Skript zur Vorlesung

Funktionentheorie

von

Prof. Dr. H. Leutwiler

gehalten im SS 1997 (4-stündig)
und im WS 1997/98 (2-stündig)

an der

Friedrich-Alexander-Universität
Erlangen - Nürnberg

Ausgearbeitet von

Ulrich Berg und Matthias Ganzleben

Einleitung

Im Frühjahr 1997 überreichte mir Matthias Ganzleben eine Ausarbeitung meiner im SS 93 gehaltenen Vorlesung "Funktionentheorie I" mit den Worten: "Vielleicht interessiert sie dieses Skript, aufgeschrieben aus der Sicht eines Studenten."
Tatsächlich war ich sehr daran interessiert und entschloss mich spontan, dasselbe meiner nächsten Funktionentheorie I - Vorlesung (gehalten im SS 97) zu Grunde zu legen. Anhand dieser Aufzeichnungen konnte ich mühelos feststellen, welche Kapitel meiner 93-er Vorlesung von den Studenten gut verstanden wurden und welche einer Überarbeitung meinerseits bedurften.
Nach Ablauf der anschliessenden Funktionentheorie II - Vorlesung (im WS 97/98) bot mir der Physikstudent Ulrich Berg freundlicherweise an, auch diesen zweiten Teil auszuarbeiten und den ersten unter Berücksichtigung der von mir vorgenommenen Änderungen umzuschreiben.
Naturgemäß sind diese Aufzeichnungen nicht so ausgefeilt und abgerundet wie ein Lehrbuch. Das war auch nicht die Zielsetzung. Viel wichtiger ist meines Erachtens, daß dabei die "Sicht des Studenten" erhalten blieb.
Ich möchte an dieser Stelle Herrn Berg und Herrn Ganzleben für ihre geleistete, wertvolle Arbeit herzlich danken.

Erlangen, März 1998 Heinz Leutwiler

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Der Körper $\mathbb{C}$ als metrischer Raum

1.1 Der Körper $\mathbb{C}$

Definition (nach Hamilton)

$\mathbb{C}$ = Menge aller geordneten, reellen Zahlenpaare (a,b), versehen mit den beiden Operationen

$$\begin{array}{rrcl} + : & (a,b)+(c,d) & := & (a+c\,,\,b+d) \\ \cdot : & (a,b)\cdot(c,d) & := & (ac-bd\,,\,bc+ad) \end{array}$$

$\mathbb{C}$ ist kommutativer Körper, genannt Körper der komplexen Zahlen.

Abb:

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & (x,0) \end{array} \qquad \text{ist injektiv, Endomorphismus.}$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{R}$ läßt sich in $\mathbb{C}$ einbetten. Wir identifizieren x $\in \mathbb{R}$ mit (x,0).
$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ist Unterkörper von $\mathbb{C}$.

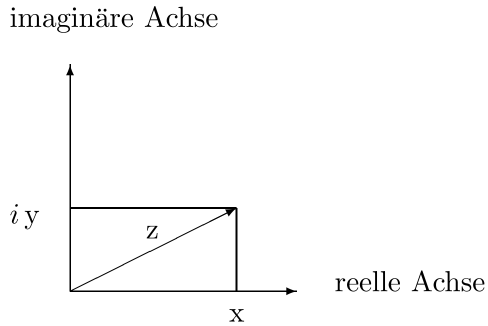
Was ging verloren?
Die Anordnung : $\mathbb{C}$ kann nicht angeordnet werden!

Setze i := (0,1) imaginäre Einheit.
Dann gilt : z = (x,y) = x(1,0) + (0,1)y = x + i y , wobei $\boxed{i^2 = -1}$.
Also
z = x + i y, x = Realteil von z , x = Re z
y = Imaginärteil von z , y = Im z

Bem.: Multiplikation in $\mathbb{C}$ ist durch $i^2 = -1$ eindeutig festgelegt. Denn

$$\begin{aligned}(\mathrm{a} + i\,\mathrm{b})(\mathrm{c} + i\,\mathrm{d}) &= \mathrm{ac} + i\,\mathrm{ad} + i\,\mathrm{bc} + i^2\,\mathrm{bd} \\ &= (\mathrm{ac} - \mathrm{bd}) + i(\mathrm{bc} + \mathrm{ad})\end{aligned}$$

Darstellung in Gaußscher Ebene



z = x + i y = (x,y), als Punkt in $\mathbb{R}^2$ aufgefaßt.

Naheliegend

Definition
Absoluter Betrag von z = x + i y ist per Definition

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Eigenschaften:

- $|ab| = |a| \cdot |b|$, $\forall$ a,b $\in \mathbb{C}$
- $|a+b| \leq |a| + |b|$, $\forall$ a,b $\in \mathbb{C}$

allg.: $\big|\, |a| - |b| \,\big| \leq |a+b| \leq |a| + |b|$

Konjugation

Definition
Die Zahl $\overline{z}$:= x - i y heißt die zu z = x + i y *konjugiert* komplexe Zahl.

Beachte: $\mathrm{x} = \frac{z + \overline{z}}{2}$, $y = \frac{z - \overline{z}}{2i}$

Eigenschaften: Abb. z $\mapsto \overline{z}$ definiert Ringhomomorphismus :

- $\overline{a + b} = \overline{a} + \overline{b}$
- $\overline{a \cdot b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$

Ferner gilt

- $\overline{\overline{a}} = \mathrm{a}$ (Involution)

Wichtig:

$$\boxed{a \cdot \overline{a} = |a|^2} \quad , \quad \text{für alle a} \in \mathbb{C}$$

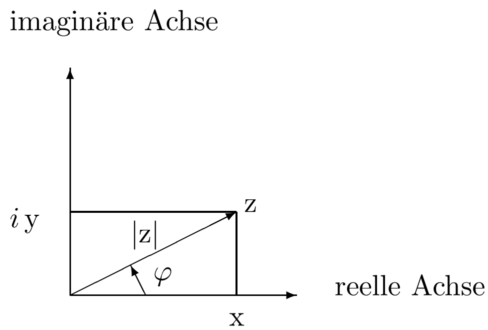
Damit elegante Art die Division darzustellen: $\forall$ a,b $\in \mathbb{C}$, b$\neq$ 0:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \overline{b}}{b \cdot \overline{b}} = \frac{a \cdot \overline{b}}{|b|^2} = \frac{1}{|b|^2}\, a\overline{b}\,,$$

insbes.

$$\boxed{a^{-1} = \frac{\overline{a}}{|a|^2}} \quad , \quad \forall \text{ a} \in \mathbb{C} \text{ , a}\neq 0\,.$$

Polardarstellung



z = x + i y
Polarkoordinaten einführen:
x = r $\cdot \cos\varphi$
y = r $\cdot \sin\varphi$ wobei r = |z|

also z = |z|$(\cos\varphi + i\ \sin\varphi)$

Die reelle Zahl φ , das Argument von z, ist dabei nur bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von 2π bestimmt.

Einschränkung (häufig) : $\boxed{0 \leq \varphi < 2\pi}$ (sog. Hauptwert von φ)

Multiplikation in Polarkoordinaten

$$z = |z|\,(\cos\varphi + i\, sin\varphi)$$
$$w = |w|\,(\cos\psi + i\, sin\psi)$$

$$\begin{aligned} zw &= |z| \cdot |w|\,[\,\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi + i(\cos\varphi\sin\psi + \cos\psi\sin\varphi)] = \\ &= |z| \cdot |w| \cdot [\,\cos(\varphi+\psi) + i \cdot \sin(\varphi+\psi)] \end{aligned}$$

Interpretation: 2 komplexe Zahlen werden multipliziert, indem man ihre absoluten Beträge multipliziert und ihre Argumente addiert.
(Geometrisch: Drehstreckung)

speziell (de Moivre):

$$\boxed{z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)}$$

Anwendung:
Lösen der Gleichung $\boxed{z^n = w}$, $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Setze
$z = |z|\,(\cos\varphi + i\, sin\varphi)$
$w = |w|\,(\cos\psi + i\, sin\psi)$.
Dann $|w| = |\, z^n| = |z|^n \Rightarrow |z| = \sqrt[n]{|w|}$
Mit de Moivre: $\cos n\varphi + i\sin n\varphi = \cos\psi + i\sin\psi$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos n\varphi &= \cos\psi \\ \sin n\varphi &= \sin\psi \end{cases} ;$$

genau dann erfüllt, wenn:

$$n\varphi = \psi + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

d.h. $\varphi = \frac{\psi}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}$.
Aber nur für k = 0,1,... ,n-1 erhält man verschiedene Wurzeln der Gleichung $z^n = w$. Die Gleichung $z^n = w$ besitzt genau n Lösungen, nämlich

$$z_k = \sqrt[n]{|w|}\,[\cos(\frac{\psi}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}) + i(\sin\frac{\psi}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n})] \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

1.2 $\mathbb{C}$ als metrischer Raum

$\mathbb{C}$ ist "Metrischer Raum" bezüglich der Metrik $d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2|$
Axiome

1. $d(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$
2. $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$
3. $d(z_1, z_3) \leq d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3)$ (Dreiecksungleichung)

Sämtliche Begriffe des Metrischen Raums stehen zur Verfügung!

1.2.1 Offene, abgeschlossene Mengen

Setze $B(z,r) = \{ \zeta \in \mathbb{C} : |\, z - \zeta\,| < r \}$
offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt z und Radius r

- speziell: $\mathbb{E} := B(0,1)$ (gebräuchliche Abkürzung)
- Menge $U \subset \mathbb{C}$ heißt offen, wenn zu jedem $z \in U$ exist. $r > 0$, sodaß $B(z,r) \subset U$.
- Menge $A \subset \mathbb{C}$ heißt abgeschlossen, wenn das Komplement CA offen ist.
- Sei $X \subset \mathbb{C}$ beliebig. Wir setzen
  $\overset{\circ}{X}$ = Inneres von X (größte offene Teilmenge von X = Vereinigung aller offenen Teilmengen von X)

- $\overline{X}$ = Abschluß von X (kleinste abgeschlossene Menge die X enthält = Durchschnitt aller abgeschlossenen Obermengen von X)
- ∂X = $\overline{X} \setminus \overset{\circ}{X}$: Rand von X
- Induzierte Metrik : Einschränkung der Metrik auf eine Teilmenge X.

1.2.2 Konvergenz

Definition
Folge (z_n) konvergiert gegen z $\in \mathbb{C}$,
in Zeichen:

$$\boxed{z = \lim_{n\to\infty} z_n},$$

oder $z_n \to z$ für $n \to \infty$, wenn gilt:
Zu jedem $\varepsilon > 0$ exist. N = N(ϵ) $\in \mathbb{N}$ mit $|z - z_n| < \epsilon$, für alle n $\geq$ N.
Klar:

$$z_n \to z \text{ für } n \to \infty \Leftrightarrow \begin{cases} Re\, z_n & \to & Re z \\ Im\, z_n & \to & Im z \end{cases} \quad \text{für } n \to \infty$$

Cauchy-Folge

(z_n) heißt Cauchy-Folge, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N $\in \mathbb{N}$ exist., sodaß

$$|z_n - z_m| < \varepsilon \quad , \quad \forall\, n, m \geq N\,;$$

äquivalent:

$$(z_n) \text{ ist Cauchy-Folge } \Leftrightarrow \begin{cases} (Re\, z_n) \\ (Im\, z_n) \end{cases} \text{sind Cauchy-Folgen}$$

$\mathbb{C}$ ist vollständig, da $\mathbb{R}$ vollständig ist.

(Beispiel eines nicht vollständigen M.R.:
$\mathbb{Q}$ mit induzierter Metrik von $\mathbb{R}$ versehen. Denn:
$(1 + \frac{1}{n})^n$ ist Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$, aber$(1 + \frac{1}{n})^n \to e \notin \mathbb{Q}$)

Konvergenz von Reihen

Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert, wenn die Folge der Partialsummen (s_n) , mit $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ konvergiert.
Die Reihe konvergiert absolut, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Klar: absolute Konvergenz $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ Konvergenz.

1.2.3 Zusammenhang

Metrischer Raum X heißt zusammenhängend, falls gilt:
A,B nichtleer, offen in X, mit A $\cup$ B = X $\Rightarrow$ A $\cap$ B $\neq \emptyset$;

äquivalent:
Y $\subset$ X , Y offen und abgeschlossen $\Rightarrow$ Y = $\emptyset$ oder Y = X.
Beliebige Teilmenge Z $\subset$ $\mathbb{C}$ heißt zusammenhängend, falls Z als Metrischer Raum, mit der induzierten Metrik versehen, zusammenhängend ist.

Charakterisierung der zusammenhängenden Mengen in $\mathbb{C}$

Verbindungsstrecke zweier Punkte $z, w \in \mathbb{C}$:

$$[z,w] := \{tw + (1-t)z : \ 0 \leq t \leq 1\} \ .$$

Streckenzug von a nach b (a,b $\in \mathbb{C}$):

$$S = \bigcup_{k=1}^{n} [z_k, w_k] \text{ mit } z_1 = a, z_{k+1} = w_k, w_n = b, 1 \leq k \leq n-1 \ .$$

In Funktionentheorie wird benötigt:

Satz

Sei G offen in $\mathbb{C}$. Dann gilt:
G ist zusammenhängend $\Leftrightarrow$ $\forall$ a,b $\in$ G exist. Streckenzug S $\subset$ G, der a mit b verbindet.

Beweis. Siehe z.B. H. Bauer: Differential- und Integralrechnung

Definition
Eine nichtleere, offene und zusammenhängende Teilmenge G in $\mathbb{C}$ heißt ein Gebiet.

Zusammenhangskomponenten

Teilmenge D eines Metrischen Raumes X heißt Zusammenhangskomponente von X, falls gilt:

1. D ist zusammenhängend
2. D $\subset$ B $\subset$ X , B zusammenhängend $\Rightarrow$ D = B
   (d.h. D ist maximal)

Es gilt:

a) jeder Punkt x $\in$ X liegt in einer Zusammenhangskomponente.

b) Verschiedene Zusammenhangskomponenten sind disjunkt.

Folgerung:
Metrischer Raum zerfällt in Zusammenhangskomponenten.
In $\mathbb{C}$ gilt: Ist U $\subset$ $\mathbb{C}$ offen, so sind die Komponenten von U auch offen in $\mathbb{C}$.

In $\mathbb{R}$ gilt mehr: Ist U $\subset$ $\mathbb{R}$ offen, so sind die Komponenten von U offene Intervalle;
U zerfällt also in höchstens abzählbar viele, paarweise disjunkte, offene Intervalle.

1.2.4 Kompaktheit

Definition
Menge K $\subset$ $\mathbb{C}$ (allg. Metrischer Raum) heißt kompakt, wenn zu jeder offenen Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von K eine endliche Teilüberdeckung $(U_j)_{j\in J}$ (J $\subset$ I endl.) existiert.

Satz von HEINE BOREL

K $\subset \mathbb{C}$ (allg. $\mathbb{R}^n$) ist genau dann kompakt, wenn K abgeschlossen und beschränkt ist.

Achtung: Gilt nicht in beliebigen Metrischen Räumen ! !
Hingegen gilt folgende Charakterisierung der kompakten Mengen in beliebigen Metrischen Räumen:

Satz von BOLZANO-WEIERSTRASS

K $\subset$ $\mathbb{C}$ ist genau dann kompakt, wenn jede Folge (z_n) in K eine in K konvergente Teilfolge besitzt.

Beweis: siehe z.B. H. BAUER: Differential- und Integralrechnung.

1.3 Stetigkeit

Sei D $\subset$ $\mathbb{C}$ bel., f: D $\to$ $\mathbb{C}$ komplex-wertige Funktion, $z_0 \in$ D.

Definition
f heißt stetig in z_0, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ exist. , derart, daß

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon, \quad \forall z \in \mathrm{D} \text{ mit } |z - z_0| < \delta \, .$$

f: D $\to$ $\mathbb{C}$ ist stetig, wenn f in allen Punkten von D stetig ist.

Grenzwerte von Funktionen

Sei D $\subset$ $\mathbb{C}$ bel. , $z_0 \in$ $\mathbb{C}$

Definition
z_0 ist Häufungspunkt von D, falls in jeder Umgebung V von z_0 mindestens ein von z_0 verschiedener Punkt aus D liegt, d.h. falls gilt:

$$V \cap (D \backslash \{z_0\}) \neq \emptyset \, .$$

Wählt man insbes. $V_n = B(z_0 , \frac{1}{n})$, so sieht man, daß in jeder Umgebung V von z_0 sogar abzählbar viele von z_0 verschiedene Punkte aus D enthalten sind.
Es gibt also stets eine Folge (z_n) von Punkten aus D mit $z_n \to z_0$ für $n \to \infty$.

Sei f: D $\to$ $\mathbb{C}$ geg., $z_0 \in$ $\mathbb{C}$ ein Häufungspunkt von D.

Definition

f besitzt in z_0 einen Grenzwert A $\in$ $\mathbb{C}$, falls gilt:
Zu jedem $\varepsilon > 0$ exist. ein $\delta > 0$ sodaß

$$|f(z) - A| < \varepsilon, \text{ für alle } z \in \mathrm{D} \text{ mit } 0 < |z - z_0| < \delta \, .$$

In Zeichen:

$$\boxed{\mathrm{A} = \lim_{z\to z_0} f(z)}$$

Beachte: 1) f braucht in z_0 nicht definiert zu sein !!
2) A ist eindeutig bestimmt.

Zusammenhang mit Stetigkeit

Sei f: D $\to\ \mathbb{C}$, $z_0 \in$ D sei kein isolierter Punkt von D (d.h. es existiert keine Umgebung V von z_0 mit V $\cap$ D = $\{z_0\}$)
Charakterisierung: f ist genau dann stetig in z_0, wenn gilt:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)\ .$$

Wie in der reellen Analysis verifiziert man die folgenden Regeln:

- $\lim_{z\to z_0}(f(z)+g(z)) = \lim_{z\to z_0} f(z) + \lim_{z\to z_0} g(z)$
- $\lim_{z\to z_0}(f(z)\cdot g(z)) = \lim_{z\to z_0} f(z) \cdot \lim_{z\to z_0} g(z)$

vorausgesetzt, daß die Grenzwerte der Funktionen f,g : D $\to\ \mathbb{C}$ im Häufungspunkt z_0 von D existieren.
Ist zudem g(z) $\neq$0 in einer Umgebung von z_0, sowie $\lim_{z\to z_0}$ g(z) $\neq 0$, so gilt auch

- $\displaystyle\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim\limits_{z\to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z\to z_0} g(z)}$

Daraus folgt z.B.:
Summe und Produkt zweier stetiger Funktionen f,g : D $\to\ \mathbb{C}$ sind stetig.
Der Quotient $\frac{f}{g}$ ist auch stetig, sofern g nirgends verschwindet.
Wir erwähnen noch: Sei D $\subset\ \mathbb{C}$, f: D $\to\ \mathbb{C}$ stetig. Ist D zusammenhängend, so auch f(D).

Gleichmäßige Stetigkeit

Sei D $\subset\ \mathbb{C}$, f: D $\to\ \mathbb{C}$

Definition

f heißt gleichmäßig stetig, wenn zu jedem ε >0 ein δ >0 existiert, mit der Eigenschaft, daß für alle z_1, $z_2 \in$ D:

$$|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon\ ,\ \text{sobald}\ |z_1 - z_2| < \delta\ .$$

Satz

Sei D $\subset\ \mathbb{C}$ kompakt und f: D $\to\ \mathbb{C}$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig.

Beweis: siehe z.B. H. Bauer: Differential- und Integralrechnung.

1.4 Lokal gleichmäßige Konvergenz

Definition

Folge (f_n) , f_n: D $\rightarrow$ $\mathbb{C}$ konvergiert gleichmäßig gegen die Funktion f: D $\rightarrow$ $\mathbb{C}$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ exist. N $\in \mathbb{N}$ mit

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon\,, \qquad \forall\, \mathrm{n} \geq \mathrm{N},\ \forall\, z \in \mathrm{D}\,.$$

Gleichmäßige Konvergenz impliziert punktweise Konvergenz,aber nicht umgekehrt.

Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz

Notwendig + hinreichend für gleichmäßige Konvergenz einer Folge (f_n) gegen die Funktion f ist die Bedingung:
Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert N $\in \mathbb{N}$, sodaß

$$|f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon\,, \qquad \forall\, \mathrm{m,n} \geq \mathrm{N} \text{ und alle } \mathrm{z} \in \mathrm{D}\,.$$

In Funktionentheorie wichtig: lokal gleichmäßige Konvergenz, auch kompakte Konvergenz genannt.

Definition

Sei U offen in $\mathbb{C}$, (f_n) , f_n: U $\rightarrow$ $\mathbb{C}$, bel. Folge. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert lokal gleichmäßig (= kompakt) gegen die Funktion f: U $\rightarrow$ $\mathbb{C}$, falls die Folge (f_n) auf jeder kompakten Teilmenge K $\subset$ U gleichmäßig konvergiert.

Satz

Die Grenzfunktion f einer lokal gleichmäßig konvergenten Folge (f_n) stetiger Funktionen f_n: U $\rightarrow$ $\mathbb{C}$ ist stetig.

Denn f ist wegen der gleichmäßigen Konvergenz auf jeder kompakten Menge K $\subset$ U stetig und damit auch auf U.

Lokal gleichmäßige Konvergenz bei Reihen

Definition

Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$, f_k : D $\rightarrow$ $\mathbb{C}$, konvergiert gleichmäßig (lokal gleichmäßig), wenn die zugehörige Folge (s_n) der Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ gleichmäßig (bzw. lokal gleichmäßig) konvergiert.

Wichtiges Kriterium für Funktionentheorie:

Majorantenkriterium von WEIERSTRASS

Sei (f_k) , f_k: D $\rightarrow$ $\mathbb{C}$, eine Funktionenfolge, (M_k) eine Folge positiver Zahlen mit folgender Eigenschaft:

$$|f_k(z)| \leq M_k\,, \qquad \forall\, z \in \mathrm{D}\,, \forall\, k \in \mathbb{N}\,.$$

Konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ absolut und gleich–mäßig.

Beweis:

- Absolute Konvergenz: klar
- gleichmäßige Konvergenz: Für alle n > m $\geq$ 0, alle z $\in$ D gilt:

$$|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(z)| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |f_k(z)| \leq \sum_{k=m+1}^{n} M_k \quad ;$$

  wegen $\sum_{k=0}^{\infty} M_k < \infty$ gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N $\in$ $\mathbb{N}$ mit $\sum_{k=m+1}^{n} M_k < \varepsilon$, für alle n > m $\geq$ N.
  Somit ist:

$$\underbrace{|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(z)\,|}_{=s_n - s_m} < \varepsilon \,, \qquad \forall\, z \in \mathrm{D} \text{ und alle } n > m \geq \mathrm{N}\,.$$

  Nach dem Cauchy-Kriterium, angewandt auf die Partialsummenfolge s_n, ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ gleichmäßig konvergent.

Normale Konvergenz

In der neueren Literatur zu findende Verschärfung der kompakten Konvergenz:

Definition

Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ von Funktionen f_k: U $\rightarrow$ $\mathbb{C}$ (U offen in $\mathbb{C}$) heißt normal konvergent, wenn die Reihe auf jeder kompakten Teilmenge K $\subset$ U eine konvergente Majorante besitzt.

Kriterium von WEIERSTRASS:
Normale Konvergenz $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ kompakte (d.h. lokal gleichmäßige) Konvergenz.

Wichtigstes **Beispiel**: Geometrische Reihe in $\mathbb{C}$.
Bekannt: Die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \qquad (q \in \mathbb{R}) \qquad \text{konvergiert für } |q| < 1$$

und es gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \qquad (|q| < 1) \tag{1.1}$$

Beweis:
Betrachte:

$$(1 + q + q^2 + \ldots + q^n)(1 - q) = 1 + q + \ldots + q^n - (q + q^2 + \ldots + q^n + q^{n+1}) = 1 - q^{n+1}\,.$$

$$\Rightarrow 1 + q + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \qquad (q \neq 1)\,.$$

Da für $|q| < 1$ gilt $|q^n| = |q|^n \rightarrow 0$, folgt (1.1)

Analog für $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $z \in \mathbb{C}$: Zunächst gilt

$$1 + z + \ldots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \qquad (z \neq 1) \ .$$

Für $|z| < 1$ gilt, wegen $|z|^n \to 0$ für n$\to \infty$: Reihe konvergiert und es gilt:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}} \qquad (|z| < 1) \ .$$

<u>Beh.:</u> Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ konvergiert auf dem Einheitskreis $\mathbb{E}$ normal, also insbesondere lokal gleichmäßig (aber <u>nicht</u> gleichmäßig). Ferner gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z} \qquad (z \in \mathbb{E})$$

<u>Beweis:</u>
Nur noch normale Konvergenz nachzuweisen:
Sei K $\subset \mathbb{E}$ kompakt.
Kreisscheiben $(\mathrm{B}(0,\mathrm{r}))_{0<\mathrm{r}<1}$ bilden offene Überdeckung von K.
K kompakt $\Rightarrow$ es existieren endlich viele, in unserem Falle eine einzige Kreisscheibe B(0,ρ) $(0 < \rho < 1)$, welche K enthält.
Da auf B(0,ρ) — und damit auch auf K — die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ die konvergente Majorante $\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n$ besitzt, ist die normale Konvergenz gezeigt.

<u>Bem.:</u>
Außerhalb von $\mathbb{E}$ divergiert die geometrische Reihe. Für $|z| > 1$ gilt:

$$\begin{aligned} \left|\sum_{n=0}^{k} z^n\right| &= \left|\frac{1 - z^{k+1}}{1 - z}\right| = \frac{|z^{k+1} - 1|}{|1 - z|} \\ &\geq \frac{|z|^{k+1} - 1}{|1 - z|} \to \infty \qquad \text{für } k \to \infty \ . \end{aligned}$$

Auf $\partial\, \mathbb{E}$ divergiert die Reihe auch (später).

Kapitel 2

Holomorphe Funktionen

2.1 Differentiation im Komplexen

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offene Menge, $f\colon U \to \mathbb{C}$ komplexwertige Funktion, $z_0 \in U$ bel. Punkt. Analog zur reellen Analysis betrachten wir auch im Komplexen den Differenzenquotienten

$$z \mapsto \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad ,$$

definiert für alle $z \in U \setminus \{z_0\}$.

Da z_0 Häufungspunkt von $U \setminus \{z_0\}$ ist, ist die Frage nach der Existenz des Limes dieser Funktion für $z \to z_0$ sinnvoll.

Definition

$f : U \to \mathbb{C}$, U offen in $\mathbb{C}$, heißt in z_0 (komplex) differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert.
Statt $f'(z_0)$ schreibt man oft auch $\frac{df}{dz}(z_0)$.
Ist $f : U \to \mathbb{C}$ in jedem Punkt der offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ (komplex) differenzierbar, so heißt f holomorphe Funktion.

Beispiele

1. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto z^2$;
   f ist holomorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ und es gilt: $f'(z) = 2z$.
   Denn es gilt:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} (z + z_0) = 2z_0 \,, \qquad \forall\, z_0 \in \mathbb{C} \,.$$

2. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto |z|^2$
   Beh.: f ist komplex differenzierbar in 0:

$$\begin{aligned} \lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} &= \lim_{z \to 0} \frac{|z|^2 - 0}{z} = \\ &= \lim_{z \to 0} \frac{z \cdot \overline{z}}{z} = \lim_{z \to 0} \overline{z} = 0 \,. \end{aligned}$$

   Aber sonst nirgends $\Rightarrow$ f ist <u>nirgends holomorph.</u>

Anmerkung

Man sagt: f ist <u>holomorph in einem Punkt</u> $z_0 \in U$, falls f in einer <u>Umgebung</u> von z_0 komplex differenzierbar ist.

Beispiel 2) ist in 0 komplex differenzierbar, aber nicht holomorph.

Komplex differenzierbare Funktionen sind stetig, wie aus

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot \lim_{z \to z_0} (z - z_0) + f(z_0) = f'(z_0) \cdot 0 + f(z_0) = f(z_0)$$

ersichtlich ist.
Wie im Reellen zeigt man: Summe und Produkt holomorpher Funktionen $f, g : U \to \mathbb{C}$ sind holomorph.
Ferner gilt:

$$\begin{aligned} (f+g)' &= f' + g' \\ (f \cdot g)' &= f'g + fg' \qquad \text{(Produktregel)} \\ (\lambda f)' &= \lambda f' \qquad (\lambda \in \mathbb{C}) \ ; \end{aligned}$$

gilt $g(z) \neq 0, \forall z \in U$, so ist auch $\frac{f}{g}$ holomorph, und es gilt:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \qquad \text{(Quotientenregel).}$$

Beispiele

1. Für bel. $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\quad (z^n)' = nz^{n-1} \qquad$ (mit Induktion).
2. Jedes Polynom n-ten Grades $P_n(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$,
   $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$, ist holomorph auf $\mathbb{C}$ und besitzt die Ableitung
   $P'_n(z) = a_1 + 2a_2 z + \ldots + n \cdot a_n z^{n-1}$.
3. Jede rationale Funktion $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ $\quad$ P,Q Polynome in z,
   ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{\text{Nullstellen von } Q\}$.

<u>Äquivalente Formulierung der komplexen Differenzierbarkeit</u>

Sei $U \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in U$.

$$f : U \to \mathbb{C} \text{ ist in } z_0 \text{ differenzierbar} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists\, \varphi : U \to \mathbb{C} \text{, stetig in } z_0 \text{, mit:} \\ f(z) - f(z_0) = (z - z_0)\varphi(z) \,, \qquad \forall\, z \in U \,. \end{cases}$$

Beweis:

"$\Rightarrow$": Wir setzen

$$\varphi(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \quad , & z \neq z_0 \\ f'(z_0) \quad , & z = z_0 \end{cases}$$

Dann gilt $f(z) - f(z_0) = (z - z_0)\varphi(z)$, $\quad \forall\, z \in$ U ,
und

$$\lim_{z\to z_0} \varphi(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0) = \varphi(z_0) \; ;$$

also ist φ in z_0 stetig.
"$\Leftarrow$":

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} \varphi(z) = \varphi(z_0)$$

$\Rightarrow$ f ist in z_0 (komplex) differenzierbar (und $f'(z_0) = \varphi(z_0)$).

Kettenregel

> Seien f : U $\to$ $\mathbb{C}$, g: V $\to$ $\mathbb{C}$, holomorph, U,V offen in $\mathbb{C}$ und g(V) $\subset$ U. Dann ist auch
>
> $$f \circ g : \mathrm{V} \to \mathbb{C} : \quad z \to f(g(z))$$
>
> holomorph und es gilt:
>
> $$(f \circ g)' = (f' \circ g)g' \; .$$

Beweis:

Üblicherweise so:

$$\begin{array}{ccccc} \dfrac{f(g(z))-f(g(z_0))}{z-z_0} & = & \dfrac{f(g(z))-f(g(z_0))}{g(z)-g(z_0)} & \cdot & \dfrac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (f\circ g)'(z_0) & & f'(g(z_0)) & & g'(z_0) \end{array}$$

Nicht ganz stichhaltig, da Nullstellen von g(z) - g(z_0) auftreten können !!!

Deshalb Beweis mit äquivalenter Definition der komplexen Differenzierbarkeit:

Sei $z_0 \in$ V, $w_0 := g(z_0)$.
f in w_0 komplex differenzierbar $\Rightarrow \exists\, \varphi$: U $\to$ $\mathbb{C}$, stetig in w_0 mit
f(w) - f(w_0) = (w - w_0)φ (w) , $\forall$ w $\in$ U.
Ferner gilt : $\varphi(w_0) = f'(w_0)$.

Somit

$$\frac{f(g(z))-f(g(z_0))}{z-z_0} = \frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0} \cdot \varphi\,(g(z)) \; , \qquad \forall\, z \in \mathrm{V}\backslash\{z_0\} \; .$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
(f \circ g)'(z_0) : &= \lim_{z \to z_0} \frac{f(g(z)) - f(g(z_0))}{z - z_0} = \\
&= \lim_{z \to z_0} \left[\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \cdot \varphi\left(g(z)\right) \right] = \\
&= \lim_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \cdot \underbrace{\lim_{z \to z_0} \varphi\left(g(z)\right)}_{\varphi(w_0)} = \\
&= g'(z_0) \cdot \varphi(w_0) \\
&= g'(z_0) \cdot f'(w_0) = g'(z_0) \cdot f'(g(z_0)) \ .
\end{aligned}$$

2.2 Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen

Sei U $\subset$ $\mathbb{C}$ offen, $z_0 \in$ U, f: U $\to$ $\mathbb{C}$ in z_0 komplex differenzierbar.
Sei z = z_0 + h , h $\in$ $\mathbb{C}$ hinreichend klein.
($|h| < \delta$, so daß z_0 + h $\in$ U)

Dann existiert

$$f'(z_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + \mathrm{h}) - f(z_0)}{h} \ . \tag{2.1}$$

Setze f = u + iv, u = Re f , v = Im f, $z_0 = x_0 + iy_0$, h = t + is
Da der Limes in (2.1) für beliebige h $\in$ $\mathbb{C}$ (hinr. klein) existiert, gilt insbesondere (für s = 0):

$$\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{t \to 0} \frac{(\mathrm{u}(z_0 + t) + i\mathrm{v}(z_0 + t)) - (\mathrm{u}(z_0) + i\mathrm{v}(z_0))}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \left[\frac{\mathrm{u}(x_0 + t, y_0) - \mathrm{u}(x_0, y_0)}{t} + i \, \frac{\mathrm{v}(x_0 + t, y_0) - \mathrm{v}(x_0, y_0)}{t} \right] \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{\mathrm{u}(x_0 + t, y_0) - \mathrm{u}(x_0, y_0)}{t} + i \, \lim_{t \to 0} \frac{\mathrm{v}(x_0 + t, y_0) - \mathrm{v}(x_0, y_0)}{t} \\
&= \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}(x_0, y_0) + i \, \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}(x_0, y_0) \\
&= \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}(z_0) + i \, \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}(z_0)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{f'(z_0) = \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}(z_0) + i \, \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}(z_0)} \ . \tag{2.2}$$

Wählt man h = is (t = 0) so folgt:

$$\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{s \to 0} \frac{(\mathrm{u}(z_0 + is) + i\mathrm{v}(z_0 + is)) - (\mathrm{u}(z_0) + i\mathrm{v}(z_0))}{is} \\
&= -i \lim_{s \to 0} \left[\frac{\mathrm{u}(x_0, y_0 + s) - \mathrm{u}(x_0, y_0)}{s} + i \, \frac{\mathrm{v}(x_0, y_0 + s) - \mathrm{v}(x_0, y_0)}{s} \right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -i\left[\lim_{s\to 0}\frac{\mathrm{u}(x_0,y_0+s)-\mathrm{u}(x_0,y_0)}{s} + i\,\lim_{s\to 0}\frac{\mathrm{v}(x_0,y_0+s)-\mathrm{v}(x_0,y_0)}{s}\right]\\
&= -i\left[\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y}(x_0,y_0)+i\,\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}(x_0,y_0)\right]\\
&= -i\,\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y}(z_0)+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}(z_0)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \qquad \boxed{f'(z_0)=\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}(z_0)-i\,\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y}(z_0)}\,. \tag{2.3}
$$

Setzt man

$$
\frac{\partial f}{\partial x}:=\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}+i\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}\quad,\quad \frac{\partial f}{\partial y}:=\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y}+i\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\quad,
$$

so besagen (2.2) und (2.3), daß für jede holomorphe Funktion $f\colon \mathrm{U}\to\mathbb{C}$ und jeden Punkt $z\in\mathrm{U}$ gilt:

$$
\boxed{f'(z)=\frac{\partial f}{\partial x}(z)}\quad\text{und}\quad\boxed{f'(z)=-i\frac{\partial f}{\partial y}(z)}\,.
$$

Aus (2.2) und (2.3) folgt ferner:
Folgerung:
Isf f komplex differenzierbar in $\mathrm{z}\in\ \mathrm{U}$, so existieren auch die partiellen Ableitungen von $\mathrm{u}=\mathrm{Re}\,f$ und $\mathrm{v}=\mathrm{Im}\,f$ im Punkte z und es gilt:

$$
\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}(z) &= \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}(z)\\
\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y}(z) &= -\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}(z)
\end{aligned}\right.
\qquad \underline{\text{Cauchy-Riemannsche-Gleichungen}}\ .
$$

Beispiel:
$f(z)=z^{-1}=\frac{1}{z}$, definiert auf $\mathrm{U}=\mathbb{C}\setminus\{0\}$, ist holomorph.
Setze $z=x+iy$, $f=\mathrm{u}+i\mathrm{v}$.
Dann gilt:

$$
f=\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}
$$

$$
\Rightarrow\quad \mathrm{u}=\frac{x}{x^2+y^2}\ ,\qquad \mathrm{v}=\frac{-y}{x^2+y^2}
$$

$$
\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}=\frac{x^2+y^2-x2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\ ,\qquad \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}=-\frac{x^2+y^2-y2y}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\ ,
$$

$$
\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y}=-x\cdot\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\ ,\qquad \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}=y\cdot\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\ ,
$$

also sind die C.R. erfüllt.

