Algebraische Geometrie II

Wolfgang M. Ruppert

Sommersemester 1994

Version vom 18. März 1999 [1]

[1]Im Sommersemester 1994 am Mathematischen Institut der Universität Erlangen abgehaltene Vorlesung

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1.	Einführung - Wiederholung	5
Kapitel 2.	Divisoren	9
Kapitel 3.	Differentialformen	15
Kapitel 4.	Der Satz von Riemann-Roch I	21
Kapitel 5.	Rationale Abbildungen zwischen Kurven	27
Kapitel 6.	Hyperelliptische Kurven	33
Kapitel 7.	Linearsysteme	41
Kapitel 8.	Spezielle Divisoren	51
Kapitel 9.	Kurven im $\mathbf{P}^3$	57
Literaturverzeichnis		63

KAPITEL 1

Einführung - Wiederholung

Das grundlegende Studienobjekt der Vorlesung sind

irreduzible nichtsinguläre projektive algebraische Kurven.

Wir wollen nun kurz die relevanten Grundbegriffe wiederholen. Gegeben ist ein Grundkörper k, der algebraisch abgeschlossen ist.

Affine Varietäten: Zunächst hat man den n-dimensionalen affinen Raum

$$\mathbf{A}^n = k^n = \{(a_1, \dots, a_n) : a_i \in k\}.$$

Eine affine algebraische Menge ist die Nullstellenmenge einer Menge von Polynomen $f_1, \dots, f_r \in k[x_1, \dots, x_n]$:

$$X = \{(a_1, \dots, a_n) : f_1(a_1, \dots, a_n) = \dots = f_r(a_1, \dots, a_n) = 0\}.$$

Man schreibt auch $X = Z(f_1, \dots, f_r)$. Natürlich ist $X = Z((f_1, \dots, f_r))$. Umgekehrt bilden die Polynome, die auf X verschwinden ein Ideal:

$$I(X) = \{f \in k[x_1, \dots, x_n] : f(P) = 0 \text{ für alle } P \in X\}.$$

Die algebraischen Teilmengen von $\mathbf{A}^n$ bilden die abgeschlossenen Mengen der sogenannten Zariskitopologie auf $\mathbf{A}^n$. Läßt sich eine algebraische Menge X echt zerlegen: $X = X_1 \cup X_2$ in algebraische Mengen X_1 und X_2, so heißt X reduzibel, andernfalls irreduzibel. X ist genau dann irreduzibel, wenn $I(X)$ ein Primideal ist. Eine affine Varietät ist eine irreduzible algebraische Teilmenge von $\mathbf{A}^n$.

Beispiele:

1. Ein irreduzibles Polynom $f(x_1, \dots, x_n)$ definiert eine affine Varietät $X = \{f = 0\} \subseteq \mathbf{A}^n$, eine Hyperfläche. Im Fall $n = 2$ ist X eine irreduzible affine Kurve.
2. Wir betrachten im $\mathbf{A}^3$ die algebraische Menge $X = \{xy = z, y^3 = z^2\}$. (Skizze!) Wir formen die Gleichungen etwas um: $y^3 = x^2y^2$, oder $y^2(y - x^2)$. Also ist

   $$X = \{y = z = 0\} \cup \{y = x^2, z = x^3\}.$$

   Also zerlegt sich X in zwei Kurven. Wegen $k[x, y, z]/(y - x^2, z - y^3) \simeq k[x]$ sind beide Kurven irreduzibel.

Die Dimension d einer Varietät X ist die maximale Länge n einer Kette von irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen von X:

$$\emptyset \subset X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_n.$$

Bei Dimension 1 spricht man von Kurven, bei Dimension 2 von Flächen.

Sei X eine affine Varietät, gegeben durch ein Primideal $\mathfrak{p} = I(X)$. Die Polynome liefern Funktionen auf X. Da die Elemente aus $\mathfrak{p}$ die Nullfunktion auf X liefern, braucht man nur alles modulo $\mathfrak{p}$ zu betrachten. $\mathcal{O}(X) = k[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{p}$ heißt der affine Koordinatenring von X. Natürlich ist $\mathcal{O}(X)$ ein Integritätsring. Der Quotientenkörper $Quot(\mathcal{O}(X))$ heißt Funktionenkörper $k(X)$ von X. Die Elemente sind die rationalen Funktionen auf X. Eine rationale Funktion f ist definiert in $P \in X$, wenn es Polynome g, h gibt mit $f = \frac{g}{h}$ in $k(X)$ und $h(P) \neq 0$. So wird $f(P)$ definiert. Die Funktionen $f \in k(X)$, die in einem Punkt $P \in X$ definiert sind, bilden einen lokalen Ring $\mathcal{O}_{X,P}$. Die Dimension von X kann auch definiert werden als Transzendenzgrad von $k(X)$ über k.

Beispiel: $X = \mathbf{A}^2$. Dann ist $\mathcal{O}(X) = k[x,y]$ und $k(X) = k(x,y)$. Der Funktionenkörper hat Transzendenzgrad 2 über k. Der lokale Ring in $P \in \mathbf{A}^2$ ist

$$\mathcal{O}_{X,P} = \{\frac{f(x,y)}{g(x,y)} : g(P) \neq 0\}.$$

Die rationale Funktion $\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ ist sicher definiert in der offenen Menge $\{g(x,y) \neq 0\}$.

Ist X eine d-dimensionale Varietät und $I(X) = (f_1, \dots, f_r)$ und $P \in X$, so heißt

$$(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P))(x_j - p_j) = 0$$

der Tangentialraum von X in P. Ist die Dimension des Tangentialraums $= d$, so heißt P nichtsingulär.

Beispiel: Ist $I(X) = (f)$ und $P \in X$, so ist P genau dann singulär, wenn $\frac{\partial f}{\partial x_i}(P) = 0$ für alle i.

Projektive Varietäten: Der n-dimensionale projektive Raum ist $\mathbf{P}^n = \{(p_0 : p_1 : \dots : p_n)\}$. Er wird überdeckt durch die affinen Teile $U_i = \{x_i \neq 0\} = \{(x_0 : x_1 : \dots : 1 : \dots : x_n\} \simeq \mathbf{A}^n$. Die Nullstellenmengen homogener Polynome definieren jetzt die abgeschlossenen Teilemengen der Zariskitopologie. Für lokale Betrachtungen kann man sich auf affine Teile zurückziehen. Eine projektive Varietät ist eine irreduzible abgeschossene Teilmenge des $\mathbf{P}^n$. Die Begriffe für affine algebraische Mengen übertragen sich auf die projektiven Mengen mit leichten Modifikationen. Der Funktionenkörper wird durch Quotienten von homogenen Polynomen gleichen Grades definiert. Ist $X \subseteq \mathbf{P}^n$ projektiv und $X \not\subseteq \mathbf{P}^n \setminus U_i$, so ist

$$k(X) = k(X \cap U_i),$$

d.h. der Funktionenkörper läßt sich aus dem affinen berechnen. Ebenso zieht man sich für lokale Betrachtungen (Singularität etc.) auf affine Teile zurück.

Beispiel: $f = x_0x_2 - x_1^2$ definiert eine irreduzible algebraische Kurve im $\mathbf{P}^2$. Wir betrachten die affinen Teilstücke:

- $x_0 \neq 0$: Parabel $y = x^2$
- $x_1 \neq 0$: Hyperbel $xy = 1$
- $x_2 \neq 0$: Parabel $x = y^2$

Hat man eine affine Varietät $Y \subseteq \mathbf{A}^n$ gegeben, so betrachtet man dazu den projektiven Abschluß $\overline{X} \subseteq \mathbf{P}^n$ mit Hilfe der Einbettung $\mathbf{A}^n \subseteq \mathbf{P}^n$: $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (1 : x_1 : \dots : x_n)$.

Beispiel: Sei $X = \{y = x^2\} \subseteq \mathbf{A}^2$. Der projektive Abschluß ist dann $x_0x_2 = x_1^2$ im $\mathbf{P}^2$.

Morphismen und rationale Abbildungen: Eine rationale Abbildung $\phi : X \to \mathbf{P}^n$ wird gegeben durch rationale Funktionen $\phi = (f_0 : \dots : f_n)$. Die rationale Abbildung ϕ heißt definiert in $P \in X$, wenn es eine rationale Funktion g gibt, so daß alle f_ig in P definiert sind. Dann ist $\phi(P) = (f_0g(P) : \dots : f_ng(P))$. Liegen alle Bildpunkte in einer Varietät $Y \subseteq \mathbf{P}^n$, so hat man eine rationale Abbildung von $X \to Y$.
Ist ϕ in jedem Punkt von X definiert, so heißt ϕ ein Morphismus. Damit folgt schnell die Definition von Isomorphismus.

Beispiel: Sei $\mathbf{P}^1$ mit den Koordinaten $(x_0 : x_1)$ gegeben und $t = \frac{x_1}{x_0}$. Dann ist der Funktionenkörper $k(\mathbf{P}^1) = k(t)$. Wir betrachten die rationale Abbildung $\phi : \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^2$ mit $\phi = (1 : t : \frac{1}{t})$. Wir rechnen

$$(1 : t : \frac{1}{t}) = (1 : \frac{x_1}{x_0} : \frac{x_0}{x_1}) = (x_0x_1 : x_1^2 : x_0^2).$$

ϕ ist also ein Morphismus. Es gilt sogar $\phi(\mathbf{P}^1) \subseteq \{y_0^2 = y_1y_2\}$.

Lemma. *Ist X eine projektive Varietät und $\phi : X \to \mathbf{P}^n$ ein Morphismus, so ist $\phi(X) \subseteq \mathbf{P}^n$ abgeschlossen.*

Insbesondere gibt es keine regulären Funktionen auf einer projektiven Varietät außer den Konstanten.

Kurven: Wir geben nun noch einige allgemeine Aussagen für Kurven an.

Eine wichtige Aussage ist

LEMMA. *Ist P nichtsingulärer Punkt einer Kurve C, so ist der lokale Ring $\mathcal{O}_{C,P}$ ein diskreter Bewertungsring. D.h. es gibt eine Ortsuniformisierende $t \in \mathcal{O}_{C,P}$, so daß sich jedes $f \in k(C)$, $f \neq 0$ eindeutig schreiben läßt $f = ut^n$ mit $u(P) \neq 0$ und $n \in \mathbf{Z}$. Man schreibt $n = v_P(f)$. (Wähle eine Hyperebene $t = 0$, die nicht im Tangentialraum liegt.) Die Zahl $v_P(f)$ heißt Null- bzw. Polstellenordnung der Funktion f im Punkt P.*

LEMMA. *Ist C eine irreduzible nichtsinguläre Kurve und $\phi : C \to \mathbf{P}^n$ eine rationale Abbildung, so ist ϕ ein Morphismus, d.h. in allen Punkten von C definiert.*

Beweisidee: ■

Seien C_1 und C_2 zwei nichtsinguläre irreduzible projektive Kurven und $\phi : C_1 \to C_2$ eine rationale Abbildung.

- Dann ist ϕ ein Morphismus.
- ϕ ist konstant oder surjektiv.
- Ist ϕ nicht konstant, so erhält man eine Inklusion der Funktionenkörper: $k(C_2) \subseteq k(C_1)$.
- Umgekehrt liefert jede Inklusion der Funktionenkörper einen nichtkonstanten Morphismus.
- In diesem Fall heißt der Grad der Körpererweiterung der Grad von ϕ.

Noch zwei allgemeine Aussagen:

- Zwei irreduzible nichtsinguläre projektive Kurven sind genau dann isomorph, wenn ihre Funktionenkörper isomorph sind.
- Jeder über k endlich erzeugte Körper F von Transzendenzgrad 1 über k ist Funktionenkörper einer irreduziblen nichtsingulären projektiven Kurve.

KAPITEL 2

Divisoren

Sei C eine irreduzible nichtsinguläre projektive Kurve. Ein Divisor D ist eine formale Linearkombination von endlich vielen Punkten auf C:

$$D = \sum n_P P,$$

wo $n_P \in \mathbf{Z}$ und alle bis auf endlich viele 0 sind. Die Divisoren bilden bezüglich der Addition eine Gruppe, die Gruppe der Divisoren $Div(C)$:

$$(\sum m_P P) + (\sum n_P P) = \sum (m_P + n_P)P.$$

Der Grad eines Divisors $D = \sum n_P P$ ist

$$deg(D) = \sum n_P.$$

So erhält man einen Gruppenhomomorphismus $deg : Div(C) \to \mathbf{Z}$. Der Kern sind die Divisoren vom Grad 0, die auch mit $Div_0(C)$ bezeichnet werden.

Ist $P \in C$, so ist $\mathcal{O}_{C,P}$ ein diskreter Bewertungsring. Die Ordnungsfunktion v_P zählt die Null- bzw. Polstellenordnung und ist eine Bewertung, d.h.

- $v_P(fg) = v_P(f) + v_P(g)$,
- $v_P(f+g) \geq \min(v_P(f), v_P(g))$,
- $v_P(0) = \infty$ (formal),

wo $f, g \in k(C)$ sind.

Sei jetzt $f \in k(C), f \neq 0$. Da f nur endlich viele Null- und Polstellen besitzt, können wir f einen Divisor zuordnen:

$$(f) = div(f) = \sum_{P \in C} v_P(f)P.$$

Ein Divisor D heißt Hauptdivisor, wenn er Divisor einer Funktion ist: $D = (f)$.

Beispiel: $C = \mathbf{P}^1$. Wir schreiben $\mathbf{P}^1 = \{(1 : x)\} = \{t : 1\}$ und denken uns $\mathbf{P}^1 = \mathbf{A}^1 \cup \{\infty\}$. Der Funktionenkörper ist $k(t)$. In $a \in k$ ist $t - a$ uniformisierend, in ∞ ist $u = \frac{1}{t}$ uniformisierend.
Jedes $f \in k(t)^*$ hat eine eindeutige Primfaktorzerlegung

$$f = c \prod (t - a_i)^{n_i},$$

wo die $n_i \in \mathbf{Z}$ sind und $c \in k, c \neq 0$. Es ist $v_{a_i}(f) = n_i$. Wegen

$$f = c \prod (1 - a_i u)^{n_i} \cdot u^{-\sum n_i}$$

ist $v_\infty(f) = -\sum n_i$. Insgesamt:

$$(f) = \sum n_i \cdot a_i - (\sum n_i)\infty.$$

Wir sehen sofort: $deg((f)) = 0$. Umgekehrt folgt aus obiger Darstellung auch gleich:

Satz. *Jedes Divisor vom Grad 0 auf $\mathbf{P}^1$ ist Hauptdivisor.*

Zur Übung rechnen wir noch ein Beispiel:

Beispiel: Wir betrachten die Kurve C, die affin durch die Gleichung $y^2 = x^3 - x$ gegeben ist. Projektiv lautet die Kurvengleichung

$$x_0 x_2^2 = x_1^3 - x_0^2 x_1.$$

- *Uniformisierende in $P = (a, b)$:* Die Funktion $x - a$ ist uniformisierend, wenn $x = a$ keine Tangente ist. Dies ist der Fall für $a \notin \{-1, 0, 1\}$. In den drei Ausnahmefällen ist y uniformisierend.
- Der einzige unendlich ferne Punkt ist $(0 : 0 : 1)$. Setzt man $u = \frac{x_0}{x_2}, v = \frac{x_1}{x_2}$, so lautet die Kurvengleichung
$$u = v^3 - u^2 v.$$
Der unendlich ferne Punkt entspricht $(u, v) = (0, 0)$. Die Funktion v ist uniformisierend. Wegen $v^3 = u(1 + uv)$ gilt
$$v_\infty(u) = 3, \quad v_\infty(v) = 1.$$
Nun ist
$$x = \frac{x_1}{x_0} = \frac{v}{u}, \quad y = \frac{x_2}{x_0} = \frac{1}{u},$$
insbesondere
$$v_\infty(x) = -2, \quad v_\infty(y) = -3.$$
- Wir wollen jetzt den Divisor von x ausrechnen: Im Endlichen hat x nur die Nullstelle $(0, 0)$. Dort ist y uniformisierend, also $v_{(0,0)}(x) = 2$. Damit
$$(x) = 2 \cdot (0, 0) - 2 \cdot \infty.$$
Zur Übung zeige man:
$$(y) = (-1, 0) + (0, 0) + (1, 0) - 3 \cdot \infty.$$

Allgemein gilt:

Satz. *Jeder Hauptdivisor hat Grad 0:*
$$deg((f)) = 0.$$

Beweis: später! ■

Lemma. *Für $f \in k(C)$, $f \neq 0$ gilt:*
$$(f) = 0 \iff f \in k.$$

Beweis: Ein $f \in k(C)$ induziert einen Morphismus $f : C \to \mathbf{P}^1$. Dieser ist entweder konstant oder surjektiv. Ist f also nicht konstant, so besitzt f Pol- und Nullstellen, also ist $(f) \neq 0$. Ist f konstant, so ist natürlich $(f) = 0$. ■

Wegen $(fg) = (f) + (g)$ bilden die Hauptdivisoren eine Untergruppe von $Div(C)$. Zwei Divisoren D_1 und D_2 heißen linear äquivalent: $D_1 \sim D_2$, wenn sie sich um einen Hauptdivisor unterscheiden:
$$D_1 \sim D_2 \iff \text{es gibt eine Funktion } f \text{ mit } D_1 = D_2 + (f).$$
Die Divisorklassengruppe ist die Quotientengruppe $Div(C)$/Hauptdivisoren. Sie wird mit $Pic(C)$ bezeichnet. Da Hauptdivisoren Grad 0 haben, ist auch $Pic_0(C) = Div_0(C)$/Hauptdivisoren wohldefiniert. Außerdem induziert deg die Abbildung
$$deg : Pic(C) \to \mathbf{Z}.$$

Bemerkung: Wählt man sich einen Punkt $P_0 \in C$, so induziert dies einen Isomorphismus $Pic(C) \simeq Pic_0(C) \oplus \mathbf{Z}$ durch $D \mapsto (D - deg(D)P_0, deg(D))$. Ein wichtiges Problem ist daher die Bestimmung von $Pic_0(C)$.
Wir haben bereits gesehen: $Pic_0(\mathbf{P}^1) = 0$.

Wir wollen jetzt wichtige Beispiele von Divisoren kennenlernen.

Hyperebenenschnitte: Sei $C \subseteq \mathbf{P}^n$ und C nicht in einem echten Teilraum von $\mathbf{P}^n$ enthalten. Sei $\ell = a_0 x_0 + \cdots + a_n x_n = 0$ die Gleichung einer Hyperebene. Wir wollen den Divisor (ℓ) definieren: den Hyperebenenschnitt $\{\ell = 0\} \cap C$.
Sei $P \in C$. Ist $P \in U_i = \{x_i \neq 0\}$, so sei $n_P = v_P(\frac{\ell}{x_i}$. Ist P auch in U_j, so ist
$$v_P(\frac{\ell}{x_i}) = v_P(\frac{\ell}{x_j})$$

wegen $v_P(\frac{x_i}{x_j}) = 0$, d.h. n_P ist wohldefiniert. Nun setzt man

$$(\ell) = \sum_{P \in C} n_P P.$$

Ist $\ell' = 0$ eine andere Hyperebene, so ist $\frac{\ell}{\ell'}$ eine rationale Funktion auf C, und man sieht sofort, daß die Hyperebenenschnitte (ℓ) und (ℓ') linear äquivalent sind. Man nennt $deg((\ell))$ den Grad der Kurve C im $\mathbf{P}^n$.

Beispiele:

1. Sei $C = \{x_0 x_2 = x_1^2\} \subseteq \mathbf{P}^2$. Je zwei Punkte auf C bilden einen Hyperebenenschnitt.
2. Für die Kurve C in affiner Darstellung $y^2 = x^3 - x$ bestehen die Hyperebenenschnitte aus 3 Punkten, die auf einer Geraden liegen. Sonderfälle: ...

Wir führen noch eine Ordnungsrelation für Divisoren ein: Sei $D_1 = \sum m_P P$ und $D_2 = \sum n_P P$. Dann ist

$$D_1 \geq D_2 \iff m_P \geq n_P \text{ für alle } P \in C.$$

Wir sagen D_1 ist effektiv, wenn $m_P \geq 0$ für alle $P \in C$ gilt.

Beispiel: Was bedeutet $(f) \geq -nP$, wenn f eine Funktion, P ein Punkt und n eine natürliche Zahl ist? Es bedeutet, daß f in P höchstens einen Pol n-ter Ordnung besitzt, sonst aber überall definiert ist. Analog bedeutet $(f) \geq mQ - nP$ für einen weiteren Punkt Q und eine natürliche Zahl, daß f außerdem mindestens eine m-fache Nullstelle in Q haben muß.

Wir definieren jetzt für einen Divisor D:

$$\mathcal{L}(D) = \{f \in k(C)^* : D + (f) \geq 0\} \cup \{0\}.$$

Ist $D = \sum_{P \in C} n_P P$, so gilt also:

$$f \in \mathcal{L}(D) \iff v_P(f) \geq -n_P.$$

Aus den Eigenschaften für die Bewertung v_P folgt damit sofort, daß $\mathcal{L}(D)$ ein k-Vektorraum ist. Diese Vektorraume spielen im weiteren eine zentrale Rolle. (Man findet auch die Bezeichnung $H^0(C, D)$ oder $H^0(C, \mathcal{O}_C(D))$.)

Ist $f \in \mathcal{L}(D), f \neq 0$, so ist also $D + (f) \geq 0$. Also ist

$$0 \leq deg(D + (f)) = deg(D) + deg((f)) = deg(D).$$

Also:

FOLGERUNG. *Für $deg(D) < 0$ ist $\mathcal{L}(D) = \{0\}$.*

Wir betrachten jetzt den Fall $deg(D) = 0$. Ist $f \in \mathcal{L}(D), f \neq 0$, so ist $D + (f) \geq 0$. Aus Gradgründen ist aber jetzt $D + (f) = 0$, d.h. $D = (\frac{1}{f})$, d.h. D ist Hauptdivisor, also $D \sim 0$. Wir wollen jetzt noch $\mathcal{L}((g))$ berechnen für eine Funktion g. Es ist

$$f \in \mathcal{L}((g)) \iff (f) + (g) \geq 0 \iff (f) + (g) = 0 \iff (fg) = 0 \iff fg \in k.$$

Also ist $\mathcal{L}((g)) = k\frac{1}{g}$.

FOLGERUNG. *Ist $deg(D) = 0$ und $D \not\sim 0$, so ist $\mathcal{L}(D) = 0$. Ist $D \sim 0$, d.h. $D = (g)$, so ist $\mathcal{L}(D) = k\frac{1}{g}$.*

Bevor wir einige weitere allgemeine Eigenschaften herleiten, wollen wir für $\mathbf{P}^1$ die Vektorräume $\mathcal{L}(D)$ betrachten.

Jede rationale Funktion $f \in k(t)$, $f \neq 0$ hat eine eindeutige Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned} f \quad = \quad & (\frac{b_{11}}{t-a_1} + \frac{b_{12}}{(t-a_1)^2} + \cdots + \frac{b_{1,n_1}}{(t-a_1)^{n_1}}) + \ldots \\ & +(\frac{b_{r1}}{t-a_r} + \frac{b_{r2}}{(t-a_r)^2} + \cdots + \frac{b_{r,n_r}}{(t-a_r)^{n_r}}) \\ & +c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_m t^m. \end{aligned}$$

- Es ist $v_{a_i}(f) \geq -n_i$ mit Gleichheit, falls $b_{i,n_i} \neq 0$.
- Es ist $v_\infty(f) \geq -m$ mit Gleichheit, falls $c_m \neq 0$.
- Für alle anderen Punkte a gilt: $v_a(f) \geq 0$.
- Also gilt
$$f \in \mathcal{L}(n_1 \cdot a_1 + \cdots + n_r \cdot a_r + m \cdot \infty).$$
Alle Elemente diese Vektorraums haben auch diese Form. Also gilt:
$$\dim \mathcal{L}(D) = n_1 + \cdots + n_r + (m+1) = deg(D) + 1.$$

Ergebnis: Ist $D \geq 0$, so können wir mit Partialbruchzerlegung alle Funktionen aus $\mathcal{L}(D)$ anschreiben. Außerdem gilt $\dim \mathcal{L}(D) = deg(D) + 1$.

