nicht in die Klasse der Stieltjes–Maße aus Abschnitt 2.4.

Die Hausdorff–Maße können dazu benutzt werden, Teilmengen $A \subseteq \mathbb{R}^d$ eine reelle Zahl zwischen 0 und d, ihre *Hausdorff–Dimension*, zuzuordnen:

$$\dim_H(A) := \inf \{D \ge 0 \mid \mathcal{H}^D(A) = 0\}. \qquad \diamond$$

3.2 Das Lebesgue–Maß λ^d und seine Translationsinvarianz

Wir hatten auf dem Halbring $\mathcal{I}^d := \{(a,b] \mid a,b \in \mathbb{R}^d,\ a \le b\}$ der achsenparallelen halboffenen Quader durch $\lambda_{\mathcal{I}}^d\big([a,b]\big) = \prod_{k=1}^d (b_k - a_k)$ einen Inhalt definiert, der sich als Prämaß herausstellte (Satz 2.24).

Nach dem Satz von Carathéodory induziert $\lambda_{\mathcal{I}}^d$ nun ein äußeres Maß η, das *äußere Lebesguesche Maß*. Gleichzeitig erhalten wir nun eine Fortsetzung des Prämaßes $\lambda_{\mathcal{I}}^d$ zu einem Maß

$$\lambda^d := \eta\restriction_{\mathcal{L}^d} : \mathcal{L}^d \to [0,\infty] \quad \text{auf der } \sigma\text{–Algebra } \mathcal{L}^d := \mathcal{A}_\eta, \tag{12}$$

dem *Lebesgue–Maß*. Es gilt also insbesondere

$$\lambda^d\big((a,b]\big) = \eta\big((a,b]\big) = \lambda_{\mathcal{I}}^d\big((a,b]\big) \qquad (a \le b).$$

Wegen der Wichtigkeit des Lebesgue-Maßes erhielt die σ–Algebra der Lebesgue-messbaren Teilmengen ein eigenes Symbol $\mathcal{L}^d$. Wie groß ist diese σ–Algebra?

Aus dem Auswahlaxiom folgt, dass $\mathcal{L}^d$ nicht die gesamte Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ ist (siehe Abschnitt 3.6). Andererseits ist immerhin $\sigma(\mathcal{I}^d) \subseteq \mathcal{L}^d$.

3.9 Lemma *Die* **Borel–σ–Algebra** $\mathcal{B}^d := \sigma(\mathcal{O})$ *der Topologie $\mathcal{O}$ offener Teilmengen von $\mathbb{R}^d$ und die von den offenen Intervallen $(a,b) \subseteq \mathbb{R}^d$ erzeugte σ–Algebra sind gleich.* Blatt 6, Aufg. 14

Da halboffene Intervalle durch Komplementbildung auch die offenen Intervalle erzeugen, ist

$$\sigma(\mathcal{I}^d) = \mathcal{B}^d,$$

also die σ–Algebra der *Borel–Mengen*.

Tatsächlich ist auch die Inklusion $\mathcal{B}^d \subseteq \mathcal{L}^d$ echt, denn $\mathcal{L}^d$ umfasst *alle* Teilmengen von $A \in \mathcal{B}^d$, falls $\lambda^d(A) = 0$ ist. Für geeignete solche A sind letztere nicht alle selbst Borel–Mengen. Die Einschränkung des Lebesgue–Maßes

$$\beta^d := \lambda^d\restriction_{\mathcal{B}^d} : \mathcal{B}^d \to [0,\infty]$$

wird *Lebesgue–Borel–Maß* genannt. Praktisch fällt der Unterschied zwischen β^d und λ^d aber oft nicht auf, da man meistens durch stetige Funktionen definierte Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ misst, die damit in $\mathcal{B}^d$ liegen.

Eine zentrale Eigenschaft des Lebesgue–Maßes ist seine *Translationsinvarianz*, also

$$\lambda^d(A+a) = \lambda^d(A) \qquad (A \in \mathcal{L}^d,\ a \in \mathbb{R}^d).$$

Diese folgt aus der Translationsinvarianz des Halbrings $\mathcal{I}^d$ und der Translationsinvarianz von λ^d auf $\mathcal{I}^d$. Sie verknüpft die Struktur der Gruppe $(\mathbb{R}^d, +)$, die eine topologische Gruppe[4] ist, mit der Maßtheorie.

3.10 Bemerkung (Haar–Maß) Im Begriff des *Haar–Maßes* erfährt diese Konstruktion eine wichtige Verallgemeinerung. Für viele topologische Gruppen G können wir ein solches unter den Links–Translationen

$$L_g : G \to G \quad , \quad L_g(h) = g \circ h \qquad (g \in G)$$

invariantes, bis auf Normierung eindeutiges Maß finden. $\diamond$

Später, in Satz 3.20 werden wir sehen, dass das Lebesgue–Maß λ^d auch unter Drehungen und Spiegelungen invariant ist. Dazu müssen wir aber erst Bildmaße untersuchen.

3.3 Messbare Abbildungen und Bildmaße

Eine Drehung des $\mathbb{R}^d$ ist zunächst einmal eine stetige Abbildung. Wie wir gleich sehen werden, bedeutet das nicht nur, dass Urbilder offener Mengen offen sind, sondern allgemeiner, dass Urbilder von Borelmengen Borelmengen sind. Das macht so eine Drehung zu einer messbaren Abbildung.

3.11 Definition • *Eine Menge A mit einer σ–Algebra $\mathcal{A} \subseteq 2^A$ heißt* **Messraum**,

- $(A, \mathcal{A}, \mu)$ *mit einem Maß $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$* **Maßraum**.
- *Eine Abbildung $f : A \to B$ zwischen Messräumen $(A, \mathcal{A})$ und $(B, \mathcal{B})$ heißt* **messbar**, *wenn $f^{-1}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{A}$ gilt, mit dem Mengensystem*

$$f^{-1}(\mathcal{B}) := \{f^{-1}(C) \mid C \in \mathcal{B}\} \ \subseteq \ 2^A.$$

- *Ist $f : A \to B$ messbar und $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ein Maß, dann heißt $f(\mu) : \mathcal{B} \to [0, \infty]$, $M \mapsto \mu\big(f^{-1}(M)\big)$ das* **Bildmaß von μ bezüglich** f.

Tatsächlich ist $f(\mu)$ ein Maß, denn

[4]**Definition.** Eine Gruppe $(G, \circ)$ heißt **topologische Gruppe**, wenn G mit einer Topologie versehen ist, sodass gilt: Die Gruppenverknüpfung $\circ : G \times G \to G$ und die Inversenbildung $G \to G$ sind stetig (dabei wird $G \times G$ mit der Produkttopologie versehen).

- $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ und
- für disjunkte $M_k \in \mathcal{B}$ $(k \in \mathbb{N})$ ist

$$\begin{aligned} f(\mu)\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_k\right) &= \mu\left(f^{-1}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_k\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} f^{-1}(M_k)\right) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu\big(f^{-1}(M_k)\big) = \sum_{k\in\mathbb{N}} f(\mu)(M_k), \end{aligned}$$

  denn auch die $\big(f^{-1}(M_k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ sind disjunkt.

3.12 Lemma *Für Messräume $(A, \mathcal{A})$, $(B, \mathcal{B})$, $(C, \mathcal{C})$, messbare Abbildungen $f : A \to B$, $g : B \to C$ und ein Maß $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ erfüllen die Bildmaße*

$$(g \circ f)(\mu) = g\big(f(\mu)\big) \qquad \textit{(}\textbf{Transitivität}\textit{)}.$$

Beweis: Für alle $M \in \mathcal{C}$ gilt: $(g \circ f)(\mu)(M) = \mu\big((g \circ f)^{-1}(M)\big) = \mu\big(f^{-1} \circ g^{-1}(M)\big) = f(\mu)\big(g^{-1}(M)\big) = g\big(f(\mu)\big)(M)$. □

So etwas beweist sich ohne Zuhilfenahme des Gehirns. Wie zeigt man nun, dass eine Abbildung messbar ist? Dazu genügt es, die Eigenschaft $f^{-1}(C) \in \mathcal{A}$ für eine kleinere Familie von Teilmengen $C \subseteq B$ als die σ–Algebra $\mathcal{B}$ zu kontrollieren:

3.13 Satz *Sind $(A, \mathcal{A})$ und $(B, \mathcal{B})$ Messräume, dann ist $f : A \to B$ genau dann messbar, wenn für einen Erzeuger $\mathcal{E} \subseteq 2^B$ der σ–Algebra $\mathcal{B}$ gilt: $f^{-1}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$.*

Beweis: Wir betrachten also das Mengensystem $f^{-1}(\mathcal{E}) = \{f^{-1}(C) \mid C \in \mathcal{E}\}$.

- Da $\sigma(\mathcal{E}) \supseteq \mathcal{E}$, folgt $f^{-1}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$ aus $f^{-1}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{A}$, also der Messbarkeit von$f$.
- Ist umgekehrt $f^{-1}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$, dann folgt $f^{-1}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{A}$ wegen $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{E})$ aus

$$f^{-1}\big(\sigma(\mathcal{E})\big) = \sigma\big(f^{-1}(\mathcal{E})\big).$$

Von letzterer Identität müssen wir nur noch $f^{-1}\big(\sigma(\mathcal{E})\big) \subseteq \sigma\big(f^{-1}(\mathcal{E})\big)$ beweisen. Nun ist

$$\mathcal{C} := \{C \subseteq B \mid f^{-1}(C) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))\}$$

eine σ–Unteralgebra von $\mathcal{B}$, denn

- $B \in \mathcal{C}$ (da $f^{-1}(B) = A$),

- $C \in \mathcal{C} \implies B \backslash C \in \mathcal{C}$ (da $f^{-1}(B \backslash C) = f^{-1}(B) \backslash f^{-1}(C) = A \backslash f^{-1}(C)$),
- $C_k \in \mathcal{C}$ $(k \in \mathbb{N}) \implies \bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_k \in \mathcal{C}$ (da $f^{-1}\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_k\right) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f^{-1}(C_k)$).

$\mathcal{C}$ enthält $\mathcal{E}$, also auch $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{E})$.

Wegen $f^{-1}(\mathcal{C}) = \sigma\big(f^{-1}(\mathcal{E})\big)$ folgt die Aussage. □

3.14 Bemerkung (Stetigkeit und Messbarkeit) Sind $(A, \mathcal{O}_A)$ und $(B, \mathcal{O}_B)$ topologische Räume, und $f : A \to B$ stetig, dann ist nach Satz 3.13 f messbar bezüglich der Borel–σ–Algebren $\mathcal{A} := \sigma(\mathcal{O}_A)$ und $\sigma(\mathcal{O}_B)$. Denn $\sigma(\mathcal{O}_B)$ wird ja durch $\mathcal{O}_B$ erzeugt, und wegen der Stetigkeit von f ist $f^{-1}(\mathcal{O}_B) \subseteq \mathcal{O}_A$.

Aber auch die meisten praktisch vorkommenden unstetigen Funktionen sind messbar, beispielsweise die charakteristischen Funktionen $\mathbb{1}_M : A \to \{0, 1\}$ messbarer Teilmengen $M \in \mathcal{A}$ des Messraumes $(A, \mathcal{A})$. ◇

3.4 Eindeutigkeitssätze

Wir werden gleich feststellen, dass das Bildmaß des Lebesgue–Maßes unter einer invertierbaren affinen Abbildung ein Vielfaches des Lebesgue–Maßes ist. Dazu verwenden wir die Tatsache, dass das Lebesgue–Maß λ^d das einzige translationsinvariante Maß auf $\mathbb{R}^d$ ist, das dem Standardwürfel Maß 1 gibt.

3.15 Satz (Eindeutigkeitssatz) *Es seien μ, ν Maße auf der σ–Algebra $\mathcal{A} \subseteq 2^M$, und es gebe einen durchschnittsstabilen Erzeuger $\mathcal{E}$ von $\mathcal{A}$ mit*

a) $\mu\restriction_{\mathcal{E}} = \nu\restriction_{\mathcal{E}}$

b) *Es gibt $E_n \in \mathcal{E}$ mit $\mu(E_n) = \nu(E_n) < \infty$ $(n \in \mathbb{N})$ und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = M$.*

Dann ist $\mu = \nu$.

3.16 Bemerkung (Voraussetzungen der Eindeutigkeit) Ohne die Forderung b) muss $\mu = \nu$ nicht gelten. Ein Beispiel ist $\mathcal{A} := \{\emptyset, M\}$ und $\mathcal{E} := \{\emptyset\}$. Dann gilt immer a) unabhängig davon, ob $\mu(M) = \nu(M)$ ist oder nicht. ◇

Beweis:

- Wir setzen $F_1 := E_1$ und $F_{n+1} := E_{n+1} \backslash \left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right)$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann ist die Folge der F_n disjunkt mit

$$\bigcup_{k=1}^{n} F_k = \bigcup_{k=1}^{n} E_k \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Außerdem sind die $F_k \in \mathcal{A}$, aus der σ–Additivität der Maße $\mu, \nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ folgt also wegen Bedingung b) für alle $A \in \mathcal{A}$:

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(F_k \cap A) \quad \text{und} \quad \nu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(F_k \cap A).$$

- Es genügt also zu zeigen, dass $\mu(F_k \cap A) = \nu(F_k \cap A)$ gilt. Nun ist $F_k \cap A \subseteq E_k$. Wir wollen also beweisen, dass $F_k \cap A \in \mathcal{D}_k$ gilt, mit

$$\mathcal{D}_k := \{B \in \mathcal{A} \mid \mu(E_k \cap B) = \nu(E_k \cap B)\}.$$

- (a) Wegen $\mu(E_k) = \nu(E_k)$ ist $M \in \mathcal{D}_k$.