Ferner ist

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x} + i\,\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 - y^2)^2} + i\,\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \\
&= \frac{y^2 - x^2 + 2xyi}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{x^2 - y^2 - 2xyi}{(x^2 + y^2)^2} = \\
&= -\frac{\overline{(x + iy)}^2}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{\overline{z}^2}{(z \cdot \overline{z})^2} = -\frac{1}{z^2}\ ,
\end{aligned}$$

wie man auch leicht mit Hilfe der Quotientenregel einsieht.
Allgemeiner gilt: $\boxed{(z^{-n})' = -nz^{-n-1}}$ (mit Induktion).

Aus den Cauchy-Riemannschen Gleichungen folgt, sofern $\mathrm{u} = \mathrm{Re}\, f$ und $\mathrm{v} = \mathrm{Im}\, f$ stetige partielle Ableitungen 2. Ordung besitzen (was später gezeigt wird):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \\
&= \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0\ .
\end{aligned}$$

Also gilt für den Realteil u einer holomorphen Funktion $f = \mathrm{u} + i\mathrm{v}$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\ .$$

Analog gilt für den Imaginärteil v :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0\ .$$

Mit Hilfe des Laplace-Operators $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ lassen sich die beiden Gleichungen wie folgt zusammenfassen:

u und v erfüllen die Laplace-Gleichung $\boxed{\Delta\ \mathrm{h} = 0}$,
d.h. u und v sind <u>harmonisch</u>.

Ferner folgt aus den Cauchy-Riemannschen Gleichungen:
Sei $\mathrm{U} \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend (=Gebiet), $f\colon \mathrm{U} \to \mathbb{C}$ holomorph.
Dann ist

$$\boxed{f' = 0 \Leftrightarrow f = const.}$$

Denn: $f' = \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial x} + i\dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial x} = 0$

$\Rightarrow \dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial x} = 0$ und $\dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial x} = 0$

C.R. $\Rightarrow \dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial y} = 0$ und $\dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial y} = 0 \Rightarrow \begin{aligned} \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}, \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}, \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$

$\Rightarrow$ u = const. , v = const.
$\Rightarrow f$ = const. Umkehrung ist trivial.

2.3 Unterschied zwischen reeller und komplexer Differenzierbarkeit

Vorbemerkung:
IR-lineare und $\mathbb{C}$-lineare Abb. in $\mathbb{C}$.
Identifiziert man $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$, z = x + iy = $\binom{x}{y}$, so läßt sich jede IR-lineare Abb: L : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit Hilfe einer Matrix A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ a,b,c,d, $\in \mathbb{R}$ darstellen,

L : $\binom{x}{y} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \binom{x}{y}$.

Insbesondere: $\mathrm{L}(1) = \mathrm{L}\binom{1}{0} = \binom{a}{c} = a + ic$,

$\mathrm{L}(i) = \mathrm{L}\binom{0}{1} = \binom{b}{d} = b + id$.

Ist nun L : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-linear, so muß gelten:

$\underbrace{\mathrm{L}(i)}_{b+id} = \mathrm{L}(i \cdot 1) = i \cdot \underbrace{\mathrm{L}(1)}_{a+ic} = i$a - c

$\Leftrightarrow \boxed{c = -b\ ,\ d = a}$;

sind umgekehrt diese Bedingungen erfüllt, so ist L $\mathbb{C}$-linear.

Damit gezeigt:

Lemma:
Folgende Aussagen über eine reelle Matrix A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sind äquivalent:

(1) die von A induzierte Abb.: L : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist $\mathbb{C}$-linear.

(2) Es gilt:

$$\boxed{c = -b\ ,\ d = a}. \tag{2.4}$$

Bem.:
Ist (2.4) erfüllt, so gilt:

$$\begin{aligned}\mathrm{L}(z) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \binom{x}{y} = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} \binom{x}{y} = \begin{pmatrix} ax - cy \\ cx + ay \end{pmatrix} = \\ &= (ax - cy) + i(cx + ay) = (a + ic)(x + iy)\end{aligned}$$

$\Rightarrow \boxed{\mathrm{L}(z) = (a + ic)z}$, d.h. Multiplikation mit komplexer Zahl $a + ic$.

Aus Analysis II bekannt:

Sei U $\subset$ $\mathbb{R}^2$ offen, f : U $\to \mathbb{R}^2$, $z_0 \in$ U.
$f = \binom{u}{v}$ ist in $z_0 = \binom{x_0}{y_0}$ reell (total) differenzierbar, wenn es eine IR-lineare Abb.:
L: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gibt mit

$$\lim_{h \to 0} \frac{\| f(z_0 + h) - f(z_0) - \mathrm{L}(h) \|}{\| h \|} = 0 .$$

Komplex geschrieben

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(z_0+h)-f(z_0)-\mathrm{L}(h)|}{|h|} = 0\ ;$$

äquivalent dazu

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)-\mathrm{L}(h)}{h} = 0\ . \tag{2.5}$$

Charakterisierung der komplexen Ableitung

Satz

Sei U $\subset$ $\mathbb{C}$ offen, f: U $\to$ $\mathbb{C}, z_o \in$ U.
Äquivalent sind

(1) f ist komplex differenzierbar in z_0

(2) f ist reell differenzierbar in z_0 und es gelten die Cauchy-Riemannschen Gleichungen

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}(z_0) \quad , \quad \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}(z_0)$$

Korollar:

Sei U $\subset$ $\mathbb{C}$ offen, f: U $\to$ $\mathbb{C}$ reell differenzierbar, f = u + iv.

Gilt $\left\{ \begin{array}{lcl} \dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial x} & = & \dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial y} & = & -\dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial x} \end{array} \right.$ d.h. die Cauchy-Riemannschen Gleichungen auf U, so ist f holomorph, und umgekehrt.

Beweis:

1) $\Rightarrow$ 2):Ist f in z_0 komplex differenzierbar, so gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h-f(z_0)-f'(z_0)h}{h} = 0\ .$$

Also ist (2.5) erfüllt, sofern wir L(h) := $f'(z_0)h$ definieren.
$\Rightarrow$ f ist in z_0 reell differenzierbar und die zugehörige lineare Abbildung L ist $\mathbb{C}$-linear.
Da L gegeben ist durch die Jacobi-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix} \quad ,$$

folgt aus der $\mathbb{C}$-Linearität von L (aufgrund des Lemmas)

$$\underbrace{\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}(z_0)}_{c} = -\underbrace{\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y}(z_0)}_{b} \qquad \text{und} \qquad \underbrace{\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}(z_0)}_{d} = \underbrace{\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}(z_0)}_{a}\ ,$$

d.h. die Cauchy-Riemannschen Gleichungen.

2) $\Rightarrow$ 1): Nach Voraussetzung gilt (2.5) mit einer $\mathbb{R}$-linearen Abb.: $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die aufgrund unseres Lemmas (und der Vor.(2)) $\mathbb{C}$-linear ist.
L hat somit die Gestalt:

$$L(h) = (\underbrace{\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}(z_0)}_{a} + i \underbrace{\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}(z_0)}_{c})h \;\; ;$$

folglich gilt, wegen (2.5):

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0) - (\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}(z_0))h}{h} = 0 \; .$$

Also existiert $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}(z_0) + i\dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}(z_0)$,
d.h. f ist in z_0 komplex differenzierbar.

Wirtinger-Ableitungen (für Mathematiker).

Sei $f = \mathrm{u} + i\,\mathrm{v} : \mathrm{U} \to \mathbb{C}$ reell differenzierbar in $z_0 \in \mathrm{U}$.
Wir wissen: Falls f in z_0 komplex differenzierbar ist gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}$$

Setze (für bel. in z_0 differenzierbare Funktion f):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0) & := \; \frac{1}{2}(\dfrac{\partial f}{\partial x} - i\dfrac{\partial f}{\partial y})(z_0) \\ \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) & := \; \frac{1}{2}(\dfrac{\partial f}{\partial x} + i\dfrac{\partial f}{\partial y})(z_0) \end{cases} \qquad \underline{\text{Wirtinger-Ableitungen}}$$

Dann gilt, falls $f = \mathrm{u} + i\mathrm{v}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0 \;\; &\Leftrightarrow \;\; \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \\ &\Leftrightarrow \;\; \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x} + i\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}\bigg|_{z_0} = -i(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y} + i\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y})\bigg|_{z_0} = -i\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\bigg|_{z_0} \end{aligned}$$

also $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}(z_0) = \dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}(z_0) \quad$ und $\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(z_0)$

(Cauchy-Riemannsche Gleichungen)

Damit insbesondere:
f: $\mathrm{U} \to \mathbb{C}$ ist holomorph $\Leftrightarrow$ f ist reell differenzierbar und $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$.
Ferner: Ist f holomorph, so gilt $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{df}{dz}$.
Beachte: Ist f: $\mathrm{U} \to \mathbb{C}$ komplexwertig, so ist f eine Funktion von z und $\overline{z}$, $f(z, \overline{z})$, denn $\mathrm{x} = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$, $\mathrm{y} = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.

Beispiel:

$f(z) = |z|^2 = z \cdot \overline{z}$
$\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = z = 0 \Leftrightarrow z = 0$, d.h. f ist nur in 0 komplex differenzierbar, f ist somit nirgends holomorph.

2.4 Die Exponentialfunktion

Merkmale der reellen Exponentialfunktion $\exp : x \to e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
($e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$) sind:

1) exp ist die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = y\ , \qquad y(0) = 1$$

2) exp genügt der Funktionalgleichung:

$$\boxed{f(x_1+x_2) = f(x_1)\cdot f(x_2)}\ , \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

3) exp besitzt die auf $\mathbb{R}$ konvergente Taylor-Entwicklung

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad (x \in \mathbb{R})\ .$$

Übertragung ins Komplexe:
Wir starten mit 1): Gesucht ist eine holomorphe Funktion
$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f'(z) = f(z),\ \forall\, z \in \mathbb{C}$,und$f(0) = 1$.
Sei $f = \mathrm{u} + i\mathrm{v}$. Falls f holomorph ist, ist $f' = \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x} + i\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}$

Bedingung: $f' = f \quad \Leftrightarrow \qquad \underbrace{\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x} = \mathrm{u}} \qquad$ und $\qquad \underbrace{\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x} = \mathrm{v}}$

Lösung: $\qquad \mathrm{u}(x,y) = A(y)\cdot e^x \qquad \mathrm{v}(x,y) = B(y)\cdot e^x$

Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial x} = \dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial y} & : \quad Ae^x = B'e^x \Leftrightarrow A = B' \\ \dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} & : \quad A'e^x = -Be^x \Leftrightarrow A' = -B \end{cases}$$

somit: $A = B' = -A'' \Rightarrow A'' + A = 0, A(0) = 1$ (da u(0,0) = 1), und $A'(0) = -B(0) = 0$ (da v(0,0) = 0)
$\Rightarrow A(y) = \cos y \Rightarrow B(y) = -A'(y) = \sin y$.

Als Lösung kommt nur in Frage die Funktion $f(z) = e^x(\cos y + i\sin y)$
f ist aber holomorph auf $\mathbb{C}$ (Cauchy-Riemann nachprüfen).
Herleitung zeigt: f ist die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems:
$f' = f \quad , \quad f(0) = 1$.
Wir definieren die komplexe Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ somit durch

$$\boxed{e^z := e^x(\cos y + i\sin y)} \quad , \quad \mathrm{z} = \mathrm{x} + i\mathrm{y}\ .$$

Eigenschaften:

$$(0) \begin{cases} z \to e^z \text{ ist holomorph auf } \mathbb{C} \\ e^z \text{ stimmt auf } \mathbb{R} \text{ mit der reellen Exponentialfunktion überein.} \\ |e^z| = e^{Rez} > 0 \Rightarrow e^z \text{ besitzt in } \mathbb{C} \text{ keine Nullstelle.} \end{cases}$$

(1) $\frac{d}{dz}e^z = e^z, e^0 = 1$ (löst Anfangswertproblem)

(2) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$ $, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ (Funktionalgleichung)

(3) $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut, gleichmäßig auf allen kompakten Teilmengen.

Beweis:
(0) klar

(1) klar nach Herleitung, aber auch so:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}e^z &= \frac{\partial}{\partial x}e^x \cos y + i\frac{\partial}{\partial x}e^x \sin y \\ &= e^x \cos y + ie^x \sin y = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z \ .\end{aligned}$$

(2) Betrachte Hilfsfunktion: $g(z) := e^{z_1+z_2-z} \cdot e^z$, holomorph auf $\mathbb{C}$.
$g'(z) = -e^{z_1+z_2-z} \cdot e^z + e^{z_1+z_2-z} \cdot e^z = 0, \forall\, z \in \mathbb{C}$
$\Rightarrow g(z) = const = g(0) = e^{z_1+z_2} \Rightarrow e^{z_1+z_2-z} \cdot e^z = e^{z_1+z_2}$ $, \forall\, z \in \mathbb{C}$.
Setze $z = z_2$ dann ist $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$.

(3) $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ hat konvergente Majorante auf $\mathbb{C}$, nämlich $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} = e^{|z|}$
$\Rightarrow$ Reihe konvergiert absolut und lokal gleichmäßig (nach Weierstraß).
Später wird gezeigt: Dann ist f holomorph und darf gliedweise differenziert werden:

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dz}(\frac{z^k}{k!}) = \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{z^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = f(z).$$

Wegen Eindeutigkeit des Anfanswertproblems folgt $f(z) = e^z, \forall z \in \mathbb{C}$.

Überraschung

Komplexe Exponentialfunktion hat Periode.
Denn es gilt $\boxed{e^{z+k\cdot 2\pi i} = e^z}$, $\forall z \in \mathbb{C}, \forall k \in \mathbb{Z}$.
Ferner gilt: $e^{z_1} = e^{z_2} \Rightarrow e^{z_1-z_2} = 1$. Setze $z_0 = z_1 - z_2$. Dann $e^{z_0} = 1$.
Aus $1 = e^{x_0}(\cos y_0 + i \sin y_0)$ folgt $\sin y_0 = 0$, also $y_0 = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.
Aus $1 = e^{x_0} \cos y_0$ folgt $\cos y_0 > 0$, also muß n gerade sein: $n = 2k$ $(k \in \mathbb{Z})$ und somit $y_0 = 2k\pi$. Wegen $\cos 2k\pi = 1$ folgt schließlich $x_0 = 0$.

$\Rightarrow z_0 = 2\pi ki \Rightarrow z_1 = z_2 + k2\pi i \Rightarrow$ $\boxed{\text{Periode } 2\pi i}$

Mit Hilfe der e-Funktion definiert man

$$\boxed{\begin{aligned}\cos z &= \tfrac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \\ \sin z &= \tfrac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})\end{aligned}}\ , z \in \mathbb{C} \ ;$$

$\cos z, \sin z$ sind holomorph auf $\mathbb{C}$ und stimmen im Reellen mit $\cos x$ und $\sin x$ überein.

Achtung:

cos-Funktion (und sin-Funktion) sind im Komplexen nicht mehr beschränkt, denn es gilt:

$$\left.\begin{array}{rclclcl} \cos iy &=& \frac{1}{2}(e^{-y}+e^{y}) &=& \cos hy && \\ \sin iy &=& \frac{1}{2i}(e^{-y}-e^{y}) &=& -\frac{1}{i}\sin hy &=& i\sin hy \end{array}\right\} \text{ unbeschränkt .}$$

Euler: $\boxed{e^{iz}=\cos z+i\sin z}$, insbesondere $\boxed{e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi}$, $\forall\,\varphi\in\mathbb{R}$.

Additionstheoreme:

Für alle z,w $\in\ \mathbb{C}$ gilt:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \cos(w+z) &=& \cos w\cos z-\sin w\sin z \\ \sin(w+z) &=& \sin w\cos z+\cos w\sin z \end{array}}$$

Denn

$$\begin{array}{rcl} e^{i(w+z)} &=& e^{iw+iz}=e^{iw}\cdot e^{iz}=(\cos w+i\sin w)(\cos z+i\sin z) \\ &=& \cos w\cos z-\sin w\sin z+i(\sin w\cos z+\cos w\sin z) \\ e^{-i(w+z)} &=& \cos w\cos z-\sin w\sin z-i(\sin w\cos z+\cos w\sin z)\ . \end{array}$$

Behauptung folgt durch Addition bzw. Subtraktion.

Ableitungen

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \frac{d}{dz}\cos z &=& -\sin z \\ \frac{d}{dz}\sin z &=& \cos z \end{array}}\ .$$

Kapitel 3

Komplexe Integration

3.1 Das komplexe Integral

Sei I $\subset$ $\mathbb{R}$ ein Intervall, I = [a,b], f: I$\rightarrow$ $\mathbb{C}$ eine stetige, komplexwertige Funktion.
Wir setzen
$$\int_I f(t)dt := \int_I \mathrm{Re}\, f(t)dt + i\int_I \mathrm{Im}\, f(t)dt \; .$$
Ausdehnung auf beliebige differenzierbare Wege in $\mathbb{C}$:

Unter einem parametrisierten Weg versteht man eine stetige Abbildung
γ: [a,b] $\rightarrow$ $\mathbb{C}$, häufig kurz mit z = z(t), a$\leq$t$\leq$b bezeichnet.
γ heißt stetig differenzierbarer, parametrisierter Weg, falls Re z(t) und Im z(t) stetig differenzierbar sind.
Zwei stetig differenzierbare, parametrisierte Wege $\gamma_1 : [a,b] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [c,d] \rightarrow \mathbb{C}$ heißen äquivalent, falls eine bijektive, stetig differenzierbare Funktion $\varphi : [c,d] \rightarrow [a,b]$ existiert mit $\varphi' > 0$ und $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$ (Äquivalenzrelation).
Ein stetig differenzierbarer Weg ist dann eine Äquivalenzklasse stetig differenzierbarer, parametrisierter Wege.
Sei W ein solcher Weg, parametrisiert durch z = z(t), a $\leq$t$\leq$b.
z(a) heißt Anfangspunkt von W, z(b) Endpunkt von W.
|W| = { z(t) : a$\leq$t$\leq$b } heißt Träger von W.
W heißt geschlossen, falls Anfangspunkt = Endpunkt.
Unter einem stückweise stetig differenzierbaren Weg W verstehen wir ein n-Tupel stetig differenzierbarer Wege W$_k$ (k = 1,...,n) mit Endpunkt W$_k$ = Anfangspunkt W$_{k+1}$ (k = 1,...,$n-1$).

Beispiel:

Die Funktion $z(t) = z_0 + re^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$ parametrisiert die Kreislinie um z_0 mit Radius r.
Integral längs Weg W .
Sei W ein stetig differenzierbarer Weg, parametrisiert durch z(t)=x(t) + iy(t) ,
$f : |W| \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion.
Wir setzen: $g(t) = f(z(t)) \cdot \dot{z}(t), a \leq t \leq b, \dot{z}(t) = \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{dx}{dt} + i\dfrac{dy}{dt}$;
g ist stetig auf [a,b], also ist
$$I = \int_a^b f(z(t))\, \dot{z}(t)dt \qquad \text{wohl definiert.}$$

Behauptung:

I ist unabhängig von der Wahl der Parametrisierung von W.

Sei $\tilde{z}(\tau), c \leq \tau \leq d$ eine zweite, äquivalente Parametrisierung.
$\Rightarrow \exists\, \varphi : [c,d] \to [a,b]$ mit $z(\varphi(\tau)) = \tilde{z}(\tau)\ ,\ \forall\, c \leq \tau \leq d$.
Aus $\frac{d}{d\tau} z(\varphi(\tau)) = \dot{z}(\varphi(\tau)) \cdot \dot{\varphi}(\tau)$ folgt
$\int_a^b f(z(t))\,\dot{z}(t)dt = \int_c^d f(z(\varphi(\tau))) \cdot \dot{z}(\varphi(\tau)) \cdot \dot{\varphi}(\tau)d\tau = \int_c^d f(\tilde{z}(\tau)) \cdot \dot{\tilde{z}}(\tau)d\tau$.
Dies berechtigt zur folgenden

Definition:

Sei W ein Weg in $\mathbb{C}$. Unter dem Integral der stetigen Funktion $f : |W| \to \mathbb{C}$ längs W verstehen wir die komplexe Zahl

$$\boxed{\int_W f(z)dz := \int_a^b f(z(t))\,\dot{z}(t)dt},$$

wobei z = z(t) , $a \leq t \leq b$, irgendeine Parametrisierung des stetig differenzierbaren Weges W bezeichnet.

Beispiele:

1) Sei $f(z) = z^2, W_1 =$ Weg parametrisiert durch $z(t) = t,\ \ -1 \leq t \leq 1$.
$\int_{W_1} z^2 dz = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3}$
Sei W_2 parametrisiert durch $z(t) = e^{i(\pi - t)},\ 0 \leq t \leq \pi$
$\int_{W_2} z^2 dz = -i\int_0^\pi e^{2i(\pi-t)} \cdot e^{i(\pi-t)}dt = -i\int_0^\pi e^{3(\pi-t)i}dt = \frac{2}{3}$.

2) Sei $f(z) = (z - z_0)^k, k \in \mathbb{Z}, z_0 \in \mathbb{C}$ (für negative k nur auf $\mathbb{C}\backslash\{z_0\}$ definiert).
Als Weg wählen wir die Kreislinie C mit Mittelpunkt z_0 und Radius $r > 0$.
Beh.: $\int_C (z - z_0)^k dz = \begin{cases} 0 & , k \neq -1 \\ 2\pi i & , k = -1 \end{cases}$
Wähle Parametrisierung $z(t) = z_0 + re^{it}\ ,\ 0 \leq t \leq 2\pi$.
Es gilt $\dot{z}(t) = r\, ie^{it}$, also

$$\begin{aligned}
\int_C (z - z_0)^k dz &= \int_0^{2\pi} r^k e^{ikt} r i e^{it} dt = ir^{k+1}\int_0^{2\pi} e^{i(k+1)t}dt = \\
&= ir^{k+1}\int_0^{2\pi} [\cos(k+1)t + i\sin(k+1)t]dt = \\
&= ir^{k+1}\Big[\int_0^{2\pi}\cos(k+1)tdt + i\int_0^{2\pi}\sin(k+1)t\ dt\Big] = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq -1 \\ 2\pi i & \text{falls } k = -1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Eigenschaften des Integrals

1) $\mathbb{C}$-Linearität: Für bel. a,b $\in \mathbb{C}$, $f,g : |W| \to \mathbb{C}$ stetig gilt:

$$\int_W (af(z) + bg(z))dz = a\int_W f(z)dz + b\int_W g(z)dz$$

2) Sei $W = (W_1, W_2)$ mit Endpunkt W_1 = Anfangspunkt W_2.
Wir schreiben: $W = W_1 + W_2$. Dann gilt :

$$\int_{W_1+W_2} f dz = \int_{W_1} f dz + \int_{W_2} f dz$$

3) Bezeichnet $-W$ den entgegengesetzt durchlaufenen Weg von W (d.h. ist W parametrisiert durch $z(t), a \le t \le b$, so ist t $\mapsto z((a-t)+b)$ die Parametrisierung von $-W$), so gilt

$$\int_{-W} f dz = -\int_W f dz$$

Erweiterung

Für stückweise setig differenzierbare Wege $W = (W_1, \ldots, W_n)$ setzen wir

$$\int_W f(z)dz := \sum_{i=1}^{n} \int_{W_i} f(z)dz$$

Reelles Kurvenintegral

Sei W ein stetig differenzierbarer Weg, parametrisiert durch $z(t)$, $a \le t \le b$, $z(t) = x(t) + iy(t)$, und u : $|W| \to \mathbb{R}$ eine stetige reelle Funktion. Wir setzen

$$\boxed{\int_W u(z)|dz| := \int_a^b u(z(t))|\dot{z}(t)|dt}$$

(Integral ist unabhängig von Parametrisierung.)

Für u $\equiv$ 1 ist

$$\int_W |dz| = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}dt = \underline{\text{Länge}} \text{ von } W.$$

Beh.: Für f : |W| $\to \mathbb{C}$ stetig gilt:

$$\boxed{|\int_W f(z)dz| \le \int_W |f(z)|\,|dz|} \quad \text{(wichtige Abschätzung)}$$

Beweis:

Sei $z(t), a \le t \le b$, eine Parametrisierung von W.

Setze $I := \int_W f dz$ und $g(t) = f(z(t))\ \dot{z}(t)$, $a \le t \le b$.
Dann gilt:

$I = |I|\, e^{i\Phi}$ für ein $\Phi \in [0, 2\pi)$ und somit

$$\begin{aligned}
|I| &= I \cdot e^{-i\Phi} = e^{-i\Phi} \int_a^b g(t)dt = \\
&= \int_a^b e^{-i\Phi} g(t)dt \\
&= \int_a^b \mathrm{Re}[e^{-i\Phi} g(t)]dt + i \int_a^b \mathrm{Im}[e^{-i\Phi} g(t)]\, dt \ .
\end{aligned}$$

Letztes Integral verschwindet, da $|I|$ (auf linker Seite) reell ist.
Aus $\mathrm{Re}(e^{-i\Phi} g(t)) \leq |e^{-i\Phi} g(t)| = |g(t)|$ folgt somit

$$|I| \leq \int_a^b |g(t)|dt = \int_a^b |f(z(t))|\, |\dot{z}|dt = \int_W |f|\, |dz| \ .$$

Anwendung

Satz

Sei U $\subset$ $\mathbb{C}$ offen, f_n : U $\rightarrow$ $\mathbb{C}$ eine Folge stetiger Funktionen die lokal gleichmäßig gegen eine (stetige) Funktion f konvergiert, und W ein stückweise stetig differenzierbarer Weg in U. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_W f_n dz = \int_W f dz$$

Beweis:

OBdA sei W stetig differenzierbar; $z(t), a \leq t \leq b$, eine Parametrisierung von W. Da $|W|$ kompakt ist, konvergiert nach Voraussetzung (f_n) auf $|W|$ gleichmäßig, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert N $\in$ $\mathbb{N}$ sodaß

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \qquad \text{für alle n} \geq \text{N} \ , \ \forall\, z \in |W|$$

Also gilt für alle n $\geq$ N:

$$\begin{aligned}
\left| \int_W f_n dz - \int_W f dz \right| &= \left| \int_W (f_n - f) dz \right| \\
&\leq \int_W |f_n(z) - f(z)|\, |dz| \\
&\leq \int_W \varepsilon\, |dz| = \varepsilon \cdot \int_W |dz| = \varepsilon \cdot \text{Länge von W.}
\end{aligned}$$

3.2 Stammfunktionen

Zur Erinnerung: Der Fundamentalsatz der Integral- und Differentialrechnung besagt:

1) Jede stetige, reelle Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ besitzt eine Stammfunktion F, d.h. es gilt $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar und $F' = f$.

2) Ist F Stammfunktion der stetigen Funktion f, so gilt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Frage: Inwiefern überträgt sich der Hauptsatz ins Komplexe ?
Wir beginnen mit der

Definition

Sei U $\subset \mathbb{C}$ offen. Die Funktion $f :$ U $\to \mathbb{C}$ besitzt eine Stammfunktion $F :$ U $\to \mathbb{C}$, falls F in jedem Punkt $z \in$ U komplex differenzierbar ist (also F holomorph ist) und

$\boxed{F'(z) = f(z)}$ für alle z $\in$ U.

Beispiele:

1) Beh.: $f(z) = z^n$ (n $\in \mathbb{N}_0$) besitzt Stammfunktion auf $\mathbb{C}$
Denn $F(z) = \dfrac{z^{n+1}}{n+1}$ erfüllt $F'(z) = f(z)$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$.

2) $f(z) = z^{-n}, n \in \mathbb{N}$, ist definiert auf G $= \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
Für n $\neq 1$ besitzt f Stammfunktion , da $F(z) = \dfrac{z^{1-n}}{1-n}$ die Eigenschaft $F' = f$ besitzt.
Frage: Wie ist es für n = 1 ? Wir zeigen: $f(z) = \frac{1}{z}$ besitzt auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ keine Stammfunktion.
(im Gegensatz zum Reellen)

Dazu zunächst:
Satz

Sei U offen in $\mathbb{C}$, $f : U \to \mathbb{C}$ stetig und W ein beliebiger, stückweise stetig differenzierbarer Weg in U mit Anfangspunkt z_0 und Endpunkt z_1.
Besitzt f eine Stammfunktion $F : U \to \mathbb{C}$, so gilt

$$\int_W f(z)dz = F(z_1) - F(z_0).$$

Insbesondere gilt

$$\int_W f(z)dz = 0 \quad , \quad \text{für jeden geschlossenen Weg in U.}$$

Beweis:

Sei $F = \mathrm{u} + i\mathrm{v}$ holomorph auf U mit $F' = f$, d.h.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{dF}{dz} = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x} + i\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x} = \\ &= -i \cdot \frac{\partial F}{\partial y} = -i(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y} + i\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}) \ . \end{aligned}$$

Sei $z(t), a \leq t \leq b$, eine Parametrisierung von W, oBdA stetig differenzierbar.
Kettenregel:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F(z(t)) &= \frac{d}{dt}\left[\mathrm{u}(x(t),y(t)) + i\mathrm{v}(x(t),y(t))\right] = \\ &= \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}\,\dot{x} + \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y}\,\dot{y} + i\left[\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}\,\dot{x} + \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\,\dot{y}\right] = \\ &= \underbrace{\left[\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x} + i\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}\right]}_{f(z(t))}\dot{x} + \underbrace{\left[\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y} + i\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\right]}_{if(z(t))}\dot{y} = \\ &= f(z(t))(\dot{x} + i\dot{y}) = f(z(t))\dot{z}(t) \ . \end{aligned}$$

Somit

$$\begin{aligned} \int_W f dz &= \int_a^b f(z(t))\dot{z}dt = \int_a^b \frac{d}{dt}F(z(t))dt = \\ &= F(z(t))\Big|_{t=a}^{t=b} = F(z_1) - F(z_0) \ . \end{aligned}$$

Zurück zu Beispiel 2) : $f(z) = z^{-1}$ besitzt keine Stammfunktion auf $\mathrm{G} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
Denn falls Stammfunktion existiert, folgt für jede Kreislinie C um 0 :

$$\int_C f(z)dz = 0, \quad \text{im WS zu } \int_C \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0 \ .$$

Wir wollen jetzt aber zeigen: Lokal, d.h. auf jeder Kreisscheibe, besitzt jede holomorphe Funktion eine Stammfunktion.
Dazu folgendes Resultat: Sei Δ das Dreieck mit den Eckpunkten $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$:

$$\Delta = \{t_1 z_1 + t_2 z_2 + t_3 z_3 \ : \ t_1 + t_2 + t_3 = 1, \ 0 \leq t_i \leq 1\};$$

zugehöriger Dreiecksweg T (Rand parametrisiert):
$T = (S_1, S_2, S_3)$, wobei Strecken S_i parametrisiert durch
$t \mapsto z_j + t(z_{j+1} - z_j) \ : \ [0,1] \to \mathbb{C}\ (z_4 := z_1)$, j = 1,2,3.

Hilfssatz:

Sei $f : B(z_0, r) \to \mathbb{C}$ stetig auf der offenen Kreisscheibe $B(z_0, r)$ mit Mittelpunkt z_0 und Radius r. Äquivalent sind

1) f besitzt Stammfunktion F.

2) Für jedes in B enthaltene Dreieck Δ mit Dreiecksweg T gilt:

$$\int_T f(z)dz = 0 \; .$$

<u>Beweis:</u>

1) $\Rightarrow$ 2) Spezialfall obigen Satzes
2) $\Rightarrow$ 1): Sei $z \in B(z_0, r)$ beliebig und $S_{z_0 z}$ die Strecke von z_0 nach z.
Setze $F(z) := \int_{S_{z_0 z}} f(\zeta)d\zeta$.
Beh.: F ist Stammfunktion von f.
Sei $z \in B(z_0, r)$. Da B offen ist, existiert $B(z, \rho)$ mit $\overline{B(z, \rho)} \subset B(z_0, r)$.
Für $h \in \mathbb{C}$ mit $|h| < \rho$ liegt $S_{z,z+h}$ in $B(z_0, r)$, also auch das Dreieck mit den Eckpunkten $z_0, z + h$ und z .
Sei T der zugehörige Dreiecksweg. Nach Voraussetzung gilt:

$$0 = \int_T f(\zeta)d\zeta = F(z+h) - \int_{S_{z,z+h}} f dz - F(z)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) &= \frac{1}{h}\int_{S_{z,z+h}} f d\zeta - f(z) = \\ &= \frac{1}{h}\int_{S_{z,z+h}} (f(\zeta) - f(z))d\zeta \; . \end{aligned}$$

Stetigkeit: Zu $\varepsilon > 0$ exist. $\delta > 0$ mit $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon \quad , \quad \forall\, \zeta \in \mathbb{C}$ mit $|z - \zeta| < \delta$.
Folglich

$$\begin{aligned} \left|\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z)\right| &\leq \frac{1}{|h|}\int_{S_{z,z+h}} |f(\zeta) - f(z)|\,|d\zeta| \\ &\leq \frac{1}{|h|} \cdot \varepsilon \cdot |h| = \varepsilon \; , \end{aligned}$$

und damit $F'(z) = f(z)$.
<u>Bemerkung:</u>
Beweis zeigt, daß das Lemma auch für <u>sternförmige</u> Gebiete gilt. (G heißt sternförmig bzgl. $z_0 \in$G, falls mit jedem Punkt $z \in$ G auch die Verbindungsstrecke $S_{z_0 z}$ in G liegt.)

Satz von CAUCHY-GOURSAT

Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph auf der offenen Menge U $\subset \mathbb{C}$. Dann gilt für jedes in U enthaltene Dreieck Δ mit zugehörigem Dreiecksweg T: $$\int_T f(z)dz = 0 \,.$$

Beweis:

Unterteile Δ in 4 kongruente Dreiecke, durch Halbieren der Seiten. Ergibt Dreieckswege T_1, T_2, T_3, T_4. Strecken im Innern von Δ werden zweimal durchlaufen, aber in entgegengesetzter Richtung.
$\Rightarrow$ Integrale heben sich auf. Also

$$\int_T f dz = \int_{T_1} f dz + \int_{T_2} f dz + \int_{T_3} f dz + \int_{T_4} f dz \,.$$

Idee: Wähle dasjenige Dreieck Δ_1 aus, dessen Randintegral maximalen Betrag hat.
Dann gilt:

$$|\int_T f dz| \leq 4\, |\int_{T^{(1)}} f dz| \,, \text{ wobei } T^{(1)} \text{ den zu } \Delta_1 \text{ gehörigen Dreiecksweg bezeichnet.}$$

Nächster Schritt: Unterteile Δ_1 in 4 kongruente Dreiecke und wähle $\Delta_2 \subset \Delta_1$ so aus, daß dessen Randintegral maximalen Betrag hat. Dann gilt, falls $T^{(2)}$ der zugehörige Dreiecksweg von Δ_2 ist

$$|\int_{T^{(1)}} f dz| \leq 4\, |\int_{T^{(2)}} f dz| \,.$$

Also

$$|\int_T f dz| \leq 4^2 |\int_{T^{(2)}} f dz| \,.$$

Sodann induktiv dieses Verfahren fortsetzen!
Es existiert eine absteigende Folge von Dreiecken $(\Delta_n)_{n \in IN}$ mit

$$|\int_T f dz| \leq 4^n |\int_{T^{(n)}} f dz| \quad \text{,wobei } T^{(n)} = \text{Dreiecksweg von } \Delta_n.$$

Sei u_n der Umfang des Dreiecks Δ_n. Dann gilt nach Konstruktion

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n, \quad \text{also} \quad u_n = 2^{-n} u_0 \,, \text{ wobei } u_0 = \text{Umfang von } \Delta.$$

Da Δ_n kompakt ist, und die Folge absteigend, gilt nach dem Durchschnittsatz

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n \neq \emptyset$$

Es gibt also einen (sogar genau einen) Punkt $z_0 \in \Delta$, der in allen Dreiecken Δ_n enthalten ist. Da f in z_0 komplex differenzierbar ist , existiert zu $\varepsilon > 0$ eine Kreisscheibe $B(z_0, r) \subset$ U sodaß

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon, \quad \text{sobald } z \in B(z_0, r) \backslash \{z_0\} \,.$$

Setze $R(z) := f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)$.
Dann gilt

$$|R(z)| < \varepsilon|z - z_0| \ , \quad \forall\, z \in B(z_0, r) \ .$$

Aus $u_n = 2^{-n}\, u_0$ folgt die Existenz eines $n_1 \in \mathbb{N}$ sodaß $u_n < r$ für alle $n \geq n_1$.
Da Hypothenuse von $\Delta_{n_1} < u_{n_1} < r$, und $z_0 \in \Delta_{n_1}$ folgt:

$$\Delta_{n_1} \subset B(z_0, r) \ .$$

Somit gilt für alle $z \in \Delta_{n_1}$:

$$|R(z)| \leq \varepsilon|z - z_0| \leq \varepsilon \cdot u_{n_1} \ .$$

Ferner gilt

$$\int_{T^{(n_1)}} [\ \underbrace{f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0)}_{\substack{\text{Polynom in z} \to \text{hat} \\ \text{Stammfunktion}}}\ ]dz = 0$$

Also

$$\begin{aligned}
|\int_{T^{(n_1)}} f dz| &= |\int_{T^{(n_1)}} [f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + R(z)]dz| \\
&= |\int_{T^{(n_1)}} R(z)dz| \leq \int_{T^{(n_1)}} \underbrace{|R(z)|}_{\leq \varepsilon \cdot u_{n_1}} |dz| \leq \\
&\leq \varepsilon \cdot u_{n_1} \cdot \int_{T^{(n_1)}} |dz| = \varepsilon \cdot u_{n_1}^2 \ .
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
|\int_T f dz| &\leq 4^{n_1} |\int_{T^{(n_1)}} f dz| \leq 4^{n_1} \cdot \varepsilon \cdot u_{n_1}^2 \\
&= 4^{n_1} \cdot \varepsilon (2^{-n_1} \cdot u_0)^2 = \varepsilon \cdot u_0^2 \ .
\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig, folgt

$$|\int_T f dz| = 0 \text{ , also auch } \int_T f dz = 0 \ .$$

Cauchy-Goursat + Lemma ergibt:

Satz:

Jede auf einer Kreisscheibe (allg. sternförmigem Gebiet) holomorphe Funktion besitzt eine Stammfunktion.