Lemma. 1. *$D_1 \leq D_2$ impliziert $\mathcal{L}(D_1) \subseteq \mathcal{L}(D_2)$.*
2. *Ist D ein Divisor und P ein Punkt auf C, so gibt es zwei Möglichkeiten:*
   (a) *$\mathcal{L}(D) = \mathcal{L}(D+P)$.*
   (b) *Ist $\mathcal{L}(D) \neq \mathcal{L}(D+P)$ und $f \in \mathcal{L}(D+P) \setminus \mathcal{L}(D)$, so ist*
$$\mathcal{L}(D+P) = \mathcal{L}(D) \oplus kf.$$

Beweis: Der erste Teil des Lemmas folgt sofort aus der Definition. Wir wollen jetzt $\mathcal{L}(D)$ und $\mathcal{L}(D+P)$ vergleichen. Wir brauchen nur den Fall $\mathcal{L}(D) \neq \mathcal{L}(D+P)$ zu betrachten. Sei $f \in \mathcal{L}(D+P) \setminus \mathcal{L}(D)$ und $D = nP + \ldots$. Dann ist $v_P(f) = -(n+1)$. Sei t uniformisierend in P. Es genügt zu zeigen:
$$\mathcal{L}(D+P) \subseteq \mathcal{L}(D) + kf.$$
Sei $g \in \mathcal{L}(D+P)$. Dann ist $v_P(g) \geq -(n+1)$. Also ist $c = (t^{n+1}g)(P) \in k$. Sei $c_0 = (t^{n+1}f)(P)$. Betrachte $h = g - \frac{c}{c_0}f$. Es ist $(t^{n+1}h)(P) = 0$, also $v_P(h) \geq -n$, d.h. $h \in \mathcal{L}(D)$. Damit folgt die Behauptung. ■

Satz. *Sei D ein Divisor auf C. Der Vektorraum $\mathcal{L}(D)$ ist endlich dimensional. Für $deg(D) \geq 0$ gilt: $\dim \mathcal{L}(D) \leq deg(D) + 1$. Man schreibt auch $\ell(D) = \dim \mathcal{L}(D)$.*

Beweis: Wir beweisen den Satz durch Induktion nach $deg(D)$. Wir wissen bereits: Ist $D \sim 0$, so ist $\ell(D) = 1$, ist $deg(D) = 0$ und $D \not\sim 0$, so ist $\ell(D) = 0$. Also ist der Satz richtig für $deg(D) = 0$. Sei jetzt $deg(D) > 0$. Wähle einen Punkt $P \in C$. Es ist $deg(D-P) < deg(D)$, also gilt nach Induktionsvoraussetzung:
$$\ell(D-P) \leq deg(D).$$
Nach dem Lemma folgt aber dann sofort $\ell(D) \leq deg(D) + 1$. ■

Lemma. *Gilt für zwei Divisoren $D_1 \sim D_2$, so folgt $\ell(D_1) = \ell(D_2)$.*

Beweis: Sei $D_2 = D_1 + (g)$. Dann gilt:
$$f \in \mathcal{L}(D_2) \iff 0 \leq D_2 + (f) = D_1 + (f) + (g) = D_1 + (fg) \iff fg \in \mathcal{L}(D_1).$$
D.h.
$$g \cdot \mathcal{L}(D_2) = \mathcal{L}(D_1),$$
also sind die Vektorräume isomorph. ■

Satz. *Für $C = \mathbf{P}^1$ und $deg(D) \geq 0$ gilt $\ell(D) = deg(D) + 1$.*

Beweis: Wir haben die Aussage bereits für $D \geq 0$ bewiesen. Sei nun D gegeben mit $deg(D) \geq 0$. Sei $d = deg(D)$ und $P \in C$. Dann hat $D - dP$ Grad 0, ist also Hauptdivisor: $D - dP = (f)$. Daher:
$$\ell(D) = \ell(dP + (f)) = \ell(dP) = d + 1. ■$$

Für $\mathbf{P}^1$ ist also die Abschätzung des obigen Satzes scharf, d.h. es gilt sogar Gleichheit. Wir wollen kurz zeigen, daß dies sonst nicht gilt.

Betrachtung: Sei C eine Kurve und P ein Punkt auf C. Wir wissen dann, daß $1 \leq \ell(P) \leq 2$ gilt. ($k \subseteq \mathcal{L}(P)$) Angenommen, es gilt $k \neq \mathcal{L}(P)$. Dann gibt es eine Funktion $f \in \mathcal{L}(P) \setminus k$. Diese Funktion f hat also in P einen Pol erster Ordnung und ist sonst regulär. Wir betrachten den induzierten Morphismus $f : C \to \mathbf{P}^1$.

Behauptung: f ist injektiv.
Beweis: Angenommen $f(P_1) = f(P_2) = c \in k$. Die Funktion $f - c$ hat wieder genau einen Pol erster Ordnung in P, kann also höchstens eine Nullstelle besitzen, d.h. $P_1 = P_2$.
Aus allgemeinen Sätzen folgt dann, daß $C \simeq \mathbf{P}^1$.

FOLGERUNG. *Ist $C \not\simeq \mathbf{P}^1$, so gilt für $deg(D) \geq 1$ die Abschätzung $\ell(D) \leq deg(D)$.*

Beweis: Sei $deg(D) > 0$. Ist $\mathcal{L}(D) = 0$, so ist nichts zu zeigen. Sei also $\mathcal{L}(D) \neq 0$. Wähle $f \in \mathcal{L}(D)$. Dann ist $D' = D + (f) \geq 0$, also $D' = P_1 + \cdots + P_d$, wobei die P_i's nicht verschieden sein müssen. Nach unserer Vorbetrachtung ist aber $\ell(P_1) = 1$ und aus dem Lemma folgt, daß Hinzunahme eines P_i die Dimension höchstens um 1 erhöht, also $\ell(P_1 + \cdots + P_d) \leq d$. Damit erhält man:

$$\ell(D) = \ell(D') \leq d = deg(D).\blacksquare$$

Beispiel: Betrachte die Kurve C, die im Affinen gegeben ist durch die Gleichung $y^2 = x^3 - x$. Im Unendlichen gibt es nur den einen Punkt $\infty = (0 : 0 : 1)$. Wir wollen versuchen, die Vektorräume $\mathcal{L}(n\infty)$ zu bestimmen ($n \in \mathbf{N}$).

1. Ist $f \in \mathcal{L}(n\infty)$, so ist f in allen endlichen Punkten der Kurve C definiert, d.h. f ist eine reguläre Funktion der affinen Kurve $y^2 = x^3 - x$. Im letzten Semester haben wir gesehen, daß sich dann f als Polynom in x und y schreiben läßt. Mit der Relation $y^2 = x^3 - x$ kann man dann höhere Potenzen von y eliminieren und man kann schreiben $f = p(x) + q(x)y$, wo $p(x)$ und $q(x)$ Polynome in x sind.
2. x hat in ∞ einen Pol 2-ter Ordnung, y in ∞ einen Pol 3-ter Ordnung. Hat $p(x)$ Grad α, so ist $v_\infty(p(x)) = -2\alpha$, hat $q(x)$ Grad β, so ist $v_\infty(q(x)y) = -2\beta - 3$. Sind also $p(x), q(x) \neq 0$, so gilt $v_\infty(p(x) + q(x)y) = \min(-2\alpha, -2\beta - 3)$.
3. Wir können jetzt die Vektorräume $\mathcal{L}(n\infty)$ direkt angeben:

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{L}(0 \cdot \infty) & = & k \\
\mathcal{L}(1 \cdot \infty) & = & k \\
\mathcal{L}(2 \cdot \infty) & = & k \oplus kx \\
\mathcal{L}(3 \cdot \infty) & = & k \oplus kx \oplus ky \\
\mathcal{L}(4 \cdot \infty) & = & k \oplus kx \oplus ky \oplus kx^2 \\
\mathcal{L}(5 \cdot \infty) & = & k \oplus kx \oplus ky \oplus kx^2 \oplus kxy \\
\mathcal{L}(6 \cdot \infty) & = & k \oplus kx \oplus ky \oplus kx^2 \oplus kxy \oplus kx^3
\end{array}$$

4. Eine k-Basis von $\mathcal{L}(n\infty)$ ist also

$$1, x, x^2, \ldots, x^{[\frac{n}{2}]}, y, xy, x^2y, \ldots, x^{[\frac{n-3}{2}]}y.$$

Wir haben insbesondere $\ell(n \cdot \infty) = n$.

Anhang: Potenzreihen und Laurentreihen

LEMMA. *Sei t uniformisierend in einem Punkt P einer Kurve C. Sei $n \geq 0$ vorgegeben. Zu $f \in k(C), f \neq 0$ und $m = v_P(f)$ gibt es dann $c_m, c_{m+1}, \ldots, c_n \in k$ mit*

$$f \equiv \sum_{i=m}^{n} c_i t^i \bmod t^{n+1},$$

d.h.

$$f - \sum_{i=m}^{n} c_i t^i \in t^{n+1}\mathcal{O}_{C,P}.$$

Die Koeffizienten c_i sind eindeutig bestimmt.

Beweis:
Existenz: Sei zunächst $f \in \mathcal{O}_{C,P}$. Definiere $c_0 = f(P)$. Dann läßt sich zerlegen

$$f = c_0 + f_1 t,$$

wo wieder $f_1 \in \mathcal{O}_{C,P}$ ist. Dies läßt sich iterieren: definiere $c_i = f_i(P)$ und schreibe $f_i = c_i + f_{i+1}t$ mit $f_{i+1} \in \mathcal{O}_{C,P}$. So erhält man

$$f = c_0 + f_1 t = c_0 + c_1 t + f_2 t^2 = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + f_3 t^3 = \cdots = c_0 + c_1 t + \cdots + c_n t^n + f_{n+1} t^{n+1}.$$

Damit hat man die gewünschte Zerlegung erhalten.
Ist $v_P(f) = -s < 0$, so entwickle man $t^s f \in \mathcal{O}_{C,P}$ modulo t^{n+1+s} und dividiere dann anschließend durch t^s.
Eindeutigkeit: Es genügt die Eindeutigkeit für $f \in \mathcal{O}_{C,P}$ zu zeigen. Angenommen

$$f - \sum_{0 \le i \le n} c_i t^i, f - \sum_{0 \le i \le n} d_i t^i \in t^{n+1}\mathcal{O}_{C,P},$$

dann ist auch

$$\sum_{0 \le i \le n} (c_i - d_i) t^i \in t^{n+1},$$

was nur sein kann, wenn alle $c_i = d_i$ sind. ■

Erinnerung an formale Potenzreihen: Man definiert den Ring der formalen Potenzreihen durch

$$k[[x]] = \{\sum_{i \ge 0} a_i x^i : a_i \in k\}.$$

Es ist klar, wenn man addiert, multipliziert etc. Eine Potenzreihe $a_0 + a_1 x + \ldots$ ist genau dann invertierbar, wenn $a_0 \neq 0$. Definiert man für $f = a_m x^m + a_{m+1} x^{m+1} + \ldots$ die Funktion $v(f) = m$, so sieht man, daß v eine Bewertung ist. $k[[x]]$ ist ein diskreter Bewertungsring.
Der Quotientenkörper $k((x))$ identifiziert sich mit den Laurentreihen

$$\{\sum_{i \ge m} a_i x^i, m \in \mathbf{Z}, a_i \in k\}.$$

Durch das vorige Lemma erhält man dann eine Körpereinbettung

$$k(C) \hookrightarrow k((t)),$$

die die Bewertung v_P in die Potenzreihenbewertung überführt.

Bemerkung: Der Ring der formalen Potenzreihen $k[[t]]$ ist die Komplettierung des lokalen Rings $\mathcal{O}_{C,P}$, die als projektiver Limes $\hat{\mathcal{O}}_{C,P} = \lim_{\leftarrow} \mathcal{O}_{C,P}/t^n$ definiert ist.

Beispiel: Wir betrachten wieder die Kurve C mit der affinen Gleichung $y^2 = x^3 - x$. In $\infty = (0 : 0 : 1)$ war die Funktion v uniformisierend. Die Gleichung lautete $u = v^3 - u^2 v$. Dazu $x = \frac{v}{u}$ und $y = \frac{1}{u}$. Es war $v_\infty(u) = 3$.

- Man bestimme die Taylorreihenentwicklung von u.
  - Es ist
  $$u = v^3 - u^2 v = v^3 - (v^3 - u^2 v)^2 v = \ldots$$
  - Es gilt auch
  $$u = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4v^4}}{2v}$$
  und man erhält dann
  $$u = v^3 - v^7 + 2v^{11} - 5v^{15} + 14v^{19} - 42v^{23} + 132v^{27} + \ldots$$
- Damit erhält man dann
$$x = \frac{v}{u} = \frac{1}{v^2} + v^2 - v^6 + 2v^{10} - 5v^{14} + 14v^{18} - 42v^{22} + \ldots$$
$$y = \frac{1}{u} = \frac{1}{v^3} + v - v^5 + 2v^9 - 5v^{13} + 14v^{17} - 42v^{21} + \ldots$$

KAPITEL 3

Differentialformen

Sei C eine irreduzible nichtsinguläre projektive Kurve.

Der Raum Ω_C der (meromorphen) Differtialformen auf C ist der $k(C)$-Vektorraum, der von Symbolen der Form df erzeugt wird, $f \in k(C)$, mit den Relationen

1. $d(f+g) = df + dg$ für $f, g \in k(C)$,
2. $d(fg) = fdg + gdf$ für $f, g \in k(C)$,
3. $dc = 0$ für $c \in k$.

Eine Differtialform ω läßt sich also schreiben

$$\omega = f_1 dg_1 + \cdots + f_m dg_m$$

mit $f_i, g_i \in k(C)$.

Beispiel: Für $C = \mathbf{P}^1$ ist $k(C) = k(t)$.
Es ist

$$dt^2 = tdt + tdt = 2tdt, \quad dt^3 = tdt^2 + t^2 dt = 3t^2 dt, \quad dt^4 = 4t^3 dt, \ldots,$$

woraus man sofort für Polynome

$$d(c_n t^n + \cdots + c_1 t + c_0) = nc_n t^{n-1} + \cdots + c_1$$

ableitet, d.h. für ein Polynom $f(t)$ gilt $df(t) = f'(t)dt$, wo $f'(t)$ die formale Ableitung von $f(t)$ ist.
Ist $\frac{f(t)}{g(t)}$ ein Quotient von Polynomen, so gilt

$$f'(t)dt = df(t) = d(\frac{f(t)}{g(t)} g(t)) = \frac{f(t)}{g(t)} g'(t)dt + g(t) d(\frac{(f(t)}{g(t)}),$$

also

$$d(\frac{(f(t)}{g(t)}) = \left(\frac{f(t)}{g(t)}\right) dt.$$

Zusammengefaßt: Ist $f \in k(t)$, so gilt $df = f'dt$, also wird Ω_C schon von dt erzeugt, d.h.

$$\Omega_{\mathbf{P}^1} = k(t)dt.$$

Beispiel: Sei C die Kurve mit der affinen Gleichung $y^2 = x^3 - x$. Der Funktionenkörper ist dann $k(x, y)$ mit der Relation $y^2 = x^3 - x$. Die wichtigste Relation kommt aus der Kurvengleichung $y^2 = x^3 - x$:

$$2ydy = dy^2 = d(x^3 - x) = 3x^2 dx - dx = (3x^2 - 1)dx,$$

also

$$dy = \frac{3x^2 - 1}{2y} dx.$$

Behauptung: Jede Funktion $f \in k(C)$ hat eine Darstellung

$$f = g(x) + h(x)y,$$

wo g und h rationale Funktionen in x sind.
Beweis: Mit $y^2 = x^3 - x$ lassen sich höhere Potenzen von y eliminieren. Man kann also ansetzen und weiterrechnen

$$f = \frac{\alpha(x) + \beta(x)y}{\gamma(x) + \delta(x)y} = \frac{(\alpha(x) + \beta(x)y)(\gamma(x) - \delta(x)y)}{(\gamma(x) + \delta(x)y)(\gamma(x) - \delta(x)y)}$$

woraus sofort die Behauptung folgt.
Damit folgt

$$df = d(g(x) + h(x)y) = g'(x)dx + h'(x)ydx + h(x)\frac{3x^2-1}{2y}dx,$$

also insbesondere

$$\Omega_C = k(C)dx.$$

Was wir in den Beispielen gesehen haben, wollen wir nun verallgemeinern. Der Einfachkeit halber setzen wir voraus, daß der Grundkörper Charakteristik 0 hat. Vieles gilt auch in Charakteristik p, die Argumente müssen aber etwas modifiziert werden.

Überlegung:

- Seien $f, g \in k(C)$ mit $f, g \notin k$. Da $k(C)$ Transzendenzgrad 1 über k hat, sind f, g algebraisch abhängig. Sei $F(f,g) = 0$ die kleinste Gleichung zwischen f und g mit $F(x,y) \in k[x,y]$ und $F \neq 0$.
- Aus $F(f,g) = 0$ folgt sofort
$$\frac{\partial F}{\partial x}(f,g)df + \frac{\partial F}{\partial y}(f,g)dg = 0.$$
- *Behauptung:* $\frac{\partial F}{\partial x}(f,g) \neq 0$.
Beweis: Angenommen, $\frac{\partial F}{\partial x}(f,g) = 0$. Da $F(x,y)$ minimal gewählt war, muß also $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ gelten als Polynom. Das bedeutet aber, daß $F(x,y)$ nur von y abhängt. Also ist g algebraisch über k, was nicht sein sollte. D.h. wir haben einen Widerspruch, und damit folgt die Behauptung.
- Genauso gilt jetzt $\frac{\partial F}{\partial y}(f,g) \neq 0$.
- Damit erhält man
$$df = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(f,g)}{\frac{\partial F}{\partial x}(f,g)}dg \text{ und } dg = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(f,g)}{\frac{\partial F}{\partial y}(f,g)}df.$$

Damit haben wir (in etwa) bewiesen:

Satz. *Ω_C ist ein 1-dimensionaler $k(C)$-Vektorraum. Für $f \in k(C), f \notin k$ ist $df \neq 0$.*

Bemerkungen:

1. Außer den Funktionenkörper mit Grundkörper k haben wir bei der Definition von Ω_C nichts benutzt. So kann man statt $k(C)$ in der Definition jeden Körper $L \supseteq k$ nehmen.
2. In Charakteristik p ist $d(f^p) = 0$, daher sind einige Aussagen etwas anders zu formulieren.
3. Seien $f, g \in k(C)$ und $g \notin k$. Da Ω_C ein 1-dimensionaler $k(C)$-Vektorraum ist, gilt $\Omega_C = k(C)dg$, also gibt es eine Funktion $h \in k(C)$ mit $df = hdg$. Wir schreiben auch $h = \frac{df}{dg}$.

Sei $L \supseteq k$ ein Oberkörper von k. Unter einer Derivation oder Ableitungsfunktion D von L über k ist eine Abbildung $D : L \to L$ mit den Eigenschaften

1. $D(f+g) = D(f) + D(g)$ für $f, g \in L$,
2. $D(fg) = gDf + fDg$ für $f, g \in L$,
3. $Dc = 0$ für $c \in k$.

Beispiele:

1. Ist $k(C)$ Funktionenkörper einer Kurve und $z \in k(C) \setminus k$, so ist
$$\frac{d}{dz} : k(C) \to k(C), \quad f \mapsto \frac{df}{dz}$$
eine Derivation von $k(C)$ über k.
2. Für die formalen Laurentreihen über k ist
$$D(\sum a_n x^n) = \sum n a_n x^{n-1}$$
eine Derivation über k.

Wir wollen jetzt Differentiale lokal anschauen. Sei $P \in C$ und t uniformisierend in P. Ist $\omega \in \Omega$, so gibt es eine Funktion g mit $\omega = gdt$.

LEMMA. *Sei t uniformisierend in P. Ist $f \in k(C)$ mit der Laurentreihenentwicklung*

$$f = \sum_{n \geq m} a_n t^n,$$

so gilt

$$\frac{df}{dt} = \sum_{n \geq m} n a_n t^{n-1}.$$

Beweis: Sei D irgendeine Derivation eines Oberkörpers von $k(C)$ über k mit $Dt = 1$. Nun sind f und t algebraisch abhängig über k, d.h. es gibt ein Polynom $F(x,y)$ mit $F(f,t) = 0$. Das Polynom $F(x,y)$ sei minimal gewählt. Wie in der Vorbemerkung folgt

$$Df = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(f,t)}{\frac{\partial F}{\partial x}(f,t)},$$

also hängt Df nicht von der speziell gewählten Derivation ab. Es kommt also der gleiche Wert heraus, ob wir die Derivation $\frac{d}{dt}$ auf $k(C)$ oder die Derivation $'$ auf $k((t))$ nehmen. Daraus folgt die Behauptung. ■

FOLGERUNG. *Ist t uniformisierend in P, so folgt aus $f \in \mathcal{O}_{C,P}$ auch $\frac{df}{dt} \in \mathcal{O}_{C,P}$. Ist insbesondere s eine anderer uniformisierende in P, so ist $\frac{ds}{dt}$ eine Einheit in $\mathcal{O}_{C,P}$.*

Beweis: Die erste Bemerkung folgt sofort aus der Laurentreihenentwicklung, die zweite aus $\frac{ds}{dt} = 1/\frac{dt}{ds}$. ■

Ist $\omega \in \Omega_C$, $\omega \neq 0$ und t uniformisierend in P, so gibt es eine Funktion g mit $\omega = gdt$. Man definiert:

$$v_P(\omega) = v_P(g).$$

Die Definition hängt nicht von der Uniformisierenden t ab, denn ist s eine andere Uniformisierende in P, so gilt

$$\omega = gdt = g\frac{dt}{ds}ds$$

und nach unserer vorangegangenen Folgerung ist $v_P(\frac{dt}{ds}) = 0$.

Ist ω ein Differential $\neq 0$, so definieren wir den Divisor von ω durch

$$(\omega) = \sum_{P \in C} v_P(\omega)P.$$

Sind ω_1 und ω_2 von 0 verschiedene Differentiale, so gibt es eine Funktion f mit $\omega_2 = f\omega_1$. Daher gilt: $(\omega_2) = (f) + (\omega_1)$. Zwei Differentiale sind also jeweils linear äquivalent. Die Äquivalenzklasse in $Pic(C)$ nennt man die kanonische Klasse K_C von C. Ein Divisor in der Klasse ist der Divisor eines Differentials und wird kanonischer Divisor genannt.

Beispiel: $C = \mathbf{P}^1$. Wir betrachten die Differentialform dt. Im Endlichen in a ist $t - a$ uniformisierend, also ist wegen $dt = d(t-a)$ hier $v_a(dt) = 0$. Im Unendlichen ist $u = \frac{1}{t}$ uniformisierend, also ist

$$dt = d\frac{1}{u} = -\frac{1}{u^2}du,$$

also $v_\infty(dt) = -2$ und daher

$$(dt) = -2 \cdot \infty.$$

Die kanonische Klasse hat also Grad -2.

Beispiel: Die Kurve C mit der affinen Gleichung $y^2 = x^3 - x$. Wir wollen den Divisor des Differentials (dx) berechnen.

- Im Endlichen: Für $x \neq -1, 0, 1$ ist $x+1$ bzw. x bzw. $x-1$ uniformisierend, in diesen Punkten ist also $v_P(dx) = 0$. In den Punkten $(x,y) = (-1,0), (0,0), (1,0)$ ist y uniformisierend. Aus $dx = \frac{2y}{3x^2-1}dy$ folgt, daß in diesen drei Punkten gilt: $v_P(dx) = 1$.

- Im Unendlichen gab es nur den Punkt $(0:0:1)$. Dort war $v = \frac{x}{y}$ uniformisierend. Wir hatten berechnet
$$x = \frac{1}{v^2} + v^2 - v^6 + 2v^{10} + \dots,$$
also
$$dx = (-\frac{2}{v^3} + 2v - 6v^5 + 20v^9 + \dots)dv,$$
so daß hier gilt $v_\infty(dx) = -3$.

Insgesamt:
$$(dx) = (-1,0) + (0,0) + (1,0) - 3\cdot\infty.$$
Wir bemerken noch, daß auch y den gleichen Divisor hatte: $(y) = (dx)$, woraus folgt $(\frac{1}{y}dx) = 0$. Der Grad von (dx) ist also 0, d.h. $deg(K_C) = 0$.

Ganze Differentiale: Ein Differential heißt ganz oder holomorph, wenn $(\omega) \geq 0$ gilt. Die ganzen Differentiale bilden einen k-Vektorraum
$$W = \{\omega \in \Omega_C : (\omega) \geq 0\}.$$
Sei $\omega_0 \neq 0$ ein fest gewähltes Differential. Da Ω_C ein 1-dimensionaler $k(C)$-Vektorraum ist, hat jedes Differential die Form $f\omega_0$ mit einer Funktion $f \in k(C)$. Es gilt:
$$f\omega_0 \text{ ganz} \iff (f) + (\omega_0) \geq 0 \iff f \in \mathcal{L}((\omega_0)).$$
Also haben wir eine Isomorphie
$$\{\text{ganze Differentiale auf } C\} \simeq \mathcal{L}((\omega_0)).$$
Man denkt sich oft $\mathcal{L}(K_C)$ als k-Vektorraum der ganzen Differentiale auf C.

Adjunktionsformel für ebene Kurven

1. Sei C eine glatte ebene Kurve vom Grad d, gegeben durch die Gleichung $f(x_0, x_1, x_2) = 0$. Wir schreiben $f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$. Nach Koordinatenwechsel können wir annehmen
   - $\{x_0 = f = f_2 = 0\} = \emptyset$,
   - $f(0,0,1) \neq 0$.
2. Wir schreiben $x = \frac{x_1}{x_0}, y = \frac{x_2}{x_0}, u = \frac{x_0}{x_1}, v = \frac{x_2}{x_1}$.
3. Wir betrachten jetzt das Differential
$$\omega = \frac{1}{f_2(1,x,y)}dx.$$
Die Relation $f(1,x,y) = 0$ liefert
$$f_1(1,x,y)dx + f_2(1,x,y)dy = 0,$$
also
$$\omega = \frac{1}{f_2(1,x,y)}dx = -\frac{1}{f_1(1,x,y)}dy.$$
Nun ist $x = \frac{1}{u}$ und $y = \frac{v}{u}$, also gilt auch
$$\omega = \frac{1}{f_2(1,\frac{1}{u},\frac{v}{u})}(-\frac{1}{u^2})du = -\frac{u^{d-3}}{f_2(u,1,v)}du.$$
4. Sei $P = (1:a:b) \in C$. Die Tangente in P hat die affine Gleichung
$$f_1(1,a,b)(x-a) + f_2(1,a,b)(y-b) = 0.$$
Ist $f_1(1,a,b) \neq 0$, so ist $y - b = 0$ nicht die Tangente, also ist $y - b$ uniformisierend. In diesem Fall ist
$$v_P(\omega) = v_P(-\frac{1}{f_1(1,a,b)}dy) = v_P(-\frac{1}{f_1(1,a,b)}d(y-b)) = 0.$$
Ist $f_2(1,a,b) \neq 0$, so ist $x - a = 0$ nicht die Tangente, also ist $x - a$ uniformisierend. In diesem Fall ist
$$v_P(\omega) = v_P(\frac{1}{f_2(1,a,b)}dx) = v_P(\frac{1}{f_2(1,a,b)}d(x-a)) = 0.$$

Da immer eine der beiden Werte $f_1(1,a,b)$ oder $f_2(1,a,b)$ von 0 verschieden ist, folgt $v_P(\omega) = 0$ für alle endlichen Punkte P.