  (b) Mit $B \in \mathcal{D}_k$ ist auch $B^c \in \mathcal{D}_k$, denn wegen $\mu(E_k) = \nu(E_k) < \infty$ ist

$$\begin{aligned} \mu(E_k \cap B^c) &= \mu(E_k \cap (E_k \backslash B)) = \mu(E_k) - \mu(E_k \cap B) \\ &= \nu(E_k) - \nu(E_k \cap B) = \nu(E_k \cap B^c). \end{aligned}$$

  (c) Für disjunkte $B_n \in \mathcal{D}_k$ $(n \in \mathbb{N})$ gilt mit $B := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$:

$$\mu(E_k \cap B) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_k \cap B_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(E_k \cap B_n) = \nu(E_k \cap B).$$

  Also ist $\mathcal{D}_k$ ein Dynkin–System.

- Da der Erzeuger $\mathcal{E}$ nach Voraussetzung durchschnittsstabil ist, also mit $B \in \mathcal{E}$ auch $E_k \cap B \in \mathcal{E}$ gilt, folgt $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_k$, also auch $\delta(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}_k$, wobei $\delta(\mathcal{E})$ das von $\mathcal{E}$ erzeugte Dynkin–System bezeichnet. Andererseits ist wegen Satz 3.6 die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra $\sigma(\mathcal{E}) = \delta(\mathcal{E})$, denn $\mathcal{E}$ ist ja durchschnittsstabil, also auch $\delta(E)$ (siehe auch Satz 5.4 von Bauer [Ba]). Andererseits ist $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A}$. Also ist $F_k \cap A \in \mathcal{D}_k$, womit der Eindeutigkeitssatz gezeigt ist. □

3.17 Definition *Ein Inhalt $\mu : \mathcal{H} \to [0, \infty]$ auf einem Halbring $\mathcal{H} \subseteq 2^M$ heißt* σ–**endlich**, *wenn es eine Folge von $A_n \in \mathcal{H}$ gibt mit*

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = M \quad \textit{und} \quad \mu(A_n) < \infty \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Da Halbringe durchschnittsstabil sind, folgt für diese aus dem Eindeutigkeitssatz 3.15 zusammen mit dem Fortsetzungssatz 3.7:

3.18 Korollar *Jedes σ–endliche Prämaß $\mu : \mathcal{H} \mapsto [0,\infty]$ auf einem Halbring $\mathcal{H}$ über M kann auf genau eine Weise fortgesetzt werden zu einem Maß auf $\sigma(M)$.*

3.19 Satz (Eindeutigkeit des Lebesgue–Maßes) *Ist μ ein translationsinvariantes Maß auf $\mathcal{L}^d$ mit $\mu\left(]0,1]^d\right) = 1$, dann ist $\mu = \lambda^d$.*

Beweis:

- Zunächst folgt für $n_1, \ldots, n_d \in \mathbb{N}$:

$$\mu\left(\left]0, \tfrac{1}{n_1}\right] \times \ldots \times \left]0, \tfrac{1}{n_d}\right]\right) = \tfrac{1}{n_1 \cdot \ldots \cdot n_d} \ ,$$

  indem man den Standardwürfel aus den disjunkten Translaten dieser kleinen Würfel zusammensetzt.

- Ein weiterer Schritt zeigt Gleichheit von μ und λ^d auch auf $\mathcal{I}^d_{\mathbb{Q}}$.

- Da $\sigma(\mathcal{I}^d_{\mathbb{Q}}) = \mathcal{L}^d$ ist, folgt die Aussage mit dem Fortsetzungssatz 3.7. □

3.5 Transformation von λ^d mit Affinitäten

Eine affine Abbildung $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ lässt sich eindeutig in der Form

$$f(x) = a + Ax \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{R}^d,\ A \in \mathrm{Mat}(d,\mathbb{R})$$

schreiben. Wir setzen dann $\det(f) := \det(A)$. Ist $A \in \mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$, also invertierbar, heißt sie *Affinität*. Affine Abbildungen sind insbesondere stetig, also Borel–messbar. Damit ist eine Affinität f auch bez. der σ–Algebra $\mathcal{L}^d$ auf $\mathbb{R}^d$ messbar, denn diese ist die Vervollständigung von $\mathcal{B}^d$, und $\lambda^d\big(f^{-1}(C)\big) = 0$, falls $C \in \mathcal{B}^d$ eine Nullmenge ist.

3.20 Satz *Für Affinitäten $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ ist das Bildmaß des Lebesgue–Maßes*

$$f\big(\lambda^d\big) = \frac{1}{|\det f|}\, \lambda^d \ . \tag{13}$$

Beweis:

- Da λ^d translationsinvarant ist, können wir uns auf den Fall $f(x) = Ax$ mit $A \in \mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$ beschränken. Bezeichnet nämlich

$$t_a : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \quad , \quad x \mapsto x + a$$

die Translation um $a \in \mathbb{R}^d$, dann ist auch das Bildmaß $f(\lambda^d)$ des Lebesgue–Maßes translationsinvariant, denn für alle $B \in \mathcal{L}^d$ ist wegen $t_a^{-1} = t_{-a}$

$$\begin{aligned} t_a\big(f(\lambda^d)\big)(B) &= f(\lambda^d)\big(t_{-a}(B)\big) = \lambda^d\big(f^{-1}(t_{-a}(B))\big) \\ &= \lambda^d\big(f^{-1}(B) - f^{-1}(a)\big) = \lambda^d\big(f^{-1}(B)\big) = f(\lambda^d)(B). \end{aligned}$$

Also ist nach dem Eindeutigkeitssatz 3.19 des Lebesgue–Maßes $f(\lambda^d) = C\lambda^d$ mit einem $C > 0$, das von f abhängt.

- Ist die lineare Abbildung f orthogonal, dann lässt f die Einheits-Vollkugel im $\mathbb{R}^d$ invariant, also ist $C = 1$.
- Ist f dagegen diagonal, dann stimmt die Determinantenformel (13). Denn dann ist $\det(f)$ Produkt der Streckungsfaktoren in den Achsenrichtungen, und Volumina von Quadern transformieren sich unter f wie gewünscht.
- Man kann jedes $A \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$ in der Form $A = O_1 d O_2$ schreiben mit orthogonalen O_1, O_2 und diagonalem d. Transitivität von Bildmaßen (Lemma 3.12) und die Determinanten-Produktformel liefern die Behauptung. □

Insbesondere ist damit das Lebesgue–Maß unter Drehspiegelungen invariant.

3.6 Die Unlösbarkeit des Maßproblems

Das von Lebesgue 1902 formulierte *Maßproblem* besteht in folgender Aufgabe:

> Finde ein Maß $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \to [0, \infty]$, das translationsinvariant ist, und für das $\mu\left([0,1]^d\right) = 1$ ist.

Wir zeigen, dass dieses Problem unlösbar ist, indem wir einen Beweis von Vitali aufgreifen.

3.21 Satz (Vitali, 1905) *Die Familie $\mathcal{L}^d$ der Lebesgue–messbaren Mengen in $\mathbb{R}^d$ ist eine echte Teilmenge von $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$.*

Beweis:

- Die Relation $\sim$ auf $\mathbb{R}^d$ mit $x \sim y$, falls $x - y \in \mathbb{Q}^d$, ist eine Äquivalenzrelation.

  Nach dem Auswahlaxiom[5] der Mengenlehre gibt es eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^d$ von Vertretern der Aquivalenzklassen, d.h. für alle $x \in \mathbb{R}^d$ gibt es genau ein $y \in M$ mit $x \sim y$. Eine solche Menge M wird *Vitali–Menge* genannt.

[5]**Auswahlaxiom:** Zu jeder Menge A von nicht leeren Mengen $X \in A$ gibt es eine *Auswahlfunktion*: $F : A \to \bigcup_{X \in A} X$ mit $F(X) \in X$.

- Falls $M \in \mathcal{L}^d$, dann ist entweder $\lambda^d(M) = 0$ oder $\lambda^d(M) \in (0, \infty]$. Beides führt zum Widerspruch.
- Wäre nämlich $\lambda^d(M) = 0$, dann wäre wegen der Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}^d$ auch
$$\lambda^d(\mathbb{R}^d) = \lambda^d\left(\bigcup_{z \in \mathbb{Q}^d}(M+z)\right) = \sum_{z \in \mathbb{Q}^d} \lambda^d(M+z) = \sum_{z \in \mathbb{Q}^d} \lambda^d(M) = 0,$$
im Widerspruch zu $\lambda^d([0,1]^d) = 1$ und zur Monotonie von Maßen.
- Wäre dagegen $\lambda^d(M) > 0$, dann würde die Menge $M - M$ nach dem folgenden Satz von Steinhaus eine Umgebung der Null enthalten, also auch eine weitere rationale Zahl z. Es gäbe damit voneinander verschiedene $y_1, y_2 \in M$ mit $y_1 - y_2 \in \mathbb{Q}^d$, M wäre also kein Vertretersystem. $\square$

3.22 Satz (Steinhaus, 1920 (!)) *Ist $A \in \mathcal{L}^d$ und $\lambda^d(A) > 0$, so gibt es ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(0) \subseteq A - A$.*

Dieser Satz ist wichtig. Ich bitte Sie, seinen Beweis nachzulesen, z.B. in Elstrodt [El], Kapitel II.7.

Es ist auch so (und das ist der Maximalität der σ–Algebra $\mathcal{L}^d$ der Carathéodory–Konstruktion geschuldet), dass keine Fortsetzung des Lebesgue–Maßes auf die Potenzmenge $2^{(\mathbb{R}^d)}$ möglich ist (siehe Satz III 3.2 in [El]). Das Maßproblem ist eben unlösbar.

Allerdings ist die Verwendung des Auswahlaxioms (wie von Solovay 1970 gezeigt) im Beweis dieser Tatsache unverzichtbar. Ohne die Annahme des Auswahlaxioms wäre also die Behauptung $\mathcal{L}^d = \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ konsistent.

So berührt die Maßtheorie die Grundfesten der Mathematik.

3.23 Beispiel (Die Cantor–Menge) Analog zur Dezimalentwicklung reeller Zahlen kann jede Zahl $x \in [0,1]$ in der Form $x = \sum_{k=1}^\infty c_k 3^{-k}$ mit $c_k \in \{0,1,2\}$ dargestellt werden. Diese Darstellung ist nicht ganz eindeutig, denn $\sum_{k=n}^\infty 2{\cdot}3^{-k} = 3^{-n+1}$. Diese Uneindeutigkeit betrifft aber nur die Darstellung von abzählbar vielen x. Setzen wir
$$C_n := \left\{\sum_{k=1}^\infty c_k 3^{-k} \mid c_k \in \{0,1,2\}\ c_k \neq 1 \text{ für } k \leq n\right\} \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$
dann ist $C_0 = [0,1],\ C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right],\ C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$ etc., also $C_{n+1} \subseteq C_n,\ C_n$ abgeschlossen und $\lambda^1(C_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Damit ist das

Lebesgue–Maß der *Cantor–Menge*

$$C := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$$

definiert und $\lambda^1(C) = \lim_{n\to\infty} \lambda^1(C_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$.

Andererseits ist C ein Beispiel für eine Menge, die zwar nicht die Voraussetzung, wohl aber die Folgerung des zitierten Satzes von Steinhaus erfüllt. Denn

$$C = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} c_k 3^{-k} \mid c_k \in \{0,2\}\right\},$$

also $\frac{1}{2}(C+C) = \{\frac{1}{2}(x+y) \mid x,y \in C\} = \left\{\sum_{k=1}^{\infty}(b_k+c_k)3^{-k} \mid b_k, c_k \in \{0,1\}\right\}$ $= [0,1]$. Analog ist $C - C = [-1,1]$. Siehe auch Falconer [Fa]. ◇

4 Das Lebesgue–Integral

Da das Integral über eine nicht negative stetige Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+$ das Volumen unter ihren Graphen ist, ist Integrationstheorie wesentlich Maßtheorie. Für Funktionen, bei denen das Riemann–Integral und das jetzt zu definierende Lebesgue–Integral existieren, stimmen beide überein. Mit dem Lebesgue–Integral ist aber einfacher zu rechnen, was Vertauschen von Limiten und Integration etc. betrifft. Da Reihen nicht negativer Zahlen aber nach $+\infty$ divergieren können, betrachten wir einleitend

4.1 Numerische Funktionen

4.1 Definition *Die* **erweiterte Zahlengerade** $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, *mit Ordnungsstruktur von* $\mathbb{R}$*, erweitert um* $-\infty < x < +\infty$ $(x \in \mathbb{R})$*, besitze die folgenden Rechenregeln*

- $x + \infty := \infty + x := \infty \qquad (x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\})$
- $x - \infty := -\infty + x := -\infty \qquad (x \in \mathbb{R} \cap \{-\infty\})$
- $a \cdot (\pm\infty) := (\pm\infty) \cdot a = \begin{cases} \pm\infty & , \ a > 0 \\ \mp\infty & , \ a < 0 \\ 0 & , \ a = 0 \end{cases}$
- $\infty - \infty := 0$.