Mit anderen Worten: "lokal" besitzt jede holomorphe Funktion eine Stammfunktion, aber nicht global.

Aus der Analysis III -Vorlesung ist bekannt:

Satz von Gauss (in $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$)

Sei U $\subset$ $\mathbb{C}$ offen , $\vec{w} = (u, v)$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf U und G ein glatt (bzw. stückweise glatt) berandetes Gebiet mit $\overline{G} \subset$ U . Dann gilt

$$\iint_G div\, \vec{w}\, dxdy = \int_{\partial G} (\vec{w}, \vec{n}) ds \ ,$$

wobei $\vec{n}$ = äußeres Normalen-Einheitsfeld.

Wir geben nun eine

Funktionentheoretische Fassung des Satzes von Gauß

Definition: Gebiet G heißt positiv berandet, falls G stets "links" von $\Gamma = \partial G$ liegt.
Dies besagt, daß für jede Randkomponente $\Gamma_j (j = 1, \dots, n)$ von Γ gilt:
Ist $z_j(t)$, $(0 \le t \le 1)$, eine Parametrisierung des geschlossenen Weges Γ_j , so existiert zu jedem $t_0 \in [0, 1]$ ein $\delta_0 > 0$ mit folgender Eigenschaft:
Sei $\tilde{n}_j(t_0) := i \cdot \dot{z}_j(t_0)$ (Normalenvektor, nicht normiert)
Dann gilt für alle $0 < \lambda < \delta_0$
$z_j(t_0) + \lambda\, \tilde{n}_j(t_0) \in G$
$z_j(t_0) - \lambda\, \tilde{n}_j(t_0) \notin G$.

Sei zunächst $f : U \to \mathbb{C}$ nur reell stetig differenzierbar, $f = u + iv$.
Setze $\vec{w} = (u, -v) = \overline{f}$; $\vec{w}$ ist stetig differenzierbar (reell).
Sei G mit $\overline{G} \subset U$ ein positiv berandetes Gebiet mit Rand $\Gamma = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_n)$.
Äußeres Normalen-Einheitsfeld ist gegeben durch

$$\vec{n}(t) := -i \frac{\dot{z}(t)}{|\dot{z}(t)|} = \frac{1}{|\dot{z}|}(\dot{y} - i\dot{x}) = (n_1, n_2) \ ,$$

wobei $\qquad n_1 = \dfrac{\dot{y}(t)}{|\dot{z}(t)|} \quad , \quad n_2 = -\dfrac{\dot{x}(t)}{|\dot{z}(t)|} \qquad .$

Betrachte

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_i} (\overline{f}, \vec{n}) ds &= \int_0^1 (un_1 - vn_2)|\dot{z}|dt \\ &= \int_0^1 (u\dot{y} + v\dot{x})dt = Im \int_0^1 (u + iv)(\underbrace{\dot{x} + i\dot{y}}_{\dot{z}})dt = \\ &= Im \int_{\Gamma_i} f(z) dz \ . \end{aligned}$$

Ferner gilt:
$div \overline{f} = \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} = 2 \cdot Re \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}$, wobei $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}(\dfrac{\partial f}{\partial x} + i \dfrac{\partial f}{\partial y})$; also

$$\iint_G div\, \overline{f} dxdy = Re\, 2 \iint_G \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} dxdy = Im\, 2i \iint_G \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} dxdy \ .$$

Gauß:

$$\iint_G div\, \overline{f} dxdy = \int_\Gamma (\overline{f}, \vec{n}) ds \ .$$

Eingesetzt:

$$Im 2i \iint_G \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} dxdy = Im \int_\Gamma f(z)dz\ .$$

$f \mapsto if$:

$$\underbrace{Im(-2) \iint_G \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} dxdy}_{Re\ 2i \iint_G \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} dxdy} = Im\ i \int_\Gamma f(z)dz = Re \int_\Gamma f dz\ .$$

Total

$$\boxed{2i \iint_G \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} dxdy = \int_\Gamma f(z)dz}$$

Gauß (Stokes) in komplexer Form

Cauchy-Riemann:

f holomorph $\Leftrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$. Wir erhalten somit das

Resultat

Sei U $\subset\ \mathbb{C}$ offen, G $\subset \overline{G} \subset U$ ein positiv berandetes Gebiet mit stückweise glattem Rand Γ, $f : U \to\ \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit stetiger Ableitung. Dann gilt:

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0\ .$$

Bemerkung:

Auf die Stetigkeit der Ableitung von f kann – wie etwas später gezeigt wird – verzichtet werden. Dieses Resultat ist deshalb nur eine vorläufige Fassung des sog. Cauchy'schen Integralsatzes.

Cauchy'sche Integralformel

Voraussetzungen wie im Resultat. Sei $z_0 \in G$. Betrachte $g(z) = \dfrac{f(z)}{z - z_0}$ auf U $\setminus\{z_0\}$. g ist holomorph und besitzt eine stetige Ableitung. Sei $B(z_0, \rho)$ eine Kreisscheibe mit $\overline{B(z_0, \rho)} \subset G$.

Setze $G' = G \setminus B(z_0, \rho)$.

G' ist positiv berandet, sofern ∂B negativ orientiert wird. Auf g und G' wenden wir den Gauß, bzw. das obige Resultat an ($\Gamma' = \partial G'$):

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma'} g(z)dz = \int_{\Gamma'} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \\ &= \int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \int_{C_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \qquad (C_\rho = \partial B(z_0, \rho)). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Aber

$$\int_{C_\rho} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = \int_{C_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0} - f(z_0) \underbrace{\int_{C_\rho} \frac{dz}{z - z_0}}_{= 2\pi i}\ .$$

Ferner

$$\begin{aligned}
\left|\int_{C_\rho} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\right| &\leq \int_{C_\rho} \frac{|f(z)-f(z_0)|}{\underbrace{|z-z_0|}_{=\rho}}|dz| \\
&\leq \sup_{z\in C_\rho}|f(z)-f(z_0)|\,\frac{1}{\rho}\underbrace{\int_{C_\rho}|dz|}_{=2\pi\rho} \\
&= 2\pi\sup_{C_\rho}|f(z)-f(z_0)| \to 0\,, \qquad \text{für } \rho\to 0 \text{ aufgrund der Stetigkeit von } f.
\end{aligned}$$

Aus (3.1) folgt somit für $\rho \to 0$:

$$2\pi i\, f(z_0) = \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz\ .$$

Umbenennung: $z_0 \to z$ und $z \to \zeta$.
Dann

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta\ , \qquad \text{Cauchy'sche Integralformel.}$$

Um die vorausgesetzte Stetigkeit der Ableitung von f loszuwerden, verwenden wir nun einen

Trick.

Sei f : U $\to \mathbb{C}$, U offen in $\mathbb{C}$, eine bel. holomorphe Funktion. Auf jeder in U enthaltenen Kreisscheibe $B = B(z_0, r)$ besitzt f eine Stammfunktion F. Wende Cauchy-Formel zunächst auf diese Stammfunktion F an.
Nach Voraussetzung gilt: $F' = f$
Es ist somit F' stetig, weil f als komplex differenzierbare Funktion stetig ist.
Also darf man F in obige Formel einsetzen. Es folgt

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta\ , \qquad \forall\, z \in\ B(z_0,\rho)\ ,$$

wobei C_ρ eine Kreislinie mit M.P. z_0 und Radius $0 < \rho < r$ bezeichnet.
Da der Kern $z \to \dfrac{1}{\zeta - z}$ auf $\mathbb{C}\setminus\{\zeta\}$ beliebig oft differenzierbar ist und wir unter dem Integral differenzieren dürfen, folgt:
F ist auf $B(z_0,\rho)$ und damit, da $B(z_0, r)$ und $0 < \rho < r$ beliebig wählbar waren, auf ganz U beliebig oft komplex differenzierbar. Insbesondere ist $f = F'$ beliebig oft komplex differenzierbar, also f' stetig.

Folgerung

Aus der Holomorphie von $f : U \to \mathbb{C}$ folgt die Stetigkeit der Ableitung f'.
Also dürfen wir die Stetigkeitsvoraussetzung von f' im obigen Resultat wie auch in der anschließenden Integralformel streichen.
Wir erhalten somit

Satz (Cauchy'scher Integralsatz für positiv berandete Gebiete).

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und G mit $\overline{G} \subset U$ ein positiv berandetes Gebiet mit (orientiertem) stückweise glattem Rand Γ. Dann gilt:

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0 \; .$$

Ferner gilt:

Satz (Cauchy'sche Integralformel)

Unter den Voraussetzungen des Cauchy'schen Integralsatzes gilt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \; , \qquad \forall\, z \in G \; .$$

Durch differenzieren nach z folgt für die n-te Ableitung der folgende

Zusatz

$$\boxed{f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta} \; , \forall\, z \in G.$$

Anwendungen:

Satz von Morera

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ stetig. Äquivalent sind:

(i) f ist holomorph

(ii) für alle in U liegenden Dreiecke Δ mit Dreiecksweg T gilt:

$$\int_T f(z)dz = 0$$

Beweis

(i) $\Rightarrow$ (ii) Cauchy-Goursat.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Es genügt, die Holomorphie von f auf jeder in U liegenden Kreisscheibe nachzuweisen.

Sei also o.E. U = B = Kreisscheibe.

Wir haben früher gezeigt (Hilfssatz):
Aus Bedingung (ii) folgt die Existenz einer Stammfunktion $F : B \to \mathbb{C}$ von f. Nach obiger Überlegung ist aber mit F auch dessen Ableitung $F' = f$ holomorph $\Rightarrow$ Beh.

Satz (Cauchy'sche Abschätzung)

Ist f auf U holomorph und beschränkt, d.h. $|f(z)| \leq M$, $\forall\, z \in U$, so gilt für die n-te Ableitung $f^{(n)}$:

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \leq \frac{n!}{(dist(z, \partial U))^n} M, \quad \text{wobei } dist(z, \partial U) = \inf_{\zeta \in \partial U} |\zeta - z| \ .$$

<u>Beweis</u>

Sei $\delta = dist(z, \partial U)$. Dann gilt $B(z, \delta) \subset U$.
Auf $B(z, \delta)$ wenden wir die Cauchy-Formel an:
Sei $C = C(z, r)$ die Kreislinie mit Mittelpunkt z und Radius r , $0 < r < \delta$.
Es folgt

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z)| &= \frac{n!}{2\pi} \left| \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}} \right| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} \int_C \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|^{n+1}} |d\zeta| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi r^{n+1}} M \int_C |d\zeta| = \frac{n!}{r^n} M \ . \end{aligned}$$

Da $0 < r < \delta$ beliebig wählbar ist, folgt die Behauptung.

Satz von Liouville

Jede auf ganz $\mathbb{C}$ definierte, holomorphe und beschränkte Funktion ist konstant.

<u>Beweis</u>

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und beschränkt, $|f(z)| \leq M$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$.
Sei $z \in \mathbb{C}$ beliebig. Betrachte $B(z, r)$ mit $r > 0$ beliebig.
Nach Cauchy's Abschätzung gilt: $|f'(z)| \leq \frac{1}{r} M$.
Da $r > 0$ beliebig, folgt $|f'(z)| = 0$, d.h. $f'(z) = 0 \Rightarrow f$ *const* .

<u>Anwendung:</u>

Fundamentalsatz der Algebra

Jedes Polynom n-ten Grades (n≥1), $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$, $a_n \neq 0$, mit komplexen Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$, besitzt eine komplexe Nullstelle.

<u>Beweis</u> (indirekt)

Annahme: P besitzt keine Nullstelle in $\mathbb{C}$. Dann ist $f = \frac{1}{P}$ auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph.
z.z.: f ist beschränkt.
Dann folgt aus Liouville: $f = const$, ein Widerspruch!

Sei zunächst $r = |z| > 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{|P(z)|}{|z^n|} &= |a_n + a_{n-1} z^{-1} + \ldots + a_0 z^{-n}| \\ &\geq |a_n| - \underbrace{|a_{n-1} z^{-1} + \ldots + a_0 z^{-n}|}_{\leq |a_{n-1}|\,|z|^{-1} + \ldots + |a_0|\,|z^{-n}|} \end{aligned}$$

$$\geq \quad |a_n| - \frac{1}{r}\left(|a_{n-1}| + \ldots + |a_0| r^{-n+1}\right)$$
$$\geq \quad |a_n| - \frac{1}{r}(|a_{n-1}| + \ldots + |a_0|) \ .$$

Wähle $r > 1$ sodaß
$$r > \frac{2\,(|a_0| + \ldots + |a_{n-1}|)}{|a_n|} \ .$$

Dann $\frac{|P(z)|}{|z|^n} \geq |a_n| - \frac{|a_n|}{2} = \frac{1}{2}|a_n|$, für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq r > 1$.
$\Rightarrow |f(z)| \leq \frac{2}{|a_n|\,|z|^n} \leq \frac{2}{|a_n|}$, sofern $|z| \geq r > 1$.
Auf $\overline{B(0,r)}$ ist jedoch f beschränkt, da f stetig ist und $\overline{B}$ kompakt.
$\Rightarrow$ f ist beschränkt auf $\mathbb{C}$.

<u>Lit.</u>:
Ein elementarer Beweis des Fundamentalsatzes findet sich z.B. in
Ebbinghaus et al. : Zahlen.

Korollar

Jedes Polynom n-ter Ordnung (n≥ 1), $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ $(a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}, a_n \neq 0)$ besitzt in $\mathbb{C}$ genau n Nullstellen (mit Vielfachheit), d.h. es läßt sich wie folgt faktorisieren:

$$P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n) \ ,$$

wobei $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$.

<u>Beweis</u> mit Induktion nach n

n=1 klar
Schritt n-1 $\rightarrow$ n
Sei $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ $(a_n \neq 0)$ ein Polynom von Grad n.
Fundamentalsatz: P hat Nullstelle $z_0 \in \mathbb{C}$, d.h. $P(z_0) = 0$.
Also gilt $P(z) = P(z) - P(z_0) = a_1(z - z_0) + \ldots a_n(z^n - z_0^n) = (z - z_0)Q(z)$, wobei Q ein Polynom vom Grad n-1 ist.
Nach Voraussetzung ist Q faktorisierbar und damit auch P.

Satz von Weierstrass

Sei (f_k) eine Folge holomorpher Funktionen auf der offenen Menge U, welche lokal gleichmäßig (kompakt) gegen eine Grenzfunktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ konvergiert.
Dann ist auch f holomorph.
Ferner gilt: Die Folge $(f_k^{(n)})$ der n-ten Ableitungen konvergiert lokal gleichmäßig (kompakt) gegen $f^{(n)}$.

<u>Beweis</u> mit Morera

a) f ist als lokal gleichmäßiger Limes von (f_k) stetig.
Sei Δ ein Dreieck in U mit Dreiecksweg T. $|T|$ ist kompakt, also ist die Konvergenz der

(f_k) auf $|T|$ gleichmäßig. Es folgt

$$\lim_{k\to\infty} \underbrace{\int_T f_k dz}_{=0,\,\text{da } f_k \text{ holomorph}} = \int_T f dz \Rightarrow \int_T f dz = 0 \quad \Rightarrow (\text{Morera})\ f \text{ holomorph.}$$

b) z.z.: $(f_k^{(n)})$ konvergiert auf beliebigem Kompaktum $K \subset U$ gleichmäßig gegen $f^{(n)}$.
Zu jedem $z \in K$ existiert $B(z, r_z) \subset U$ (da U offen).
Familie $\{\ B(z, \frac{r_z}{3}), z \in K\}$ überdeckt K.
K kompakt $\Rightarrow K \subset B(z_1, \rho_1) \cup \ldots \cup B(z_n, \rho_n)$, wobei $\rho_j = \frac{1}{3} r_{z_j}$.
Auf Kreisscheibe $B(z_j, r_{z_j})$ wende Cauchy-Formel an:
Sei C_j die Kreislinie mit Mittelpunkt z_j und Radius $2\rho_j$. Für alle $z \in B(z_j, \rho_j)$ gilt

$$\begin{aligned}
|f_k^{(n)}(z) - f^{(n)}(z)| &= \frac{n!}{2\pi} \left| \int_{C_j} \frac{f_k(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \right| \\
&\leq \frac{n!}{2\pi} \int_{C_j} \frac{|f_k(\zeta) - f(\zeta)|}{|\zeta - z|^{n+1}} |d\zeta| \\
&\leq \frac{n!}{2\pi} \frac{1}{\rho_j^{n+1}} \int_{C_j} |f_k(\zeta) - f(\zeta)|\, |d\zeta| \ .
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung konvergiert (f_k) gleichmäßig auf der kompakten Menge C_j gegen die Funktion f, d.h. zu bel. $\varepsilon > 0$ existiert $N_j \in \mathbb{N}$ mit $|f_k(\zeta) - f(\zeta)| \leq \frac{1}{n!} \cdot \rho_j^n \cdot \varepsilon$,
$\forall\, k \geq N_j$, $\forall\, \zeta \in C_j$.

$$\Rightarrow |f_k^{(n)}(z) - f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{1}{\rho_j^{n+1}} \cdot \frac{1}{n!} \cdot \rho_j^n \cdot \varepsilon \cdot 2\pi \cdot \rho_j = \varepsilon \ , \quad \forall\, z \in B(z_j, \rho_j) \ .$$

Setze N:= $\max(N_1, \ldots, N_n)$. Dann gilt

$$|f_k^{(n)}(z) - f^{(n)}(z)| \leq \varepsilon \quad , \quad \forall\, z \in K, \forall\, k \geq N \ .$$

Kapitel 4

Analytische Funktionen

4.1 Potenzreihen

Reihe der Form:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \tag{4.1}$$

heißt Potenzreihe.
$a_k \in \mathbb{C}$ Koeffizienten, $z_0 \in \mathbb{C}$ Mittelpunkt der Reihe
Potenzreihen haben einfaches Konvergenzverhalten.

Lemma

Konvergiert (4.1) in einem Punkt $z_1 \in \mathbb{C}$ mit $z_1 \neq z_0$, so konvergiert die Potenzreihe absolut auf $B(z_0, |z_1 - z_0|)$.
Auf jeder Kreisscheibe $B(z_0, r)$ mit $0 < r < |z_1 - z_0|$ ist die Konvergenz sogar gleichmäßig (insbesondere auf jeder kompakten Teilmenge K von $B(z_0, |z_1 - z_0|)$).

Beweis

Nach Voraussetzung konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z_1 - z_0)^k$.
Also ist $a_k (z_1 - z_0)^k$ eine Nullfolge. Es gibt also ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_k (z_1 - z_0)^k| \leq 1 \quad , \quad \forall\, k \geq N \;;$$

somit $\forall\, k \geq N$:

$$|a_k (z - z_0)^k| = \underbrace{|a_k (z_1 - z_0)^k|}_{\leq 1} \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^k \leq \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^k .$$

Sei $0 < q < 1$ beliebig.
Dann gilt $\forall\, z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| \leq q|z_1 - z_0|$ und $\forall\, k \geq N$ die Abschätzung $|a_k (z - z_0)^k| \leq q^k$, d.h. die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ ist konvergente Majorante, und damit die Reihe absolut und gleichmäßig konvergent auf $B(z_0, q|z_1 - z_0|)$.
Da $0 < q < 1$ beliebig, folgt die Aussage des Lemmas.

Anmerkung

Beweis zeigt: Ist für ein $z_1 \in \mathbb{C}$ die Folge $a_k(z_1 - z_0)^k$ beschränkt, so gilt bereits die Aussage des Lemmas (wird später benötigt).

Damit

Satz

Für jede Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$$

gilt entweder

a) sie konvergiert auf ganz $\mathbb{C}$ absolut und gleichmäßig auf allen kompakten Teilmengen

oder

b) es gibt Kreisscheibe $B(z_0, R)$ mit $0 < R < \infty$ sodaß gilt:
Die Potenzreihe konvergiert auf $B(z_0, R)$ absolut und lokal gleichmäßig, und divergiert auf dem Komplement $C\overline{B(z_0, R)}$

oder

c) die Potenzreihe konvergiert nur für $z = z_0$.

Beweis

Liegt weder a) noch c) vor, so gibt es Punkte $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ mit der Eigenschaft, daß die Reihe in z_1 konvergiert, in z_2 divergiert.
Lemma $\Rightarrow$ Menge $\Lambda = \{\rho > 0 : \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ konvergiert in $B(z_0, \rho)\}$ ist nicht leer, beschränkt
Also existiert $R := \sup \Lambda$
$B(z_0, R)$ hat die gewünschte Eigenschaft.

Definition

R heißt der Konvergenzradius der Potenzreihe. Im Fall a) R := $+\infty$, in c) R := 0 .

Beispiele

1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z^k \left(= \frac{1}{1-z}\right)$ hat Radius R = 1 .

2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ $(= e^z)$ konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ R = ∞ .

3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} z^k \left\{\begin{array}{l} \text{konvergiert für } z = -1 \text{ (Leibniz) } \Rightarrow \mathrm{R} \geq 1 \\ \text{divergiert für } z = 1 \text{ (harmonische Reihe) } \Rightarrow \mathrm{R} \leq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{R} = 1 .$

4) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k!\, z^k$ konvergiert nur für $z = 0$ (siehe unten) $\Rightarrow$ R = 0 .

Formel für R (Cauchy-Hadamard)

Für den Konvergenzradius R gilt

$$\boxed{R = [\lim_{k\to\infty} \sup |a_k|^{\frac{1}{k}}]^{-1}}$$

(wobei $R = \infty$ falls $\limsup = 0$ und $R = 0$ falls $\limsup = \infty$).

Zur Erinnerung: $\limsup b_k := \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} b_k$ existiert stets, sofern $\pm\infty$ zugelassen wird.

$\liminf b_k := \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} b_k$ existiert, falls $\pm\infty$ zugelassen wird.

$\lim b_k$ existiert $\Leftrightarrow \limsup b_k = \liminf b_k$ und beide endlich sind.

Beweis

Setze $\tau := \lim\limits_{k\to\infty} \sup |a_k|^{\frac{1}{k}}$; sei $0 < \tau < \infty$.

Wähle $\rho < \frac{1}{\tau}$ beliebig, sodaß $\tau < \frac{1}{\rho}$.

Nach Definition von τ existiert N $\in$ $\mathbb{N}$ sodaß $|a_k|^{\frac{1}{k}} < \frac{1}{\rho}$ für alle k $\geq N$.

Betrachte $\sum_{k=N}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$.

Diese Reihe besitzt die Majorante $\sum_{k=N}^{\infty}(\frac{1}{\rho})^k|z-z_0|^k = \sum_{k=N}^{\infty}(\underbrace{\frac{|z-z_0|}{\rho}}_{q})^k$,

und diese konvergiert für $|q| < 1$, d.h. für $|z-z_0| < \rho$.

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ konvergiert somit auf $B(z_0,\rho)$, wobei $\rho < \frac{1}{\tau}$ beliebig.

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ konvergiert auf $B(z_0, \frac{1}{\tau})$

$\Rightarrow R \geq \frac{1}{\tau}$.

Wähle jetzt $\rho > \frac{1}{\tau}$, d.h. $\frac{1}{\rho} < \tau$.

Nach Definition von τ gibt es unendlich viele Indizes $k \in \mathbb{N}$ mit $|a_k|^{\frac{1}{k}} > \frac{1}{\rho}$.

Für diese k gilt dann $|a_k(z-z_0)^k| > 1$, sofern $|z-z_0| > \rho$.

Die Potenzreihe kann somit auf $C\overline{B(z_0,\rho)}$ nicht konvergieren. Es folgt $R \leq \frac{1}{\tau}$

$\Rightarrow R = \frac{1}{\tau}$.

Quotientenkriterium

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ Potenzreihe mit Konvergenzradius R. Nach Voraussetzung sei $a_k \neq 0$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} \inf \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} \leq R \leq \lim_{k\to\infty} \sup \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$$

Insbesondere gilt:

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}, \qquad \text{sofern der Limes existiert.}$$

Zu Beispiel 4) : R $= \lim \dfrac{k!}{(k+1)!} = \lim \dfrac{1}{k+1} = 0$.

Beweis

Sei oBdA $z_0 = 0$.
Sei $S = \lim_{k\to\infty} \inf \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$, $\quad T = \lim_{k\to\infty} \sup \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$.
Wähle $s < S$ beliebig. Nach Definition von S existiert $N \in \mathbb{N}$, sodaß

$$\frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} > s \quad , \quad \text{für alle } k \geq N \ .$$

Also gilt:

$$|a_{k+1}| \cdot s < |a_k| \quad , \quad \forall\, k \geq N \ . \tag{4.2}$$

Setze $A = |a_N| \cdot s^N$

Mit Induktion:
$|a_{N+m}|\, s^{N+m} \leq A \qquad \forall\, m \in I\!N_0$
Fall m=0 klar.
m → m+1: Aus (4.2) und der Induktionsvoraussetzung folgt:

$$|a_{N+m+1}|\, s^{N+m+1} = |a_{\underbrace{(N+m)}_{k}+1}\, s|\, s^{N+m} < |a_{\underbrace{N+m}_{k}}| s^{N+m} \leq A \ .$$

Es folgt $|a_k| s^k$ $(k \in \mathbb{N})$ ist beschränkt. Nach früherer Bemerkung folgt daraus:
Potenzreihe konvergiert in $B(0, s)$. Somit ist $R \geq s$.
Da $s < S$ beliebig, folgt $R \geq S$.
Sei $t > T$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$ sodaß $\frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} < t$, für alle $k \geq N$.
Also $|a_{k+1}|\, t > |a_k| \quad , \quad \forall\, k \geq N$.
Setze $B := |a_N|\, t^N$
Induktiv folgt: $|a_{N+m}|\, t^{N+m} \geq B$, $\forall\, m \in \mathbb{N}_0$.
Also kann $|a_k|\, t^k$ keine Nullfolge sein $\Rightarrow R \leq t \Rightarrow R \leq T$.

Weiteres **Beispiel:**

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} z^k$ hat Radius 1. Denn

$$\begin{aligned} R &= \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{(k+1)^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^2}{k^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2+2k+1}{k^2} = \\ &= \lim_{k\to\infty} (1 + \frac{2}{k} + \frac{1}{k^2}) = 1 \ . \end{aligned}$$

Konvergenz in den Randpunkten

Keine generelle Aussage möglich!

Beispiele, die den Radius 1 haben:

- $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$: konvergiert nirgends auf $|z| = 1$, da keine Nullfolge
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} z^k$: divergiert in 1 (harmonische Reihe), konvergiert in -1 (Leibniz)
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} z^k$: konvergiert in allen Randpunkten, da konvergente Majorante $\displaystyle\sum_1^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$.

Potenzreihe und Holomorphie

Hilfssatz

> Hat die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ den Radius R, so hat auch die durch gliedweise Differentiation entstandene Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k(z-z_0)^{k-1}$ den Konvergenzradius R.

Beweis:

OBdA sei $z_0 = 0$. Sei R der Radius von $\sum a_k z^k$. Sei R' der Radius von $\sum k\, a_k\, z^{k-1}$.
Aus $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|\, |z^k| \leq |z| \sum_{k=1}^{\infty} k|a_k|\, |z|^{k-1}$ folgt $\mathrm{R} \geq \mathrm{R}'$.
z.z.: $\mathrm{R} \leq \mathrm{R}'$
Sei $r < R$. Wähle ferner $s > 0$ so, daß $r < s < R$. Nach Voraussetzung konvergiert $\sum |a_k| s^k$, also ist $|a_k| s^k$ eine Nullfolge.
Setze $q = \frac{r}{s}$ (< 1). Da $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{a^x} = 0$ für $a > 1$, so folgt:

$$kq^k = \frac{k}{\left(\frac{1}{q}\right)^k} \text{ ist Nullfolge.}$$

Also ist auch $k \cdot |a_k| r^{k-1} = r^{-1} \underbrace{(|a_k| s^k)}_{\text{Nullfolge}} \underbrace{(kq^k)}_{\text{Nullfolge}}$ eine Nullfolge, und damit ist die Folge insbesondere beschränkt. Nach früherer Bemerkung folgt somit die Konvergenz von $\sum k\, a_k\, z^{k-1}$ in $B(0, r)$. Also ist auch $R' \geq$ r. Da $r < R$ beliebig, folgt $R' \geq R \Rightarrow R' = R$.

Korollar

> Hat $\displaystyle\sum_0^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ den Radius R, so auch die durch gliedweise Integration entstandene Reihe $\displaystyle\sum_0^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(z-z_0)^{k+1}$.

Denn falls $\hat{R}$ den Konvergenzradius von $\sum \frac{a_k}{k+1}(z-z_0)^{k+1}$ bezeichnet, hat nach obigem

Hilfssatz auch die abgeleitete Reihe $\sum a_k(z-z_0)^k$ den Radius $\hat{R}$. Also gilt $R = \hat{R}$.

Satz

Besitzt die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ einen positiven Konvergenzradius R, so definiert sie auf dem Konvergenzkreis $B(z_0, R)$ eine holomorphe Funktion f; zudem gilt:

a) die n-te Ableitung $f^{(n)}$ wird dargestellt durch die Potenzreihe

$$\sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\ldots(k-n+1)a_k(z-z_0)^{k-n} ;$$

ihr Radius ist ebenfalls gleich R.

b) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(z-z_0)^{k+1}$, welche ebenfalls den Radius R besitzt, stellt auf $B(z_0, R)$ eine Stammfunktion von f dar.

Kurz: Potenzreihen dürfen gliedweise differenziert und integriert werden.

Beweis:

OBdA sei $z_0 = 0,\ n = 1$ (sodann mit Induktion). Sei $f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_k\, z^k$ und
$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k\, z^{k-1}$. g hat wie gezeigt auch den Konvergenzradius R und ist somit auf $B(0, R)$ wohldefiniert.
Behauptung: $g = f'$
Sei $b \in B(0, R)$. Wir setzen $q_k(z) := z^{k-1} + z^{k-2}b + \ldots + zb^{k-2} + b^{k-1}$.
Dann $z^k - b^k = (z-b)q^k(z)$. Also ist

$$\begin{aligned} f(z) - f(b) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k b^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z^k - b^k) = \\ &= (z-b)\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k q_k(z)}_{:=f_1(z)} \ , \end{aligned}$$

d.h. $f(z) - f(b) = (z-b)f_1(z)$,

$$\text{wobei} \qquad f_1(b) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k q_k(b) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k k b^{k-1} = g(b) \ .$$

z.z.: f_1 ist in b stetig.
Dann ist f in b komplex differenzierbar und es gilt $f'(b) = f_1(b) = g(b)$.
Kriterium von WEIERSTRASS anwenden: Suche konvergente Majorante.
Sei $r \in \mathbb{R}$ so, daß $|b| < r < R$. Auf $B(0, r)$ gilt dann

$$|q_k(z)| \leq |z^{k+1}| + |z^{k-2}|\,|b| + \ldots + |b^{k-1}| \leq r^{k-1} + r^{k-1} + \ldots + r^{k-1} = k \cdot r^{k-1} \ ,$$

daher

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k q_k(z)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} k|a_k| r^{k-1} < \infty$$

da Konvergenzradius von g auch gleich R.
Somit ist Konvergenz der Reihe $\sum a_k q_k$ auf $B(0,R)$ lokal gleichmäßig, also ist insbesondere die Reihe eine stetige Funktion.

Beispiel (logarithmische Reihe)

Sei $f(z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} \cdots \ = \sum_{1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{z^k}{k}$.

f ist Potenzreihe mit Radius 1.
Denn $f' = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-z)^k$ ist geometrische Reihe, also hat diese den Konvergenzradius 1. Also auch die obige. Ferner gilt:

$$f'(z) = \frac{1}{1+z} \quad \text{auf } \mathbb{E} \, .$$

Betrachte $B(1,1)$ und darauf die Funktion $\tilde{f}(z) = f(z-1)$; dann gilt $\tilde{f}'(z) = \frac{1}{z}$. Daraus folgt $\tilde{f}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(z-1)^k}{k}$ definiert auf $B(1,1)$ eine holomorphe Funktion mit der Eigensschaft, daß $\tilde{f}(z) = \frac{1}{z}$, d.h. $\tilde{f}$ definiert auf $B(1,1)$ eine "Logarithmus-Funktion".

4.2 Die Logarithmus-Funktion

Für reelle, positive Zahlen a ist $\log a$ wohldefiniert. (In der Funktionentheorie bedeutet $\log a$ stets $\ln a$!)
Logarithmus einer komplexen Zahl $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$,

$$b = \log a$$

ist nur eindeutig definiert bis auf die Periode $2\pi i$.
Denn aus $b = |b| \cdot e^{i\varphi}$ folgt nämlich , daß für

$$\log b := \log |b| + i\varphi + k \cdot 2\pi i \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

gilt:

$$e^{\log b} = e^{\log |b| + i\varphi + 2k\pi i} = |b| \cdot e^{i\varphi} \cdot \underbrace{e^{2k\pi i}}_{=1} = |b| e^{i\varphi} = b \, .$$

Definition

Sei $G \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}$ ein Gebiet. Die Funktion $g : G \to \mathbb{C}$ heißt ein Zweig des Logarithmus (bzw. Logarithmusfunktion) wenn gilt :

1) g ist stetig

2) für alle $z \in G$ gilt : $e^{g(z)} = z$.

Satz

Sei $G \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}$ ein Gebiet, $g : G \to \mathbb{C}$ ein Zweig des Logarithmus. Dann ist g holomorph und es gilt

$$g'(z) = \frac{1}{z} \ , \qquad \forall\, z \in G \ .$$

Mit g ist auch $\tilde{g} := g + 2\pi ki (k \in \mathbb{Z})$ ein Zweig des Logarithmus. Zwei beliebige Zweige des Logarithmus unterscheiden sich nur um ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi i$.

Zunächst allgemeines Lemma über inverse Funktionen

Lemma

Sei $U, V \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $g : V \to \mathbb{C}$ stetig mit $g(V) \subset U$. Ferner sei $f(g(w)) = w, \forall\, w \in V$ und $f'(z) \neq 0, \forall\, z \in U$. Dann ist auch g (die inverse Funktion) holomorph und es gilt

$$g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))} \ , \qquad \forall\, w \in V \ .$$

Beweis
Sei $w \in V$ beliebig. Für $h \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ mit $w + h \in V$ gilt

$$\Delta = g(w+h) - g(w) \neq 0 \ .$$

Denn :

$$f(g(w+h)) = w + h = f(g(w)) + h \ , \tag{4.3}$$

also kann nicht $g(w+h) = g(w)$ sein.
Stetigkeit von g impliziert: $\Delta \to 0$ für $h \to 0$. Aus (4.3) folgt

$$1 = \frac{f(g(w+h)) - f(g(w))}{h} = \frac{f(g(w+h)) - f(g(w))}{\Delta} \cdot \frac{g(w+h) - g(w)}{h} \ .$$

Somit existiert

$$\begin{aligned} g'(w) \ &= \ \lim_{h \to 0} \frac{g(w+h) - g(w)}{h} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta \to 0} \dfrac{f(g(w+h)) - f(g(w))}{\Delta}} = \\ &= \ \frac{1}{\lim\limits_{\Delta \to 0} \dfrac{f(g(w)+\Delta) - f(g(w))}{\Delta}} = \frac{1}{f'(g(w))} \ , \qquad \forall\, w \in V \ . \end{aligned}$$

Beweis des Satzes
Wähle $U = \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$, $V = G$, g wie im Satz
Lemma $\Rightarrow$ g ist holomorph und es gilt

$$g'(w) = \frac{1}{e^{g(w)}} = \frac{1}{w} \ , \qquad \forall\, w \in G \ .$$

Seien g_1 und g_2 Zweige des Logarithmus auf G. Dann gilt für die Differenz $h := g_1 - g_2$ die Bedingung

$$h'(z) = g_1'(z) - g_2'(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z} = 0 \ , \qquad \forall\, z \in G \ .$$

$\overset{\text{G Gebiet}}{\Rightarrow} h = const$;
d.h. $g_1(z) = g_2(z) + c$.
Aus $z = e^{g_1(z)} = e^{g_2(z)}$ folgt dann

$$\underbrace{e^{g_2(z)+c}}_{e^{g_2(z)} \cdot e^c} = e^{g_2(z)}$$

und somit $e^c = 1$. Damit $c = 2\pi i \cdot k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Charakterisierung

Für holomorphe Funktion $g : G \to \mathbb{C}$, G ein Gebiet in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, sind äquivalent

(i) g ist Zweig des Logarithmus

(ii) $g'(z) = \frac{1}{z}$, $\forall\, z \in G$ und es gibt wenigstens einen Punkt $a \in G$ mit $e^{g(a)} = a$.

