Kommutative Algebra II

Wolfgang M. Ruppert

Sommersemester 1995

Version vom 18. März 1999 [1]

[1] Im Sommersemester 1995 am Mathematischen Institut der Universität Erlangen abgehaltene Vorlesung

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

Projektive Moduln

Im folgenden sei A ein kommutativer Ring. Sind M und N zwei A-Moduln, so ist

$$Hom_A(M,N) = \{f : M \to N \text{ } A\text{-linear}\}$$

in natürlicher Weise wieder ein A-Modul.

Bemerkungen:

1. Es gilt $Hom(A,M) \simeq M$, wobei der Isomorphismus durch $f \mapsto f(1)$ induziert wird.
2. Für natürliche Zahlen m und n gilt:

$$Hom(A^m, A^n) \simeq M(n \times m, A) \simeq A^{mn}.$$

Sei M ein A-Modul und $\alpha : N \to N'$ A-linear. Dann induziert dies eine A-lineare Abbildung

$$\alpha_* : Hom(M,N) \to Hom(M,N'), \quad f \mapsto \alpha_*(f) = \alpha \circ f.$$

Sind $\alpha : N' \to N$ und $\beta : N \to N''$ linear, so gilt $(\beta \circ \alpha)_* = \beta_* \circ \alpha_*$.

Ist $\alpha : M \to M'$ A-linear und N ein A-Modul, so erhält man eine A-linear Abbildung

$$\alpha^* : Hom(M',N) \to Hom(M,N), \quad f \mapsto \alpha^* = f \circ \alpha.$$

Sind $\alpha : M' \to M$ und $\beta : M \to M''$ linear, so gilt $(\beta \circ \alpha)^* = \alpha^* \circ \beta^*$.

Satz (Linksexaktheit von Hom). 1. *Ist* $0 \to N' \to N \to N''$ *exakt, so auch*

$$0 \to Hom(M,N') \to Hom(M,N) \to Hom(M,N).$$

2. *Ist* $M' \to M \to M'' \to 0$ *exakt, so auch*

$$0 \to Hom(M'',N) \to Hom(M,N) \to Hom(M',N).$$

Beweis:

1. Sei $\alpha : N' \to N$ und $\beta : N \to N''$.
   (a) α_* ist injektiv: Sei $f : M \to N'$ mit $\alpha_*(f) = 0$, d.h. $\alpha \circ f = 0$. Da α injektiv ist, folgt $f = 0$, also die Behauptung.
   (b) Sei nun $f : M \to N$. Da α injektiv ist, fassen wir N' als Untermodul von N auf. Dann gilt $f \in Kern(\beta_*)$ genau dann, wenn $\beta \circ f = 0$, d.h. für alle $m \in M$ gilt $\beta(f(m)) = 0$ bzw. $f(m) \in Kern(\beta) = N'$. Dies ist äquivalent mit $f(M) \subseteq N'$, was zu zeigen war.
2. Dies zeigt man analog zum ersten Teil. ■

Bemerkung: Die Bezeichnung *linksexakt* wird deutlicher in folgender Formulierung:

$$0 \to N' \to N \to N'' \to 0 \text{ exakt} \quad \Rightarrow \quad 0 \to Hom(M,N') \to Hom(M,N) \to Hom(M,N'') \text{ exakt}$$
$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0 \text{ exakt} \quad \Rightarrow \quad 0 \to Hom(M'',N) \to Hom(M,N) \to Hom(M',N) \text{ exakt.}$$

Wir zeigen jetzt in einem Beispiel, daß Hom nicht rechtsexakt ist:

Beispiel:

1. Die Sequenz $0 \to \mathbf{Z} \to \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \to 0$ ist exakt, aber

$$0 \to Hom(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z},\mathbf{Z}) \to Hom(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z},\mathbf{Z}) \to Hom(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z},\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \to 0$$

   ist rechts nicht exakt wegen $Hom(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z},\mathbf{Z}) = 0$ und $Hom(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z},\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

2. Ebenso ist die Sequenz
$$0 \to Hom(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \to Hom(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \to Hom(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \to 0$$
nicht rechtsexakt wegen $Hom(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Die Sequenzen, für die die entsprechenden Hom-Sequenzen doch rechtsexakt sind, haben einen eigenen Namen:

DEFINITION.
1. Ein A-Modul P heißt projektiv, falls für jede exakte Sequenz $N \to N'' \to 0$ auch
$$Hom(P, N) \to Hom(P, N'') \to 0$$
exakt ist.
2. Ein A-Modul I heißt injektiv, falls für jede exakte Sequenz $0 \to M' \to M$ auch
$$Hom(M, I) \to Hom(M', I) \to 0$$
exakt ist.

Wir betrachten im folgenden zunächst die projektiven Moduln näher. Eine triviale Umformulierung der Definition ist:

LEMMA. *Ein A-Modul P ist genau dann projektiv, wenn es für alle $f : M \to N \to 0$, $g : P \to N$ eine Liftung $h : P \to M$ gibt mit $g = f \circ h$.*

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & \swarrow & \downarrow & & \\ M & \to & N & \to & 0 \end{array}$$

SATZ. *Jeder freie Modul ist projektiv.*

Beweis: Sei F frei mit Basis $e_i, i \in I$ und $f : M \to N \to 0$ und $g : F \to N$. Wähle $m_i \in M$ mit $f(m_i) = g(e_i)$. Durch $h(e_i) = m_i$ erhält man dann eine lineare Abbildung $h : F \to M$, die offensichtlich $f \circ h = g$ erfüllt. Also ist F projektiv. ■

Bevor wir die nächste Aussage zeigen, erinnern wir noch an eine Aussage aus der linearen Algebra:

LEMMA.
$$Hom(\oplus_{i \in I} M_i, N) \simeq \prod_{i \in I} Hom(M_i, N).$$

Beweis: Wir denken uns $M_j \subseteq \oplus_{i \in I} M_i$, weswegen $f : \oplus M_i \to N$ durch Einschränkung $f_j = f|M_j : M_j \to N$ liefert. Wir erhalten also eine Abbildung
$$Hom(\oplus M_i, N) \to \prod Hom(M_i, N).$$
Da jedes $f : \oplus M_i \to N$ durch $(f_i)_{i \in I}$ eindeutig bestimmt ist, und umgekehrt jede Vorgabe $(f_i)_{i \in I}$ ein f liefert durch
$$f((m_i)_{i \in I}) = \sum_{i \in I} f_i(m_i)$$
ist obige Abbildung ein Isomorphismus. ■

LEMMA. *Eine direkte Summe $\oplus_{i \in I} P_i$ ist genau dann projektiv, wenn jedes P_i projektiv ist.*

Beweis: Sei $M \to N \to 0$ exakt. Dann gilt:
$$\begin{aligned} & Hom(\oplus P_i, M) \to Hom(\oplus P_i, N) \to 0 \text{ exakt} \\ \iff & \prod Hom(P_i, M) \to \prod Hom(P_i, N) \to 0 \text{ exakt} \\ \iff & Hom(P_i, M) \to \prod Hom(P_i, N) \to 0 \text{ exakt für alle } i, \end{aligned}$$

woraus sofort die Behauptung folgt. ■

Wir sagen, eine kurze exakte Sequenz $0 \to K \to M \to N \to 0$ spaltet, wenn es $h : N \to M$ gibt mit $g \circ h = id_N$, wo $g : M \to N$ ist. Was heißt das?
Behauptung: Spaltet die Sequenz, so gilt $M = f(K) \oplus h(N)$.
Beweis: Ist $m \in f(K) \cap h(N)$, so ist $m = h(n)$ und $g(m) = 0$, also $n = g(h(n)) = 0$, also auch $m = 0$, d.h. $f(K) \cap h(N) = 0$.
Sei $m \in M$. Dann ist $h(g(m)) \in h(N)$ und

$$g(m - h(g(m))) = g(m) - g(m) = 0, \text{ also } m - h(g(m)) \in Kern(g) = f(K),$$

und somit $M = f(K) + h(N)$, woraus schließlich die Behauptung folgt. ■

Weiterhin sind $f : K \to f(K)$ und $h : N \to h(N)$ Isomorphismen. Daß die Sequenz $0 \to K \to M \to N \to 0$ spaltet, heißt also, daß $M \simeq K \oplus N$ mit $f(k) = (k, 0)$ und $g((k, n)) = n$.

Ist einfach eine Surjektion $g : M \to N \to 0$ gegeben, so erhält man dazu sofort die exakte Sequenz $0 \to Kern(g) \to M \to N \to 0$, und man kann wieder vom Spalten der Abbildung $M \to N \to 0$ sprechen.

Damit können wir jetzt weitere Charakterisierungen projektiver Moduln geben.

Satz. *Ein A-Modul P ist genau dann projektiv, wenn er direkter Summand eines freien Moduls F ist: $F = P \oplus P'$. (Ist P außerdem endlich erzeugt, so kann auch F endlich erzeugt gewählt werden.)*

Beweis: $\Leftarrow$: Ist $F = P \oplus P'$ frei, so ist F projektiv, also auch P.
$\Rightarrow$: Wähle ein Erzeugendensystem $e_i, i \in I$ von P, sei F ein freier Modul mit Basis $f_i, i \in I$, definiere $f : F \to P$ durch $f(f_i) = e_i$. Dann ist f surjektiv. Da P projektiv sein soll, faktorisiert die Identität $id : P \to P$ über F: es gibt $g : P \to F$ mit $id_P = f \circ g$. D.h. $F \to P \to 0$ spaltet, also ist $F \simeq P \oplus Kern(f)$, also P direkter Summand eines freien Moduls. ■

Wir geben noch eine weitere Charakterisierung projektiver Moduln:

Satz. *Ein Modul P ist genau dann projektiv, wenn jeder Homomorphismus $f : M \to P \to 0$ spaltet, d.h. wenn es $g : P \to M$ gibt mit $f \circ g = id_P$. Dann ist $M = P \oplus Kern(f)$.*

Beweis: $\Rightarrow$: Dies geht genau wie im letzten Beweis.
$\Leftarrow$: Wähle einen freien Modul F und $F \to P \to 0$. Da die Sequenz spaltet, ist P direkter Summand von F, also projektiv. ■

Wir fassen nochmals die verschiedenen Charakterisierungen projektiver Moduln zusammen: P ist projektiv, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

1. Ist $M \to N \to 0$ exakt, so auch $Hom(P, M) \to Hom(P, N) \to 0$.
2. Ist $f : M \to N$ surjektiv und $g : P \to N$, so faktorisiert g über M, d.h. es gibt $h : P \to M$ mit $g = f \circ h$.
3. P ist direkter Summand eines freien Moduls.
4. Jede exakte Sequenz $M \to P \to 0$ spaltet.

Wir wollen jetzt einige Beispiele betrachten:

Satz. *Jeder projektive Modul über einem Hauptidealring A ist frei.*

Beweisidee:

1. Man kann zeigen, daß jeder Untermodul eines freien Moduls über einem Hauptidealring frei ist; dann folgt die Behauptung, da jeder projektive Modul sogar direkter Summand eines freien Moduls ist.
2. Ist der projektive Modul P endlich erzeugt, so gilt nach dem Hauptsatz über endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen: $P \simeq A/(d_1) \times \cdots \times A/(d_r) \times A^s$, wo $A/(d_1) \times \cdots \times A/(d_r)$ der Torsionsanteil ist. Da P Untermodul eines freien Moduls ist, ein freier Modul keine Torsion hat, folgt $P \simeq A^s$. ■

Satz. *Über einem lokalen Ring $(A, \mathfrak{m})$ ist jeder projektive Modul P frei.*

Beweis: Wir zeigen den Satz nur im Fall, daß P endlich erzeugt ist. Dann ist $P/\mathfrak{m}P$ ein endlich dimensionaler $A/\mathfrak{m}$-Vektorraum. Sei $\overline{e_1}, \ldots, \overline{e_n}$ eine Basis von $P/\mathfrak{m}P$. Dann gilt $P = Ae_1 + \cdots + Ae_n + \mathfrak{m}P$ und nach dem Lemma von Nakayama folgt $P = Ae_1 + \cdots + Ae_n$. Sei F ein freier A-Modul mit Basis $f_1, \ldots, f_n$ und $\phi : F \to P$ mit $\phi(f_i) = e_i$. Dann ist ϕ surjektiv. Sei $K = Kern(\phi)$. Ist $\sum a_i f_i \in K = Kern(\phi)$, so ist $\sum a_i e_i = 0$, also auch $\sum \overline{a_i e_i} = 0$, und somit $\overline{a_i} = 0$, d.h. $a_i \in \mathfrak{m}$ für alle i. Also $\sum a_i f_i \in \mathfrak{m}F$ und damit $K \subseteq \mathfrak{m}F$. Nun ist P projektiv, also spaltet $F \to P \to 0$, d.h. wir können o.E. schreiben $F = P \oplus K$. Wegen $K \subseteq \mathfrak{m}F = (\mathfrak{m}P) \oplus (\mathfrak{m}K)$ ist $K \subseteq \mathfrak{m}K$, also $K = \mathfrak{m}K$. Nach Nakayama folgt $K = 0$. Also ist ϕ ein Isomorphismus, P also freier Modul. ■

Als nächstes fragen wir, ob sich die Projektivität eines Moduls lokal charakterisieren läßt. Zunächst ein triviales Lemma:

LEMMA. *Ist S eine multiplikative Teilmenge von A und P ein projektiver A-Modul, so ist $S^{-1}P$ ein projektiver $S^{-1}A$-Modul.*

Beweis: Ist P projektiv, so gibt es einen freien Modul F und einen weiteren Modul P' mit $F = P \oplus P'$. Dann gilt: $S^{-1} = S^{-1}P \oplus S^{-1}P'$ als $S^{-1}A$-Moduln. Da $S^{-1}F$ freier $S^{-1}A$-Modul ist, ist $S^{-1}P$ als direkter Summand eines freien Moduls projektiv. ■

FOLGERUNG. *Sei P ein A-Modul. Dann gilt:*

$$P \text{ projektiv } \Rightarrow P_{\mathfrak{p}} \text{ freier } A_{\mathfrak{p}}\text{-Modul für alle } \mathfrak{p} \in Spec(A).$$

Gilt davon auch die Umkehrung?

Aufgabe: Zeige die Umkehrung oder gib ein Gegenbeispiel zur Umkehrung an.

Wir werden die Umkehrung unter zusätzlichen Voraussetzungen zeigen. Zunächst aber noch eine einfache Folgerung aus der Folgerung:

FOLGERUNG. *Jeder projektive Modul P ist flach.*

Erinnerung:

1. Das Tensorprodukt $\otimes$ ist rechtsexakt, d.h. aus der Exaktheit von $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ folgt die Exaktheit von
$$M' \otimes N \to M \otimes N \to M'' \otimes N \to 0.$$
2. Ein Modul F ist flach, wenn aus der Exaktheit von $0 \to M' \to M$ die Exaktheit von $0 \to M' \otimes F \to M \otimes F$ folgt.
3. Ein A-Modul F ist genau dann flach, wenn $F_{\mathfrak{p}}$ ein flacher $A_{\mathfrak{p}}$-Modul ist für alle $\mathfrak{p} \in Spec(A)$.

Beweis der Folgerung: Ist P projektiv, so ist $P_{\mathfrak{p}}$ projektiv, also frei, also auch flach. Daher ist auch P flach. ■

Ein A-Modul M ist endlich erzeugt, wenn es eine exakte Sequenz $A^m \to M \to 0$ mit $m \in \mathbf{N}$ gibt.

DEFINITION. Ein A-Modul M heißt endlich darstellbar, wenn es eine exakte Sequenz

$$A^m \to A^n \to M \to 0$$

mit $m, n \in \mathbf{N}$ gibt.

Daß M endlich darstellbar ist, bedeutet also, daß M endlich erzeugt ist, und daß endlich viele Relationen zwischen den Erzeugern genügen um M zu beschreiben.

Bemerkungen:

1. Ist A ein noetherscher Ring und M endlich erzeugt, so ist M auch endlich darstellbar, denn: Hat man $\phi : A^n \to M \to 0$, so ist $Kern(\phi)$ als Untermodul des noetherschen Moduls A^n auch wieder endlich erzeugt, d.h. man erhält eine Surjektion $A^m \to Kern(\phi) \to 0$, woraus durch Zusammensetzen die exakte Sequenz $A^m \to A^n \to M \to 0$ entsteht.

2. Ist A ein Ring, der nicht noethersch ist, und $\mathfrak{a}$ ein nicht endlich erzeugtes Ideal, so ist $M = A/\mathfrak{a}$ endlich erzeugt: $A \to A/\mathfrak{a} \to 0$, aber offensichtlich nicht endlich darstellbar. D.h. es gibt Moduln, die endlich erzeugt, aber nicht endlich darstellbar sind.

LEMMA. *Ist P ein endlich erzeugter projektiver Modul, so ist P auch endlich darstellbar.*

Beweis: Wir können schreiben $A^n = P \oplus Q$. Sei $\phi : A^n \to P$ definiert durch $\phi((p,q)) = p$. Dann ist ϕ surjektiv und $Kern(\phi) = Q$. Definiert man $\psi : A^n \to Q$ durch $\psi((p,q)) = q$, so ist ψ surjektiv. Durch Zusammensetzen erhält man die exakte Sequenz $A^n \to A^n \to P \to 0$, d.h. P ist endlich darstellbar. ■

Wir wollen jetzt Hom bzgl. Lokalisieren studieren. Sei S eine multiplikative Teilmenge von A und M, N zwei A-Moduln. Dann gibt es eine natürliche Abbildung

$$\psi : S^{-1}Hom_A(M,N) \to Hom_{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}N).$$

Im allgemeinen ist ψ weder injektiv noch surjektiv.

Beispiele: Sei $A = \mathbf{Z}$ und $S = \mathbf{Z} \setminus \{0\}$. Dann ist $S^{-1}A = \mathbf{Q}$.

1. Für $M = \mathbf{Q}$ und $N = \mathbf{Z}$ ist $Hom_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}) = 0$ und $Hom_{\mathbf{Q}}(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}) = \mathbf{Q}$, ψ ist also nicht surjektiv.
2. Für $M = N = \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ ist $S^{-1}(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) = 0$, also $Hom_{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}N) = 0$, während $0 \neq id \in S^{-1}Hom_A(M,M)$, also ist ψ nicht injektiv.