Die Topologie ist die der Metrik $d : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to [0,\infty)$, $d(x,y) = |\tanh x - \tanh y|$, mit $\tanh(\pm\infty) := \pm 1$. $\overline{\mathbb{R}}$ ist also ein kompakter Hausdorff–Raum. Dann ist die Borel–σ–Algebra $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ von der Form

$$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \big\{B \cup A \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ A \subseteq \{\pm\infty\}\big\}.$$

4.2 Definition • *Abbildungen* $F : M \to \overline{\mathbb{R}}$ *heißen* **numerische Funktionen***.*

• *Ist* $(M, \mathcal{A})$ *ein Messraum, dann heißt* $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ **messbar***, wenn* f $\big(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\big)$*–messbar ist.*

4.3 Satz *Für jede numerische Funktion* $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ *sind äquivalent:*

a) f *ist messbar*

b) $f^{-1}\big((a,\infty]\big) \in \mathcal{A} \qquad (a \in \mathbb{R})$

c) $f^{-1}\big([a,\infty]\big) \in \mathcal{A} \qquad (a \in \mathbb{R})$

d) $f^{-1}\big([-\infty,a)\big) \in \mathcal{A} \qquad (a \in \mathbb{R})$

e) $f^{-1}\big([-\infty,a]\big) \in \mathcal{A} \qquad (a \in \mathbb{R})$

Beweis: Dies folgt daraus, dass die durch $a \in \mathbb{R}$ parametrisierten Mengenfamilien Erzeuger von $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ sind.

Wir zeigen zunächst, dass b) – e) äquivalent sind. b) ist zu d) äquivalent und c) zu e), weil die σ–Algebra unter Komplementbildung abgeschlossen ist. Weiter folgt aus c) b) und analog aus d) e), denn $(c,\infty] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \big[c + \frac{1}{n}, \infty\big]$. Aufg.P16, Blatt 7

Nun wird die Äquivalenz von a) und c) bewiesen. Betrachte dazu die vom Mengensystem $\mathcal{M} := \{[c,\infty] \mid c \in \mathbb{R}\}$ erzeugte σ–Algebra. Wegen $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ ist $\sigma(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$.
Umgekehrt sind auch alle halboffenen endlichen Intervalle der Form $[c,d)$ mit $c,d \in \mathbb{R}$ in $\sigma(\mathcal{M})$ enthalten, denn $[c,d) = [c,\infty]\backslash[d,\infty]$. Damit ist $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \sigma(\mathcal{M})$ und wegen $\{+\infty\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}[n,\infty]$ und $\{-\infty\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}[-\infty,-n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mathbb{R}}\backslash[n,\infty]$ sogar $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \subseteq \sigma(\mathcal{M})$. □

In der Schreibweise für das Supremum und Infimum von Mengen reeller Zahlen wurde schon implizit $\overline{\mathbb{R}}$ verwendet. Ein Vorteil numerischer Funktionen ist, dass bei Supremums– und Infimumsbildung diese Klasse nicht verlassen wird.

4.4 Satz *Sind die numerischen Funktionen* $f_n : M \to \overline{\mathbb{R}}$ *messbar* $(n \in \mathbb{N})$*, dann sind auch* $\sup_n f_n,\ \inf_n f_n,\ \limsup_n f_n$ *und* $\liminf_n f_n$ *messbar.*

Aufg.15, Blatt 7

Beweis:

1. Für $f := \sup_n f_n$ und $A \in \mathbb{R}$ ist $f^{-1}\big((-\infty,a]\big) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}\big((-\infty,a]\big)$ als Schnitt messbarer Mengen messbar. Nach Satz 4.3 ist damit f messbar. Analog ist auch $\inf_n f_n$ messbar.

2. $\limsup_n f_n = \lim_{N\to\infty} \sup_{n\ge\mathbb{N}} f_n = \inf_{N\to\infty} \sup_{n\ge N} f_n$ ist nach Teil 1. Infimum der Folge $(\sup_{n\ge N} f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ messbarer Funktionen. Wieder nach Teil 1. ist dieses Infimum messbar. Der Fall $\liminf_n f_n$ ist wieder analog. □

4.5 Satz *Sind $f, f_1, f_2 : (M,\mathcal{A}) \to \big(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\big)$ messbar und $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, so sind auch αf, $f_1 + f_2$, $f_1 f_2$, $\max(f_1,f_2)$, $\min(f_1,f_2)$ und $|f|$ messbar.*

Beweis: Wir benutzen die Messbarkeitskriterien aus Satz 4.3.

1. αf ist messbar, denn für $\alpha \in (0,\infty)$ ist

$$(\alpha f)^{-1}\big([-\infty,c)\big) = (\alpha f)^{-1}\big([-\infty,c/\alpha)\big),$$

und die anderen Fälle sind analog.

2. Es sei $f := f_1 + f_2$. Wir zeigen für alle $c \in \mathbb{R}$, dass $M_c := f^{-1}([-\infty,c))$ messbar ist. Es

$$M_c = \bigcup_{s\in\mathbb{Q}} f_1^{-1}([-\infty,s)) \cap f_2^{-1}([-\infty,c-s)),$$

also eine abzählbare Vereinigung messbarer Mengen.

3. Jetzt ist $f := f_1 f_2$, und für $c > 0$

$$M_c = \bigcup_{s\in\mathbb{Q}^+} \left[(f_1^{-1}([0,s)) \cap f_2^{-1}\left(\left[-\infty,\tfrac{c}{s}\right)\right) \cup f_1^{-1}((-s,0]) \cap f_2^{-1}\left(\left(\tfrac{-c}{s},\infty\right]\right)\right].$$

Also ist M_c als abzählbare Vereinigung messbarer Mengen messbar. Die Fälle $c \le 0$ folgen analog.

4. Die Messbarkeit von $\max(f_1,f_2)$ folgt aus Satz 4.4 (mit $f_n = -\infty$ für $n > 2$).

5. Die Messbarkeit von $\min(f_1,f_2)$ folgt aus $\min(f_1,f_2) = \max(-f_1,-f_2)$.

6. Die Messbarkeit von $|f|$ folgt aus 4. und 1., denn $|f| = \max(f,-f)$. □ Aufg.15, Blatt 7

4.6 Satz *Für einen Messraum $(M,\mathcal{A})$ ist $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_d \end{pmatrix} : M \to \mathbb{R}^d$ genau dann $(\mathcal{A},\mathcal{B}^d)$–messbar, wenn die $f_k : M \to \mathbb{R}$ $(\mathcal{A},\mathcal{B})$–messbar sind.*

Beweis:

- Die Projektionen $\pi_k : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R},\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \mapsto x_k$ sind stetig, also $(\mathcal{B}^d, \mathcal{B})$–messbar. Daher ist mit f auch $f_k = \pi_k \circ f$ messbar.

- Da der Halbring $\mathcal{I}^d$ der halboffenen Intervalle des $\mathbb{R}^d$ die σ–Algebra $\mathcal{B}^d$ erzeugt, reicht es, die Messbarkeit von $f^{-1}\big((a, b]\big) \subseteq M$ für alle $a \leq b \in \mathbb{R}^d$ zu konstatieren. Diese folgt aber aus

$$f^{-1}\big((a, b]\big) = \bigcap_{k=1}^{d} f_k^{-1}\big((a_k, b_k]\big). \qquad \square$$

Komplexwertige Funktionen sind also genau dann messbar, wenn $\mathrm{Re}(f)$ und $\mathrm{Im}(f)$ messbar sind.

4.2 Treppenfunktionen und ihre Integrale

So wie die Theorie der Lebesgue–Maße mit Quadern als messbare Menge begann, fangen wir bei der Behandlung der Lebesgue–Integrale mit den Treppenfunktionen an. Da wir aber mehr Mengen messen können als in der *Mehrdimensionalen Integration*, ist auch deren Definition allgemeiner:

4.7 Definition *Eine messbare Funktion* $f : (M, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$*, die nur endlich viele Werte annimmt, heißt* **Treppenfunktion***.*

4.8 Bemerkungen a) Die Menge $\mathcal{T} \equiv \mathcal{T}(M, \mathcal{A})$ der Treppenfunktionen auf $(M, \mathcal{A})$ ist ein Unterraum des Vektorraums $\mathrm{Abb}(M, \mathbb{R})$.

b) Wir werden zunächst Integrale nicht negativer messbarer Funktionen definieren, indem wir sie von unten durch Treppenfunktionen aus

$$\mathcal{T}^+ \equiv \mathcal{T}^+(M, \mathcal{A}) := \{f \in \mathcal{T}(M, \mathcal{A}) \mid f \geq 0\}$$

approximieren. $\diamond$

Ist $f \in \mathcal{T}$ und $f(M) = \{a_1, \ldots, a_m\}$, dann ist $A_j := f^{-1}(a_j) \in \mathcal{A}$, und $f = \sum_{j=1}^m a_j 1\!\!1_{A_j}$. Diese Darstellung der Treppenfunktion hat den Vorteil, dass die A_j disjunkt sind.

Aber auch für nicht notwendig verschiedene a_j und nicht notwendig disjunkte messbare A_j ist $\sum_{j=1}^m a_j 1\!\!1_{A_j}$ eine Treppenfunktion.

4.9 Satz $f : M \to [0,\infty]$ *ist genau dann messbar, wenn es eine Folge* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *von* $u_n \in \mathcal{T}^+$ *gibt mit* $u_n \uparrow f$.

Beweis:

- Das Supremum messbarer Funktionen ist nach Satz 4.4 messbar.

- Ist umgekehrt $f : M \to [0,\infty]$ messbar, dann konstruieren wir eine monotone Folge von $u_n \in \mathcal{T}^+$ wie folgt. Wir quantisieren f, bei Wegschneiden großer Werte, indem wir für den Feinheitsparameter $n \in \mathbb{N}$ und die Indexmenge $I_n := \big\{0,\ldots,n2^n\big\}$ die folgenden Mengen definieren:

  $$A_{j,n} := \begin{cases} f^{-1}\big([j\,2^{-n},(j+1)2^{-n})\big) & , \quad j \in \{0,\ldots,n2^n-1\} \\ A_{n2^n,n} := f^{-1}([n,\infty]) & , \quad j = n2^n \end{cases} .$$

  - Wegen der Messbarkeit von f sind die $A_{j,n} \in \mathcal{A}$, d.h. messbar,
  - Als Urbilder disjunkter Intervalle sind die $(A_{j,n})_{j\in I_n}$ disjunkt,
  - und $\bigcup_{j\in I_n} A_{j,n} = M$.

  Wir setzen $u_n := \sum_{j\in I_n} \mathbb{1}_{A_{j,n}}$, ersetzen also jeweils durch den unteren Intervallwert. Damit ist $u_n \in \mathcal{T}^+$ und $u_n \le f$.

- Die Partition $\{A_{j,n+1} \mid j \in I_{n+1}\}$ verfeinert $\{A_{j,n} \mid j \in I_n\}$, es ist also

  $$u_{n+1} \ge u_n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

- Für $f(x) < \infty$ und $n \ge f(x)$ ist $u_n(x) \ge f(x) - 2^{-n}$, für $f(x) = \infty$ ist $u_n(x) = n$. Also folgt $u_n \uparrow f$. □

Es sei jetzt $(M,\mathcal{A},\mu)$ ein Maßraum, z.B. für das Lebesgue–Borel-Maß $\big(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}^d,\beta^d\big)$.

4.10 Definition *Für eine Treppenfunktion* $f = \sum_{j=1}^m a_j \mathbb{1}_{A_j} \in \mathcal{T}^+(M,\mathcal{A})$ *mit* $f(M) = \{\alpha_1,\ldots,\alpha_m\}$ *und* $A_j := f^{-1}(\alpha_j)$ *heißt*

$$\int_M f\,d\mu := \sum_{j=1}^m \alpha_j\,\mu(A_j)$$

das (μ–) **Integral von** f.

Das Praktische an dieser Definition ist, dass sie auch für andere Darstellungen $f = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \mathbb{1}_{B_k}$ mit nicht notwendig disjunkten, messbaren B_k funktioniert.