Beweis
(i) $\Rightarrow$ (ii) schon bewiesen.
(ii) $\Rightarrow$ (i) Sei $f(z) := ze^{-g(z)}, z \in G$. Dann ist auch f holomorph und es gilt

$$f'(z) = e^{-g(z)} + z \cdot e^{-g(z)} \underbrace{(-g'(z))}_{=-\frac{1}{z}} = 0 \,, \qquad \forall\, z \in G \,.$$

$\Rightarrow f = const = c$, also für alle $z \in G$:
$z = c \cdot e^{g(z)} \Rightarrow a = c \cdot e^{g(a)} = c \cdot a \Rightarrow c = 1 \Rightarrow e^{g(z)} = z$, $\forall\, z \in G$
$\Rightarrow g$ ist Zweig des Logarithmus.

Beispiel

Auf $B(1,1)$ definiert die Potenzreihe

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(z-1)^k$$

einen Zweig des Logarithmus. Denn g ist holomorph und $g'(z) = \frac{1}{z}$, $\forall\, z \in B(1,1)$, wie gezeigt. Zudem ist $e^{g(1)} = e^0 = 1$.

In Übungsaufgabe wurde ferner gezeigt: Auf $\mathbb{C}^- = \mathbb{C}\backslash \mathbb{R}_-$ definiert

$$\boxed{\log z := \log|z| + i\, arg(z)} \,, \qquad -\pi < arg(z) < \pi \text{ (Hauptwert)} \,,$$

einen Zweig des Logarithmus. Denn die Funktion ist holomorph und hat $\frac{1}{z}$ als Ableitung. Eingeschränkt auf $B(1,1)$ haben wir somit 2 Zweige des Logarithmus. Da die beiden Zweige für $z = 1$ übereinstimmen, stimmen sie auch auf ganz $B(1,1)$ überein, d.h. es gilt

$$\boxed{\log z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(z-1)^k} \,, \qquad \forall\, z \in B(1,1) \,.$$

Logarithmus einer Funktion

Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und nullstellenfrei, U offen in $\mathbb{C}$.

Definition
Eine holomorphe Funktion $g : U \to \mathbb{C}$ heißt Zweig des Logarithmus von f; in Zeichen

$$g = \log f \ ,$$

wenn gilt

$$\boxed{e^{g(z)} = f(z)}\ , \qquad \forall\, z \in U \ .$$

Bereits behandelt : Spezialfall $f(z) = z$.
Durch Differentiation folgt

$$\underbrace{e^{g(z)}}_{f(z)} \cdot g'(z) = f'(z)$$

$$\Rightarrow \boxed{g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}} \qquad \text{(sog. logarithmische Ableitung von } f) \ .$$

Zur Existenzfrage:
Beh.: $\log f$ existiert auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$, sofern $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und nullstellenfrei ist, und die logarithmische Ableitung $\frac{f'}{f}$ auf G eine Stammfunktion besitzt.
Denn sei g eine Stammfunktion von $\frac{f'}{f}$, d.h. $g' = \frac{f'}{f}$.
Setze $F(z) := e^{-g(z)} \cdot f(z)$, $\forall\, z \in G$.
Es gilt

$$F'(z) = -e^{-g(z)} \cdot g'(z) \cdot f(z) + e^{-g(z)} \cdot f'(z) = 0 \ , \qquad \forall\, z \in G \ .$$

$\Rightarrow F = const = c$
$\Rightarrow f = c \cdot e^g$; setze $c = e^a$ (für ein $a \in \mathbb{C}$)
Dann $f = e^a \cdot e^g = e^{a+g}$;
$\tilde{g} := g + a$ definiert Zweig des Logarithmus von f.

Anwendung

$\log f$ existiert für nullstellenfreie, holomorphe Funktionen f auf Kreisscheiben, allg. sternförmigen Gebieten (insb. konvexen Gebieten !)

Wurzelfunktionen

Definition
Eine holomorphe Funktion $g : \mathrm{U} \to \mathbb{C}$ heißt Zweig der n-ten Wurzel von f,
in Zeichen $\sqrt[n]{f}$, wenn gilt:

$$\Big(g(z)\Big)^n = f(z) \ , \ \forall\, z \in \mathrm{U} \ .$$

Beachte: Existenz von $\log f$ impliziert Existenz von $\sqrt[n]{f}$ (Setze $g(z) = e^{\frac{1}{n}\log f(z)}$).

Beispiel
$\sqrt{z}$ existiert auf $\mathbb{C} \setminus$ negative reelle Achse.

4.3 Taylorentwicklung

Frage: Welche holomorphen Funktionen können lokal durch Potenzreihen dargestellt werden ?

Definition

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen; Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt analytisch, sofern zu jedem Punkt $z_0 \in U$ eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ mit positivem Konvergenzradius existiert, sodaß in einer Umgebung von z_0 die Potenzreihe mit der Funktion f übereinstimmt.

Wir wissen: f analytisch $\Rightarrow$ f holomorph (Denn Potenzreihen definieren holomorphe Funktionen)
Um die Umkehrung zu beweisen , entwickeln wir den Cauchy-Kern

$$z \mapsto \frac{1}{\zeta - z} \qquad (z \in \mathbb{C}\backslash\{\zeta\})$$

um $z_0 \in \mathbb{C}\backslash\{\zeta\}$ in eine Potenzreihe, und wenden dann die Cauchy-Formel an!
Entwicklung

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{\zeta - z_0}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \\ &= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta - z_0}} . \end{aligned}$$

Mit $q = \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}$ gilt also

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1-q} .$$

Betrachte Kreisscheibe $B = B(z_0, |\zeta - z_0|)$.
Für alle $z \in B$ gilt dann $|z - z_0| < |\zeta - z_0|$, d.h. $|q| < 1$ und somit

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^k}{(\zeta - z_0)^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\zeta - z_0)^{k+1}} (z - z_0)^k .$$

Mit der Cauchy-Formel folgt nun, wie wir sogleich zeigen werden, der

Satz (Taylor-Entwicklung)

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $z_0 \in U$ beliebig und $\rho := dist(z_0, \partial U)$ der Abstand von z_0 zum Rand ∂U.
Dann konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k \qquad \text{(Taylorreihe)}$$

in jedem Punkt $z \in B(z_0, \rho)$ und stellt dort die Funktion f dar, d.h. es gilt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k , \qquad \forall\, z \in B(z_0, \rho) .$$

Korollar

Eine Funktion $f : \mathrm{U} \to \mathbb{C}$, U offen in $\mathbb{C}$, ist genau dann holomorph, wenn sie analytisch ist.

Beweis des Satzes von Taylor

Nach Definition ist $\rho = dist(z_0, \partial U) = \inf\{|z - z_0| : z \in \partial U\}$
($\rho = \infty$, falls ∂U leer ist.)
Wähle $0 < r < \rho$. Da f auf $B(z_0, \rho)$ holomorph ist, gilt die Cauchy-Formel:
Für alle $z \in B(z_0, r)$ gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \qquad \text{wobei } C_r := \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - z_0| = r\} \; .$$

Obige Entwicklung einsetzen ergibt:

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(\zeta)(z - z_0)^k, \qquad \text{wobei } g_k(\zeta) := \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \; .$$

Beh.: Reihe $\sum g_k(\zeta)(z - z_0)^k$ konvergiert, gleichmäßig in ζ, auf C_r .
Dazu: Um WEIERSTRASS anzuwenden, konstuiere man eine konvergente Majorante.
Setze $M_r := \sup_{\zeta \in C_r} |f(\zeta)|, \qquad q := \frac{|z - z_0|}{r}$
Dann gilt für $\zeta \in C_r$:

$$|g_k(\zeta)(z - z_0)^k| = \frac{|f(\zeta)|}{|\underbrace{\zeta - z_0}_{=r}|^{k+1}} |z - z_0|^k \leq M_r \frac{|z - z_0|^k}{r^{k+1}} = \frac{M_r}{r} q^k \; .$$

Da $z \in B(z_0, r)$ gilt $|q| < 1$, also $\sum_{k=0}^{\infty} q^k < \infty$, und somit liefert die geometrische Reihe eine konvergente Majorante.
Wegen gleichmäßiger Konvergenz sind Integration und Summation im Cauchy-Integral vertauschbar, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \sum_{k=0}^{\infty} g_k(\zeta)(z - z_0)^k d\zeta = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta\right)}_{\frac{1}{k!} \cdot f^{(k)}(z_0)} (z - z_0)^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k \quad , \quad \forall \, z \in B(z_0, r) \; , \end{aligned}$$

und da $0 < r < \rho$ beliebig , $\forall \, z \in B(z_0, \rho)$.

Beispiele

1) Exponentialreihe
$f(z) = e^z$ hat folgende Taylorentwicklung in $z_0 \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} f(z) &= e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k \ , \text{ also wegen } f^{(k)}(z) = e^z \ , \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{z_0}}{k!}(z-z_0)^k = e^{z_0} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(z-z_0)^k}_{e^{(z-z_0)}} = \\ &= e^{z_0} \cdot e^{(z-z_0)} \end{aligned}$$

$\Rightarrow e^z = e^{z_0} \cdot e^{z-z_0} \quad \Rightarrow \quad e^{a+b} = e^a \cdot e^b \quad (a = z_0 \ , \ b = z - z_0)$
(neuer Beweis der Funktionalgleichung von exp.)

2) arctan-Funktion : $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \arctan x$
Aus Analysis bekannt:
Entwickelt man f um $x_0 \in \mathbb{R}$ in eine reelle Potenzreihe, so konvergiert diese auf dem Intervall

$$I = (x_0 - \sqrt{1+x_0^2}\,,\, x_0 + \sqrt{1+x_0^2}) \ .$$

Wie kann man das verstehen ?

Betrachte komplexe arctan-Funktion (siehe Übungsaufgabe). Es zeigt sich: reelle arctan-Funktion hat Ableitung $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$,
komplexe arctan-Funktion hat Ableitung $z \mapsto \dfrac{1}{1+z^2}$;
komplexe Ableitung hat Singularitäten in $z = i$ und $z = -i$
$\Rightarrow$ Konvergenzradius $R = \sqrt{1+x_0^2} \quad \Rightarrow \quad I = (x_0 - \sqrt{1+x_0^2}\ ,\ x_0 + \sqrt{1+x_0^2})$.

Folgerungen aus der Taylor-Entwicklung

Hilfssatz

Für f holomorph auf einem Gebiet G sind äquivalent:

(i) f ist konstant

(ii) $f' = 0$

(iii) Es gibt einen Punkt $z_0 \in G$ mit $f^{(n)}(z_0) = 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Beweis

$(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ trivial

nur z.z.: $(iii) \Rightarrow (i)$:
Sei $f^{(n)}(z_0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. OBdA gilt sogar $f^{(n)}(z_0) = 0, \forall\, z \in \mathbb{N}_0$
(Subtrahiere $f(z_0)$ von f).
Betrachte $N = \{z \in G : f^{(n)}(z) = 0, \forall\, n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}\}$.
N ist nicht leer, da $z_0 \in N$.

Beh.: N ist offen:
Sei $z_1 \in N$ und $\rho = dist(z_1, \partial G)$
Nach TAYLOR ist

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_1)}{k!}(z-z_1)^k = 0 \ , \ \forall\, z \in B(z_1,\rho) \ .$$

$\Rightarrow N =$ offen.
Sei $\tilde{N} = \{z \in G : f^{(n)}(z) \neq 0 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}_0\}$
Es gilt $G = N \cup \tilde{N}$, $N \cap \tilde{N} = \emptyset$.
Aber $\tilde{N}$ ist Vereinigung aller offenen Mengen

$$U_n = \{z \in G : f^{(n)}(z) \neq 0\} \quad \text{(wegen Stetigkeit von } f^{(n)}\text{)}.$$

Also ist auch $\tilde{N}$ offen.
Da G ein Gebiet ist, muß $\tilde{N} = \emptyset$ sein, d.h. $G = N$ und damit $f = 0$.

Korollar

Ist $f : G \to \mathbb{C}$ auf einem Gebiet G holomorph und besitzt f eine Nullstelle in $z_0 \in G$, so gilt folgende Alternative: Entweder ist $f \equiv 0$ oder es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ sodaß

$$(*) \left\{ \begin{array}{lcll} f^{(k)}(z_0) & = & 0 & , \quad \text{für } k = 0, 1, \ldots , n-1 \\ f^{(n)}(z_0) & \neq & 0 & . \end{array} \right.$$

Definition

Die Zahl n mit der Eigenschaft $(*)$ heißt die Ordnung der Nullstelle z_0 von f $(\not\equiv 0)$. Die Nullstelle z_0 heißt einfach, wenn die Ordnung $n = 1$ ist.

Satz

Hat $f : G \to \mathbb{C}$, holomorph, $(f \not\equiv 0)$ in z_0 eine Nullstelle $n-$ter Ordnung, so gibt es eine holomorphe Funktion $f_n : G \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = (z-z_0)^n f_n(z) \ , \ \forall\, z \in G \ ,$$

wobei $f_n(z_0) \neq 0$.

Beweis

Entwicklungssatz: In $B(z_0,\rho), \rho = \text{dist}(z_0, \partial G)$, gilt:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k = \\ &= (z-z_0)^n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^{k-n} \ . \end{aligned} \tag{4.4}$$

Setze

$$f_n(z) = \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^{k-n} & , \quad z \in B(z_0,\rho) \\ \frac{f(z)}{(z-z_0)^n} & , \quad z \in G \backslash B(z_0,\rho) \end{array} \right.$$

Beh.: f_n ist holomorph auf G und $f_n(z_0) \neq 0$ (letzteres ist klar, da $f_n(z_0) = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \neq 0$)
Zur Holomorphie von f_n:
Klar auf $B(z_0, \rho)$ und auf $G \backslash \overline{B(z_0, \rho)}$.
Für $z_1 \in \partial B(z_0, \rho) \cap G$ gilt wegen (4.4) für alle $z \in B(z_1, \rho) \cap G$:

$$f_n(z) = f(z)(z - z_0)^{-n} ,$$

also ist f_n auch in einer Umgebung von z_1 holomorph.

Korollar (Isoliertheit der Nullstellen)

Sei f holomorph in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$, $f \not\equiv 0$ mit Nullstelle in $z_0 \in G$. Dann existiert Umgebung $V \subset G$ von z_0, welche außer z_0 keine Nullstelle von f enthält.

Beweis

Da $f \not\equiv 0$, besitzt f Nullstelle n-ter Ordnung in z_0. Es gibt also eine holomorphe Funktion f_n mit

$$f(z) = (z - z_0)^n \, f_n(z) \quad , \quad f_n(z_0) \neq 0 \, .$$

Da f_n stetig ist, existiert Umgebung V von z_0 in G mit $f_n(z) \neq 0 \, , \forall \, z \in V$. Also gilt auch $f(z) \neq 0$, $\forall \, z \in V \backslash \{z_0\}$.

Anwendung (Identitätssatz)

Seien f, g auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ holomorph. Gilt $f(z_k) = g(z_k)$, für alle Punkte einer Folge $\{z_k\}$ mit Häufungspunkt in G, so muß $f = g$ sein.

Beweis

Nach Voraussetzung existiert Teilfolge $\{z_{k_j}\}$ von $\{z_k\}$ mit $\lim_{j\to\infty} z_{k_j} = z_0 \in G$ und $f(z_{k_j}) = g(z_{k_j}), \forall \, j \in I\!N$.
Setze $h := f - g$. Dann gilt $h(z_{k_j}) = 0$, $\forall \, j \in I\!N$.
Stetigkeit von h impliziert: $h(z_0) = \lim_{j\to\infty} h(z_{k_j}) = 0$,
d.h. z_0 ist Nullstelle von h, die nicht isoliert ist. Also ist nach obigem Korollar $h \equiv 0$.
Damit gilt $f \equiv g$.

Beispiele

1) Funktion: $z \mapsto sin\frac{1}{z}$ ist holomorph auf $\mathbb{C} \backslash \{0\}$ und verschwindet in $z_k = \dfrac{1}{k\pi}$, $k \in I\!N$.
   Dies ist kein Widerspruch zum Identitätssatz, da zwar $\lim_{k\to\infty} z_k = 0$,
   aber $0 \notin \mathbb{C} \backslash \{0\}$.
   Das Beispiel zeigt ferner, daß auf die Bedingung "Häufungspunkt in G" nicht verzichtet werden kann.

2) Die reellen Funktionen e^x, $\sin x$, $\cos x$, etc. lassen sich in eindeutiger Weise nach $\mathbb{C}$ holomorph fortsetzen. Denn aus F_1, $F_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $F_1 \,|_{I\!R} = F_2 \,|_{I\!R}$ folgt $F_1 = F_2$.

Kapitel 5

Isolierte Singularitäten und Laurent-Reihen

5.1 Riemanscher Fortsetzungssatz

Sei U offen in $\mathbb{C}$, A eine Teilmenge von U.

Definitionen

1) Ein Punkt $a \in A$ heißt isolierter Punkt von A (in U), wenn es eine Umgebung $V \subset U$ von a gibt mit $V \cap A = \{a\}$.

2) Eine Menge A heißt diskret in U, wenn alle Punkte von A isoliert sind.

3) Eine holomorphe Funktion $f : U \backslash A \to \mathbb{C}$, $A \subset U$ abgeschlossen, heißt holomorph nach A fortsetzbar, falls holomorphe Funktion $\tilde{f} : U \to \mathbb{C}$ existiert mit $\tilde{f}\,|_{U\backslash A} = f$.

Fortsetzungssatz von Riemann:

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $A \subset U$ diskret und abgeschlossen. Sei $f : U\backslash A \to \mathbb{C}$ holomorph. Äquivalent sind

(i) f ist holomorph nach A fortsetzbar.

(ii) f ist stetig nach A fortsetzbar.

(iii) Zu jedem $a \in A$ existiert eine Umgebung $V \subset U$ von a, sodaß f auf $V\backslash\{a\}$ beschränkt ist.

(iv) $\lim_{z\to a}(z - a)\, f(z) = 0$, $\quad \forall\, a \in A$.

Beweis (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) trivial

(iii) $\Rightarrow$ (iv): folgt aus
$|(z - a)\, f(z)| = |z - a|\,|f(z)| \le |z - a|\, M$, $\quad \forall\, z \in V$, sofern
$M := \sup\{|f(z)| \,:\, z \in V\backslash\{a\}\}$.

(iv) $\Rightarrow$ (i):

OBdA sei $A = \{a\}$ (da A isoliert ist),ja sogar $a = 0$. Setze

$$h(z) := \begin{cases} z^2\, f(z) & , \quad z \in U\backslash\{0\} \\ 0 & , \quad z = 0 \end{cases}$$

h ist in 0 komplex differenzierbar. Denn

$$h'(0) = \lim_{z\to 0} \frac{h(z) - h(0)}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{z^2 f(z) - 0}{z} = \lim_{z\to 0} z\, f(z) \overset{Vor.}{=} 0 \,.$$

Also ist h holomorph auf U und es gilt: $h(0) = h'(0) = 0$.
Also hat h in 0 eine Nullstelle der Ordnung $n \geq 2$. Somit existiert holomorphe Funktion $\tilde{f} : U \to \mathbb{C}$ mit

$$h(z) = z^2\, \tilde{f}(z) \,.$$

Aus $h(z) = z^2\, f(z)$, $\quad \forall\, z \in U\backslash\{0\}$, folgt
dann $\tilde{f}(z) = f(z)$, $\quad \forall\, z \in U\backslash\{0\}$.
Also ist $\tilde{f}$ die gesuchte holomorphe Fortsetzung von f.

Beispiel:
$f(z) = \frac{\sin z}{z}$ $(z \in \mathbb{C}\backslash\{0\})$ ist holomorph nach 0 fortsetzbar, da
$\lim_{z\to 0} z\, f(z) = \lim_{z\to 0} z\, \frac{\sin z}{z} = \lim_{z\to 0} \sin z = 0$ ..
Aus

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z - 0}{z - 0} = \frac{d}{dz} \sin z\; |_{z=0} = \cos 0 = 1$$

folgt ferner: Die holomorphe Fortsetzung $\tilde{f}$ von f wird definiert durch

$$\tilde{f}(z) := \begin{cases} \frac{sinz}{z} & , \quad z \neq 0 \\ 1 & , \quad z = 0 \,. \end{cases}$$

Definition
Ist $f : U\backslash\{a\} \to \mathbb{C}$ $(a \in U)$ in keiner Umgebung von a beschränkt (also nicht nach a holomorph fortsetzbar), so nennen wir a eine <u>isolierte Singularität</u> von f.

5.2 Klassifikationen der isolierten Singularitäten

Einfachster Fall: $f(z) = \dfrac{1}{(z-a)^n}$
f hat in a "Polstelle".

Definition
Sei $f : U\,\backslash\{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph (U offen in $\mathbb{C}$, $a \in U$).

1) a heißt <u>hebbare Stelle</u> von f, wenn f nach a holomorph fortsetzbar ist.

2) a heißt <u>Polstelle</u> von f, wenn gilt:

$$\lim_{z\to a} |f(z)| = \infty \,,$$

d.h. zu bel. $\eta > 0$ existiert eine Umgebung $V \subset U$ von a derart, daß

$$|f(z)| > \eta \,, \qquad \forall\, z \in V\backslash\{a\} \,.$$

3) a heißt <u>wesentliche</u> Singularität von f, wenn a weder hebbare Stelle noch Polstelle ist.

bereits gezeigt: (RIEMANN)
a ist hebbare Stelle von $f \Leftrightarrow f$ ist beschränkt in Umgebung von a.

Zur Charakterisierung von 2) und 3) benötigen wir das folgende (eher technische)

Lemma

Sei U offen, $a \in U$ und $f : U \backslash \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph.
Ann.: Es gibt eine Kreisscheibe $B(a, r) \subset U$ und Zahlen $\alpha \in \mathbb{C}, \eta > 0$, sodaß

$$|f(z) - \alpha| > \eta \ , \qquad \forall\, z \in B(a, r)\backslash\{a\} \tag{5.1}$$

(d.h. Kreisscheibe $\overline{B(\alpha, \eta)}$ liegt nicht im Wertebereich von $f|_{B(a,r)\backslash\{a\}}$)
Dann existiert $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, daß

$$(z - a)^n\, f(z)$$

nach a holomorph fortsetzbar ist.

<u>Beweis</u>

Nach (5.1) ist $f(z) - \alpha \neq 0$, $\forall\, z \in B(a, r)\backslash\{a\}$. Also ist $h(z) = \dfrac{1}{f(z) - \alpha}$ auf $B(a, r)\backslash\{a\}$ holomorph.
Ferner gilt $|h(z)| < \frac{1}{\eta}$ für alle $z \in B(a, r)\backslash\{a\}$.
RIEMANN: h ist nach a holomorph fortsetzbar. Fortsetzung sei wieder mit h bezeichnet.

1. Möglichkeit: $h(a) \neq 0$. Dann ist $f(z) = \alpha + \dfrac{1}{h(z)}$ nach a holomorph fortsetzbar. Damit ist Behauptung richtig für jedes $n \in \mathbb{N}$.
2. Möglichkeit: $h(a) = 0$. Dann existiert $h_n : B(a, r) \to \mathbb{C}$ holomorph mit den Eigenschaften
$$h(z) = (z - a)^n\, h_n(z) \ , \ \forall\, z \in B(a, r) \ , \ h_n(a) \neq 0 \ .$$
Dann ist $h_n(z) \neq 0$ für alle $z \in B(a, r)$. Somit gilt für $z \in B(a, r)\backslash\{a\}$:
$$\begin{aligned} (z - a)^n\, f(z) &= (z - a)^n\, (\alpha + \frac{1}{h(z)}) = (z - a)^n\, (\alpha + \frac{1}{(z - a)^n\, h_n(z)}) \\ &= \alpha(z - a)^n + \frac{1}{h_n(z)} \ ; \end{aligned}$$
also ist $(z - a)^n\, f(z)$ nach a holomorph fortsetzbar.

Satz (Charakterisierung der Polstellen)

Sei U offen in $\mathbb{C}, a \in U, f : U\backslash\{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Äquivalent sind

(i) a ist Polstelle von f

(ii) Es gibt eine eindeutig bestimmte Zahl $n \in \mathbb{N}$, sowie eine holomorphe Funktion $g : U \to \mathbb{C}$ mit $g(a) \neq 0$ derart, daß
$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - a)^n} \ , \ \forall\, z \in U\backslash\{a\} \ .$$

Beweis

(i) $\Rightarrow$ (ii): Nach Voraussetzung gilt: $\lim_{z\to a}|f(z)| = \infty$
$\Rightarrow$ Annahme im Lemma für $\alpha = 0$ erfüllt.
Es existiert somit $k \in I\!N$ sodaß $h(z) := (z-a)^k\, f(z)$ nach a holomorph fortsetzbar ist.
Die Fortsetzung sei wieder mit h bezeichnet.

1. Fall: $h(a) \neq 0$: fertig (wähle $g = h$).

2. Fall: $h(a) = 0$:
   Es existiert $l \in I\!N$ sowie holomorphe Funktion $g : U \to \mathbb{C}$ mit

$$h(z) = (z-a)^l\, g(z)\ ,\quad \forall\, z \in U\ ,\quad g(a) \neq 0\ .$$

Aus

$$\begin{aligned}
(z-a)^k\, f(z) &= h(z) = (z-a)^l\, g(z) \ \text{ folgt} \\
f(z) &= (z-a)^{-(k-l)}\, g(z)\ ; \quad \text{setze } \ n := k-l\ , \text{ dann } n \in \mathbb{Z} \text{ und} \\
f(z) &= (z-a)^{-n}\, g(z)\ .
\end{aligned}$$

Aus $\lim\limits_{z\to a}|f(z)| = \infty$ und $\lim\limits_{z\to a} g(z) = g(a) \neq 0$ folgt schließlich $n \in I\!N$.
Zur Eindeutigkeit von n:
Sei $(z-a)^{-n}\, g(z) = (z-a)^{-n}\, h(z)$, $\forall\, z \in U\setminus\{a\}$, mit $g(a) \neq 0$ und $h(a) \neq 0$.
Sei $m < n$. Dann folgt aus $g(z) = (z-a)^{n-m}\, h(z)$:
$g(a) = 0$, im Widerspruch zu $g(a) \neq 0$.
Analog führt $n < m$ zum Widerspruch.
Bleibt $n = m$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sei $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-a)^n}$, $g(a) \neq 0$
Aus $g(a) \neq 0$ folgt: $|g(z)| \geq \delta > 0$ für alle $z \in V$ (= Umgebung von a)
Also gilt:

$$|f(z)| \geq \frac{\delta}{|z-a|^n} > \eta \qquad (\eta > 0 \text{ bel.}), \text{ sofern } |z-a| < \left(\frac{\delta}{\eta}\right)^{\frac{1}{n}}\ ,$$

also $\lim\limits_{z\to a}|f(z)| = \infty$.

Definition

Die eindeutig bestimmte Zahl n in (ii) heißt die Ordnung des Pols.
$n = 1$: einfache Polstelle.

Charakterisierung der wesentlichen Singularitäten

Satz (Casorati-Weierstrass)

Die holomorphe Funktion $f : U\setminus\{a\} \to \mathbb{C}, a \in U$, besitzt in a genau dann eine wesentliche Singularität, wenn für jede Umgebung $V \subset U$ von a gilt:
Die Bildmenge

$$W = \{f(z) : z \in V\setminus\{a\}\}$$

liegt dicht in $\mathbb{C}$, d.h. $\overline{W} = \mathbb{C}$.

Beweis

Sei a eine wesentliche Stelle von f, d.h. a ist weder hebbar noch eine Polstelle.

Beh.: Es existiert zu jeder Umgebung V von a, zu jeder Zahl $\alpha \in \mathbb{C}$ und jeder Zahl $\varepsilon > 0$ ein $z \in V$ mit $|f(z) - \alpha| \leq \varepsilon$.
Denn falls nicht, existieren Zahlen $\alpha \in \mathbb{C}, \varepsilon > 0$, sowie eine Umgebung V von a mit $|f(z) - \alpha| > \varepsilon,\ \forall\, z \in V \backslash \{a\}$.
D.h. die Voraussetzungen des obigen Lemmas sind erfüllt.
Nach dem Lemma wäre somit $(z-a)^n f(z)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ holomorph nach a fortsetzbar, d.h. a ist entweder eine Polstelle oder eine hebbare Stelle, also keine wesentliche Stelle, im Widerspruch zur Voraussetzung.
Ist umgekehrt die Bildmenge W dicht in $\mathbb{C}$, so kann f weder in einer Umgebung von a beschränkt sein, noch der Beziehung $\lim_{z \to a} |f(z)| = \infty$ genügen.

Anmerkung

Casorati-Weierstrass kann noch wesentlich verschärft werden.
Nach Piccard stimmt die Bildmenge W mit eventueller Ausnahme eines einzigen Wertes - für jede Umgebung - mit $\mathbb{C}$ überein.

Beispiel

$f(z) = e^{\frac{1}{z}}\ , \quad z \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$.
$z = 0$ ist wesentliche Singularität.
Denn f ist nicht beschränkt in Umgebung von 0, da $e^{\frac{1}{x}} \to \infty$ für $x \to 0 \qquad (x \in \mathbb{R})$;
f hat auch keinen Pol in $z = 0$, da $|f(i\,t)| = |e^{\frac{1}{it}}| = |e^{-\frac{1}{t}\cdot i}| = 1\ ,\ \forall\, t \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.
Also ist $z = 0$ wesentliche Singularität.
Ausnahme-Wert im Satz von Piccard: $w = 0$, d.h. $W = \mathbb{C} \backslash \{0\}$.
Entwicklung: Aus $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$ folgt
$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{z^2} + \ldots + \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{z^n} + \ldots$ konvergiert für alle $z \neq 0$.
Diese Entwicklung führt zum Begriff der Laurent-Reihe.

5.3 Laurent-Reihe

Definition

Reihe der Form

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k &= \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (z - z_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} (z - z_0)^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k\end{aligned}$$

heißt Laurent-Reihe.

Die Reihe $\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k(z-z_0)^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}\left(\frac{1}{z-z_0}\right)^k$ heißt der Hauptteil, die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ der Nebenteil der Laurent-Reihe.

Die Laurent-Reihe heißt konvergent (absolut konvergent), sofern Haupt- und Nebenteil konvergent (absolut konvergent) sind.

Beachte: Der Hauptteil ist eine Komposition der holomorphen Abb. $z \mapsto \frac{1}{z-z_0}$, $\mathbb{C}\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$ mit der Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}\,\zeta^k \,.$$

Besitzt diese Potenzreihe den Konvergenzradius $\frac{1}{r}$, $(0 \le r \le \infty)$, so konvergiert der Hauptteil $\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}\left(\frac{1}{z-z_0}\right)^k$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\frac{1}{|z-z_0|} < \frac{1}{r}$, d.h. $|z-z_0| > r$, und divergiert für $|z-z_0| < r$.

Besitzt der Nebenteil $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ den Konvergenzradius $R > r$, so konvergieren beide Reihen im Kreisring $A_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z-z_0| < R\}$. Dabei gilt:

$$\begin{aligned} R &= \left(\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}\,\right)^{-1} \\ r &= \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_{-k}|}\,. \end{aligned}$$

Die Laurent-Reihe stellt somit in $A_{r,R}(z_0)$ eine holomorphe Funktion dar.

Merke: Nebenteil konvergiert auf $B(z_0,R)$, Hauptteil konvergiert auf $\complement\overline{B(z_0,r)}$.

Gilt $a_{-k} = 0$, für alle $k \in I\!N$, so stellt die Laurent-Reihe eine Potenzreihe dar. Wie für diese gilt auch für die Laurent-Reihe:

Lemma

Konvergiert die Laurent-Reihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-z_0)^k =: f(z)$ auf dem Kreisring $A_{r,R}(z_0)$, $0 \le r < R \le \infty$, so gilt:

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\,d\zeta\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,,$$

wobei $C_\rho (r < \rho < R)$ eine beliebige Kreislinie mit Mittelpunkt z_0 und Radius ρ ist.

Korollar

Gilt in einem Kreisring

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-z_0)^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k(z-z_0)^k\,,$$

so ist $a_k = b_k$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$.

Gilt natürlich insbesondere für Potenzreihen!

Beweis des Lemmas

Aus der gleichmäßigen Konvergenz des Haupt- und Nebenteils auf der kompakten Menge C_ρ folgt:
Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodaß für alle $\zeta \in C_\rho$:

$$|\sum_{k=-n}^{n} a_k(\zeta - z_0)^k - f(\zeta)| < \varepsilon \quad , \quad \text{sobald } n \geq N.$$

Somit gilt für alle $n \geq N$ und ein bel. $m \in \mathbb{N}_0$:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{\sum_{k=-n}^{n} a_k(\zeta - z_0)^k - f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{m+1}} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \varepsilon \cdot \frac{1}{\rho^{m+1}} \cdot 2\pi \cdot \rho = \frac{\varepsilon}{\rho^m} \ . \tag{5.2}$$

Bekanntlich ist

$$\int_{C_\rho} (\zeta - z_0)^k d\zeta = \begin{cases} 0 & , \quad k \in \mathbb{Z} \backslash \{-1\} \\ 2\pi i & , \quad k = -1 \end{cases}$$

Somit gilt für alle $n \geq m$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{\sum_{k=-n}^{n} a_k(\zeta - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{m+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \sum_{k=-n}^{n} a_k(\zeta - z_0)^{k-m-1} d\zeta = a_m \ .$$

Also lautet (5.2) für alle $n \geq \max(N, m)$:

$$\left| a_m - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{m+1}} d\zeta \right| \leq \frac{\varepsilon}{\rho^m} \ .$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, folgt

$$a_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{m+1}} d\zeta \ .$$

Der folgende Satz ist eine Verallgemeinerung des Taylor'schen Satzes.

Entwicklungssatz von LAURENT:

Jede im Kreisring $A_{r,R}(z_0)$ $(0 \leq r < R \leq \infty)$ holomorphe Funktion f ist in $A_{r,R}(z_0)$ in eine Laurent-Reihe entwickelbar:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k \quad , \quad z \in A_{r,R}(z_0) \ .$$

Die Koeffizienten a_k $(k \in \mathbb{Z})$ sind eindeutig bestimmt und durch die Formel

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta$$

gegeben. Dabei bezeichnet C_ρ eine Kreislinie mit M.P. z_0 und Radius ρ $(r < \rho < R)$.

<u>Beweis</u>

Sei $z \in A = A_{r,R}(z_0)$. Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$F_z(\zeta) := \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & , \quad \zeta \in A \backslash \{z\} \\ f'(z) & , \quad \zeta = z \end{cases}$$

Da

$$\lim_{\zeta \to z} F_z(\zeta) = \lim_{\zeta \to z} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} = f'(z) \,,$$

ist F_z stetig in $\zeta = z$.
RIEMANN: F_z kann holomorph nach $\zeta = z$ fortgesetzt werden.
Mit anderen Worten: F_z ist holomorph auf dem ganzen Kreisring A.

Seien C_{ρ_1} und C_{ρ_2} zwei Kreise um z_0 mit Radien ρ_1, ρ_2, $r < \rho_1 < \rho_2 < R$. Ferner sei vorausgesetzt, daß $z \in B(z_0, \rho_2), z \notin B(z_0, \rho_1)$.
Sei $G := A_{\rho_1,\rho_2}(z_0)$ mit positiv orientiertem Rand Γ.