Es gibt aber doch Fälle, in denen ψ ein Isomorphismus ist. Wir betrachten zunächst

$$S^{-1}Hom_A(A^m, N) \simeq S^{-1}\prod_{i=1}^{m} Hom_A(A,N) \simeq S^{-1}N^m$$

und

$$Hom_{S^{-1}A}(S^{-1}A^m, S^{-1}N) = \prod_{i=1}^{m} Hom_{S^{-1}A}(S^{-1}A, S^{-1}N) \simeq (S^{-1}N)^m.$$

Alle Isomorphismen sind natürlich, also folgt

$$S^{-1}Hom_A(A^m, N) \simeq Hom_{S^{-1}A}(S^{-1}A^m, S^{-1}N).$$

SATZ. *Ist M ein endlich darstellbarer Modul, S eine multiplikative Teilmenge von A, so gilt:*

$$S^{-1}Hom_A(M,N) \simeq Hom_{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}N).$$

Beweis: Es gibt eine exakte Sequenz $A^m \to A^n \to M \to 0$, die natürlich auch beim Lokalisieren exakt bleibt: $(S^{-1}A)^m \to (S^{-1}A)^n \to S^{-1}M \to 0$. Da der Hom-Funktor linksexakt ist, erhält man folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \to & S^{-1}Hom_A(M,N) & \to & S^{-1}Hom_A(A^n,N) & \to & S^{-1}Hom_A(A^m,N) \\
 & & \downarrow\psi & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \to & Hom_{S^{-1}}(S^{-1}M, S^{-1}N) & \to & Hom_{S^{-1}}(S^{-1}A^n, S^{-1}N) & \to & Hom_{S^{-1}}(S^{-1}A^m, S^{-1}N)
\end{array}$$

Dann muß auch der erste Pfeil ein Isomorphismus sein. ■

Damit können wir jetzt folgenden Satz beweisen:

SATZ. *Für einen endlich darstellbaren Modul P gilt:*

$$P \text{ projektiv} \iff P_{\mathfrak{m}} \text{ frei für alle maximalen Ideale } \mathfrak{m} \subseteq A.$$

Beweis: $\Rightarrow$ haben wir bereits gesehen.
$\Leftarrow$: Sei $M \to N \to 0$ exakt. Dann ist auch

$$Hom(P,M) \to Hom(P,N) \to C \to 0$$

exakt, wenn man C geeignet definiert: $C = Hom(P,N)/Bild(Hom(P,M))$. Nun ist P endlich darstellbar, also gilt bei Lokalisieren in dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$:

$$Hom(P,M)_{\mathfrak{m}} = Hom_{A_{\mathfrak{m}}}(P_{\mathfrak{m}}, N_{\mathfrak{m}}).$$

Damit erhält man

$$Hom_{A_{\mathfrak{m}}}(P_{\mathfrak{m}}, M_{\mathfrak{m}}) \to Hom_{A_{\mathfrak{m}}}(P_{\mathfrak{m}}, N_{\mathfrak{m}}) \to C_{\mathfrak{m}} \to 0.$$

Da $P_{\mathfrak{m}}$ frei, also auch projektiv ist, folgt $C_{\mathfrak{m}} = 0$. Dies gilt für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m}$, woraus dann $C = 0$ folgt. Damit folgt die Behauptung. ■

Bemerkungen:

1. Für noethersche Ringe und endlich erzeugte Moduln bedeutet also projektiv nichts anderes als lokal frei.
2. In der algebraischen Geometrie entsprechen die projektiven Moduln den Vektorbündeln.

Wir wollen jetzt noch Beispiele für projektive, aber nicht freie Moduln betrachten.

SATZ. *Jedes Ideal eines Dedekindrings A ist ein projektiver A-Modul.*

Beweis: Ein Dedekindring ist ein 1-dimensionaler noetherscher Integritätsring, wo alle Lokalisierungen $A_{\mathfrak{m}}$ diskrete Bewertungringe sind. Ist $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal, so ist $\mathfrak{a}_{\mathfrak{m}}$ ein Hauptideal, also freier $A_{\mathfrak{m}}$-Modul. Dann ist $\mathfrak{a}$ also lokal frei und damit projektiv. ■

Beispiel: $A = \mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$ ist ein Dedekindring, aber kein Hauptidealring. $\mathfrak{a} = (2, 1 + \sqrt{-5})$ ist kein Hauptideal, also ist $\mathfrak{a}$ ein nichtfreier projektiver A-Modul.

Schließlich noch ein Resultat, das von Serre vermutet, von Quillen und Suslin bewiesen wurde:

SATZ. *Jeder endlich erzeugte projektive Modul über einem Polynomring $k[x_1, \ldots, x_n]$ ist frei.*

(Jedes Vektorbündel auf $\mathbf{A}^n$ ist trivial.)

Injektive Moduln. Ein A-Modul I ist genau dann injektiv, wenn für jede exakte Sequenz $0 \to M \to N$ auch $Hom(N, I) \to Hom(M, I) \to 0$ exakt ist, d.h. jeder Homomorphismus $M \to I$ läßt sich fortsetzen zu einem Homomorphismus $N \to I$. Im Diagramm:

LEMMA. *Ein Modul I ist genau dann injektiv, wenn für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$ sich jeder Homomorphismus $\mathfrak{a} \to I$ sich fortsetzen läßt zu einem Homomorphismus $R \to I$.*

Beweis: Die eine Richtung ist trivial. Sei umgekehrt $M \subseteq N$ gegeben und ein Homomorphismus $f : M \to I$. Wir betrachten

$$S = \{(M', f') : M \subseteq M' \subseteq N, f' : M' \to N, f'|M = f\}$$

und setzen $(M', f') \leq (M'', f'')$, falls $M' \subseteq M''$ und $f''|M' = f'$. Dann ist S induktiv geordnet, denn ist $S' = \{(M_j, f_j) : j \in J\}$ eine total geordnete Teilmenge von S, so ist (M_0, f_0) eine obere Schranke von S', wo $M_0 = \cup_{j \in J} M_j$ und $f_0(x) = f_j(x)$, falls $x \in M_j$. Nach dem Zornschen Lemma besitzt S ein maximales Element, das wir (M', f') nennen.
Ist $M' = N$, so sind wir fertig.
Wir nehmen an, daß $M' \neq N$. Sei $x \in N \setminus M'$. Dann ist $\mathfrak{a} = \{a \in A : ax \in M'\}$ ein Ideal A. Durch $a \mapsto f'(ax)$ wird ein Homomorphismus $\mathfrak{a} \to I$ definiert. Sei $g : A \to I$ die Fortsetzung auf ganz A. Wir definieren jetzt:

$$h : M' + Ax \to I, m + ax \mapsto f'(m) + g(a).$$

Wir müssen zeigen, daß h wohldefiniert ist: Sei $m + ax = m' + a'x$, also $m - m' = (a' - a)x$. Dann ist $a - a' \in \mathfrak{a}$, also $g(a - a') = f'((a - a')x) = f'(m' - m)$, woraus dann $f'(m) + g(a) = f'(m') + g(a')$ folgt. Damit haben wir $(M' + Ax, h) \in S$, ein Widerspruch zur Maximalität von (M', f'), also kann dieser Fall nicht eintreten und wir sind fertig. ■

Wir geben noch eine Charakterisierung injektiver Moduln im Fall $A = \mathbf{Z}$:

SATZ. *Ein $\mathbf{Z}$-Modul I ist genau dann injektiv, wenn er dividierbar ist, d.h. für jedes $x \in I$, jedes $n \geq 1$ gibt es ein $y \in I$ mit $x = ny$.*

Beweis: $\Rightarrow$: Sei $x \in I$ und $n \geq 1$. Definiere $\mathbf{Z} \to I$ durch $1 \mapsto x$. Definiere $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ durch $1 \mapsto n$. Dann erhält man eine Abbildung $\mathbf{Z} \to I$ mit $n \mapsto x$, also gibt es $y \in I$ mit $x = ny$.
$\Leftarrow$: Sei $(n) \subseteq \mathbf{Z}$ und $(n) \to I$ vorgegeben. Ist das Bild von n $x \in I$, und gilt $x = ny$, so definiert $1 \mapsto y$ einen Homomorphismus $\mathbf{Z} \to I$. Nach unserem Kriterium ist I injektiv. ■

Beispiele: $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$.

KAPITEL 2

Einführung in die Homologische Algebra

Sei wieder A ein kommutativer Ring.

1. Komplexe

Ein Komplex (von A-Moduln) F besteht aus A-Moduln F_i ($i \in \mathbf{Z}$) und Homomorphismen $f_i : F_i \to F_{i-1}$, geschrieben

$$\cdots \to F_{i+1} \to F_i \to F_{i-1} \to \ldots$$

mit der Eigenschaft $f_i \circ f_{i+1} = 0$. (Die Sequenz muß also nicht exakt sein!)

Beispiel: Wir nehmen ein Dreieck Δ mit Seiten a, b, c und Ecken A, B, C. ($a = BC, b = CA, c = AB$). Wir definieren freie $\mathbf{Z}$ Moduln

$$F_2 = \mathbf{Z}\Delta, \quad F_1 = \mathbf{Z}a + \mathbf{Z}b + \mathbf{Z}c, \quad F_0 = \mathbf{Z}A + \mathbf{Z}B + \mathbf{Z}C,$$

alle anderen F_i's sollen 0 sein. Wir definieren Randabbildungen durch

$$\delta(\Delta) = a + b + c, \quad \delta(a) = C - B, \delta(b) = A - C, \delta(c) = B - A, \quad \delta(A) = \delta(B) = \delta(C) = 0.$$

Man sieht schnell, daß $F = (F_i, \delta)$ ein Komplex ist.

Ein Homomorphismus $\alpha : F \to G$ zwischen zwei Komplexen $F = (F_i, f_i)$ und $G = (G_i, g_i)$ besteht aus Homomorphismen $\alpha_i : F_i \to G_i$ mit der Eigenschaft, daß $\alpha_{i-1} \circ f_i = g_i \circ \alpha_i$ gilt, d.h. folgendes Diagramm ist kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} F_i & \stackrel{f_i}{\to} & F_{i-1} \\ \downarrow \alpha_i & & \downarrow \alpha_{i-1} \\ G_i & \stackrel{f_i}{\to} & G_{i-1} \end{array}$$

Eine kurze exakte Sequenz von Komplexen

$$0 \to F \to G \to H \to 0$$

besteht aus Homomorphismen $\alpha : F \to G$ und $\beta : G \to H$, so daß für alle i die Sequenz $0 \to F_i \to G_i \to H_i \to 0$ exakt ist.

Bemerkungen:

1. Manchmal ist die Indexmenge eines Komplexes nicht ganz $\mathbf{Z}$; gegebenenfalls ergänzt man den Komplex durch 0.
2. Es treten auch Komplexe auf, bei denen die Pfeile in die umgekehrte Richtung gehen:

$$\cdots \to F_{i-1} \to F_i \to F_{i+1} \to \ldots$$

   Man spricht dann auch von einem Kokomplex.

2. Homologie

Sei $F = (F_i, f_i)$ ein Komplex von A-Moduln.

$$\cdots \to F_{i+1} \to F_i \to F_{i-1} \to \dots$$

Dann heißt $Z_i(F) = Kern(f_i)$ der Modul der i-Zyklen, $B_i(F) = Bild(f_{i+1})$ der Modul der i-Ränder. Wegen $f_i \circ f_{i+1} = 0$ gilt $Bild(f_{i+1}) \subseteq Kern(f_i)$, d.h. $B_i(F) \subseteq Z_i(F)$. Der Quotient

$$H_i(F) = Z_i(F)/B_i(F) = Kern(f_i)/Bild(f_{i+1})$$

heißt die i-te Homologie von F. Der Komplex F ist genau dann exakt an der Stelle i, wenn $H_i(F) = 0$ ist.

Beispiel: Wir nehmen unser Beispiel von oben. Man rechnet nach:

$$Z_2(F) = 0, B_2(F) = 0, Z_1(F) = \mathbf{Z}(a+b+c) = B_1(F),$$
$$Z_0(F) = \mathbf{Z}A + \mathbf{Z}B + \mathbf{Z}C, B_0(F) = \mathbf{Z}(B-A) + \mathbf{Z}(C-A),$$

woraus schnell folgt

$$H_0(F) \simeq \mathbf{Z}, H_1(F) = H_2(F) = 0.$$

Bemerkung: Ist $F = (F_i, f_i)$ ein Kokomplex:

$$\cdots \to F_{i-1} \to F_i \to F_{i+1} \to \dots,$$

so heißt $H^i(F) = Kern(f_i)/Bild(f_{i-1})$ die i-te Kohomologie von F.

Sei $\alpha : F \to G$ ein Homomorphismus zwischen den Komplexen F und G. Dann sieht man sofort

$$\alpha_i(Kern(f_i)) \subseteq Kern(g_i) \text{ und } \alpha_i(Bild(f_{i+1})) \subseteq Bild(g_{i+1}),$$

also induziert α_i einen Homomorphismus zwischen der Homologie, der wie folgt bezeichnet wird:

$$H_i(\alpha) : H_i(F) \to H_i(G).$$

3. Die lange exakte Kohomologiesequenz

Satz. *Sei $0 \to E \to F \to G \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von Komplexen. Dann gibt es Homomorphismen $\delta_i : H_i(G) \to H_{i-1}(E)$, so daß die lange Kohomologiesequenz*

$$\cdots \to H_i(E) \to H_i(F) \to H_i(G) \to H_{i-1}(E) \to \dots$$

exakt ist. δ_i heißt Verbindungshomomorphismus.

Wir betrachten die kurze exakte Sequenz der Komplexe:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \downarrow e_{i+2} & & \downarrow f_{i+2} & & \downarrow g_{i+2} & & \\
0 & \to & E_{i+1} & \overset{\alpha_{i+1}}{\to} & F_{i+1} & \overset{\beta_{i+1}}{\to} & G_{i+1} & \to & 0 \\
 & & \downarrow e_{i+1} & & \downarrow f_{i+1} & & \downarrow g_{i+1} & & \\
0 & \to & E_i & \overset{\alpha_i}{\to} & F_i & \overset{\beta_i}{\to} & G_i & \to & 0 \\
 & & \downarrow e_i & & \downarrow f_i & & \downarrow g_i & & \\
0 & \to & E_{i-1} & \overset{\alpha_{i-1}}{\to} & F_{i-1} & \overset{\beta_{i-1}}{\to} & G_{i-1} & \to & 0 \\
 & & \downarrow e_{i-1} & & \downarrow f_{i-1} & & \downarrow g_{i-1} & & \\
0 & \to & E_{i-2} & \overset{\alpha_{i-2}}{\to} & F_{i-2} & \overset{\beta_{i-2}}{\to} & G_{i-2} & \to & 0 \\
 & & \downarrow e_{i-2} & & \downarrow f_{i-2} & & \downarrow g_{i-2} & &
\end{array}$$

Wir definieren zunächst die Abbildung δ_i:

- Sei $x \in Z_i(G)$. Da β_i surjektiv ist, gibt es ein $y \in F_i$ mit $x = \beta_i(y)$.
- Nun ist $\beta_{i-1}(f_i(y)) = g_i(\beta_i(y)) = g_i(x) = 0$, also gibt es wegen der Exaktheit von $0 \to E_{i-1} \to F_{i-1} \to G_{i-1} \to 0$ dazu genau ein $z \in E_{i-1}$ mit $\alpha_{i-1}(z) = f_i(y)$.
- Es gilt
$$\alpha_{i-2}(e_{i-1}(z)) = f_{i-1}(\alpha_{i-1}(z)) = f_{i-1}(f_i(z)) = 0,$$
da F ein Komplex ist. Aus der Injektivität von α_{i-2} folgt dann $e_{i-1}(z) = 0$, d.h. $z \in Z_{i-1}(E)$.

- Wie eindeutig ist obige Zuordnung? Gilt auch $x = \beta_i(y')$, so ist $y' - y \in Kern(\beta_i) = Bild(\alpha_i)$, d.h. es gibt ein $u \in E_i$ mit $y' = y + \alpha_i(u)$. Dann gilt
$$f_i(y') = f_i(y) + f_i(\alpha_i(u)) = \alpha_{i-1}(z) + \alpha_{i-1}(e_i(u)) = \alpha_{i-1}(z + e_i(u)).$$
Also ist obiges z nur modulo $Bild(e_i) = B_{i-1}(E)$ bestimmt.
- Wir erhalten also eine Abbildung $Z_i(G) \to H_{i-1}(E)$ durch $x \mapsto z$.
- Sei nun $x \in B_i(G)$. Wohin wird es abgebildet? Es gibt $s \in G_{i+1}$ mit $x = g_{i+1}(s)$. Weiter gibt es ein $t \in F_{i+1}$ mit $s = \beta_{i+1}(t)$ und somit:
$$x = g_{i+1}(\beta_{i+1}(t)) = \beta_i(f_{i+1}(t)).$$
Wir können jetzt also $y = f_{i+1}(t)$ wählen (mit obigen Bezeichnungen). Dann ist $f_i(y) = f_i(f_{i+1}(t)) = 0$, also gilt für unsere Abbildung $x \mapsto 0 \in H_{i-1}(E)$. Dies induziert dann die Abbildung
$$\delta_i : H_i(G) \to H_{i-1}(E).$$
- Zur Übung überlege man sich, daß dies ein Homomorphismus ist.

Nun haben wir δ_i definiert. Jetzt muß noch die Exaktheit der langen Sequenz gezeigt werden.

Wir zeigen die Exaktheit in $H_i(G)$, d.h. $Kern(\delta_i) = Bild(H_i(\beta))$.

- $\subseteq$: Sei $x \in Z_i(G)$ mit $\overline{x} \in Kern(\delta_i)$. Wir wählen nach Konstruktion $y \in F_i$ und $z \in E_{i-1}$ mit $x = \beta_i(y)$ und $f_i(y) = \alpha_{i-1}(z)$. Wegen $0 = \delta_i(\overline{x}) = \overline{z}$ ist $z \in B_{i-1}(E) = Bild(e_i)$, d.h. es gibt ein $u \in E_i$ mit $z = e_i(u)$.
- Nun ist $f_i(y) = \alpha_{i-1}(e_i(u)) = f_i(\alpha_i(u))$, also $f_i(y - \alpha_i(u)) = 0$, d.h. es gibt ein $v \in Z_i(F)$ mit $y = \alpha_i(u) + v$. Dann gilt aber
$$x = \beta_i(y) = \beta_i(\alpha_i(u)) + \beta_i(v) = \beta_i(v) \in \beta_i(Z_i(F)),$$
also $\overline{x} \in H_i(\beta)(H_i(F))$, d.h.
$$Kern(\delta_i) \subseteq Bild(H_i(\beta)).$$
- $\supseteq$: Sei umgekehrt $\overline{x} \in Bild(H_i(\beta))$, d.h. wir können schreiben $x = \beta_i(y)$, $f_i(y) = 0$. Dann ist aber $\delta_i(\overline{x}) = 0$, also
$$Bild(H_i(\beta)) \subseteq Kern(\delta_i).$$

Den Rest zeigt man analog. (Übung!) ■

4. Homotopie

Zwei Homomorphismen $\alpha : F \to G$ und $\beta : F \to G$ heißen homotop, wenn es Homomorphismen $\mu_i : F_i \to G_{i+1}$ gibt mit
$$\beta_i - \alpha_i = \mu_{i-1} \circ f_i + g_{i+1} \circ \mu_i.$$
$$\begin{array}{ccccc} F_{i+1} & \overset{f_{i+1}}{\to} & F_i & \overset{f_i}{\to} & F_{i-1} \\ \downarrow & \swarrow \mu_i & \downarrow & \swarrow \mu_{i-1} & \downarrow \\ G_{i+1} & \overset{g_{i+1}}{\to} & G_i & \overset{g_i}{\to} & G_{i-1} \end{array}$$
Ist $x \in Z_i(F)$, so gilt:
$$\beta_i(x) - \alpha_i(x) = \mu_{i-1}(f_i(x)) + g_{i+1}(\mu_i(x)) = g_{i+1}(\mu_i(x)) \in B_i(G),$$
d.h. $\overline{\beta_i(x)} = \overline{\alpha_i(x)}$ in $H_i(G)$. Also folgt $H_i(\alpha) = H_i(\beta)$.

Ergebnis: Sind α und β homotop, so gilt $H_i(\alpha) = H_i(\beta)$.

5. Projektive Auflösungen

Ist M ein A-Modul und

$$\cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

eine exakte Sequenz von A-Moduln, wo alle P_i projektiv sind, so heißt dies eine projektive Auflösung von M. Sind alle P_i freie A-Moduln, so spricht man von einer freien Auflösung von M.