4.11 Lemma $\sum_{k=1}^{n} \beta_k\, \mu(B_k) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j\, \mu(A_j)$.

Beweis: B_k ist die disjunkte Vereinigung der $B_{k,j} := B_k \cap A_j$, also

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k\, \mu(B_k) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \beta_k\, \mu(B_{k,j}).$$

Für alle $j = 1, \ldots, m$ zerlegen die messbaren Mengen

$$C_{j,I} := \bigcap_{k \in I} B_{k,j} \quad \cap \bigcap_{k \in \{1,\ldots,n\} \setminus I} M \setminus B_{k,j} \qquad \big(I \subseteq \{1, \ldots, n\}\big)$$

die Menge A_j, und für $C_{j,I} \neq \emptyset$ ist $\sum_{k \in I} \beta_k = \alpha_j$. Also ist

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \beta_k \mu(B_{k,j}) &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\}} \left(\sum_{k \in I} \beta_k \right) \mu\left(C_{j,I}\right) \\ &= \sum_{j} \alpha_j \sum_{I} \mu(C_{j,I}) = \sum_{j} \alpha_j \mu(A_j). \end{aligned}$$

□

Zwar ist $\mathcal{T}^+$ im Gegensatz zu $\mathcal{T}$ kein Vektorraum. Wir können also noch nicht sagen, dass diese Integral eine lineare Abbildung sei, aber jedenfalls verletzt unsere Abbildung $\int_M \cdot\, d\mu : \mathcal{T}^+ \to [0, \infty]$ bis auf die Möglichkeit des Wertes Unendlich keine der Desiderata eines Integrals, also Reproduktion des Maßes, Linearität und Monotonie:

- $\int_M \mathbb{1}_A \, d\mu = \mu(A) \qquad (A \in \mathcal{A})$
- $\int_M (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha \int_M f \, d\mu + \beta \int_M g \, d\mu \qquad (\alpha, \beta \geq 0,\ f, g \in \mathcal{T}^+)$
- $\int_M f \, d\mu \leq \int_M g \, d\mu \qquad (f \leq g \in \mathcal{T}^+)$

Bis jetzt haben wir nur die endliche Additivität von μ genutzt. Um messbare Funktionen zu integrieren, brauchen wir die σ–Additivität:

4.3 Integration messbarer Funktionen

Für den Messraum $(M, \mathcal{A})$ bezeichnen wir mit $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}(M, \mathcal{A})$ die Menge der messbaren numerischen Funktionen $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ und setzen

$$\mathcal{M}^+ \equiv \mathcal{M}^+(M, \mathcal{A}) := \{f \in \mathcal{M}(M, \mathcal{A}) \mid f \geq 0\}.$$

Ist $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ein Maß, dann definieren wir für $f \in \mathcal{M}^+$

$$\int_M f\, d\mu := \lim_{n\to\infty} \int_M u_n\, d\mu, \tag{14}$$

für eine Folge von $u_n \in \mathcal{T}^+$ mit $u_n \uparrow f$.

Nach Satz 4.9 gibt es überhaupt so eine Folge von u_n, und wegen der Monotonie des Integrals $\int_M : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ existiert auch der Limes in $[0, \infty]$. Wir müssen noch überprüfen, ob dieser Limes von der Wahl der Folge abhängt.

4.12 Satz *Für jede monoton wachsende Folge von $u_n \in \mathcal{T}^+$ und $v \in \mathcal{T}^+$ mit $v \leq u := \lim_{n\to\infty} u_n$ gilt $\int_M v\, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_M u_n\, d\mu$.*

Beweis: Sei $v = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}$ mit $A_j \in \mathcal{A}$ disjunkt. Für $\beta > 1$ setze

$$B_n := \{x \in M \mid \beta\, u_n(x) \geq v(x)\} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Diese Mengen sind messbar, und $B_n \uparrow M$. Da das Maß μ von unten stetig ist, gilt

$$\begin{aligned}
\int_M v\, d\mu &= \sum_{j=1}^m \alpha_j\, \mu(A_j) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^m \alpha_j\, \mu(A_j \cap B_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_M v\, \mathbb{1}_{B_n}\, d\mu \leq \beta \lim_{n\to\infty} \int_M u_n\, d\mu \qquad (\beta > 1).
\end{aligned}$$

Im Limes $\beta \searrow 1$ ergibt sich die Behauptung. □

4.13 Bemerkungen 1. Dieser Satz impliziert, dass das Integral von $f \in \mathcal{M}^+$ wohldefiniert ist, denn für eine zweite f monoton approximierende Folge von Treppenfunktionen $v_k \in \mathcal{T}^+$ ist $v_k \leq \lim_{n\to\infty} u_n$, also $\int_M v_k\, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_M u_n\, d\mu$.

2. Monotonie und Linearität (bei Multiplikation mit positiven Zahlen) übertragen sich von $\mathcal{T}^+$ auf $\mathcal{M}^+$. ◇

4.14 Satz *Für $f \in \mathcal{M}^+$ gilt $\int_M f\, d\mu = 0$ genau dann, wenn*

$$\mu\big(f^{-1}\big((0,\infty]\big)\big) = 0.$$

Beweis:

- Für $A := f^{-1}\big((0,\infty]\big),\ A_n := f^{-1}\left(\left(\frac{1}{n},\infty\right]\right)$ gilt $A_n \uparrow A$.
- Ist $\int_M f\, d\mu = 0$, denn wegen $\frac{1}{n}\mathbb{1}_{A_n} \le f$ auch $\int_M \mathbb{1}_{A_n}\, d\mu = 0$ $(n \in \mathbb{N})$. Die Stetigkeit des Maßes von unten impliziert dann $\mu(A) = 0$.
- Ist $\mu(A) = 0$, dann ist wegen $\infty\, \mathbb{1}_A \ge f$

$$0 \le \int_M f\, d\mu \le \infty \int_M \mathbb{1}_A\, d\mu = \infty\, \mu(A) = 0. \qquad \square$$

Unter bestimmten Bedingungen kann man den Limes in das Integral hineinziehen. Das haben wir schon bei der Definition von $\int_M f\, d\mu$ von $f \in \mathcal{M}^+$ mit $u_n \uparrow f$ gesehen, also unter Monotonievoraussetzung. Die Monotonievoraussetzung ist tatsächlich verallgemeinerbar, weshalb der folgende Satz auch *Satz von der monotonen Konvergenz* heißt.

4.15 Satz (Beppo Levi) *Für $f_n \in \mathcal{M}^+,\ f_n \uparrow f$ gilt*

$$\int_M f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_M f_n\, d\mu. \tag{15}$$

Beweis:

- Der Limes f liegt nach Satz 4.4 in $\mathcal{M}^+$, denn $\lim_{n\to\infty} f_n = \sup_{n\to\infty} f_n$.
- Wegen der Monotonie des Integrals ist $\int_M f\, d\mu \ge \int_M f_n\, d\mu$, also gilt die Ungleichung "$\ge$" in (15).
- Ist $u \in \mathcal{T}^+,\ u \le f$, dann sind für $\beta > 1$ die $B_n := \{x \in M \mid \beta f_n(x) \ge u(x)\}$ messbar, mit $B_n \uparrow M$ und $\beta f_n \ge u\mathbb{1}_{B_n} \in \mathcal{T}^+$ und $u\mathbb{1}_{B_n} \uparrow u$. Es folgt

$$\int_M u\, d\mu \le \lim_{n\to\infty} \int_M u\mathbb{1}_{B_n}\, d\mu \le \beta \lim_{n\to\infty} \int_M f_n\, d\mu\ ;$$

  also $\int_M u\, d\mu \le \lim_{n\to\infty} \int_M f_n\, d\mu$. Daraus folgt wegen der Definition (14) von $\int_M f\, d\mu$ die umgekehrte Ungleichung in (15). $\square$

Gegenbeispiel bei Verletzung der Monotoniebedingung:
Für $f_n \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}, \mathcal{L}^1)$, $f_n := \frac{1}{n}\mathbb{1}_{[0,n]}$ gilt $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$, aber $\int f_n \, d\lambda^1(x) = 1$.

4.16 Definition *Sei $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ ein Maß auf $(M,\mathcal{A})$ und $f \in \mathcal{M}^+$. Dann heißt*

$$f\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty] \quad , \quad A \mapsto \int_M f\, \mathbb{1}_A \, d\mu$$

das Maß mit **Dichte** f **in Bezug auf** μ.

4.17 Lemma *Die Mengenfunktion $f\mu$ ist tatsächlich ein Maß.*

Beweis: Für disjunkte $A_k \in \mathcal{A}$ und $A := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ ist nach Satz 4.15

$$f\mu(A) = \int_M f\, \mathbb{1}_A \, d\mu = \int_M \sum_{k\in\mathbb{N}} f\, \mathbb{1}_{A_k} \, d\mu = \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_M f\, \mathbb{1}_{A_k} \, d\mu = \sum_{k\in\mathbb{N}} f\mu(A_k),$$

denn $g_n := \sum_{k=1}^n f\, \mathbb{1}_{A_k} \in \mathcal{M}^+$, und $g_n \uparrow f\, \mathbb{1}_A$. □

Bis jetzt können wir nur nicht negative messbare Funktionen integrieren.

Da wir aber messbare Funktionen $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ eindeutig als Differenz ihrer Positiv– und Negativteile

$$f_\pm : M \to [0,\infty] \quad , \quad f_\pm(x) := \max\big(\pm f(x), 0\big) \tag{16}$$

darstellen können, setzen wir

$$\int_M f \, d\mu := \int_M f_+ \, d\mu - \int_M f_- \, d\mu \ ,$$

falls beide Integrale endlich sind.

Ist also f genau dann integrierbar, wenn $|f| = f_+ + f_-$ integrierbar ist? Nicht ganz. Denn wie das Beispiel von $f = \mathbb{1}_V - \mathbb{1}_{[0,1]\setminus V}$ mit einer Vitali–Menge $V \subseteq [0,1]$ zeigt, kann $|f|$ messbar sein, ohne dass das für f gilt. Also:

4.18 Satz *$f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann integrierbar, wenn f messbar und $|f|$ integrierbar.*

In ähnlicher Weise definieren wir das Integral von $f : M \to \mathbb{C}$ als

$$\int_M f \, d\mu := \int_M \mathrm{Re}(f) \, d\mu + i \int_M \mathrm{Im}(f) \, d\mu \ , \tag{17}$$

soweit beide Summanden definiert sind. Wir nennen f dann **integrierbar**. Damit wird der Raum

$$\mathscr{L}^1(\mu) := \mathscr{L}^1(M, \mathcal{A}, \mu) := \{f : M \to \mathbb{C} \mid f \text{ integrierbar}\} \qquad (18)$$

zu einem Vektorraum über $\mathbb{C}$, und

$$\mathscr{L}^1(\mu) \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad f \longmapsto \int_M f \, d\mu$$

eine lineare Abbildung. Die Idee bei der Kurzschreibweise $\mathscr{L}^1(\mu)$ ist, dass zur Definition von μ sowieso der Maßraum $(M, \mathcal{A})$ angegeben werden muss.

$$\|f\| := \int_M |f| \, d\mu \qquad \big(f \in \mathscr{L}^1(\mu)\big)$$

ist eine *Halbnorm* auf $\mathscr{L}^1(\mu)$, d.h. für alle $f, g \in \mathscr{L}^1(\mu)$ ist

1. $\|f\| \in [0, \infty)$
2. $\|kf\| = |k| \, \|f\|$ für $k \in \mathbb{C}$
3. $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$

(da $|f+g| \leq |f|+|g|$ und das Integral linear ist). Eine solche Halbnorm definiert eine Topologie des Vektorraums $\mathscr{L}^1(\mu)$.

Will man explizit nur reelle Funktionen integrieren, dann schreibt man

$$\mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu) := \{f : M \to \mathbb{R} \mid f \in \mathscr{L}^1(\mu)\}.$$

Dies ist dann ein $\mathbb{R}$–Vektorraum.

Natürlich sind nicht alle stetigen Funktionen integrierbar. Ein Gegenbeispiel ist die charakteristische Funktion $\mathbb{1}_M$, falls μ kein endliches Maß ist. Immerhin gilt für den Fall des Lebesgue–Maßes:

4.19 Satz *Für den Raum der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger gilt:*

$$C_c\left(\mathbb{R}^d\right) \subseteq \mathscr{L}^1\left(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}^d, \lambda^d\right).$$

Beweis: Nach Definition von $C_c\left(\mathbb{R}^d\right)$ ist für $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ $\operatorname{supp}(f)$ kompakt. Mit f ist auch $|f|$ stetig, und $\operatorname{supp}(f) = \operatorname{supp}(|f|)$. Also ist $c := \sup |f| < \infty$, f ist messbar, und $|f|$ ist eine integrierbare Majorante, denn $|f|$ hat $c \, \mathbb{1}_{\operatorname{supp}(f)}$ zur integrierbaren Majorante. $\square$

Man könnte nun denken, dass diese stetigen Funktionen mit kompaktem Träger sehr untypisch für Lebesgue–integrierbare Funktionen sind. Wenn wir sie als Funktionen auffassen, dann ist das wohl der Fall, denn typischerweise ist etwa $f \in \mathscr{L}^1(\lambda^d)$ an keinem Punkt stetig. Allerdings gilt:

4.20 Satz $C_c(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}^d, \lambda^d)$ *ist ein dichter Teilraum, d.h. für alle* $f \in \mathscr{L}^1(\lambda^d)$ *gibt es eine Folge von* $f_n \in C_c(\mathbb{R}^d)$ *mit*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0.$$

Beweis: Elstrodt [El], Satz 3.12. $\square$

4.4 Konvergenzsätze

Mit dem Satz 4.15 über monotone Konvergenz (Beppo Levi) haben wir einen Konvergenzsatz der Maß– und Integrationstheorie kennen gelernt. Die Voraussetzung dieses Satzes, das monotone Wachstum der $f_n : M \to [0, \infty)$ ist allerdings oft nicht erfüllt. Einen noch häufiger anwendbaren Satz, den von Lebesgue über dominierte Konvergenz, werden wir jetzt kennen lernen. Wie das folgende Lemma von Fatou benutzt sein Beweis den Satz von Beppo Levi.