5. Wir wollen jetzt die Punkte auf der Geraden $x_0 = 0$ betrachten. Wegen $f(0,0,1) \neq 0$ haben sie die Form $(0,1,v_i)$. Das Polynom $f(0,1,v)$ hat Grad d. Es ist separabel, da nach Annahme $f(0,1,v)$ und $f_2(0,1,v)$ keine gemeinsame Nullstelle haben, also hat $f(0,1,v)$ genau d Nullstellen, d.h. d Punkte auf $\{x_0 = 0\}$: $(0:1:v_1),\ldots,(0:1:v_d)$. Affine Koordinaten sind also u und v. Die Tangente in $(0:1:v_i)$ ist $f_0(0,1,v_i)u + f_2(0,1,v_i)(v-v_i) = 0$. Wegen $f_2(0,1,v_i) \neq 0$ ist $u = 0$ nicht Tangente, also ist u uniformisierend in allen Punkten $(0:1:v_i)$. Man sieht daraus sofort
$$v_{(0:1:v_i)}(\omega) = d-3.$$
Also gilt
$$(\omega) = \sum_{i=1}^{d}(d-3)(0:1:v_i).$$
Nun hat aber der Hyperebenenschnitt (x_0) den Divisor
$$(x_0) = \sum_{i=1}^{d}(0:1:v_i),$$
also folgt
$$\omega = (d-3)(x_0).$$
Insbesondere ist $deg(\omega) = d(d-3)$.

Wir formulieren das Ergebnis als Satz:

SATZ. *Sei $C \subseteq \mathbf{P}^2$ eine nichtsinguläre ebene Kurve vom Grad d. Ist H die Klasse eines Hyperebenenschnitts, so gilt für die kanonische Klasse*
$$K_C = (d-3)H$$
und insbesondere
$$deg K_C = d(d-3).$$

Problem: Sei $\omega \in \Omega_C$. Wann gibt es eine Funktion f mit $df = \omega$? D.h. wann besitzt das Differential ω eine Stammfunktion?

KAPITEL 4

Der Satz von Riemann-Roch I

Wir werden jetzt den zentralen Satz für die Theorie der Kurven kennenlernen, den Satz von Riemann-Roch.

SATZ. *Sei C eine nichtsinguläre irreduzible projektive Kurve. Dann gibt es eine Zahl g, so daß für alle Divisoren D gilt:*

$$\ell(D) = deg(D) + 1 - g + \ell(K_C - D).$$

g wird das Geschlecht der Kurve genannt.

Der Beweis wird zunächst verschoben. Stattdessen wollen wir uns von der Wichtigkeit dieses Satzes überzeugen. Statt K_C schreiben wir oft kurz K.

Bemerkung: Der Satz von Riemann-Roch gestattet nicht direkt die Berechnung von $\ell(D)$, aber er verknüpft es in einfacher Weise mit einer anderen Dimension $\ell(K - D)$.

Wir setzen $D = 0$ in RR ein und erhalten

$$1 = \ell(0) = 0 + 1 - g + \ell(K),$$

also

$$\ell(K) = g.$$

Wir setzen jetzt $D = K$ ein und erhalten

$$g = \ell(K) = deg(K) + 1 - g + \ell(0) = deg(K) + 2 - g,$$

also

$$\ell(K) = 2g - 2.$$

Damit haben wir gezeigt:

FOLGERUNG. *Es ist $\ell(K) = g$ und $deg(K) = 2g - 2$.*

Beispiele:

1. $C = \mathbf{P}^1$. Wir haben schon gesehen $K \sim -2 \cdot \infty$, d.h. $deg(K) = -2$, also ist hier $g = 0$.
2. Ist C eine glatte ebene Kurve vom Grad d, so ist $K_C \sim (d-3)\cdot$Hyperebenenschnitt, also $deg(K_C) = d(d-3)$. Daher hat C das Geschlecht

$$g = \frac{d(d-3)+2}{2} = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

d	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g	0	0	1	3	6	10	15	21	28	36

FOLGERUNG. *Für $deg(D) > 2g - 2$ gilt*

$$\ell(D) = deg(D) + 1 - g.$$

Beweis: Für $deg(D) > 2g - 2$ ist $deg(K - D) < 0$, also $\ell(K - D) = 0$. Die behauptete Gleichung ist dann einfach der Satz von Riemann-Roch. ■

Bemerkung: Für $C = \mathbf{P}^1$ haben wir obiges Resultat bereits explizit bewiesen.

Beispiel: Sei C eine Kurve vom Geschlecht g und $P \in C$ ein Punkt. Ist dann $n > 2g - 2$, so ist

$$\ell(nP) = n + 1 - g,$$

für genügend großes n ist also $\ell(nP) > 1$, d.h. es gibt nichtkonstante Funktionen f, die nur in P einen Pol haben, sonst regulär sind.

Wir wollen jetzt für $g = 0$ und $g = 1$ den Satz von Riemann-Roch anwenden.

SATZ. *Jede Kurve vom Geschlecht 0 ist isomorph zum* $\mathbf{P}^1$.

Beweis: Sei $P \in C$. Dann ist $\ell(P) = 2$, also gibt es eine rationale Funktion $f \in k(C)$ mit $\mathcal{L}(P) = k \oplus kf$, wo f genau einen Pol erster Ordnung in P hat und sonst regulär ist. Wir haben früher bereits gesehen, daß dann $f : C \to \mathbf{P}^1$ ein Isomorphismus ist. ■

Beispiel: Ein glatter Kegelschnitt C hat Geschlecht 0, ist also isomorph zu $\mathbf{P}^1$. Wie? Wähle zwei verschiedene Geraden $\ell_1 = 0$ und $\ell_2 = 0$, die durch einen gemeinsamen Punkt auf C gehen mit Divisoren

$$(\ell_1) = P_0 + P_1, \quad (\ell_2) = P_0 + P_2.$$

Die Funktion $f = \frac{\ell_1}{\ell_2}$ hat dann den Divisor $P_1 - P_2$, also liefert $f : C \to \mathbf{P}^1$ einen Isomorphismus.

Wir wollen uns jetzt Kurven vom Geschlecht 1 zuwenden. Ist C eine Kurve vom Geschlecht 1, so ist $deg(K_C) = 0$ und $\ell(K_C) = 1$, also $K_C \sim$). Der Satz von Riemann-Roch lautet

$$\ell(D) = deg(D) \text{ für } deg(D) > 0.$$

Beispiel: Jede glatte ebene Kubik hat Geschlecht 1.

Kurven vom Geschlecht 1 besitzen eine sehr interessante Eigenschaft, die im folgenden Satz zum Ausdruck kommt:

SATZ. *Sei C eine Kurve vom Geschlecht 1 und P_0 ein Punkt auf C. Dann ist die Abbildung*

$$\psi : C \to Pic_0(C), \quad P \mapsto \textit{Klasse von } (P - P_0)$$

bijektiv.

Beweis:
ψ ist injektiv: Sei $\psi(P_1) = \psi(P_2)$, also $P_1 - P_0 \sim P_2 - P_0$. Dann ist $P_1 - P_2 \sim 0$, d.h. es gibt eine Funktion f mit $(f) = P_1 - P_2$. Also ist $f \in \mathcal{L}(P_2)$. Wegen $\ell(P_2) = 1$ ist $\mathcal{L}(P_2) = k$, also f konstant und damit $P_1 = P_2$.
ψ ist surjektiv: Sei D ein Divisor vom Grad 0. Dann ist $deg(D + P_0) = 1$, also nach Riemann-Roch $\ell(D + P_0) = 1$. Es gibt also eine Funktion f mit $D + P_0 + (f) \geq 0$. Da $deg(D + P_0 + (f)) = 1$ ist, ist dieser Divisor ein Punkt: $D + P_0 + (f) = P$, also $D \sim P - P_0$. Dies bedeutet, daß ψ surjektiv ist. ■

Der Satz legt es nun nahe, auf C auch eine Gruppenstruktur einzuführen. Der Punkt P_0 ist fest vorgegeben. Seien $P_1, P_2 \in C$. Dann hat $(P_1 - P_0) + (P_2 - P_0)$ Grad 0, ist also linear äquivalent zu einem Divisor $P - P_0$. Wir schreiben $P = P_1 \oplus P_2$. Anderes ausgedrückt:

$$P_1 \oplus P_2 := \psi^{-1}(\psi(P_1) + \psi(P_2)).$$

Damit wird C zu einer abelschen Gruppe. Wegen $(P - P_0) + (P_0 - P_0) = P - P_0$ ist P_0 das neutrale Element dieser Gruppe.

Geometrische Addition auf nichtsingulären ebenen Kubiken: Sei C eine nichtsinguläre ebene Kubik und $P_0 \in C$. Wie sieht die eben beschriebene Addition geometrisch aus?
Seien $P_1, P_2 \in C$. Wir suchen einen Punkt $P \in C$ mit $P_1 - P_0 + P_2 - P_0 \sim P - P_0$. Dies ist äquivalent mit $P_1 + P_2 \sim P + P_0$.
Sei $\ell_1 = 0$ die Gerade durch P_1 und P_2 bzw. die Tangente an P_1, falls $P_1 = P_2$. Dann ist $(\ell_1) = P_1 + P_2 + Q$ mit einem weiteren Punkt Q.
Sei $\ell_2 = 0$ die Gerade durch Q und P_0 bzw. die Tangente an P_0, falls $P_0 = Q$. Dann ist $(\ell_2) = Q + P_0 + P$ mit einem weiteren Punkt P.
Da alle Hyperebenenschnitte linear äquivalent sind, folgt

$$P_1 + P_2 + Q \sim Q + P_0 + P,$$

was sofort $P = P_1 \oplus P_2$ bedeutet.
Damit haben wir die Addition auf C geometrisch gedeutet.

Beispiel: Sei C affin gegeben durch $y^2 = x^3 + x + 1$. Man sieht sofort den Punkt $P = (0, 1)$. Dann ist $-P = (0, -1)$.

- Was ist $2P = P \oplus P$? Sei $f = x^3 + x + 1 - y^2$. Dann ist $f_x = 3x^2 + 1$ und $f_y = -2y$. Die Tangente in P ist also $x - 2(y - 1) = 0$, d.h. $y = \frac{1}{2}x + 1$. Der dritte Schnittpunkt der Geraden mit der Kurve hat die Koordinaten $x = \frac{1}{4}, y = \frac{9}{8}$, also
$$2P = (\frac{1}{4}, -\frac{9}{8}).$$
- Wir wollen nun noch $3P = P \oplus 2P$ ausrechnen. Die Gerade durch $(0, 1)$ und $(\frac{1}{4}, -\frac{9}{8})$ hat die Gleichung $y = -\frac{17}{2}x + 1$, der dritte Schnittpunkt der Geraden mit der Kurve ist $(72, -611)$. Also
$$3P = (72, 611).$$
- Zeige zur Übung
$$4P = (-\frac{287}{1296}, \frac{40897}{46656}).$$

Bemerkung: Sei C eine nichtsinguläre ebene Kubik und $P_0 \in C$. Wir nehmen P_0 als Nullpunkt der Addition. Ist P_1 ein weiterer Punkt, so läßt sich die Abbildung $P \mapsto P \oplus P_1$ durch rationale Funktionen auf C ausdrücken. Also ist
$$\phi : C \to C, \quad P \mapsto P \oplus P_1$$
ein Isomorphismus. Dieser führt P_0 in P_1 über. Man nennt ϕ auch die Translation um P_1 (bei vorgegebenem P_0).

FOLGERUNG. *Sei C eine glatte ebene Kubik und $P_1, P_2 \in C$. Dann gibt es einen Isomorphismus $\phi : C \to C$ mit $\phi(P_1) = P_2$.*

Bemerkung: Eine elliptische Kurve ist eine Kurve C vom Geschlecht 1 zusammen mit einem Punkt $P_0 \in C$, der Nullpunkt der Addition auf C ist.

Beispiele für Kurven vom Geschlecht 1 sind ebene Kubiken. Nun gilt auch umgekehrt:

SATZ. *Jede Kurve vom Geschlecht 1 ist isomorph zu einer glatten ebenen Kubik der Form $y^2 = x^3 + ax + b$ bzw. $x_0x_2^2 = x_1^3 + ax_0^2x_1 + bx_0^3$.*

Beweis: Wähle einen Punkt P auf C. Dann ist $\ell(nP) = n$ für $n \geq 1$. Dann gibt es Funktionen $x, y \in k(C)$ mit
$$\mathcal{L}(P) = k, \mathcal{L}(2P) = k \oplus kx, \mathcal{L}(3P) = k \oplus kx \oplus ky, \mathcal{L}(4P) = k \oplus kx \oplus ky \oplus kx^2,$$
$$\mathcal{L}(5P) = k \oplus kx \oplus ky \oplus kx^2 \oplus xy, \mathcal{L}(6P) = k \oplus kx \oplus ky \oplus kx^2 \oplus kxy \oplus x^3.$$
Nun ist aber auch $y^2 \in \mathcal{L}(6P) \setminus \mathcal{L}(5P)$, also gibt es Konstanten $c_0, \ldots, c_6$ mit
$$y^2 = c_0 + c_2x + c_3y + c_4x^2 + c_5xy + c_6x^3.$$
Durch die Substitution $y = \frac{1}{c_6}y'$ und $x = \frac{1}{c_6}x'$ kann man o.E. $c_6 = 1$ annehmen. Durch quadratische Ergänzung in y kann man $c_3 = c_5 = 0$ annehmen, durch kubische Ergänzung in x kann man $c_4 = 0$ annehmen. Also gilt o.E.
$$y^2 = x^3 + ax + b.$$
Behauptung: Das Polynom $X^3 + aX + b$ ist separabel.
Beweis: Angenommen wir hätten $y^2 = (x - e_1)^2(x - e_2)$. Dann gilt
$$\left(\frac{y}{x - e_1}\right)^2 = x - e_2,$$
also hätte $\frac{y}{x-e_1}$ genau einen Pol erster Ordnung in P und wäre sonst regulär, also $\ell(P) = 2$, ein Widerspruch!

Da also $X^3 + aX + b$ separabel ist, ist die Diskriminante $4a^3 + 27b^2 \neq 0$.
Wir betrachten jetzt die rationale Abbildung

$$\phi : C \to \mathbf{P}^2, Q \mapsto (1 : x(Q) : y(Q)).$$

Zunächst ist ϕ nicht in P definiert. Aber man sieht sofort, daß $\phi(P) = (0 : 0 : 1)$ ist. Da x nicht konstant ist, ist $\phi(C) \subseteq \mathbf{P}^2$ eine Kurve, die der Gleichung

$$x_0 x_2^2 = x_1^3 + a x_0^2 x_1 + b x_0^3$$

genügt. Wir werden später ein Kriterium angeben, das sofort zeigt, daß ϕ ein Isomorphismus ist. ■

Bemerkung: Für $4a^3 + 27b^2 \neq 0$ liefert $y^2 = x^3 + ax + b$ eine nichtsinguläre ebene Kurve mit dem einzigen Punkt $(0 : 0 : 1)$ im Unendlichen. (Beweis als Übung!)

Wir wollen nun für Kurven der Bauart $y^2 = x^3 + ax + b$ nochmals die geometrische Addition beschreiben. Wir wählen als Nullpunkt den Punkt $O = \infty = (0 : 0 : 1)$.

- Die Geraden durch O haben die Form $x = c$ mit $c \in k$. Die Schnittpunkte von $x = c$ mit C sind $O, (c, d), (c, -d)$.
- Sind P_1 und P_2 zwei endliche Punkte auf C. Sei $Q = (q_1, q_2)$ der dritte Schnittpunkt der Geraden durch P_1 und P_2 mit C. Dann gilt $P_1 \oplus P_2 = (q_1, -q_2)$.

Wir haben gesehen, daß es bis auf Isomorphie nur eine Kurve vom Geschlecht 0 gibt, nämlich $\mathbf{P}^1$. Wieviele Kurven vom Geschlecht 1 gibt es? Da jede Kurve vom Geschlecht 1 isomorph zu einer Kurve

$$E_{a,b} : y^2 = x^3 + ax + b \quad (4a^3 + 27b^2 \neq 0)$$

ist, müssen wir zunächst untersuchen, wann zwei Kurven $E_{a,b}$ und $E_{a',b'}$ isomorph sind.

LEMMA. *Die Kurven $E_{a,b}$ und $E_{a',b'}$ (mit $4a^3 + 27b^2, 4a'^3 + 27b'^2 \neq 0$) sind genau dann isomorph, wenn es eine Zahl $u \neq 0$ gibt mit*

$$a' = u^4 a, \quad b' = u^6 b.$$

Beweis:

- Sei $\phi : E_{a,b} \to E_{a',b'}$ ein Isomorphismus. Indem man eventuell noch eine Translation anfügt, kann man annehmen, daß $\phi(\infty) = \infty$ gilt. Die zurückgezogenen Funktionen $x'' = x'\phi$ und $y'' = y'\phi$ sind dann regulär außerhalb von ∞ und haben in ∞ Pole der Ordnung 2 und 3. Also gibt es wegen
$$\mathcal{L}(2\infty) = k \oplus kx, \quad \mathcal{L}(3\infty) = k \oplus kx \oplus ky$$
Zahlen v, w, r, s, t mit $v, w \neq 0$ und
$$x'' = vx + r, \quad y'' = wy + sx + t.$$
Nun gilt aber $y''^2 = x''^3 + a'x'' + b'$, also
$$(wy + sx + t)^2 = (vx + r)^3 + a'(vx + r) + b'.$$
Da die einzige Relation $y^2 = x^3 + ax + b$ ist, folgt $s = t = 0$ und dann $r = 0$. Es bleibt $w^2 y^2 = v^3 x^3 + a'vx + b'$. Setze nun $u = \frac{w}{v}$. Dann ist $u^2 = v$ und $u^3 = w$, also folgt
$$b = \frac{b'}{u^6}, a = \frac{a'}{u^4},$$
was behauptet war.
- Sei nun umgekehrt $a' = u^4 a, b' = u^6 b$. Machen wir den projektiven Koordinatenwechsel $x' = u^2 x, y' = u^3 y$, so haben sofort eine Isomorphie. ■

Bemerkung: Genauer haben wir gesehen, daß jeder Isomorphismus, der ∞ in ∞ überführt von einer projektiven Transformation $x \mapsto u^2 x, y \mapsto u^3 y$ herkommt.

Die j-Invariante: Man definiert die j-Invariante einer elliptischen Kurve $E_{a,b}$ durch

$$j(E) = 1728 \frac{4a^3}{4a^3 + 27b^2}.$$

Sind $E_{a,b}$ und $E_{a',b'}$ isomorph, d.h. gibt es ein u mit $a' = u^4 a, b' = u^6 b$, so gilt natürlich $j(E_{a,b}) = j(E_{a',b'})$. Doch es gilt auch die Umkehrung:

LEMMA. *Gilt die Gleichung*

$$\frac{a^3}{4a^3 + 27b^2} = \frac{a'^3}{4a'^3 + 27b'^2},$$

so gibt es ein $u \neq 0$ mit $a' = u^4 a, b' = u^6 b$.

Beweis: Durch Ausmultiplizieren folgt sofort $a^3 b'^2 = a'^3 b^2$.

- Ist $a = 0$, so auch $a' = 0$. Wähle dann einfach u mit $u^6 = \frac{b'}{b}$.
- Ist $b = 0$, so ist $a \neq 0$, also auch $a' \neq 0$, also $b' = 0$. Wähle u mit $u^4 = \frac{a'}{a}$.
- Nun können wir $a, a', b, b' \neq 0$ annehmen. Wähle u mit

  $$u^2 = \frac{ab'}{a'b}.$$

  Dann gilt

  $$u^4 = \frac{a'}{a}, \quad u^6 = \frac{b'}{b},$$

  woraus sofort die Behauptung folgt. ■

Damit haben wir gezeigt:

SATZ. *Zwei Kurven vom Geschlecht 1 sind genau dann isomorph, wenn sie die gleiche j-Invariante besitzen.*

Beispiel:

- Die Kurve $y^2 = x^3 - x$ hat j-Invariante 1728.
- Die Kurve $y^2 = x^3 - 1$ hat j-Invariante 0.
- Die Kurve $y^2 = x^3 + 3cx + 2c$ hat Diskriminante $4(3c)^3 + 27(2c)^2 = 108c^2(c+1)$, ist also nichtsingulär für $c \neq 0, 1$. Die j-Invariante ist $1728\frac{c}{c+1}$. Zeige zur Übung, daß als Werte dann alle Zahlen $\neq 0, 1728$ auftreten.

FOLGERUNG. *Es gibt eine bijektive Abbildung*

$$\{\textit{Kurven vom Geschlecht 1 modulo Isomorphie}\} \simeq \{j : j \in k\} \simeq \mathbf{A}^1.$$

Sei C eine Kurve. Dann ist

$$Aut(C) = \{\phi : C \to C \text{ Isomorphismus}\}$$

die Automorphismengruppe von C. Wir werden die Automorphismengruppen für die Kurven vom Geschlecht 1 bestimmen. Die Vorarbeit dazu ist schon getan. Sei

$$Aut_P(C) = \{\phi \in Aut(C) : \phi(P) = P\}.$$

Wir berechnen nun $Aut_\infty(E_{a,b})$. Aus obigem Beweis folgt, daß Automorphismen, die den Punkt ∞ festlassen, die Form

$$x \mapsto u^2 x, \quad y \mapsto u^3 y \quad \text{mit } a = u^4 a, \quad b = u^6 b.$$

- Ist $a, b \neq 0$, so folgt $u^2 = 1$, also $u = \pm 1$. Dies ergibt 2 Automorphismen in $Aut_\infty(E)$.
- Ist $b = 0$, so ist o.E. $E : y^2 = x^3 - x$ und es muß gelten $u^4 = 1$, also $u = \pm 1, \pm i$. Folgende Automorphismen sind sofort zu sehen:

  $$(x \mapsto x, y \mapsto y), (x \mapsto x, y \mapsto -y), (x \mapsto -x, y \mapsto iy), (x \mapsto -x, y \mapsto -iy),$$

  also $Aut_\infty(E) = \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$.
- Ist $a = 0$, so o.E. $E : y^2 = x^3 - 1$, die Automorphismen genügen der Gleichung $u^6 = 1$. Es ergeben sich die folgenden Automorphismen, wenn $\zeta = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ eine primitive dritte Einheitswurzel bezeichnet:

$$(x \mapsto x, y \mapsto y), (x \mapsto x, y \mapsto -y), (x \mapsto \zeta x, y \mapsto y), (x \mapsto \zeta x, y \mapsto -y), (x \mapsto \zeta^2 x, y \mapsto y), (x \mapsto \zeta^2 x, y \mapsto -y),$$

  also $Aut_\infty(E) = \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$.

Satz. *Für die Automorphismengruppe $Aut_P(E)$ einer Kurve vom Geschlecht 1 gilt:*

$$Aut_P(E) = \begin{cases} \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} & \textit{falls} \quad j \neq 0, 1728, \\ \mathbf{Z}/4\mathbf{Z} & \textit{falls} \quad j = 1728, \\ \mathbf{Z}/6\mathbf{Z} & \textit{falls} \quad j = 0. \end{cases}$$

Sei τ_P die Translation um P auf E. Ist $\phi \in Aut(E)$ mit $\phi(\infty) = P$, so gilt $(\tau_{-P}\phi)(\infty) = \infty$, d.h. $\tau_{-P}\phi \in Aut_\infty(E)$. Also $\phi \in \tau P Aut_\infty(E)$. Die gesamte Automorphismengruppe ist dann das semidirekte Produkt der Translationen mit $Aut_\infty(E)$:

$$Aut(E) = \{Translationen\} \times Aut_\infty(E) = E \times Aut_\infty(E).$$

Jetzt haben wir uns lange mit Kurven vom Geschlecht 1 beschäftigt. Die nächste Frage ist: Was sind Kurven vom Geschlecht 2? Wie sehen sie aus? Wieviele gibt es?
Das es keine glatten ebenen Kurven vom Geschlecht 2 gibt, sind wir zunächst etwas ratlos.

KAPITEL 5

Rationale Abbildungen zwischen Kurven

Wir wiederholen zunächst ein paar bekannte Aussagen. Seien C_1 und C_2 nichtsinguläre irreduzible projektive Kurven. Ist $\phi : C_1 \to C_2$ eine rationale Abbildung, so ist ϕ schon ein Morphismus, d.h. in allen Punkten aus C_1 definiert. Da das Bild $\phi(C_1)$ in C_2 abgeschlossen ist, besteht es aus einem Punkt oder ganz C_2, d.h. ϕ ist konstant oder surjektiv.

Sei $\phi : C_1 \to C_2$ nicht konstant. Durch Zurückziehen von Funktionen erhalten wir eine Abbildung

$$\phi^* : k(C_2) \to k(C_1), \quad f \mapsto f\phi.$$

ϕ^* ist injektiv. Man faßt deshalb $k(C_2)$ auch als Unterkörper von $k(C_1)$ auf. $k(C_1)$ ist eine endliche Körpererweiterung von $k(C_2)$. Der Grad der Körpererweiterung heißt der Grad von ϕ.