Das folgende Beispiel soll zeigen, wie freie Auflösungen natürliche auftreten:

Beispiele:

1. Wir betrachten den Polynomring $A = k[a,b,c]$. Wir wollen die Gleichung $ax + by + cz = 0$ lösen in A. Betrachte
$$\phi : A^3 \overset{(abc)}{\longrightarrow} A.$$
Obige Gleichung zu lösen bedeutet jetzt, den Kern von ϕ zu bestimmen. Man findet (Übung!):
$$Kern(\phi) = \{d \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ -b \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} : d,e,f \in A\} = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \cdot A^3.$$
Allerdings bilden obige Vektoren keine Basis von $Kern(\phi)$ wegen
$$a \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ -b \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$
Also ist folgende Abbildung exakt
$$0 \to A \overset{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}{\longrightarrow} A^2 \overset{\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}}{\longrightarrow} A^3 \overset{(a\,b\,c)}{\longrightarrow} A.$$
Zur Übung zeige man, daß $Kern(\phi)$ kein freier A-Modul ist.
2. Ist $A = \mathbf{Z}$ und wollen wir die Gleichung $2x + 3y + 5z = 0$ lösen, so können wir wie eben vorgehen. Nun ist aber $Kern(\phi)$ als Untermodul eines freien $\mathbf{Z}$-Moduls frei, wir können also den Kern einfacher beschreiben und erhalten folgende exakte Sequenz:
$$0 \to \mathbf{Z}^2 \overset{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}}{\longrightarrow} \mathbf{Z}^3 \overset{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}}{\longrightarrow} \mathbf{Z} \to 0.$$

LEMMA. *Jeder Modul M besitzt eine freie, also auch eine projektive Auflösung.*

Beweis: Wähle einen freien Modul F_0 und eine Surjektion $\phi : F_0 \to M$. Wähle einen freien Modul F_1 und eine Surjektion $f_1 : F_1 \to Kern(\phi)$. Wähle einen freien Modul F_2 und eine Surjektion $f_2 : F_2 \to Kern(f_1)$. Etc. Durch Zusammensetzen erhält man eine exakte Sequenz

$$\cdots \to F_2 \to F_1 \to F_0 \to M \to 0,$$

also eine freie Auflösung von M. ∎

Bemerkung: Sei $P = (P_i, p_i)$ eine projektive Auflösung von M und $\pi : P_0 \to M$. Man denkt sich $P_i = 0$ für $i < 0$. Dann gilt für $i \geq 1$ natürlich $H_i(P) = 0$ und für $i = 0$:

$$H_0(P) = Kern(p_0)/Bild(p_1) = P_0/Kern(\pi) \simeq M.$$

SATZ. *Ist $\alpha : M \to N$ ein A-Homomorphismus, $P = (P_i, p_i)$ eine projektive Auflösung von M mit $\pi : P_0 \to M$ und $Q = (Q_i, q_i)$ eine projektive Auflösung von N mit $\rho : Q_0 \to N$, so gibt es einen Homomorphismus $\alpha : P \to Q$, so daß das folgende Diagramm kommutativ ist:*

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots \to & P_3 & \to & P_2 & \to & P_1 & \to & P_0 & \to & M & \to & 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots \to & Q_3 & \to & Q_2 & \to & Q_1 & \to & Q_0 & \to & N & \to & 0 \end{array}$$

Beweis: Wir konstruieren rekursiv $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$.

- Wir haben $Q_0 \to N \to 0$ und $P_0 \to M \to N$. Da P_0 projektiv ist, faktorisiert die letzte Abbildung über Q_0: $\alpha_0 : P_0 \to Q_0$.
- Wir haben eine Surjektion $Q_1 \to \mathit{Bild}(q_1) \to 0$. Die Abbildung $P_1 \to P_0 \to Q_0 \to N$ ist die gleiche wie $P_1 \to P_0 \to M \to N$, also 0, daher hat man $P_1 \to P_0 \to \mathit{Bild}(q_1)$. Da P_1 projektiv ist, faktorisiert die Abbildung über Q_1: $\alpha_1 : P_1 \to Q_1$.
- Sei bereits $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$ konstruiert. Es gilt
$$q_{n-1} \circ \alpha_{n-1} \circ p_n = \alpha_{n-2} \circ p_{n-1} \circ p_n = 0,$$
also induziert $\alpha_{n-1} \circ p_n$ eine Abbildung $P_n \to \mathit{Bild}(q_n)$. Wir haben eine Surjektion $q_n : Q_n \to \mathit{Bild}(q_n) \to 0$, wegen der Projektivität von P_n gibt es also ein α_n mit
$$\alpha_{n-1} \circ p_n = q_n \circ \alpha_n.$$
Damit folgt dann die Behauptung. ■

SATZ. *Ist $\phi : M \to N$ gegeben, sind P und Q projektive Auflösungen von M und N und α, β zwei Fortsetzungen von γ zu Homomorphismen der Komplexe, so sind α und β homotop.*

Beweis: Indem wir zu $\gamma = \alpha - \beta$ übergehen, können wir $\phi = 0$ annehmen.

- $$\begin{array}{ccccc} P_1 & \to & P_0 & \to & M \\ \downarrow \gamma_1 & \swarrow & \downarrow \gamma_0 & & \downarrow 0 \\ Q_1 & \to & Q_0 & \to & N \end{array}$$
Wir haben eine Surjektion $Q_1 \to \mathit{Bild}(q_1)$. Da $P_0 \to Q_0 \to N$ die gleiche Abbildung ist wie $P_0 \to M \to N$, also 0, gilt $\mathit{Bild}(\gamma_0) \subseteq \mathit{Bild}(q_1)$. Nun ist P_0 projektiv, also faktorisiert diese Abbildung über Q_1, d.h. es gibt $\mu_0 : P_0 \to Q_1$ mit der Eigenschaft $\gamma_0 = q_1 \circ \mu_0$. Damit haben μ_0 konstruiert.
- Angenommen, wir haben jetzt bereits $\mu_0, \ldots, \mu_{n-1}$ konstruiert mit der Eigenschaft $\gamma_i = \mu_{i-1} \circ p_i + q_{i+1} \circ \mu_i$.
$$\begin{array}{ccccccc} P_{n+1} & \to & P_n & \to & P_{n-1} & \to & P_{n-2} \\ \downarrow & & \downarrow & \swarrow & \downarrow & \swarrow & \downarrow \\ Q_{n+1} & \to & Q_n & \to & Q_{n-1} & \to & Q_{n-2} \end{array}$$
Es gilt:
$$q_n(\gamma_n - \mu_{n-1}p_n) = \gamma_{n-1}p_n - q_n\mu_{n-1}p_n = (\mu_{n-2}p_{n-1} + q_n\mu_{n-1})p_n - q_n\mu_{n-1}p_n = \mu_{n-2}p_{n-1}p_n = 0,$$
also $\mathit{Bild}(\gamma_n - \mu_{n-1}p_n) \subseteq \mathit{Bild}(q_{n+1})$. Wir haben die Surjektion $Q_{n+1} \to \mathit{Bild}(q_{n+1} \to 0$. Da P_n projektiv ist, gibt es ein $\mu_n : P_n \to Q_{n+1}$ mit $q_{n+1}\mu_n = \gamma_n - \mu_{n-1}p_n$, also
$$\gamma_n = q_{n+1}\mu_n + \mu_{n-1}p_n,$$
was wir zeigen wollten. ■

Wir brauchen später noch folgendes Lemma:

LEMMA. *Sei $0 \to E \to F \to G \to 0$ eine exakte Sequenz von A-Moduln. Dann gibt es projektive Auflösungen P, Q, R von E, F, G, so daß $0 \to P \to Q \to R \to 0$ eine exakte Sequenz von Komplexen ist.*

Beweis: Wir überlegen zunächst: Hat man das Ziel erreicht, so ist $0 \to P_i \to Q_i \to R_i \to 0$ exakt. Da R_i projektiv sein soll, spaltet die Sequenz, d.h. $Q_i \simeq P_i \oplus R_i$. So fangen wir auch an: Wir wählen projektive Auflösungen P und R von E und F und setzen $Q_i = P_i \oplus R_i$. Wir müssen jetzt nur noch die Abbildungen q_i definieren.

- Wir erhalten $P_0 \to F$ durch $P_0 \to E \to F$. Nun ist $F \to G \to 0$ surjektiv, $R_0 \to G$ mit G projektiv, also erhalten wir $R_0 \to F$, so daß das folgende Diagramm kommutativ ist:
$$\begin{array}{ccc} P_0 & \to & E \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \\ P_0 \oplus R_0 & \to & F \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ R_0 & \to & G \end{array}$$

- Der Rest geht analog. (Übung!) ■

Beispiele:

1. Der A-Modul A hat eine projektive Auflösung $\cdots \to 0 \to 0 \to A \to A \to 0$.
2. Ist $f \in A$ kein Nullteiler, so hat $A/(f)$ die Auflösung
$$\cdots \to 0 \to 0 \to A \xrightarrow{\cdot f} A \to A/(f) \to 0.$$
3. Das Ideal $\mathfrak{m} = (x, y)$ hat in $A = k[x, y]$ eine projektive Auflösung
$$0 \to A \xrightarrow{\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}} A^2 \xrightarrow{(x\; y)} \mathfrak{m} \to 0.$$
4. In $A = k[x, y, z]$ hat $\mathfrak{m} = (x, y, z)$ die projektive Auflösung
$$0 \to A \xrightarrow{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} A^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}} A^3 \xrightarrow{(x\; y\; z)} \mathfrak{m} \to 0.$$
5. Wir betrachten das Ideal $\mathfrak{a} = (yz, xz, xy)$ in $A = k[x, y, z]$. Man rechnet aus:
$$0 \to A^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}} A^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} yz & xz & xy \end{pmatrix}} \mathfrak{a} \to 0.$$
6. Sei $A = k[x]/(x^m)$ mit $m > 1$. Wir suchen eine projektive Auflösung des A-Moduls (x^n) für $1 \le n \le m-1$. Die Abbildung $A \xrightarrow{\cdot x^n} (x^n)$ hat als Kern (x^{m-n}), die Abbildung $A \xrightarrow{\cdot x^{m-n}} (x^{m-n})$ hat als Kern (x^n), daher erhält man als projektive Auflösung:
$$\cdots \to A \xrightarrow{\cdot x^n} A \xrightarrow{\cdot x^{m-n}} A \xrightarrow{\cdot x^n} A \xrightarrow{\cdot x^{m-n}} (x^n) \to 0$$

Fragen: Wie eindeutig sind projektive Auflösungen? Wie findet man projektive Auflösungen?

6. *Ext*

Vorbemerkung: Ist $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ exakt, so folgt nur
$$0 \to Hom(M'', N) \to Hom(M, N) \to Hom(M', N).$$
Der kontravariante Funktor $Hom(\;, N)$ ist linksexakt. Kann man obige Sequenz fortsetzen, so daß eine exakte Sequenz entsteht? (Natürliche ist das immer auf triviale Art möglich.)

Sei M ein A-Modul und $P = (P_i, p_i)$ eine projektive Auflösung von M:
$$\cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0.$$
Ist N ein anderer A-Modul, so induziert dies die Sequenz
$$\cdots \leftarrow Hom(P_2, N) \overset{p_2^*}{\leftarrow} Hom(P_1, N) \overset{p_1^*}{\leftarrow} Hom(P_0, N).$$
Dies ist ein Kokomplex, denn $p_{i+1}^* \circ p_i^* = (p_i \circ p_{i+1})^* = 0$. Wir definieren
$$Ext^n(M, N) = H^n(Hom(P, N)).$$

Lemma. *$Ext^n(M, N)$ ist wohldefiniert, d.h. hängt nicht von der projektiven Auflösung von M ab.*

Bemerkungen:

- Sei zunächst $\phi : M \to N$ eine Abbildung und P, Q projektive Auflösungen und $\alpha : P \to Q$ ein induzierter Homomorphismus. Anwendung von $Hom(\,, G)$ liefert:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \leftarrow & Hom(P_2, G) & \leftarrow & Hom(P_1, G) & \leftarrow & Hom(P_0, G) \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \cdots \leftarrow & Hom(Q_2, G) & \leftarrow & Hom(Q_1, G) & \leftarrow & Hom(Q_0, G) \end{array}$$

  Also erhalten wir eine induzierte Abbildung $H^n(Hom(P, G)) \leftarrow H^n(Hom(Q, G))$.
- Sind α und β zwei Homomorphismen der Komplexe P und Q, die ϕ fortsetzen, so sind sie homotop, d.h. es gibt $\mu_n : P_n \to Q_{n+1}$ mit $\beta_n - \alpha_n = q_{n+1}\mu_n + \mu_{n-1}p_n$. Anwendung von $Hom(\,, G)$ liefert

$$\beta_n^* - \alpha_n^* = \mu_n^* q_{n+1}^* + p_n^* \mu_{n-1}^*.$$

  β^* und α^* sind also homotop, induzieren also die gleiche Abbildung auf der Kohomologie.
- Wir wollen das Lemma beweisen: Seien P und Q projektive Auflösungen von M. Die Identität $M \to M$ setzt sich dann fort zu Komplexhomomorphismen $\alpha : P \to Q$ und $\beta : Q \to P$. Daher ist $\beta\alpha : P \to P$ homotop zur Identität, ebenso $\alpha\beta : Q \to Q$. Wie zuvor folgt, daß dann $\alpha^*\beta^*$ homotop zur Identität auf $Hom(P, G)$ und $\beta^*\alpha^*$ homotop zur Identität auf $Hom(Q, G)$ ist. Daher folgt

$$H^n(\alpha^*)H^n(\beta^*) = H^n(\alpha^*\beta^*) = id, \quad H^n(\beta^*)H^n(\alpha^*) = H^n(\beta^*\alpha^*) = id.$$

  Also ist $H^n(\alpha^*)$ ein Isomorphismus, d.h. $H^n(Hom(P, G)) \simeq H^n(Hom(Q, G))$, also ist $Ext^n(M, G)$ wohldefiniert. ■

Bemerkung: Eine Abbildung $M' \to M$ induziert also in natürlicher Weise eine Abbildung $Ext^n(M', N) \leftarrow Ext^n(M, N)$.

Zur Berechnung von *Ext* können wir also beliebige projektive Auflösungen wählen.

SATZ. *Es gilt* $Ext^0(M, N) \simeq Hom(M, N)$.

Beweis: Sei $\cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$ eine projektive Auflösung von M. Speziell ist $P_1 \to P_0 \to M \to 0$ exakt. Da *Hom* linksexakt ist, ist auch

$$0 \to Hom(M, N) \xrightarrow{\phi^*} Hom(P_0, N) \xrightarrow{p_1^*} Hom(P_1, N)$$

exakt. Nun ist

$$Ext^0(M, N) = H^0(Hom(P, N)) = Kern(p_1^*) = Bild(\phi^*) \simeq Hom(M, N),$$

was wir zeigen wollten. ■

Beispiel: Was ist $Ext^1(\mathbf{Z}/(3), \mathbf{Z})$? Wir wählen eine projektive Auflösung $0 \to \mathbf{Z} \xrightarrow{\cdot 3} \mathbf{Z}$ von $\mathbf{Z}/(3)$ und wenden $Hom(\,, \mathbf{Z})$ an. Mit $Hom(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}$ erhält man die Sequenz

$$\cdots \leftarrow 0 \leftarrow 0 \leftarrow \mathbf{Z} \xleftarrow{\cdot 3} \mathbf{Z},$$

woraus sofort

$$Ext^1(\mathbf{Z}/(3), \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}/(3), Ext^i(\mathbf{Z}/(3), \mathbf{Z}) = 0 \text{ für } i \neq 1$$

folgt.

SATZ. *Eine kurze exakte Sequenz von A-Moduln* $0 \to E \to F \to G \to 0$ *induziert die lange exakte Kohomologiesequenz:*

$$\begin{aligned} 0 \quad & \to Hom(G, N) \to Hom(F, N) \to Hom(E, N) \to \\ & \to Ext^1(G, N) \to Ext^1(F, N) \to Ext^1(E, N) \to \\ & \to Ext^2(G, N) \to Ext^2(F, N) \to Ext^2(E, N) \to \ldots \end{aligned}$$

Beweis: Wähle projektive Auflösungen P, Q, R von E, F, G, so daß $0 \to P \to Q \to R \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von Komplexen ist. Wegen der Exaktheit von $0 \to P_i \to Q_i \to R_i \to 0$ und der Projektivität von R_i spaltet die Sequenz, d.h. $Q_i \simeq P_i \oplus R_i$, also gilt auch

$$Hom(Q_i, N) = Hom(P_i \oplus R_i, N) = Hom(P_i, N) \times Hom(R_i, N),$$

also ist auch die Sequenz

$$0 \to Hom(R_i, N) \to Hom(Q_i, N) \to Hom(P_i, N) \to 0$$

exakt, d.h. $0 \to Hom(R, N) \to Hom(Q, N) \to Hom(P, N) \to 0$ ist eine exakte Sequenz von Komplexen, induziert also eine lange exakte Kohomologiesequenz, die wie behauptet aussieht. ■

Beispiel: Wir betrachten $0 \to \mathbf{Z} \xrightarrow{\cdot 3} \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/(3) \to 0$. Anwendung von $Hom(\;, \mathbf{Z})$ liefert

$$0 \to Hom(\mathbf{Z}/(3), \mathbf{Z}) \to Hom(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}) \xrightarrow{3^*} Hom(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}) \to Ext^1(\mathbf{Z}/(3), \mathbf{Z}) \to Ext^1(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}) \to \dots,$$

was nun

$$0 \to 0 \to \mathbf{Z} \xrightarrow{\cdot 3} \mathbf{Z} \to Ext^1(\mathbf{Z}/(3), \mathbf{Z}) \to 0$$

liefert. Dies paßt zusammen mit $Ext^1(\mathbf{Z}/(3), \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}/(3)$, was wir bereits gesehen haben.