Cauchy'scher Integralsatz:

$$0 = \int\limits_{\Gamma} F_z(\zeta) d\zeta = \int\limits_{C_{\rho_2}} F_z(\zeta) d\zeta - \int\limits_{C_{\rho_1}} F_z(\zeta) d\zeta \,.$$

Somit gilt:

$$\int\limits_{C_{\rho_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \underbrace{\int\limits_{C_{\rho_2}} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta}_{=2\pi i, da\, z \in B(z_0, \rho_2)} = \int\limits_{C_{\rho_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \underbrace{\int\limits_{C_{\rho_1}} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta}_{=0,\, da\, z \notin B(z_0, \rho_1)} \,,$$

d.h.

$$f(z) = \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_{\rho_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta}_{=:g(z)} - \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_{\rho_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta}_{=:h(z)}$$

Bekanntlich:
g ist holomorph auf $B(z_0, \rho_2)$.
h ist holomorph auf $\complement \overline{B(z_0, \rho_1)}$.

Also sind beide holomorph auf $A_{\rho_1,\rho_2}(z_0)$ und es gilt dort $f = g - h$.
Sei $M := \sup_{\zeta \in C_{\rho_1}} |f(\zeta)|$. Dann gilt für alle $z \in C\overline{B(z_0, \rho_1)}$

$$|h(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{C_{\rho_1}} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|} |d\zeta| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot M \cdot \frac{1}{|z - z_0| - \rho_1} \cdot 2\pi \cdot \rho_1 = M \cdot \frac{\rho_1}{|z - z_0| - \rho_1} \,,$$

da $|\zeta - z| = |z - \zeta| \geq |z - z_0| - |z_0 - \zeta| = |z - z_0| - \rho_1$.
Setze $\tilde{h}(t) := h(z_0 + \frac{1}{t}), t \in B(0, \frac{1}{\rho_1}) \backslash \{0\}$. $\tilde{h}$ ist holomorph auf $B(0, \frac{1}{\rho_1}) \backslash \{0\}$.
Ferner gilt

$$|\tilde{h}(t)| = |h(z_0 + \frac{1}{t})| \leq \frac{M \cdot \rho_1}{|\frac{1}{t}| - \rho_1} = \frac{M \cdot \rho_1}{1 - |t|\, \rho_1} |t| \quad , \qquad \forall\, t \in B(0, \frac{1}{\rho_1}) \backslash \{0\} \,.$$

Somit ist $\lim_{t\to 0} \tilde{h}(t) = 0$. Also läßt sich durch die Festsetzung $\tilde{h}(0) := 0$ $\tilde{h}$ stetig in die Null fortsetzen.

RIEMANN: $\tilde{h}$ läßt sich holomorph fortsetzen durch $\tilde{h}(0) = 0$. Also ist $\tilde{h}$ nach Fortsetzung holomorph auf $B(0, \frac{1}{\rho_1})$.
Potenzreihenentwicklung:

$$\tilde{h}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k t^k \quad , \qquad \text{konvergiert auf } B(0, \tfrac{1}{\rho_1}) \ .$$

Setze $\boxed{a_{-k} := -c_k}$ $(k \in \mathbb{N})$ und $t = (z - z_0)^{-1}$.
Dann konvergiert die Reihe $-\sum_1^\infty a_{-k}(z-z_0)^{-k}$ für alle $z \in C\overline{B(z_0, \rho_1)}$ und stellt die Funktion h dar.

Entwickeln wir nun noch g in eine Potenzreihe um z_0,

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad , \quad z \in B(z_0, \rho_2)$$

so folgt:

$$f(z) = g(z) - h(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

konvergiert für alle $z \in A_{\rho_1,\rho_2}(z_0)$.
Da ρ_1, ρ_2 mit $r < \rho_1 < \rho_2 < R$ beliebig wählbar waren, folgt, daß f in $A_{r,R}(z_0)$ durch die Laurent-Reihe darstellbar ist.

Beispiel

$f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ ist holomorph auf $\mathbb{C}\backslash\{1, 2\}$.

a) Entwicklung in $\mathbb{E} = B(0, 1)$
Benutze Partialbruchzerlegung : $f(z) = \dfrac{1}{z-2} - \dfrac{1}{z-1}$

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{2(1-\frac{z}{2})} + \frac{1}{1-z} \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k + \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \sum_{k=0}^{\infty}(1 - 2^{-k-1})\, z^k \quad , \quad \forall\, z \in \mathbb{E} \end{aligned}$$

b) Laurent-Entwicklung im Kreisring $A_{1,2}(0)$.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{2(1-\frac{z}{2})} - \frac{1}{z(1-\frac{1}{z})} = \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k - \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^k = -\sum_{k'=0}^{\infty} z^{-(k'+1)} - \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-(k+1)} z^k = \\ &\overset{k=k'+1}{=} -\sum_{k=1}^{\infty} z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-(k+1)} z^k = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, z^k \ , \text{ wobei } a_k = \begin{cases} -1 & , \quad k < 0 \\ -2^{-(k+1)} & , \quad k \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

c) Ring $A_{2,\infty}(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$.

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} - \frac{1}{z(1-\frac{1}{z})} = \\
&= \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^k - \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^k = \sum_{k'=0}^{\infty} 2^{k'} z^{-(k'+1)} - \sum_{k'=0}^{\infty} z^{-(k'+1)} = \\
&\overset{k=k'+1}{=} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} z^{-k} - \sum_{k=1}^{\infty} z^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty}(2^{k-1}-1)z^{-k} \qquad (|z|>2)
\end{aligned}
$$

("Entwicklung um den Punkt ∞")

Charakterisierung der isolierten Singularitäten mit Hilfe der Laurentreihen

Satz

Sei U offen, $a \in U$ und $f : U\backslash\{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $\rho := dist(a, \partial U)$ und $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-a)^k$ die Laurent-Reihe von f im Kreisring $B(a,\rho)\backslash\{a\} = A_{0,\rho}(a)$.
Dann gilt:

(1) a ist hebbare Stelle $\Leftrightarrow a_{-k} = 0$, $\quad \forall\, k \in I\!N$.

(2) a ist Polstelle n-ter Ordnung $\Leftrightarrow a_{-k} = 0$ für alle $k > n, a_{-n} \neq 0$.

(3) a ist wesentliche Singularität $\Leftrightarrow a_{-k} \neq 0$ für unendlich viele $k \in I\!N$.

Beweis

(1) Klar, da die Laurent-Koeffizienten eindeutig bestimmt sind.

(2) a ist Polstelle n-ter Ordnung von $f \Leftrightarrow$
$\exists\, g : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-a)^n}$, $g(a) \neq 0$.
Ist

$$
\begin{aligned}
g(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k \quad , \quad \text{mit } c_0 \neq 0 \, , \\
&= c_0 + c_1(z-a) + \ldots + c_{n-1}(z-a)^{n-1} + \sum_{k=n}^{\infty} c_k(z-a)^k \, ,
\end{aligned}
$$

so ist

$$
f(z) = \frac{c_0}{(z-a)^n} + \ldots + \frac{c_{n-1}}{z-a} + \underbrace{\sum_{k=n}^{\infty} c_k(z-a)^{k-n}}_{\text{Potenzreihe = Nebenteil}} .
$$

(3) trivial

Bem.: Wichtiger Unterschied zwischen Potenzreihe und Laurent-Reihe:
Letztere besitzt i.A. keine Stammfunktion. Hinderungsgrund: Term $a_{-1}\,(z-a)^{-1}$.

Kapitel 6

Der Residuensatz

6.1 Das Residuum

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in U$ und $f : U \backslash \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $f(z) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} a_k (z-a)^k$ die Laurent-Entwicklung von f in a.

Definition

Der Koeffizient $a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} f(z)\, dz$, wobei C_ρ eine Kreislinie um a mit $\overline{B(a,\rho)} \subset U$ ist, heißt das Residuum von f in a.In Zeichen

$$\boxed{a_{-1} = Res_a f}\ .$$

<u>Rechenregeln</u>
Klar ist:

$$\begin{aligned} Res_a(f+g) &= Res_a f + Res_a g \\ Res_a(\lambda f) &= \lambda\, Res_a f \qquad (\lambda \in \mathbb{C})\ . \end{aligned}$$

Regel 1: Ist a ein einfacher Pol von f, so gilt:

$$\boxed{Res_a(f) = \lim_{z \to a} (z-a)\, f(z)}\ .$$

Denn aus $f(z) = \dfrac{g(z)}{z-a}$ mit $g(a) \neq 0$, g holomorph, folgt

$$f(z) = \frac{1}{z-a}(g(a) + (z-a)g'(a) + \dots) = \frac{g(a)}{z-a} + g'(a) + (z-a)\,[\dots]$$

d.h. $Res_a f = g(a)$. Aber $g(a) = \lim_{z \to a} g(z) = \lim_{z \to a} (z-a)\, f(z)$.

Regel 2: Hat $f : U \backslash \{a\} \to \mathbb{C}$ in a eine Polstelle m-ter Ordnung ($m \in \mathbb{N}$), d.h. gilt $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-a)^m}$, $g : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $g(a) \neq 0$, so gilt

$$\boxed{Res_a f = \frac{g^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}}$$

Denn sei $g(z) = a_0 + a_1(z-a) + \ldots + a_m(z-a)^m + \ldots$ die Potenzreihenentwicklung von g um a. Dann ist

$$f(z) = \frac{a_0}{(z-a)^m} + \ldots + \frac{a_{m-1}}{z-a} + a_m + (z-a)[\ldots] \; .$$

Also

$$Res_a f = a_{m-1} = \frac{g^{(m-1)}(a)}{(m-1)!} \; .$$

Anwendung von Regel 1:

Seien g und h holomorph in U , $g(a) \neq 0$, $h(a) = 0$ und $h'(a) \neq 0$ für ein $a \in U$ ..
Dann gilt für $f := \frac{g}{h}$, definiert auf $U \setminus \{$Nullstellen von $h\}$:

$$Res_a f = \frac{g(a)}{h'(a)} \; .$$

Denn

$$Res_a\, f = \lim_{z \to a} (z-a) \frac{g(z)}{h(z)} = \lim_{z \to a} \frac{g(z)}{\frac{h(z)-h(a)}{z-a}} = \frac{g(a)}{h'(a)} \; .$$

Beispiele:

(1) $f(z) = \dfrac{z}{z^2-1}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$, hat einfache Pole in 1 und -1.

$$\begin{aligned} Res_1 f &\overset{Regel\,1}{=} \lim_{z \to 1} (z-1) \cdot \frac{z}{(z-1)(z+1)} = \frac{1}{2} \\ Res_{-1} f &= \lim_{z \to -1} (z+1) \cdot \frac{z}{(z-1)(z+1)} = \frac{1}{2} \; . \end{aligned}$$

(2) $f(z) = \dfrac{e^z}{z^k}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $g(z) = e^z$, $m = k$ $(a = 0)$:

$$Res_0 f \overset{Regel\,2}{=} \frac{(e^z)^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} = \frac{e^z\,|_{z=0}}{(k-1)!} = \frac{1}{(k-1)!} \; .$$

(3) $f(z) = \dfrac{\cos \pi z}{(z-1)^2}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $g(z) = \cos \pi z$, $g'(z) = -\pi \sin \pi z$, $m = 2$ $(a = 1)$:

$$Res_1 f = \frac{g'(1)}{1!} = \frac{-\pi \sin \pi}{1} = 0 \; .$$

Existenz einer Stammfunktion

Satz

Sei f holomorph im Ring $A_{r,R}(z_0)$. Dann gilt:
f besitzt genau dann eine Stammfunktion F in $A_{r,R}(z_0)$, wenn der Koeffizient a_{-1} (in der Laurent-Entwicklung von f in z_0) verschwindet.

Beweis

Sei $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ die Laurent-Entwicklung von f. Gilt $a_{-1} = 0$, dann kann man die Reihe formal integrieren

$$F(z) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq -1}}^{\infty} a_k \, \frac{(z-z_0)^{k+1}}{k+1} \; .$$

Da diese Reihe wegen $\sqrt[k]{k+1} \to 1$ für $k \to \infty$ die selben Konvergenzradien besitzt wie die ursprüngliche Reihe, folgt, daß F auf $A_{r,R}(a)$ holomorph ist. Da

$$F'(z) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq -1}}^{\infty} a_k(z-a)^k = f(z) \; ,$$

ist F eine Stammfunktion von f.
Besitzt umgekehrt f eine Stammfunktion F, so gilt

$$\underbrace{\int_{C_\rho} f(\zeta)\, d\zeta}_{=2\pi i\cdot a_{-1}} = 0 \;\; ; \quad \Rightarrow a_{-1} = 0 \; .$$

6.2 Die Umlaufzahl (Indexfunktion)

Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener (stückweise stetig differenzierbarer) Weg in $\mathbb{C}$,
$|\gamma| = \gamma([0,1])$, $z \in \mathbb{C} \setminus |\gamma|$.

Definition

$$ind_\gamma(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

heißt die Umlaufzahl (bzw. Index) von γ bzgl. z.

Ferner: Die Menge
$Int\,\gamma := \{z \in \mathbb{C}\setminus|\gamma| : ind_\gamma(z) \neq 0\}$ heißt Inneres von γ ,
$Ext\,\gamma := \{z \in \mathbb{C}\setminus|\gamma| : ind_\gamma(z) = 0\}$ heißt Äußeres von γ.
Offensichtlich: $\mathbb{C} = Int\,\gamma \cup |\gamma| \cup Ext\,\gamma$.

Beispiel

$\gamma =$ Kreislinie, parametrisiert durch $z(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
Es gilt

$$ind_\gamma(z) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } \; z \in B(0,1) \\ 0 & , \text{ falls } \; z \in \complement\overline{B(0,1)} \end{cases}$$

Satz

Sei γ ein beliebiger geschlossener Weg in $\mathbb{C}$. Dann gilt:

(1) Für jedes $z \in \mathbb{C}\backslash|\gamma|$ ist $ind_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$.

(2) Die Funktion $ind_\gamma(z)$ ist konstant auf jeder Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C}\backslash|\gamma|$ und verschwindet auf der unbeschränkten Komponente von $\mathbb{C}\backslash|\gamma|$.

(3) $ind_{-\gamma}(z) = -ind_\gamma(z) \quad , \quad \forall\, z \in \mathbb{C}\backslash|\gamma|$.

Zuerst:
Hilfssatz:

Sei G ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und nullstellenfrei. Sei γ ein Weg in G mit Anfangspunkt z_0 und Endpunkt z_1. Dann gilt

$$\boxed{f(z_1) = f(z_0)e^{\int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta}}$$

Beweis des Hilfssatzes

Sei $\gamma : [0,1] \to G$. Da der Träger $|\gamma|$ von γ kompakt ist, existieren Kreisscheiben $B_1, \ldots, B_n$ welche $|\gamma|$ überdecken.
Sei $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = 1$ eine Unterteilung von $[0,1]$ derart, daß jeder Bogen $\gamma_k := \gamma|_{[t_{k-1},t_k]}$ in einer Kreisscheibe B_j , $j \in \{1,\ldots,n\}$ verläuft. Da f auf B_j keine Nullstelle besitzt, existiert ein Zweig des Logarithmus von f auf B_j. Es folgt

$$\int\limits_{\gamma_k} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta = \int\limits_{\gamma_k} \frac{d}{d\zeta}(\log f)\,d\zeta = \log f(\,\gamma(t_k)\,) - \log f(\,\gamma(t_{k-1})\,)\;.$$

Somit ist

$$e^{\int_{\gamma_k} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta} = \frac{f(\,\gamma(t_k)\,)}{f(\,\gamma(t_{k-1})\,)}\;.$$

Daraus

$$\begin{aligned} e^{\int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta} &= e^{\sum_1^m \int_{\gamma_k} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta} = \prod_{k=1}^m e^{\int_{\gamma_k} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta} = \\ &= \prod_{k=1}^m \frac{f(\,\gamma(t_k)\,)}{f(\,\gamma(t_{k-1})\,)} = \frac{f(\,\gamma(1)\,)}{f(\,\gamma(0)\,)} = \frac{f(z_1)}{f(z_0)}\;. \end{aligned}$$

Korollar

Ist f holomorph und nullstellenfrei auf dem Gebiet G und γ ein geschlossener Weg in G, so gilt

$$\int\limits_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta = 2k\pi i \quad , \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z}\;.$$

Denn nach dem Hilfssatz ist $e^{\int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta} = 1$.

Beweis des Satzes

(1) Sei $z \in \mathbb{C} \backslash |\gamma|$ beliebig. Wähle $G := \mathbb{C} \backslash \{z\}$ und $f(\zeta) = \zeta - z, \ \forall \, \zeta \in G$.
f ist holomorph und nullstellenfrei.

$$\text{Korollar} \qquad \Rightarrow \qquad \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z} \, d\zeta = 2k\pi i \ , \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z} \, .$$

(2) Wir wissen $z \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z} \, d\zeta$ ist stetig, ja sogar holomorph auf $\mathbb{C} \backslash |\gamma|$.

Darauf Übungsaufgabe Nr. xy aus Analysis Vorlesung verwenden, welche besagt, daß eine stetige Funktion, die nur ganze Zahlen als Werte annimmt, auf jeder Zusammenhangskomponente konstant ist.
Um zu zeigen, daß der Index auf der unbeschränkten Komponente von $\mathbb{C} \backslash |\gamma|$ gleich Null ist, beachte man, daß

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|} \leq \frac{\text{Länge von } |\gamma|}{2\pi \cdot dist\,(z, \gamma)} \to 0 \ \text{ für } z \to \infty \, .$$

(3) trivial

Ausdehnung der Umlaufszahl auf Zyklen

(1) Begriff der Kette:
Seien $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ Wege in U (offen in $\mathbb{C}$), d.h. stetige Abbildungen von $[0, 1]$ nach U. Wir versehen jeden Weg mit einer ganzen Zahl (die besagt, wie oft der Weg durchlaufen wird, $-\gamma$ bezeichne dabei den im gegengesetzten Sinne durchlaufenen Weg).

Das System
$$\Gamma = n_1\gamma_1 + n_2\gamma_2 + \ldots + n_m\gamma_m \qquad (n_k \in \mathbb{Z})$$
nennen wir Kette.

(genaue **Definition**: Eine Kette (in U) ist eine Abbildung Γ der Menge aller Wege in U in die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen, die nur endlich vielen Wegen eine von Null verschiedene ganze Zahl zuordnet. Identifiziert man den Weg γ mit der Kette, die γ den Wert 1, allen übrigen Wegen den Wert Null zuordnet, so ist jede Kette als endliche lineare Kombination von Wegen darstellbar:

$$\Gamma = n_1\gamma_1 + n_2\gamma_2 + \ldots + n_m\gamma_m \quad)$$

(2) Begriff des Zyklus

Definition

Eine Kette $\Gamma = \sum_{k=1}^m n_k\gamma_k$ heißt Zyklus (bzw. geschlossene Kette), wenn jeder Punkt (unter Berücksichtigung der Vielfachheit n_k) ebensooft als Anfangspunkt eines γ_k wie als Endpunkt eines γ_k auftritt.

Beispiele

(1) Jeder geschlossene Weg ist ein Zyklus.
Allgemein ist jede Kette $\Gamma = \sum_{k=1}^{m} n_k \gamma_k$ von geschlossenen Wegen γ_k ein Zyklus.
Insbesondere ist die Randkette eines positiv berandeten Gebietes ein Zyklus.

(2) Sind $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ Wege mit Endpunkt γ_k = Anfangspunkt γ_{k+1} $(k = 1, \ldots, m-1)$ und Endpunkt γ_m = Anfangspunkt γ_1, so definiert die Kette $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_m$ einen Zyklus.

Integrale längs Ketten und Zyklen

Ist $\Gamma = \sum_{k=1}^{m} n_k \gamma_k$ eine Kette in U und $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, so setzen wir

$$\int_\Gamma f(z)\,dz := \sum_{k=1}^{m} n_k \int_{\gamma_k} f(z)\,dz$$

Insbesondere können wir die Umlaufzahl auf Zyklen ausdehnen. Ist $\Gamma = \sum_{k=1}^{m} n_k \gamma_k$ ein Zyklus, so setzen wir

$$ind_\Gamma(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{\zeta - z}\,d\zeta \quad , \quad \forall\, z \in \mathbb{C} \setminus |\Gamma| \,.$$

6.3 Der allgemeine Cauchy'sche Integralsatz

Definition

Ein Zyklus Γ in einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ heißt nullhomolog in U, wenn für jeden Punkt $z \in \complement U$ (Komplement von U) gilt

$$ind_\Gamma(z) = 0 \,.$$

Zwei Zyklen Γ_1 und Γ_2 heißen homolog in U, falls $\Gamma_1 - \Gamma_2$ nullhomolog in U ist.

Cauchy'scher Integralsatz (allgemeine Form)

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, Γ ein in U nullhomologer Zyklus. Dann gilt

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0 \,.$$

Analog gilt

Allgemeine Cauchy-Formel

Unter den Voraussetzungen des allg. Cauchy'schen Integralsatzes gilt für jeden Punkt $z \in U \setminus |\Gamma|$ und alle $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$ind_\Gamma(z) f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\,d\zeta \,.$$

Beweis der beiden Sätze

Wir beweisen zunächst die Cauchy-Formel im Falle $k = 0$.
z.z.

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} \cdot f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta \, ,$$

d.h. z.z.

$$\int\limits_\Gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \, d\zeta = 0 \, .$$

Setze $g(\zeta, z) := \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & , \quad \zeta \neq z \\ f'(z) & , \quad \zeta = z \end{cases}$

g ist auf $U \times U$ definiert; wir zeigen die Stetigkeit in beiden Variablen. Ist $(\zeta_0, \, z_0) \in U \times U$ mit $z_0 \neq \zeta_0$, so wird g in der Nähe von $(\zeta_0, \, z_0)$ durch die obere Formel gegeben und ist trivialerweise stetig.
Es sei $z_0 = \zeta_0$. Wir wählen eine δ-Umgebung $B(z_0, \delta) \subset \overline{B(z_0, \delta)} \subset U$ und untersuchen $g(\zeta, z) - g(z_0, z_0)$ auf $B(z_0, \delta) \times B(z_0, \delta)$

a) im Falle $z = \zeta$:

$$g(z, z) - g(z_0, z_0) = f'(z) - f'(z_0) \, ,$$

b) im Falle $z \neq \zeta$:

$$g(\zeta, z) - g(z_0, z_0) = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} - f'(z_0) = \frac{1}{\zeta - z} \int\limits_{[z,\zeta]} (f'(w) - f'(z_0)) \, dw \, ,$$

wobei $[z, \zeta]$ die orientierte Strecke von z nach ζ bezeichnet.

Nun ist die Ableitung f' stetig in z_0. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ können wir also $\delta > 0$ so wählen, daß

$$|f'(w) - f'(z_0)| < \varepsilon$$

für alle $w \in U_\delta(z_0)$ wird. Damit folgt im Fall a):

$$|g(z, z) - g(z_0, z_0)| < \varepsilon \, ;$$

im Fall b)

$$|g(\zeta, z) - g(z_0, z_0)| \leq \frac{1}{|\zeta - z|} \, |\zeta - z| \sup_{w \in [\zeta, z]} |f'(w) - f'(z_0)| < \varepsilon \, .$$

Wir betrachten nun die Hilfsfunktion

$$h_0(z) := \int\limits_\Gamma g(\zeta, z) \, d\zeta \quad , \quad z \in U \, .$$

h_0 ist stetig auf U.
Beh.: h_0 ist sogar holomorph auf U.

Mit Morera:
Sei Δ ein beliebiges Dreieck, in U enthalten, mit Dreiecksweg T;
z.z.

$$\int_T h_0(z)\,dz = 0\ .$$

Aber

$$\begin{aligned}\int_T h_0(z)dz &= \int_T \Big(\int_\Gamma g(\zeta,z)\,d\zeta\Big)\,dz = \\ &\overset{Fubini}{=} \int_\Gamma \underbrace{\Big(\int_T g(\zeta,z)\,dz\Big)}_{\substack{=0, da\ z\to g(\zeta,z)\\ holomoroph}}\,d\zeta = 0\end{aligned}$$

(Anwendung von Fubinis Theorem ist gestattet wegen Stetigkeit von g auf $U \times U$).
Sei $U_0 := \{z \in \mathbb{C}\backslash|\Gamma| : ind_\Gamma(z) = 0\}$
Nach Voraussetzung gilt : $\complement U \subset U_0$ (denn Γ ist nullhomolog).
Folglich gilt: $U \cup U_0 = \mathbb{C}$.
Auf $U \cap U_0$ gilt :

$$\begin{aligned}h_0(z) &= \int_\Gamma \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta = \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - f(z)\underbrace{\int_\Gamma \frac{1}{\zeta - z}\,d\zeta}_{2\pi i\cdot ind_\Gamma(z)=0} = \\ &= \underbrace{\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta}_{=:h_1(z)}\end{aligned}$$

h_0 ist holomorph auf U, h_1 ist holomorph auf U_0. Auf $U \cap U_0$ gilt: $h_0(z) = h_1(z)$
Definiere

$$h(z) = \begin{cases} h_0(z) & , \quad z \in U \\ h_1(z) & , \quad z \in U_0 \end{cases}$$

Dann ist h holomorph auf $U \cup U_0 = \mathbb{C}$, d.h. h ist holomorph auf $\mathbb{C}$.
Auf U_0 gilt aber

$$|h(z)| = |h_1(z)| \le \int_\Gamma \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|}\,|d\zeta| \le \max_\Gamma |f| \cdot \frac{1}{dist(z,\Gamma)} \cdot \text{Länge von } \Gamma\ .$$

$\Rightarrow$ h ist beschränkt auf dem Komplement einer hinreichend großen Kreisscheibe und damit auf $\mathbb{C}$.
Liouville: $h \equiv const = c$. Aber $c = 0$, da $|h(z)| \to 0$ für $z \to \infty$
$\Rightarrow h \equiv 0 \ \ \Rightarrow \ h_0 = 0$ auf U
$\Rightarrow$ Cauchy-Formel für $k = 0$.
Mit Differentiation folgt dann die Cauchy-Formel für bel. $k \in I\!N$.

Also bleibt nur noch der Cauchy'sche Integralsatz zu zeigen.

Sei $a \in U \backslash |\Gamma|$ beliebig.
Betrachte Hilfsfunktion: $F(z) = (z-a)f(z)$.
F ist holomorph auf U. Ferner gilt: $F(a) = 0$. Wende die Cauchy-Formel an auf F (für $k = 0$):

$$
\begin{aligned}
ind_\Gamma(z) \cdot \underbrace{F(a)}_{=0} &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{F(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{(\zeta - a) \cdot f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma f(\zeta) d\zeta \ .
\end{aligned}
$$

Korollar

Seien Γ, Γ' homologe Zyklen in U. Dann gilt für jede holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$

$$
\int\limits_\Gamma f(z)\, dz = \int\limits_{\Gamma'} f(z)\, dz \ .
$$

6.4 Der Residuensatz

Residuensatz

Sei U offen in $\mathbb{C}$, $z_1, \ldots, z_n$ endlich viele Punkte in U und Γ ein nullhomologer Zyklus in U, dessen Träger $|\Gamma|$ keinen Punkt z_i $(i = 1, \ldots, n)$ enthält. Dann gilt für jede in $U \backslash \{z_1, \ldots, z_n\}$ holomorphe Funktion f:

$$
\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma f(z) dz = \sum_{i=1}^{n} ind_\Gamma(z_i) Res_{z_i} f \ .
$$

Beweis

Sei f_i der Hauptteil der Laurent-Entwicklung von f um den Punkt z_i $(i = 1, \ldots, n)$.
Wir wissen: f_i ist holomorph auf $\mathbb{C} \backslash \{z_i\}$.
Sei $f_i := \frac{a_i}{z - z_i} + \tilde{f}_i$, $a_i = Res_{z_i} f$;
$\tilde{f}_i$ ist Laurent-Reihe in der der Koeffizient a_{-1} verschwindet. $\Rightarrow$ $\tilde{f}_i$ hat Stammfunktion auf $\mathbb{C} \backslash \{z_i\}$. Es folgt

$$
\int\limits_\Gamma \tilde{f}_i(z) dz = 0
$$

und damit

$$
\int\limits_\Gamma f_i dz = a_i \int\limits_\Gamma \frac{1}{z - z_i} dz = 2 \cdot \pi \cdot i \cdot a_i \cdot ind_\Gamma(z_i)
$$

Nach Konstruktion ist $f - (f_1 + f_2 + \ldots + f_n)$ holomorph auf U.
Da nach Voraussetzung Γ nullhomolog ist, gilt nach dem allgemeinen Cauchy-Satz:

$$
\int\limits_\Gamma [\, f - (f_1 + f_2 + \ldots + f_n)\,] dz = 0 \ ,
$$

d.h.

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f dz = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f_i(z)dz = $$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot ind_\Gamma(z_i) = Res_{z_i} f \cdot ind_\Gamma(z_i) \ .$$

Beispiel

$f(z) = \dfrac{z}{z^2-1} = \dfrac{z}{(z-1)(z+1)}$, $\quad U = \mathbb{C}$, $z_1 = 1, z_2 = -1$.

Sei Γ Kreis um 0 mit Radius > 1.

$\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \dfrac{z}{z^2-1} = \underbrace{ind_\Gamma(1)}_{1} \cdot \underbrace{Res_1 f}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{ind_\Gamma(-1)}_{1} \cdot \underbrace{Res_{-1} f}_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

$\Rightarrow \int\limits_{\Gamma} \dfrac{z}{z^2-1}\, dz = 2\pi i$.

<u>Anwendung: Berechnung bestimmter Integrale</u>

Der Residuensatz erlaubt die Berechnung gewisser "bestimmter Integrale" <u>ohne</u> Kenntnis der Stammfunktion.

Typ I: (trigonometrische Funktionen)

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)d\varphi \ ,$$

wobei R = rationale Funktion in zwei Variablen, die auf der Einheits-Kreislinie C endlich ist.

<u>Rezept</u>:

Setze: $z = e^{i\varphi}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ (Parametrisierung der Einheits-Kreislinie C) und beachte, daß

$\cos\varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$

$\sin\varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})$

$\frac{dz}{d\varphi} = e^{i\varphi} i = iz \Rightarrow d\varphi = \frac{dz}{iz}$

Somit

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)d\varphi = \frac{1}{i}\int\limits_C \underbrace{\frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})\ ,\ \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})\right)}_{=\tilde{R}(z)} dz = 2\pi \sum \underbrace{ind_C(z_i)}_{\substack{=1\ \forall\ z_i \in E \\ sonst\ 0}} Res_{z_i}\tilde{R} \ .$$

<u>Resultat</u>:

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)d\varphi = 2\pi \sum_{i=1}^{n} Res_{z_i}\tilde{R} \ ,$$

wobei
$$\tilde{R}(z) = R\,(\,\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}), \frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})\,)\cdot\frac{1}{z}$$
und z_i $(i = 1,\dots,n)$ die Pole von $\tilde{R}$ in $\mathbb{E}$ bezeichnet.

Beispiel

$\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - a\sin\varphi} \qquad (0 < a < 1)$

$1 - a\sin\varphi = 1 - \frac{a}{2i}(z - \frac{1}{z}) = \frac{-az^2+2iz+a}{2iz}$

$\tilde{R}(z) = \frac{-2iz}{az^2-2iz-a}\cdot\frac{1}{z} = \frac{-2i}{az^2-2iz-a}\ .$

Nullstellen von $az^2 - 2iz - a = 0$:
$$z_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1-a^2}}{a}\,i\ ;$$
z_1, z_2 sind einfache Pole , $|z_1| > 1, |z_2| < 1$. Nur z_2 muß berücksichtigt werden!
$$\begin{aligned} Res_{z_2}\tilde{R} &= \lim_{z\to z_2}(z-z_2)\tilde{R}(z) = \lim_{z\to z_2}(z-z_2)\frac{-2i}{a(z-z_1)(z-z_2)} = \\ &= \frac{-2i}{a(z_2-z_1)} = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \end{aligned}$$
$\Rightarrow \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1-a\sin\varphi} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}\ .$

Typ II. (uneigentliche Integrale)
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}} \int_a^b f(x)dx\ .$$
Bezeichnung: Sei $\mathbb{H}$ die obere Halbebene, $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}\ : Im\, z > 0\}$.

Satz

Sei $U \supset \overline{\mathbb{H}}$ offen, $z_i \in \mathbb{H}$ $(i = 1,\dots,m), f : U\backslash\{z_1,\dots z_m\}$ eine holomorphe Funktion, derart, daß $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ existiert und $\lim_{\substack{z\to\infty\\ z\in U}} z\,f(z) = 0$. Dann gilt
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\sum_{i=1}^{m} Res_{z_i}f\ . \tag{6.1}$$

Beweis

Sei $\gamma_r :]0,\pi[\ \to \mathbb{H} : \varphi \to re^{i\varphi}$ der orientierte Halbkreis mit Radius r.
OBdA sei $r > 0$ so groß gewählt, daß alle Punkte z_i $(i = 1,\dots,m)$ in $B(0,r)\cap\mathbb{H}$ liegen.
Residuensatz:
$$\int_{-r}^{r} f(x)dx + \int_{\gamma_r} f(z)dz = 2\pi i\sum_{i=1}^{m} Res_{z_i}f\ .$$

Abschätzung:

$$
\begin{aligned}
\Big|\int\limits_{\gamma_r} f(z)dz\Big| &\leq \int\limits_{\gamma_r} |f(z)|\,|dz| \leq \max_{z\in\gamma_r}|f(z)|\cdot \underbrace{\int\limits_{\gamma_r}|dz|}_{\pi r} = \\
&= \pi\cdot\max_{z\in\gamma_r}|z\cdot f(z)| \to 0 \text{ für } r\to\infty
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ (6.1).

Typ III:

Satz

Es sei g holomorph auf $\mathbb{C}$, mit evtl. Ausnahme von endlich vielen Punkten, von denen keiner auf der reellen Achse liegt. Ferner sei $\lim_{z\to\infty} g(z) = 0$ vorausgesetzt. Dann gilt

$$
\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{iax}dx = \begin{cases} 2\pi i \sum\limits_{w\in I\!H} Res_w[g(z)e^{iaz}] & , \quad a>0 \\ -2\pi i \sum\limits_{w\in C\overline{I\!H}} Res_w[g(z)e^{iaz}] & , \quad a<0 \end{cases}
$$

wobei $C\overline{I\!H}$ = untere Halbebene.

<u>Beweis</u>

Sei $a>0$. Wähle Quadrat so groß, daß alle Singularitäten von g in $I\!H$ im Quadrat mit den Eckpunkten $s,\ s+iq,\ -r+iq,\ -r$ $(r,\ s>0,\ q=r+s)$ liegen.
Sei $I_\nu := \int_{\gamma_\nu} g(z)e^{iaz}dz$, wobei die γ_ν $(\nu = 1,\ 2,\ 3)$ die Strecken
$\gamma_1 = [s,\ s+iq]$, $\gamma_2 = [s+iq,\ -r+iq]$, $\gamma_3 = [-r+iq,\ -r]$ bezeichnen.
<u>Beh.</u>: $I_\nu \to 0$ falls $r, s\to\infty$.
Dann folgt aus dem Residuensatz

$$
\int\limits_{-r}^{s} g(x)e^{iax}\,dx + \underbrace{I_1}_{\to 0} + \underbrace{I_2}_{\to 0} + \underbrace{I_3}_{\to 0} = 2\pi i\sum_{w\in I\!H} Res_w(\,g(z)e^{iaz}\,)
$$

$r, s\to\infty$: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{iax}dx = 2\pi i \sum\limits_{w\in I\!H} Res_w\,(g(z)\,e^{iaz})$.

<u>Beweis</u> der Beh.:

$$
\begin{aligned}
|I_2| &= \Big|\int\limits_{\gamma_2} g(\zeta)e^{ia\zeta}\,d\zeta\Big| \leq \max_{\zeta\in\gamma_2}[\,|g(\zeta)\,e^{ia\zeta}|\,]\cdot(r+s) \\
&\leq \max_{\zeta\in\gamma_2}|\,g(\zeta)\,|\cdot e^{-aq}\cdot q \leq \max_{\zeta\in\gamma_2}|\,g(\zeta)\,|\ ,\ \text{wenn } e^{aq}>q\ ,\ \text{was } \forall\, q\geq q_0 \text{ der Fall ist.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|I_1| &= \Big|\int\limits_{\gamma_1} g(\zeta)e^{ia\zeta}\,d\zeta\,\Big| \leq \int\limits_0^q |\,g(s+it)\,|\cdot|\,\underbrace{e^{ia(s+it)}}_{e^{-at}}\,|\,dt \\
&\leq \max_{\zeta\in\gamma_1}|\,g(\zeta)\,|\cdot \underbrace{\int\limits_0^q e^{-at}dt}_{\frac{1}{a}(1-e^{-aq})} \leq \max_{\zeta\in\gamma_1}|\,g(\zeta)\,|\cdot\frac{1}{a}
\end{aligned}
$$

analog: $|I_3| \leq \max\limits_{\zeta\in\gamma_3}|\,g(\zeta)\,|\cdot\dfrac{1}{a}$.