Ähnlich natürlich ergibt sich auch die Abbildung

$$\phi^* : \Omega_{C_2} \to \Omega_{C_1}, \quad \phi^*(\sum f_i dg_i) = \sum \phi^*(f_i) d(\phi^* g_i).$$

Beispiel: C_1 sei affin gegeben durch $y^2 = x^3 - x$ und $C_2 = \mathbf{P}^1$. Wir definieren $\phi((x,y)) = x$ und verwenden auf $\mathbf{P}^1$ die Koordinate x. Dann ist also $k(C_1) = k(x,y)$ mit $y^2 = x^3 - x$ und $k(C_1) = k(x)$. Also hat ϕ Grad 2. Wir sehen weiter:

$$\#\phi^{-1}(P) = 1 \text{ für } P = (-1,0), (0,0), (1,0), \infty,$$
$$\#\phi^{-1}(P) = 2 \text{ sonst.}$$

Im allgemeinen besteht eine Faser von ϕ also aus 2 Punkten, in 4 Fällen aber nur aus einem Punkt.

Der Verzweigungsindex: Sei $\phi : C_1 \to C_2$ nichtkonstant. Sei $P \in C_1$ und $Q = \phi(P)$. Sei t uniformisierend in $Q \in C_2$. Wir definieren den Verzweigungsindex von ϕ in P durch

$$e_\phi(P) = v_P(\phi^*(t)) = v_P(t).$$

Satz. *Sei $\phi : C_1 \to C_2$ nicht konstant und $Q \in C_2$. Ist $\phi^{-1}(Q) = \{P_1, \ldots, P_r\}$, so gilt*

$$\sum_{i=1}^{r} e_\phi(P_i) = deg(\phi).$$

D.h. richtig gezählt gibt es in jeder Faser gleich viele Punkte.

Dieser Satz ist sehr wichtig. Wir geben hier aber nur eine Skizze des Beweises. Die Einzelheiten finden sich z.B. bei Safarevic.

Beweisskizze:

- Sei
$$\tilde{\mathcal{O}} = \cap_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{C_1, P_i}$$
der Ring der Funktionen, die in jedem Punkt $P_1, \ldots, P_r$ definiert sind.
- Wähle Funktionen t_i auf C_1 mit $v_{P_i}(t_j) = \delta_{ij}$ z.B. durch geeignete Hyperebenen. Dann hat jedes $f \in \tilde{\mathcal{O}}$ die eindeutige Darstellung
$$f = t_1^{\alpha_1} \ldots t_r^{\alpha_r} u,$$
wo $u(P_1), \ldots, u(P_r) \neq 0$ ist. Natürlich ist $v_{P_i}(f) = \alpha_i$. Hieraus folgt schnell, daß $\tilde{\mathcal{O}}$ ein Hauptidealring ist.

- Sei nun t uniformisierend in Q. Dann ist nach Definition
$$t = t_1^{e_\phi(P_1)} \dots t_r^{e_\phi(P_r)} u,$$
also gilt
$$dim\tilde{\mathcal{O}}/t\tilde{\mathcal{O}} = e_\phi(P_1) + \dots + e_\phi(P_r).$$
- Der wichtige Schritt besteht jetzt darin zu zeigen, daß $\tilde{\mathcal{O}}$ ganz über $\mathcal{O}_{C_2,Q}$ ist. Dann folgt schnell
$$\tilde{\mathcal{O}} \simeq \mathcal{O}_{C_2,Q}^n,$$
wo $n = deg(\phi)$ ist. Damit folgt dann sofort
$$dim\tilde{\mathcal{O}}/t\tilde{\mathcal{O}} = n,$$
woraus zusammen mit der ersten Gleichung die Behauptung folgt. ■

Sei $Q \in C_2$ und $\phi^{-1}(Q) = \{P_1, \dots, P_r\}$. Wir sagen ϕ ist verzweigt in P_i, falls $e_\phi(P_i) \geq 2$ ist. Sonst nennen wir ϕ in P_i unverzweigt. Wir sagen ϕ ist verzweigt in Q, falls für ein i gilt $e_\phi(P_i) \geq 2$, sonst unverzweigt. Ist ϕ in $Q \in C_2$ unverzweigt, so gilt also
$$\#\{P_1, \dots, P_r\} = deg(\phi).$$

Beispiel: C mit der Gleichung $y^2 = x^3 - x$ und $\phi : C \to \mathbf{P}^1$ mit $\phi((x,y)) = x$. Dann gibt es 4 Verzweigungspunkte, nämlich $(-1,0), (0,0), (1,0), \infty$.

ϕ^* **für Divisoren:** Wir $Q \in C_2$ definieren wir
$$\phi^*(Q) = \sum_{P, \phi(P)=Q} e_\phi(P)P.$$
Dies induziert sofort eine Abbildung $\phi^* : Div(C_2) \to Div(C_1)$.

Beispiel: Ein $f \in k(C)$ induziert einen Morphismus $f : C \to \mathbf{P}^1$. Dann ist f^*0 der Nullstellendivisor von f und $f^*\infty$ der Polstellendivisor von f. Also gibt es genau so viele Null- wie Polstellen.

FOLGERUNG. *Es gilt $deg(\phi^*(D) = deg(\phi)deg(D)$.*

Wir wollen nun die kanonischen Divisoren auf C_1 und C_2 vergleichen. Sei $\omega \neq 0$ eine Differentialform auf C_2. Dann können wir bilden
$$\phi^*\omega, \quad (\omega), \quad \phi^*(\omega), (\phi^*\omega).$$
- Sei $\phi(P) = Q$, t uniformisierend in Q und s uniformisierend in P. Dann ist $t = us^e$ mit einer Einheit u.
- Es ist $\omega = fdt$. Wir berechnen zunächst $d(\phi^*(t))$. Dies ist
$$d(us^e) = s^e du + eus^{e-1}ds = (s^e \frac{du}{ds} + eus^{e-1})ds,$$
also $v_P(\phi^*\omega) = ev_Q(\omega) + (e-1)$, also
$$(\phi^* fdt) = \sum_P (e(P)v_Q(\omega) + (e(P)-1))P = \phi^*(\omega) + \sum_P (e(P)-1)P.$$

Wir nennen
$$R = \sum_P (e(P)-1)P$$
den Verzweigungsdivisor von ϕ. Wir haben damit bewiesen:

SATZ (Riemann-Hurwitz-Formel). *Es gilt*
$$(\phi^*\omega) = \phi^*(\omega) + R,$$
woraus für die kanonischen Divisoren folgt
$$K_{C_1} \sim \phi^* K_{C_2} + R.$$
Insbesondere
$$2g(C_1) - 2 = deg(\phi)(2g(C_2) - 2) + deg(R).$$

Beispiel: C mit $y^2 = x^3 - x$ und $\phi : C \to \mathbf{P}^1$ mit $\phi((x,y)) = x$. Dann folgt $deg(R) = 4$, was mit vorhergehenden Rechnungen übereinstimmt.

FOLGERUNG. *Der Grad des Verzweigungsdivisors ist gerade.*

FOLGERUNG. *Eine nichtkonstante Abbildung $\phi : C_1 \to C_2$ besitzt nur endlich viele Verzweigungspunkte.*

Beispiel: Sei C gegeben durch $y^2 = x^3 - x$ und $P = (2,1)$. Wir wählen eine Gerade $G \subseteq \mathbf{P}^2$, die nicht durch P geht und betrachten die Projektion $\pi : C \to \mathbf{P}^1$, die wie folgt definiert ist: Ist $Q \in C$, so sei $\pi(Q)$ der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden von P und Q mit G. Offensichtlich hat π den Grad 3, also muß es 6 Verzweigungspunkte geben. Wie sehen diese aus?
Die meisten Geraden durch P haben die Gestalt $y = 1 + t(x-2)$. Wir fassen t als Koordinate auf $\mathbf{P}^1$ auf. Dann erhält man $\pi^{-1}(t)$, indem man die Schnittpunkte berechnet:

$$x^3 - t^2x^2 + (4t^2 - 2t - 1)x + (-4t^2 + 4t - 1) = 0, \quad y = 1 + t(x-2).$$

Die Diskriminante des kubischen Polynoms liefert, wann zwei Urbilder zusammenfallen:

$$24t^6 - 44t^5 - 287t^4 + 740t^3 - 666t^2 + 240t - 23 = 0.$$

Die Nullstellen sind näherungsweise

$$-3.86, \quad 0.15, \quad 0.66, \quad 3.32, \quad 0.79 \pm 0.40i.$$

Dies liefert genau die 6 Geraden durch $(2,1)$, die C nicht in drei verschiedenen Punkten schneiden.

FOLGERUNG. *$\phi : C_1 \to C_2$ nicht konstant. Dann folgt*

$$g(C_1) \geq g(C_2).$$

Weiter: ist $g(C_2) \geq 2$ und $deg(\phi) \geq 2$, so ist $g(C_1) > g(C_2)$.

Beweis: Dies ist trivial für $g(C_2) = 0$. Für $g(C_2) \geq 1$ gilt:

$$2g(C_1) - 2 = deg(\phi)(2g(C_2) - 2) + deg(R) \geq 2g(C_2) - 2,$$

woraus die Behauptung folgt. ■

Wir haben schon gesehen, daß eine glatte ebene Kurve nicht Geschlecht 2 haben kann. Wir müssen deshalb nach anderen Beschreibungsmöglichkeiten suchen. Hier geben wir kurz eine kleine Zusammenstellung von Beschreibungsmöglichkeiten für Kurven, die wir später benötigen.

- Sei C eine irrduzible projektive Kurve. Dann gibt es eine nichtsinguläre irreduzible projektive Kurve $\tilde{C}$ und einen Morphismus $\phi : \tilde{C} \to C$, der außerhalb der Singularitäten von C ein Isomorphismus ist. $\tilde{C}$ gewinnt man z.B. durch Aufblasen der Singularitäten von C.
- Ist C_0 gegeben durch $f(x,y) = 0$, so gehört dazu der projektive Abschluß C und dazu eine nichtsinguläre Kurve $\tilde{C}$. Die Funktionenkörper sind die gleichen, nämlich $k(x,y)$ mit $f(x,y) = 0$.
- Sei F ein über k endlich erzeugter Körper vom Transzendenzgrad 1 über k. Dann hat F die Form $k(x,y)$ mit $f(x,y) = 0$. Der Körper F ist also Funktionenkörper einer nichtsingulären Kurve C.

Wir wollen dies anwenden um einen Satz aus der Algebra zu beweisen (für k algebraisch abgeschlossen und $char(k) = 0$):

SATZ (Lüroth). *Ist L ein Körper mit $k \subset L \subseteq k(x)$, so ist $L = k(u)$ rationaler Funktionenkörper und $u = \frac{f(x)}{g(x)}$.*

Beweis: Wegen $k \neq L$ ist L ein Körper vom Transzendenzgrad 1 über k, also Funktionenkörper einer Kurve C: $L = k(C)$. Die Inklusion $L \subseteq k(x)$ entspricht einem Morphismus $\mathbf{P}^1 \to C$. Nach dem eben Bewiesenen ist dann $C \simeq \mathbf{P}^1$, also $k(C) = k(u)$. Wegen $L = k(u) \subseteq k(x)$ gibt es Polynome $f(x), g(x)$ mit $u = \frac{f(x)}{g(x)}$. ■

Sei jetzt $f(x) = (x - a_1)\ldots(x - a_m)$ und $g(x) = (x - b_1)\ldots(x - b_n)$ mit $a_i \neq b_j$. Der Divisor von $u = \frac{f(x)}{(g(x)}$ ist dann

$$(u) = a_1 + \cdots + a_m - b_1 - \cdots - b_n + (n-m)\infty,$$

also $deg((f)_0) = \max(m,n)$. Die Funktion f liefert einen Morphismus $f : \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^1$ vom Grad $\max(m,n)$.

Die Automorphismengruppe von $\mathbf{P}^1$: Ein Automorphismus von $\mathbf{P}^1$ ist gegeben durch eine rationale Funktion $f : \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^1$ vom Grad 1. Nach dem eben Gezeigten hat f die Form

$$f = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

Dies sind genau die Möbiustransformationen. Man erhält:

SATZ. *Es gilt*

$$Aut(\mathbf{P}^1) = \{x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d} : ad - bc \neq 0\}.$$

Die Automorphismengruppe ist isomorph zur Matrizengruppe

$$\mathbf{P}GL(2,k) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : ad - bc \neq 0\}/k^*.$$

Wir wollen dies noch projektiv schreiben:

$$(x_0 : x_1) = (1 : \frac{x_1}{x_0}) \mapsto (1 : \frac{a\frac{x_1}{x_0} + b}{c\frac{x_1}{x_0} + d}) = (cx_1 + dx_0 : ax_1 + bx_0),$$

also sind die Automorphismen von $\mathbf{P}^1$ nur projektive Koordinatenwechsel.

LEMMA. *Sind P_1, P_2, P_3 3 verschiedene Punkte von $\mathbf{P}^1$ und ebenso Q_1, Q_2, Q_3 drei verschiedenen Punkte, dann gibt es genau einen Automorphismus ϕ von $\mathbf{P}^1$ mit*

$$\phi(P_1) = Q_1, \quad \phi(P_2) = Q_2, \quad \phi(P_3) = Q_3.$$

Beweis: als Übung. ■

Wir wollen nun noch weitere Automorphismengruppen von Kurven betrachten. Zuvor brauchen wir aber noch ein paar Bemerkungen über galoissche Überlagerungen von Kurven.

Ein nichtkonstanter Morphismus $\phi : C_1 \to C_2$ heißt galoissch, wenn $k(C_1)$ eine Galoiserweiterung von $k(C_2)$ ist. Die Galoisgruppe operiert dann transitiv auf den Fasern von ϕ. Speziell sind alle Verzweigungsindizes in einer Faser gleich. Ist $Q \in C_2$ und $\phi^{-1}(Q) = \{P_1, \dots, P_r\}$, so schreiben wir auch

$$e(Q) = e(P_1) = \cdots = e(P_r).$$

Wegen $n = e(P_1) + \cdots + e(P_r) = re(Q)$ gilt

$$\sum_{i=1}^{r}(e(P_i) - 1) = r(e(Q) - 1) = n - \frac{n}{e(Q)} = n(1 - \frac{1}{e(Q)}).$$

Damit wird die Riemann-Hurwitz-Formel:

SATZ. *Ist $\phi : C_1 \to C_2$ eine galoissche Überlagerung vom Grad n, so gilt:*

$$2g(C_1) - 2 = n(2g(C_2) - 2) + n \sum_{Q \in C_2}(1 - \frac{1}{e(Q)}).$$

Wir wollen dies nun anwenden auf Automorphismengruppen von Kurven vom Geschlecht $g \geq 2$.
Sei C eine Kurve vom Geschlecht $g(C) \geq 2$. Sei G eine endliche Gruppe von Automorphismen von C. Dann operiert G auch auf $k(C)$. Der Fixkörper $k(C)^G$ von G ist dann Funktionenkörper einer Kurve C'. Dazu gibt es einen Morphismus $\phi : C \to C'$ vom Grad $n = \#G$, der galoissch mit Gruppe G ist. Sei h das Geschlecht von C'. Dann gilt also:

$$\frac{2g-2}{n} = 2h - 2 + \sum_{i=1}^{s}(1 - \frac{1}{e_i}).$$

O.E. $2 \leq e_1 \leq \cdots \leq e_s$.

LEMMA. *Sei*

$$M = \{2h - 2 + \sum_{i=1}^{s}(1 - \frac{1}{e_i}) : 2h - 2 + \sum_{i=1}^{s}(1 - \frac{1}{e_i}) > 0, e_i \geq 2, s \geq 1, h \geq 0\}.$$

Dann ist $\min M = \frac{1}{42}$.

Beweis:

- Zunächst gilt für $e_i \geq 2$ die Aussage $1 - \frac{1}{e_i} \geq \frac{1}{2}$.
- Ist $h \geq 1$, so ist $2h - 2 + \sum_{i=1}^{s}(1 - \frac{1}{e_i}) \geq \frac{1}{2}$.
- Sei nun $h = 0$ vorausgesetzt.
- Für $s \geq 5$ gilt
$$-2 + \sum_{i=1}^{s}(1 - \frac{1}{e_i}) \geq -2 + \frac{5}{2} \geq \frac{1}{2}.$$
- Für $s = 1$ oder $s = 2$ erhält man einen Widerspruch.
- Für $s = 4$ muß man betrachten
$$2 - \frac{1}{e_1} - \frac{1}{e_2} - \frac{1}{e_3} - \frac{1}{e_4}.$$
Nicht alle e_i können gleich 2 sein. Also gilt für den Ausdruck
$$\geq 2 - 3\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$
- Wir müssen nun noch $s = 3$ betrachten und die Summe
$$1 - \frac{1}{e_1} - \frac{1}{e_2} - \frac{1}{e_3}.$$
Sind alle $e_i \geq 3$, so muß $e_3 \geq 4$ sein, also die Summe $\geq \frac{1}{12}$.
Sei jetzt $e_1 = 2$. Angenommen, es wäre $e_2, e_3 \geq 4$. Dann wäre die Summe $\geq 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$.
Der letzte Fall ist $e_1 = 2$ und $e_2 = 3$. Dann bleibt zu betrachten
$$\frac{1}{6} - \frac{1}{e_3}.$$
Hier muß also sein $e_3 \geq 7$. Also der Wert $\geq \frac{1}{42}$. Damit ist das Lemma bewiesen. ■

Mit den Bezeichnungen der Vorbemerkung folgt
$$\frac{2g-2}{n} \geq \frac{1}{42},$$
also $n \leq 84(g-1)$. Damit haben wir folgenden Satz bewiesen:

SATZ. *Ist G eine endliche Automorphismengruppe einer Kurve C vom Geschlecht $g \geq 2$, so gilt*
$$\#G \leq 84(g-1).$$

KAPITEL 6

Hyperelliptische Kurven

Wir nennen eine Kurve C hyperelliptisch, wenn es einen Morphismus $f : C \to \mathbf{P}^1$ gibt vom Grad 2 (und wenn $g(C) \geq 2$ gilt).
f ist eine rationale Funktion auf C. Der Polstellendivisor von f hat Grad 2: $(f)_\infty = P_1 + P_2$. Insbesondere $f \in \mathcal{L}(P_1 + P_2)$. Also ist $k(C)$ eine quadratische Körpererweiterung von $k(x)$.

Lemma. *Ist $[k(C) : k(x)] = 2$, so gibt es eine Funktion $y \in k(C)$ mit $k(C) = k(x, y)$ und*

$$y^2 = (x - a_1) \dots (x - a_n),$$

wo alle a_i verschieden sind. Außerdem kann man nach eventuellem Basiswechsel erreichen, daß n gerade ist.

Beweis: Wähle $y \in k(C)$ mit $k(C) = k(x)[y]$. Dann genügt y einer quadratischen Gleichung über $k(x)$:

$$y^2 + a(x)y + b(x) = 0$$

mit rationalen Funktionen $a(x), b(x)$. Nun machen wir quadratische Ergänzung:

$$(y + \frac{a(x)}{2})^2 = \frac{a(x)^2 - 4b(x)}{4}.$$

Nach Koordinatenwechsel können wir also annehmen

$$y^2 = (x - a_1)^{m_1} \dots (x - a_n)^{m_n}.$$

Ist $m_i \geq 2$, so kann man durch $(x - a_i)^2$ dividieren und y durch $\frac{y}{x - a_i}$ ersetzen. Durch diesen Reduktionsprzeß kann man annehmen

$$y^2 = (x - a_1) \dots (x - a_n).$$

Wir sind fertig, falls n gerade ist. Ist n ungerade, so translatieren wir x, so daß o.E. alle $a_i \neq 0$ sind. Jetzt setzen wir $x = \frac{1}{u}$ und erhalten mit $n + 1 = 2m$:

$$(u^m y)^2 = u(1 - a_1 u) \dots (1 - a_n u) = (-a_1 \dots a_n) u (u - \frac{1}{a_1}) \dots (u - \frac{1}{a_n}).$$

Ersetzen wir jetzt wieder u durch x und y durch $u^m y / \sqrt{-a_1 \dots a_n}$, so folgt die Behauptung. ■

Wir untersuchen jetzt die Kurve C_0, die durch $y^2 = (x - a_1) \dots (x - a_n)$ gegeben wird mit n gerade und $n \geq 4$.

1. *Behauptung:* C_0 ist im Endlichen nichtsingulär.
   Beweis: Wir müssen die simultane Lösbarkeit der drei Gleichungen

   $$2y = 0, \quad ((x - a_1) \dots (x - a_n))' = 0, \quad (x - a_1) \dots (x - a_n) = 0$$

   untersuchen. Es gibt aber offensichtlich keine gemeinsamen Lösungen, da alle a_i verschieden sind.
2. Was passiert im Unendlichen? Wir schreiben die Gleichung projektiv:

   $$x_0^{n-2} x_2^2 = (x_1 - a_1 x_0) \dots (x_1 - a_n x_0).$$

   Im Unendlichen gibtes nur einen Punkt: $(0 : 0 : 1)$. Um hier zu affinen Koordinaten zu kommen, setzt man $u = \frac{x_0}{x_2}, v = \frac{x_1}{x_2}$ und erhält:

   $$u^{n-2} = (v - a_1 u) \dots (v - a_n u).$$

   Der Punkt $(0 : 0 : 1)$ ist also singulär.
3. Nun gibt es einen Morphismus $\psi : C \to C_0$, der ein Isomorphismus außerhalt von $(0 : 0 : 1)$ ist.

4. Die Projektion $C_0 \to \mathbf{P}^1$ mit $(x,y) \mapsto x$ setzt sich fort zu einem Morphismus $\phi : C \to \mathbf{P}^1$. Der Morphismus ϕ hat Grad 2 und Verzweigungspunkte sind $a_1, \dots, a_n$. Da n gerade sein sollte, kann $\infty \in \mathbf{P}^1$ kein Verzweigungspunkt sein. Also gibt es zwei Punkte P_1, P_2 mit $\psi(P_1) = \psi(P_2) = (0 : 0 : 1)$.
5. Die Riemann-Hurwitz-Formel liefert für das Geschlecht von C:
$$2g - 2 = 2 \cdot (-2) + n, \text{ also } g = \frac{n-2}{2}.$$
6. Der Körper $k(x,y)$ mit $y^2 = (x - a_1) \dots (x - a_n)$ ist eine quadratische Erweiterung von $k(x)$, also speziell eine Galoiserweiterung. Der Galoisautomorphismus ist sofort zu sehen:
$$(x,y) \mapsto (x, -y).$$
7. Es ist
$$\left(\frac{y}{x^m}\right)^2 = (1 - \frac{a_1}{x}) \dots (1 - \frac{a_n}{x}),$$
also $\frac{y}{x^m}(P_1) = \pm 1$. Da die Galoisoperation x festläßt, y in $-y$ überführt und P_1 in P_2, kann man o.E. annehmen, daß gilt
$$\frac{y}{x^m}(P_1) = 1, \quad \frac{y}{x^m}(P_2) = -1.$$
8. Uniformisierende: Im Endlichen in $P = (a,b)$ ist $x - a$ uniformisierend, falls $a \neq a_i$; für $P = (a_i, 0)$ ist y uniformisierend.
Im Unendlichen ist $\frac{1}{x}$ in P_1 und P_2 uniformisierend, da $v_{P_1}(x) = -1$ und $v_{P_2}(x) = -1$.

Wir fassen zusammen:

SATZ. *Sind $a_1, \dots, a_n \in k$ mit n gerade gegeben, so liefert das glatte Modell der Kurve*
$$y^2 = (x - a_1) \dots (x - a_n)$$
eine Kurve vom Geschlecht $g = \frac{n-2}{2}$. Der Morphismus vom Grad 2 ist gegeben durch $(x,y) \mapsto x$, die Verzweigungspunkte sind $a_1, \dots, a_n$. Umgekehrt entsteht jede hyperelliptische Kurve auf diese Weise.

Beispiele: Für $n = 4$ erhält man Kurven vom Geschlecht 1, für $n = 6$ Kurven vom Geschlecht 2, für $n = 8$ Kurven vom Geschlecht 3, etc.

Wir sehen hier also Kurven vom Geschlecht 2. Bevor wir weitermachen, wollen wir noch die holomorphen Differentiale auf C explizit bestimmen. Die Bezeichnungen seien wie eben.

- Auf $\mathbf{P}_1$ hat dx den Divisor -2∞. Nach der Riemann-Hurwitz-Formel gilt also auf C:
$$(dx) = -2P_1 - 2P_2 + (a_1, 0) + \dots + (a_n, 0).$$
Der Grad ist also $n - 4$.
- Der Divisor der Funktion y ist
$$(y) = -mP_1 - mP_2 + (a_1, 0) + \dots + (a_n, 0).$$
- Also ist der Divisor von
$$(\frac{dx}{y}) = (m-2)P_1 + (m-2)P_2.$$
- Sei nun $g(x)$ ein Polynom vom Grad $\leq m - 2$. Dann gilt
$$v_{P_1}(g) \geq 2 - m, \quad v_{P_2}(g) \geq 2 - m,$$
also ist $g(x)\frac{dx}{y}$ ein holomorphes Differential auf C.
- Die Differentiale dieses Typs bilden einen k-Vektorraum der Dimension
$$m - 1 = \frac{n}{2} - 1 = \frac{n-2}{2} = g,$$
also müssen dies schon alle holomorphen Differentiale sein.

SATZ. *Mit den Bezeichnungen aus dem vorigen Satz gilt:*
$$\frac{dx}{y}, \quad x\frac{dx}{y}, \dots, x^{\frac{n}{2}-2}\frac{dx}{y}$$
bildet eine Basis der holomorphen Differentiale auf C.

Kurven vom Geschlecht 2:
Die Gleichung $y^2 = (x-a_1)\dots(x-a_6)$ liefert also eine Kurve vom Geschlecht 2. Nun gilt auch umgekehrt:

SATZ. *Jede Kurve vom Geschlecht 2 ist hyperelliptisch, d.h. ist birational zu einer Kurve*

$$y^2 = (x-a_1)\dots(x-a_6),$$

wo $a_1, \dots, a_6$ verschiedene Zahlen aus k sind.