4.21 Satz (Lemma von Fatou) *Für* $f_n \in \mathcal{M}^+$ $(n \in \mathbb{N})$ *gilt:*

$$\int_M \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \;\leq\; \liminf_{n\to\infty} \int_M f_n \, d\mu$$

Beweis: Wir benutzen die monoton wachsende Folge der $g_n := \inf_{k\geq n} f_k \in \mathcal{M}^+$. Für diese ist $g_n \uparrow f := \liminf_{k\to\infty} f_k \in \mathcal{M}^+$, also nach Beppo Levi

$$\int_M f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_M g_n \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} \int f_k \, d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_M f_n \, d\mu. \qquad \square$$

Intuitiv erwartet man auch, dass die linke Seite im Fatou-Lemma 4.21 eher kleiner ist als die rechte, weil dort über alle Punkte einzeln optimiert wird.

Beim folgenden Satz von Lebesgue ist bemerkenswert, dass wir auf die Positivität der f_n verzichten können.

4.22 Satz über majorisierte Konvergenz (Lebesgue, 1910) *Für die* $f_n \in \mathscr{L}^1(\mu)$ *gebe es ein* $F \in \mathscr{L}^1(\mu)$ *mit* $|f_n| \leq F$ $(n \in \mathbb{N})$. *Weiter existiere der punktweise Limes* f *der* f_n. *Dann ist* $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$ *und*

$$\lim_{n\to\infty} \int_M f_n \, d\mu = \int_M f \, d\mu \ .$$

Beweis:

- Man würde gern das Lemma von Fatou (Satz 4.21) anwenden. Setzt man versuchsweise $g_n := |f - f_n|$, dann kommt allerdings die triviale Ungleichung $\liminf_n \int g_n \, d\mu \geq 0$ heraus. Umdrehen des Vorzeichens von g_n hilft auch nicht, denn dann wäre g_n nicht in $\mathcal{M}^+$.
- Statt dessen setzt man $g_n := |f| + F - |f - f_n|$, womit $g_n \in \mathcal{M}^+$ ist.
- Fatou liefert mit $\liminf_{n\to\infty} g_n = |f| + F$:

  $$\int_M (|f| + F) \, d\mu \leq \int_M (|f| + F) \, d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_M |f - f_n| \, d\mu \ ,$$

  also $\mathscr{L}^1$–Konvergenz der f_n gegen f. □

4.23 Beispiel (Ungleichung im Lemma von Fatou) Für die Funktionenfolge $f_n : \mathbb{R} \to [0, \infty], \ f_n = n\mathbb{1}_{\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]}$ ist $\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda^1 = 2 \quad (n \in \mathbb{N})$, aber

$$f := \liminf_{n\to\infty} f_n \quad \text{von der Form} \quad f(x) = \begin{cases} \infty & , x = 0 \\ 0 & , x \neq 0 \end{cases} ,$$

also die linke Seite der Fatou-Ungleichung $\int f d\lambda^1 = 0$. Der Satz von Lebesgue ist hier nicht anwendbar. Denn falls g eine Majorante ist, muss diese größer sein als $\sup_n f_n$, und diese Funktion ist ihrerseits größer als die nicht integrierbare Funktion $\tilde{g}(x) := 1/|x| - 1$ für $0 < |x| \leq 1$ und Null sonst. ◇

Statt Werten in $\mathbb{C}$ könnten die f_n auch Werte in $\overline{\mathbb{R}}$ annehmen. Denn wir wissen schon, dass dann $f_n^{-1}(\pm\infty)$ μ–Nullmengen sind.

Anwendungen des Satzes von Lebesgue gibt es wie Sand am Meer.

Insbesondere können wir diverse Grenzprozesse mit der Integration vertauschen:

Eine natürliche Art, Stetigkeit von parameterabhängigen Funktionen im Parameter zu diskutieren, ist, den Parameterraum als metrischen Raum (P,d) anzusetzen und Familien von Abbildungen $f_p \in \mathscr{L}^1(\mu)$ zu betrachten, die für μ–fast alle $m \in M$ stetige Abbildungen

$$P \to \mathbb{C} \quad , \quad p \mapsto f_p(m)$$

ergeben. Dann gilt folgende Aussage:

4.24 Satz (Parameterabhängige Integrale) *Falls auf einer Umgebung $U \subseteq P$ von $p_0 \in P$ für eine geeignete integrierbare Funktion $g \in \mathcal{M}^+,\ g \in \mathscr{L}^1(\mu)$ gilt*

$$|f_p| \leq g \qquad (p \in U)\ ,$$

dann ist das parameterabhängige Integral

$$F : P \to \mathbb{C} \quad , \quad p \mapsto \int_M f_p \, d\mu \tag{19}$$

stetig in p_0.

Beweis: Für alle gegen p_0 konvergierenden Folgen $p : \mathbb{N} \to P$ muss gezeigt werden: $\lim_{n\to\infty} F(p_n) = F(p_0)$. Wir haben die μ–fast überall geltende punktweise Konvergenz der f_{p_n} gegen f_{p_0} vorausgesetzt. Die f_{p_n} werden durch g dominiert; also liefert der Satz von Lebesgue die Aussage. $\square$

Dieser Satz lässt sich in mehrere Richtungen verallgemeinern. Z.B. ist auch die Abbildung

$$P \to \mathscr{L}^1(\mu) \quad , \quad p \mapsto f_p$$

stetig bezüglich der $\|\cdot\|_1$–Halbnorm. Voraussetzungslos gilt er jedoch nicht:

4.25 Beispiel Parameterraum $P := \mathbb{R}$, Maßraum $(M,\mu) := (\mathbb{R}, \lambda^1)$ mit Integranden

$$f_p(x) := \begin{cases} 0 & , p = 0 \\ \exp\left(-\left(x - \frac{1}{p}\right)^2\right) & , p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Hier ist zwar für alle $x \in \mathbb{R}$ $\ p \mapsto f_p(x)$ stetig und $f_p \in \mathscr{L}^1(\lambda^1)$, aber es gibt kein dominierendes $g \in \mathscr{L}^1(\lambda^1)$, und die Abbildung (19) ist unstetig bei $p = 0$, denn: $F(0) = 0$, aber $F(p) = \sqrt{\pi}$ für alle $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. $\diamond$

4.26 Beispiel (Fourier–Transformation) Durch

$$\hat{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} \quad , \quad \hat{f}(k) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \exp(-i \langle k, x \rangle) \, dx$$

ist die *Fourier–Transformierte* von $f \in \mathscr{L}^1(\lambda^d)$ definiert. Da $x \mapsto \exp(-i \langle k, x \rangle)$ stetig ist und Betrag Eins hat, existiert das Integral, und $|\hat{f}(k)| \leq \|f\|$ $(k \in \mathbb{R}^d)$.

Darüber hinaus ist $\hat{f}$ sogar stetig, weil die Bedingungen von Satz 4.24 erfüllt sind. $\diamond$

Ähnlich leicht stellt man fest, dass man unter Umständen die Ableitung nach dem Parameter mit der Integration vertauschen kann: Wir nehmen dabei einfachheitshalber an, dass wir nur einen reellen Parameter haben, P also ein reelles Intervall ist.

Wieder gelte für die $f_p : M \to \mathbb{C} : f_p \in \mathscr{L}^1(\mu)$ $(p \in P)$, und die partielle Ableitung $\frac{\partial f_p}{\partial p}(m)$ existiere bei $p_0 \in P$ für alle $m \in M$.

4.27 Satz (Differentiation unter dem Integral) *Falls eine Umgebung $U \subseteq P$ von p_0 und ein $g \in \mathscr{L}^1(\mu)$ existiert, sodass die $g_p := \frac{f_p - f_{p_0}}{p - p_0}$ auf $U \backslash \{p_0\}$ durch g dominiert werden ($|g_p| \leq g$), dann ist die Abbildung (19) bei p_0 differenzierbar mit*

$$F'(p_0) = \int_M \frac{\partial f_p}{\partial p}\Big|_{p=p_0}(m) \, d\mu(m).$$

Beweis: Für eine beliebige gegen p_0 konvergierende Folge $p : \mathbb{N} \to P$ mit $p_n \neq p_0$ muss gezeigt werden:

$$\lim_{n\to\infty} \int_M g_{p_n} \, d\mu = \int_M \lim_{n\to\infty} g_{p_n} \, d\mu \,, \tag{20}$$

denn $\lim_{n\to\infty} g_{p_n} = \frac{\partial f_p}{\partial p}\big|_{p=p_0}$, und $F'(p_0) = \lim_{n\to\infty} \int_M g_{p_n} \, d\mu$, falls der Limes existiert. Gleichung (20) ist aber die Aussage des Satzes von Lebesgue. $\square$

5 Produktmaße und Mehrfachintegrale

5.1 Produkt–σ–Algebren und Produktmaße

5.1 Definition *Es seien $(X_i, \mathcal{A}_i)_{i\in I}$ Messräume, $X := \prod_{i\in I} X_i$ das kartesische Produkt und $\pi_j : X \to X_j$, $(x_i)_{i\in I} \mapsto x_j$ $(j \in I)$ die Projektionen auf dessen Faktoren. Dann ist*

$$\bigotimes_{i\in I} \mathcal{A}_i := \sigma\left(\bigcup_{i\in I} \pi_i^{-1}(\mathcal{A}_i)\right) \tag{21}$$

die **Produkt–σ–Algebra** *auf X.*

Die Produkt–σ–Algebra ist damit die kleinste σ–Algebra auf X, bezüglich derer alle Projektionsabbildungen messbar sind.

Da σ–Algebren oft unhandlicher als sie erzeugende Mengensysteme (wie etwa der Halbring $\mathcal{I}^d$ der Intervalle statt der Borel-σ–Algebra $\mathcal{B}^d = \sigma(\mathcal{I}^d)$) sind, ist der folgende Satz nützlich:

5.2 Satz *Sind $\mathcal{E}_i$ Erzeuger der σ–Algebren $\mathcal{A}_i$, dann wird $\sigma\left(\bigcup_{i\in I}\pi_i^{-1}(\mathcal{A}_i)\right)$ von $\bigcup_{i\in I}\pi_i^{-1}(\mathcal{E}_i)$ erzeugt.*

Beweis: • Dass die Produkt–σ–Algebra (21) die σ–Algebra $\sigma\left(\bigcup_{i\in I}\pi_i^{-1}(\mathcal{E}_i)\right)$ enthält, folgt aus $\mathcal{E}_i \subseteq \mathcal{A}_i$.
• Umgekehrt besagt Satz 3.13, angewendet auf die Projektion $\pi_j : X \to X_j$, dass diese messbar bezüglich $\sigma\left(\bigcup_{i\in I}\pi_i^{-1}(\mathcal{E}_i)\right)$ ist (also $\pi_j^{-1}(\mathcal{A}_j)$ Teilmenge dieser σ–Algebra ist), weil $\pi_j^{-1}(\mathcal{E}_j) \subseteq \sigma\left(\bigcup_{i\in I}\pi_i^{-1}(\mathcal{E}_i)\right)$ gilt. □

Das Produkt endlich vieler σ–Algebren $\mathcal{A}_1,\ldots,\mathcal{A}_n$ schreibt man auch in der Form

$$\mathcal{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}_n := \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i.$$

Wegen Satz 5.2 ist das Produkt assoziativ. Zum Beispiel ist

$$(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \otimes \mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_1 \otimes (\mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3),$$

und wir können statt endlicher Produkte ohne Verlust das Produkt nur zweier σ–Algebren diskutieren. Mit dem in (1) eingeführten Produkt $*$ von Halbringen ist dann

$$\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 = \sigma(\mathcal{A}_1 * \mathcal{A}_2).$$