Wegen $\lim\limits_{z\to\infty} g(z) = 0$ gilt: $I_1, I_2, I_3 \to 0$ für $r, s \to \infty$.
Analog im Fall $a < 0$ (Hier Quadrat in unterer Halbebene wählen.)

Bemerkung

Wir können jetzt auch Integrale der Form

$$
\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\underbrace{\cos ax}_{\frac{1}{2}(e^{iax}+e^{-iax})}dx\ ,\quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\underbrace{\sin ax}_{\frac{1}{2i}(e^{iax}-e^{-iax})}dx
$$

lösen.
Falls g gerade ist, $g(-x) = g(x)$:

$$
\int\limits_0^{\infty} g(x)\cos ax\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\cos ax\,dx
$$

Für weitere Typen siehe z.B. die Funktionentheorie-Bücher von Remmert, Fischer-Lieb, etc.

6.5 Das Prinzip vom Argument und der Satz von Rouché

Es folgen nun einige theoretische Anwendungen des Residuensatzes.

Sei U offen in $\mathbb{C}$

Definition

Eine Funktion f heißt meromorph in U, wenn es eine abgeschlossene, diskrete Teilmenge $P = P(f)$ von U gibt, sodaß f in $U\backslash P(f)$ holomorph ist und in jedem Punkt von $P(f)$ eine Polstelle hat.

Beispiele

(1) Rationale Funktionen

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_0 + a_1\, z + \ldots + a_m\, z^m}{b_0 + \ldots + b_n\, z^n} \quad (b_n \neq 0)$$

sind meromorph.

(2) Sind f, g holomorph auf Gebiet $U \subset \mathbb{C}$, $g \not\equiv 0$, so definiert $F = \frac{f}{g}$ eine meromorphe Funktion.

$M(U)$ = Menge der meromorphen Funktionen auf dem Gebiet U bildet eine $\mathbb{C}$-Algebra. Ferner ist $M(U)$ ein Körper.

Sei f meromorph in U. Wir wissen:
Hat f in z_0 einen Pol n-ter Ordnung, so gilt

$$f(z) = (z - z_0)^{-n} g(z) \ ,$$

wobei g holomorph in Umgebung $V \subset U$ von z_0 ist und $g(z_0) \neq 0$.
Daher gilt:

$$\begin{aligned} f'(z) &= -n(z-z_0)^{-n-1} g(z) + (z-z_0)^{-n} g'(z) \ , \\ \frac{f'(z)}{f(z)} &= -n\, \frac{1}{z-z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)} \quad , \quad \text{in } V \setminus \{z_o\}. \end{aligned}$$

Folglich:

$$Res_{z_0} \frac{f'}{f} = -n \ .$$

Hat f in z_0 eine Nullstelle n-ter Ordnung, so gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-z_0)^n g(z) \quad , \quad g \text{ holomorph in } V(z_0), g(z_0) \neq 0 \ . \\ \text{Aus} \quad f'(z) &= n(z-z_0)^{n-1} g(z) + (z-z_0)^n g'(z) \ \text{ folgt daher} \\ \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{n}{z-z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)} \ \Rightarrow \ Res_{z_0} \frac{f'}{f} = n \ . \end{aligned}$$

Also folgt aus dem Residuensatz, sofern wir einfach geschlossene Wege betrachten, d.h. Wege mit

$$ind_\gamma(z) = 1 \quad , \quad \forall\, z \in Int\, \gamma :$$

Satz (Prinzip vom Argument)

Sei f meromorph in der offenen Menge U, mit nur endlich vielen Null- und Polstellen. Es sei γ ein einfach geschlossener Weg, der nullhomolog ist und sämtliche Null- und Polstellen umschließt. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \underbrace{\frac{f'(z)}{f(z)}}_{\substack{logarithmische \\ Ableitung}} dz = \text{ Anzahl der Nullstellen} - \text{Anzahl der Polstellen von } f$$

(jeweils mit entsprechender Vielfachheit gezählt).

Anwendungen

1.) f holomorph in U, γ einfach geschlossener Weg, der nullhomolog ist und endlich viele Nullstellen von f umschließt.
Dann ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \text{Anzahl der Nullstellen von } f \text{ innerhalb } \gamma$$

(mit Vielfachheit gezählt).

2.) **Satz** von Rouché

> Seien f, g holomorphe Funktionen in U mit nur endlich vielen Nullstellen. Sei γ ein einfach geschlossener, nullhomologer Weg in U mit folgender Eigenschaft
>
> $$|f(z) - g(z)| < |g(z)| \quad , \quad \forall\, z \in |\gamma|\ .$$
>
> Dann besitzen f und g gleich viele Nullstellen im Inneren von γ (mit Vielfachheit gezählt).

Beweis

Setze $h := \frac{f}{g}$. h ist meromorph in U.
Wegen $g(z) \neq 0$, $\quad \forall\, z \in |\gamma|$ gilt:
h ist holomorph in einer Umgebung von $|\gamma|$.
Ferner gilt nach Voraussetzung: $|h(z) - 1| < 1 \quad \forall\, z \in |\gamma|$,
d.h. $h(z) \in B(1,1) = \{w : |w-1| < 1\}$, $\ \forall\, z \in |\gamma|$.
Da $|\gamma|$ kompakt ist, existiert sogar eine Umgebung V von $|\gamma|$ mit $h(V) \subset B(1,1)$.
Auf V ist deshalb $\log h$ wohldefiniert. Da $(\log h)' = \frac{h'}{h}$ gilt:
$\frac{h'}{h}$ besitzt eine Stammfunktion auf V.
Aber $\frac{h'}{h} = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}$, also folgt

$$0 \overset{weil\ \frac{h'}{h} Stamm-\atop fkt.\ besitzt}{=} \int_\gamma \frac{h'}{h}\,dz = \underbrace{\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz}_{2\pi i\cdot Anz.d.NS \atop von\, f\, innerh.\gamma} - \underbrace{\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz}_{2\pi i\cdot Anz.d.NS \atop von\, g\, innerh.\gamma}\ .$$

6.6 Gebietstreue, Maximum-Prinzip und das Lemma von Schwarz

Wir beginnen mit einer weiteren Anwendung des Argumentenprinzips.
Dazu zunächst

Definition

Eine holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ nimmt in $z_0 \in U$ den Wert w_0 mit der Vielfachheit n an, wenn die Funktion $f - w_0$ in z_0 eine Nullstelle der Ordnung n hat.

Der folgende Satz gibt Auskunft über das "lokale Verhalten" einer holomorphen Funktion.

Satz

Die auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ holomorphe Funktion $f \not\equiv const$ nehme in $z_0 \in G$ den Wert w_0 mit der Vielfachheit $n \in \mathbb{N}$ an. Dann gibt es Umgebungen $V \subset G$ von z_0 und W von w_0, so daß $W \subset f(V)$ und daß zu jedem $w \in W$, $w \neq w_0$, genau n verschiedene Punkte von V existieren, in denen f den Wert w annimmt, und zwar jeweils mit der Vielfachheit 1.

Beweis

Wähle eine Kreisscheibe $B(z_0, \delta) \subset \overline{B(z_0, \delta)} \subset G$ so klein, daß $f - w_0$ $(w_0 = f(z_0))$ und f' auf $\overline{B(z_0, \delta)} \backslash \{z_0\}$ keine Nullstellen besitzen. Dies ist möglich, da die Nullstellen jeder nicht-konstanten holomorphen Funktion isoliert sind.
Setze $V := B(z_0, \delta)$ und $C_\delta := \partial B(z_0, \delta)$. Wir wissen

$$N(w) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\delta} \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz = \text{Anzahl der Nullstellen von } f - w \text{ in } B(z_0, \delta).$$

Nach Voraussetzung ist $N(w_0) = n$ (da $f - w_0$ in $\overline{B(z_0, \delta)} \backslash \{z_0\}$ keine weiteren Nullstellen besitzt).
Aus

$$N(w) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\delta} \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{f \circ C_\delta} \frac{d\zeta}{\zeta - w} = ind_{f \circ C_\delta}(w)$$

folgt ferner:
$N(w)$ ist konstant auf den Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \backslash$Träger von $f \circ C_\delta$, also gleich n auf derjenigen, welche den Punkt w_0 enthält; diese sei mit W bezeichnet. Wegen $f'(z) \neq 0$, für alle $z \in B(z_0, \delta) \backslash \{z_0\}$, muß somit jeder Punkt $w \in W \backslash \{w_0\}$ in V n verschiedene Urbildpunkte besitzen, die den Wert w mit der Vielfachheit 1 annehmen.

Korollar (Gebietstreue)

Es sei f eine nicht-konstante holomorphe Funktion auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$. Dann ist die Bildmenge $f(G)$ wieder ein Gebiet.

Beweis

Da f stetig und G zusammenhängend ist, ist auch $f(G)$ zusammenhängend. Ferner existiert nach obigem Satz zu jedem $w_0 \in f(G)$ eine Umgebung W von w_0 mit $W \subset f(G)$.
Also ist $f(G)$ auch offen.

Als Anwendung des Korollars ergibt sich

Satz (Maximum-Prinzip)

Sei f holomorph auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$. Gibt es einen Punkt $z_0 \in G$ mit $|f(z)| \leq |f(z_0)| \;\; \forall\, z \in G$, so ist f konstant.

Beweis

Aus $|f(z)| \leq |f(z_0)|$, $\forall\, z \in G$, folgt $f(G) \subset B(0, |f(z_0)|)$.
Also kann keine Umgebung W von $w_0 = f(z_0)$ existieren, die in $f(G)$ enthalten ist, d.h. $f(G)$ ist nicht offen.
Korollar $\Rightarrow$ $f = const$.

Korollar

Sei G ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{C}$ und f eine auf $\overline{G}$ stetige, auf G holomorphe Funktion. Dann nimmt $|f|$ sein Maximum auf dem Rand ∂G an.

Denn

$|f|$ ist stetig auf $\overline{G}$ = kompakt. Also nimmt $|f|$ sein Maximum in einem Punkt $z_0 \in \overline{G}$ an.
Ist $z_0 \in G$, so ist $f = const$ und die Aussage des Korollars stimmt.
Bleibt nur $z_0 \in \partial G$.

Achtung: $|f|$ nimmt i.A. sein Minimum nicht auf dem Rand an, wie das Beispiel der Funktion $f(z) = z$ auf $\mathbb{E}$ zeigt.

Anwendung des Maximum-Prinzips

Schwarz'sches Lemma

Sei f holomorph in $\mathbb{E}$ und es sei

1) $\quad |\, f(z)\,| \leq 1 \,, \quad \forall\, z \in \mathbb{E}$

2) $\quad f(0) = 0$

Dann gilt: $|\, f(z)\,| \leq |\, z\,|$
Falls Gleichheit in einem Punkt $z \neq 0$ aus $\mathbb{E}$ gilt, so ist f eine Drehung um 0, d.h. f hat die Form: $f(z) = c \cdot z$, für ein $c \in \mathbb{C}$, mit $|\, c\,| = 1$.

Zusatz: Unter den Voraussetzungen des Schwarz'schen Lemmas gilt:

$$|\, f'(0)\,| \leq 1 \,,$$

wobei das Gleichheitszeichen nur für Drehungen gilt.

Beweis

Betrachte Hilfsfunktion

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & , \quad z \in \mathbb{E}\backslash\{0\} \\ f'(0) & , \quad z = 0 \end{cases}$$

g ist holomorph auf $\mathbb{E}$, da

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = f'(0)$$

(Wende den Riemann'schen Fortsetzungssatz an).

Sei $0 < r < 1$. Für $z \in \mathbb{E}$ mit $|z| = r$ gilt:

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{r} \leq \frac{1}{r} ,$$

d.h. $\forall\, z \in \mathbb{E}$ mit $|z| = r$ gilt:

$$|g(z)| \leq \frac{1}{r} .$$

Maximum-Prinzip (Korollar):

$$|g(z)| \leq \frac{1}{r} , \quad \forall z \in \mathbb{E} \text{ mit } |z| \leq r .$$

$r \to 1 : \underbrace{|g(z)| \leq 1}_{|f(z)|\leq|z|} , \quad \forall\, |z| < 1 .$

Gilt $|f(z_0)| = |z_0|$ für ein $z_0 \neq 0$, so ist $|g(z_0)| = 1$. Da $|g(z)| \leq 1$, nimmt $|g|$ in z_0 sein Maximum an.
Maximum-Prinzip $\Rightarrow g = const = c$, wobei $|c| = 1$ wegen $|g(z_0)| = 1$.
Also ist $f(z) = c\, z$, $\quad \forall\, z \in \mathbb{E}$.

Zum Zusatz: Da $g(0) = f'(0)$ und $|g(z)| \leq 1$ folgt

$$|f'(0)| \leq 1 .$$

Gilt $|f'(0)| = 1$, so ist $|g(0)| = 1$ und somit nimmt wegen $|g(z)| \leq 1$ die Funktion $|g|$ ihr Maximum in 0 an.
Maximum-Prinzip $\Rightarrow g(z) = c$, $\forall\, z \in \mathbb{E}$, wobei $|c| = |g(0)| = 1$.
Also ist wiederum $f(z) = c\, z$.

Kapitel 7

Konforme Abbildungen

7.1 Definitionen

Sei U offen in $\mathbb{C}, f : U \to \mathbb{C}$ reell differenzierbar, $f = u + iv$.

Definitionen

(1) f heißt orientierungstreu in $z \in U$, falls

$$det\, J_f(z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} (z) > 0$$

(2) f heißt winkeltreu in $z \in U$, falls für die Jacobi-Matrix J_f gilt:

$$J_f(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} (z) = \lambda(z) O(z)$$

wobei $\lambda(z)$ reelle, positive Zahl, $O(z) =$ orthogonale Matrix ($O^T = O^{-1}$).

Lemma

Folgende Aussagen über eine reell, stetig differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{C}$, U offen in $\mathbb{C}$, sind äquivalent.

(i) f ist winkeltreu und orientierungstreu in jedem Punkt $z \in U$.

(ii) f ist holomorph in U und es gilt: $f'(z) \neq 0 \ , \quad \forall\, z \in U$.

Bemerkung

$f(z) = z^2$ ist im Nullpunkt nicht winkeltreu (Winkel wird verdoppelt). Kein Widerspruch, da $f'(0) = 0$.

<u>Beweis</u>

(i) $\Rightarrow$ (ii): Nach Voraussetzung ist $J_f(z)$ winkeltreu und orientierungstreu, also von der Form:

$$J_f(z) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}(z) = \lambda(z) \begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ -b(z) & a(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ -\lambda b & \lambda a \end{pmatrix}(z) \quad (a^2 + b^2 = 1)$$

$\Rightarrow u_x = v_y$ und $-v_x = u_y$, d.h. die Cauchy-Riemannschen-Gleichungen sind erfüllt
$\Rightarrow f$ ist holomorph.
Ferner: $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z) = u_x + iv_x$, also

$$|f'(z)|^2 = u_x^2 + v_x^2 = \begin{vmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{vmatrix}(z) = det J_f(z) > 0 \, .$$

(ii) $\Rightarrow$ (i): f holomorph $\Rightarrow$ f erfüllt Cauchy-Riemannschen-Gleichungen $\Rightarrow$

$$J_f(z) = \begin{pmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{pmatrix}(z) = \underbrace{\sqrt{u_x^2 + v_x^2}}_{=:\lambda(z)} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{u_x}{\sqrt{u_x^2+v_x^2}} & \frac{-v_x}{\sqrt{u_x^2+v_x^2}} \\ \frac{v_x}{\sqrt{u_x^2+v_x^2}} & \frac{u_x}{\sqrt{u_x^2+v_x^2}} \end{pmatrix}}_{=:O(z)}$$

$\Rightarrow f$ ist winkeltreu und orientierungstreu.

Verknüpft man die soeben für holomorphe Funktionen $F : U \to \mathbb{C}$ bewiesene Behauptung

$$\boxed{det\, J_f\,(z) = |f'(z)|^2} \quad (z \in U)$$

mit der aus Analysis II bekannten Tatsache, wonach für eine (reell) stetig differenzierbare Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ gilt:

$$det\, J_f\,(z_0) \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \text{Abb. } f \text{ ist in einer Umgebung von } z_0 \in U \text{ umkehrbar,}$$

so folgt

Lemma (lokale Umkehrbarkeit)

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Genau dann existiert eine Umgebung $V \subset U$ von z_0 auf der die Abbildung f umkehrbar ist, wenn $f'(z_0) \neq 0$ ist.

Dieses Resultat ist selbstverständlich auch aus dem Satz über das "lokale Verhalten" von holomorphen Funktionen aus 6.6 (Fall $n = 1$) zu gewinnen.

Definition

Seien U, U' offen in $\mathbb{C}, f : U \to U'$ Abb.

a) f heißt konforme Abbildung, falls gilt:

(1) f ist bijektiv und reell stetig differenzierbar

(2) f ist winkeltreu und orientierungstreu

b) f heißt biholomorph, falls f bijektiv und holomorph ist.

Korollar

$$\boxed{f \text{ konform} \Leftrightarrow f \text{ biholomorph}}$$

Beweis

"$\Rightarrow$": klar (obiges Lemma)
"$\Leftarrow$": f biholomorph $\Rightarrow$ f holomorph und es ist $f'(z) \neq 0$, da $|f'(z)|^2 = detJ_f(z) \neq 0$.

FRAGE: Welche offenen Mengen U, U' in $\mathbb{C}$ kann man konform (=biholomorph) aufeinander abbilden?

speziell: Welche Gebiete U in $\mathbb{C}$ lassen sich konform auf $I\!\!E$ abbilden?

Damit werden wir uns in den folgenden Paragraphen befassen.

7.2 Möbius Transformation

Jeder Matrix $A \in GL(2, \mathbb{C})$, d.h. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a, b, c, d, \in \mathbb{C}, detA \neq 0$, wird eine rationale Funktion wie folgt zugeordnet

$$f_A(z) := \frac{az+b}{cz+d}$$

f_A heißt Möbius Transformation.

Im Falle $c = 0$ ist f_A auf ganz $\mathbb{C}$ definiert.
Im Falle $c \neq 0$ nur auf $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$.

Möbius-Transformationen definieren biholomorphe Abbildungen, im Falle $c = 0$ von $\mathbb{C}$ auf $\mathbb{C}$, im Falle $c \neq 0$ von $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$
Wir setzen $f_A(-\frac{d}{c}) = \infty$, $f_A(\infty) = \frac{a}{c}$;
dann bildet f_A die Menge $\tilde{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ bijektiv auf sich ab.

Ableitung

$$f'(z) = \frac{ad - bc}{(cz+d)^2} = \frac{detA}{(cz+d)^2} \neq 0 \; .$$

Möbius-Tranformationen bilden Gruppe, es gilt

$$f_A \circ f_B = f_{AB} \; .$$

Behauptung:
Jede Möbius-Transformation läßt sich zusammensetzen aus folgenden elementaren Abbildungen:

(1) $z \mapsto az$, $a \in \mathbb{C}$ $(a \neq 0)$ (Dilatation)

(2) $z \mapsto z + b$, $b \in \mathbb{C}$ (Translation)

(3) $z \mapsto \frac{1}{z}$ (Inversion)

Folgerung:
Möbius-Transformationen sind kreistreu, d.h. sie bilden Kreise und Geraden auf Kreise bzw. Geraden ab (Denn die Abb. (1),(2) und (3) haben diese Eigenschaft).

Achtung: Gerade kann in Kreis übergehen, und umgekehrt.

Beispiel
$f(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$ bildet Kreislinie $|z| = 1$ auf die imaginäre Achse (incl. ∞) ab.

Fixpunkte: Beachte

$$\begin{aligned} f_A(z) = z \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{az+b}{cz+d} = z \\ &\Leftrightarrow \quad cz^2 + (d-a)z - b = 0 \ \ \text{(quadratische Gleichung)} \end{aligned}$$

d.h. Möbius-Transformationen haben höchstens 2 Fixpunkte, sofern nicht $c = 0$, $a = d$ und $b = 0$, d.h. $f_A = id$.

Satz

Zu je 3 verschiedenen Punkten z_1, z_2, z_3 bzw. w_1, w_2, w_3 aus $\mathbb{C}$ gibt es genau eine Möbius-Transformation, welche z_i in w_i (i=1,2,3) überführt.

Beweis

Betrachte

$$S(z) := \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$$

S ist Möbius-Transformation, welche z_1, z_2, z_3 in 0,1,∞ überführt. Ebenso bildet

$$T(w) = \frac{w - w_1}{w - w_3} \cdot \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1}$$

w_1, w_2, w_3 nach 0,1,∞ ab.
Daher liefert $T^{-1}(S(z)) =: w$ die gewünschte Möbius-Transformation. $\Rightarrow$ Existenz.

Zur Eindeutigkeit:
Gibt es zwei solche Abbildungen T_1, T_2, so definiert $T_1 \circ (T_2^{-1})$ eine Möbius-Transformation mit 3 Fixpunkten. $\Rightarrow T_1 \circ T_2^{-1} = id \Rightarrow T_1 = T_2$.

Setze $z = z_4$ und $w = w_4$ für den Bildpunkt von z_4. Dann folgt aus $w_4 = T^{-1}(S(z_4))$ die Gleichung $T(w_4) = S(z_4)$, d.h.

$$\frac{w_4 - w_1}{w_4 - w_3} \cdot \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} = \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \; ;$$

vertauschen wir nun z_1 mit z_3 , z_3 mit z_4 und z_4 mit z_1, so folgt:

Resultat:
Das sogenannte Doppelverhältnis

$$DV(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}$$

ist invariant unter Möbius-Transformationen.

7.3 Automorphismengruppen

Sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$, $\Gamma(G)$ = Menge aller biholomorphen Abbildungen von G auf sich. $\Gamma(G)$ ist Gruppe bzgl. Komposition, genannt Automorphismengruppe.
Wir wollen nun in 2 Fällen Γ bestimmen.

1) $\Gamma(\mathbb{C}) = ?$
Beh: $\Gamma(\mathbb{C}) = \{ \underbrace{z \mapsto az + b}_{\text{lin. Abb.}} ,\ a \neq 0 \ , a, b \in \mathbb{C} \}$
Klar ist: $z \mapsto az + b \ \ (a \neq 0)$ gehört zu $\Gamma(\mathbb{C})$.
Sei nun $f \in \Gamma(\mathbb{C})$ beliebig. Wir entwickeln f in eine Potenzreihe:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \, z^k \ \ , \ z \in \mathbb{C} \, .$$

Die Funktion $g(z) = f(\frac{1}{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \, z^{-k}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, hat im Nullpunkt eine isolierte Stelle.

3 Möglichkeiten :

a) 0 ist hebbare Stelle; dann ist g in Umgebung von 0 beschränkt, also f in Umgebung von ∞ beschränkt und damit auf ganz $\mathbb{C}$
Liouville: $f = const$, ein Widerspruch zur Injektivität.

b) g hat Pol der Ordnung n im Nullpunkt: $g(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \, z^{-k} \ \ (a_n \neq 0)$.

Dann ist $f(z) = g(\frac{1}{z}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \, z^k$ ein Polynom vom Grad n. f hat somit genau n Nullstellen. $\Rightarrow$ Widerspruch zur Bijektivität, sofern n ≥ 2 . Also muß f linear sein.

c) g hat wesentliche Singularität in 0.
CASORATI - WEIERSTRASS: $\overline{g(\mathbb{E}\setminus\{0\})} = \mathbb{C}$, äquivalent $\overline{f(\mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{E}})} = \mathbb{C}$. Da nach dem Satz von der Gebietstreue $f(\mathbb{E})$ offen ist, folgt $\underbrace{f(\mathbb{E})}_{\text{offen}} \cap \underbrace{f(\mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{E}})}_{\text{dicht in } \mathbb{C}} \neq \emptyset$,
d.h. es existieren $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_2 \in \mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{E}}$ mit $f(z_1) = f(z_2)$, ein Widerspruch zur Injektivität.

2) **Satz**

Für die Automorphismengruppe Γ der Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$ gilt:

$$\Gamma(\mathbb{E}) = \{ \underbrace{z \mapsto e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\overline{a}z}}_{\text{Möbius-Transf.}} \ : \ a \in \mathbb{C} \ , \ |a| < 1 \ , \ \theta \in \mathbb{R} \ , \ 0 \le \theta < 2\pi \ \}$$

Beweis: Die Möbius-Transformation

$$\gamma_a : z \mapsto e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\overline{a}z} \ , \ |a| < 1 \, , \ 0 \le \theta < 2\pi$$

bildet $\mathbb{E}$ biholomorph auf sich ab und $\partial\mathbb{E}$ auf $\partial\mathbb{E}$.
Denn für $z = e^{i\varphi}$ gilt

$$\left|\frac{e^{i\varphi}-a}{1-\overline{a}e^{i\varphi}}\right| = \frac{|e^{i\varphi}-a|}{|(e^{-i\varphi}-\overline{a})\,e^{i\varphi}|} = \frac{e^{i\varphi}-a}{|\overline{e^{i\varphi}}-\overline{a}|} = \frac{e^{i\varphi}-a}{|\overline{e^{i\varphi}-a}|} = 1 \ .$$

Also ist $\gamma_a \in \Gamma(\mathbb{E})$.
Sei nun $f \in \Gamma(\mathbb{E})$. Setze $a := f(0)$. Dann ist $|a| < 1$.
Betrachte M.T. $\gamma_a(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z}$.
Die Komposition $F = \gamma_a \circ f$ bildet $\mathbb{E}$ biholomorph auf sich ab. Ferner gilt $F(0) = \gamma_a(a) = 0$. $\Rightarrow$ F erfüllt Voraussetzungen des Lemma von SCHWARZ: Nach dem Zusatz gilt: $|F'(0)| \le 1$.
Da $F : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ biholomorph ist und $F(0) = 0$, erfüllt auch die inverse Abb. F^{-1} die Vor. des Schwarz'schen Lemmas. Also gilt auch

$$\left|(F^{-1})'(0)\right| \le 1 \ .$$

Aber aus $F(F^{-1}(z)) = z$ folgt $F'(F^{-1}(z)) \cdot (F^{-1})'(z) = 1$,
insbes. $F'(0) \cdot (F^{-1})'(0) = 1$

$$\text{und somit} \quad |F'(0)| = \frac{1}{|(F^{-1})'(0)|} \ge 1 \ .$$

Insgesamt: $|F'(0)| = 1$. Nach dem Zusatz des Lemmas impliziert dies jedoch, daß $F(z) = cz$ für ein $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| = 1$, d.h. $c = e^{i\theta}$, $0 \le \theta < 2\pi$. Somit ist

$$F(z) = \gamma_a(f(z)) = e^{i\theta}\, z \text{ und daher } f(z) = \gamma_a^{-1}\,(e^{i\theta}\, z) = \frac{e^{i\theta}\, z + a}{1 + \overline{a}\, e^{i\theta}\, z} = e^{i\theta}\,\frac{z-b}{1-\overline{b}z} \ ,$$

sofern $b = -e^{-i\theta}\, a$ gesetzt wird. Da $|b| = |a| < 1$ sind wir fertig.

Korollar

Für die Automorphismengruppe Γ der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ gilt

$$\Gamma(\mathbb{H}) = \{ \; z \mapsto \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \; : \; \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\,, \; \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \; \}$$

Beweis:
Transformiere das Problem von $\mathbb{H}$ auf $\mathbb{E}$ mit Hilfe der Cayley-Abb.

$$\gamma \; : \; z \mapsto \frac{z-i}{z+i} \; : \; \mathbb{H} \to \mathbb{E} \; ;$$

denn aus $f \in \Gamma(\mathbb{H})$ folgt, daß $\gamma \circ f \circ \gamma^{-1} \in \Gamma(\mathbb{E})$ ist.

7.4 Der Satz von Montel

$U \subset \mathbb{C}$ offen. Wir betrachten zunächst den VR

$$\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(U) = \{ \; f \; : \; U \to \mathbb{C} \text{ stetig } \}$$

aller auf U stetigen, komplexwertigen Funktionen und versehen $\mathcal{C}(U)$ mit der sog. kompakten Konvergenz:

$f_n \to f$ für $n \to \infty$ bedeute: $f_n \to f$ lokal gleichmäßig, d.h. glm. auf allen kompakten Teilmengen von U.

Zugehörige Topologie:
Da $\mathcal{C}(U)$ ein VR ist, genügt es, ein Umgebungssystem der $\mathbf{0}$ (Nullfunktion) anzugeben. Zudem kann man sich auf ein sog. fundamentales Umgebungssystem (= Umgebungsbasis) beschränken. Dabei heißt ein Umgebungssystem $(V_i)_{i \in \mathrm{I}}$ fundamental, falls zu jeder Umg. U ein V_i existiert mit $V_i \subset$ U.
Sei $\varepsilon > 0$ und $K \subset$ U kompakt. Wir setzen

$$V_\varepsilon \, K := \{ \; f \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}(U) \; : \; |f(z)| < \varepsilon \; , \; \forall \; z \in K \; \}$$

$(V_\varepsilon \, K)_{\varepsilon, K}$ definiert ein fundamentales Umgebungssystem der Nullfunktion.

Bem.: Die zugehörige Topologie τ – die sog. kompakt-offene Topologie – ist metrisierbar. Bezeichnet nämlich (K_n) eine Ausschöpfung von U durch kompakte Mengen (z.B. durch endl. Vereinigung abgeschl. Kreisscheiben mit rationalen Mittelpunktskoordinaten und rationalen Radien), so definiert

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \underbrace{\frac{d_n(f,g)}{1 + d_n(f,g)}}_{<1} \qquad (< \; 1)$$

mit

$$d_n(f,g) := \sup\{ \; |f(z) - g(z)| \; : \; z \in K_n \; \}$$

eine Metrik, deren Topologie mit τ übereinstimmt.

Kompakte Mengen in $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(\mathrm{U})$:

Menge $\mathrm{A} \subset \mathcal{C}_{\mathbb{C}}(\mathrm{U})$ heißt bekanntlich kompakt (bzgl. τ), wenn gilt:
Aus jeder Überdeckung von A durch τ-offene Mengen läßt sich eine endliche Teilüberdeckung auswählen.

Aus der Metrisierbarkeit von τ folgt, daß folgende Eigenschaft äquivalent zur Kompaktheit von A ist (Analysis-Vorlesung):

Jede Folge (f_n) von Elementen aus A hat eine in A (bzgl. τ) konvergente Teilfolge.

Die Charakterisierung von kompakten Mengen in $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(\mathrm{U})$ beruht auf folgendem Begriff:

Definition

1) Sei $K \subset \mathrm{U}$ kompakt. Eine Familie $\mathrm{A} \subset \mathcal{C}_{\mathbb{C}}(\mathrm{U})$ heißt gleichgradig stetig auf K, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodaß

$$|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon \ , \ \forall \, z_1, z_2 \in K \text{ mit } |z_1 - z_2| < \delta \ \underline{\text{und}} \text{ alle } f \in \mathrm{A}.$$

   kurz: δ hängt weder vom Punkt noch von der Fu. $f \in \mathrm{A}$ ab (Verschärfung von gleichmäßiger Stetigkeit).

2) Familie $\mathrm{A} \subset \mathcal{C}_{\mathbb{C}}(\mathrm{U})$ heißt lokal gleichgradig stetig, wenn A auf allen kompakten Teilmengen $K \subset \mathrm{U}$ gleichgradig stetig ist.

Satz (Arzela-Ascoli)

Menge $\mathrm{A} \subset \mathcal{C}_{\mathbb{C}}(\mathrm{U})$ ist genau dann relativ kompakt (d.h. $\overline{\mathrm{A}}$ ist kompakt), wenn gilt:

(1) A ist lokal gleichgradig stetig.

(2) $\sup\limits_{f \in \mathrm{A}} |f(z)| < \infty \ , \ \forall \, z \in \mathrm{U}.$

Beweis: $\rightarrow$ Topologie-Vorlesung.

Der Raum $\mathcal{H}(\mathrm{U})$

Wir interessieren uns im Folgenden hauptsächlich für den Teilraum

$$\mathcal{H}(\mathrm{U}) = \{ \, f \ : \ \mathrm{U} \to \mathbb{C} \ , \ \text{holomorph} \, \} \quad \subset \mathcal{C}_{\mathbb{C}}(\mathrm{U}) \ ,$$

versehen mit der Relativtopologie von $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(\mathrm{U})$.
$\mathcal{H}(\mathrm{U})$ ist ein abgeschlossener UR von $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(\mathrm{U})$, da aus $f_n \in \mathcal{H}(\mathrm{U})$ und $f_n \xrightarrow{\text{komp.}} f \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}(\mathrm{U})$ folgt: $f \in \mathcal{H}(\mathrm{U})$ (Weierstrass).

Kompakte Mengen in $\mathcal{H}(\mathrm{U})$

Wir benötigen einen weiteren Begriff:

Definition

Eine Familie $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}_{\mathbb{C}}(\mathrm{U})$ heißt lokal beschränkt, wenn es zu jedem Kompaktum $K \subset \mathrm{U}$ eine Zahl $\mathrm{M}_K > 0$ gibt, sodaß

$$|f(z)| \leq \mathrm{M}_K \ , \ \forall\, z \in K \ , \ \forall\, f \in \mathcal{F} \ .$$

Beh.: Jede kompakte Menge $\mathrm{A} \subset \mathcal{C}_{\mathbb{C}}(\mathrm{U})$ ist lokal beschränkt.

Bew.: Betrachte das Funktional $F_K \ : \ \mathcal{C}_{\mathbb{C}}(\mathrm{U}) \to \mathbb{R} : f \mapsto |f|_K := \sup\limits_{z \in K} |f(z)|$ ($K =$ kompakt).
F_K ist stetig, da aus $f_n \to f$, $F_K(f_n) \to F_K(f)$ folgt. Somit ist – aufgrund der Kompaktheit von A – die Menge $F_K(\mathrm{A})$ beschränkt, d.h. $\exists\ \mathrm{M}_K$ mit $\sup\limits_{z \in K} |f(z)| \leq \mathrm{M}_K$, $\forall\, f \in \mathrm{A}$.

Satz von Montel

Sei $\mathrm{U} \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Teilmenge $\mathrm{A} \subset \mathcal{H}(\mathrm{U})$ ist genau dann kompakt, wenn gilt:

(1) A ist lokal beschränkt.

(2) A ist abgeschlossen.

Bem.: Fast wie im $\mathbb{R}^n$: Menge $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt $\Leftrightarrow$ A ist beschränkt und abgeschlossen.

Korollar

Teilmenge $\mathrm{A} \subset \mathcal{H}(\mathrm{U})$ ist genau dann relativ kompakt, wenn sie lokal beschränkt ist.

Klar, da A rel. komp. $\Rightarrow \overline{\mathrm{A}}$ komp. $\Rightarrow \overline{\mathrm{A}}$ lokal beschr. $\Rightarrow$ A lokal beschr.;
anderseits A lokal beschr. $\Rightarrow \overline{\mathrm{A}}$ lokal beschr. $\Rightarrow \overline{\mathrm{A}}$ komp. $\Rightarrow$ A rel. komp.

$$\text{denn aus } \left\{ \begin{array}{l} f_n \to f \ , \ f_n \in \mathrm{A} \\ |f_n(z)| \leq \mathrm{M}_K \ , \ \forall\, z \in K \end{array} \right. \quad \text{folgt } |f(z)| \leq \mathrm{M}_K \ , \ \forall\, z \in K \ .$$

Ältere Bezeichnung

Eine Familie $\mathcal{F} \in \mathcal{H}(\mathrm{U})$ heißt normal, wenn jede Folge (f_n) aus $\mathcal{F}$ in $\mathcal{H}(\mathrm{U})$ eine kongruente Teilfolge hat (deren Grenzwert aber nicht zu $\mathcal{F}$ gehören muß). Das Korollar zum Satz von Montel besagt dann:

$$\mathcal{F} \text{ ist normal } \Leftrightarrow \ \mathcal{F} \text{ ist lokal beschränkt.}$$

Beweis des Satzes von Montel:

Die Notwendigkeit der Bedingung (1) wurde bereits gezeigt, Bed. (2) ist generell wahr. Um zu zeigen, daß (1) und (2) auch hinreichend sind, benützen wir den Satz von Arzela-Ascoli, d.h. wir zeigen:

(a) A ist lokal gleichgradig stetig.

(b) $\sup\limits_{f\in A}|f(z)| < \infty$, $\forall\, z \in$ U.