Beweis: Sei C eine Kurve vom Geschlecht 2. Dann gilt für den kanonischen Divisor: $deg(K_C) = 2$ und $\ell(K_C) = 2$. Es gibt also einen effektiven kanonischen Divisor $Q_1 + Q_2$ mit $\ell(Q_1 + Q_2) = 2$. Also gibt es eine Funktion $f \in \mathcal{L}(Q_1 + Q_2)$ mit $f \notin k$. Der Polstellendivisor von f muß Grad 2 haben, da C nicht rational ist. Also liefert f einen Morphismus $C \to \mathbf{P}^1$ vom Grad 2, d.h. C ist hyperelliptisch. ■

Wir wollen jetzt die Kurven vom Geschlecht etwas genauer betrachten. Sei C eine Kurve vom Geschlecht 2. Wir denken sie uns gegeben durch eine Gleichung

$$y^2 = (x-a_1)\dots(x-a_6),$$

wo wir im glatten Modell den einzigen Punkt im Unendlichen durch zwei Punkte ersetzen müssen.
Ist K ein kanonischer Divisor, so gilt: $deg(K) = 2$ und $\ell(K) = 2$.

Der Vektorraum der holomorphen Differentiale ist

$$\{(a+bx)\frac{dx}{y} : a, b \in k\}.$$

Der Divisor von $\frac{dx}{y}$ ist $P_1 + P_2$. Da für $c \in k$ die Funktion $x - c$ Pole erster Ordnung in P_1 und P_2 hat, gilt also:

$$((x-c)\frac{dx}{y}) = (c, \sqrt{c}) + (c, -\sqrt{c}).$$

Damit folgt sofort

FOLGERUNG. *Die effektiven kanonischen Divisoren auf C sind genau die Fasern π^*Q, wo $Q \in \mathbf{P}^1$.*

Ist $\sigma : C \to C$ die Involution $(x, y) \mapsto (x, -y)$, dann gilt also für $P \in C$:

$$P + \sigma(P) \sim K.$$

Wir betrachten Divisoren vom Grad 2 auf C:

1. Sei D ein Divisor vom Grad 2. Riemann-Roch besagt:
$$\ell(D) = 1 + \ell(K - D).$$
Wegen $\ell(D) \geq 1$ ist D linear äquivalent zu einem effektiven Divisor. Also können wir o.E. annehmen: $D = Q_1 + Q_2$.
2. Der Divisor $K - D = K - (Q_1 + Q_2)$ hat Grad 0, also gibt es genau zwei Fälle:
   (a) $K \not\sim Q_1 + Q_2$. Dann ist $\ell(K - Q_1 - Q_2) = 0$, also gilt auch $\ell(Q_1 + Q_2) = 1$.
   (b) $K \sim Q_1 + Q_2$. Dann ist $\ell(K - Q_1 - Q_2) = 1$, also auch $\ell(Q_1 + Q_2) = 2$. Natürlich ist dann $Q_2 = \sigma(Q_1)$.

FOLGERUNG. *Seien $P, Q \in C$. Dann gilt $\ell(P + Q) = 2$ genau denn, wenn $Q = \sigma(P)$ ist. Speziell gilt:*

$$\ell(2P) = 2 \iff P = \sigma(P) \iff P \textit{ ist Verzweigungspunkt.}$$

Vorbetrachtung: Wir wollen uns jetzt überlegen, wieviele Abbildungen $C \to \mathbf{P}^1$ vom Grad 2 es gibt.

- Seien f und g rationale Funktionen, die Morphismen vom Grad 2 auf $\mathbf{P}^1$ liefern. Also: $deg(f)_\infty = 2$, $deg(g)_\infty = 2$. Dann gilt mit $(f)_\infty = Q_1 + Q_2$ und $(g)_\infty = Q_3 + Q_4$ natürlich $1, f \in \mathcal{L}(Q_1 + Q_2)$ und $1, g \in \mathcal{L}(Q_3 + Q_4)$, also
$$Q_1 + Q_2 \sim K \sim Q_3 + Q_4.$$
Es gibt also eine Funktione h mit
$$Q_1 + Q_2 + (h) = Q_3 + Q_4.$$
- Falls $Q_1 + Q_2 = Q_3 + Q_4$ ist, gilt $g = \alpha f + \beta$.

- Sei nun $Q_1+Q_2 \neq Q_3+Q_4$. Dann ist $h \in \mathcal{L}(Q_1+Q_2)$, also gibt es Konstanten α, β mit $h = \alpha f + \beta$. Die Funktion $\frac{1}{h} = \frac{1}{\alpha f+\beta}$ hat den Poldivisor $Q_3 + Q_4$, also gibt es Konstante γ, δ mit
$$g = \gamma \frac{1}{\alpha f + \beta} + \delta = \frac{\alpha\delta f + (\beta\delta + \gamma)}{\alpha f + \beta},$$
es gibt also einen Automorphismus τ von $\mathbf{P}^1$ mit
$$g = \tau f.$$

Wir können wir die folgenden Sätze bewiesen:

SATZ. *Sei C eine Kurve vom Geschlecht 2. Dann besitzt $k(C)$ genau einen rationalen Teilkörper vom Index 2.*

Beweis: Sind $k(u)$ und $k(v)$ zwei Teilkörper vom Index 2, so ist $u, v \in k(C)$ und $u, v : C \to \mathbf{P}^2$ haben Grad 2, also
$$deg((u)_\infty = 2 = deg(v)_\infty.$$
Nach dem zuvor hergeleiteten Ergebnis gibt es $a, b, c, d \in k$ mit
$$v = \frac{au + b}{cu + d},$$
woraus sofort $k(u) = k(v)$ folgt. ■

SATZ. *Zwei Kurven vom Geschlecht 2 mit definierenden Gleichungen*
$$y^2 = (x - a_1) \ldots (x - a_6) \text{ und } y^2 = (x - b_1) \ldots (x - b_6)$$
sind genau dann isomorph, wenn es einen Automorphismus α von $\mathbf{P}^1$ gibt mit
$$\alpha(\{a_1, \ldots, a_6\}) = \{b_1, \ldots, b_6\}.$$

Beweis: Gibt es ein α, so sind natürlich die Kurven isomorph, weil ja nur ein Koordinatenwechsel passiert ist. Sei jetzt umgekehrt $\phi : C \to C'$ ein Isomorphismus. Dann ist $x'\phi$ eine rationale Funktion vom Grad 2 auf C, also gibt es $a, b, c, d \in k$ mit
$$x'\phi = \frac{ax + b}{cx + d}.$$
Ist $R \in C$ ein Verzweigungspunkt, d.h. $R = (a_i, 0)$, so ist $\ell(2R) = 2$ und wegen des Isomorphismuses natürlich auch $\ell(2\phi(R)) = 2$, also ist auch $\phi(R)$ ein Verzweigungspunkt, d.h. $\phi(R) = (b_j, 0)$. Setzt man dies in obige Gleichung ein, so erhält man
$$b_j = \frac{aa_i + b}{ca_i + d},$$
woraus die Behauptung folgt. ■

FOLGERUNG.
$$\mathfrak{m}_2 = \{\textit{Kurven vom Geschlecht 2}\}/\textit{Isomorphie} \simeq \{\textit{6-elementige Teilmengen von } \mathbf{P}^1\}/Aut(\mathbf{P}^1).$$

Bemerkungen:

1. Da man immer drei verschiedene Punkte von $\mathbf{P}^1$ in $-1, 0, 1$ transformieren kann, kommt jede Kurve vom Geschlecht 2 her von einer Gleichung
$$y^2 = (x^3 - x)(x - a)(x - b)(x - c)$$
mit $a, b, c \in k$, $a, b, c \neq -1, 0, 1$.
2. Man kann $\mathfrak{m}_2$ noch genauer betrachten und zeigen, daß es die Struktur einer dreidimensionalen Varietät besitzt. $\mathfrak{m}_2$ wird als Modulraum der Kurven vom Geschlecht 2 bezeichnet.

Automorphismen von Kurven vom Geschlecht 2:
Wir machen noch ein paar Bemerkungen zu Automorphismen von Kurven vom Geschlecht 2. Sei C eine Kurve vom Geschlecht 2, gegeben durch eine Gleichung

$$y^2 = (x - a_1) \dots (x - a_6).$$

Dann ist $k(C) = k(x, y)$. Der einzige rationale Teilkörper vom Index 2 von $k(C)$ ist $k(x)$.

- Wir denken uns die Automorphismen als Automorphismen des Funktionenkörpers $k(C)$, die k festlassen. Sei τ ein solcher Automorphismus.
- $k(x)$ ist der einzige rationale Teilkörper vom Index 2, also stimmen $\tau(k(x))$ und $k(x)$ überein, d.h. daß es dann $a, b, c, d \in k$ gibt mit
$$\tau x = \frac{ax + b}{cx + d} = \alpha x.$$
Außerdem werden die Verzweigungspunkte in sich überführt, also $\tau(a_i) \in \{a_1, \dots, a_6\}$.
- Wir können jetzt also schreiben
$$\tau(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad \tau(y) = A(x)y + B(x),$$
wo $A(x)$ und $B(x)$ rationale Funktionen in x sind. Wegen
$$(A(x)y + B(x))^2 = \tau(y)^2 = (\tau(x) - a_1) \dots (\tau(x) - a_6)$$
ist klar, daß $B(x) = 0$ ist.
- Sei G die Automorphismengruppe von C als Automorphismengruppe von $k(C)$ aufgefaßt. Sei H die Einschränkung von G auf $k(x)$.
- Es ist
$$H \subseteq \{\alpha \in Aut(\mathbf{P}^1) : \alpha(\{a_1, \dots, a_6\}) = \{a_1, \dots, a_6\}\} = H_0.$$
Da ein Automorphismus auf $\mathbf{P}^1$ durch Vorgabe dreier Punkte eindeutig bestimmt ist, ist klar, daß H_0 endlich ist. Nach der Galoistheorie ist H ein Normalteiler in G vom Index 2.

Wir formulieren als Ergebnis:

SATZ. *Die Automorphismengruppe einer Kurve vom Geschlecht 2 ist endlich. Jeder Automorphismus kann in der Form*
$$\tau(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad \tau(y) = A(x)y \textit{ mit } \tau(\{a_1, \dots, a_6\}) = \{a_1, \dots, a_6\}$$
geschrieben werden. Ist
$$H = \{\tau' \in Aut(\mathbf{P}^1) : \tau'(\{a_1, \dots, a_6\}) = \{a_1, \dots, a_6\}\},$$
so liftet jeder Automorphismus aus H zu einem Automorphismus von C und H hat Index 2 in der Automorphismengruppe G von C. Es gibt immer den Automorphismus $(x, y) \mapsto (x, -y)$.

Damit tut sich nun eigentlich die Aufgabe auf, die Möglichkeiten für die Automorphismemgruppen zu diskutieren. Dazu hat man die Automorphismengruppe von 6 Punkten im $\mathbf{P}^1$ zu bestimmen. Wir geben nur ein Beispiel:

Beispiel: Setzt man die Riemannsche Zahlenkugel auf die komplexe Ebene, so erhält man durch stereographische Projektion einen Isomorphismus zwischen der Zahlenkugel und $\mathbf{P}^1$, wobei dem Nordpol der Kugel der Punkt $\infty \in \mathbf{P}^1$ entspricht.
Jede Drehung induziert einen Automorphismus von $\mathbf{P}^1$.
Wir wählen die 6 Punkte eines Oktaeders. Die Symmetriegruppe der Drehungen ist die S_4 mit 24 Elementen. Wenn wir das Oktaeder entsprechend ausrichten, erhalten wir bei stereographischer Projektion die Punkte, die Verzweigungspunkte werden sollen:

$$M = \{0, \infty, 1, -1, i, -i\}.$$

Dazu gehört also die Kurve $y^2 = x(x^4 - 1)$, wobei jetzt ein Verzweigungspunkt im Unendlichen liegt. Dadurch wird der Kurvengrad auf 5 reduziert. Die Automorphismengruppe von C hat also mindestens Ordnung 48. Man kann auch umgekehrt zeigen, daß dies alle Automorphismen sind.
Man kann die Automorphismen natürlich auch explizit studieren:

1. Beispiele für Automorphismen von $\mathbf{P}^1$, die M in sich überführen:
   (a) $\tau(x) = \pm x$ und $\tau(x) = \pm ix$. Hier bleiben ∞ und 0 punktweise fest.
   (b) $\tau(x) = \frac{1}{x}$
   (c) $\tau(x) = \frac{x-1}{x+1}$. Hier bleiben i und $-i$ punktweise fest.
2. Wir zeigen, daß obige Automorphismen schon alle Automorphismen von $\mathbf{P}^1$ erzeugen, die M in M überführen.
   (a) Sei H_∞ die Fixgruppe von ∞. Mit obigen Automorphismen läßt sich ∞ in jeden anderen der obigen Punkte überführen. Also hat H_∞ Index 6 in H_0.
3. Auf C kann man die Automorphismen anschreiben:
$$\tau(x) = \frac{1}{x}, \tau(y) = \frac{iy}{x^3}.$$
$$\tau(x) = \frac{x-1}{x+1}, \quad \tau(y) = \frac{\sqrt{2}iy}{(x+1)^3}.$$
4. Also hat die Automorphismengruppe Ordnung 48.

Bemerkung: Man kann zeigen, daß 48 die maximale Anzahl der Automorphismen einer Kurve vom Geschlecht 2 ist. Man kann auch zeigen, daß die Kurve $y^2 = x^5 - x$ bis auf Isomorphie die einzige Kurve vom Geschlecht 2 mit 48 Automorphismen ist.

Die Picardgruppe von C:
Wir wollen nun noch $Pic_0(C)$ beschreiben. Dazu noch ein paar Vorbemerkungen:

1. Wir schreiben $Pic_d(C) = \{c \in Pic(C) : deg(c) = d\}$. Ist $P \in C$, so ist klar, daß die Zuordnung
$$Pic_d(C) \to Pic_0(C), \quad c \mapsto c - \text{ Klasse von } dP$$
eine Bijektion definiert: $Pic_d(C) \simeq Pic_0(C)$. Wir können also statt $Pic_0(C)$ auch $Pic_d(C)$ untersuchen.
2. Ist n eine natürliche Zahl, so definieren wir die n-te symmetrische Potenz von C durch
$$S^nC = \{D \in Div_n(C) : D \geq 0\} = \{P_1 + \cdots + P_n : P_1, \ldots, P_n \in C\}.$$

Wir betrachten jetzt die Abbildung
$$\mu : S^2C \to Pic_2(C), \quad Q_1 + Q_2 \mapsto \text{ Klasse von } Q_1 + Q_2.$$
Da wir schon gesehen haben, daß alle Divisoren vom Grad 2 linear äquivalent zu einem effektiven Divisor ist, folgt, daß μ surjektiv ist. Für $D_1, D_2 \in S^2C$ mit $D_1 \neq D_2$ gilt:
$$\mu(D_1) = \mu(D_2) \iff D_1 \sim D_2 \iff D_1 \sim D_2 \sim K.$$
Ist $D \sim K$ effektiv, so gibt es $Q \in \mathbf{P}^1$ mit $D = \phi^*Q$. Wir haben die injektive Abbildung
$$\phi^* : \mathbf{P}^1 \to S^2C.$$
Wir können also sagen: μ ist injektiv außerhalb von $\phi^*\mathbf{P}^1$, während die ganze Gerade $\phi^*\mathbf{P}^1$ auf einen Punkt in $Pic_2(C)$ abgebildet wird.

Wir stellen jetzt ein paar Fragen:

1. Die hyperelliptischen Kurven, speziell alle Kurven vom Geschlecht 2, hatten wir nur durch eine singuläre ebene Kurve angegeben. Wie kann man diese Kurven wirklich als nichtsinguläre projektive Kurven sehen?
2. Zu jedem $g \geq 2$ gibt es hyperelliptische Kurven vom Geschlecht g, indem man von einer Gleichung
$$y^2 = (x - a_1) \ldots (x - a_{2g+2})$$
ausgeht. Ist vielleicht jede Kurve hyperelliptisch?

Bevor wir die letzte Frage (negativ) beantworten, brauchen wir noch ein kleines Lemma über hyperelliptische Kurven:

LEMMA. *Sei C eine Kurve vom Geschlecht $g \geq 1$ und D ein Divisor vom Grad 2 mit $\ell(D) = 2$. Zu jedem $P \in C$ gibt es dann einen eindeutig bestimmten Punkt $Q \in C$ mit $P + Q \sim D$. Wir schreiben $\sigma(P) = Q$ und haben dann also*

$$P + \sigma(P) \sim D.$$

Beweis: Sei $P \in C$. Dann hat $D - P$ Grad 1 und $\ell(D - P) = 1$, da $ell(D) \leq \ell(D - P) + 1$ und $\ell(D - P) \leq 1$. Es gibt dann ein $f \in \mathcal{L}(D - P)$ mit $D - P + (f) \geq 0$, also einen Punkt Q mit $D - P + (f) = Q$, also $D \sim P + Q$. Gäbe es einen zweiten Punkt Q' mit dieser Eigenschaft, so wäre $Q \sim Q'$, was nur bei Geschlecht 0 der Fall ist. Damit folgt die Behauptung. ■

Wir geben jetzt ein Beispiel für nichthyperelliptische Kurven:

SATZ. *Ist $C \subseteq \mathbf{P}^2$ eine glatte Kurve vom Grad 4, so hat C Geschlecht 3 und ist nicht hyperelliptisch.*

Beweis:

1. Sei C eine glatte ebene Kurve vom Grad 4. Dann hat C das Geschlecht $g = \frac{(4-1)(4-2)}{2} = 3$.
2. Die Adjunktionsformel für ebene Kurven liefert, daß die Geradenschnitte effektive kanonische Divisoren liefern. Wegen $\ell(K) = 3$ sind das schon alle effektiven kanonischen Divisoren. D.h. ist K ein effektiver kanonischer Divisor auf C, so gibt es eine Gerade $g = 0$ mit $K = (g)$.
3. Wir nehmen an, C wäre hyperelliptisch. Dann gäbe es also einen effektiven Divisor D vom Grad 2 mit $\ell(D) = 2$. ($\mathcal{L}(D) = k \oplus kf$, die Funktion f liefert dann einen Morphismus vom Grad 2 auf $\mathbf{P}^1$.) Der Satz von Riemann-Roch ergibt:
$$2 = \ell(D) = 2 + 1 - 3 + \ell(K - D) = \ell(K - D),$$
also hat auch $K - D$ Grad 2 und erfüllt $\ell(K - D) = 2$.
4. Nach dem vorangegangenen Lemma gibt es zu D bzw. $K - D$ zwei bijektive Abbildungen $\sigma, \tau : C \to C$ mit der Eigenschaft:
$$P + \sigma(P) \sim D \quad Q + \tau(Q) \sim K - D$$
für alle Punkte $P, Q \in C$. Dann ist aber
$$P + \sigma(P) + Q + \tau(Q) \sim K,$$
also ein effektiver kanonischer Divisor, d.h. es gibt eine Gerade g mit
$$P + \sigma(P) + Q + \tau(Q) = (g).$$
Wählt man jetzt P, so ist die Gerade $g = 0$ natürlich durch P und $\sigma(P)$ eindeutig bestimmt. Also müssen alle weiteren Punkte Q auf der Geraden $g = 0$ liegen, was offensichtlich Unsinn ist. Wir haben also einen Widerspruch zu unserer Annahme, daß C hyperelliptisch ist, erhalten. ■

Wir sehen hier also schon ein merkwürdiges Phänomen: Kurven vom Geschlecht 3 gibt es in verschiedenen Ausführungen: als glatte ebene Quartiken, als hyperelliptische Kurven. Gibt es noch mehr?

KAPITEL 7

Linearsysteme

Sei C eine nichtsinguläre irreduzible projektive Kurve. Ist D ein Divisor auf C, so bezeichnen wir mit

$$|D| = \{D' \in Div(C) : D' \geq 0, D' \sim D\}$$

die Menge aller effektiven Divisoren, die linear äquivalent zu D sind.

Beispiele:

1. Ist $C \simeq \mathbf{P}^1$ und $P \in C$, so gilt für alle Punkte $Q \in C$ auch $P \sim Q$, also
$$|P| = \{Q \in C\} \simeq \mathbf{P}^1.$$
2. Ist $g(C) \geq 1$ und ist $P \in C$, so gilt für einen Punkt $Q \in C$:
$$P \sim Q \iff P = Q,$$
also folgt daraus
$$|P| = \{P\}.$$
3. Sei C eine glatte ebene Quartik. Im letzten Paragraphen haben wir in einem Beweis gesehen, daß
$$|K_C| = \{(g) : g = 0 \text{ Gerade in } \mathbf{P}^2\}$$
gilt, d.h. die effektiven kanonischen Divisoren sind genau die Geradenschnitte.

Ist $D' \in |D|$, so ist $D' \sim D$, also gibt es eine Funktion $f \in k(C)$ mit $D' = (f) + D$. Da nun $(f) + D$ effektiv ist, sehen wir

$$|D| = \{D + (f) : f \in \mathcal{L}(D), f \neq 0\}.$$

Nun gilt für $f, g \in \mathcal{L}(D)$:

$$(f) + D = (g) + D \iff g = \lambda f \text{ mit einer Konstanten } \lambda \in k.$$

Also gilt

$$|D| \simeq \mathcal{L}(D)/k^* = \mathbf{P}\mathcal{L}(D),$$

d.h. $|D|$ hat die Struktur eines projektiven Raumes. Nach Definition gilt also dann $dim|D| = \ell(D) - 1$.

Definition: Ein Linearsystem von Divisoren auf C ist ein linearer Teilraum L eines Raums $|D|$. Ein Linearsystem heißt vollständiges Linearsystem, falls es von der Form $|D|$ ist.
Für ein Linearsystem ist dann die Dimension und der Grad (Anzahl der Punkte) definiert. Linearsysteme vom Grad d mit Dimension r werden auch mit g_d^r bezeichnet.

Aus der Definition folgt unmittelbar, daß für linear äquivalente Divisoren $D_1 \sim D_2$ gilt: $|D_1| = |D_2|$.

Ein zentrales Beispiel ist:

Beispiel: Sei $C \subseteq \mathbf{P}^n$ eine (nichtentartete) Kurve vom Grad d im $\mathbf{P}^n$. Dann haben wir die Hyperebenenschnitte (ℓ) definiert. Die Menge der Hyperebenenschnitte

$$H = \{(\ell) : \ell \text{ Linearform in } x_0, \ldots, x_n\}$$

bildet dann ein Linearsystem. (Wir können nämlich schreiben

$$H = \{(x_0) + (\frac{a_0x_0 + \cdots + a_nx_n}{x_0}) : a_0, \ldots, a_n \in k, \text{ nicht alle } 0\}.)$$

H ist Linearsystem vom Grad d und Dimension n, also ein g_d^n. Unklar ist, ob H vollständig ist oder nicht.

Beispiel: Sei C eine nichtsinguläre ebene Kubik, also eine Kurve vom Geschlecht 1.

1. Das Linearsystem der Hyperebenenschnitte H hat Grad 3 und Dimension 2. Ist $D \in H$, so gilt also $deg(D) = 3$. Nach Riemann-Roch gilt nun $\ell(D) = 3$, also $|D| = 2$. Aus $H \subseteq |D|$ und der Gleichheit der Dimension folgt $H = |D|$, d.h. H ist ein vollständiges Linearsystem.
2. Seien $P_1, P_2 \in C$, $P_1 \neq P_2$. Was ist dann $|P_1 + P_2|$? Nach Riemann-Roch gilt: $\ell(P_1 + P_2) = 2$, also ist $dim|P_1 + P_2| = 1$. Kann man die Divisoren des Linearsystems sehen?
Sei $g = 0$ die Gerade durch P_1 und P_2 und P_0 der dritte Schnittpunkt von $g = 0$ mit C. Wir betrachten das Linearsystem $|H - P_0|$. Was heißt $Q_1 + Q_2 \in |H - P_0|$? Es bedeutet, daß $Q_1 + Q_2 + P_0$ ein Geradenschnitt ist. Also besteht $|H - P_0|$ aus den Schnitten der Geraden durch P_0, wo der Punkt P_0 abgezogen wird. Es gilt dann offensichtlich
$$|P_1 + P_2| = |H - P_0|.$$

Beispiel: Sei C eine hyperelliptische Kurve vom Geschlecht $g \geq 2$. Was ist dann $|K_C|$, das Linearsystem der effektiven kanonischen Divisoren?