Wir wollen nun die Abhängigkeit vom zweiten Argument studieren. Sei P eine projektive Auflösung von M und $\psi : F \to G$. Dann induziert dies natürlich einen Komplexhomomorphismus $Hom(P, F) \to Hom(P, G)$, auf Kohomologieebene also eine Abbildung

$$Ext^n(M, F) \to Ext^n(M, G).$$

Sei weiter $0 \to E \to F \to G \to 0$ eine exakte Sequenz von A-Moduln. Dies induziert eine Sequenz

$$0 \to Hom(P_i, E) \to Hom(P_i, F) \to Hom(P_i, G) \to 0,$$

die exakt ist, weil P_i projektiv ist. Also ist $0 \to Hom(P, E) \to Hom(P, F) \to Hom(P, G) \to 0$ eine exakte Sequenz von Kokomplexen. Dies induziert eine lange exakte Kohomologiesequenz:

Satz. *Eine kurze exakte Sequenz von A-Moduln $0 \to E \to F \to G \to 0$ induziert die lange exakte Kohomologiesequenz*

$$\begin{array}{ll} 0 & \to Hom(M, E) \to Hom(M, F) \to Hom(M, G) \to \\ & \to Ext^1(M, E) \to Ext^1(M, F) \to Ext^1(M, G) \to \\ & \to Ext^2(M, E) \to Ext^2(M, F) \to Ext^2(M, G) \to \\ & \dots \end{array}$$

Satz. *Für einen A-Modul P sind äquivalent:*

1. *P ist projektiv,*
2. *$Ext^n(P, N) = 0$ für alle $n \geq 1$ und alle A-Moduln N,*
3. *$Ext^1(P, N) = 0$ für alle A-Moduln N.*

Beweis:
$1 \Rightarrow 2$: $\dots \to 0 \to 0 \to 0 \to P$ ist eine projektive Auflösung von P, d.h. $P_0 = P$ und $P_1 = P_2 = \dots = 0$, also folgt sofort $Ext^n(P, N) = 0$ für $n \geq 1$.
$2 \Rightarrow 3$: Klar.
$3 \Rightarrow 1$: Sei $0 \to E \to F \to G \to 0$ eine exakte Sequenz von A-Moduln. Die lange exakte Kohomologiesequenz liefert dann:

$$0 \to Hom(P, E) \to Hom(P, F) \to Hom(P, G) \to Ext^1(P, E) \to \dots$$

Nun ist $Ext^1(P, E) = 0$, also ist

$$0 \to Hom(P, E) \to Hom(P, F) \to Hom(P, G) \to 0$$

exakt. Dies liefert, daß P projektiv ist. ■

Analog kann man injektive Moduln charakterisieren:

Satz. *Für einen A-Modul I sind äquivalent:*

1. *I ist injektiv,*
2. *$Ext^n(M, I) = 0$ für alle $n \geq 1$ und alle A-Moduln M,*
3. *$Ext^1(M, I) = 0$ für alle A-Moduln M.*

Beweis:
$1 \Rightarrow 2$: Sei P eine projektive Auflösung von M. Da I injektiv ist, ist der induzierte Kokomplex

$$0 \to Hom(M, I) \to Hom(P_0, I) \to Hom(P_1, I) \to Hom(P_2, I) \to \dots$$

exakt, d.h. $Ext^n(M, I) = 0$ für $n \geq 1$.
$2 \Rightarrow 3$: Klar.
$3 \Rightarrow 1$: Sei $0 \to E \to F \to G \to 0$ eine exakte Sequenz von A-Moduln. Die lange exakte Kohomologiesequenz liefert dann:

$$0 \to Hom(G, I) \to Hom(F, I) \to Hom(E, I) \to Ext^1(G, I) \to \dots,$$

also wegen $Ext^1(G, I) = 0$ die Exaktheit von

$$0 \to Hom(G, I) \to Hom(F, I) \to Hom(E, I) \to 0,$$

was die Injektivität von I impliziert. ∎

Folgendes Lemma ist nützlich für die Berechnung:

Lemma.

$$Ext^n(\oplus_{i=1}^m M_i, N) = \oplus_{i=1}^m Ext^n(M_i, N), \quad Ext^n(M, \oplus_{i=1}^m N_i) = \oplus_{i=1}^m Ext^n(M, N_i).$$

Beweis:

1. Seien P und Q projektive Auflösungen von M_1 und M_2. Dann ist $P \oplus Q$ eine projektive Auflösung von $M_1 \oplus M_2$. Wegen
$$Hom(P_i \oplus Q_i, N) \simeq Hom(P_i, N) \oplus Hom(Q_i, N)$$
folgt $Ext^n(M_1 \oplus M_2, N) \simeq Ext^n(M_1, N) \oplus Ext^n(M_2, N)$.
2. Sei P eine projektive Auflösung von M. Dann gilt:
$$Hom(P_i, N_1 \oplus N_2) \simeq Hom(P_i, N_1) \oplus Hom(P_i, N_2),$$
woraus auch sofort $Ext^n(M, N_1 \oplus N_2) \simeq Ext^n(M, N_1) \oplus Ext^n(M, N_2)$ folgt. ∎

Beispiel: Sei $f \in A$ ein Nichtnullteiler, d.h.

$$0 \to A \xrightarrow{\cdot f} A \to A/(f) \to 0$$

ist exakt. Wir berechnen damit $Ext^n(A/(f), N)$. Anwendung von $Hom(\ , N)$ ergibt:

$$\cdots \leftarrow 0 \leftarrow 0 \leftarrow Hom(A, N) \xleftarrow{f^*} Hom(A, N).$$

Nun ist $Hom(A, N) \simeq N$. Wir erhalten damit

$$\cdots \leftarrow 0 \leftarrow N \xleftarrow{\cdot f} N,$$

woraus sofort folgt:

$$Hom(A/(f), N) \simeq \{n \in N : fn = 0\}, \quad Ext^1(A/(f), N) \simeq N/fN, \quad Ext^i(A/(f), N) = 0 \text{ für } i \geq 2.$$

Wir geben noch eine Anwendung, eine Charakterisierung injektiver Moduln:

Satz. *Ein A-Modul I ist genau dann injektiv, wenn für alle Ideale $\mathfrak{a} \subseteq A$ gilt:*

$$Ext^1(A/\mathfrak{a}, I) = 0.$$

Beweis: $1 \Rightarrow 2$: Dies wissen wir bereits.
$2 \Rightarrow 1$: Es genügt zu zeigen: Für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ läßt sich jeder Homomorphismus $f : \mathfrak{a} \to I$ zu einem Homomorphismus $g : A \to I$ fortsetzen, d.h. $Hom(A, I) \to Hom(\mathfrak{a}, I)$ ist surjektiv. Nun ist $0 \to \mathfrak{a} \to A \to A/\mathfrak{a} \to 0$ exakt, Anwendung von $Hom(\ , I)$ liefert die lange exakte Kohomologiesequenz

$$0 \to Hom(A/\mathfrak{a}, I) \to Hom(A, I) \to Hom(\mathfrak{a}, I) \to Ext^1(A/\mathfrak{a}, I) \to \dots .$$

Da $Ext^1(A/\mathfrak{a}, I) = 0$ nach Voraussetzung, ist $Hom(A, I) \to Hom(\mathfrak{a}, I)$ surjektiv. ■

Beispiel: Wann ist ein $\mathbf{Z}$-Modul I injektiv? Genau dann, wenn für alle $n \geq 1$ gilt $Ext^1(\mathbf{Z}/(n), I) = 0$. Nun ist aber $Ext^1(\mathbf{Z}/(n), I) \simeq I/nI$. Also ist I genau dann injektiv, wenn für alle $n \geq 1$ gilt $I = nI$, d.h. I ist dividierbar.

7. Ext^1 und Erweiterungen

Seien M und N A-Moduln. Eine Erweiterung von M mit N besteht aus einem A-Modul E und einer exakten Sequenz $0 \to N \to E \to M \to 0$. Zwei Erweiterungen $0 \to N \to E \to M \to 0$ und $0 \to N \to F \to M \to 0$ heißen isomorph, wenn es einen Homomorphismus $\phi : E \to F$ gibt, so daß das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & N & \to & E & \to & M & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow \phi & & \| & & \\ 0 & \to & N & \to & F & \to & M & \to & 0 \end{array}$$

Man sieht schnell, daß dann ϕ ein Isomorphismus ist. Wir wollen folgenden Satz skizzieren:

Satz.

$$\{\textit{Isomorphieklassen von Erweiterungen von } M \textit{ mit } N\ 0 \to N \to E \to M \to 0\} \simeq Ext^1(M, N).$$

Wir werden den Satz nicht ganz beweisen, skizzieren aber die Bijektion: Sei $\dots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$ eine projektive Auflösung von M.

- Ist $0 \to N \to E \to M \to 0$ eine exakte Sequenz, so induziert dies, wie wir bereits gesehen haben folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccccc} P_2 & \to & P_1 & \to & P_0 & \to & M & \to & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \psi & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \to & N & \to & E & \to & M & \to & 0 \end{array}$$

  Es gilt: $\psi \in Hom(P_1, N)$ und $p_2^*(\psi) = 0$, wir können also definieren:

$$(0 \to N \to E \to M \to 0) \mapsto \overline{\psi} \in H^1(Hom(P, N)) = Ext^1(M, N).$$

- Sei jetzt umgekehrt $\overline{\psi} \in Ext^1(M, N)$ gegeben. Wir denken es uns als $\psi \in Hom(P_1, N)$ mit $p_2^*(\psi) = 0$. Definiert man jetzt $E = (N \oplus P_0)/U$ mit $U = \{(\psi x, -p_1 x) : x \in P_1\}$, so kommutiert das folgende Diagramm und die untere Zeile ist exakt:

$$\begin{array}{ccccccccc} P_2 & \to & P_1 & \to & P_0 & \to & M & \to & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \psi & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \to & N & \to & E & \to & M & \to & 0 \end{array}$$

  Damit ist $0 \to N \to E \to M \to 0$ eine Erweiterung von M mit N.

Beispiel: Natürlich gibt es immer die triviale Erweiterung $0 \to N \to N \oplus M \to M \to 0$. Was entspricht dem in $Ext^1(M, N)$? Wir betrachten wieder unser Diagramm nach Wahl einer projektiven Auflösung von M:

$$\begin{array}{ccccccccc} P_2 & \stackrel{p_2}{\to} & P_1 & \stackrel{p_1}{\to} & P_0 & \stackrel{\pi}{\to} & M & \to & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \psi & & \downarrow (\alpha, \beta) & & \| & & \\ 0 & \to & N & \to & N \oplus M & \to & M & \to & 0 \end{array}$$

Für $x \in P_1$ gilt dann: $\alpha(p_1(x)) = \psi(x)$, d.h. $\psi = p_1^*(\alpha) \in Bild(p_1^*)$, also gilt $\overline{\psi} = 0$ in $H^1(Hom(P, N)) = Ext^1(M, N)$. Der 0 in $Ext^1(M, N)$ entspricht also die triviale Erweiterung $0 \to N \to N \oplus M \to M \to 0$.

Beispiele:

1. Es ist $Ext^1(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}/(3)) = 0$, also ist die einzige Erweiterung $0 \to \mathbf{Z}/(3) \to \mathbf{Z}/(3) \oplus \mathbf{Z} \to \mathbf{Z} \to 0$.

2. Es ist $Ext^1(\mathbf{Z}/(3), \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}/(3)$, also sollte es 3 Erweiterungen von $\mathbf{Z}/(3)$ mit $\mathbf{Z}$ geben. Diese sind:
$$0 \to \mathbf{Z} \to \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/(3) \to \mathbf{Z}/(3) \to 0$$
$$0 \to \mathbf{Z} \to \mathbf{Z} \xrightarrow{\cdot 1} \mathbf{Z}/(3) \to 0$$
$$0 \to \mathbf{Z} \to \mathbf{Z} \xrightarrow{\cdot -1} \mathbf{Z}/(3) \to 0$$

8. *Ext* und injektive Auflösungen

Eine injektive Auflösung eines A-Moduls N besteht aus einer exakten Sequenz
$$0 \to N \to I_0 \to I_1 \to I_2 \to \dots,$$
wo alle I_n injektive Moduln sind. Ohne Beweis zitieren wir folgenden Satz:

Satz. *Jeder A-Modul besitzt eine injektive Auflösung.*

Beispiele: Für $A = \mathbf{Z}$ sind $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ injektive Moduln.

1. $\mathbf{Z}$ hat die injektive Auflösung
$$0 \to \mathbf{Z} \to \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to 0.$$
2. Für $n \geq 2$ hat $\mathbf{Z}/(n)$ die injektive Auflösung
$$0 \to \mathbf{Z}/(n) \xrightarrow{1 \mapsto \frac{1}{n}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \xrightarrow{\cdot n} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to 0 \to 0 \to 0 \to \dots.$$

Folgender Satz zeigt, daß man *Ext* auch über injektive Auflösungen definieren kann:

Satz. *Seien M und N zwei A-Moduln und $I = (I_n, i_n)$ eine injektive Auflösung von N. Dann gilt:*
$$Ext^n(M, N) \simeq H^n(Hom(M, I)) = H^n(\dots \to Hom(M, I_n) \to \dots).$$

Beweis:

1. Wir haben die exakte Sequenz
$$0 \to N \to I_0 \to I_1 \to I_2 \to \dots.$$
Sei $B_n = Bild(i_{n-1})$ für $n \geq 1$. Dann liefert die Exaktheit von
$$\dots \to I_{m-1} \xrightarrow{i_{m-1}} I_n \xrightarrow{i_m} I_{m+1} \to \dots$$
durch Aufspalten sofort
$$0 \to B_m \to I_m \to B_{m+1} \to 0$$
für $m \geq 1$. Für $m = 0$ gilt dies nach Definition, wenn man $B_0 = N$ setzt.
2. Was ist $H^n(Hom(M, I))$? Wir brauchen die Kohomologie an der Stelle n des Komplexes
$$\dots \to Hom(M, I_{n-1}) \xrightarrow{i_{n-1*}} Hom(M, I_n) \xrightarrow{i_{n*}} Hom(M, I_{n+1}) \to \dots,$$
also
$$H^n(Hom(M, I)) = Kern(i_{n*})/Bild(i_{n-1*}).$$
3. Wegen $B_n \subseteq I_n$ gilt $Hom(M, B_n) \subseteq Hom(M, I_n)$.
Behauptung: $Kern(i_{n*}) = Hom(M, B_n)$.
Beweis: Für $f \in Hom(M, I_n)$ gilt:
$$\begin{aligned} f \in Kern(i_{n*}) &\iff i_n \circ f = 0 \iff i_n(f(m)) = 0 \text{ für alle } m \in M \\ &\iff f(m) \in Kern(i_n) = Bild(i_{n-1}) = B_n \text{ für alle } m \in M \\ &\iff f \in Hom(M, B_n). \end{aligned}$$
4. Für $n \geq 1$ induziert die Sequenz $0 \to B_{n-1} \to I_{n-1} \xrightarrow{i_{n-1}} B_n \to 0$ die lange exakte Sequenz
$$\begin{aligned} 0 &\to Hom(M, B_{n-1}) \to Hom(M, I_{n-1}) \xrightarrow{i_{n-1*}} Hom(M, B_n) \\ &\to Ext^1(M, B_{n-1}) \to Ext^1(M, I_{n-1}) = 0, \end{aligned}$$
das I_{n-1} injektiv ist. Dies liefert sofort
$$H^n(Hom(M, I)) = Hom(M, B_n)/Bild(i_{n-1*}) \simeq Ext^1(M, B_{n-1}).$$

5. $0 \to B_{n-2} \to I_{n-2} \to B_{n-1} \to 0$ liefert wegen $Ext^1(M, I_{n-2}) = Ext^2(M, I_{n-2}) = 0$ nun
$$0 \to Ext^1(M, B_{n-1}) \to Ext^2(M, B_{n-2}) \to 0.$$
6. Für $1 \leq m \leq n-1$ folgt analog
$$Ext^m(M, B_{n-m}) \simeq Ext^{m+1}(M, B_{n-m-1}).$$
7. Dadurch erhält man nun
$$H^n(Hom(M, I)) \simeq Ext^1(M, B_{n-1}) \simeq Ext^2(M, B_{n-2}) \simeq \cdots \simeq Ext^n(M, B_0) = Ext^n(M, N),$$
was wir zeigen wollten. ■

9. *Tor*

Sei $P = (P_i, p_i)$ eine projektive Auflösung von M. Dann ist
$$P \otimes N : \cdots \to P_2 \otimes N \to P_1 \otimes N \to P_2 \otimes N$$
ein Komplex. Man definiert:
$$Tor_n(M, N) = H_n(P \otimes N).$$
Wie bei *Ext* zeigt man, daß $Tor_n(M, N)$ wohldefiniert ist, daß Homomorphismen $M' \to M$ und $N' \to N$ Homomorphismen
$$Tor_n(M', N) \to Tor_n(M, N), \quad Tor_n(M, N') \to Tor_n(M, N)$$
induzieren.

Lemma. *$Tor_0(M, N) \simeq M \otimes N$.*

Beweis: Sei $\cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$ eine projektive Auflösung von M. Dann ist $P_1 \to P_0 \to M \to 0$ exakt. Da Tensorieren rechtsexakt ist, ist auch
$$P_1 \otimes N \to P_0 \otimes N \to M \otimes N \to 0$$
exakt. Also folgt:
$$Tor_0(M, N) = Kern(p_0 \otimes 1)/Bild(p_1 \otimes 1) = (P_0 \otimes N)/Bild(p_1 \otimes 1) \simeq M \otimes N. ■$$

Satz. *Eine exakte Sequenz $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ von A-Moduln induziert die lange exakte Kohomologiesequenz*
$$\begin{array}{rl} 0 & \leftarrow M'' \otimes N \leftarrow M \otimes N \leftarrow M' \otimes N \leftarrow \\ & \leftarrow Tor_1(M'', N) \leftarrow Tor_1(M, N) \leftarrow Tor_1(M', N) \leftarrow \\ & \leftarrow Tor_2(M'', N) \leftarrow Tor_2(M, N) \leftarrow Tor_2(M', N) \leftarrow \end{array}$$

Beweis:
- Wir wählen projektive Auflösungen P, Q, R von M', M, M'', so daß $0 \to P \to Q \to R \to 0$ eine exakte Sequenz von Komplexen ist etc.
- Da R_i projektiv ist, spaltet die Sequenz $0 \to P_i \to Q_i \to R_i \to 0$, d.h. o.E. $Q_i = P_i \oplus R_i$. Dann ist aber $Q_i \otimes N = (P_i \otimes N) \oplus (R_i \otimes N)$, d.h. auch
$$0 \to P_i \otimes N \to Q_i \otimes N \to R_i \otimes N \to 0$$
ist exakt.
- Dies induziert die lange exakte Homologiesequenz
$$\cdots \to Tor_n(M', N) \to Tor_n(M, N) \to Tor_n(M'', N) \to Tor_{n-1}(M', N) \to \ldots,$$
was zu zeigen war.

Satz. *Eine exakte Sequenz $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ von A-Moduln induziert die lange exakte Homologiesequenz*

$$\begin{aligned} 0 \quad & \leftarrow M \otimes N'' \leftarrow M \otimes N \leftarrow M \otimes N' \leftarrow \\ & \leftarrow Tor_1(M, N'') \leftarrow Tor_1(M, N) \leftarrow Tor_1(M, N') \leftarrow \\ & \leftarrow Tor_2(M, N'') \leftarrow Tor_2(M, N) \leftarrow Tor_2(M, N') \leftarrow \end{aligned}$$

Beweis: Sei $\cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$ eine projektive Auflösung von M. Da P_i projektiv ist, ist P_i auch flach, also ist auch

$$0 \to P_i \otimes N' \to P_i \otimes N \to P_i \otimes N'' \to 0$$

exakt. Man erhält wieder eine lange exakte Homologiesequenz, wie behauptet. ■

Satz. *Für einen A-Modul F sind äquivalent:*

1. *F ist flach,*
2. *$Tor_n(M, F) = 0$ für alle $n \geq 1$ und alle A-Moduln M,*
3. *$Tor_1(M, F) = 0$ für alle A-Moduln M.*

Beweis: $1 \Rightarrow 2$: Sei $\cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$ eine projektive Auflösung von M. Da F flach ist, bleibt auch

$$\cdots \to P_2 \otimes F \to P_1 \otimes F \to P_0 \otimes F$$

exakt, also hat der Komplex keine Homologie für $n \geq 1$.
$2 \Rightarrow 3$: Klar.
$3 \Rightarrow 1$: Sei $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ exakt. Dann liefert die Homologiesequenz

$$\cdots \to Tor_1(M'', F) \to M' \otimes F \to M \otimes F \to M'' \otimes F \to 0,$$

wegen $Tor_1(M', F) = 0$ folgt die Exaktheit von

$$0 \to M' \otimes F \to M \otimes F \to M'' \otimes F \to 0,$$

woraus die Flachheit von F folgt. ■

Beispiel: Sei $f \in A$ ein Nichtnullteiler und N ein A-Modul. Wir haben die freie Auflösung

$$0 \to A \xrightarrow{\cdot f} A \to A/(f) \to 0,$$

Tensorieren mit N liefert den Komplex

$$\cdots \to 0 \to 0 \to N \xrightarrow{\cdot f} N,$$

also

$$A/(f) \otimes N = N/fN, \quad Tor_1(A/(f), N) = \{n \in N : fn = 0\}, \quad Tor_i(A/(f), N) = 0 \text{ für } i \geq 2.$$

Beispiel: Ist F ein freier A-Modul, so gilt natürlich $Tor_n(F, N) = 0$ für alle $n \geq 1$.

Beispiel: Sei $A = k[x, y]$ und $\mathfrak{m} = (x, y)$.