(b) ist trivialerweise erfüllt, da nach Vor. A lokal beschränkt ist (wähle K einpunktig).
Zum Beweis von (a): Wähle 2 beliebige konzentrische Kreise B, B' mit Radien r und $2r$, sodaß $\overline{B'} \subset$ U.
OBdA sei 0 der Mittelpunkt von B und B'.
Setze $\mathrm{M} := \sup\{\|f\|_{B'} \ : \ f \in \mathrm{A}\}$ ($< \infty$ wegen (1)), $\|f\|_{B'} := \sup\limits_{z\in B'} |f(z)|$.
Für $\zeta \in \partial B'$ und $z_1, z_2 \in B$ gilt:

$$|\zeta - z_1| \geq r \ , \ |\zeta - z_2| \geq r \ . \text{ Somit folgt aus der Cauchy-Formel:}$$

$$f(z_1) - f(z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=2r} f(\zeta) \left[\frac{1}{\zeta - z_1} - \frac{1}{\zeta - z_2}\right] d\zeta = \frac{z_1 - z_2}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=2r} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)}$$

die Abschätzung

$$\begin{aligned} |f(z_1) - f(z_2)| &\leq \frac{|z_1 - z_2|}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=2r} \frac{\mathrm{M}\,|d\zeta|}{|\zeta - z_1||\zeta - z_2|} \leq \frac{|z_1 - z_2|}{2\pi}\mathrm{M} \underbrace{\int\limits_{|\zeta|=2r} \frac{|d\zeta|}{r^2}}_{\frac{1}{r^2}\cdot 4\pi r} \\ &= \frac{2\mathrm{M}}{r}|z_1 - z_2| \ . \end{aligned}$$

Wähle $\delta := \frac{r\varepsilon}{2\mathrm{M}}$. Dann gilt

$$|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon \ , \ \forall\, z_1, z_2 \in B \text{ mit } |z_1 - z_2| < \delta \ , \ \forall\, f \in \mathrm{A}\ .$$

Arzela-Ascoli $\Rightarrow \overline{\mathrm{A}} = \mathrm{A}$ ist kompakt.

7.5 Schlichte Funktionen, Satz von Hurwitz

Definition
Eine Funktion $f : \mathrm{U} \to \mathbb{C}$, U offen in $\mathbb{C}$, heißt schlicht (englisch: univalent), falls f holomorph und injektiv ist, d.h. insbes. falls

$$f(z_1) = f(z_2) \ \Rightarrow \ z_1 = z_2 \ .$$

Satz (Hurwitz)

Sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$, $f_n : G \to \mathbb{C}$ eine Folge von schlichten Funktionen, die in U kompakt gegen eine (holomorphe) Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ konvergiert. Dann ist f entweder konstant oder schlicht.

Beweis:

Sei f nicht konstant, $z_0, \zeta \in G$ beliebig, $z_0 \neq \zeta$, und $B(z_0,R)$ eine Kreisscheibe mit $\overline{B(z_0,R)} \subset G \setminus \{\zeta\}$.
Setze $g_n := f_n - f_n(\zeta)$.
g_n ist nullstellenfrei in $G \setminus \{\zeta\}$, da f_n schlicht ist.
"Argumentenprinzip" : (*) $\int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{g_n'(z)}{g_n(z)} dz = 0$ für alle $0 < r < R$ (da keine Nullstelle von g_n in $B(z_0,r)$ liegt).
Wähle $0 < r < R$ so , daß $f(z) - f(\zeta) \neq 0$, für alle z mit $|z - z_0| = r$ (dies ist möglich, da Nullstellen von $\underbrace{f - f(\zeta)}_{\text{holom.}}$ isoliert liegen wegen $f \neq const$).
Aus (*) folgt nun für $n \to \infty$ wegen der vorausgesetzten glm. Stetigkeit:

$$\int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{f'(z)}{f(z) - f(\zeta)} dz = 0 \ ,$$

also ist $f(z) - f(\zeta) \neq 0$ für alle $z \in B(z_0,r)$ (nach dem Argumentenprinzip).
Insbesondere ist $f(z_0) \neq f(\zeta)$. Da $z_0 \in G \setminus \{\zeta\}$ beliebig, muß f schlicht sein in G.

Anwendung:

Wir betrachten die wichtige Klasse von schlichten Funktionen

$$\mathrm{S} = \{ \, f : \mathbb{E} \to \mathbb{C} \, , \text{ schlicht, } f(0) = 0 \, , \ f'(0) = 1 \, \}$$

Satz von Hurwitz: $\mathrm{S} \subset \mathcal{H}(\mathbb{E})$ ist abgeschlossen.
$f \in \mathrm{S}$ hat als holomorphe Funktion in 0 eine Taylorentwicklung:

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots \ , \ a_i \in \mathbb{C} \, , \ i = 2, 3, \ldots$$

Bieberbach'sche Vermutung :

$\boxed{|a_n| \leq n}$, bewiesen 1985 von Louis de Branges. (Pommerenke hat auch einen Beweis.)

Gleichheit gilt genau dann, wenn f eine Drehung der sog. Koebe-Funktion

$$\boxed{\varphi(z) = \frac{z}{(1-z)^2} \quad \left(= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot z^n \right)}$$ ist.

Letztere bildet $\mathbb{E}$ auf das Schlitzgebiet $\mathbb{C} \setminus$negative reelle Achse von $-\infty$ bis $-\frac{1}{4}$ ab.

Bem.:

$|a_2| \leq 2$ hat bereits Bieberbach 1905 gezeigt. Er folgert daraus den folgenden "Verzerrungssatz" für Funktionen f in S:

$$|f(z)| \leq \frac{|z|}{(1 - |z|)^2} \ , \ \forall \, z \in \mathbb{E} \ .$$

Dieser ist leicht zu beweisen, wenn die Bieberbach'sche Vermutung bewiesen ist.

$$\text{Denn } |f(z)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, z^n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\, |z|^n \le \sum_{n=1}^{\infty} n\, |z|^n = \frac{|z|}{(1-|z|)^2} \text{ für alle } z \in \mathbb{E}\,.$$

Daraus folgt: S ist lokal beschränkt, also ergeben HURWITZ (S abgeschl.) und MONTEL:
S ist kompakt.

7.6 Der Riemann'sche Abbildungssatz

1) Einfach zusammenhängende Mengen

Sei U $\subset \mathbb{C}$ offen, $\Gamma = \sum_{k=1}^{m} n_k\, \gamma_k$, ($\gamma_k : [0,1] \to$ U stückweise stetig diffbar, $n_k \in \mathbb{Z}$) ein Zyklus in U (= geschlossene Kette).

Erinnerung:

Γ heißt nullhomolog in U, wenn für jeden Punkt $z \in \complement$U gilt:

$$ind_\Gamma(z) = 0\,.$$

Dabei ist der Index von Γ wie folgt definiert

$$ind_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \sum_{k=1}^{m} n_k\, \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{d\zeta}{\zeta - z}\,.$$

Definition

Ein Gebiet (= offen und zusammenhängend) $G \subset \mathbb{C}$ heißt einfach zusammenhängend, falls jeder Zyklus Γ in G nullhomolog ist.

Beispiele

1) Kreisscheiben, allgemeiner sog. sternförmige Gebiete sind einfach zusammenhängend. Denn hier verschwindet das Integral in der Definition von $ind_\Gamma(z)$ für jeden Zyklus Γ, vorausgesetzt, daß $z \in \complement$U.

2) Punktierte Kreisscheibe, allg. Kreisring ist nicht einfach zusammenhängend, da
$$ind_\gamma(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 1 \neq 0$$
für jede positiv orientierte Kreislinie mit Radius zwischen r und R.

Nun sind wir in der Lage, den folgenden Satz zu formulieren:

Riemann'scher Abbildungssatz

Jedes einfach zusammenhängende Gebiet $G \neq \mathbb{C}$ ist biholomorph auf den Einheitskreis $\mathbb{E}$ abbildbar. Dabei gibt es zu einem vorgegebenen Punkt $a \in G$ genau eine biholomorphe Abb. $f : G \to \mathbb{E}$ mit $f(a) = 0$ und $f'(a)$ reell und > 0 .

Bem.:
Die Voraussetzung $G \neq \mathbb{C}$ darf nicht weggelassen werden, da es keine biholomorphe Abb. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{E}$ gibt. Denn eine solche wäre holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ und beschränkt: $|f(z)| \leq 1$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$. Nach LIOUVILLE müßte daher $f = const$ im Widerspruch zur Biholomorphie sein.

Zur Eindeutigkeit:
Seien f_1 und $f_2 : G \to \mathbb{E}$ zwei biholom. Abb. mit $f_1(a) = f_2(a) = 0$ und $f_1'(a)$, $f_2'(a)$ reell und > 0.
Betrachte $\quad g := f_2 \circ f_1^{-1}$.
g bildet $\mathbb{E}$ biholomorph auf sich ab, ist also ein Automorphismus von $\mathbb{E}$. Ferner gilt:

1) $g(0) = 0$

2) $g'(0) = f_2'(\underbrace{f_1^{-1}(0)}_{a}) \cdot (f_1^{-1})'(0) = f_2'(a) \cdot \frac{1}{f_1'(f_1^{-1}(0))} = \underbrace{\frac{f_2'(a)}{f_1'(a)}}_{\text{reell und } > 0}$

Aus 1) folgt: g ist eine Drehung, $g(z) = e^{i\theta}\, z$ für ein $\theta \in [0, 2\pi]$;
aus 2) folgt: $g'(0) = e^{i\theta} =$ reell und $> 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = 0$;
also ist $g(z) = z$, $\forall\, z \in \mathbb{E}$ und damit $f_1 = f_2$.

Den Existenzbeweis zerlegen wir in zwei Teile. Wir zeigen zuerst

Lemma 1

Ist das Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend, so besitzt jede holom. Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion.

Beweis
Nach Def. des einfachen Zusammenhangs von G ist jeder Zyklus Γ nullhomolog in G. Nach dem Satz von CAUCHY gilt somit für jede holom. Funktion $f : G \to \mathbb{C}$:

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 0 .$$

Wir definieren nun eine Stammfunktion F von f wie folgt:
Sei $z_0 \in G$ fest. Zu jedem $z \in G$ existiert (da G zushg.!) ein Streckenzug S_z in G, der z_0 mit z verbindet.

$$\text{Sei } F(z) := \int_{\mathrm{S}_z} f(\zeta)\, d\zeta .$$

Beh.:
$F(z)$ ist unabhängig von der Wahl von S_z.
Denn ist S'_z ein zweiter Streckenzug in G, der z_0 mit z verbindet, so definiert $\Gamma := S_z - S'_z$ einen Zyklus.

$$G \text{ einfach zushg.} \quad \Rightarrow \quad \int_{\Gamma} f\,dz = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{S_z} f\,dz = \int_{S'_z} f\,dz\ .$$

noch z.z.: F ist komplex diffbar und $F'(z) = f(z)$.
Sei $\varepsilon > 0$. Stetigkeit von f impliziert: $\exists$ Kreisscheibe $B(z,r) \subset G$ $(r > 0)$ mit

$$|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon \ , \ \ \forall\, \zeta \in B(z,r)\ .$$

Sei nun $z' \in B(z,r)$, $z' \neq z$, und S die Strecke von z nach z', parametrisiert durch

$$[0,1] \to \mathbb{C} : t \mapsto z + t(z'-z)\ .$$

Dann gilt offensichtlich

$$\int_{S} d\zeta = z' - z\ .$$

$S_z + S$ stellt Streckenzug $S_{z'}$ von z_0 nach z' dar. Daher gilt

$$F(z') - F(z) = \int_{S_{z'}} f\,d\zeta - \int_{S_z} f\,d\zeta = \int_{S} f\,d\zeta\ .$$

Also ist

$$\left|\frac{F(z')-F(z)}{z'-z} - f(z)\right| = \left|\frac{\int_S f\,d\zeta}{z'-z} - f(z)\right| = \left|\frac{1}{z'-z}\int_{S} (f(\zeta)-f(z))\ d\zeta\right|$$

$$\leq \frac{1}{|z'-z|}\int_{S} \underbrace{|f(\zeta - f(z)|}_{<\,\varepsilon}\ |d\zeta| \ \leq \ \frac{1}{|z'-z|}\cdot\varepsilon\cdot \underbrace{\int_S |d\zeta|}_{|z'-z|} \ = \ \varepsilon\ .$$

Korollare

Sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet.

a) Dann existiert zu jeder in G holomorphen, nullstellenfreien Funktion f ein "Zweig des Logarithmus", d.h. eine holomorphe Funktion $g : G \to \mathbb{C}$ mit $e^g = f$.

b) Ferner besitzt jede holomorphe, nullstellenfreie Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ eine "Wurzel", d.h. es gibt eine holomorphe Funktion $q : G \to \mathbb{C}$ mit $q^2 = f$.

Beweis

a) Setze $h := \dfrac{f'}{f}$ (logarithmische Ableitung von f).

h ist holom. auf G, da f nullstellenfrei ist. Gemäß Lemma 1 besitzt h eine Stammfunktion H: $H' = h = \dfrac{f'}{f}$.

Folglich gilt

$$\frac{d}{dz}(f\,e^{-H}) = f'\cdot e^{-H} - f\,e^{-H}\cdot \underbrace{H'}_{=\frac{f'}{f}} = 0\ .$$

$$G \text{ zushg.} \quad\Rightarrow\quad f\,e^{-H} = const \quad\Rightarrow\quad f = c\cdot e^{H} \text{ für ein } c\in\mathbb{C}.$$

Wähle $b\in\mathbb{C}$ so daß $c = e^b$. Dann gilt $f = e^{b+H}$, also definiert $g := b + H$ einen Zweig des Log. von f.

b) Nach Teil a) existiert g holom. mit $e^g = f$.

Setze $q := e^{\frac{1}{2}g}$. Dann ist $q^2 = e^g = f$.

Der Kern des Existenzbeweises zum Riemann'schen Abbildungssatz ist das folgende Lemma, das dann den Beweis des Satzes abschließt.

Lemma 2

Sei $G\subset\mathbb{C}$ ein Gebiet, $G\neq\mathbb{C}$. Zu jeder nullstellenfreien Funktion $f\in\mathcal{H}(G)$ existiere ein $g\in\mathcal{H}(G)$ mit $g^2 = f$ (f hat "Wurzel"). Dann läßt sich G biholomorph auf $\mathbb{E}$ abbilden.

Beweis

Fixiere $a\in G$ und betrachte

A $:= \{f\in\mathcal{H}(G) : f$ ist schlicht, $f(a)=0$, $f'(a)$ reell und >0, $f(G)\subset\mathbb{E}\}$.

Beh. 1: A $\neq\emptyset$.

Da $G\neq\mathbb{C}$ existiert $b\in\mathbb{C}\setminus G$. Da $z\mapsto z-b$ auf G nullstellenfrei ist, existiert nach Voraussetzung $h\in\mathcal{H}(G)$ mit $h^2(z) = z-b$, $\forall\, z\in G$.

h ist schlicht, denn aus $h(z_1) = h(z_2)$ folgt $h^2(z_1) = z_1 - b = z_2 - b\ (= h^2(z_2))$, also $z_1 = z_2$.

Satz von der Gebietstreue: $h(G)$ ist offen, denn h ist nicht konstant.

Es existiert also eine Kreisscheibe $B(h(a),r)$ um $h(a)$ mit $B(h(a),r)\subset h(G)$.

Beh: $\boxed{B(-h(a),r)\cap h(G) = \emptyset}$

Indirekt: Annahme: $\exists\, z\in G$ mit $h(z)\in B(-h(a),r) = \{w\in\mathbb{C} : |w+h(a)| < r\}$.

Dann gilt:

$$r > |h(z)+h(a)| = |h(a)-(-h(z))|\ ,\ \text{d.h. } -h(z)\in B(h(a),r)\ .$$

Wegen $B(h(a),r)\subset h(G)$ existiert somit ein $z'\in G$ mit $h(z') = -h(z)$.

Aber $h^2(z') = h^2(z)$ impliziert $z'-b = z-b$, d.h. $z' = z$, und somit $-h(z) = h(z)$, d.h. $h(z) = 0$, im Widerspruch zur Nullstellenfreiheit von h.

Betrachte nun die Möbius-Transformation

$$T_0 : z\mapsto \frac{r}{z+h(a)}\ .$$

T_0 bildet $\mathbb{C}\setminus B(-h(a),r)$ schlicht auf $\mathbb{E}\setminus\{0\}$ ab.
Setze $h_1 := T_0 \circ h$. Wegen $h(G) \subset \mathbb{C}\setminus B(-h(a),r)$ bildet h_1 die Menge G schlicht auf eine Teilmenge von $\mathbb{E}$ ab.
Um die richtige Normierung zu erreichen, betrachten wir eine weitere Möbius-Transf.

$$T_1 : z \mapsto e^{i\theta}\,\frac{z-h_1(a)}{1-\overline{h_1(a)}\,z}\;.$$

T_1 bildet $\mathbb{E}$ schlicht auf sich ab und es gilt $T_1\,(h(a)) = 0$.
Die Komposition $h_2 := T_1 \circ h_1$ liefert somit – bei geeigneter Wahl von θ – die gewünschte Funktion $h_2 \in$ A. Also ist A $\neq \emptyset$.

<u>Beh. 2</u>: A $\subset \overline{\text{A}} \subset$ A $\cup \{0\}$.

Sei (f_n) eine Folge von Funktionen aus A mit $f_n \xrightarrow{\text{kp.}} f \in \mathcal{H}(G)$.
Aus $f_n(a) = 0$ und $f_n'(a)$ reell und > 0 folgt:

$$f(a) = 0\;,\;\; f'(a) \text{ reell und } \geq 0.$$

Satz von Hurwitz: f_n schlicht $\Rightarrow$ f schlicht oder konstant.
Falls f schlicht ist, so ist $f'(a) \neq 0$, also $f'(a) > 0$ und somit $f \in$ A. Falls f konstant ist, muß $f \equiv 0$ sein (da $f(a) = 0$).

<u>Beh. 3</u>: $\overline{\text{A}}$ ist kompakt.

Denn A $\cup\{0\}$ ist beschränkt (da $f(G) \subset \mathbb{E}\,,\ \forall\, f \in$ A), also nach Beh. 2 auch $\overline{\text{A}}$.
Satz von Montel: $\overline{\text{A}}$ abgeschl. und beschr. $\Rightarrow$ $\overline{\text{A}}$ ist kompakt.

<u>Beh. 4</u>: Es existiert ein (extremales) $f_0 \in$ A mit $\underbrace{f_0'(a)}_{\text{reell}} \geq \underbrace{f'(a)}_{\text{reell}}\,,\ \forall\, f \in$ A.

Denn das Funktional $F : \mathcal{H}(G) \to \mathbb{C} : f \mapsto f'(a)$ ist stetig auf $\mathcal{H}(G)$, insbesondere also auf $\overline{\text{A}}$.
(Stetigkeit von f ist klar, da aus $f_n \xrightarrow{\text{kp.}} f$ nach Weierstrass $f_n' \to f'$, also insbesondere $f_n'(a) \to f'(a)$ konvergiert.)
Da $\overline{\text{A}}$ kompakt ist (Beh. 3) und F stetig ist, nimmt F sein Maximum in einem $f_0 \in \overline{\text{A}}$ an, es gibt sogar ein $f_0 \in$ A wegen Beh. 2 und der Tatsache, daß $f_0 \neq 0$ ist.
Es gilt also: $f_0'(a) \geq f'(a)\,,\ \forall\, f \in$ A.

<u>Beh. 5</u>: f_0 bildet G <u>auf</u> $\mathbb{E}$ ab, d.h. $f_0 : G \to \mathbb{E}$ ist surjektiv.

Sei $w \in \mathbb{E}\setminus f_0(G)$. Wegen $f_0(a) = 0$ ist $w \neq 0$.
Wir betrachten die Möbius-Transformation

$$T : z \mapsto \frac{z-w}{1-\overline{w}z}\;,\ \text{welche } \mathbb{E} \text{ biholomorph auf sich abbildet,}$$

und bilden die Komposition

$$(T \circ f_0)\,(z) = \frac{f_0(z)-w}{1-\overline{w}f_0(z)}\;.$$

Diese ist – wegen $w \notin f_0(G)$ – nullstellenfrei, also existiert $g \in \mathcal{H}(G)$ mit

$$(*)\;\; g^2(z) = T(f_0(z))\;,\ \forall\, z \in G\;.$$

Aus $f_0(G) \subset \mathbb{E}$ folgt $g(G) \subset \mathbb{E}$.
Ferner ist $|g^2(a)| = |T(\underbrace{f_0(a)}_{=0})| = |-w|$, also $|g(a)| = |w|^{\frac{1}{2}}$.

Die Kettenregel, unter Berücksichtigung von $T'(z) = \dfrac{1-|w|^2}{(1-\overline{w}z)^2}$, auf $(*)$ angewandt, ergibt

$$2\,g(a)\,g'(a) = T'(\underbrace{f_0(a)}_{=0}) \cdot f_0'(a) = (1-|w|^2)\ \underbrace{f_0'(a)}_{>0}$$

also

$$|g'(a)| = \frac{1-|w|^2}{2\,|w|^{\frac{1}{2}}} f_0'(a) \quad (\neq 0)$$

Betrachte nun

$$h(z) = \frac{|g'(a)|}{g'(a)}\ \frac{g(z)-g(a)}{1-\overline{g(a)}\,g(z)} \ .$$

Dann ist $h(a) = 0$ und

$$\begin{aligned} h'(a) &= \frac{|g'(a)|}{g'(a)} \cdot \frac{1-|g(a)|^2}{(1-\overline{g(a)}\,g(a))^2} g'(a) = \frac{|g'(a)|}{1-|g(a)|^2} = \frac{|g'(a)|}{1-|w|} \\ &= \frac{(1-|w|^2) f_0'(a)}{2\,|w|^{\frac{1}{2}}\,(1-|w|)} = \frac{1+|w|}{2\,|w|^{\frac{1}{2}}} f_0'(a) \ \ (>0) \ . \end{aligned}$$

Ferner ist h schlicht und $h(G) \subset \mathbb{E}$, wegen $g(G) \subset \mathbb{E}$. Somit ist $h \in$ A.
Aber

$$h'(a) = \underbrace{\frac{1+|w|}{2\,|w|^{\frac{1}{2}}}}_{>1} f_0'(a) > f_0'(a) \ ,$$

im Widerspruch zur Maximalität von f_0.
Folglich gilt $f_0(G) = \mathbb{E}$, d.h. f_0 ist die gesuchte biholomorphe Abbildung.

Mit dem Korollar zu Lemma 1 und dem Lemma 2 ist der Riemann'sche Abbildungssatz vollständig bewiesen.

7.7 Charakterisierung einfach zusammenhängender Mengen

Aus Lemma 1 und 2 ergibt sich

Satz

Sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$. Äquivalent sind:

(i) Gebiet G ist einfach zusammenhängend.

(ii) Jede holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ besitzt eine Stammfunktion $F : G \to \mathbb{C}$.

(iii) Zu jeder nullstellenfreien, holomorphen Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ existiert eine holomorphe Funktion $g : G \to \mathbb{C}$ mit $e^g = f$ (d.h. f besitzt Zweig des Logarithmus).

(iv) Zu jeder nullstellenfreien Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ existiert eine holomorphe Funktion $q : G \to \mathbb{C}$ mit $q^2 = f$ (d.h. f hat "Wurzel").

(v) Für jede holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ und jeden Zyklus Γ in G gilt

$$\int_\Gamma f \, dz = 0 \, .$$

Beweis

(i) $\Rightarrow$ (ii) : Lemma 1

(ii) $\Rightarrow$ (v) : Sei F eine Stammfunktion von f. Dann gilt für jeden Zyklus $\Gamma = \sum_{k=1}^{m} n_k \, \gamma_k$

(a_k = Anfangspunkt von γ_k, b_k = Endpunkt von γ_k)

$$\int_\Gamma f \, dz = \sum_1^m n_k \int_{\gamma_k} \underbrace{f}_{=F'} \, dz = \sum_1^m n_k \left(F(b_k) - F(a_k)\right) = 0 \, .$$

(v) $\Rightarrow$ (i) : Sei $z \in \complement G$. Dann ist die Funktion $\zeta \mapsto \dfrac{1}{\zeta - z}$ auf G holomorph, also gilt nach (v) für jeden Zyklus Γ:

$$ind_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 0 \, ,$$

d.h. Γ ist nullhomolog und G damit einfach zusammenhängend
$\Rightarrow$ gezeigt: (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (v)

(i) $\Rightarrow$ (iii) : Korollar zu Lemma 1 von Paragraph 7.6

(iii) $\Rightarrow$ (iv) : Nach Voraussetzung existiert g holomorph mit $e^g = f$. Setze $q = e^{\frac{1}{2}g}$. Dann $q^2 = e^g = f$.

(iv) $\Rightarrow$ (ii) : Sei $G \neq \mathbb{C}$. Nach Lemma 2 aus 7.6 existiert eine biholomorphe Abb. $\varphi : \mathbb{E} \to G$. Auf $\mathbb{E}$ besitzt jede holomorphe Funktion eine Stammfunktion (da $\mathbb{E}$ sternförmig). Folglich gilt dasselbe für G.
Denn : Sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $H : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion von $f(\varphi(z)) \cdot \varphi'(z) : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$, d.h. $H'(z) = f(\varphi(z)) \cdot \varphi'(z)$.

Beh.: $F = H \circ \varphi^{-1}$ ist Stammfunktion von f.
Denn F ist holomorph und

$$\begin{aligned} F'(\zeta) &= \underbrace{H'(\varphi^{-1}(\zeta))}_{f(\zeta)\cdot\varphi'(\varphi^{-1}(\zeta))} \cdot (\varphi^{-1})'(\zeta) = f(\zeta)\, \varphi'(\varphi^{-1}(\zeta)) \cdot (\varphi^{-1})'(\zeta) \\ &= f(\zeta) \cdot (\underbrace{\varphi \circ \varphi^{-1}}_{id})'(\zeta) = f(\zeta) \; . \end{aligned}$$

Ist $G = \mathbb{C}$, so ist (ii) klar, da dann G sternförmig ist.
Damit gezeigt: (i) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (i) (oben).

Zusammenhang mit der Fundamentalgruppe

Sei U eine offene Menge in $\mathbb{C}$, allgemeiner ein topologischer Raum (Hausdorff'sch).
Unter einem Weg γ verstehen wir eine stetige Abbildung von $[0,1]$ nach U.
Seien g_0, $g_1 : [0,1] \to$ U zwei Wege mit gleichen Anfangs- und Endpunkten:
$\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$, $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$.

Definition

γ_0 und γ_1 heißen homotop, falls es eine stetige Abb. $d : [0,1] \times [0,1] \to$ U gibt mit

(1) $d(t,0) = \gamma_0(t)$, $d(t,1) = \gamma_1(t)$, $\forall\, 0 \leq t \leq 1$.

(2) $d(0,u) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0)$, $d(1,u) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$, $\forall\, 0 \leq u \leq 1$.

d heißt Deformationsabbildung, $\gamma_u : [0,1] \to d(t,u)$ heißt "Zwischenweg".

Äquivalenz-Relation:

$$\gamma_0 \approx \gamma_1 \;\Leftrightarrow\; \gamma_0 \text{ ist homotop zu } \gamma_1 \; .$$

Dann:

1) $\gamma_0 \approx \gamma_0$

2) $\gamma_0 \approx \gamma_1 \;\Rightarrow\; \gamma_1 \approx \gamma_0$

3) $\gamma_0 \approx \gamma_1$, $\gamma_1 \approx \gamma_2 \;\Rightarrow\; \gamma_0 \approx \gamma_2$.

Menge aller Wege mit gleichen Anfangs- und Endpunkten zerfällt in Äquivalenzklassen.
Es gilt auch: Ist $\tau : [0,1] \to [0,1]$ eine Parametertransf. des Weges $\gamma : [0,1] \to$ U
(τ stetig, isoton, $\tau(0) = 0$, $\tau(1) = 1$), so ist $\gamma \circ \tau \approx \gamma$
(wähle $d(t,u) = \gamma(\,(1-u)t + u\,\tau(t)\,)$).

Beispiel

Sei $\mathrm{U} \subset \mathbb{R}^n$ konvex (d.h. $x_1,\, x_2 \in \mathrm{U} \Rightarrow$ Strecke $[x_1\, x_2] \subset \mathrm{U}$).
Dann sind zwei beliebige Wege in U mit gleichen Anfangs- und Endpunkten stets homotop zueinander. Denn $d(t,u) := (1-u)\gamma_0(t) + u\,\gamma_1(t)$ ist Deformationsabbildung.

Produkt zweier Wege

Seien γ_0, γ_1 Wege in U mit $\gamma_0(1) = \gamma_1(0)$. Der Weg

$$(\gamma_0\gamma_1)(t) := \begin{cases} \gamma_0(2t) & : \ t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_1(2t-1) & : \ t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

heißt der Produktweg von γ_0 und γ_1 .
Die Rolle des Neutralelementes spielt dabei der sog. "Punktweg" ε_a definiert durch $\varepsilon_a(t) = a$, für alle $0 \le t \le 1$.
Denn es gilt $\varepsilon_a\,\gamma \approx \gamma$ wenn $a = \gamma(0)$ (Betrachte Transformation $\tau(t) = (2t-1)^+$, $\varepsilon_a\,\gamma = \gamma \circ \tau$).
Der "inverse Weg" γ^{-1} von γ ist definiert durch

$$\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t) \ , \ t \in [0,1] \quad \text{(Durchlaufsinn geändert).}$$

Übungsaufgabe: $\gamma\,\gamma^{-1} \approx \varepsilon_a$, mit $a = \gamma(0)$
$\gamma^{-1}\,\gamma \approx \varepsilon_b$, mit $b = \gamma(1)$.

Fundamentalgruppe

Sei $a \in \mathrm{U}$ fix. Sei

$$\Gamma_a := \{\ \gamma \mid \gamma : [0,1] \to \mathrm{U} \text{ stetig}, \gamma(0) = \gamma(1) = a\ \}$$

Menge aller geschlossenen Wege mit a als Anfangs- und Endpunkt. Γ_a zerfällt in Äquivalenzklassen bzgl. "$\approx$", sog. Homotopieklassen (bzgl. a).

Multiplikation in Homotopieklassen: Zwei Homotopieklassen werden multipliziert, indem man 2 beliebige Repräsentanten multipliziert.
Dies ist erlaubt, da aus $\gamma_0 \approx \gamma_0'$, $\gamma_1 \approx \gamma_1'$ folgt $\gamma_0\,\gamma_1 \approx \gamma_0'\,\gamma_1'$.
Homotopieklassen $\Gamma_a/_{\approx}$ bilden Gruppe, sog. Fundamentalgruppe $\mathcal{F}_a(\mathrm{U})$.

Definition

Ein topologischer Raum U heißt wegzusammenhängend, falls je zwei Punkte von U durch einen Weg verbindbar sind.
Topologie-Vorlesung: U wegzusammenhängend $\Rightarrow$ U zusammenhängend ($\not\Leftarrow$).
In $\mathbb{C}$, allgemein in $\mathbb{R}^n$ gilt jedoch: U wegzushg. $\iff$ U zushg.

Beh.: In jedem wegzushg. topologischen Raum U gilt für beliebige a, $b \in$ U:

$$\text{Gruppe } \mathcal{F}_a(\mathrm{U}) \text{ ist } \underline{\text{isomorph}} \text{ zu } \mathcal{F}_b(\mathrm{U}).$$

Isomorphismus Φ wird induziert durch Abb.

$$\Gamma_a \to \Gamma_b : \gamma \mapsto \sigma\,\gamma\,\sigma^{-1} \; .$$

Definition

Ist U ein wegzushg. topologischer Raum, so schreibt man für $\mathcal{F}_a(\mathrm{U})$ kurz $\mathcal{F}(U)$ (bzw. $\Pi_1(\mathrm{U})$) und nennt $\mathcal{F}(\mathrm{U})$ die Fundamentalgruppe von U.

Beachte: Sind U, V wegzushg. top. Räume, die zueinander homöomorph sind, so sind die Gruppen $\mathcal{F}(\mathrm{U})$ und $\mathcal{F}(\mathrm{V})$ isomorph.

Fundamentalgruppe sternförmiger Gebiete

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, das bzgl. $a \in G$ sternförmig ist (mit jedem $x \in G$ ist auch die Strecke $[a\,x]$ in G enthalten).

Beh.: $\mathcal{F}(G) = \mathcal{F}_a(G) = \{\, e \,\}$: Einheitsgruppe, d.h. $\mathcal{F}(G)$ ist trivial.

Beweis

Sei $\gamma \in \Gamma_a$. Dann ist $\gamma \approx \varepsilon_a$, da $d(t,u) = (1-u)\,\gamma(t) + u\,a$ eine Deformationsabbildung definiert.

Wir zeigen nun

Satz

Für ein beliebiges Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ gilt:

$$G \text{ ist einfach zusammenhängend } \Leftrightarrow \text{ Fundamentalgruppe } \mathcal{F}(G) \text{ ist trivial.}$$

In $\mathbb{C}$ kann somit die Trivialität der Fundamentalgruppe als Definition des einfachen Zusammenhangs genommen werden.
Es zeigt sich nun, daß dies die beste Definition ist, um allgemein einfach zushg. Räume zu definieren.

Definition

Ein topologischer Raum U, der wegzushg. ist, heißt einfach zusammenhängend, wenn $\mathcal{F}(\mathrm{U}) = \{\, e \,\}$, d.h. die Fundamentalgruppe trivial ist.

Beweis des Satzes

"$\Leftarrow$": z.z. jeder Zyklus Γ in G ist nullhomolog, d.h. $ind_\Gamma(z) = 0$, $\forall\, z \in \complement G$.
OBdA sei $\Gamma = \gamma$ ein geschlossener Weg in G.

$$\underline{\text{z.z.}} \qquad ind_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 0 \, , \; \forall\, z \in \complement G \, .$$

Sei $a \in \gamma$ beliebig und $d : [0,1] \times [0,1] \to G$ eine Homotopie zwischen γ und ε_a.
Sei $\gamma_u(t) := d(t,u)$, für $0 \le t \le 1$.
Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$\varphi_z(u) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_u} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \quad , \text{ für } z \in \complement G \text{ fest}, \ 0 \le u \le 1 \ .$$

Aufgrund der vorausgesetzten Stetigkeit von d folgt:

$$u \to \varphi_z(u) \ \text{ ist stetig auf } [0,1] \ .$$

Aber: φ_z nimmt nur ganzzahlige Werte an! Also ist $\varphi_z = const$ und somit

$$ind_\gamma(z) = \varphi_z(0) = \varphi_z(1) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\varepsilon_a} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 0 \ .$$

"$\Rightarrow$": Sei G einfach zushg.
Fall 1: $G = \mathbb{C}$. Dann ist G sternförmig bzgl. 0, also $\mathcal{F}(G)$ trivial.
Fall 2: $G \ne \mathbb{C}$. Nach dem Riemann'schen Abbildungssatz ist G biholomorph auf $\mathbb{E}$ abbildbar. Es gilt also insbesondere:

$$G \text{ ist homöomorph auf } \mathbb{E} \text{ abbildbar.}$$

Folglich ist $\mathcal{F}(G) \cong \mathcal{F}(\mathbb{E}) = \{\, e \,\}$, also $\mathcal{F}(G)$ trivial.

In $\mathbb{C}$ ist auch folgende – sehr anschauliche – Definition der einfach zushg. Menge hilfreich:

Satz

Für ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ sind äquivalent:

(i) G ist einfach zusammenhängend.

(ii) Ist $\mathrm{A} = \mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2$ eine Zerlegung der abgeschlossenen Menge $\mathrm{A} = \complement G$ in punktfremde abgeschlossene Teile A_1 und A_2, so ist ein A_ν ($\nu = 1, 2$) genau dann kompakt, wenn es leer ist.

Anschaulich gesprochen: Einfach zushg. Mengen haben keine Löcher.

Beweis (Skizze)

(i) $\Rightarrow$ (ii) : Sei G einfach zushg. und A_1 aus $\mathrm{A} = \mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2$ nichtleer und kompakt.
Dann ist $\mathrm{U} := G \cup \mathrm{A}_1$ offen, da $\complement \mathrm{U} = \mathrm{A}_2$ abgeschlossen ist.
Da A_1 kompakt ist und $\mathrm{A}_1 \subset \mathrm{U}$ existiert ein Zyklus Γ in $\mathrm{U} \setminus \mathrm{A}_1 = G$ mit $ind_\Gamma(z) = 1$, $\forall\, z \in \mathrm{A}_1$ (siehe z.B. Fischer - Lieb, S. 112).
Da nach Voraussetzung Γ nullhomolog ist ergibt dies einen Widerspruch.
Also ist $\mathrm{A}_1 = \emptyset$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) (durch Kontraposition): Sei G nicht einfach zushg.
Dann existiert ein in G nicht nullhomologer Zyklus Γ .
Wir definieren

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_1 &:= \{ z \in \complement G : ind_\Gamma(z) \neq 0 \} \\ \mathrm{A}_2 &:= \{ z \in \complement G : ind_\Gamma(z) = 0 \} . \end{aligned}$$

Dann ist $\complement G = \mathrm{A} = \mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2$, $\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2 = \emptyset$, $\mathrm{A}_1 \neq \emptyset$ und beschränkt.

z.z. A_1 ist abgeschlossen (und damit kompakt und nichtleer).
Es sei (a_n) eine Folge in A_1 mit $a_n \to a_0$ für $n \to \infty$. Aus $ind_\Gamma(a_n) \neq 0$ und der Tatsache, daß ind_Γ auf jeder Zusammenhangskomponente in $\complement G$ konstant ist, folgt dann auch $ind_\Gamma(a) \neq 0$, also $a \in \mathrm{A}_1$.