1. C werde beschrieben durch die Gleichung
$$y^2 = (x - a_1) \dots (x - a_{2g+2}),$$
mit zwei Punkten U_1 und U_2 im Unendlichen auf dem nichtsingulären Modell. Der Morphismus $C \to \mathbf{P}^1$, $(x, y) \mapsto x$ werde mit ϕ bezeichnet. Im letzten Paragraphen haben wir gesehen, daß die holomorphen Differentiale die Form
$$(c_1 + c_2 x + \dots + c_g x^{g-1}) \frac{dx}{y}$$
haben.
2. Seien $R_i = (a_i, 0)$ die Verzweigungspunkte. Dann ist
$$(y) = R_1 + \dots + R_{2g+2} - (g+1)U_1 - (g+1)U_2.$$
Weiter ist
$$(dx) = -2U_1 - 2U_2 + R_1 + \dots + R_{2g+2},$$
also
$$(\frac{dx}{y}) = (g-1)U_1 + (g-1)U_2 = \phi^*((g-1)\infty).$$
Damit wird
$$((c_1 + \dots + c_g x^{g-1}) \frac{dx}{y}) = \phi^*((c_1 + \dots + c_g x^{g-1}) + (g-1)\infty).$$
Nun ist aber $(c_1 + \dots + c_g x^{g-1}) + (g-1)\infty)$ einfach ein effektiver Divisor vom Grad $g - 1$. Also können wir schreiben:
$$|K_C| = \phi^*|(g-1) \cdot \text{ Punkt}|.$$
3. Sei σ der Automorphismus von C mit $(x, y) \mapsto (x, -y)$. Offensichtlich gilt:
$$P + \sigma(P) = \phi^*(\phi(P)).$$
Dann gilt aber auch: Ist $D \in |K_C|$ mit $P \leq D$, so gilt auch $\sigma(P) \leq D$. Damit folgt leicht:
$$P + \sigma(P) = \cap\{D \in |K_C| : P \leq D\}.$$
4. Durch die letzte Beziehung ist σ unabhängig vom Morphismus $\phi : C \to \mathbf{P}^1$ bestimmt. Was bedeutet das? Das bedeutet, daß es nur ein solches σ gibt. Der Fixkörper von σ ist aber ein rationaler Teilkörper von $k(C)$ vom Index 2. Also gibt es auch nur einen rationalen Teilkörper vom Index 2 in $k(C)$.
5. Sind nun D_1 und D_2 zwei Divisoren mit $\ell(D_1) = \ell(D_2) = 2$, so gab es nach einem Lemma aus dem letzten Paragraphen Abbildungen σ_1 und σ_2 mit
$$P + \sigma_1(P) \sim D_1, \quad P + \sigma_2(P) \sim D_2.$$
Nach den Vorbemerkungen gilt aber $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$. Damit gilt $D_1 \sim D_2$.

Wir fassen zusammen:

Satz. *Sei C eine hyperelliptische Kurve vom Geschlecht $g \geq 2$. Dann gibt es genau ein Linearsystem g_2^1, d.h. der Morphismus $\phi : C \to \mathbf{P}^1$ ist bis auf Automorphismen von $\mathbf{P}^1$ eindeutig bestimmt und $g_2^1 = \phi^*|Punkt|$. Das Linearsystem $|K_C|$ der effektiven kanonischen Divisoren ist*

$$|K_C| = \phi^*(|(g-1)\infty|) = \sum_{i=1}^{g-1} g_2^1,$$

d.h.

$$|K_C| = \{D_1 + \cdots + D_{g-1} : D_1, \ldots, D_{g-1} \in g_2^1\}.$$

Beispiel: Sei C eine glatte ebene Kurve vom Grad d. Nach der Adjunktionsformel gilt:

$$|K_C| = |(d-3)(\ell)|,$$

wo $\ell = 0$ eine Gerade ist. Nun ist

$$\dim |K_C| = g - 1 = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - 1 = \frac{1}{2}d(d-3).$$

Genauso wie die linearen Polynome liefern auch die Polynome vom Grad $d-3$ in x_0, x_1, x_2 Divisoren auf C, die alle linear äquivalent sind:

$$L = \{(a_0 x_0^{d-3} + \ldots)\} \subseteq |(d-3)(\ell)| = |K_C|.$$

Die Polynome vom Grad $d-3$ bilden einen Vektorraum der Dimension $\binom{d-3+2}{2} = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$, also gilt

$$\dim L = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - 1 = \dim |K_C|.$$

Damit haben wir gezeigt:

Satz. *Sei C eine glatte ebene Kurve vom Grad $d \geq 4$. Dann besteht $|K_C|$ aus den Schnitten von C mit Kurven vom Grad $d-3$.*

Bemerkung: Sei $|D|$ ein Linearsystem und $P \in C$. Dann gilt:

$$Q_1 + \cdots + Q_m \in |D - P| \iff Q_1 + \cdots + Q_m \sim D - P \iff Q_1 + \cdots + Q_m + P \in |D|,$$

d.h. also

$$|D - P| + P \subseteq |D|.$$

$|D-P| + P$ sind also genau die Divisoren aus $|D|$, die den Punkt enthalten. Entsprechend sind dann $|D-P|$ die Divisoren aus $|D|$, den P enthalten, minus den Punkt P.

Sei L ein Linearsystem auf C. Wir sagen, P ist Basispunkt des Linearsystems L, falls $P \in D$ für alle $D \in L$. D.h. P kommt in allen Divisoren des Linearsystems L vor. Nun gilt:

Lemma. *Ein Linearsystem $|D|$ ist genau dann basispunktfrei, wenn für alle $P \in C$ gilt:*

$$\dim |D - P| = \dim |D| - 1.$$

Beweis: P ist genau dann Basispunkt von $|D|$, falls

$$|D| = |D - P| + P$$

gilt. Immer gilt $|D| \supseteq |D-P| + P$. Damit brauchen wir nur noch die Dimensionen zu vergleichen, woraus dann sofort die Behauptung folgt. ■

Satz. *Sei D ein Divisor mit $deg(D) \geq 2g$, wo g das Geschlecht der Kurve bezeichnet. Dann ist $|D|$ basispunktfrei.*

Beweis: Sei $P \in C$ beliebig. Dann ist $deg(D) \geq 2g$ und $deg(D-P) \geq 2g-1$, also ist $\ell(K-D) = \ell(K-(D-P)) = 0$. Der Satz von Riemann-Roch liefert dann sofort $\ell(D) = \ell(D-P)+1$, also die Behauptung

$$\dim |D - P| = \dim |D| - 1. ■$$

Beispiele:

1. Sei C eine hyperelliptische Kurve vom Geschlecht $g \geq 2$. Dann hat $|K_C|$ keine Basispunkte. Ist $P \in C$, so hat $|K_C - P|$ den Basispunkt $\sigma(P)$, d.h. $|K_C - P|$ ist nicht basispunktfrei.
2. Sei C eine glatte ebene Kurve vom Grad $d \geq 4$. Dann ist $|K_C|$ basispunktfrei. Sei $P \in C$.
   Behauptung: $|K_C - P|$ ist basispunktfrei.
   Beweis: Sei $Q \in C$. Wähle eine Kurve $f = 0$ vom Grad $d-3$, die einfach durch P geht, aber nicht durch Q. Dann ist $(f) \in |K_C - P|$, aber $Q \notin (f)$, d.h. Q ist kein Basispunkt.
3. Damit sehen wir, daß glatte ebene Kurven vom Grad $d \geq 4$ nie hyperelliptisch sein können.

FOLGERUNG. *Eine glatte ebene Kurve vom Grad $d \geq 4$ ist nicht hyperelliptisch.*

Morphismen in $\mathbf{P}^n$
Sei $\phi : C \to \mathbf{P}^n$ ein Morphismus, der nicht entartet ist, d.h. $\phi(C)$ liegt nicht in einem echten linearen Teilraum von $\mathbf{P}^n$. Der Morphismus ϕ wird gegeben durch rationale Funktionen $f_0, \ldots, f_n \in k(C)$:

$$\phi = (f_0 : \cdots : f_n),$$

wo wir o.E. $f_0 = 1$ annehmen können. Sei D minimal gewählt mit

$$f_0, \ldots, f_n \in \mathcal{L}(D).$$

Wir betrachten jetzt wieder Hyperebenenschnitte. Wir wiederholen die Konstruktion:

- Sei $\ell = c_0x_0 + \cdots + c_nx_n = 0$ eine Hyperebene in $\mathbf{P}^n$. Wir wollen den Hyperebenenschnitt $\phi^*(\ell)$ definieren.
- Sei $P \in C$. Wähle $g \in k(C)$, so daß ϕ in P durch

  $$\phi = (f_0 g : \ldots f_n g)$$

  definiert wird, d.h. $v_P(f_i g) \geq 0$ und für wenigstens einen Index j gilt $v_P(f_j g) = 0$. Ist t uniformisierend in P, so kann man für g immer eine Potenz von t wählen. Wir definieren dann

  $$n_P = v_P((c_0 f_0 + c_1 f_1 + \cdots + c_n f_n) g)$$

  und damit

  $$\phi^*(\ell) = \sum_{P \in C} n_P P.$$

- Sei $D = \sum n_i P_i$. Ist $P \neq P_i$, d.h. $P \not\leq D$, dann kann man $g = 1$ wählen, d.h.

  $$n_P = v_P(c_0 f_0 + \cdots + c_n f_n).$$

  Ist $P = P_i$, so ist $g = t^{n_i}$, da D minimal gewählt war. Also gilt

  $$n_{P_i} = v_{P_i}(c_0 f_0 + \cdots + c_n f_n) + n_i.$$

  Daraus folgt aber sofort:

  $$\phi^*(\ell) = (c_0 f_0 + \ldots c_n f_n) + D.$$

Damit ist klar: Die Hyperebenenschnitte $\phi^*(\ell)$ sind genau die Divisoren

$$\{D + (c_0 f_0 + \cdots + c_n f_n) : c_0 f_0 + \cdots + c_n f_n \in \mathcal{L}(D)\} \subseteq |D|.$$

Behauptung: Das Linearsystem ist basispunktfrei.
Beweis: Angenommen, P wäre ein Basispunkt.
Fall 1: $P \neq P_i$: Dann würde folgen $f_0(P) = \ldots f_n(P) = 0$, was aber nicht sein kann.
Fall 2: $P = P_j$: Das geht nicht, weil D minimal gewählt war. ■

Wir geben jetzt umgekehrt die grundlegende Konstruktionsmethode an, wie man Abbildungen $C \to \mathbf{P}^n$ erhält.

- Sei D ein Divisor mit $r+1 = \ell(D) \geq 2$, so daß $|D|$ basispunktfrei ist. Wähle eine Basis $f_0, \ldots, f_r \in \mathcal{L}(D)$ und definiere $\phi = \phi_D : C \to \mathbf{P}^r$ durch $\phi_D = (f_0 : \cdots : f_r)$.
- ϕ ist nicht entartet, da $f_0, \ldots, f_r$ linear unabhängig sind.
- Nach der ersten Konstruktion ist klar sucht man einen Divisor D' minimal mit $f_0, \ldots, f_r \in \mathcal{L}(D')$. Es ist klar, daß $D' \leq D$ gilt. Da $|D|$ basispunktfrei sein soll, gilt $D = D'$.
- Es ist klar, daß die Hyperebenenschnitte genau die Divisoren des Linearsystems $|D|$ sind.

Wir fassen dies kurz zusammen:

Satz. *Sei $|D|$ ein basispunktfreies Linearsystem auf C. Dadurch wird ein Morphismus ϕ_D induziert. Die Hyperebenenschnitte entsprechen dabei den Divisoren des Linearsystemes $|D|$.*

Bemerkungen:

1. Nach unserer Konstruktion ist ϕ_D nur bis auf einen Basiswechsel in $\mathbf{P}^r$ bestimmt.
2. Gilt $D \sim D'$, so ist $\mathcal{L}(D') = \mathcal{L}(D) \cdot g$ mit einer geeigneten Funktion g. Also liefern ϕ_D und $\phi_{D'}$ bis auf Koordinatenwechsel auch wieder die gleiche Abbildung. Wir schreiben auch $\phi_{|D|}$.
3. Natürlich kann man statt mit $|D|$ auch mit einem basispunktfreien Linearsystem $L \subseteq |D|$ starten und eine Abbildung dazu wie zuvor konstruieren.

Beispiele:

1. Sei $C = \mathbf{P}^1$. Dann gibt es für jeden Grad $n \geq 1$ genau ein Linearsystem, nämlich
$$|n \cdot \infty| = \{P_1 + \cdots + P_n : P_1, \ldots, P_n \in \mathbf{P}^1\}.$$
Sei $D = n\infty$ und $k(\mathbf{P}^1) = k(x)$. Dann ist
$$\mathcal{L}(n\infty) = k + kx + \cdots + kx^n.$$
Man sieht sofort, daß $|n\infty|$ basispunktfrei ist. Also liefert
$$\phi_{n\infty}(x) = (1 : x : x^2 : \cdots : x^n)$$
einen Morphismus $\mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^n$. Die Bildkurve $\phi_{n\infty}(\mathbf{P}^1)$ heißt rationale Normkurve. Wir werden später sehen, daß sie eine glatte rationale Kurve ist.
2. Sei C hyperelliptisch. Dann haben wir das Linearsystem g_2^1. Es liefert einen Morphismus $C \to \mathbf{P}^1$ vom Grad 2.
3. Sei C hyperelliptisch, gegeben durch das singuläre Modell
$$y^2 = (x - a_1) \ldots (x - a_{2g+2}).$$
Wir betrachten das Linearsystem $|K_C|$ der effektiven kanonischen Divisoren. Wählt man $K = (\frac{dx}{y})$, so sind die Funktionen $1, x, x^2, \ldots, x^{g-1}$ eine Basis von $\mathcal{L}(K)$. Dann gilt also
$$\phi_K : C \to \mathbf{P}^{g-1}, (x,y) \mapsto (1 : x : \cdots : x^{g-1}).$$
Hier kommt aber y nicht mehr vor! Wir sehen, daß die Abbildung über $\mathbf{P}^1$ faktorisiert. Das Bild ist die rationale Normkurve in $\mathbf{P}^{g-1}$:
$$\phi_K = \phi_{|(g-1)\infty|} \circ \phi_{g_2^1}.$$
4. Sei $C \subseteq \mathbf{P}^n$. Dies können wir auch als einen Morphismus $C \to \mathbf{P}^n$ betrachten. Der Morphismus wird durch das Linearsystem der Hyperebenenschnitte gegeben: $|(\ell)|$.

Beobachtungen: Durch unsere Abbildung $\phi = \phi_D : C \to \mathbf{P}^r$ erhalten wir: Hyperebenen in $\mathbf{P}^r$ entsprechen den Divisoren aus $|D|$. Hyperebenen durch $\phi(P)$ entsprechen den Divisoren aus $|D - P| + P$. Für $P \neq Q$ entsprechen die Hyperebenen durch $\phi(P)$ und $\phi(Q)$ den Divisoren aus $|D - P - Q| + P + Q$. Tangentialhyperebenen an $\phi(P)$ entsprechen den Divisoren aus $|D - 2P| + 2P$. Dies wird helfen, Aussagen über $\phi(C)$ zu gewinnen. Das Studium der Linearsysteme auf C steht also in engem Zusammenhang mit der Geometrie von C.

Uns interessiert jetzt, wann ϕ_D einen Isomorphismus auf die Bildkurve liefert. Dadurch kann man C als projektive Kurve sehen.

Definition. Sei $|D|$ basispunktfrei. Wir nennen $|D|$ sehr ampel, falls $\phi_D : C \to \mathbf{P}^r$ einen Isomorphismus
$$C \simeq \phi_D(C) \subseteq \mathbf{P}^r$$
liefert. Man sagt auch: Durch das Linearsystem $|D|$ wir C in $\mathbf{P}^r$ eingebettet. Dann ist $\phi_D(C)$ eine Kurve vom Grad $deg(D)$ in $\mathbf{P}^r$.

Beispiel: Ist $C \subseteq \mathbf{P}^n$, so ist das Linearsystem der Hyperebenenschnitte natürlich sehr ampel.

Satz. *Ein Divisor D auf einer Kurve C ist genau dann sehr ampel, wenn für alle Punkte $P, Q \in C$ gilt:*
$$\dim |D - P - Q| = \dim |D| - 2.$$

Beweis:

1. Wir setzen zunächst die Bedingung voraus. Dann muß auch $\dim|D-P| = \dim|D|-1$ gelten, d.h. das Linearsystem $|D|$ ist basispunktfrei.
2. Wir zeigen jetzt, daß ϕ_D injektiv ist. Seien P und Q zwei verschiedene Punkte. Es genügt zu zeigen, daß es Hyperebenen im Bild gibt, die $\phi(P)$ enthalten, nicht jedoch $\phi(Q)$. Diese entsprechen aber genau den Divisoren
$$(|D-P|+P) \setminus (|D-P-Q|+P+Q).$$
Wegen $\dim|D-P| > \dim|D-P-Q|$ gibt es solche Divisoren, also auch entsprechende Hyperebenen. Daher ist ϕ_D injektiv.
3. Nun ist $\phi_D(C) \subseteq \mathbf{P}^n$ eine projektive Kurve. Wir wollen zeigen, daß sie in $\phi(P)$ nichtsingulär ist. Dazu ist zu zeigen, daß es Hyperebenen gibt, die nicht tangential sind, d.h. mit Ordnung ≥ 2 die Kurve $\phi(C)$ in $\phi(P)$ schneiden. Nun entsprechen aber den Hyperebenen durch $\phi(P)$ die Divisoren $|D-P|+P$, den Hyperebenen, die berühren, die Divisoren $|D-2P|+2P$. Nach unserer Voraussetzung gilt: $|D-P|+P \neq |D-2P|+2P$, also ist $\phi(C)$ in $\phi(P)$ nichtsingulär.
4. Nun ist also ϕ ein injektiver Morphismus von C auf die nichtsinguläre Kurve $\phi(C)$. Daraus folgt, daß dies bereits ein Isomorphismus ist. Damit haben wir den ersten Teil bewiesen.
5. Zum Beweis der Umkehrung braucht man jetzt nur obige Betrachtung rückwärts zu lesen, dann folgt die Dimensionsaussage. ■

FOLGERUNG. *Sei C eine Kurve vom Geschlecht g. Gilt $deg(D) \geq 2g+1$, so ist $|D|$ sehr ampel.*

Beweis: Mit den Voraussetzungen gilt:
$$deg(D) > 2g-2, \quad deg(D-P-Q) > 2g-2,$$
also gilt $\ell(K-D) = \ell(K-(D-P-Q)) = 0$, und somit folgt aus Riemann-Roch, daß $\ell(D) = \ell(D-P-Q)+2$ ist, woraus die Behauptung folgt. ■

Beispiel: Die rationalen Normkurven
$$\phi_{|n\infty|}(\mathbf{P}^1) \subseteq \mathbf{P}^n$$
sind also nichtsinguläre Kurven vom Geschlecht 0.

Beispiel: Wann ist $|K_C|$ sehr ampel?

1. Für $g=0$ ist $|K_C| = \emptyset$, für $g=1$ ist $\phi_{|K_C|}$ konstant.
2. Ist C hyperelliptisch, so ist $|K_C|$ natürlich nicht hyperelliptisch, da $\phi_{|K_C|}$ über $\mathbf{P}^1$ faktorisiert.
3. Sei nun C eine Kurve vom Geschlecht $g \geq 2$, die nicht hyperelliptisch ist. Für Punkte $P, Q \in C$ gilt dann:
$$1 = \ell(P+Q) = 2+1-g+\ell(K_C-P-Q),$$
also
$$\ell(K_C-P-Q) = g-2 = \ell(K_C)-2,$$
d.h. K_C ist sehr ampel. Man nennt ϕ_{K_C} kanonische Einbettung, das Bild kanonische Kurve.

Wir formulieren dies als Satz:

SATZ. *Sei C eine Kurve vom Geschlecht $g \geq 2$. Genau dann bettet $|K_C|$ die Kurve C in $\mathbf{P}^{g-1}$ ein, wenn C nicht hyperelliptisch ist.*

Kurven vom Geschlecht 3: Sei C eine Kurve vom Geschlecht 3. Ist C hyperelliptische, so ist C also gegeben durch ein singuläres Modell
$$y^2 = (x-a_1)\dots(x-a_8).$$
Ist C nicht hyperelliptisch, so liefert $|K_C|$ eine Einbettung von C in $\mathbf{P}^2$ als Kurve vom Grad 4. Damit gibt es nur diese zwei Arten von Kurven vom Geschlecht 3.

Beispiel (Hyperelliptische Kurven):

1. Sei C eine hyperelliptische Kurve, gegeben durch die Gleichung
$$y^2 = (x-a_1)\dots(x-a_{2g+2})$$
mit den zwei Punkten U_1 und U_2 im Unendlichen. Sei $\phi : C \to \mathbf{P}^1$ der Morphismus $(x,y) \mapsto x$ und $\sigma : C \to C$ der Automorphismus $(x,y) \mapsto (x,-y)$.
2. Wir hatten schon gesehen, daß gilt
$$|K-P| + P = |K-P-\sigma(P)| + P + \sigma(P),$$
der kanonische Divisor ist also nicht sehr ampel.
3. Ist D ein Divisor vom Grad $2g+1+e$ mit $e \geq 0$, so ist D sehr ampel. Nun ist
$$\ell(D) = (2g+1+e) + 1 - g = g+2+e,$$
also ist
$$C \simeq \phi_D(C) \subseteq \mathbf{P}^{g+1+e},$$
d.h. wir haben C endlich also nichtsinguläre projektive Kurve realisiert. Wie geht das praktisch?
4. Wir wählen als Divisor
$$D = (g+1)U_1 + (g+1)U_2,$$
der Grad $2g+2$ hat mit $\ell(D) = g+3$. Welche Funktionen liegen in $\mathcal{L}(D)$? Zum Beispiel:
$$1, x, x^2, \dots, x^{g+1}, y.$$
Aus Dimensionsgründen bilden diese schon eine Basis. Also ist
$$\phi_D(x,y) = (1 : x : x^2 : \dots : x^{g+1} : y).$$
Wie man eine Gleichung für die Bildkurve erhält, ist eine andere Frage.
5. Wir betrachten nun den Divisor
$$D' = gU_1 + (g+1)U_2,$$
der Grad $2g+1$ hat, also auch sehr ampel ist. Es ist $\ell(D') = g+2$. Offensichtlich gilt:
$$1, x, x^2, \dots, x^g \in \mathcal{L}(D') \subseteq \mathcal{L}(D).$$
Für $\mathcal{L}(D')$ fehlt noch eine Funktion. Nun ist
$$\left(\frac{y}{x^{g+1}}\right)^2 = \left(1 - \frac{a_1}{x}\right)\dots\left(1 - \frac{a_{2g+2}}{x}\right),$$
also gilt o.E.
$$\frac{y}{x^{g+1}}(U_1) = 1, \quad \frac{y}{x^{g+1}}(U_2) = -1.$$
Da $\frac{1}{x}$ uniformisierend in U_1 und U_2 ist, gilt dann:
$$v_{U_1}(y - x^{g+1}) \geq -g, \quad v_{U_2}(y - x^{g+1}) = -(g+1).$$
Damit gilt $y - x^{g+1} \in \mathcal{L}(D')$, also haben wir eine Basis von $\mathcal{L}(D')$:
$$1, x, x^2, \dots, x^g, y - x^{g+1}.$$
Als Morphismus erhalten wir
$$\phi_{D'}(x,y) = (1 : x : x^2 : \dots : x^g : y - x^{g+1}) \in \mathbf{P}^{g+1}.$$

Beispiel: Wir wollen jetzt obiges Beispiel im Fall $g = 2$ betrachten. Dann haben wir den Morphismus
$$(x,y) \mapsto (1 : x : x^2 : y - x^3),$$
der einen Isomorphismus $C \simeq \phi(C) \subseteq \mathbf{P}^3$ induziert. Wir suchen nach Gleichungen für $\phi(C)$. Dafür gibt es verschiedenen Möglichkeiten. Wir beginnen mit einer theoretischen Betrachtung.

- Sei $D = (z_0)$ ein Hyperebenenschnitt. D hat Grad 5. Sei V_m der Vektorraum der Polynome in z_0, z_1, z_2, z_3 vom Grad m. Wir erhalten eine lineare Abbildung
$$\alpha_m : V_m \to \mathcal{L}(mD), \quad f(z_0, z_1, z_2, z_3) \mapsto \frac{f(z_0, z_1, z_2, z_3)}{z_0^m}.$$
- Was heißt $f \in Kern(\alpha_m)$? Das heißt, das Polynom verschwindet auf $\phi(C)$.