5.3 Bemerkung (σ–Algebren des $\mathbb{R}^d$) Produkte tauchen im Zusammenhang des Lebesgue–Maßes $\lambda^d : \mathcal{L}^d \to [0,\infty]$ (siehe (12)) und Lebesgue–Borel–Maßes $\beta^d = \lambda^d\restriction_{\mathcal{B}^d} : \mathcal{B}^d \to [0,\infty]$ auf dem $\mathbb{R}^d$ auf. Dieser lässt sich ja für alle $p = 1,\ldots,d-1$ als Produktraum $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{d-p}$ auffassen, und es stellt sich die Frage, ob die σ–Algebren diese Produktstuktur respektieren. Tatsächlich gilt für die Borel–σ–Algebren $\mathcal{B}^d = \mathcal{B}^p \otimes \mathcal{B}^{d-p}$ (siehe [El], III,§5), aber $\mathcal{L}^d \supsetneq \mathcal{L}^p \otimes \mathcal{L}^{d-p}$. ◇

Abbildung 5: Schnitt von einer Kreisscheibe

5.4 Definition *Ein Maß* $\mu : \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \to [0, \infty]$ *heißt* **Produktmaß** *der Maße* $\mu_i : \mathcal{A}_i \to [0, \infty]$*, wenn gilt*

$$\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\, \mu_2(A_2) \qquad (A_1 \in \mathcal{A}_1,\, A_2 \in \mathcal{A}_2). \tag{22}$$

5.5 Satz *Es gibt ein solches Produktmaß. Falls die Maße* μ_i σ*–endlich sind, ist dieses eindeutig. Es wird dann mit* $\mu_1 \otimes \mu_2$ *bezeichnet.*

Beweis: • Wir zeigen, dass die rechte Seite von (22) ein Prämaß $\tilde{\mu}$ auf dem Halbring $\mathcal{A}_1 * \mathcal{A}_2$ definiert.
• Nach dem Fortsetzungssatz 3.7 gibt es dann ein $\tilde{\mu}$ fortsetzendes Maß auf der von diesem Halbring erzeugten σ–Algebra $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$.
• Sind die Maße μ_i σ–endlich, dann auch das Prämaß $\tilde{\mu}$. Nach Korollar 3.18 ist dann das Produktmaß eindeutig. □

Man möchte aber nicht nur die eindeutige Existenz des Produktmaßes zur Kenntnis nehmen, sondern mit ihm auch messen. Dafür ist die Technik der Schnitte praktisch.

5.6 Definition *Für zwei Mengen* X_1, X_2*,* $A \subseteq X_1 \times X_2$ *und* $x_1 \in X_1$ *heißt*

$$A(x_1) := \{x_2 \in X_2 \mid (x_1, x_2) \in A\} \;\subseteq\; X_2$$

x_1–**Schnitt** *von* A *(siehe Abbildung 5).*

Damit kann das Produktmaß von $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ mittels der *Cavalieri–Formel*

$$\mu_1 \otimes \mu_2(A) = \int_{X_1} \mu_2\big(A(x_1)\big)\, d\mu_1(x_1) \tag{23}$$

bestimmt werden. Diese ist zunächst für messbare Mengen A der Form $A_1 \times A_2 \in \mathcal{A}_1 * \mathcal{A}_2$ richtig, denn dann ist $A(x_1) = A_2$ falls $x_1 \in A_1$ und $A(x_1) = \emptyset$ sonst, also

$$\mu_1 \otimes \mu_2(A) = \mu_2(A_2) \int_{X_1} 1\!\!1_{A_1}(x_1)\, d\mu_1(x_1) = \mu_1(A_1)\, \mu_2(A_2). \tag{24}$$

Allgemein gilt:

5.7 Satz *Für σ–endliche Maße μ_i stimmt die Cavalieri–Formel (23).*

Beweis: • Es muss zunächst gezeigt werden, dass die Schnitte $A(x_1)$ messbar sind, also Elemente der σ–Algebra $\mathcal{A}_2$ von X_2 sind. Das folgt daraus, dass die Familie derjenigen $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, für die das immer gilt, selbst eine σ–Algebra bildet. Denn diese enthält ja nach (24) $\mathcal{A}_1 * \mathcal{A}_2$, ist dann also gleich $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$.
• Der nächste Schritt besteht darin, die Meßbarkeit der Abbildungen

$$f_A : X_1 \to [0,\infty] \quad , \quad x_1 \mapsto \mu_2\big(A(x_1)\big) \qquad (A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$$

nachzuweisen. Jedenfalls gilt dies wieder für $A \in \mathcal{A}_1 * \mathcal{A}_2$. Es reicht also wieder zu zeigen, dass diese A eine σ–Algebra bilden. Hier geht die σ–Endlichkeit von μ_2 ein (siehe Lemma 23.2 in [Ba]).
• Die Cavalieri-Formel folgt dann mit dem Eindeutigkeitssatz 3.15, angewandt auf den durchschnittsstabilen Erzeuger $\mathcal{A}_1 * \mathcal{A}_2$ von $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. □

5.8 Beispiel (Maß der Kreisscheibe) Wir betrachten $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i) := (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \beta)$ und die Kreisscheibe $A := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \le 1\} \subseteq X_1 \times X_2$. Deren Lebesgue–Borel–Maß ist nach der Cavalieri–Formel (siehe Abbildung 5)

$$\beta^2(A) = \int_{\mathbb{R}} \beta\big(A(x_1)\big)\, dx_1 = \int_{-1}^{1} 2\sqrt{1 - x_1^2}\, dx_1 = \pi. \qquad \diamond$$

5.9 Bemerkung (Produktmaße und Wahrscheinlichkeitstheorie) Unendliche Produktmaße können im Allgemeinen nicht sinnvoll definiert werden, da ja schon für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positiver Zahlen das Produkt $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ nicht einmal uneigentlich konvergieren muss. Das ist aber für Folgen mit $a_n \in [0,1]$ der Fall. Entsprechend existieren Produktmaße von Wahrscheinlichkeitsmaßen, und sie sind wichtig für so genannte *stochastische Prozesse* (siehe Klenke [Kl]). $\diamond$

5.2 Der Satz von Fubini

Der folgende Satz wird oft auch nach Tonelli benannt:

5.10 Satz (Fubini) *Es seien* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *und* $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ*–endliche Maßräume. Dann gilt:*

a) Für alle $f \in \mathcal{M}^+(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ *sind die numerischen Funktionen*

$$x \mapsto \int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \quad \text{und} \quad y \mapsto \int_X f(x,y)\, d\mu(x)$$

messbar, und $\int_{X \times Y} f \, d\mu \otimes d\nu = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x)$.

b) Ist $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$*–messbar und eines der drei Intgrale*

$$\int_{X\times Y} |f|\, d\mu \otimes d\nu, \ \int_X \Big(\int_Y |f(x,y)| d\nu(y)\Big) d\mu(x), \ \int_Y \Big(\int_X |f(x,y)| d\mu(x)\Big) d\nu(y)$$

endlich, dann sind alle drei gleich, und das gilt dann auch für f *statt* $|f|$.

Beweis: • Der Satz reduziert sich für charakteristische Funktionen $f = 1\!\!1_A$ messbarer Mengen $A \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ auf die Cavalieri–Formel, also auf Satz 5.7.
• Damit gilt er auch für alle Treppenfunktionen $f \in \mathcal{T}^+(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$.
• $f \in \mathcal{M}^+(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ kann man durch eine monotone Folge von Treppenfunktionen approximieren, weshalb a) gilt.
• Aussage b) beweist man durch Zerlegung von f in Real– und Imaginärteil und weiter in Positiv– und Negativteile. □

Die Endlichkeitsvoraussetzung in b) kann man nicht wegfallen lassen:

5.11 Beispiel (Cauchy) Die Ableitung des Arcustangens ist[6] $\frac{d}{dz} \arctan z = \frac{1}{1+z^2}$. Damit gilt für $x, y > 0$:

$\frac{\partial}{\partial y} \arctan\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{-x/y^2}{1+x^2/y^2} = \frac{-x}{x^2+y^2}$ und $\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} \arctan\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{2x^2-(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$.

Also ist

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dx \right) dy &= \int_0^1 \frac{-x}{x^2+y^2}\Big|_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^1 \frac{-1}{1+y^2}\, dy \\ &= \arctan(0) - \arctan(1) = -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

[6]denn er ist Umkehrfunktion des Tangens mit Ableitung $\tan'(u) = \frac{1}{\cos^2(u)} = 1 + \tan^2(u)$.

und analog $\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy\right)\,dx = \frac{\pi}{4}$, denn der Integrand wechselt beim Austausch von x und y sein Vorzeichen. Das Ergebnis des Doppelintegrals hängt also von der Integrationsreihenfolge ab. Woran liegt das? Wir würden vielleicht erwarten, dass das Doppelintegral gleich dem Lebesgue–Integral

$$\int_Q \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,d\lambda^2(x,y) \qquad \text{mit dem Quadrat } Q := [0,1]^2$$

ist. Aber dieses existiert nicht, denn der Integrand ist nicht in $\mathscr{L}^1(Q, \lambda^2\restriction_Q)$.

Mit dem Satz von Fubini hätten wir nicht argumentieren können, denn das Doppelintegral (in beliebiger Reihenfolge) des Betrags von f divergiert:

$$\begin{aligned}\int_Q |f(x,y)|\,d\lambda^2(x,y) &= 2\int_0^1 \left(\int_y^1 f(x,y)\,dx\right) dy = 2\int_0^1 \left[\frac{-x}{x^2+y^2}\right]_y^1 dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{-2}{1+y^2}+\frac{1}{y}\right) dy = \infty. \end{aligned} \qquad \diamond$$

Jetzt werden wir die praktischen Konsequenzen des Satzes 5.10 von Fubini betrachten. Oft handelt es sich bei den Integralen um Lebesgue–Integrale, und da (im wesentlichen, siehe Bemerkung 5.3)

$$\lambda^d \;=\; \lambda^p \otimes \lambda^{d-p} \quad \text{für alle} \quad p = 1,\ldots,d-1\ ,$$

gibt er uns eine Vorschrift an die Hand, wie wir mehr– auf eindimensionale Integrale zurückführen und damit berechnen können.

5.12 Beispiele 1. Auf dem Würfel $W^{(3)}$ mit $W^{(n)} := \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]^n \subseteq \mathbb{R}^n$ soll $f(x) = \cos(x_1+x_2+x_3)$ integriert werden. Wegen der Stetigkeit von f und der Kompaktheit von W ist Fubini anwendbar und liefert nach Iteration

$$I := \int_{W^{(3)}} f\,d\lambda^3 = \int_{W^{(1)}}\int_{W^{(1)}} \left(\int_{W^{(1)}} f(x_1,x_2,x_3)\,d\lambda^1(x_3)\right) d\lambda^1(x_2)\,d\lambda^1(x_1).$$

Wegen $\sin(\varphi+\pi/2) - \sin(\varphi-\pi/2) = 2\cos\varphi$ ist das gleich

$$\begin{aligned} I &= \int_{W^{(1)}} \left(\int_{W^{(1)}} 2\cos(x_1+x_2)\,d\lambda^1(x_2)\right) d\lambda^1(x_1) \\ &= \int_{W^{(1)}} 4\cos(x_1)\,d\lambda^1(x_1) = 8\cos(0) = 8. \end{aligned}$$

2. Der **Große Umordnungssatz** für Doppelreihen besagt: Falls für $(a_{m,n})_{m,n\in\mathbb{N}}$ mit $a_{m,n} \in \mathbb{C}$ die Reihe $\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} |a_{m,n}|$ konvergiert, dann gilt

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{m,n}.$$

   Dies ist der Satz von Fubini für den Maßraum ($\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}$, Zählmaß).

3. **Beweis der Formel $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \frac{\pi^2}{6}$:** Siehe Elstrodt, Seite 184. $\diamond$

5.3 Die Transformationsformel

Während durch den Satz von Fubini viele Integrale einer analytischen Berechnung zugänglich gemacht werden, lässt die sogenannte Transformationsformel die Benutzung von Symmetrien und angepassten Koordinaten im $\mathbb{R}^d$ zu. Im Fall $d = 1$ ist sie unter dem Namen 'Integration durch Substitution' aus der Schule bekannt und das Gegenstück der Kettenregel der Differentialrechnung.

5.13 Satz (Jacobi, 1841) *Es seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $t : X \to Y$ ein C^1–Diffeomorphismus. Dann gilt: $f : Y \to \mathbb{C}$ ist genau dann β^d–integrabel, wenn $f \circ t \cdot |\det Dt| : X \to \mathbb{C}$ β^d–integrabel ist, und dann gilt:*

$$\int_Y f\, d\beta^d = \int_X f \circ t\, |\det Dt|\, d\beta^d\,.$$

Beweis: Es genügt, die Ungleichung

$$\int_Y f\, d\beta^d \le \int_X f \circ t\, |\det Dt|\, d\beta^d \qquad (25)$$

für $f \in \mathcal{M}^+$ zu zeigen. Denn

- jede reelle Funktion $f : Y \to \mathbb{R}$ ist die Differenz ihrer Positiv– und Negativteile (16), und ihr Integral ist entsprechend definiert;
- das Integal (17) einer komplexen Funktionen $f : Y \to \mathbb{C}$ ist durch die Integrale ihres Real- und Imaginärteils definiert;
- die Umkehrung der Ungleichung (25) erreicht man durch Benutzung der Umkehrabbildung $t^{-1} : Y \to X$. Denn nach Definition von C^1–Diffeomorphismen ist t nicht nur stetig differenzierbar und bijektiv, sondern auch t^{-1} ist stetig differenzierbar, und $\det D(t^{-1})\ \det(Dt) \circ t^{-1} = 1$.