1. Wir wollen $Tor_n(A/\mathfrak{m}, N)$ berechnen. Eine freie Auflösung von $A/\mathfrak{m}$ ist

$$0 \to A \xrightarrow{\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}} A^2 \xrightarrow{(x\ y)} A \to A/\mathfrak{m} \to 0,$$

   also erhält man für den Komplex $P \otimes N$:

$$\cdots \to 0 \to N \xrightarrow{\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}} N^2 \xrightarrow{(x\ y)} N.$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned}
Tor_0(A/\mathfrak{m}, N) &= N/\mathfrak{m}N, \\
Tor_1(A/\mathfrak{m}, N) &= \{\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} : xn_1 + yn_2 = 0\}/\{\begin{pmatrix} yn \\ -xn \end{pmatrix} : n \in N\}, \\
Tor_2(A/\mathfrak{m}, N) &= \{n \in N : xn = yn = 0\}, \\
Tor_n(A/\mathfrak{m}, N) &= 0 \text{ für } n \geq 3.
\end{aligned}$$

2. Wählen wir jetzt $N = \mathfrak{m}$, so erhalten wir:

$$A/\mathfrak{m} \otimes \mathfrak{m} = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, Tor_1(A/\mathfrak{m}, \mathfrak{m}) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \cdot A/\mathfrak{m}, Tor_n(A/\mathfrak{m}, \mathfrak{m}) = 0 \text{ für } n \geq 2.$$

Denn:

$$\begin{aligned}
Tor_1(A/\mathfrak{m}, \mathfrak{m}) &= \{(m_1, m_2) : xm_1 + ym_2 = 0, m_1, m_2 \in \mathfrak{m}\}/\{(ym, -xm) : m \in \mathfrak{m}\} = \\
&= \{(yf, -xf) : f \in A\}/\{(ym, -xm) : m \in \mathfrak{m}\}.
\end{aligned}$$

3. Wir nehmen jetzt die kurze exakte Sequenz

$$0 \to \mathfrak{m} \to A \to A/\mathfrak{m} \to 0$$

und tensorieren mit $\mathfrak{m}$. Wegen $Tor_1(A, \mathfrak{m}) = 0$ erhält man:

$$0 \to Tor_1(A/\mathfrak{m}, \mathfrak{m}) \to \mathfrak{m} \otimes \mathfrak{m} \to \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to 0.$$

Um den Kern der Abbildung $\phi : \mathfrak{m} \otimes \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$ genau angeben zu können, müßte man den Verbindungshomomorphismus explizit studieren. Man tue dies zur Übung. Man findet:

$$Kern(\phi) = k \cdot (x \otimes y - y \otimes x).$$

4. Wir haben die exakte Sequenz $0 \to \mathfrak{m} \to A \to A/\mathfrak{m} \to 0$ und wollen dazu projektive Auflösungen konstruieren. Man findet z.B.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & 0 & \to & A & \xrightarrow{(y\ -x)^t} & A^2 & \xrightarrow{(x\ y)} & \mathfrak{m} & \to & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow E_1 & & \downarrow E_2 & & \downarrow & & \\
0 & \to & A & \xrightarrow{v} & A^3 & \xrightarrow{M} & A^3 & \xrightarrow{(x\ y\ 1)} & A & \to & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow E_3 & & \downarrow E_4 & & \downarrow & & \\
0 & \to & A & \xrightarrow{(y\ -x)^t} & A^2 & \xrightarrow{(x\ y)} & A & \to & A/\mathfrak{m} & \to & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Dabei ist $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ -x \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} y & -1 & 0 \\ -x & 0 & -1 \\ 0 & x & y \end{pmatrix}$. Den Verbindungshomomorphismus $\delta : Tor_1(A/\mathfrak{m}, \mathfrak{m}) \to \mathfrak{m} \otimes \mathfrak{m}$ erhält man dann wie folgt: ein Element aus $Tor_1(A/\mathfrak{m}, \mathfrak{m})$ wird repräsentiert durch $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathfrak{m}^2$ mit $ax+by = 0$. Ein Urbild unter E_3 ist $\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} \in \mathfrak{m}^3$, das durch M auf $\begin{pmatrix} -a \\ -b \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{m}^2$ abgebildet wird, das wiederum das Element $-a \otimes x - b \otimes y$ in $\mathfrak{m} \otimes \mathfrak{m}$ liefert.

Ähnlich wie bei *Ext* zeigt man:

Lemma.

$$Tor_n(\oplus_{i \in I}^m M_i, N) = \oplus_{i \in I}^m Tor_n(M_i, N), \quad Tor_n(M, \oplus_{i \in I}^m N_i) = \oplus_{i \in I}^m Tor_n(M, N_i).$$

Wir wissen, daß $M \otimes N \simeq N \otimes M$ gilt. Diese Symmetrie setzt sich auf Tor fort:

SATZ. *Es gilt* $Tor_n(M, N) \simeq Tor_n(N, M)$.

Beweis:

- Wir wählen projektive Auflösungen von M und N:
$$\cdots \xrightarrow{p_3} P_2 \xrightarrow{p_2} P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{\pi} M \to 0$$
$$\cdots \xrightarrow{q_3} Q_2 \xrightarrow{q_2} Q_1 \xrightarrow{q_1} Q_0 \xrightarrow{\rho} N \to 0$$
Der Einfachkeit halber werden wir oft p statt p_i und q statt q_i schreiben.
- Da P_i und Q_j projektiv, also flach sind, sind folgende Sequenzen exakt:
$$\cdots \xrightarrow{p_3} P_2 \otimes Q_j \xrightarrow{p_2} P_1 \otimes Q_j \xrightarrow{p_1} P_0 \otimes Q_j \xrightarrow{\pi} M \otimes Q_j \to 0$$
$$\cdots \xrightarrow{q_3} P_i \otimes Q_2 \xrightarrow{q_2} P_i \otimes Q_1 \xrightarrow{q_1} P_i \otimes Q_0 \xrightarrow{\rho} P_i \otimes N \to 0$$
- Wir bilden jetzt einen Doppelkomplex:
$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \leftarrow & M \otimes Q_2 & \leftarrow & P_0 \otimes Q_2 & \leftarrow & P_1 \otimes Q_2 & \leftarrow & P_2 \otimes Q_2 & \leftarrow \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \leftarrow & M \otimes Q_1 & \leftarrow & P_0 \otimes Q_1 & \leftarrow & P_1 \otimes Q_1 & \leftarrow & P_2 \otimes Q_1 & \leftarrow \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \leftarrow & M \otimes Q_0 & \leftarrow & P_0 \otimes Q_0 & \leftarrow & P_1 \otimes Q_0 & \leftarrow & P_2 \otimes Q_0 & \leftarrow \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \leftarrow & M \otimes N & \leftarrow & P_0 \otimes N & \leftarrow & P_1 \otimes N & \leftarrow & P_2 \otimes N & \leftarrow \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$
Bis auf die erste Spalte und die erste Zeile sind alle Zeilen und Spalten exakt. Wir wollen die Homologie der ersten Zeile und Spalte vergleichen.
- Wir definieren $R_n := \oplus_{i=0}^n P_i \otimes Q_{n-i}$. Außerdem definieren wir $r : R_n \to R_{n-1}$ durch
$$ra = pa + (-1)^i qa \text{ für } a \in P_i \otimes Q_{n-i}.$$
Wir zeigen, daß (R_n, r) ein Komplex ist, d.h. $r^2 = 0$: Für $a \in P_i \otimes Q_{n-i}$ ist $pa \in P_{i-1} \otimes Q_{n-i}$ und $qa \in P_i \otimes Q_{n-i-1}$, also
$$\begin{aligned} r(ra) &= r(pa + (-1)^i qa) = (p^2 a + (-1)^{i-1} qpa) + (-1)^i (pqa + (-1)^i qqa) = \\ &= (-1)^{i-1}(qpa + (-1)pqa) = 0. \end{aligned}$$
- Wir zeigen nun: $\phi : R_n \to M \otimes Q_n$ mit $\phi(a_0 + a_1 + \cdots + a_n) = \pi(a_0)$ ist ein Komplexhomomorphismus. Denn:
$$\begin{aligned} (q \circ \phi)(a_0 + a_1 + \cdots + a_n) &= q(\pi(a_0)) = \pi(q(a_0)) = \\ &= \pi(pa_1 + qa_0) = \phi(\sum_{i=0}^n pa_i + (-1)^i qa_i) = \\ &= \phi(r(a_0 + \cdots + a_n)) = (\phi \circ r)(a_0 + \cdots + a_n). \end{aligned}$$
- Wir wollen nun schrittweise zeigen, daß ϕ einen Isomorphismus auf der Homologie induziert.
- Wann ist $a_0 + \cdots + a_n \in R_n$ ein Zykel, d.h. in $Z_n(R)$? Es gilt:
$$\begin{aligned} r(a_0 + \cdots + a_n) &= \sum_{i=0}^n (pa_i + (-1)^i qa_i) = \sum_{i=0}^{n-1} (pa_{i+1} + (-1)^i qa_i) = \\ &= (pa_1 + qa_0) + (pa_2 - qa_1) + (pa_3 + qa_2) + \cdots + (pa_n + (-1)^{n-1} qa_{n-1}). \end{aligned}$$
Also gilt:
$$a_0 + \cdots + a_n \in Z_n(R) \iff pa_1 = -qa_0, pa_2 = qa_1, pa_3 = -qa_2, \ldots.$$

- Sei $b \in Z_n(M \otimes Q)$, d.h. $b \in M \otimes Q_n$ mit $qb = 0$. Da $\pi : P_0 \otimes Q_n \to M \otimes Q_n$ surjektiv ist, gibt es ein $a_0 \in P_0 \otimes Q_n$ mit $\pi(a_0) = b$. Nun gilt: $0 = qb = q\pi a_0 = \pi q a_0$, also gibt es wegen der Exaktheit ein $a_1 \in P_1 \otimes Q_{n-1}$ mit $qa_0 = -pa_1$. Nun haben wir aber $0 = -qqa_0 = qpa_1 = pqa_1$, also gibt es $a_2 \in P_2 \otimes Q_{n-2}$ mit $qa_1 = pa_2$. So machen wir induktiv weiter: Haben wir für $j = 1, \ldots, k$ die Eigenschaft $pa_j = (-1)^j qa_{j-1}$, so gilt $0 = qpa_k = p(qa_k)$, d.h. es gibt a_{k+1} mit $qa_k = (-1)^{k+1} pa_{k+1}$. Als Ergebnis erhalten wir $a_0 + \cdots + a_n \in Z_n(R)$ mit $\phi(a_0 + \cdots + a_n) = b$. Folglich ist $H_n(\phi)$ surjektiv.
- Wir wollen jetzt zeigen, daß $H_n(\phi)$ injektiv ist. Sei $a_0 + \cdots + a_n \in Z_n(R)$ gegeben mit
$$\phi(a_0 + \cdots + a_n) = \pi(a_0) \in B_n(M \otimes Q).$$
Was ist zu zeigen: Es gibt $d_0 + \cdots + d_{n+1} \in R_{n+1}$ mit
$$a_0 + \cdots + a_n = r(b_0 + \cdots + b_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n} (pd_{i+1} + (-1)^i qd_i),$$
also
$$a_i = pd_{i+1} + (-1)^i qd_i.$$
Wegen $\pi(a_0) \in B_n$ gibt es ein c mit $qc = \pi a_0$. Da π surjektiv ist, gibt es ein $d_0 \in P_0 \otimes Q_{n+1}$ mit $c = \pi d_0$. Nun folgt $\pi(a_0) = qc = q\pi d_0 = \pi q d_0$, also $\pi(a_0 - qd_0) = 0$. Daher gibt es ein d_1 mit $a_0 - qd_0 = pd_1$, d.h. $a_0 = pd_1 + qd_0$. So machen wir weiter:
$$pa_1 = -qa_0 = -qpd_1 = p(-qd_1), \text{ also } p(a_1 + qd_1) = 0.$$
Somit gibt es ein d_2 mit $a_1 + qd_1 = pd_2$, also
$$a_1 = pd_2 - qd_1.$$
Jetzt machen wir induktiv weiter: Es gelte bereits $a_i = pd_{i+1} + (-1)^{i+1} qd_i$. Dann folgt
$$pa_{i+1} = (-1)^{i+1} qa_i = (-1)^{i+1} pqd_{i+1},$$
also $p(a_{i+1} - (-1)^{i+1} qd_{i+1}) = 0$, somit gibt es d_{i+2} mit $a_{i+1} - (-1)^{i+1} qd_{i+1} = pd_{i+2}$, also
$$a_{i+1} = pd_{i+2} + (-1)^{i+1} qd_{i+1}.$$
Damit ist auch $a_0 + \cdots + a_n$ ein Rand, d.h. $H_n(\phi)$ ist injektiv.
- Wir haben gezeigt: $H_n(R) \simeq H_n(M \otimes Q)$. Aus Symmetriegründen gilt nun ebenso $H_n(R) \simeq H_n(P \otimes N)$, woraus nun sofort unsere Behauptung folgt. ∎

Bemerkung: Gilt für ein $a \in A$: $aN = 0$, so werden natürlich auch alle Moduln $P_i \otimes N$ von a annulliert. Daher folgt auch $a \cdot Tor_n(M, N) = 0$. Aufgrund der Symmetrie von Tor erhält man also:

Folgerung. *Gilt für ein $a \in A$ $aM = 0$ oder $aN = 0$, so gilt $a \cdot Tor_n(M, N) = 0$ für alle $n \geq 0$.*

Beispiel: Seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Ideale in A. Was ist $Tor_1(A/\mathfrak{a}, A/\mathfrak{b})$? Wir tensorieren die exakte Sequenz $0 \to \mathfrak{a} \to A \to A/\mathfrak{a} \to 0$ mit $A/\mathfrak{b}$ und erhalten:
$$\cdots \to Tor_1(A, A/\mathfrak{b}) \to Tor_1(A/\mathfrak{a}, A/\mathfrak{b}) \to \mathfrak{a} \otimes A/\mathfrak{b} \to A \otimes A/\mathfrak{b} \to A/\mathfrak{a} \otimes A/\mathfrak{b} \to 0.$$
Wegen $M \otimes A/\mathfrak{b} \simeq M/\mathfrak{b}M$ und $Tor_1(A, A/\mathfrak{b}) = 0$ folgt
$$0 \to Tor_1(A/\mathfrak{a}, A, \mathfrak{b}) \to \mathfrak{a}/\mathfrak{ab} \to A/\mathfrak{b} \to A/\mathfrak{a} \otimes A/\mathfrak{b} \to 0.$$
Also folgt
$$Tor_1(A/\mathfrak{a}, A/\mathfrak{b}) = Kern(\mathfrak{a}/\mathfrak{ab} \to A/\mathfrak{b}) = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})/(\mathfrak{ab}).$$

Wir geben jetzt noch eine weitere Charakterisierung flacher Moduln an:

Satz. *Für einen A-Modul F sind äquivalent:*

1. *F ist flach,*
2. *für jedes (endlich erzeugte) Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ ist $0 \to \mathfrak{a} \otimes F \to F$ exakt,*
3. *für jedes (endlich erzeugte) Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ gilt $Tor_1(A/\mathfrak{a}, F) = 0$.*

Beweis: 2 $\iff$ 3 zeigt man wie früher; 1 $\Rightarrow$ 3 kennen wir auch bereits. Es bleibt 3 $\Rightarrow$ 1 zu zeigen; wir setzen die Aussage aus 3. zunächst für beliebige Ideale voraus.

1. Zu zeigen ist: Aus $N \subseteq M$ folgt $N \otimes F \hookrightarrow M \otimes F$. Anders ausgedrückt: Sind $x_1, \ldots, x_n \in N$ und $f_1, \ldots, f_n \in F$ gegeben mit $\sum_{i=1}^n x_i \otimes f_i = 0$ in $M \otimes F$, so gilt bereits $\sum_{i=1}^n x_i \otimes f_i = 0$ in $N \otimes F$. Bei der Relation $\sum_{i=1}^n x_i \otimes f_i = 0$ in $M \otimes F$ sind nur endlich viele Elemente aus M beteiligt. Daher kann man annehmen, daß M endlich erzeugt ist. D.h. wir brauchen nur den Fall $M = N + Ax_1 + \cdots + Ax_m$ zu behandeln.
2. Setze nun $N_i = N + Ax_1 + \cdots + Ax_i$; dann ist $N = N_0$ und $M = N_m$. Weiter gilt $N_i = N_{i-1} + Ax_i$. Definiert man $\mathfrak{a} = \{a \in A : ax_i \in N_{i-1}\}$, so ist
$$\phi : N_{i-1} + Ax_i \to A/\mathfrak{a}, \quad z + ax_i \mapsto \overline{a}$$
wohldefiniert ($z + ax = z' + a'x \iff (a - a')x = z' - z$ impliziert $a - a' \in \mathfrak{a}$), surjektiv, mit Kern N_{i-1}, d.h. wir erhalten eine exakte Sequenz
$$0 \to N_{i-1} \to N_i \to A/\mathfrak{a} \to 0.$$
Tensorieren mit F liefert nun unter Verwendung der Voraussetzung
$$0 = Tor_1(A/\mathfrak{a}, F) \to N_{i-1} \otimes F \to N_i \otimes F \to A/\mathfrak{a} \otimes F \to 0,$$
insbesondere $N_{i-1} \otimes F \hookrightarrow N_i \otimes F$.
3. Damit erhält man:
$$N \otimes F = N_0 \otimes F \hookrightarrow N_1 \otimes F \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow N_m \otimes F = M \otimes F,$$
was wir zeigen wollten.
4. Die Reduktion von beliebigen Idealen auf endlich erzeugte funktioniert nun genauso wie in 1. ■

FOLGERUNG. *Ist A ein Hauptidealring, F ein beliebiger A-Modul, so gilt:*
$$F \text{ flach} \iff F \text{ torsionsfrei.}$$

Beweis: Wir haben früher gesehen: $Tor_1(A/(0), F) = 0$ und für $f \neq 0$: $Tor_1(A/(f), F) = \{x \in F : fx = 0\}$. Damit gilt:
$$F \text{ flach} \iff Tor_1(A/(f), F) = 0 \text{ für alle } f \neq 0 \iff fx \neq 0, \text{ falls } f, x \neq 0 \iff F \text{ torsionsfrei.} \blacksquare$$

FOLGERUNG. *Für Moduln über einem Hauptidealring A gilt:*
$$Tor_n(M, N) \simeq Tor_n(M_{tor}, N_{tor}) \text{ für alle } n \geq 1.$$

Beweis: Man überlegt sich schnell, daß M/M_{tor} torsionsfrei ist. Also ist M/M_{tor} flach. Tensoriert man die exakte Sequenz $0 \to M_{tor} \to M \to M/M_{tor} \to 0$ mit N, so erhält man für $n \geq 1$:
$$\cdots \to Tor_{n+1}(M/M_{tor}, N) \to Tor_n(M_{tor}, N) \to Tor_n(M, N) \to Tor_n(M/M_{tor}, N) \to \ldots,$$
woraus sofort $Tor_n(M, N) \simeq Tor_n(M_{tor}, N)$ folgt. Symmetrisch gilt natürlich auch $Tor_n(M_{tor}, N) \simeq Tor_n(M_{tor}, N_{tor})$, woraus dann die Behauptung folgt. ■

Beispiel: Wir betrachten nun speziell abelsche Gruppen, also $A = \mathbf{Z}$.
1. Sei $S = \{n \geq 1\}$. Dann ist $S^{-1}\mathbf{Z} = \mathbf{Q}$. Wir wissen, daß $S^{-1}M \simeq M \otimes \mathbf{Q}$ ist.
2. Für $x \in M$ gilt: $x \in Kern(M \to M \otimes \mathbf{Q}) \iff \frac{x}{1} = 0 \in S^{-1}M \iff sx = 0$ für ein $s \in S$. D.h. $Kern(M \to M \otimes \mathbf{Q}) = M_{tor}$.
3. Wir tensorieren $0 \to \mathbf{Z} \to \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to 0$ mit der abelschen Gruppe M und erhalten wegen $Tor_1(M, \mathbf{Q}) = 0$:
$$0 \to Tor_1(M, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to M \to M \otimes \mathbf{Q} \to M \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to 0.$$
Damit folgt sofort
$$Tor_1(M, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \simeq M_{tor}.$$

Wir wollen noch einige Anwendungen für lokale Ringe geben.

Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler noetherscher Ring, $k = A/\mathfrak{m}$ und M ein endlich erzeugter A-Modul.
1. Wähle eine k-Basis $\overline{m_1}, \ldots, \overline{m_b}$ von $M/\mathfrak{m}M$. Dann ist $M = Am_1 + \cdots + Am_b + \mathfrak{m}M$, nach dem Lemma von Nakayama gilt also $M = Am_1 + \cdots + Am_b$.

2. Definiert man nun $\phi : A^b \to M$ durch $\phi(e_i) = m_i$, so ist ϕ surjektiv. Ist $(a_1, \dots, a_b)^t \in Kern(\phi)$, so gilt $a_1 m_1 + \dots + a_b m_b = 0$, insbesondere
$$\overline{a_1 m_1} + \dots + \overline{a_b m_b} = 0,$$
woraus wegen der Wahl der m_i's sofort $a_i \in \mathfrak{m}$ folgt. Also gilt $Kern(\phi) \subseteq \mathfrak{m}A^b$.
3. Wählt man nun statt M $Kern(\phi)$, so kann man eine freie Auflösung von M konstruieren mit der im folgenden Lemma beschriebenen Eigenschaft:

Lemma. *Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler noetherscher Ring und M ein endlich erzeugter A-Modul. Dann gibt es eine freie Auflösung*
$$\dots A^{b_2} \xrightarrow{\phi_2} A^{b_1} \xrightarrow{\phi_1} A^{b_0} \xrightarrow{\pi} M \to 0$$
mit der Eigenschaft $Bild(\phi_i) \subseteq \mathfrak{m}A^{b_i}$. Eine solche Auflösung heißt auch minimal.

Folgerung. *Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler noetherscher Ring und M ein endlich erzeugter Modul. Ist*
$$\dots \to A^{b_2} \to A^{b_1} \to A^{b_0} \to M \to 0$$
eine minimale freie Auflösung von M, so ist
$$Tor_i(M, k) = k^{b_i} \text{ für alle } i.$$

Beweis: Wegen $Bild(\phi_i) \subseteq \mathfrak{m}A^{b_{i-1}}$ ist $\phi_i \otimes id_k : A^{b_i} \otimes k \to A^{b_{i-1}} \otimes k$ die Nullabbildung, d.h. zur Berechnung von Tor brauchen wir die Homologie des Komplexes
$$\dots \to k^{b_2} \xrightarrow{\cdot 0} k^{b_1} \xrightarrow{\cdot 0} k^{b_0} \to 0,$$
also $Tor_i(M, k) = k^{b_i}$. ∎

Satz. *Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler noetherscher Ring, $k = A/\mathfrak{m}$ und F ein endlich erzeugter A-Modul. Dann sind äquivalent:*
1. *M ist frei,*
2. *M ist projektiv,*
3. *M ist flach,*
4. *$Tor_1(M, k) = 0$.*

Beweis: $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4$: bekannt.
$4 \Rightarrow 1$: Wähle eine minimale freie Auflösung
$$\dots A^{b_2} \to A^{b_1} \to A^{b_0} \to M \to 0$$
von M. Dann ist $0 = Tor_1(M, k) = k^{b_1}$, also $b_1 = 0$, d.h. $A^{b_0} \simeq M$, M also frei. ∎

Bemerkung: Läßt man in obigem Satz *endlich erzeugt* weg, so gilt zwar noch M projektiv $\Rightarrow M$ flach, die Umkehrung muß aber nicht gelten, wie folgendes Beispiel zeigt:

Beispiel: Sei A ein Integritätsring, aber kein Körper, $S = A \setminus \{0\}$, $K = S^{-1}A = Quot(A)$ der Quotientenkörper von A. Wegen $S^{-1}M \simeq M \otimes K$ und der Flachheit des Lokalisierens ist K ein flacher A-Modul.
Behauptung: K ist kein projektiver A-Modul.
Beweis: Angenommen, K wäre ein projektiver A-Modul. Dann wäre K direkter Summand, speziell Untermodul eines freien Moduls:
$$K \subseteq F = \oplus_{i \in I} A f_i.$$
Wir betrachten die Darstellung der 1: $1 = \sum_i a_i f_i$. Mindestens für einen Index $i \in I$ gilt $a_i \neq 0$, o.E. $i = 0$, d.h. $a_0 \neq 0$. Weiter gibt es $b_i \in A$ mit
$$\frac{1}{a_0^2} = \sum_i b_i f_i,$$
also $1 = \sum_i a_i f_i = \sum_i (a_0^2 b_i) f_i$ und insbesondere $a_0 = a_0^2 b_0$, also $1 = a_0 b_0$, d.h. a_0 ist Einheit. Sei nun $c \in A, c \neq 0$ beliebig. Dann gibt es $d_i \in A$ mit
$$\frac{1}{c} = \sum_i d_i f_i,$$

woraus wieder $1 = \sum_i a_i f_i = \sum_i (cd_i) f_i$, also insbesondere $a_0 = cd_0$ folgt. Mit a_0 ist dann auch c Einheit, also $A = K$, ein Widerspruch zur Voraussetzung. ■

10. Anhang: Abgeleitete Funktoren

Wir wollen unsere Konstruktion von Ext und Tor noch in einen etwas weiteren Rahmen einordnen. Zugrunde legen wir (die Kategorie der) A-Moduln, wo A ein fester kommutativer Ring ist.

Ein kovarianter Funktor F von der Kategorie der A-Moduln in die Kategorie der A-Moduln ordnet jedem A-Modul M einen A-Modul $F(M)$ und jeder A-linearen Abbildung $f : M \to N$ eine A-lineare Abbildung $F(f) : F(M) \to F(N)$ zu, wobei noch folgende Eigenschaften erfüllt sein sollen:

$$F(id_M) = id_{F(M)}, \quad F(f \circ g) = F(f) \circ F(g).$$

Beispiele: Sei M ein vorgegebener A-Modul. Dann liefern folgende Zuordnungen kovariante Funktoren:

1. $$N \mapsto M \otimes N, \quad (N_1 \xrightarrow{f} N_2) \mapsto M \otimes N_1 \xrightarrow{id_M \otimes f} M \otimes N_2.$$
2. $$N \mapsto Hom(M, N), \quad (N_1 \xrightarrow{f} N_2) \mapsto (Hom(M, N_1) \xrightarrow{f_*} Hom(M, N_2)).$$

Bei einem kontravarianten Funktor G dreht sich die Richtung der Pfeile um, d.h. $M \xrightarrow{f} N$ liefert $G(M) \xleftarrow{G(f)} G(N)$.

Beispiel: Sei N ein fester A-Modul. Dann liefert die Zuordnung

$$M \mapsto Hom(M, N), \quad (M_1 \xrightarrow{f} M_2) \mapsto (Hom(M_1, N) \xleftarrow{f^*} Hom(M_2, N))$$

einen kontravarianten Funktor.

Wir werden uns im folgenden aber auf kovariante Funktoren beschränken.
Außerdem setzen wir noch voraus, daß unsere Funktoren *additiv* sind, d.h. es gilt $F(f+g) = F(f) + F(g)$ für alle $f, g : M \to N$.

Sei F ein kovarianter Funktor. Er heißt linksexakt, wenn die Exaktheit von $0 \to M' \to M \to M''$ die Exaktheit von $0 \to F(M') \to F(M) \to F(M'')$ impliziert, er heißt rechtsexakt, wenn die Exaktheit von $M' \to M \to M'' \to 0$ die Exaktheit von $F(M') \to F(M) \to F(M'') \to 0$ impliziert.

Beispiel: $M \otimes -$ ist rechtsexakt, $Hom(M, -)$ ist linksexakt.

Sei F ein rechtsexakter kovarianter additiver Funktor. Wir definieren die von F linksabgeleiteten Funktoren $L_n F$ wie folgt: Für einen A-Modul M sei $P = (P_n, p_n)$ eine projektive Auflösung:

$$\cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0.$$

Dann ist $F(P)$:

$$\cdots \to F(P_2) \xrightarrow{F(p_2)} F(P_1) \xrightarrow{F(p_1)} F(P_0) \to 0$$

ein Komplex. Wir definieren $L_n F(M)$ als die n-te Homologie dieses Komplexes: $L_n F(M) = H_n(F(P))$. Dann gilt der Satz

SATZ. *Die linksabgeleiteten Funktoren sind unabhängig von der Wahl der projektiven Auflösungen. Außerdem gilt:*

1. $L_0 F = F$.
2. *Jede kurze exakte Sequenz induziert eine lange exakte Homologiesequenz*

$$\cdots \to L_n F(M') \to L_n F(M) \to L_n F(M'') \to L_{n-1} F(M') \to \dots$$

Der Beweis geht genauso wie wir ihn für *Ext* geführt haben.

Ist F ein linksexakter kovarianter additiver Funktor, so definieren wir die Rechtsableitungen R^nF von F wie folgt: Für einen A-Modul N sei $I = (I_n, i_n)$ eine injektive Auflösung:

$$0 \to N \to I_0 \to I_1 \to \dots.$$

Dann ist

$$F(I) : 0 \to F(I_0) \overset{F(i_0)}{\to} F(I_1) \overset{F(i_1)}{\to} F(I_2) \overset{F(i_2)}{\to} \dots$$

ein Komplex, dessen n-Kohomologie wir als $R^nF(M)$ definieren: $R^nF(M) = H^n(F(I))$. Analog wie eben erhält man den Satz:

SATZ. *Die rechtsabgeleiteten Funktoren R^nF sind unabhängig von der Wahl der injektiven Auflösungen. Außerdem gilt:*

1. $R^0F = F$.
2. *Jede kurze exakte Sequenz induziert eine lange exakte Kohomologiesequenz*

$$\dots \to R^nF(M') \to R^nF(M) \to R^nF(M'') \to R^{n+1}F(M') \to \dots$$

KAPITEL 3

Graduierte Ringe, Hilbertpolynome und Syzygiensatz

Ein graduierter Ring ist ein Ring A, der eine Zerlegung als abelsche Gruppe besitzt:

$$A = A_0 \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus \dots,$$

so daß für die Multiplikation gilt:

$$A_i A_j \subseteq A_{i+j}.$$

Die Elemente aus A_d werden auch homogene Elemente vom Grad d genannt. Jedes $f \in A$ hat eine eindeutige Zerlegung $f = f_0 + f_1 + f_2 + \dots$, wo f_d homogen vom Grad d ist. Aus der Definition folgt, daß A_0 ein Unterring von A ist. Ein Homomorphismus graduierter Ringe ist ein Ringhomomorphismus, der die Graduierung erhält.

Beispiel: $S = k[x_1, \dots, x_n]$ mit

$$S_d = \{c_0 x_1^d + c_1 x_1^{d-1} x_2 + c_2 x_1^{d-1} x_3 + \dots : c_i \in k\}$$

ist ein graduierter Ring. Die homogenen Elemente vom Grad d sind genau die homogenen Polynome vom Grad d.

Sei A ein graduierter Ring. Ein graduierter A-Modul ist ein A-Modul M, der als abelsche Gruppe eine Zerlegung

$$M = \oplus_{i \in \mathbf{Z}} = \dots \oplus M_{-1} \oplus M_0 \oplus M_1 \oplus M_2 \oplus \dots$$

besitzt, so daß für die Multiplikation gilt:

$$A_i M_j \subseteq M_{i+j}.$$

Jedes $x \in M$ hat also eine eindeutige Darstellung $x = \sum_i x_i$ mit x_i homogen vom Grad i. Wenn wir von einem graduierten Modul sprechen, setzt dies einen graduierten Ring voraus, auch wenn dieser nicht explizit erwähnt wird.

Beispiel: Sei $A = k[x]$ mit der üblichen Graduierung und $M = k[x, \frac{1}{x}]$. Jedes $f \in M$ hat eine eindeutige Darstellung $f = \sum_{i \in \mathbf{Z}} a_i x^i$, also

$$M = \oplus_{i \in \mathbf{Z}} k x^i,$$

wodurch M ein graduierter A-Modul wird.

Bemerkung: Ist der graduierte A-Modul M endlich erzeugt, so gilt $M_i = 0$ für alle hinreichend negativen i, denn ist x homogen vom Grad d, so gilt $Ax \subseteq \oplus_{i \geq d} M_i$.

DEFINITION. Ist M ein graduierter A-Modul, so sei $M(d)$ definiert durch $M(d)_i = M_{d+i}$, also ist $M(d)$ wieder ein graduierter A-Modul, die Verschiebung von M um d.

Ein A-Homomorphismus $\phi : M \to N$ graduierter A-Moduln heißt homogen oder graduiert vom Grad d, falls gilt $\phi(M_i) \subseteq N_{d+i}$.

Beispiele:

1. Sei M ein graduierter A-Modul und $f \in A$ homogen vom Grad d. Dann ist $\phi : M \to M$ mit $\phi(x) = fx$ homogen vom Grad d.
2. Die natürliche Abbildung $\phi : M \to M(d)$ geht also von M_i nach $M_i = M(d)_{-d+i}$, ist also homogen vom Grad $-d$.

3. Sei $\phi : M \to N$ homogen vom Grad d. Dies bedeutet $\phi(M_i) \subseteq N_{d+i}$. Nun ist $N_{d+i} = N(d)_i$ und $M_i = M_{(-d)+(d+i)} = M(-d)_{d+i}$, also induziert ϕ kanonisch Homomorphismen
$$\phi' : M \to N(d), \quad \phi'' : M(-d) \to N$$
homogen vom Grad 0.

Lemma. *Sei M ein graduierter Modul und $N \subseteq M$ ein Untermodul. Dann sind äquivalent:*

1. *N wird von homogenen Elementen erzeugt.*
2. *Ist $x = \sum x_i \in N$ mit $x_i \in M_i$, so gilt auch $x_i \in N$.*
3. *$N = \sum (N \cap M_i)$.*

In diesem Fall heißt N graduierter oder homogener Untermodul von M.

Beweis:
$1 \Rightarrow 2$: Sei $\{y_i : i \in I\}$ ein Erzeugendensystem von N, wo y_i homogen vom Grad d_i sei. Ist $x \in N$, so haben wir $x = \sum_i a_i y_i$ mit $a_i \in A$. Wir zerlegen nun a_i in homogenen Bestandteile: $a_i = \sum_j a_{ij}$, wo a_{ij} homogen vom Grad j ist. Dann gilt:
$$x = \sum_i \sum_j a_{ij} y_i.$$
Die homogene Komponente von x vom Grad d ist offensichtlich
$$x_d = \sum_i a_{i,d-d_i} y_i,$$
die also offensichtlich wieder in N liegt.
$2 \Rightarrow 3$: folgt sofort.
$3 \Rightarrow 1$: Wähle als Erzeugendensystem $\cup_i (N \cap M_i)$. ■

Ist $N \subseteq M$ ein graduierter Untermodul des graduierten Moduls M und setzt man $N_i = N \cap M_i$, so gilt
$$M/N \simeq \oplus M_i/N_i,$$
wodurch M/N ein graduierter Modul ist. Ein graduiertes Ideal ist ein graduierter Untermodul des Ringes selbst.

Beispiele:

1. Für jedes $n \geq 0$ ist $\oplus_{i \geq n} A_i$ ein graduiertes Ideal in A. Man setzt $A_+ = \sum_{i \geq 1} A_i$. Dann ist $A/A_+ \simeq A_0$.
2. Sind $f_1, \dots, f_r$ homogene Elemente von A, so ist $(f_1, \dots, f_r)$ ein homogenes Ideal.
3. Ist $\phi : A \to B$ ein Homomorphismus graduierter Ringe, so ist $Kern(\phi)$ ein homogenes Ideal.
4. Ist $f \in A$, $f \neq 0$, so hat f eine homogene Zerlegung $f = f_d + f_{d+1} + \dots$ mit $f_d \neq 0$. Dann nennen wir $\ell(f) = f_d$ den Leitterm von f.
5. Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal in A, so heißt
$$\ell(\mathfrak{a}) = (\ell(f) : f \in \mathfrak{a})$$
das Leittermideal von $\mathfrak{a}$. Natürlich ist $\ell(\mathfrak{a})$ ein homogenes Ideal.

Satz. *Für einen graduierten Ring A sind äquivalent:*

1. *A ist noethersch,*
2. *A_0 ist noethersch und A ist als A_0-Algebra endlich erzeugt.*

Beweis:
$1 \Rightarrow 2$: Wegen $A/A_+ \simeq A_0$ ist mit A auch A_0 noethersch. A_+ ist ein graduiertes Ideal in A, wird also von homogenen Elementen $x_1, \dots, x_n \in A$ erzeugt: $A_+ = (x_1, \dots, x_r)$. Wir wollen zeigen $A = A_0[x_1, \dots, x_n]$. Dazu genügt es zu zeigen $A_m \subseteq A[x_1, \dots, x_n]$ für alle $m \geq 0$. Wir beweisen dies durch Induktion:
$m = 0$: klar. Sei jetzt $m \geq 1$; sei d_i der Grad von x_i, o.E. $d_i \geq 1$. Dann gilt $A_m = x_1 A_{m-d_1} + \dots + x_n A_{m-d_n}$, denn ist $x \in A_m \subseteq A_+ = (x_1, \dots, x_n)$, so gibt es $f_1, \dots, f_n$ mit $x = x_1 f_1 + \dots + x_n f_n$. Ist g_i der homogene Anteil von f_i vom Grad $m - d_i$, so gilt $x = x_1 g_1 + \dots + x_n g_{m-d_n}$, wie behauptet. Nach Induktionsvoraussetzung gilt nun $A_{m-d_i} \subseteq A_0[x_1, \dots, x_n]$, woraus dann die Behauptung folgt.

$2 \Rightarrow 1$: A ist Bild eine Polynomrings $A_0[z_1, \dots, z_n]$ über A_0, nach dem Hilbertschen Basissatz also noethersch. ■

Bemerkung: Graduierte Ringe treten in der algebraischen Geometrie als homogene Koordinatenringe projektiver Varietäten auf, graduierte (endlich erzeugte) Moduln entsprechen kohärente Garben.

Die folgenden Konstruktionen spielen ebenfalls eine wichtige Rolle in der algebraischen Geometrie:

Definition. Sei A ein kommutativer Ring, $\mathfrak{a}$ ein Ideal in A.

1. Dann definiert
$$gr_{\mathfrak{a}}A = A/\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2 \oplus \mathfrak{a}^2/\mathfrak{a}^3 \oplus \dots$$
einen graduierten Ring, den zu $\mathfrak{a}$ assoziierten graduierten Ring.
2. Auch
$$B_{\mathfrak{a}}A = A \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^2 \oplus \mathfrak{a}^3 \oplus \dots$$
definiert einen graduierten Ring, die Aufblasung von A in $\mathfrak{a}$.

Beispiel: Sei $\mathfrak{a} = (f_1, \dots, f_r)$ ein Ideal im Polynomring $k[x_1, \dots, x_n]$ mit $f_1(0, \dots, 0) = \dots = f_r(0, \dots, 0) = 0$. D.h. $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_n)$. Wir betrachten den Ring $A = k[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{a}$ und das maximale Ideal $\overline{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m} \bmod \mathfrak{a}$. Was ist $gr_{\overline{\mathfrak{m}}}(A)$?