- Nun gilt
$$\ell(mD) = 5m + 1 - 2 = 5m - 1, \quad \dim V_m = \binom{m+3\{3}{,}$$
also
$$\dim Kern(\alpha_m) \geq \frac{1}{6}(m-1)(m^2 + 7m - 12).$$
Speziell:
$$\dim Kern(\alpha_2) \geq 1, \quad \dim Kern(\alpha_3) \geq 6.$$
- Quadratische Gleichungen für $\phi(C)$: Wir machen den Ansatz
$$f = c_0 z_0^2 + \cdots + z_3^2.$$
Dann muß gelten $f(1, x, x^2, y - x^3) = 0$ unter Benutzung der Relation $y^2 = x^6 + b_1x^5 + b_2x^4 + b_3x^3 + b_4x^2 + b_5x + b_6$. Man findet durch Nachrechnen, daß nur das Polynom $z_0z_2 - z_1^2$ übrigbleibt. In diesem Fall ist also tatsächlich der Kern von α_2 eindimensional.
- Wir betrachten nun Kubiken
$$g = c_0 z_0^3 + \cdots + c_{19} z_3^3.$$
Durch Einsetzen und Reduzieren mit der Relation $y^2 = x^6 + b_1x^5 + \ldots$ erhält man, daß der Kern von α_3 von folgenden 6 Polynomen erzeugt wird:
$$\begin{gathered} z_0(z_0z_2 - z_1^2), \quad z_1(z_0z_2 - z_1^2), \quad z_2(z_0z_2 - z_1^2), \quad z_3(z_0z_2 - z_1^2), \\ b_6z_0^3 + b_5z_0^2z_1 + b_4z_0z_1^2 - z_0z_3^2 + b_3z_1^3 + b_2z_1^2z_2 + b_1z_1z_2^2 - 2z_1z_2z_3, \\ b_6z_0^2z_1 + b_5z_0z_1^2 + b_4z_1^3 + b_3z_1^2z_2 + b_2z_1z_2^2 - z_1z_3^2 + b_1z_2^3 - 2z_2^2z_3 \end{gathered}$$
- Wir wählen
$$f = z_0z_2 - z_1^2, g = b_6z_0^3 + b_5z_0^2z_1 + b_4z_0z_1^2 - z_0z_3^2 + b_3z_1^3 + b_2z_1^2z_2 + b_1z_1z_2^2 - 2z_1z_2z_3,$$
$$h = b_6z_0^2z_1 + b_5z_0z_1^2 + b_4z_1^3 + b_3z_1^2z_2 + b_2z_1z_2^2 - z_1z_3^2 + b_1z_2^3 - 2z_2^2z_3$$
- Wir probieren zunächst die beiden Gleichungen $f = g = 0$. Durch Nachrechnen findet man:
$$\{f = g = 0\} \cap \{z_0 = 1\} = \phi(C) \cap \{z_0 = 1\}.$$
Im Unendlichen liegt allerdings die ganze Gerade $z_0 = z_1 = 0$ in $f = h = 0$. D.h.
$$\{f = g = 0\} = \phi(C) \cup \{z_0 = z_1 = 0\}.$$
Durch Betrachtung der Jacobimatrix von f und g sieht man, daß $\{f = g = 0\}$ singulär ist in den Punkten
$$(0:0:0:1) \text{ und } (0:0:1:\frac{b_1}{2}).$$
Dies sind dann die Schnittpunkte der Geraden mit $\phi(C)$.
- Wir nehmen jetzt noch die weitere Gleichung $h = 0$ hinzu. Dann sieht man, daß auf $z_0 = z_1 = 0$ nur die zwei obigen Punkte ausgeschnitten werden. Außerdem hat die Jacobimatrix von f, g, h immer Rang 2 auf dem Durchschnitt, d.h.
$$\phi(C) = \{f = g = h = 0\},$$
und der Durchschnitt ist nicht singulär.
- Wir wollen nun noch $\phi(U_1)$ und $\phi(U_2)$ berechnen. Es gilt $v_{U_i}(x) = -1$ und $v_{U_i}(y) = -3$. Außerdem wissen wir
$$(\frac{y}{x^3})(U_1) = 1, \quad (\frac{y}{x^3})(U_2) = -1.$$
Damit gilt in U_2:
$$\frac{y - x^3}{x^3}(U_2) - 2,$$
nun nehmen wir die Darstellung
$$\phi = (1 : x : x^2 : y - x^3) = (\frac{1}{x^3} : \frac{1}{x^2} : \frac{1}{x} : \frac{y - x^3}{x^3}),$$
womit wir in U_2 erhalten
$$\phi(U_2) = (0:0:0:1).$$

Zur Berechnung von $\phi(U_1)$ betrachten wir

$$(\frac{y}{x^3})^2 = 1 + \frac{b_1}{x} + \cdots + \frac{b_6}{x^6},$$

und damit

$$(\frac{y}{x^3} - 1)(\frac{y}{x^3} + 1) = \frac{b_1}{x} + \cdots + \frac{b_6}{x^6}$$

und nach Multiplikation mit x:

$$\frac{y - x^3}{x^2} \cdot (\frac{y}{x^3} + 1) = b_1 + \frac{b_2}{x} + \cdots + \frac{b_6}{x^5},$$

woraus sofort

$$\frac{y - x^3}{x^2}(U_1) = \frac{b_1}{2}$$

folgt. Schreiben wir also

$$\phi = (1 : x : x^2 : y - x^3) = (\frac{1}{x^2} : \frac{1}{x} : 1 : \frac{y - x^3}{x^2}),$$

so wird

$$\phi(U_2) = (0 : 0 : 1 : \frac{b_1}{2}).$$

KAPITEL 8

Spezielle Divisoren

Eine wichtige Aufgabe ist die Berechnung der Dimension $\dim|D|$ für ein vollständiges Linearsystem $|D|$. Wir führen die Abkürzung

$$r(D) = \dim|D| = \ell(D) - 1$$

ein, wo für $\ell(D) = 0$ dann $r(D) = -1$ steht. Uns interessieren aber nun natürlich vor allem nichtleere Linearsysteme $|D|$, d.h. o.E. ist dann D effektiv. Zur Erinnerung: Ein (nichtleeres) Linearsystem $|D|$ mit $deg(D) = d$ und $r(D) = r$ wurde auch mit g_d^r bezeichnet. Für eine Kurve C wollen wir nun alle möglichen solchen g_d^r's einzeichnen, wo wir $r(D)$ gegen $deg(D)$ auftragen.

Kurven vom Geschlecht 0**:** Wir wissen, daß für $deg(D) > 0$ gilt $\ell(D) = deg(D)+1$, also $r(D) = deg(D)$. Damit erhalten wir eine Gerade. (Skizze!)

Kurven vom Geschlecht 1**:** Für $deg(D) > 0$ gilt $\ell(D) = deg(D)$, also $r(D) = deg(D) - 1$. Wir erhalten wieder eine Gerade. (Skizze!)

Was kann man jetzt allgemein sagen? Der Satz von Riemann-Roch besagt:

$$r(D) = deg(D) - g + \ell(K - D).$$

Insbesondere folgt daraus $r(D) \geq deg(D) - g$. Damit kann man skizzieren. Die Größe $\ell(K-D)$ ist eine Art von Störterm und wird auch Spezialitätsindex $i(D)$ genannt. Ein Divisor D heißt speziell, wenn $\ell(D) > 0$ und $i(D) = \ell(K - D) > 0$ ist. (Die Bedingung $\ell(D) > 0$ besagt nur, daß man o.E. D effektiv annehmen kann.) Damit kann man also sagen: alle effektiven Divisoren, die nicht auf der Geraden $r = d - g$ liegen sind speziell.

Ist nun $deg(D) \geq 2g-1$, so ist $\ell(K - D) = 0$, das Linearsystem $|D|$ also nicht speziell. D.h. für $d \geq 2g-1$ liegen alle g_d^r's auf der Geraden $r = d - g$. Außerdem ist klar, daß auch alle Punkte auf diesem Stück der Geraden vorkommen.

Einen speziellen Punkt können wir immer sehen: $|K_C|$ liefert ein g_{2g-2}^{g-1}.

Für $g \geq 1$ hatten wir früher die Abschätzung $\ell(D) \leq deg(D)$ hergeleitet, d.h. $r(D) \leq deg(D) - 1$. Damit erhalten wir einen bestimmten Bereich im (d, r)-Quadranten. Die Frage ist: Was kommt wirklich vor?

Kurven vom Geschlecht 2**:** Für $deg(D) \geq 3$ gilt $r(D) = deg(D) - 2$. Für $deg(D) = 1$ ist $r(D) = 0$, für $deg(D) = 2$ gibt es zwei Fälle: im allgemeinen ist $D \not\sim K$, also $r(D) = 0$. Für $D \sim K \sim g_2^1$ ist $r(D) = 1$. (Bild!)

Wir wollen nun den Satz von Riemann-Roch etwas geometrischer interpretieren. Dazu starten wir mit einem Beispiel:

Beispiel: Sei C eine Kurve vom Geschlecht 3, die nicht hyperelliptisch ist. Durch $|K_C|$ wird dann C in $\mathbf{P}^2$ als glatte ebene Quartik eingebettet und $|K|$ besteht aus den Geradenschnitten. Wir wollen $\dim|P_1 + \cdots + P_d|$ berechnen. Nach Riemann-Roch gilt:

$$\dim|P_1 + \cdots + P_d| = d - 3 + \ell(K - (P_1 + \cdots + P_d)).$$

Nun besteht $|K - (P_1 + \cdots + P_d)|$ aus den Geradenschnitten, die $P_1, \ldots, P_d$ (richtig gezählt) enthalten.

$d = 1$ Hier ist $\ell(K - P_1) = 2$, also

$$\dim|P_1| = 0.$$

$d=2$ Zwei Punkte legen genau eine Gerade fest, also $\ell(K-(P_1+P_2))=1$ und damit

$$\dim|P_1+P_2|=0.$$

$d=3$ Hier gibt es zwei Fälle:

- Liegen P_1,P_2,P_3 nicht auf einer Geraden, so ist $\ell(K-(P_1+P_2+P_3))=0$, also
$$\dim|P_1+P_2+P_3|=0.$$
- Liegen P_1,P_2,P_3 auf einer Geraden, so ist $\ell(K-(P_1+P_2+P_3))=1$, also
$$\dim|P_1+P_2+P_3|=1.$$

$d=4$ Auch hier unterscheiden wir zwei Fälle:

- Die 4 Punkte $P_1,\dots,P_4$ liegen nicht auf einer Geraden:
$$\dim|P_1+P_2+P_3+P_4|=1.$$
Sieht man das?
- Die 4 Punkte liegen auf einer Geraden, d.h. $P_1+P_2+P_3+P_4$ ist Divisor einer Geraden, also kanonischer Divisor:
$$\dim|P_1+P_2+P_3+P_4|=2.$$

$d\geq 5$ Dann gilt:
$$\dim|P_1+\dots+P_d|=d-3.$$

- Bild!

Wir wollen die Betrachtung jetzt verallgemeinern. Sei C eine nichthyperelliptische Kurve vom Geschlecht $g\geq 3$. Dann haben wir die kanonische Einbettung ϕ_K von C in $\mathbf{P}^{g-1}$ als Kurve vom Grad $2g-2$. Die Hyperebenenschnitte entsprechen den effektiven kanonischen Divisoren. Sei $D=P_1+\dots+P_d$ ein effektiver Divisor. Was bedeutet dann $\ell(K-D)$?

- Wir betrachten zunächst den Fall, daß alle P_i verschieden sind. $\ell(K-D)$ zählt dann die linear unabhängigen Hyperebenen, die durch $\phi(P_1),\dots,\phi(P_d)$ gehen. Sei $\overline{\phi(D)}$ der Aufspann von $\phi(P_1),\dots,\phi(P_d)$ in $\mathbf{P}^{g-1}$. Dann gilt:
$$\ell(K-(P_1+\dots+P_d))=(g-1)-\dim\overline{\phi_K(D)}.$$
(Denn: Hat $\overline{\phi_K(D)}$ Dimension e, so kann man nach Koordinatenwechsel annehmen, daß $\overline{\phi_K(D)}$ der Unterraum $x_{e+1}=\dots=x_{g-1}=0$ ist. Eine Basis der Linearformen, die auf $\overline{\phi_K(D)}$ verschwinden, ist dann $x_{e+1},\dots,x_{g-1}$, dies sind also $g-1-e$ Stück. Dies liefert die Behauptung.) Der Satz von Riemann-Roch lautet dann
$$\dim|P_1+\dots+P_d|=d-1-\dim\overline{\phi_K(D)}.$$
- Sind nicht alle P_i verschieden, so muß man $\overline{\phi_K(D)}$ etwas anders definieren, nämlich:
$$\overline{\phi_K(D)}=\cap\{\ell=0:D\leq\phi_K^*(\ell)\}.$$
Die Linearformen der rechten Seite entsprechen natürlich wieder genau den Elementen von $\ell(K-D)$, weswegen die Formel von Riemann-Roch weiterhin gilt.

Wir fassen zusammen:

Satz. *Sei C eine nichthyperelliptische Kurve vom Geschlecht $g\geq 3$ und ϕ_K die kanonische Einbettung. Definiert man für einen effektiven Divisor D*
$$\overline{\phi_K(D)}=\cap\{\ell=0:D\leq\phi_K^*(\ell)\},$$
so gilt:
$$\dim|P_1+\dots+P_d|=d-1-\dim\overline{\phi_K(D)}.$$

Wir stellen ein paar heuristische Überlegungen an:

$d\leq g$ Sind die Punkte allgemein gewählt, sollten sie einen $\mathbf{P}^{d-1}$ aufspannen, also $r(P_1+\dots+P_d)=0$. Sind sie nicht in allgemeiner Lage, wird $r(P_1+\dots+P_d)>0$ werden.

$d\geq g$ Sind die Punkte in allgemeiner Lage, werden sie ganz $\mathbf{P}^{g-1}$ aufspannen, also wird dann $r(P_1+\dots+P_d)=d-g$ sein.

Bemerkung: Die geometrische Formulierung des Satzes von Riemann-Roch gilt auch für hyperelliptische Kurven.

Wir wollen jetzt noch andere Abschätzungen für spezielle Divisoren herleiten. Dazu erst ein Beispiel:
Beispiel: (Divisoren vom Grad $2g-2$) Sei D ein Divisor vom Grad $2g-2$. ($g \geq 2$) Dann sagt Riemann-Roch
$$r(D) = g - 2 + \ell(K-D),$$
also gibt es zwei Fälle: Ist $D \not\sim K$, so ist D nicht speziell und $r(D) = g-2$. Ist $D \sim K$, so ist $r(K) = g-1$. (Bild!)

LEMMA. *Sind D_1 und D_2 effektive Divisoren, so gilt:*
$$r(D_1 + D_2) \geq r(D_1) + r(D_2).$$

Beweis: Wir definieren
$$\alpha : |D_1| \times |D_2| \to |D_1 + D_2|, \quad (E_1, E_2) \mapsto E_1 + E_2.$$
Anders geschrieben:
$$\alpha : \mathbf{P}^{r(D_1)} \times \mathbf{P}^{r(D_2)} \to \mathbf{P}^{r(D_1+D_2)}.$$
Zunächst ist klar: für jedes $E \in |D_1 + D_2|$ ist $\alpha^{-1}(E)$ endlich, da sich E als endliche Summe nur endlich oft zerlegen läßt. Aus der Dimensionstheorie folgt dann durch Dimensionsvergleich
$$r(D_1 + D_2) \geq r(D_1) + r(D_2).$$
Man kann explizit anschreiben, daß α ein Morphismus ist. ■

Anwendung: Sei D ein effektiver spezieller Divisor. Dann gilt $r(K-D) \geq 0$ und nach dem Lemma:
$$r(D) + r(K-D) \leq g - 1,$$
sowie nach Riemann-Roch
$$r(D) - r(K-D) = deg(D) + 1 - g,$$
woraus sich durch Addition sofort
$$r(D) \leq \frac{1}{2} deg(D)$$
ergibt. Damit haben wir bereits die erste Hälfte des folgendes Satzes bewiesen:

SATZ (Clifford). *Sei D ein effektiver spezieller Divisor auf C. Dann gilt*
$$r(D) = \dim |D| \leq \frac{1}{2} deg(D).$$
Das Gleichheitszeichen tritt in 3 Fällen auf:
- *für $D = 0$,*
- *für $D = K$,*
- *falls C hyperelliptisch ist und $D = r \cdot g^1_2$.*

Es bleibt nur noch zu untersuchen, wann das Gleichheitszeichen in der Abschätzung auftritt. Dafür gibt es mehrere Beweise. Einer eigenständiger findet sich bei Hartshorne. Wir geben hier einen unvollständigen Beweis, der aber geometrisch einsichtiger ist. Dazu benötigen wir folgenden Satz:

SATZ (Prinzip der allgemeinen Lage). *Sei C eine nichtdegenerierte Kurve im $\mathbf{P}^r$. Ist H eine allgemeine Hyperebene und $P_1, \ldots, P_m \in C \cap H$ mit $m \leq r$, so spannen die $P_1, \ldots, P_m$ einen $\mathbf{P}^{m-1}$ auf.*

Beweis des Satzes von Clifford: Wir müssen nur noch die letzte Aussage zeigen. Sei also D ein effektiver spezieller Divisor mit $r(D) = \frac{1}{2} deg(D)$ und $D \not\sim 0$, $D \not\sim K$.

- Nach Riemann-Roch gilt mit $\ell(D) = \frac{1}{2} deg(D) + 1$:
$$\frac{1}{2} deg(D) + 1 = \ell(D) = deg(D) + 1 - g + \ell(K-D),$$
also
$$\ell(K-D) = g - \frac{1}{2} deg(D), \quad r(K-D) = \frac{1}{2} deg(K-D).$$

Indem wir eventuell D mit $K - D$ vertauschen, können wir

$$deg(D) \leq g - 1$$

annehmen.

- Wir nehmen nun an, C wäre nicht hyperelliptisch. Die geometrische Form von Riemann-Roch sagt dann:
$$\frac{1}{2}deg(D) = r(D) = deg(D) - 1 - \dim \overline{\phi_K(D)},$$
bzw.
$$\dim \overline{\phi_K(D)} = \frac{1}{2}d - 1$$
mit $d = deg(D)$. Also
$$\overline{\phi_K(D)} \simeq \mathbf{P}^{\frac{1}{2}d-1}.$$
- Wegen $|D| + |K - D| \subseteq |K|$ sind die Divisoren aus $|D|$ in Hyperebenen enthalten. Nun besagt das Prinzip der allgemeinen Lage, daß für einen allgemeinen Divisor $E \in |D|$ die Punkte daraus einen $\mathbf{P}^{d-1}$ aufspannen. Das widerspricht aber obiger Dimensionsaussage. Also kann etwas nicht stimmen: C muß hyperelliptisch sein.
- Wir können also jetzt annehmen, daß C hyperelliptisch ist. Sei $r = r(D)$. Wir betrachten
$$D + (g - 1 - r)g_2^1.$$
Der Grad davon ist $2g - 2$ und
$$r(D + (g - 1 - r)g_2^1) \geq r(D) + (g - 1 - r) = g - 1,$$
also ist
$$D + (g - 1 - r)g_2^1 \sim K \sim (g - 1)g_2^1,$$
also
$$|D| = rg_2^1. \blacksquare$$

Bemerkungen:

1. Sei $|D|$ ein spezielles Linearsystem g_d^r. Dann gilt nach Riemann-Roch
$$r = r(D) = d + 1 - g + r(K - D),$$
also ist $|K - D|$ ein Linearsystem $g_{2g-2-d}^{g+r-d-1}$. Bei der Betrachtung der speziellen Linearsysteme können wir uns also dann auf solche mit $d \leq g - 1$ beschränken.
2. Wir hatten schon bemerkt, daß es leicht ist, Linearsysteme g_d^0 für $d \leq g - 1$ zu konstruieren. Dies folgte aus der geometrischen Form von Riemann-Roch durch Wahl d allgemeiner Punkte.
3. Da auch der hyperelliptische Fall einfach ist, können wir uns für die Betrachtung der speziellen Linearsysteme auf vollständige g_d^r's beschränken mit
$$3 \leq d \leq g - 1, \quad 1 \leq r < \frac{1}{2}d.$$

Wir wollen jetzt noch Kurven vom Geschlecht 4 und 5 etwas näher betrachten. Dazu brauchen wir noch ein Hilfsmittel.

Der Satz von Bézout: Seien $f_1, \ldots, f_{r-1}$ Hyperflächen in $\mathbf{P}^r$ vom Grad $d_1, \ldots, d_{r-1}$. Ist dann der Durchschnitt

$$\{f_1 = \cdots = f_{r-1} = 0\}$$

eine Vereinigung von irreduziblen Kurven $C_1, \ldots, C_m$, so gilt:

$$e_1 \cdot deg(C_1) + \cdots + e_m \cdot deg(C_m)d_1 \ldots d_{r-1},$$

wo die e_i's gewisse Vielfachheiten sind. (Dies ist eine Form des Satzes von Bézout.) Gilt

$$C = \{f_1 = \cdots = f_{r-1} = 0\} \text{ und } deg(C) = d_1 \ldots d_{r-1},$$

so heißt C vollständiger Durchschnitt.

Beispiel: Ist C eine Kurve vom Geschlecht 2, so hätten wir sie eingebettet in $\mathbf{P}^3$ als Kurve vom Grad 5. Da C nicht in einer Hyperebene liegt, kann C kein vollständiger Durchschnitt sein. ($5 = deg(f) \cdot deg(g)$ hat nur triviale Lösungen.) C lag auf einer Quadrik Q. Sei K eine Kubik, die C enthält, die aber Q nicht enthält. Dann gilt: $Q \cap K = C \cup C'$ und

$$6 = deg(Q) \cdot deg(K) = deg(C) + deg(C'),$$

also $deg(C') = 1$, d.h. C' ist Gerade, was wir schon explizit gesehen hatten.

Kurven vom Geschlecht 4: Sei C nichthyperelliptisch vom Geschlecht 4. Das kanonische Linearsystem $|K|$ ist ein g_6^3, wir können uns also o.E. C als kanonische Kurve vom Grad 6 in $\mathbf{P}^3$ denken. Die geometrische Form von Riemann-Roch besagt:

$$r(P_1 + \cdots + P_d) = d - 1 - \dim \overline{P_1 + \cdots + P_d},$$

wo $\overline{P_1 + \cdots + P_d}$ den Durchschnitt aller Hyperebenen bezeichnet, die (richtig gezählt) $P_1 + \cdots + P_d$ enthalten.

Nach den Bemerkungen oben brauchen wir uns bei den speziellen Linearsystemen nur für die vollständigen g_3^1's zu interessieren. Gibt es solche? Riemann-Roch liefert, daß man 3 Punkte braucht, die auf einer Geraden liegen. (So etwas nennt man dann eine Trisekante.)

Beschreibung von C: Sei wieder V_m der Vektorraum der homogenen Polynome vom Grad m in z_0, z_1, z_2, z_3 und

$$\alpha_m : V_m \to \mathcal{L}(mK), f \mapsto \frac{f}{z_0^m}.$$

Der Kern von α_m sind dann die Polynome vom Grad m, die auf C verschwinden. Nun gilt

$$\dim V_2 = 10, \quad \ell(2K) = 9,$$

also gibt es eine Quadrik Q, die C enthält. Sie ist eindeutig bestimmt, da der Durchschnitt zweier Quadriken Grad 4 hätte. Weiter ist

$$\dim V_3 = 20, \quad \ell(3K) = 15,$$

also ist $kern(\alpha_3)$ mindestens 5-dimensional. 4 Kubiken kommen von Q her. Sei K eine weitere. Dann hat $K \cap Q$ Grad 6, muß also bereits C sein, d.h. C ist vollständiger Durchschnitt von Q und K.

Ist nun G eine Gerade in $\mathbf{P}^3$, die C in 3 Punkten schneidet, so schneidet G die Quadrik Q in mindestens 3 Punkten, also gilt schon $G \subseteq Q$. Die Geraden auf Quadriken im $\mathbf{P}^3$ sind aber bekannt. Für Q kommen nur (nach Koordinatenwechsel) zwei Möglichkeiten in Frage:

- $Q = \{z_0 z_3 = z_1 z_2\}$. Es gibt zwei Familien von Geraden auf Q:

  $$z_3 = \lambda z_1, z_2 = \lambda z_0 \quad \text{und} \quad z_3 = \mu z_2, z_1 = \mu z_0.$$

  Beide Familien liefern jeweils ein Linearsystem g_3^1 auf C. Es gibt also zwei Linearsysteme g_3^1.
- $Q = \{z_0 z_2 = z_1^2\}$ (quadratischer Kegel mit Spitze in $(0:0:0:1)$). Es gibt nur folgende Geraden auf Q:

  $$z_2 = \lambda z_1, z_1 = \lambda z_0.$$

  Damit hat C genau ein Linearsystem g_3^1.

Kurven vom Geschlecht 5: Sei C eine nicht hyperelliptische Kurve vom Geschlecht 5. C kann dann als kanonische Kurve vom Grad 8 in $\mathbf{P}^4$ betrachtet werden.
Die interessanten speziellen Linearsysteme sind jetzt die vollständigen g_3^1's und g_4^1's. Wir werden jetzt nur die möglichen g_3^1's betrachten. Die geometrische Form von Riemann-Roch sagt, daß die Divisoren wieder aus Trisekanten bestehen.

Quadriken durch C: Um zu sehen, welche quadratischen Polynome auf C in $\mathbf{P}^4$ verschwinden, betrachten wir wieder die Abbildung

$$\alpha_2 : V_2 \to \mathcal{L}(2K), \quad f(z_0, \ldots, z_4) \mapsto \frac{f(z_0, \ldots, z_4)}{z_0^2}.$$

Es gilt

$$\dim kern\alpha_2 \geq \dim V_2 - \ell(2K) = \binom{2+4}{2} - (2\cdot 8+1-5) = 15-12 = 3.$$

Also liegt C in 3 linearunabhängigen Quadriken Q_1, Q_2, Q_3.
Fall 1: $Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3$ ist eine Kurve. Dann ist nach Bézout der Grad des Durchschnitts 8, also ist C vollständiger Durchschnitt der drei Quadriken.
Fall 2: Im Durchschnitt der 3 Quadriken liegt eine Fläche. Dann braucht man zur Beschreibung von C noch weitere Gleichungen.

Behauptung: Ist C vollständiger Durchschnitt dreier Quadriken Q_1, Q_2, Q_3, so hat C kein Linearsystem g_3^1.
Beweis: Angenommen, C hätte ein Linearsystem g_3^1. Dann würde C eine Trisekante besitzen. Sei also G eine Gerade in $\mathbf{P}^4$, die durch 3 Punkte von C geht. G schneidet Q_i also auch mindestens in 3 Punkten, also ist schon $G \subseteq Q_i$ und damit $G \subseteq Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3$, was ein Widerspruch zu unserer Voraussetzung ist.
■

Wir betrachten jetzt den Fall, daß C ein Linearsystem g_3^1 hat. Dann hat C auch ein vollständiges Linearsystem g_5^2. Dies liefert eine Abbildung ϕ von C auf eine Kurve $C_0 \subseteq \mathbf{P}^2$, die Grad 5 hat. ($5 = deg(\phi) \cdot deg(C_0)$) Insbesondere ist ϕ birational. Wäre C_0 nichtsingulär, so hätte C_0 Geschlecht 6, was nicht sein kann. Man kann zeigen, daß C_0 genau eine Singularität hat. Sei S ein singulärer Punkt von C_0. Dann liefert das Geradenbüschel durch S ein Linearsystem g_3^1. Dies soll im Augenblick genügen.

Bemerkung: Man kann zeigen, daß für nichthyperelliptische Kurven vom Geschlecht 5 einer der beiden Fällen vorliegt:

- C ist vollständiger Durchschnitt dreier Quadriken im $\mathbf{P}^4$, oder
- C ist nichtsinguläres Modell einer ebenen Quintik mit einer Singularität.