Die Aussage der Transformationsformel stimmt für *affine* Abbildungen, wie in Abschnitt 3.5 gezeigt wurde.

Nach dem Satz von Taylor lässt sich f in der Nähe von $y_0 \in Y$ durch die affine Abbildung $y \mapsto f(y_0) + Df(y_0)\,(y - y_0)$ approximieren, mit einem Fehler der Ordnung $o(\|(y - y_0\|)$. Das reicht aus zum Beweis von (25). Man zerlegt dabei das Integrationsgebiet in Würfel, approximiert in den Würfeln affin und verfeinert diese Zerlegung. Die Details findet man in [El], V.4. □

Tatsächlich gilt diese Transformationsformel nicht nur für das Lebesgue–Borel–Maß β^d, sondern auch für das Lebesgue–Maß λ^d.

5.14 Beispiel (Integral der Gauß-Funktion) Es ist nach Fubini

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2)\, d\lambda^1(x)\right)^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-\|x\|^2)\, d\lambda^2(x).$$

Das letztere Integral besitzt in Polarkoordinaten $t(r,\varphi) := r\binom{\cos\varphi}{\sin\varphi}$ eine besonders einfache Gestalt. Wähle also als deren Definitions– bzw. Wertebereich

$$X := (0,\infty) \times (-\pi,\pi) \quad , \quad Y := \mathbb{R}^2 \backslash (-\infty,0) \times \{0\}.$$

$t : X \to Y$ ist ein C^1-Diffeomorphismus mit $\det(Dt)(r,\varphi) = \det\left(\begin{smallmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{smallmatrix}\right) = r$.

Da die Halbachse $\mathbb{R}^2 \setminus Y = (-\infty,0) \times \{0\}$ eine λ^2–Nullmenge ist, gilt

$$\int_{\mathbb{R}^2} \exp(-\|x\|^2)\, d\lambda^2(x) = 2\pi \int_{(0,\infty)} \exp(-r^2)\, r\, dr = \pi\,,$$

also $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)\, dx = \sqrt{\pi}$. □

6 Konvergenzbegriffe der Maß– und Integrationstheorie

Typisch für die Analysis ist die Betrachtung von Limiten. Im Kontext der Integrationstheorie werden wir Limiten von Funktionenfolgen $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $f_k \in \mathscr{L}^1(\mu)$ untersuchen, aber gleich eine größere Klasse von Räumen betrachten:

6.1 Definition • *Für eine messbare Funktion $f : M \to \mathbb{C}$ auf dem Maßraum $(M, \mathcal{A}, \mu)$ und $p \in [1, \infty)$ heißt $f \in \mathscr{L}^p(M, \mu) \equiv \mathscr{L}^p(\mu)$, falls $|f|^p \in \mathscr{L}^1(\mu)$. Dann ist*

$$\|f\|_p := \big\| \, |f|^p \big\|^{1/p} = \left(\int_M |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} .$$

• *Für $p = \infty$ heißt $f \in \mathscr{L}^\infty(M, \mu) \equiv \mathscr{L}^\infty(\mu)$, falls es ein $c \geq 0$ gibt mit $\mu(\{x \in M \mid |f(x)| > c\}) = 0$. Dann ist das* **wesentliche Supremum** *von f*

$$\|f\|_\infty := \inf \Big\{ c \geq 0 \mid \mu\big(\{x \in M \mid |f(x)| > c\}\big) = 0 \Big\} .$$

Die Abbildungen $\| \cdot \|_p : \mathscr{L}^p(\mu) \to [0, \infty)$ sind Halbnormen, wie jetzt gezeigt wird.

6.1 Ungleichungen in $\mathscr{L}^p$–Räumen

Die folgende Ungleichung ist oft nützlich:

6.2 Satz (Jensen) *Es sei $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion auf dem Intervall I und $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Dann gilt für $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$ mit $f(M) \subseteq I$:*

$$\varphi(\textstyle\int_M f \, d\mu) \ \leq \ \textstyle\int_M \varphi \circ f \, d\mu \, ,$$

und das rechte Integral existiert (ist aber möglicherweise gleich ∞).

Den Beweis der Jensen–Ungleichung kann man z.B. in Kap. VI, § 1 von Elstrodt nachlesen.

6.3 Beispiel (Geometrisch–arithmetische Ungleichung) Für ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $M := \{1, \ldots, n\}$ seien die $\alpha_k := \mu(\{k\}) \in (0, 1]$. Es gilt dann für Vektoren $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ mit Einträgen $y_i \geq 0$

$$\prod_{k=1}^n y_k^{\alpha_k} \leq \sum_{k=1}^n \alpha_k y_k \, .$$

Das ist klar, wenn ein Eintrag $y_k = 0$ ist. Sonst ist wegen der Konvexität der Exponentialfunktion mit $f(k) := \log(y_k)$

$$\textstyle\prod_{k=1}^n y_k^{\alpha_k} = \exp\left(\sum_k \alpha_k f(k)\right) = \exp\left(\int_M f \, d\mu\right) \leq \int_M \exp(f) \, d\mu = \sum_{k=1}^n \alpha_k y_k \, .$$

Im Spezialfall der Gleichverteilung, also $\alpha_k = \frac{1}{n}$ $(k = 1, \dots, n)$ ergibt sich

$$(y_1 \cdot \ldots \cdot y_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} y_k$$

Für $n = 2$ ist damit $y_1 y_2 \leq \frac{1}{4}(y_1 + y_2)^2$, also $y_1 y_2 \leq \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2)$. $\diamond$

6.4 Satz (Hölder–Ungleichung) *Für ein* **konjugiertes Paar** $p, q \in [1, \infty]$, *d.h.* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *ist mit* $f \in \mathscr{L}^p(M, \mu)$ *und* $g \in \mathscr{L}^q(M, \mu)$

$$\int_M |fg| \, d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q \, . \tag{26}$$

Beweis:

- Ist $f \in \mathscr{L}^\infty(M, \mu)$, also $g \in \mathscr{L}^1(M, \mu)$ (oder umgekehrt), dann können wir $|f| \leq \|f\|$ annehmen, und die Schranke aus dem Integral herausziehen.

- Für $p, q \in (1, \infty)$ können wir $f \geq 0$, $g \geq 0$ voraussetzen, denn mit f ist auch $|f| \in \mathscr{L}^p(M, \mu)$, und der Übergang zum Betrag ändert die linke und rechte Seite von (26) nicht.

  Wenn wir f, g und das Maß μ auf die messbare Menge $\tilde{M} := g^{-1}\big((0, \infty]\big) \subseteq M$ restringieren, dann ändert sich die linke Seite von (26) nicht, während sich die rechte Seite höchstens verkleinern kann. Daher können wir von Anfang an annehmen, dass $g > 0$ gilt, der Kehrwert von g also existiert und $\|g\|_q > 0$ ist.

- Die Funktion $f\,g$ ist in $\mathscr{L}^1(M, \mu)$, denn wegen der Konkavität der Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ gilt für alle $x \in M$ mit $f(x)g(x) > 0$ und

  $$a := p \ln(f(x)) \quad , \quad b := q \ln(g(x))$$

  $$f(x)g(x) = \exp\left(\tfrac{1}{p}a + \tfrac{1}{q}b\right) \leq \tfrac{1}{p}\exp(a) + \tfrac{1}{q}\exp(b) = \tfrac{1}{p}f(x)^p + \tfrac{1}{q}g(x)^q,$$

  woraus die Integrabilität von fg folgt.

- Dann ist der Erwartungswert von $F := fg^{-q/p}$ bezüglich des durch

  $$\nu(B) := \frac{\int_B g^q \, d\mu}{\int_M g^q \, d\mu} \qquad (B \in \mathcal{M})$$

  definierten Wahrscheinlichkeitsmaßes ν gleich

  $$\langle F \rangle \quad \equiv \quad \int_M F \, d\nu = \frac{\int_M fg^{-q/p} g^q \, d\mu}{\int_M g^q \, d\mu} = \frac{\int_M fg \, d\mu}{\int_M g^q \, d\mu}.$$

Setzen wir nun $C(t) := |t|^p$, dann ist C konvex, also nach Satz 6.2

$$\langle C \circ F \rangle = \int_M f^p g^{-q}\, d\nu = \frac{\int_M f^p\, d\mu}{\int_M g^q\, d\mu} \geq C(\langle F \rangle).$$

Durch Bildung der p-ten Wurzel folgt

$$\frac{\|f\|_p}{\|g\|_q^{q/p}} = \left(\frac{\int_M f^p\, d\mu}{\int_M g^q\, d\mu} \right)^{1/p} \geq \frac{\int_M fg\, d\mu}{\int_M g^q\, d\mu} = \frac{\|f\,g\|_1}{\|g\|_q^q}.$$

Multiplikation dieser Ungleichung mit $\|g\|_q^q$ ergibt (26). □

Spezialfall ist die *Cauchy–Schwarz–Ungleichung* für $f, g \in \mathscr{L}^2(M, \mu)$:

$$\int_M |fg|\, d\mu \leq \|f\|_2 \|g\|_2\,.$$

Eine wichtige Folgerung ist, dass die Dreiecksungleichung gilt. Diese wird auch *Minkowski–Ungleichung* genannt.

6.5 Satz *Für $p \in [1, \infty]$ und $f, g \in \mathscr{L}^p(M, \mu)$ gilt $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.*

Beweis:

- $p = 1$ oder $p = \infty$: Hier folgt die Ungleichung aus der Dreiecksungleichung $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$. Also
- $p \in (1, \infty)$ und o.B.d.A. $\int_M |f + g|^p\, d\mu > 0$. Wir müssen zunächst ausschließen, dass $\int_M |f + g|^p\, d\mu = \infty$ ist, also zeigen, dass auch $f + g \in \mathscr{L}^p(\mu)$:

$$\int_M |f + g|^p\, d\mu \leq \int_M \big(2\max(|f|, |g|)\big)^p\, d\mu \leq 2^p \int_M (|f|^p + |g|^p)\, d\mu.$$

Dann ist mit dem zu p dualen Exponenten $q = \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} \in (1, \infty)$

$$\begin{aligned} \int_M |f + g|^p\, d\mu \quad &\leq \quad \int_M |f||f + g|^{p-1}\, d\mu + \int_M |g||f + g|^{p-1}\, d\mu \\ &\overset{\text{Hölder}}{\leq} \quad (\|f\|_p + \|g\|_p) \||f + g|^{p-1}\|_q \\ &= \quad (\|f\|_p + \|g\|_p) \left(\int_x |f + g|^p\, d\mu \right)^{1 - \frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Division durch $\left(\int_x |f + g|^p\, d\mu\right)^{1 - \frac{1}{p}} \in (0, \infty)$ ist möglich und ergibt $\|f + g\|_p = \left(\int_M |f + g|^p\, d\mu\right)^{1/p} \leq \|f\|_p + \|g\|_p$. □

6.6 Korollar *Für $p \in [1,\infty]$ ist $\mathscr{L}^p(\mu)$ ein $\mathbb{C}$–Vektorraum mit Halbnorm $\|\cdot\|_p$.*

Beweis: Die messbaren Funktionen $f : M \to \mathbb{C}$ bilden einen $\mathbb{C}$–Vektorraum. Die Teilmenge $\mathscr{L}^p(\mu)$ enthält die Nullfunktion, mit $f, g \in \mathscr{L}^p(\mu)$ ist $\|f+g\|_p < \infty$, also $f + g \in \mathscr{L}^p(\mu)$, und $\|kf\|_p = |k|\, \|f\|_p$ für $k \in \mathbb{C}$. $\square$

6.7 Beispiel (Lebesgue–Maß) $f_c : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1 & , \quad x = 0 \\ \left(\frac{\sin\|x\|}{\|x\|}\right)^c & , \quad x \neq 0 \end{cases}$ ist stetig, also messbar. $f_c \in \mathscr{L}^p(\lambda^d)$, falls $c > d/p$, für $c \in [0, d/p]$ aber nicht. $\diamond$

In vielen mathematischen Gebieten, etwa in der Theorie partieller Differentialgleichungen, ist die Anwendung von $\mathscr{L}^p$–Ungleichungen wie der Hölder–Ungleichung tägliches Brot.

6.8 Beispiel Für $(M,\mu) = (\mathbb{N}$, Zählmaß$)$ ist

$\|f\|_\infty = \sup\{|f(n)| \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $\|f\|_p = \left(\sum_{n=1}^\infty |f(n)|^p\right)^{1/p} \quad \big(p \in [1,\infty)\big)$.

Hier gilt also $\|f\|_p = 0$ genau dann, wenn $f = 0$.