- Für $i \geq 0$ gilt:
$$\frac{\overline{\mathfrak{m}}^i}{\overline{\mathfrak{m}}^{i+1}} \simeq \frac{\mathfrak{m}^i}{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{m}^i + \mathfrak{m}^{i+1}}.$$
- Wir definieren einen graduierten Ringhomomorphismus
$$\phi : k[x_1, \dots, x_n] \to gr_{\overline{\mathfrak{m}}}(A) = \oplus_{i \geq 0} \overline{\mathfrak{m}}^i / \overline{\mathfrak{m}}^{i+1}$$
durch $\phi(x_j) = \overline{x_j} \in \overline{\mathfrak{m}}/\overline{\mathfrak{m}}^2$. Natürlich ist ϕ surjektiv. Der Kern von ϕ ist ein graduiertes Ideal. Welches?
- Sei $f(x_1, \dots, x_n)$ ein homogenes Polynom vom Grad d. Dann ist $\phi(f) \in \overline{\mathfrak{m}}^d/\overline{\mathfrak{m}}^{d+1}$. Es gilt: $f \in Kern(\phi) \iff f \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{m}^d + \mathfrak{m}^{d+1}$, also genau dann wenn gilt $f = g + h$ mit $g \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{m}^d$ und $h \in \mathfrak{m}^{d+1}$. Die homogene Zerlegung von g lautet $g = g_d + g_{d+1} + \dots$, woraus sofort $f = g_d$ folgt. Also ist f Leitterm eines Polynoms aus $\mathfrak{a}$. Damit folgt $Kern(\phi) = \ell(\mathfrak{a})$.
- Wir erhalten also
$$gr_{\overline{\mathfrak{m}}}(k[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{a}) \simeq k[x_1, \dots, x_n]/\ell(\mathfrak{a}).$$

Beispiel: Für $A = k[x, y]/(x^2 - y^2 + x^3)$ erhält man als assoziierten graduierten Ring $k[x, y]/(x^2 - y^2)$. Der assoziierte graduierte Ring liefert den Tangentialkegel.

Beispiel: Für $A = \mathbf{Z}$ und $\mathfrak{a} = (p)$, wo p eine Primzahl ist, erhält man
$$gr_{(p)}\mathbf{Z} \simeq \mathbf{F}_p[x].$$

Beispiel: Wir wollen $A = k[x_1, \dots, x_n]$ in $\mathfrak{a} = (f_1, \dots, f_r)$ aufblasen.

- Wir betrachten den graduierten Ring $B = A[y_1, \dots, y_r]$ und definieren einen graduierten Ringhomomorphismus
$$\psi : A[y_1, \dots, y_r] \to \oplus_{i \geq 0} \mathfrak{a}^i$$
durch $\psi(y_j) = f_j \in \mathfrak{a}^1$. Natürlich ist ψ surjektiv. Der Kern ist ein homogenes Ideal. Welches? Natürlich gilt: $f_j y_i - f_i y_j \in Kern(\psi)$.
- Im Fall $r = n, f_1 = x_1, \dots, f_n = x_n$ kann man zeigen, daß $Kern(\psi) = (x_i y_j - x_j y_i : 1 \leq i, j \leq n)$ ist. Also
$$B_{(x_1, \dots, x_n)} k[x_1, \dots, x_n] \simeq k[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]/(x_i y_j - x_j y_i : 1 \leq i, j \leq n).$$
Dies liefert die Aufblasung von k^n im Punkt $(0, \dots, 0)$.

Wir wollen noch eine Anwendung geben:

Satz (Lemma von Artin-Rees). *Sei A ein noetherscher Ring, $\mathfrak{a}$ ein Ideal, E ein endlich erzeugter Modul, $F \subseteq E$ ein Untermodul. Dann gibt es ein $s \geq 1$, so daß für alle $n \geq s$ gilt:*

$$\mathfrak{a}^n E \cap F = \mathfrak{a}^{n-s}(\mathfrak{a}^s E \cap F).$$

Beweis:

1. Sei $A_t = A[t]$ und $A_t' = A[\mathfrak{a}t] = \oplus \mathfrak{a}t^n$. Erzeugen $a_1, \ldots, a_r$ das Ideal $\mathfrak{a}$, so $a_1 t, \ldots, a_r t$ die A-Algebra A_t', die daher auch noethersch ist.
2. Sei $E_t = \oplus t^n E$ in natürlicher Weise als A_t-Modul betrachtet und analog auch $F_t = \oplus t^n F$. Sei $E_t' = A_t' E_t = \oplus \mathfrak{a}^n t^n E$.
3. E_t' ist endlich erzeugter A_t'-Modul, also ist auch $E_t' \cap F_t = \oplus_{n \geq 0} t^n(\mathfrak{a}^n E \cap F)$ endlich erzeugter A_t'-Modul. Haben die Erzeuger Grad $\leq s$, so gilt
$$\oplus_{n \geq 0} t^n (\mathfrak{a}^n E \cap F) = E_t' \cap F_t = A_t'(\oplus_{m=0}^s t^m (\mathfrak{a}^m E \cap F)),$$
also erhält man durch Koeffizientenvergleich für $n \geq s$:
$$\mathfrak{a}^n E \cap F = \sum_{m=0}^{s} \mathfrak{a}^{n-m}(\mathfrak{a}^m E \cap F).$$
Nun gilt:
$$\mathfrak{a}^n(E \cap F) \subseteq \mathfrak{a}^{n-1}(\mathfrak{a}E \cap F) \subseteq \mathfrak{a}^{n-2}(\mathfrak{a}^2 E \cap F) \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{a}^{n-2}(\mathfrak{a}^s E \cap F).$$
Damit folgt
$$\mathfrak{a}^n E \cap F = \mathfrak{a}^{n-s}(\mathfrak{a}^s E \cap F). \blacksquare$$

Wir wenden dies an: Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler noetherscher Ring, $E = A$ und $F = \cap_{i \geq 0} \mathfrak{m}^i$. Dann gilt für $n = s+1$:

$$\cap_{i \geq 0} \mathfrak{m}^i = \mathfrak{m}^{s+1} E \cap F = \mathfrak{m}(\mathfrak{m}^s E \cap F) = \mathfrak{m} \cdot \cap_{i \geq 0} \mathfrak{m}^i.$$

Nach dem Lemma von Nakayama folgt $\cap_{i \geq 0} \mathfrak{m}^i = 0$. Damit haben wir bewiesen:

Satz (Krullscher Durchschnittssatz). *Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler noetherscher Ring. Dann gilt*

$$\cap_{i \geq 0} \mathfrak{m}^i = 0.$$

Folgerung. *Ist A ein noetherscher Integritätsring und $\mathfrak{a}$ ein Ideal $\neq A$, dann gilt $\cap_{i \geq 0} \mathfrak{a}^i = 0$.*

Beweis: Sei $\mathfrak{m} \subseteq A$ ein maximales Ideal mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$. Dann gilt $A \subseteq A_\mathfrak{m} \subseteq Quot(A)$. In $A_\mathfrak{m}$ gilt nach dem letzten Satz $\cap_{i \geq 0}(\mathfrak{m}A_\mathfrak{m})^i = 0$, also gilt natürlich erst recht $\cap_{i \geq 0} \mathfrak{a}^i = 0$. $\blacksquare$

Hilbertpolynome. Wir beschränken uns im folgenden auf den Polynomring $S = k[x_1, \ldots, x_n]$ mit der natürlichen Graduierung. S ist ein noetherscher Ring.

Sei M ein endlich erzeugter graduierter S-Modul. Sei $d \in \mathbf{Z}$. Dann ist $N = \oplus_{i \geq d} M_d$ ein Untermodul von M, also auch endlich erzeugt. Ist $m_1, \ldots, m_s$ ein homogenenes Erzeugendensystem von N und haben $m_1, \ldots, m_r$ Grad d, so gilt $N_d = M_d = km_1 + \cdots + km_r$, also ist M_d ein endlich dimensionaler k-Vektorraum. Daher ist folgende Definition sinnvoll:

Definition. Sei M ein endlich erzeugter graduierter $S = k[x_1, \ldots, x_n]$-Modul. Dann heißt

$$H_M(t) = \dim_k M_t$$

die Hilbertfunktion von M.

Beispiele:

1. Das wichtigste Beispiel ist der Ring $S = k[x_1, \ldots, x_n]$ ($n \geq 1$) selbst. Hier gilt (Übung!)
$$H_S(d) = \binom{d+n-1}{n-1} \text{ für } d \geq 0 \text{ und } H_S(d) = 0 \text{ für } d < 0.$$
2. Bei Verschiebung gilt:
$$H_{M(d)}(t) = \dim M_{d+t} = H_M(d+t).$$

3. Sei $S = k[x,y]$ und $M = k[x,y]/(x^4 - y^4)$. Für $d \geq 4$ hat jedes $f \in M_d$ die Gestalt $f = a_1x^3y^{d-3} + a_2x^2y^{d-2} + a_3xy^{d-1} + a_4y^d$, also gilt
$$H_M(s) = 0 \text{ für } s < 0, H_M(0) = 1, H_M(1) = 2, H_M(2) = 3, H_M(s) = 4 \text{ für } s \geq 3.$$

SATZ. *Ist M ein endlich erzeugter graduierter $S = k[x_1, \dots, x_n]$-Modul, so gibt es ein Polynom $P_M(t)$ vom Grad $\leq n-1$, so daß für alle hinreichend großen t gilt: $H_M(t) = P_M(t)$. Das Polynom $P_M(t)$ heißt das Hilbertpolynom von M.*

Den Beweis verschieben wir noch etwas.

Beispiele: Aus den obigen Beispielen folgt sofort:
$$P_{k[x_1,\dots,x_n]}(t) = \binom{t+n-1}{n-1} \text{ und } P_{k[x,y]/(x^4-y^4)}(t) = 4.$$

Wir nennen ein Polynom $f(t) \in \mathbf{Q}[t]$ numerisch, wenn für alle hinreichend großen $n \in \mathbf{Z}$ gilt: $f(n) \in \mathbf{Z}$.

- Für alle $n \geq 0$ ist $\binom{t}{n} = \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!}$ ein numerisches Polynom. Wegen $\binom{t}{n} = 0$ für $0 \leq t \leq n-1$ und
$$\binom{-t}{n} = \frac{(-t)(-t-1)\dots(-t-n+1)}{n!} = \frac{(-1)^n t(t+1)\dots(t+n-1)}{n!} = (-1)^n \binom{t+n-1}{n}$$
gilt für alle $t \in \mathbf{Z}$: $\binom{t}{n} \in \mathbf{Z}$.
- Wir schreiben $(\Delta f)(t) = f(t+1) - f(t)$. Dann gilt
$$\begin{aligned} \Delta\binom{t}{n} &= \binom{t+1}{n} - \binom{t}{n} == \frac{(t+1)t\dots(t-n+2)}{n!} - \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!} = \\ &= \frac{t(t-1)\dots(t-n+2)}{n!}((t+1)-(t-n+1)) == \binom{t}{n-1}. \end{aligned}$$
- Wegen $\binom{t}{n} = \frac{1}{n!}t^n +$ Terme vom Grad $\leq n-1$ ist auch $\{\binom{t}{n} : n \geq 0\}$ eine $\mathbf{Q}$-Basis von $\mathbf{Q}[t]$, also läßt sich jedes $f \in \mathbf{Q}[t]$ schreiben
$$f(t) = c_n\binom{t}{n} + c_{n-1}\binom{t}{n-1} + \dots + c_0$$
mit $c_n, \dots, c_0 \in \mathbf{Q}$.

LEMMA. *Die numerischen Polynome sind genau die Polynome der Form*
$$f(t) = c_n\binom{t}{n} + c_{n-1}\binom{t}{n-1} + \dots + c_0$$
mit $c_n, \dots, c_0 \in \mathbf{Z}$. Ist $f(t)$ ein numerisches Polynom, so gilt für alle $m \in \mathbf{Z}$: $f(m) \in \mathbf{Z}$.

Beweis: Die eine Richtung ist klar nach unseren Vorüberlegungen. Sei umgekehrt $f(t)$ ein numerisches Polynom. Dann gibt es $c_n, \dots, c_0 \in \mathbf{Q}$ mit $f(t) = c_n\binom{t}{n} + c_{n-1}\binom{t}{n-1} + \dots + c_0$. Nun ist aber auch
$$\Delta f = c_n\binom{t}{n-1} + \dots + c_1$$
ein numerisches Polynom, also folgt mit Induktion $c_n, \dots, c_1 \in \mathbf{Z}$. Wegen $c_0 = f(t) - (c_n\binom{t}{n} + \dots + c_1 t)$ folgt auch $c_0 \in \mathbf{Z}$ und damit die Behauptung. Die letzte Aussage folgt aus den Eigenschaften von $\binom{t}{n}$. ■

Beweis der Existenz des Hilbertpolynoms: Wir beweisen dies durch Induktion nach der Anzahl der Variablen n. Im Fall $n = 0$ ist $S = k$, M also ein endlich dimensionaler k-Vektorraum, insbesondere $M_t = 0$ für alle hinreichend großen t. D.h. $P_M(t) = 0$.
Sei nun $n \geq 1$ und M ein endlich erzeugter graduierter $S = k[x_1, \dots, x_n]$-Modul. Sei $N = Kern(M \xrightarrow{\cdot x_n} M)$. Dann erhalten wir eine exakte Sequenz graduierer S-Moduln
$$0 \to N \to M \xrightarrow{\cdot x_n} M \to M/x_nM \to 0.$$

Die Multiplikation schiftet den Grad um 1, also können wir auch schreiben

$$0 \to N \to M \to M(1) \to M/x_nM(1) \to 0,$$

dabei sind jetzt alle Homomorphismen homogen vom Grad 0. Daher gilt auch

$$0 \to N_t \to M_t \to M(1)_t \to (M/x_nM)(1)_t \to 0,$$

also durch Dimensionsberechnung

$$0 = H_N(t) - H_M(t) + H_{M(1)}(t) - H_{M/x_nM(1)}(t),$$

und damit

$$H_M(t+1) - H_M(t) = H_{M/x_nM}(t+1) - H_N(t).$$

Nun gilt aber $x_nN = x_n(M/x_nM) = 0$, also für ein homogenenes Polynom $f(x_1, \ldots, x_n)$ und $m \in N$ oder $m \in M/x_nM$: $f(x_1, \ldots, x_n)m = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)m$. Daher können wir N und M/x_nM als endlich erzeugte $k[x_1, \ldots, x_{n-1}]$-Moduln auffassen, also ist nach Induktionsvoraussetzung $H_{M/x_nM}(t+1) - H_N(t)$ für große t ein numerisches Polynom vom Grad $\leq n-2$. Also gibt es nach unserem Lemma $c_1, \ldots, c_{n-1} \in \mathbf{Z}$ mit

$$H_{M/x_nM}(t+1) - H_N(t) = c_{n-1}\binom{t}{n-2} + \cdots + c_1$$

für alle hinreichend großen $t \in \mathbf{Z}$. Sei $P(t) = c_n\binom{t}{n} + \cdots + c_1 t$. Dann gilt für alle großen t:

$$H_M(t+1) - H_M(t) = H_{M/x_nM}(t+1) - H_N(t) = (\Delta P)(t) = P(t+1) - P(t)$$

bzw. $H_M(t+1) - P(t+1) = H_M(t) - P(t)$ für alle großen $t \in \mathbf{Z}$. Also gibt es ein $c_0 \in \mathbf{Z}$ mit $H_M(t) - P(t) = c_0$ für alle hinreichend großen $t \in \mathbf{Z}$, wodurch jetzt die Behauptung folgt. ■

Bemerkung: Ist X eine projektive Varietät in $\mathbf{P}^n$ und $S' = k[x_0, \ldots, x_n]/I(X)$ der homogene Koordinatenring, so gilt also

$$P_{S'}(t) = c_m\binom{t}{m} + c_{m-1}\binom{t}{m-1} + \cdots + c_0$$

mit $c_m \neq 0$. Dann gilt:

$$m = dim(X) \text{ und } c_m = deg(X).$$

Syzygien. Beispiel: Sei $S = k[x, y]$ und $\mathfrak{a} = (x^2y^d, x^dy^2)$ mit $d \geq 2$. Wir wollen die Hilbertfunktion und das Hilbertpolynom von $\mathfrak{a}$ berechnen. Dazu konstruieren wir die freie Auflösung

$$0 \to S \xrightarrow{\begin{pmatrix} x^{d-2} \\ -y^{d-2} \end{pmatrix}} S^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} x^2y^d & x^dy^2 \end{pmatrix}} \mathfrak{a} \to 0.$$

Durch Verschieben machen wir die Homomorphismen noch homogen vom Grad 0 und erhalten:

$$0 \to S(-2d) \to S(-d-2)^2 \to \mathfrak{a} \to 0.$$

Jetzt kann man die Hilbertfunktion direkt berechnen:

$$H_{\mathfrak{a}}(t) = H_{S(-d-2)^2}(t) - H_{S(-2d)}(t).$$

Damit folgt für das Hilbertpolynom:

$$P_{\mathfrak{a}}(t) = 2(t+1-d-2) - (t+1-2d) = t-3.$$

Zum Namen *Syzygie*: Wir betrachten nochmals die Abbildung $\phi : S^2 \to \mathfrak{a}$. Ist e_1, e_2 eine Basis von S^2, so ist $\phi(e_1) = x^2y^d, \phi(e_2) = x^dy^2$. Nun sind aber $\phi(e_1)$ und $\phi(e_2)$ nicht unabhängig voneinander, sie stehen in Beziehung. Das nennt man eine Syzygie. (Der Name kommt auch in der Astronomie vor.)

Wir wollen das Beispiel verallgemeinern: Sei M ein endlich erzeugter graduierter $S = k[x_1, \ldots, x_n]$-Modul. Wir wählen ein homogenes Erzeugendensystem $m_1, \ldots, m_r \in M$, wo m_i homogen vom Grad d_i ist. Dann ist

$$\phi : S(-d_1) \oplus \cdots \oplus S(-d_r) \to M, \quad (a_1, \ldots, a_r) \mapsto a_1m_1 + \cdots + a_rm_r$$

surjektiv und homogen vom Grad 0. ($(1,0,\dots,0) \in (S(-d_1) \oplus \dots)_{d_1}$ wird auf $m_1 \in M_{d_1}$ abgebildet, etc.) So kann man weitermachen, indem man für M nun $Kern(\phi)$ wählt, u.s.w. Man erhält eine freie graduierte Auflösung von M:

$$\cdots \to \oplus_{j=1}^{r_2} S(a_{2j}) \to \oplus_{j=1}^{r_1} S(a_{1j}) \to \oplus_{j=1}^{r_0} S(a_{0j}) \to M \to 0,$$

wo alle Homomorphismen homogen vom Grad 0 sind. Hier gilt nun der Syzygiensatz von Hilbert:

SATZ. *Jeder endlich erzeugte graduierte $S = k[x_1,\dots,x_n]$-Modul M hat eine graduierte freie Auflösung*

$$0 \to F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0,$$

wo alle Homomorphismen homogen vom Grad 0 sind und

$$F_i = \oplus_{j=1}^{r_i} S(a_{ij})$$

ist.

Wir werden den Satz in der folgenden Version beweisen:

SATZ. *Ist M ein endlich erzeugter graduierter $S = k[x_1,\dots,x_n]$-Modul, sind $F_0,\dots,F_{n-1}$ endlich erzeugte freie S-Moduln, und ist*

$$0 \to E \to F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$$

exakt, so ist auch E ein endlich erzeugter freier S-Modul.