Achtung: In $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ ist die gelochte Kugel $B(x_0, R) \setminus \{x_0\}$ sehr wohl einfach zushg., da die Fundamentalgruppe trivial ist.
Obige Charakterisierung mit Hilfe der “Löcher” gilt also hier nicht.

Kapitel 8

Produktentwicklung holomorpher Funktionen

8.1 Unendliche Produkte

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen.
Wir wollen das undendliche Produkt

$$\prod_{k=1}^{\infty} a_k$$

definieren. Naheliegend ist, dies als Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} a_k$$

zu definieren.
Aber:

1) Wenn ein $a_i = 0$ ist, so ist jedes Partialprodukt $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k$ für $n \geq i$ gleich Null, unabhängig davon, ob der Rest konvergiert oder nicht.
2) Unendliches Produkt könnte Null sein, ohne daß einer der Faktoren Null ist (z.B. bei $\displaystyle\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$).

Diese beiden Fälle sollen ausgeschlossen werden. Wir definieren daher

Definition

Das unendliche Produkt $\prod\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ der komplexen Zahlen (a_k) heißt konvergent, falls gilt

(1) $a_k \neq 0$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$, d.h. $\exists\, i \in \mathbb{N}$ sodaß $a_k \neq 0$ für alle $k \geq i$.

(2) $\mathrm{A}_i := \lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=i}^{n} a_k$ existiert und ist von Null verschieden.

Ist das unendliche Produkt $\prod_1^\infty a_k$ in diesem Sinne konvergent, so bezeichnen wir auch seinen Wert mit $\prod_1^\infty a_k$ und setzen

$$\prod_{k=1}^{\infty} a_k := a_1 \cdot a_2 \cdots a_{i-1} \cdot \mathrm{A}_i \ \ .$$

Dieser ist offensichtlich unabhängig von der speziellen Wahl von i.

Eigenschaften:

(1) $\prod\limits_1^\infty a_k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_k = 0$ für wenigstens ein $k \in \mathbb{N}$.

(2) $\prod\limits_1^\infty a_k$ konvergent $\quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{k\to\infty} a_k = 1$.

Letzteres folgt aus

$$a_n = \frac{\prod_{k=i}^{n} a_k}{\prod_{k=i}^{n-1} a_k} \ \longrightarrow \ \frac{\mathrm{A}_i}{\mathrm{A}_i} = 1 \quad \text{für } \ n \to \infty \ .$$

Setzt man $a_k = 1 + b_k$, so folgt also

$$\prod_1^\infty (1+b_k) \ \text{ konvergiert } \ \Rightarrow \ \lim_{k\to\infty} b_k = 0 \ .$$

Bem.: Für Produkte mit positiven Zahlen β_k gilt:

$$\prod_1^\infty (1+\beta_k) \ \text{ konvergiert } \ \Leftrightarrow \ \sum_1^\infty \beta_k \ \text{ konvergiert.}$$

(benutze: $\beta_1 + \ldots + \beta_n \leq (1+\beta_1)\,(1+\beta_2)\ \ldots\ (1+\beta_n) \leq e^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot e^{\beta_n}$)

Definition

$\prod\limits_1^\infty (1+b_k)$ heißt absolut konvergent, falls $\prod\limits_1^\infty (1+|b_k|)$ konvergent ist

(bzw. nach Bem. $\sum\limits_1^\infty |b_k| < \infty$).

Man zeige: absolute Konvergenz $\Rightarrow$ Konvergenz.

Achtung: Absolute Konvergenz von $\prod\limits_{1}^{\infty} a_k$ heißt nicht Konvergenz von $\prod\limits_{1}^{\infty} |a_k|$!

(Denn sonst würde $\prod\limits_{1}^{\infty} (-1)^k$ absolut konvergieren, aber nicht konvergieren.)

Lemma

Sei $a_k \neq 0$, $a_k \in \mathbb{C}$, für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\prod_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergiert } \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \log a_k \text{ konvergiert.}$$

Dabei verstehen wir hier unter log den Hauptwert:

$$\log z = \log |z| + i\, arg\, z \quad , \quad -\pi < arg\, z < \pi$$

Beweis

Sei $p_n := \prod\limits_{k=1}^{n} a_k$, $s_n := \sum\limits_{k=1}^{n} \log a_k$, sodaß $e^{s_n} = p_n$.
Ist nun (s_n) konvergent mit Grenzwert s, so konvergiert auch (p_n) und zwar gegen $e^s \neq 0$.
Sei umgekehrt (p_n) konvergent mit Grenzwert $p \neq 0$.
Wegen $p \neq 0$ existiert eine Kreisscheibe $B(p, R)$ auf der ein Zweig g des Logarithmus existiert. Für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $p_n \in B(p, R)$ und damit

$$e^{g(p_n)} = p_n = e^{s_n} \ .$$

Zu jedem dieser n existiert demnach ein $k_n \in \mathbb{Z}$ mit

$$(*) \quad s_n = g(p_n) + 2\, k_n\, \pi i \ .$$

Folglich ist

$$\log a_{n+1} = s_{n+1} - s_n = g(p_{n+1}) - g(p_n) + 2\, \pi\, i\, (k_{n+1} - k_n) \ .$$

Wegen $\log a_{n+1} \to \log 1 = 0$ und $g(p_{n+1}) - g(p_n) \to 0$ für $n \to \infty$ folgt:

$$k_{n+1} - k_n \to 0 \text{ für } n \to \infty \ .$$

Da $k_n \in \mathbb{Z}$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $k_n = k_{n_0}$, $\forall\, n \geq n_0$.
Aus $(*)$ folgt somit die Konvergenz von s_n.

Unendliche Produkte von Funktionen

Sei $\mathrm{U} \subset \mathbb{C}$, $f_k : \mathrm{U} \to \mathbb{C}$ eine Folge von Funktionen. Wir setzen

$$\left(\prod_1^\infty f_k\right)(z) := \prod_1^\infty f_k(z) \quad , \; (z \in \mathrm{U}),$$

vorausgesetzt daß die rechte Seite für alle $z \in \mathrm{U}$ existiert.

Definition

Das Produkt $\prod\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ heißt kompakt konvergent in U, wenn zu jedem Kompaktum $K \subset \mathrm{U}$ ein Index $m = m(K) \in \mathbb{N}$ existiert, sodaß die Folge

$$f_m \cdot f_{m+1} \cdot \ldots \cdot f_n \quad (n \geq m)$$

auf K gleichmäßig gegen eine nullstellenfreie Funktion konvergiert.
Sodann ist klar:

1) Konvergiert $\prod_1^\infty f_k$ mit stetigen f_k kompakt gegen die Funktion f, so ist auch f stetig.

2) Konvergiert $\prod_1^\infty f_k$, f_k holomorph auf U, kompakt gegen f, so ist f holomorph auf U.

3) Mit $\prod_1^\infty f_k$ und $\prod_1^\infty g_k$ kompakt konvergent, konvergiert auch $\prod_1^\infty (f_k\, g_k)$ kompakt und es gilt $\prod_1^\infty (f_k\, g_k) = \left(\prod_1^\infty f_k\right) \left(\prod_1^\infty g_k\right)$.

Aus obigem Lemma folgt ferner:

Hinreichendes Konvergenzkriterium

Sei (f_k) eine Folge stetiger, komplexer Funktionen auf U. Es gebe ein $m \in \mathbb{N}$ sodaß $\log f_k$ für alle $k \geq m$ existiere. Konvergiert dann $\sum_{k \geq m} \log f_k$ auf U kompakt gegen die Funktion s, so konvergiert
$\prod f_k$ kompakt gegen $f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_{m-1} \cdot e^s$.

Normale Konvergenz

Häufig ist es notwendig, neben der kompakten (lokal glm.) Konvergenz noch die (stärkere) normale Konvergenz zu betrachten.

Definition

Sei (f_k) , $f_k : \mathrm{U} \to \mathbb{C}$ eine Folge von Funktionen, $f_k = 1 + g_k$.
$\prod\limits_1^\infty f_k = \prod\limits_1^\infty (1+g_k)$ heißt normal konvergent in U, wenn die Reihe $\sum\limits_1^\infty g_k$ in U normal konvergiert.

Lemma

Konvergiert $\prod\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ normal in U, so auch kompakt.

Daher stellt auch bei normaler Konvergenz das unendliche Produkt $\prod_1^\infty f_k$ eine holomorphe Funktion dar.

Beweis des Lemmas

Für $w \in \mathbb{E}$ gilt

$$|\log(1+w)| = \left|\sum_1^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{k} w^k\right| \leq \sum_1^\infty \frac{|w|^k}{k} \leq \sum_1^\infty |w|^k = \frac{1}{1-|w|} - 1 = \frac{|w|}{1-|w|} \ .$$

Also gilt für $|w| \leq \frac{1}{2}$:

$$(*) \quad |\log(1+w)| \leq \frac{|w|}{1-\frac{1}{2}} = 2\,|w| \ .$$

Sei nun K ein Kompaktum in U, $g_k := f_k - 1$, und $\sum_1^\infty \varepsilon_k$ eine konvergente Majorante von $\sum_1^\infty g_k$ auf K.
Es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\varepsilon_k \leq \frac{1}{2}$, $\forall\, k \geq m$.
Aus $|g_k| \leq \varepsilon_k \leq \frac{1}{2}$ für $k \geq m$ und $(*)$ folgt daher:

$$|\log f_k| = |\log(1+g_k)| \leq 2\,|g_k| \leq 2\,\varepsilon_k$$

und somit die normale Konvergenz von $\sum_1^\infty \log f_k$. Aus normaler Konvergenz einer Reihe folgt aber die kompakte Konvergenz derselben und deshalb die Beh. des Lemmas aus obigem "hinreichenden Konvergenzkriterium".

8.2 Der Weierstraß'sche Produktsatz

Problem:

Geg.: Punkte $z_1, \ldots, z_k$ in $\mathbb{C}$, sowie natürliche Zahlen $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$.

Ges.: Holomorphe Funktion f in $\mathbb{C}$, die in z_j $(j = 1, \ldots, k)$ eine Nullstelle der Ordnung n_j hat, aber sonst nirgends verschwindet.

Lösung: $f(z) = (z-z_1)^{n_1} \cdot (z-z_2)^{n_2} \cdots (z-z_k)^{n_k}$
bzw., allgemeiner, $F(z) = e^{g(z)} \cdot f(z)$ mit einer beliebigen holomorphen Funktion g.

Frage: Wie steht es mit einer vorgegebenen abzählbaren Folge von Punkten z_k mit $z_k \to \infty$?
Unendliches Produkt $\prod_{k=1}^\infty (z-z_k)^{n_k}$ wird i.A. nicht konvergieren.
Eine Antwort liefert der folgende Satz.

Satz (Weierstraß)

Zu jeder Folge voneinander verschiedener komplexer Zahlen $(z_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ mit $z_0 = 0$ und $\lim\limits_{k\to\infty} |z_k| = \infty$ und zu jeder Folge natürlicher Zahlen $(n_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gibt es Polynome P_n $(n \in \mathbb{N})$ derart daß das Produkt

$$f(z) = z^{n_0} \prod_{k=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{P_k(z)} \right]^{n_k}$$

auf $\mathbb{C}$ normal konvergiert.

<u>Beweis</u>

<u>Beh. 1</u>: Es gibt Zahlen $\nu_k \in \mathbb{N}$ derart daß

$$(*) \quad \sum_{k=1}^{\infty} n_k \left(\frac{z}{z_k}\right)^{\nu_k+1} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ absolut konvergiert.}$$

Wir zeigen, daß z.B. $\nu_k := n_k + k$ diese Eigenschaft besitzt.
Aus $\lim\limits_{k\to\infty} |z_k| = \infty$ folgt, daß zu beliebigem $z \in \mathbb{C}$ ein $k_0 = k_0(z) \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\frac{|z|}{|z_k|} < \frac{1}{2} \ \text{ für alle } k \geq k_0 \ .$$

Folglich gilt für $k \geq k_0$:

$$\left| n_k \left(\frac{z}{z_k}\right)^{n_k+k+1} \right| \leq n_k \left(\frac{1}{2}\right)^{n_k+k+1} = \frac{n_k}{2^{n_k}} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} ,$$

d.h. die Reihe $(*)$ besitzt eine konvergente Majorante.

$$\text{Setze} \quad P_k(z) := \frac{z}{z_k} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_k}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{\nu_k}\left(\frac{z}{z_k}\right)^{\nu_k} .$$

<u>Beh. 2</u>: $\displaystyle\prod_{k=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{P_k(z)} \right]^{n_k}$ ist normal konvergent auf $\mathbb{C}$.

$$\text{Setze} \quad g_k(z) := \left[\left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{P_k(z)} \right]^{n_k} - 1 \ .$$

<u>z.z.</u>: $\displaystyle\sum_1^{\infty} g_k$ konvergiert normal auf $\mathbb{C}$.

Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt, oBdA $K = \overline{B(0,R)}$.
Nach Definition der ν_k gilt: $\displaystyle\sum_1^{\infty} n_k \left(\frac{R}{|z_k|}\right)^{\nu_k+1}$ konvergiert.
Es existiert also ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$n_k \left(\frac{R}{|z_k|}\right)^{\nu_k+1} \leq \frac{1}{2} \ , \ \ \forall\, k \geq k_0 \ .$$

Durch eventuelles Vergrössern von k_0 kann erreicht werden, daß auch

$$\frac{R}{|z_k|} \leq \frac{1}{2} \ , \quad \forall\, k \geq k_0 \ .$$

Abkürzungen: $\zeta := \frac{z}{z_k}$, $\nu = \nu_k$, $n = n_k$.
Wir müssen abschätzen: $\left| \left[(1-\zeta)\, e^{\zeta + \frac{1}{2}\zeta^2 + \ldots + \frac{1}{\nu}\zeta^\nu} \right]^n - 1 \right|$
unter der Voraussetzung, daß $|\zeta| \leq \frac{1}{2}$ und $n\,|\zeta|^{\nu+1} \leq \frac{1}{2}$ (da $|z| < R$).
Für $|\zeta| \leq \frac{1}{2}$ gilt jedoch:

$$\log(1-\zeta) = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\zeta^j}{j} \ \Rightarrow \ 1 - \zeta = e^{-\sum_1^\infty \frac{\zeta^j}{j}} \ .$$

Nun gilt aber allgemein:

$$|\, e^w - 1\,| \leq \sum_1^\infty \frac{|w|^k}{k!} = e^{|w|} - 1 \ .$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
\left| \left[(1-\zeta)\, e^{\zeta + \frac{1}{2}\zeta^2 + \ldots + \frac{1}{\nu}\zeta^\nu} \right]^n - 1 \right| &= \left| e^{-n \sum_{\nu+1}^\infty \frac{\zeta^j}{j}} - 1 \right| \leq e^{n\,|\sum_{\nu+1}^\infty \frac{\zeta^j}{j}\,|} - 1 \\
&\leq e^{n \sum_{\nu+1}^\infty \frac{|\zeta|^j}{j}} - 1 \leq e^{n \sum_{\nu+1}^\infty |\zeta|^j} - 1 \\
&= e^{n\,|\zeta|^{\nu+1}\,(1+|\zeta|+\ldots)} - 1 = e^{n\,|\zeta|^{\nu+1} \cdot \frac{1}{1-|\zeta|}} - 1 \\
&\leq e^{n\,|\zeta|^{\nu+1} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}}} - 1 = e^{2n\,|\zeta|^{\nu+1}} - 1 \\
&\leq 2n\,|\zeta|^{\nu+1}\, e^{2n\,|\zeta|^{\nu+1}} \qquad (\text{da } e^x - 1 \leq x e^x \ , \ \forall\, x \geq 0) \\
&\leq 2n\,|\zeta|^{\nu+1} \cdot e^1 = 2\,e\,n\,|\zeta|^{\nu+1} \ .
\end{aligned}$$

Damit gezeigt, daß für alle $z \in B(0,R)$ und $k \geq k_0$:

$$\begin{aligned}
|g_k(z)| &= \left| \left[\left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{P_k(z)} \right]^{n_k} - 1 \right| \\
&\leq 2e \cdot n_k \left| \frac{z}{z_k} \right|^{\nu_k+1} \leq 2e \cdot n_k \left(\frac{R}{|z_k|} \right)^{\nu_k+1} \ .
\end{aligned}$$

d.h. $\sum\limits_{k=k_0}^{\infty} g_k$ besitzt die konvergente Majorante $2e \cdot \sum\limits_{k=k_0}^{\infty} n_k \left(\frac{R}{|z_k|} \right)^{\nu_k+1}$ (siehe Beh. 1).
$\Rightarrow \ \sum\limits_1^\infty g_k$ ist normal konvergent auf $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ Beh. 2.
Damit ist der Satz von Weierstrass gezeigt.

8.3 Produktdarstellung von $\sin \pi z$

Die Funktion $z \mapsto \sin \pi z$ hat Nullstellen der Ordnung 1 in $\mathbb{Z}$ und sonst keine. Denn aus

$$0 = \sin \pi z = \frac{1}{2i}\left(e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}\right)$$

folgt

$$e^{\pi i z} = e^{-\pi i z} \quad \Leftrightarrow \quad e^{2\pi i z} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{Z}\,.$$

Sei $z_0 = 0\,,\ z_1 = 1\,,\ z_2 = -1\,,\ z_3 = 2\,,\ z_4 = -2\,,\ \ldots\,,\ z_{2k-1} = k\,,\ z_{2k} = -k$ und $n_k = 1\,,\ \forall\, k \in \mathbb{N}_0$.
Gemäß WEIERSTRASS existiert eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ der Form

$$F(z) = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{P_k(z)}$$

mit denselben Nullstellen z_k und derselben Ordnung, nämlich 1.
Da für $\nu_k := 1$ die Reihe

$$\sum_1^{\infty} \underbrace{n_k}_{=1} \left|\frac{z}{z_k}\right|^{\nu_k+1} = |z|^2 \left[\sum_1^{\infty} \frac{1}{|z_{2k-1}|^2} + \sum_1^{\infty} \frac{1}{|z_{2k}|^2}\right] = 2\,|z|^2 \sum_1^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$$

konvergiert, kann für P_k das Polynom $P_k(z) = \frac{z}{z_k}$ gewählt werden.
Die Funktion

$$f(z) = z \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{\frac{z}{z_k}} = z \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{\frac{z}{k}} \cdot \left(1 + \frac{z}{z_k}\right) e^{-\frac{z}{k}} = z \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)$$

besitzt somit dasselbe Nullstellenverhalten wie die Funktion $\sin \pi z$.
Es folgt: Es gibt eine ganze Funktion h mit

$$(*) \qquad \sin \pi z = e^{h(z)}\, f(z) = e^{h(z)} \cdot z \cdot \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)\,.$$

Bestimmung von h

Wir stützen uns auf folgende Tatsachen:

1. Ist $f = \prod_1^{\infty} f_k$ normal konvergent, mit $f_k : \mathrm{u} \to \mathbb{C}$ holomorph, dann ist auch die logarithmische Ableitung $\sum_1^{\infty} \frac{f_k'}{f_k}$ normal konvergent und hat als Summe die Funktion $\frac{f'}{f}$. (Übungsaufgabe)

2. Es gilt die Partialbruchzerlegung

$$\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-p)^2}\,.$$

Denn die Differenz beider holomorphen Funktionen ist periodisch (Periode 1) und auf $0 \leq \mathrm{Re} z \leq 1$ beschränkt. Damit ist die Differenz auf ganz $\mathbb{C}$ beschränkt und deshalb nach Liouville konstant.
Ferner gilt $const = 0$, da die Differenz für $z \to \infty$ (längs y-Achse) gegen Null strebt.

Logarithmische Ableitung von $(*)$ ergibt:

$$\pi \cot \pi z = h'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2z}{k^2 - z^2} = h'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2} \ .$$

Nochmalige Differentiation unter Beachtung von

$$\left(\frac{2z}{z^2 - k^2}\right)' = \left(\frac{1}{z+k} + \frac{1}{z-k}\right)' = -\frac{1}{(z+k)^2} - \frac{1}{(z-k)^2}$$

ergibt

$$-\frac{\pi^2}{(\sin \pi z)^2} = h''(z) - \sum_{p \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-p)^2} = h'' - \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2$$

d.h. $h'' = 0$, $\forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ und damit $h'' = 0$ auf $\mathbb{C}$ (da h ganz).
Es folgt: $\quad h'(z) = c \quad (c \in \mathbb{C})$.
Aber aus

$$(**) \qquad \pi \cot \pi z - \left(\frac{1}{z} + \sum_{1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2}\right) = c$$

und der Tatsache, daß die linke Seite ungerade ist, folgt $c = 0$.
Also ist $h' = 0$, d.h. $h = const$ und ebenso $e^h =: \mathrm{A} = const$.
Aus $(*)$ folgt somit

$$\sin \pi z = \mathrm{A} z \cdot \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right) \ .$$

In Umgebung von 0 : $\underbrace{\dfrac{\sin \pi z}{\pi z}}_{\to 1} = \dfrac{\mathrm{A}}{\pi} \underbrace{\prod_{1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{z^2}{k^2}\right)}_{\to 1} \ \Rightarrow\ \mathrm{A} = \pi$.

Resultat (Euler)

$$\boxed{\sin \pi z = \pi z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)} \quad , \ \forall\, z \in \mathbb{C} \ .$$

Bem.: Aus $(**)$ und der Tatsache daß $c = 0$ ist erhalten wir ferner die "Partialbruchzerlegung" von $\cot(\pi z)$, nämlich

$$\boxed{\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2} = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \frac{z}{z^2 - p^2}}$$

Spezieller Wert in $\sin \pi z$ - Entwicklung:

$$z = \frac{1}{2}: \qquad 1 = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) = \frac{\pi}{2} \prod_{1}^{\infty} \frac{4k^2-1}{4k^2} = \frac{\pi}{2} \prod_{1}^{\infty} \frac{(2k-1)\,(2k+1)}{2k \cdot 2k}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\pi}{2} = \prod_{1}^{\infty} \frac{2k}{2k-1} \cdot \frac{2k}{2k+1} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \ldots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots} \quad (\text{Wallis})$$

Weitere Anwendung der sinus-Darstellung:

Setze $f_n(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right) = 1 - \left(\sum_{1}^{n} \frac{1}{k^2}\right) z^2 + \ldots$

$\Rightarrow \quad f_n''(0) = -2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Da $f_n(z) \overset{\text{kp.}}{\to} \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right) = \frac{\sin \pi z}{\pi z} =: f(z)$

folgt

$$f_n''(0) \to f''(0) = -\frac{\pi^2}{3} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}\ .$$

Anwendung: Die Γ-Funktion

Das Weierstraß'sche Produkt $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$ konvergiert – wie gezeigt – normal auf $\mathbb{C}$ und stellt dort somit eine holomorphe Funktion dar, die in den Punkten $z = -n$, $n \in \mathbb{N}$ Nullstellen erster Ordnung hat. Folglich besitzt die meromorphe Funktion

$$\boxed{\Gamma(z) := \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{\frac{z}{n}}} \qquad \text{Gamma-Funktion}$$

in den Punkten $z = 0, -1, -2, \ldots$ Pole erster Ordnung.

Die Konstante γ ist dabei so zu wählen, daß $\boxed{\Gamma(1) = 1}$.

Durch Umformung zeigt man: Für $z \neq 0, -1, \ldots$ gilt

$$\boxed{\Gamma(z) = \lim_{n \to \infty} \frac{n!\, n^z}{z\,(z+1) \ldots (z+n)}} \qquad \text{(Gauß'sche Formel).}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \lim \frac{n!\, n^{z+1}}{(z+1)\,(z+2) \ldots (z+n+1)} \\ &= z \cdot \lim \underbrace{\frac{n!\, n^z}{z\,(z+1) \ldots (z+n)}}_{\to \Gamma(z)} \cdot \underbrace{\frac{n}{z+n+1}}_{\to 1} = z \cdot \Gamma(z)\ , \end{aligned}$$

d.h. die Funktionalgleichung

$$\boxed{\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)}$$

und daraus insbesondere

$$\boxed{\Gamma(n+1) = n!} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

(induktiv: $n-1 \to n$: $\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n) = n \cdot (n-1)! = n!$)

Darstellung von Γ durch Integral

Betrachte

$$\Gamma(z,n) := \int_0^n t^{z-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt \quad (n \in \mathbb{N}) \; .$$

(Integral existiert für Re $z > 0$).
Substitution $s = \frac{t}{n}$ liefert

$$\Gamma(z,n) = n^z \int_0^1 s^{z-1}(1-s)^n \, ds \; .$$

Mit Induktion zeigt man:

$$\Gamma(z,n) = \frac{n!\, n^z}{z\,(z+1)\ldots(z+n)} \; .$$

Gauss: $\Gamma(z) = \lim\limits_{n\to\infty} \Gamma(z,n)$.
Anderseits gilt

$$\Gamma(z,n) = \int_0^n t^{z-1} \underbrace{\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}_{\to e^{-t}} dt \;\longrightarrow\; \int_0^\infty t^{z-1}\, e^{-t}\, dt \quad \text{für } n \to \infty \; .$$

Resultat

$$\boxed{\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}\, e^{-t}\, dt} \quad , \text{ für Re } z > 0 \; .$$

(wird häufig als Definition von Γ für Re $z > 0$ genommen).
Die oben angeführte Funktion stellt dann eine analytische (= holomorphe) Fortsetzung von Γ auf $\mathbb{C} \setminus \{0,-1,-2,\ldots\}$ dar.

8.4 Satz von Mittag-Leffler

Analog zur Frage nach den Nullstellen einer holomorphen Funktion kann man auch nach den Polstellen einer meromorphen Funktion fragen:

Frage: Kann man die Polstellenmenge P beliebig vorschreiben?

1. Im Fall P endlich, ja. Denn seien $\mathrm{P} = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ sowie die zugehörigen "Hauptteile"

$$z \to q_k(z) = \frac{a_{k\,n_k}}{(z-z_k)^{n_k}} + \frac{a_{k\,n_k-1}}{(z-z_k)^{n_k-1}} + \ldots + \frac{a_{k\,1}}{z-z_k}$$

vorgegeben. Dann liefert die Summe

$$f(z) := \sum_{k=1}^{n} q_k(z)$$

die gewünschte meromorphe Funktion.

2. Im Fall P unendlich, $\mathrm{P} = \{z_1, z_2, \ldots\}$, notwendige Bedingung:
   Punkte aus P dürfen sich im Endlichen nicht häufen.
   Betrachte Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q_k$. Sie konvergiert i.A. nicht.
   Wir benötigen "Konvergenzerzeugende Summanden", z.B. Polynome.

Doch zuerst: Was bedeutet normale Konvergenz bei meromorphen Funktionen?

Definition

Eine Rehe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ meromorpher Funktionen $f_k : \mathrm{U} \to \mathbb{C}$ konvergiert normal in U, wenn gilt: Zu jedem Kompaktum $K \subset \mathrm{U}$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ sodaß

(1) für alle $k \geq N$ gilt: f_k besitzt keinen Pol in K.

(2) $\sum\limits_{k \geq N} f_k$ hat konvergente Majorant auf K.

Das Gegenstück zum Satz von Weierstrass ist nun der folgende

Satz von Mittag-Leffler

Gegeben sei eine Folge voneinander verschiedener Punkte $(z_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ mit $\lim\limits_{k \to \infty} |z_k| = \infty$. Zu jedem z_k existiere ein "Hauptteil"

$$q_k : z \mapsto q_k(z) = \frac{a_{k\,n_k}}{(z - z_k)^{n_k}} + \ldots + \frac{a_{k\,1}}{z - z_k} \quad (a_{k\,n_k} \in \mathbb{C}\ ,\ n_k \in \mathbb{N})\ .$$

Dann gibt es eine in $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion f, welche

(1) $\mathrm{P} = \{z_k : k \in \mathbb{N}_0\}$ als Polstellenmenge und

(2) in jedem Punkt $z_k \in \mathrm{P}$ die Funktion q_k als Hauptteil besitzt.

Beweis

OBdA sei $z_0 = 0, z_1, z_2, \ldots$ so daß $|z_0| < |z_1| \leq |z_2| \leq \ldots$ und $\lim |z_k| = \infty$.

Sei $\sum\limits_{1}^{\infty} \varepsilon_k$ eine beliebige konvergente Reihe positiver Zahlen, z.B. $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$.

Für alle $k \geq 1$ gilt dann:

$$q_k \text{ ist holomorph auf } B(0, |z_k|)\ , \text{ da } q_k \text{ Pol in } z_k \text{ hat und } z_k \neq 0\ .$$

Somit läßt sich q_k auf $B(0, |z_k|)$ in Potenzreihe entwickeln:

$$q_k(z) = \sum_{l=0}^{\infty} b_{k\,l}\, z^l \quad , \; z \in B(0, |z_k|) \; .$$

Da die Potenzreihe auf der kompakten Menge $\{z : |z| \leq \frac{1}{2}\,|z_k|\,\}$ gleichmäßig konvergiert, existiert ein $N_k \in \mathbb{N}$ mit

$$\left| q_k(z) - \sum_{l=0}^{N_k} b_{k\,l}\, z^l \right| < \varepsilon_k \quad , \; \text{für alle } z \text{ mit } |z| \leq \frac{1}{2}\,|z_k| \; .$$

Setze $p_k(z) := \sum\limits_{l=0}^{N_k} b_{k\,l}\, z^l$.

Die Polynome p_k dienen als konvergenzerzeugende Summanden, denn es gilt:

<u>Beh.</u>: $\quad f := \sum\limits_{k=0}^{\infty} (q_k - p_k) \;$, $(p_0 := 0)$ konvergiert normal auf $\mathbb{C}$ und stellt somit eine meromorphe Funktion mit den verlangten Eigenschaften dar.

<u>Beweis der Beh.</u>

Sei $K \subset \mathbb{C}$ ein Kompaktum. Wegen $\lim |z_k| = \infty$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $K \subset B(0, \frac{1}{2}|z_k|)$ für alle $k \geq N$.

Da für $k \geq N : |z_k| \geq |z_N| > \frac{1}{2}|z_N|$, besitzt die Funktion $q_k - p_k$ für $k \geq N$ keinen Pol in K.

Ferner gilt nach Konstruktion der p_k:

$$|q_k(z) - p_k(z)| < \varepsilon_k \; , \; \forall\, z \in K \; , \; \text{sofern } k \geq N \;\; (\text{denn } z \in K \;\Rightarrow\; |z| < \frac{1}{2}|z_k|) \; .$$

Folglich besitzt die Reihe $\sum\limits_{k \geq N} (q_k - p_k)$ auf K die konvergente Majorante $\sum\limits_{k \geq N} \varepsilon_k$, womit die normale Konvergenz nachgewiesen ist.

<u>Ein Beispiel zum Satz von Mittag-Leffler: Die Weierstraß'sche p-Funktion</u>

Seien w_1 und $w_2 \in \mathbb{C}$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$ und $w = m_1 w_1 + m_2 w_2$, $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ das zugehörige <u>Gitter</u> in $\mathbb{C}$.

Sei $q_w(z) = \dfrac{1}{(z-w)^2}$ der zugehörige "Hauptteil".

<u>Beh.</u>: $\boxed{p(z) := \frac{1}{z^2} + \sum\limits_{w \neq 0} \Big[\underbrace{\frac{1}{(z-w)^2}}_{q_w(z)} - \underbrace{\frac{1}{w^2}}_{p_w(z)} \Big]}$ konvergiert bereits normal auf $\mathbb{C}$.

<u>Beweis</u>: Selbst ist der Mann, bzw. die Frau!

Differentiation:

$$p'(z) = -\frac{2}{z^3} + \sum_{w \neq 0} -\frac{2}{(z-w)^3} = -2 \sum_{w \neq 0} \frac{1}{(z-w)^3} \ .$$

p' ist doppelt periodisch:

$$\begin{aligned} p'(z+w_1) &= p'(z) \\ p'(z+w_2) &= p'(z) \ . \end{aligned}$$

Aus $p'(z+w_1) = p'(z)$ folgt durch Integration:

$$p(z+w_1) = p(z) + C \ .$$

Daraus, wegen $p(-z) = p(z)$:

$$p(\frac{w_1}{2}) = p(\underbrace{-\frac{w_1}{2}}_{z} + w_1) = p(\frac{w_1}{2}) + C$$

$\Rightarrow \quad C = 0$.
Damit gezeigt:

(1) p ist meromorph auf $\mathbb{C}$ mit Polen zweiter Ordnung in den Gitterpunkten $w = m_1 w_1 + m_2 w_2$.

(2) p ist gerade.

(3) p ist doppelt periodisch: $p(z) = p(z+w_1) = p(z+w_2)$.

Laurent-Entwicklung von p in 0:

$$p(z) = \frac{1}{z^2} + a_2 z^2 + a_4^4 z + \dots$$

Gliedweise Differentiation und quadrieren ergibt

$$\Big(p'(z)\Big)^2 = \frac{4}{z^6} - \frac{8a_2}{z^2} - 16a_4 + \dots$$

Aus

$$\Big(p(z)\Big)^3 = \frac{1}{z^6} + \frac{3a_2}{z^2} + 3a_4 + \dots$$

folgt somit:

$$\Big(p'(z)\Big)^2 - 4p^3(z) = -20\frac{a_2}{z^2} - 28a_4 + z^2 [\dots] \ .$$

Folglich ist die Funktion $g(z) = p'^2 - 4p^3 + 20ap + 28a_4$ in Umgebung von 0 holomorph und in 0 gleich Null.
Da g doppelt periodisch ist, ist g holomorph auf $\mathbb{C}$ und daher beschränkt.
Liouville: $g = \mathit{const}$, wobei $\mathit{const} = 0$ wegen $g(0) = 0$.

Resultat: p genügt der Differentialgleichung

$$(*) \quad \boxed{p'^2 - 4p^3 + 20a_2p + 28a_4 = 0}$$

Zusammenhang mit elliptischem Integral

Sei $F(z) = \displaystyle\int_\infty^z \frac{d\zeta}{\sqrt{4\zeta^3 - b_1\zeta - b_2}}$ $\quad \begin{pmatrix} b_1, b_2 \in \mathbb{C} \text{ so daß } 4\zeta^3 - b_1\zeta - b_2 \text{ drei verschiedene} \\ \text{Wurzeln hat} \end{pmatrix}$

und $f(z) = F^{-1}(z)$ die inverse Funktion von F (welche lokal existiert, mit Ausnahme endlich vieler Punkte).
Aus

$$F'(z) = \frac{1}{\sqrt{4z^3 - b_1z - b_2}}$$

folgt dann wegen $F\Big(\underbrace{f(z)}_{=F^{-1}}\Big) = z$:

$$f'(z) = \frac{1}{F'(f(z))} = \left(\frac{1}{\sqrt{4f^3 - b_1f - b_2}}\right)^{-1} \quad ,$$

d.h.

$$(**) \quad f'^2(z) - 4f^3(z) + b_1f(z) + b_2 = 0 \; .$$

Bestimmt man nun $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ so, daß $b_1 = 20a_2$ und $b_2 = 28a_4$ (dies ist möglich), so stimmt $(*)$ mit $(**)$ überein.

Resultat (Sensation):

Die inverse Funktion des elliptischen Integrals F (die meromorph auf ganz $\mathbb{C}$ fortsetzbar ist) ist doppelt periodisch.

Konsequenz:

$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - b_1x - b_2}}$ kann nicht elementar lösbar sein!

Ende der Vorlesung.

Anhang A

Lehrbücher zur Funktionentheorie

Eine Auswahl!

Ahlfors : Complex analysis. Mc-Graw-Hill (1973)

Behnke-Sommer : Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Springer (1955) (Studienausgabe 1976)

Burckel : An Introduction to classical complex analysis. Vol. I. Birkhäuser (1979)

Carathéodory : Funktionentheorie I, II. Birkhäuser (1960)

Cartan : Elementare Theorie der analytischen Funktionen. BI, Nr. 112 (1966)

Conway : Functions of one complex variable. Springer (1978)

Diederich-Remmert : Funktionentheorie I. Heidelberger Taschenbuch, Band 103, Springer (1973)

Dinghas : Vorlesungen über Funktionentheorie. Springer (1961)

Fischer-Lieb : Funktionentheorie. Vieweg (1980)

Heins : Complex function theory. Academic Press (1968)

Jänich : Einführung in die Funktionentheorie. Springer (1977)

Lang : Complex analysis. Addison-Wesley (1977)

Lorenz : Funktionentheorie. Spektrum, Akad. Verlag (1997)

Narasimhan : Complex analysis in one variable. Birkäuser (1985)

Nevanlinna-Paatero : Einführung in die Funktionentheorie. Birkhäuser (1965)

Peschl : Funktionentheorie I. BI, Nr. 131 (1967)

Remmert : Funktionentheorie I, II. Springer (1984)