Etwa für $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ n \mapsto \frac{1}{n\log(n+1)}$ ist $f \notin \mathscr{L}^1(\mu)$, denn die Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n\log(n+1)}$ divergiert. Aber $f \in \mathscr{L}^p(\mu)$ für alle $p \in (1,\infty]$. $\diamond$

In welchem Verhältnis stehen die Räume $\mathscr{L}^p(M,\mu)$ für verschiedene p?

- Allgemein ist für das *Zählmaß* μ auf einer Menge M und $p \in [1,\infty)$ höchstens dann $f \in \mathscr{L}^p(\mu)$, wenn $|\{m \in M \mid |f(m)| \geq 1\}| < \infty$ ist. Daher gilt *hier*

$$\mathscr{L}^p(\mu) \subseteq \mathscr{L}^q(\mu) \quad \text{, falls} \quad 1 \leq p \leq q \leq \infty.$$

- Ist stattdessen $(M,\mathcal{A},\mu)$ ein *endlicher Maßraum*, also $\mu(M) < \infty$, dann folgt mit Hölder für $f \in \mathscr{L}^q(\mu)$:

$$\|f\|_p = \|f\mathbb{1}_M\|_p \leq \mu(M)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|f\|_q\,,$$

denn mit $r := \frac{q}{p},\ s := \frac{1}{1-\frac{1}{r}}$ ist

$$\|f\mathbb{1}_M\|_p^p = \int_M (|f|\mathbb{1}_M)^p\, d\mu \leq \underbrace{\left(\int_M |f|^{pr}\, d\mu\right)^{\frac{1}{r}}}_{\|f\|_q^p} \cdot \underbrace{\left(\int_M \mathbb{1}_M^{ps}\, d\mu\right)^{\frac{1}{s}}}_{\mu(M)^{p\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}}.$$

Insbesondere ist

$$\mathscr{L}^q(\mu) \subseteq \mathscr{L}^p(\mu) \quad \text{, falls} \quad 1 \le p \le q \le \infty,,$$

entgegen dem Fall eines Zählmaßes.

- Für ein endliches Zählmaß μ sind die $\mathbb{C}$–Vektorräume $\mathscr{L}^p(\mu)$ also alle einander gleich und isomorph zu $\mathbb{C}^n$ mit $n := |M| < \infty$.
- Für $(M, \mu) = (\mathbb{R}^d, \lambda^d)$ ist die Skala der $\mathscr{L}^p$–Räume in keiner Richtung ineinander enthalten. Das ergibt sich aus Beispiel 6.7, zusammen mit der folgenden Feststellung: Die Funktionen $f_c : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \|x\|^{-c} & , 0 < \|x\| \le 1 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$ sind messbar und für $c \in (0, d/p)$ in $\mathscr{L}^p(\lambda^d)$, sonst aber nicht.

6.2 Die Räume $L^p(M, \mu)$

Bis jetzt hat unsere Theorie der Räume $\mathscr{L}^p(M, \mu)$ noch einen Schönheitsfehler: Falls es eine nicht leere μ–Nullmenge gibt, ist $\|\cdot\|_p : M \to [0, \infty)$ keine Norm, sondern nur eine Halbnorm, und die durch sie erzeugte Topologie auf M ist nicht hausdorffsch. Andererseits ist

$$\mathcal{N} := \{f : M \to \mathbb{C} \mid f \text{ messbar, } f(x) = 0 \ \ \mu\text{-fast überall}\}$$

eine Teilmenge aller $\mathscr{L}^p(M, \mu)$, und $\|f\|_p = 0$ genau dann, wenn $f \in \mathcal{N}$. Außerdem ist $\mathcal{N}$ sogar ein Untervektorraum von $\mathscr{L}^p(M, \mu)$. Daher benutzen wir die Quotientenräume

$$L^p(M, \mu) := \mathscr{L}^p(M, \mu)/\mathcal{N} \qquad (p \in [1, \infty]). \tag{27}$$

Wir identifizieren also Funktionen, die sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden.

Da wegen der Dreiecksungleichung $\|f\|_p = \|g\|_p$ für alle $f \in g + \mathcal{N}$ gilt, wird durch $\|[g]\|_p^* := \|g\|_p$ für $g \in \mathscr{L}^p(M, \mu)$ und die Äquivalenzklasse $[g] := g + \mathcal{N}$ eine Norm $\|\cdot\|_p^* : L^p(M, \mu) \to [0, \infty)$ definiert. Der Stern unterscheidet sie von der Halbnorm. Wir lassen diesen aber gleich wieder weg. Es ist auch eine übliche Schlamperei, die Elemente von L^p als Funktionen zu bezeichnen, während sie ja nur Äquivalenzklassen von solchen sind.

Wir zeigen abschließend, dass die normierten $\mathbb{C}$–Vektorräume $(L^p(M, \mu), \|\cdot\|)$ vollständig sind, in ihnen also jede Cauchy–Folge konvergiert. Dabei ist es wichtig, schon im $\mathscr{L}^p(M, \mu)$ zwei Konvergenzbegriffe zu unterscheiden. Weder erzwingt nämlich punktweise Konvergenz die Konvergenz im $\mathscr{L}^p$–Sinn noch umgekehrt:

6.9 Beispiele 1. **Punktweise, aber nicht im $\mathscr{L}^p$–Sinn konvergente Folge:** Die Folge skalierter charakteristischer Funktionen von Intervallen

$$f_k := k\mathbb{1}_{[1/k,2/k]} \qquad (k \in \mathbb{N})$$

liegt für alle $p \geq 1$ in $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}, \lambda^1)$, und konvergiert punktweise gegen die Nullfunktion:

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Die Folge ist aber keine Cauchy–Folge in $\mathscr{L}^p$. Denn $\|f_k\|_p = k^{1-\frac{1}{p}} \geq 1$, und für $\ell > 2k$ sind die Intervalle $[1/k, 2/k]$ und $[1/\ell, 2/\ell]$ disjunkt, also $\|f_k - f_\ell\|_p^p = \|f_k\|_p^p + \|f_\ell\|_p^p \geq 1$.

2. **Im $\mathscr{L}^p$–Sinn ($p \in [1, \infty)$), aber nicht punktweise konvergente Folge:** Für $k \in \mathbb{N}$ seien $\nu, q \in \mathbb{N}_0$ durch $\nu := \lfloor \log_2 k \rfloor$ und $q := k - 2^\nu$ definiert, also $0 \leq q < 2^\nu$. Wir wählen die Funktionenfolge

$$f_k := \mathbb{1}_{I_k} \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}, \lambda^1) \qquad \text{mit den Intervallen } I_k := [q2^{-\nu}, (q+1)2^{-\nu}].$$

Es ist $\|f_k\|_p = 2^{-\nu/p} \xrightarrow{k\to\infty} 0$, aber für kein $x \in [0, 1]$ existiert der punktweise Limes $\lim_{k\to\infty} f_k(x)$, denn x ist in mindestens einem, höchstens zwei Intervallen I_k der Länge $2^{-\nu}$ enthalten. $\diamond$

Diese zweite Feststellung macht den folgenden Satz erstaunlich (man rät nicht so leicht, was f sein könnte):

6.10 Satz (Riesz–Fischer, 1907) *Die Räume $\mathscr{L}^p(M, \mu)$ ($p \in [1, \infty]$) sind vollständig. Das heißt, zu jeder Cauchy–Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathscr{L}^p(M, \mu)$ gibt es ein*

$$f \in \mathscr{L}^p(M, \mu) \quad \textit{mit} \quad \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

Beweis:

- Betrachte zunächst für $p \in [1, \infty)$ eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ der Cauchy–Folge mit
$$\|f_m - f_{n_k}\|_p \leq 2^{-k} \quad (m \geq n_k). \tag{28}$$
Wir zeigen zuerst, dass diese punktweise fast überall gegen ein $f : M \to \mathbb{C}$ konvergiert. Für $g_k := f_{n_k} - f_{n_{k+1}}$ ist mit (28)
$$\left\|\sum_{k=1}^n |g_k|\right\|_p \leq \sum_{k=1}^n \|g_k\|_p \leq \sum_{k=1}^n 2^{-k} < 1\,.$$

Der Satz 4.15 über monotone Konvergenz besagt für $G := \sum_{k=1}^{\infty} |g_k|$:

$$\|G\|_p^p = \int_M \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{k=1}^{n} |g_k|\Big)^p d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_M \Big(\sum_{k=1}^{n} |g_k|\Big)^p d\mu = \lim_{n\to\infty} \Big\| \sum_{k=1}^{n} |g_k| \Big\|_p^p \le 1.$$

Damit ist $G^{-1}(\infty)$ eine μ–Nullmenge, die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ konvergiert also μ–fast überall absolut. Entsprechend gibt es ein $f : M \to \mathbb{C}$ mit

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f_{n_1}(x) - \lim_{k\to\infty} \sum_{\ell=1}^{k-1} g_\ell(x) = f(x) \qquad (\mu\text{–fast überall}).$$

- Der Limes messbarer Funktionen ist messbar, also ist f messbar. Ist er aber in $\mathscr{L}^p(M,\mu)$? Das würde natürlich folgern, wenn man sogar zeigen könnte, dass für $m \to \infty$ das Integral

  $$\int_M |f - f_m|^p \, d\mu \in [0,\infty]$$

  gegen Null geht, also sogar Konvergenz im p–ten Mittel vorliegt.

  Nun ist nach Definition von f und dem Satz 4.21 von Fatou

  $$\begin{aligned} \int_M |f - f_m|^p \, d\mu &= \int_x \underline{\lim}_{k\to\infty} |f_{n_k} - f_m|^p \, d\mu \\ &\le \underline{\lim}_{k\to\infty} \int_M |f_{n_k} - f_m|^p \, d\mu \le \varepsilon \qquad (m \ge M(\varepsilon)), \end{aligned}$$

  denn $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist ja eine Cauchy–Folge im Vektorraum $\mathscr{L}^p(M,\mu)$.

- Für $p = \infty$, also die durch das wesentliche Supremum gegebene Halbnorm, ist

  $$N := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{x \mid |f_k(x)| > \|f_k\|_\infty\} \cup \bigcup_{k,\ell\in\mathbb{N}} \{x \mid |f_\ell(x) - f_k(x)| > \|f_\ell - f_k\|_\infty\}$$

  als abzählbare Vereinigung von μ–Nullmengen eine μ–Nullmenge in M. Damit existiert der Limes $f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ für $x \in M \setminus N$, und wir setzen $f(x) := 0$ für $x \in N$.

  f ist messbar, und $\|f\|_\infty \le \sup_{k\in\mathbb{N}} \|f_k\|_\infty < \infty$, also ist $f \in \mathscr{L}^\infty(M,\mu)$. □

6.11 Korollar *Damit sind die normierten $\mathbb{C}$–Vektorräume $L^p(M,\mu)$ für alle $p \in [1,\infty]$ Banach–Räume. $L^2(M,\mu)$ ist ein Hilbert–Raum mit Skalarprodukt*

$$\big\langle [f],[g] \big\rangle := \int_M f\overline{g}\, d\mu \qquad \big(f,g \in \mathscr{L}^2(M,\mu)\big).$$

Beweis: • Durch die Bildung von Äquivalenzklassen beim Übergang von $\mathscr{L}^p(M,\mu)$ zu $L^p(M,\mu)$ wird die Eindeutigkeit des Limes der Cauchy–Folge erzwungen.
• Für $f,g \in \mathscr{L}^2(M,\mu)$ ist das Produkt $f\overline{g} : M \to \mathbb{C}$ messbar. Nach der Cauchy–Schwarz–Ungleichung (6.1) ist $\langle |f\overline{g}| \rangle \le \|f\|_2 \|g\|_2$, also die Abbildung $(f,g) \mapsto \int_M f\overline{g}\, d\mu$ eine positiv semidefinite Sesquilinearform [7].

Wegen $\big\langle F,F \big\rangle = \|F\|_2^2 > 0$ für $F \in L^2(M,\mu) \setminus \{0\}$ ist die auf $L^2(M,\mu)$ induzierte Sesquilinearform positiv definit, also ein Skalarprodukt. $\square$

[7] d.h. linear im ersten, konjugiert linear im zweiten Argument; in der Physik wird die umgekehrte Konvention benutzt.

Index

Literatur

[Ba] Heinz Bauer: Maß– und Integrationstheorie. 2. Auflage. Berlin: De Gruyter

[El] Jürgen Elstrodt: Maß– und Integrationstheorie. 6. Auflage. Berlin: Springer 2009

[Fa] Kenneth T. Falconer: Fraktale Geometrie. Mathematische Grundlagen und Anwendungen. Spektrum Akad. Verlag,1999

[Fe] Herbert Federer: Geometric Measure Theory (Classics in Mathematics). Berlin: Springer, 1996

[Ha] Paul Halmos: Measure Theory. Berlin: Springer 1974

[Kl] Achim Klenke: Wahrscheinlichkeitstheorie. Berlin: Springer, 2008

[Mo] Frank Morgan: Geometric Measure Theory: A Beginner's Guide. Academic Press, 2008