Zum Schluß noch eine Bemerkung zur allgemeinen Situation. (Brill-Noether-Theorie): Ist die Brill-Noether-Zahl

$$\rho = g - (r+1)(g-d+r) \geq 0,$$

so gibt es auf C ein vollständiges Linearsystem g_d^r.

KAPITEL 9

Kurven im $\mathbf{P}^3$

Wir wissen, daß sich nicht jede Kurve als glatte ebene Kurve realisieren läßt. (Es gibt keine hyperelliptischen Kurven im $\mathbf{P}^2$.) Dagegen werden wir zeigen, daß jede Kurve C in den $\mathbf{P}^3$ eingebettet werden kann.

Erinnerung an Projektionen: Sei $O \in \mathbf{P}^n$ und $H \subseteq \mathbf{P}^n$ eine Hyperebene, die O nicht enthält.

- Wir definieren die Projektion $\pi : \mathbf{P}^n \setminus \{O\} \to H \simeq \mathbf{P}^{n-1}$ durch: Ist $P \neq O$ und G die Verbindungsgerade von P und O, so sei $\pi(O)$ der Schnittpunkt von G und H.
- Wählt man Koordinaten mit $O = (0 : 0 : \cdots : 0 : 1)$ und $H = \{x_n = 0\}$, so ist

$$\pi(x_0 : \cdots : x_n) = (x_0 : \cdots : x_{n-1}).$$

- Aus der zweiten Darstellung sieht man sofort: Die Hyperebenen in H entsprechen bijektiv den Hyperebenen in $\mathbf{P}^n$, die O enthalten.

Sei jetzt $C \subseteq \mathbf{P}^n$ eine Kurve und $O \in \mathbf{P}^n$, $O \notin C$. Die Projektion von O aus liefert dann einen Morphismus $\psi : C \to \mathbf{P}^{n-1}$. Nach obiger Bemerkung entspricht dieser Morphismus dem Linearsystem, das aus den Hyperebenen besteht, die O enthalten. Sei L_O dieses Linearsystem. Wann liefert ψ eine Einbettung? Dazu haben wir zwei Kriterien zu testen:

1. Seien $P, Q \in C$ zwei verschiedene Punkte. Wir brauchen dann eine Hyperebene aus L_O, die P aber nicht Q enthält. Dies ist gleichwertig damit, daß O, P, Q nicht auf einer Geraden liegen.
2. Sei jetzt $P \in C$. Dann brauchen wir eine Hyperebene aus L_O, die nur einfach durch P geht. Dies bedeutet, daß die Tangente an C in P nicht durch O geht.

Eine Gerade G, die durch zwei verschiedene Punkte von C geht, heißt Sekante. Damit haben wir bewiesen:

SATZ. *Sei C eine Kurve in $\mathbf{P}^n$ und O ein Punkt, der nicht auf C liegt. Dann liefert die Projektion von O aus einen Einbettung $\psi : C \to \mathbf{P}^{n-1}$ genau dann, wenn O auf keiner Sekante von C und auf keiner Tangente von C liegt.*

Überlegung:

- Kann man immer solche Punkte O finden?
- Die Vereingungsmenge aller Sekanten wird etwas 3-dimensionales sein, die Vereingungsmenge aller Tangenten etwas 2-dimensionales.
- Ist also $n \geq 4$, so findet man immer ein $O \in \mathbf{P}^n$, das auf keiner Tangente und keiner Sekante von C liegt, d.h. die Projektion von O aus bettet C in $\mathbf{P}^{n-1}$ ein.
- Diesen Prozeß kann man fortsetzen, solange $n \geq 4$ ist. Irgendwann erhält man dann eine zu C isomorphe Kurve im $\mathbf{P}^3$.
- Bei der Projektion geht man vom Linearsystem immer nur zu Teillinearsystemen über.

Damit haben wir einen Beweis des folgenden Satzes skizziert:

SATZ. *Sei C eine Kurve und $|D|$ ein sehr amples Linearsystem. Dann gibt es ein Teilsystem $L \subseteq |D|$, das C in $\mathbf{P}^3$ einbettet. Insbesondere läßt sich jede Kurve in den $\mathbf{P}^3$ einbetten.*

Bemerkung: Sei C eine Kurve und D ein Divisor vom Grad $d \geq 2g + 1$. Wir wissen, daß dann D sehr ampel ist, d.h. $|D|$ liefert einen Einbettung von C in einen $\mathbf{P}^n$, und durch ein Teilsystem $L \subseteq |D|$ erhalten wir C in $\mathbf{P}^3$ eingebettet als Kurve vom Grad d.

Kurven vom Geschlecht 0**:** Für jedes $d \geq 1$ können wir $\mathbf{P}^1$ als glatte Kurve vom Grad d in $\mathbf{P}^3$ realisieren. $d = 1$ liefert eine Gerade, $d = 2$ einen ebenen Kegelschnitt, für $d \geq 3$ sind die Kurven nichtentartete Raumkurven.

Kurven vom Geschlecht 1**:** Für jedes $d \geq 3$ können wir eine Kurve vom Geschlecht 1 als Kurve vom Grad d in $\mathbf{P}^3$ realisieren. Für $d = 3$ erhalten wir eine ebene Kubik. Für $d = 2$ erhalten wir ein Linearsystem g^1_2, also einen Morphismus nach $\mathbf{P}^1$, für $d = 1$ eine Abbildung auf einen Punkt.

Kurven vom Geschlecht 2**:** Sei C eine Kurve vom Geschlecht 2. Für jedes $d \geq 5$ läßt sich C als Kurve vom Grad d im $\mathbf{P}^3$ realisieren. Wir müssen noch zeigen, daß die anderen Fälle nicht auftreten: Da C nicht als ebene Kurve realisiert werden kann, brauchen wir vollständige Linearsysteme g^r_d mit $r \geq 3$ und $d \leq 4$. Das gibt es aber nicht.

Kurven vom Geschlecht 3**:** Sei C eine Kurve vom Geschlecht 3. Für jedes $d \geq 7$ läßt sich C als Raumkurve vom Grad d realisieren. Es bleibt zu untersuchen, ob es sehr ample g^r_d's gibt mit $r \geq 2$ und $d \leq 6$. Für $r \geq 3$ kommt nur ein Linearsystem g^3_6 in Frage. Wir werden weiter unten skizzieren, daß ein allgemeines Linearsystem g^3_{g+3} sehr ampel ist. D.h. C läßt sich als Kurve vom Grad 6 realisieren. Bleibt zu untersuchen, wann sich C als ebene Kurve realisieren läßt. Dies wissen wir aber bereits: genau dann, wenn C nicht hyperelliptisch ist. Dann ist C eine glatte ebene Quartik.

Wir wollen jetzt eine bessere Abschätzung statt $d \geq 2g + 1$ geben.

SATZ. *Sei C eine Kurve vom Geschlecht $g \geq 2$. Dann läßt sich C genau dann als Kurve vom Grad d in $\mathbf{P}^3$ mit nichtspeziellem Hyperebenenschnitt realisieren, wenn $d \geq g + 3$ gilt.*

Beweisskizze: Sei zunächst $C \subseteq \mathbf{P}^3$ mit nichtspeziellem Hyperebenenschnitt D gegeben. Nach Riemann-Roch gilt $r(D) = d - g$, also $2 \leq d - g$. Wäre $2 = d - g$, so wäre C eine ebene Kurve. Ein kanonischer Divisor ist $K = (d-3)D$, also $K - D = (d-4)D$. Wegen $\ell(K - D) = 0$ muß $d < 4$ gelten, was aber unserer Voraussetzung $g \geq 2$ widerspricht.
Sei jetzt $d \geq g + 3$. Wir können uns auf den Bereich $g + 3 \leq d \leq 2g + 1$ beschränken. Hier braucht man wieder Allgemeinheitsargumente um zu sehen, daß ein allgemeiner Divisor vom Grad d sehr ampel ist. Wir verzichten darauf. ∎

Was kann man sagen, falls der Hyperebenenschnitt speziell ist?

LEMMA. *Sei C eine nichtausgeartete Kurve im $\mathbf{P}^3$ vom Grad d mit speziellem Hyperebenenschnitt. Dann gilt $d \geq 6$ und $g \geq \frac{1}{2}d + 1$. Außerdem ist im Fall $d = 6$ die Kurve C die kanonische Kurve vom Geschlecht* 4.

Beweis: Sei D ein Hyperebenenschnitt. Da D speziell ist, gilt $d \leq 2g - 2$, also $g \geq \frac{1}{2}d + 1$. Nach Clifford gilt:

$$3 \leq r(D) \leq \frac{1}{2}d,$$

woraus sofort $d \geq 6$ folgt. Im Fall $d = 6$ haben wir $r(D) = \frac{1}{2}d$ und Clifford liefert, daß $D = K$ und damit C kanonische Kurve vom Geschlecht 4 ist, oder daß C hyperelliptisch und $D = 3 \cdot g^1_2$ ist. Letztere Möglichkeit geht aber nicht, da $3 \cdot g^1_2$ nicht sehr ampel ist. ∎

Mit diesen Aussagen können wir jetzt weitermachen:

Kurven vom Geschlecht 4**:** Sei C eine Kurve vom Geschlecht 4. Für jedes $d \geq 7$ läßt sich dann C als Raumkurve vom Grad d realisieren. Außerdem läßt sich C noch als kanonische Kurve vom Grad 6 realisieren, falls C nicht hyperelliptisch ist.

Kurven vom Geschlecht 5**:** Sei C eine Kurve vom Geschlecht 5. Für jedes $d \geq 8$ läßt sich C als Kurve im $\mathbf{P}^3$ vom Grad d realisieren. (Nichtspezielle Hyperebenenschnitte) Nun bleiben noch $d = 7$ und $d = 8$ zu untersuchen bei speziellen Hyperebenenschnitten.

- Ist C nichthyperelliptisch, so liefert $|K|$ eine Kurve vom Grad 8 im $\mathbf{P}^4$.

- Ist C vollständiger Durchschnitt dreier Quadriken im $\mathbf{P}^4$, so hat C kein Linearsystem g_3^1, also auch keine Trisekanten. Die Projektion von einem Punkt von C aus in den $\mathbf{P}^3$ liefert eine zu C isomorphe Kurve vom Grad 7.
- Gibt es noch weitere Möglichkeiten?

Man sieht, daß die Frage, ob man C als Kurve vom Grad d realisieren kann, auf die Frage nach der Existenz von Linearsystemen g_d^3 hinausläuft.

Man kann die Frage auch andersherum stellen:

Fragen:

- Sei $H_{d,g}$ die Menge der glatten Kurven in $\mathbf{P}^3$ vom Grad d und Geschlecht g.
- Für welche (d,g) ist $H_{d,g} \neq \emptyset$?
- Was kann man über die Kurven in $H_{d,g}$ sagen, falls welche existieren?
- Wie groß ist $H_{d,g}$? Kann man als algebraische Varietät betrachten?

Wir werden uns zunächst auf die Frage beschränken, ob es Kurven vom Grad d und Geschlecht g gibt. Beispielhaft werden wir den Bereich $1 \leq d \leq 10, 0 \leq g \leq 12$ skizzieren.

Wir fassen zusammen, was wir bereits wissen:

- Für jedes $d \geq 2g+1$ ist $H_{d,g} \neq \emptyset$.
- Für $g \geq 3$ kann die erste Aussage noch verbessert werden: Für jedes $d \geq g+3$ ist $H_{d,g} \neq \emptyset$.
- Für $g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$ gibt es ebene Kurven als Beispiele.
- Außerdem haben wir noch $H_{6,4} \neq \emptyset$ (Kanonische Kurven vom Geschlecht 4) und $H_{7,5} \neq \emptyset$.

Eine nichttriviale Abschätzung gibt der folgende Satz:

SATZ (Castelnuovo). *Sei C eine Kurve vom Grad d und Geschlecht g im $\mathbf{P}^3$, die nicht in einer Ebene enthalten ist. Dann gilt*

$$\begin{aligned} g &\leq \frac{1}{4}d^2 - d + 1 \quad \textit{für } d \equiv 0 \bmod 2, \\ g &\leq \frac{1}{4}d^2 - d + \frac{3}{4} \quad \textit{für } d \equiv 1 \bmod 2. \end{aligned}$$

Beweis:

1. Sei $D = P_1 + \cdots + P_d$ ein Hyperebenenschnitt von C. Wir können nach dem Prinzip der allgemeinen Lage annehmen, daß keine drei Punkte der P_i's kollinear sind. Für zwei verschiedene Punkte P_i, P_j sei $e_{ij} = 0$ eine Ebene, die nur die zwei Punkte P_i, P_j enthält und keine anderen dieser Punkte. Weiter sei $f_i = 0$ eine Ebene, die nur P_i enthält und sonst keine Punkte von D. Sei weiter $g = 0$ eine Ebene, die keinen der Punkte P_i enthält.
2. Nun gilt:
$$|nD - P_1 - \cdots - P_i| + P_1 + \cdots + P_i \subseteq |nD - P_1 - \cdots - P_{i-1}| + P_1 + \cdots + P_{i-1}.$$
Das Ungleichheitszeichen $\neq$ gilt zum Beispiel dann, wenn wir Hyperflächen vom Grad n finden können, die die Punkte $P_1, \ldots, P_{i-1}$ enthalten, nicht jedoch den Punkt P_i.
3. *Behauptung:* Für $i = 1, \ldots, \min(d, 2n+1)$ gilt
$$|nD - P_1 - \cdots - P_i| + P_1 + \cdots + P_i \neq |nD - P_1 - \cdots - P_{i-1}| + P_1 + \cdots + P_{i-1}.$$
Beweis: Wir unterscheiden zwei Fälle:
$i-1 = 2m$: Dann ist $m \leq n$ und die Fläche $e_{12}e_{34}\ldots e_{i-2,i-1}g^{n-m}$ hat Grad n und tuts.
$i-1 = 2m-1$: Dann ist $m \leq n$ und die Fläche
$$e_{12}e_{34}\ldots e_{i-3,i-2}f_{i-1}g^{n-m}$$
hat Grad n und erfüllt die Bedingung.

4. Folglich gilt jetzt für $i = 1, \ldots, \min(d, 2n+1)$:
$$r(nD - P_1 - \cdots - P_{i-1}) = r(nD - P_1 - \cdots - P_i) + 1$$
und somit
$$r(nD) = r(nD - P_1 - \cdots - P_{\min(d,2n+1)}) + \min(d, 2n+1) \geq r((n-1)D) + \min(d, 2n+1).$$
5. Damit erhalten wir durch Aufaddieren mit $r(0) = 0$:
$$r(ND) \geq \sum_{n=1}^{N} \min(d, 2n+1).$$
Sei N groß.

6. *Fall d gerade:* Dann gilt:
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \min(d, 2n+1) &= \sum_{n=1}^{\frac{d}{2}-1} (2n+1) + \sum_{n=\frac{d}{2}}^{N} d \\ &= (\frac{d}{2} - 1) + (\frac{d}{2} - 1) \cdot \frac{d}{2} + d \cdot (N + 1 - \frac{d}{2}) \\ &= Nd - (\frac{1}{4}d^2 - d + 1).\end{aligned}$$
Für große N gilt aber nach Riemann-Roch: $r(ND) = Nd - g$, also folgt
$$g \leq \frac{1}{4}d^2 - d + 1.$$
7. *Fall d ungerade:*
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \min(d, 2n+1) &= \sum_{n=1}^{\frac{d-1}{2}} (2n+1) + \sum_{n=\frac{d-1}{2}+1}^{N} d \\ &= Nd - (\frac{1}{4}d^2 - d + \frac{3}{4}).\end{aligned}$$
Wieder folgt dann mit Riemann-Roch
$$g \leq \frac{1}{4}d^2 - d + \frac{3}{4}. \quad \blacksquare$$

Beispiel: Ist C eine nichtebene Raumkurve vom Grad d und Geschlecht g, so haben wir die Abschätzungen

d	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$g \leq$	0	0	0	1	2	4	6	9	12	16

Für $d \leq 10$ und $g \leq 12$ bleibt dann noch offen, ob es Kurven gibt mit
$$(d, g) = (7, 6), (8, 6), \ldots, (8, 9), (9, 7), \ldots, (9, 12), (10, 8), \ldots, (10, 12).$$

Frage: Wie kommt man an weitere Beispiele für Kurven?

Vollständige Durchschnitte im $\mathbf{P}^3$: Ist $C \subseteq \mathbf{P}^3$ vollständiger Durchschnitt von Flächen vom Grad a und b, so kann man zeigen, daß gilt
$$d = ab, \quad g = \frac{1}{2}ab(a + b - 4) + 1 \text{ Adjunktionsformel.}$$
Für $b = 1$ ergeben sich die ebenen Kurven.

Beispiele: Damit erhalten wir in unserem Beispielbereich für $(d, g) = (8, 9)$ und $(d, g) = (9, 10)$ Beispiele, die noch ausstanden.

Kurven auf $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ und auf einer nichtsingulären Quadrik im $\mathbf{P}^3$: Die Kurven auf $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ werden definiert durch bihomogene Polynome $f(x_0, x_1, y_0, y_1)$ vom Bigrad (a, b), d.h. $f(\lambda x_0, \lambda x_1, \mu y_0, \mu y_1) =$

$\lambda^a\mu^b f(x_0,x_1,y_0,y_1)$. Ist $C=\{f=0\}$ glatt auf $\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1$, so hat C das Geschlecht $g=(a-1)(b-1)$. Nun ist $\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1$ isomorph zur Quadrik $z_0z_3=z_1z_2$ im $\mathbf{P}^3$ vermöge der Abbildung

$$((x_0:x_1),(y_0:y_1))\mapsto(x_0y_0:x_0y_1:x_1y_0:x_1y_1).$$

Dies liefert Kurven in $\mathbf{P}^3$ vom Grad $d=a+b$ und Geschlecht $g=(a-1)(b-1)$.

Beispiele: Von den ausstehenden Beispielen erhalten wir

a	b	d	g
3	4	7	6
3	5	8	8
4	4	8	9
3	6	9	10
4	5	9	12
3	7	10	12

Kurven auf einer singulären irreduziblen Quadrik: Es gibt Kurven von 2 Typen:
- $d=2a$, $g=(a-1)^2$,
- $d=2a+1$, $g=a(a-1)$.

Man sieht, daß man dadurch nicht mehr Kurven als auf nichtsingulären Quadriken erhält.

Da wir jetzt eine Grad-Geschlecht-Beziehung für Kurven auf Quadriken haben, können wir folgendes zeigen:

FOLGERUNG. *Es gibt keine Kurve vom Grad* 9 *und Geschlecht* 11 *in* $\mathbf{P}^3$.

Beweis: Angenommen, es gäbe eine solche Kurve. Sei D ein Hyperebenenschnitt.
- Dann gilt
$$\ell(2D)=18+1-11+\ell(K-2D)=8+\ell(K-2D).$$
Ist V_2 der Vektorraum der quadratischen Polynome in $z_0,\dots,z_3$, so gilt $\dim V_2=10$. Wie üblich betrachten wir die Abbildung
$$\alpha_2:V_2\to\mathcal{L}(2D).$$
Der Kern von α_2 besteht aus den quadratischen Polynomen, die auf C verschwinden.
- *Behauptung:* C kann auf keiner Quadrik liegen.
Beweis: Nach den Bemerkungen über Kurven auf quadratischen Flächen muß es dann Zahlen $a,b\ge 1$ geben mit
$$9=a+b,\quad 11=(a-1)(b-1).$$
O.E. ist $a\le b$, also $a=2$ und $b=12$. Das geht aber nicht!
- Da C nicht auf einer Quadrik liegen kann, ist $kern(\alpha_2)=0$, also $\ell(K-2D)=2$. Dann ist
$$|K-2D|=g^1_2,$$
C also hyperelliptisch. Weiter folgt $|2D|=g^9_{18}$, nach dem Satz von Clifford also $|2D|=9\cdot g^1_2$. Das Linearsystem $|2D|$ ist also nicht sehr ampel. Dann kann aber auch $|D|$ nicht sehr ampel sein: ein Widerspruch! Also kann keine Kurve mit den entsprechenden Eigenschaften existieren. ■

Beispiel: Offen bleibt jetzt für $d\le 10, g\le 12$ noch die Existenz von Kurven mit

$$(d,g)=(8,6),(8,7),(9,7),(9,8),(9,9),(10,8),(10,9),(10,10),(10,11).$$

Dies sind genau die weißen Flecken bei Hartshorne [**Har77**, S. 354].

Nun kann man versuchen, Kurven auf anderen Flächen zu realisieren. Bereits 1882 hat Halphen folgenden Satz angegeben, allerdings mit fehlerhaftem Beweis. Ein richtiger Beweis dafür wurde 1982 von Gruson und Peskine [**Har82**], [**Har87**] gegeben.

SATZ. *Sei C eine Kurve vom Geschlecht g und Grad d im $\mathbf{P}^3$. Dann gilt:*
1. *Ist C in einer Ebene enthalten, so ist $g=\frac{1}{2}(d-1)(d-2)$. Für jedes $d\ge 1$ existieren solche Kurven.*

2. *Liegt C auf einer irreduziblen Quadrik, so gibt es Zahlen $a, b \geq 0$ mit $d = a+b$ und $g = (a-1)(b-1)$. Für alle $a, b \geq 1$ existieren auch solche Kurven auf einer nichtsingulären Quadrik.*
3. *Ist C weder in einer Ebene noch in einer Quadrik enthalten, so gilt*
$$0 \leq g \leq \frac{1}{6}d(d-3)+1.$$
4. *Für jedes $d \geq 1$ und g mit der Voraussetzung aus 3. gibt es eine Kurve vom Grad d und Geschlecht g in $\mathbf{P}^3$.*

Wir geben hier nur eine Beweisskizze:

- Die Aussagen in 1. und 2. sind klar.
- Die Abschätzung in 3. kann man mit ähnlichen Techniken wie die Abschätzung von Castelnuovo beweisen.
- Die Existenzaussagen in 4. folgend aus den nachfolgenden zwei Sätzen.

Satz (K). *Für jedes $d \geq 1$ und jedes g mit*
$$\frac{d^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}} - d + 1 < g \leq \frac{1}{6}d(d-3)+1$$
gibt es eine nichtsinguläre irreduzible Kurve vom Grad d und Geschlecht g auf einer nichtsingulären kubischen Fläche im $\mathbf{P}^3$.

Satz (Q). *Für jedes $d \geq 1$ und jedes g mit*
$$0 \leq g \leq \frac{1}{8}(d-1)^2$$
gibt es eine nichtsinguläre irreduzible Kurve vom Grad d und Geschlecht g auf einer (singulären) rationalen Fläche vom Grad 4 im $\mathbf{P}^3$.

Erinnerung an kubische Flächen: Wie kann man nichtsinguläre kubische Flächen im $\mathbf{P}^3$ konstruieren? Man nehme 6 Punkte $P_1, \ldots, P_6$ im $\mathbf{P}^2$, die nicht auf einem Kegelschnitt liegen. Sei X die Aufblasung von $\mathbf{P}^2$ in den 6 Punkten. Das Linearsystem der Kubiken durch die 6 Punkte bettet X in $\mathbf{P}^3$ als kubische Fläche ein.

Realisierung einer Kurve in $H_{8,6}$: Wir betrachten (singuläre) ebene Kurven vom Grad 6. Diese bilden einen $\mathbf{P}^{27}$. Nichtsinguläre Kurven vom Grad 6 in $\mathbf{P}^2$ haben Geschlecht 10. Nun suchen wir eine (schöne) Kurve, die Multiplizität 2 in $P_1, \ldots, P_4$ und Multiplizität 1 in P_5, P_6 hat. Dies sind $4 \cdot 3 + 2 = 14$ Bedingungen, also gibt es solche Kurven. Allgemeine solche Kurven haben dann Geschlecht 6. Auf X sind die Singularitäten verschwunden. Der Grad in $\mathbf{P}^3$ wird $6 \cdot 3 - 4 \cdot 2 - 2 = 8$, wie wir haben wollten. (Allgemein gilt: Ist a der Grad der ebenen Kurve und b_i die Vielfachheit in P_i (im allgemeinen Fall), so wird
$$d = 3a - \sum b_i, \quad g = \frac{1}{2}(a^2 - \sum b_i^2 - d) + 1.$$
Man kann zeigen, daß für die Existenz folgende Bedingungen hinreichend sind:
$$a \geq b_1 + b_2 + b_3, \quad b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_6 \geq 0.$$

Literaturverzeichnis

[ACGH85] *E. Arbarello, M. Cornalba, P. A. Griffiths, J. Harris,* Geometry of Algebraic Curves, Volume I, Springer-Verlag, New York – Berlin – Heidelberg – Tokyo, 1985.

[Har77] *R. Hartshorne,* Algebraic Geometry, Springer-Verlag, New York – Heidelberg – Berlin, 1977.

[Har82] *R. Hartshorne,* Genre des courbes algébriques dans l'espace projectif (d'après L. Gruson et C. Peskine,) Sém. Bourbaki **592** (1982), 301-313.

[Har87] *R. Hartshorne,* On the Classification of Algebraic Space Curves, II, in Algebraic Geometry, Bowdoin 1985, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **46** (1987), 145-164.

[Lan82] *S. Lang,* Introduction to Algebraic and Abelian Functions, Springer-Verlag, New York – Heidelberg – Berlin, 1982. (Enthält einen Beweis des Satzes von Riemann-Roch.)

[Sho94] *V. V. Shokurov,* Riemann Surfaces and Algebraic Curves, in: I. R. Shafarevich (ed.), Algebraic Geometry I, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol. 23, Springer-Verlag, 1994.