Konstruiert man also eine graduierte freie Auflösung eines endlich erzeugten Moduls M, so bricht diese automatisch ab. Der Beweis des Syzygiensatzes wird etwas dauern. Wir werden in diesem Abschnitt die erste wesentliche Arbeit leisten. Wir geben eine Anwendung:

Anwendung: Hilbertfunktion und Hilbertpolynom eines endlich erzeugten graduierten S-Moduls M: Sei

$$0 \to F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$$

eine freie graduierte Auflösung, wo alle Homomorphismen Grad 0 haben und gilt

$$F_i = \oplus_{j=1}^{r_i} S(a_{ij}).$$

Damit kann man jetzt sofort die Hilbertfunktion und das Hilbertpolynom von M ausrechnen:

$$\begin{aligned} H_M(t) &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i H_{F_i}(t) = \\ &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{r_i} (-1)^i H_{S(a_{ij})}(t) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{r_i} (-1)^i H_S(t+a_{ij}). \end{aligned}$$

Wegen $H_S(t+a_{ij}) = \binom{t+a_{ij}+n-1}{n-1}$ lautet das Hilbertpolynom also

$$P_M(t) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{r_i} (-1)^i \binom{t+a_{ij}+n-1}{n-1}.$$

(Dies gibt also einen weiteren Beweis für die Existenz des Hilbertpolynoms.)

Beispiel: Sei $S = k[x,y,z]$ und $M = S/(x, yz(y-z))$. Wir erhalten dann folgende freie Auflösung

$$0 \to S \xrightarrow{\begin{pmatrix} yz(y-z) \\ -x \end{pmatrix}} S^2 \xrightarrow{(x \quad yz(y-z))} S \to M \to 0,$$

und durch richtiges Verschieben der Graduierung schließlich

$$0 \to S(-4) \to S(-1) \oplus S(-3) \to S \to M \to 0.$$

Beispiele: Sei $S = k[x_1,\dots,x_n]$. Wir wollen freie graduierte Auflösungen für $k = S/(x_1,\dots,x_n)$ finden.

1. Für $n = 1$ haben wir

$$0 \to k[x] \xrightarrow{\cdot x} k[x] \to k \to 0.$$

2. Für $n = 2$ haben wir

$$0 \to k[x,y] \xrightarrow{\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}} k[x,y] \xrightarrow{(x\ y)} k[x,y] \to k \to 0.$$

3. Für $n = 3$ gilt mit $S = k[x,y,z]$

$$0 \to S \xrightarrow{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} S^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}} S^3 \xrightarrow{(x\ y\ z)} S \to k \to 0.$$

Wir haben dabei jeweils auf die Angabe der Graduierung verzichtet. Allgemein wird sich später ergeben (Koszul-Komplex):

SATZ. *Sei $S = k[x_1, \ldots, x_n]$. Dann hat k eine graduierte freie Auflösung*

$$0 \to F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to k \to 0.$$

Aus der Definition von Tor erhält man damit sofort:

FOLGERUNG. *Für jeden $k[x_1, \ldots, x_n]$-Modul M gilt:*

$$Tor_j(M,k) = 0 \text{ für } j > n.$$

Wir wollen jetzt damit den Hilbertschen Syzygiensatz beweisen. Zuvor formulieren wir noch zwei Lemmatas. Das erste gibt eine graduierte Version des Lemmas von Nakayama.

LEMMA. *Ist C ein endlich erzeugter graduierter $S = k[x_1, \ldots, x_n]$-Modul mit der Eigenschaft, daß $C \otimes k = C/(x_1, \ldots, x_n)C = 0$, so gilt schon $C = 0$.*

Beweis: Angenommen, es wäre $C \neq 0$. Da C endlich erzeugt ist, gibt es ein $d \in \mathbf{Z}$ mit $C_d \neq 0$, aber $C_{d-i} = 0$ für ‘ alle $i \geq 1$. Es gilt

$$((x_1, \ldots, x_n)C)_d = ((Sx_1 + \cdots + Sx_n)C)_d = (x_1C + \cdots + x_nC)_d = x_1C_{d-1} + \cdots + x_nC_{d-1} = 0,$$

also $(C/(x_1, \ldots, x_n)C)_d = C_d \neq 0$, ein Widerspruch. Daher ist $C = 0$. ■

LEMMA. *Ist*

$$0 \to E \to F_{n-1} \to F_{n-2} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$$

eine exakte Sequenz, wo alle F_i freie A-Moduln sind, so gilt

$$Tor_j(E,N) \simeq Tor_{j+n}(M,N) \text{ für } j \geq 1.$$

Beweis: Sei $f_i : F_i \to F_{i-1}$, außerdem $f_n : E \to F_{n-1}$ und $f_0 : F_0 \to M$. Wir spalten die lange exakte Sequenz auf und erhalten

$$0 \to Bild(f_{i+1}) \to F_i \to Bild(f_i) \to 0 \text{ für } 0 \leq i \leq n-1.$$

Die Tor-Sequenz liefert

$$\cdots \to Tor_{j+1}(F_i,N) \to Tor_{j+1}(Bild(f_i),N) \to Tor_j(Bild(f_{i+1}),N) \to Tor_j(F_i,N) \to \ldots.$$

Für $j \geq 1$ gilt $Tor_j(F_i,N) = 0$, da F_i frei, insbesondere flach ist, also folgt

$$Tor_{j+1}(Bildf_i,N) \simeq Tor_j(Bildf_{i+1},N) \text{ für } j \geq 1 \text{ und } 0 \leq i \leq n-1.$$

Damit folgt für $j \geq 1$:

$$\begin{aligned} Tor_j(E,N) &= Tor_j(Bild(f_n),N) \simeq Tor_{j+1}(Bild(f_{n-1}),N) \simeq \ldots \\ &\simeq Tor_{n+j}(Bild(f_0),N) = Tor_{n+j}(M,N), \end{aligned}$$

was gezeigt werden sollte. ■

Beweis des Syzygiensatzes:

1. Sei also M ein graduierter $S = k[x_1, \ldots, x_n]$-Modul. Wir konstruieren eine freie graduierte Auflösung wie oben angegeben und stoppen an der Stelle n:
$$0 \to E \to F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0,$$
wo also die F_i's frei sind und E ein graduierter S-Modul ist.
2. Nun gilt nach dem letzten Lemma und der Folgerung
$$Tor_1(E,k) = Tor_{n+1}(M,k) = 0.$$
3. Es gilt $E \otimes k = E \otimes S/(x_1, \ldots, x_n) \simeq E/(x_1, \ldots, x_n)E$. Wähle homogene Elemente $e_1, \ldots, e_r \in E$, so daß $\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_r$ eine k-Basis von $E \otimes k$ bilden. Hat e_i Grad d_i, so ist
$$\psi : F = S(-d_1) \oplus \cdots \oplus S(-d_r) \to E, \quad (a_1, \ldots, a_r) \mapsto a_1 e_1 + \cdots + a_r e_r$$
homogen vom Grad 0. Nach Konstruktion ist $\overline{\psi} : F \otimes k \to E \otimes k$ ein Isomorphismus.
4. Sei C der Kokern von ψ. Dann haben wir eine exakte Sequenz von graduierten S-Moduln:
$$F \to E \to C \to 0.$$
Da Tensorieren rechtsexakt ist, ist auch
$$F \otimes k \to E \otimes k \to C \otimes k \to 0$$
exakt, also folgt $C \otimes k = 0$ und damit $C = 0$.
5. Sei jetzt $D = Kern(\psi)$. Dann gilt
$$0 \to D \to F \to E \to 0.$$
Tensorieren mit k liefert wegen $Tor_1(E,k) = 0$
$$0 \to D \otimes k \to F \otimes k \to E \otimes k \to 0.$$
Also ist auch $D \otimes k = 0$ und wie zuvor folgt $D = 0$. Damit haben wir $E \simeq F$, also ist E frei, wie behauptet. ■

KAPITEL 4

Der Koszul-Komplex

1. Die äußere Algebra

Sei A ein kommutativer Ring und M ein A-Modul. Wir kennen bereits das Tensorprodukt $M^{\otimes d} = M \otimes \cdots \otimes M$. Ist $f : M \times \cdots \times M \to N$ eine multilineare Abbildung in einen Modul N, so faktorisiert f in eindeutiger Weise über das Tensorprodukt:

$$f : M \times \cdots \times M \to M \otimes \cdots \otimes M \xrightarrow{\tilde{f}} N.$$

Eine multilineare Abbildung $f : M^d \to N$ heißt alternierend, falls $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ wenn $x_i = x_j$ für zwei Indizes $i \neq j$ gilt. Dann gilt auch

$$f(\ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots) = -f(\ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots),$$

denn (o.E. $i = 1, j = 2$)

$$0 = f(a+b, a+b, \ldots) = f(a, a, \ldots) + f(a, b, \ldots) + f(b, a, \ldots) + f(b, b, \ldots) = f(a, b, \ldots) + f(b, a, \ldots).$$

Sei U der A-Untermodul von $M^{\otimes d}$, der von allen Ausdrücken der Form $x_1 \otimes \cdots \otimes x_d$ mit $x_i = x_j$ für zwei Indizes $i \neq j$ erzeugt wird. Wir definieren $\wedge^d M = M^{\otimes d}/U$, für das Bild von $x_1 \otimes \cdots \otimes x_d$ in $\wedge^d M$ schreiben wir $x_1 \wedge \cdots \wedge x_d$.

In $\wedge^d M$ gilt also $x_1 \wedge \cdots \wedge x_d = 0$ wenn für zwei verschiedene Indizes $i \neq j$ gilt $x_i = x_j$. Wie oben zeigt man dann

$$x_1 \wedge \cdots \wedge x_i \wedge \cdots \wedge x_j \wedge \cdots \wedge x_d = -x_1 \wedge \cdots \wedge x_j \wedge \cdots \wedge x_i \wedge \cdots \wedge x_d,$$

d.h. Vertauschen zweier Einträge ändert das Vorzeichen. Dies verallgemeinert sich leicht wie folgt:

Lemma. *Für $x_1, \ldots, x_d \in M$ gilt in $\wedge^d M$:*

$$x_{\pi(1)} \wedge \cdots \wedge x_{\pi(d)} = signum(\pi) x_1 \wedge \cdots \wedge x_d$$

für jede Permutation π der Indizes $1, \ldots, d$.

Beweis: Dies folgt sofort daraus, daß jede Permutation π Produkt von Transpositionen τ_i ist: $\pi = \tau_r \circ \cdots \circ \tau_1$, und daß $signum(\pi) = (-1)^r$ ist. ■

Lemma. *Ist $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ein Erzeugendensystem des Moduls M, so wird $\wedge^d M$ von*

$$\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_d} : i_1 < \cdots < i_d\}$$

erzeugt. Insbesondere gilt für $d > n$ dann $\wedge^d M = 0$.

Beweis: Der A-Modul $\wedge^d M$ wird von Ausdrücken der Form $x_1 \wedge \cdots \wedge x_d$ erzeugt. Sei $x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j$ für $i = 1, \ldots, d$. Dann ist

$$x_1 \wedge \cdots \wedge x_d = \sum_{j_1=1}^n \cdots \sum_{j_d=1}^n a_{1j_1} \ldots a_{dj_d} e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_d}.$$

Also ist

$$\{e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_d}\}$$

ein Erzeugendensystem von $\wedge^d M$. Gilt $j_r = j_s$ für $r \neq s$, so ist $e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_d} = 0$, also kann man darauf verzichten. Durch Permutation der Indizes erhält man dann die Behauptung. ■

LEMMA. *Sind $x_1, \dots, x_d \in M$ und $y_i = \sum_{j=1}^d a_{ij}x_j$ für $i = 1, \dots, d$, so gilt*

$$y_1 \wedge \cdots \wedge y_d = \det(a_{ij}) \cdot x_1 \wedge \cdots \wedge x_d.$$

Beweis: Dies rechnet man direkt aus:

$$\begin{aligned}
y_1 \wedge \cdots \wedge y_d &= (\sum_{j_1} a_{1j_1}x_{j_1}) \wedge \cdots \wedge (\sum_{j_d} a_{dj_d}x_{j_d}) = \\
&= \sum_{j_1,\dots,j_d} a_{1j_1} \dots a_{dj_d} x_{j_1} \wedge \cdots \wedge x_{j_d} = \\
&= \sum_{\pi \in S_d} a_{1\pi(1)} \dots a_{d\pi(d)} x_{\pi(1)} \wedge \cdots \wedge x_{\pi(d)} = \\
&= \sum_{\pi \in S_d} signum(\pi) a_{1\pi(1)} \dots a_{d\pi(d)} x_1 \wedge \cdots \wedge x_d = \\
&= \det((a_i j)) \cdot x_1 \wedge \cdots \wedge x_d. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Ähnlich wie das Tensorprodukt ist nun $\wedge^d M$ universell für alternierende d-lineare Abbildungen: Ist $f : M^d \to N$ multilinear und alternierend, so faktorisiert f über $\wedge^d M$:

$$f : M^d \to \wedge^d M \to N.$$

(Beweis als Übung.)

Ist $f : M \to N$ linear, so induziert dies eine lineare Abbildung

$$\wedge^d f : \wedge^d M \to \wedge^d N$$

durch die Vorschrift $x_1 \wedge \cdots \wedge x_d \mapsto f(x_1) \wedge \cdots \wedge f(x_d)$. (Beweis über die universelle Eigenschaft.)

Man kann auch eine Multiplikation definieren:

$$\wedge^d M \times \wedge^e M \to \wedge^{d+e} M, \quad (a, b) \mapsto a \wedge b,$$

die offensichtlich A-bilinear und assoziativ ist. Zur Übung zeige man:

$$a \wedge b = (-1)^{de} b \wedge a.$$

Definiert man $\wedge M = \oplus_{d=0}^{\infty} \wedge^d M$, so wird dadurch $\wedge$ zu einer graduierten A-Algebra, der sogenannten alternierenden oder äußeren Algebra von M. Man schreibt auch $\wedge^0 M = A$.

SATZ. *Sei F ein freier A-Modul mit Basis $e_1, \dots, e_n$. Dann gilt*

1. *für $1 \leq d \leq n$: $\wedge^d F$ ist freier Modul mit Basis*

$$\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_d} : 1 \leq i_1 < \cdots < i_d\},$$

2. *für $d \geq n + 1$: $\wedge^d F = 0$.*

Beweis:

1. Wir wissen bereits, daß die angegebenen Systeme Erzeugendensysteme sind.
2. Es gilt also $\wedge^n F = Ae_1 \wedge \cdots \wedge e_n$. Wir betrachten die Determinante $\det : F = A^n \to A$. Sie ist alternierend und multilinear, faktorisiert also über $\wedge^n F$: $\det : A^n \to \wedge^n A^n \to A$. Das haben wir bereits ausgerechnet:

$$(a_{ij}) \mapsto \det((a_{ij}))e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \mapsto \det((a_{ij})).$$

   Hieraus folgt aber sofort $Ae_1 \wedge \cdots \wedge e_n \simeq A$, d.h. die Behauptung im Fall $d = n$.
3. Sei nun $2 \leq d \leq n - 1$. Wir betrachten zuerst dann Fall $d = 2$. Wir müssen zeigen, daß

$$e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, \dots, e_{n-1} \wedge e_n$$

   linear unabhängig sind. Seien $a_{ij} \in A$ mit

$$\sum_{i<j} a_{ij} e_i \wedge e_j = 0.$$

Sei $i_0 < j_0$. Dann folgt

$$0 = e_1 \wedge \cdots \wedge \hat{e_{i_0}} \wedge \cdots \wedge \hat{e_{j_0}} \wedge \cdots \wedge e_n \wedge \sum_{i<j} a_{ij} e_i \wedge e_j = \pm a_{i_0 j_0} e_1 \wedge \cdots \wedge e_n,$$

also nach der letzten Aussage $a_{i_0 j_0} = 0$. Damit folgt die Behauptung.

4. Für $3 \leq d \leq n-1$ geht man genauso vor. ■

Da wir folgenden Satz nicht benutzen werden, geben wir ihn ohne Beweis an:

Satz. *Sind E und F endlich erzeugte freie A-Moduln, so gilt für alle $n \geq 0$:*

$$\wedge^n (E \oplus F) \simeq \oplus_{p+q=n} \wedge^p E \otimes \wedge^q F.$$

Beweisidee: Sei $e_1, \ldots, e_m$ eine Basis von E und $f_1, \ldots, f_n$ eine Basis von F. Dann ist $e_1, \ldots, e_m, f_1, \ldots, f_n$ eine Basis von $E \oplus F$, also

$$\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} \wedge f_{j_1} \wedge \cdots \wedge f_{j_q} : i_1 < \cdots < i_p, j_1 < \cdots < j_q, p+q=n\}$$

eine Basis von $\wedge^n(E \oplus F)$. Hieran erkennt man nun bereits die gewünschte Zerlegung. ■

2. Koszul-Komplexe

Sei M ein A-Modul und $x \in M$. Dann wird durch

$$K(x): 0 \to A \overset{\cdot x}{\to} M \overset{x\wedge}{\to} \wedge^2 M \overset{x\wedge}{\to} \wedge^3 M \to \ldots$$

der Koszul-Komplex $K(x)$ definiert. (Die Komplexeigenschaft folgt aus $x \wedge x = 0$.) Die Numerierung sei $K(x)_i = \wedge^i M$, also haben wir eigentlich einen Kokomplex vor uns.

Ist $M = A^n$ und $x = (x_1, \ldots, x_n)$, so schreibt man auch $K(x_1, \ldots, x_n)$ für $K(x)$. Wir wollen diesen Komplex etwas näher betrachten. Sei $e_1, \ldots, e_n$ die kanonische Basis von A^n und damit $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$. Der Komplex ist also mit $F = A^n$

$$0 \to A \to F \to \wedge^2 F \to \cdots \to \wedge^{n-1} F \to \wedge^n F \to 0,$$

wo $\{e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_d} : j_1 < \cdots < j_d\}$ eine Basis von $\wedge^d F$ ist.

Beispiele:

1. Für $x \in A$ ist der Komplex $K(x)$:

$$0 \to A \overset{x\cdot}{\to} A \to 0.$$

2. Sei $x, y \in A$ und $F = Ae_1 + Ae_2$. Wegen $\wedge^2 F = Ae_1 \wedge e_2$ und

$$(xe_1 + ye_2) \wedge (ae_1 + be_2) = (xb - ya) e_1 \wedge e_2$$

sieht der Komplex wie folgt aus:

$$0 \to A \overset{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{\to} A^2 \overset{(-y\; x)}{\to} A \to 0.$$

3. Seien $x, y, z \in A$ und $F = Ae_1 + Ae_2 + Ae_3$. Als Basis von $\wedge^2 F$ wählen wir $f_1 = e_2 \wedge e_3, f_2 = e_3 \wedge e_1, f_3 = e_1 \wedge e_2$. Wegen $(xe_1 + ye_2 + ze_3) \wedge e_1 = zf_2 - yf_3$, $(xe_1 + ye_2 + ze_3) \wedge e_2 = -zf_1 + xf_3$, $(xe_1 + ye_2 + ze_3) \wedge e_3 = -xf_2 + yf_1$ und

$$(xe_1 + ye_2 + ze_3) \wedge f_1 = x, (xe_1 + ye_2 + ze_3) \wedge f_2 = y, (xe_1 + ye_2 + ze_3) \wedge f_3 = z$$

erhält man den Komplex $K(x, y, z)$:

$$0 \to A \overset{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}{\to} A^3 \overset{\begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}}{\to} A^3 \overset{\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}}{\to} A \to 0,$$

den wir schon füher gesehen haben.

Wir betrachten nun wieder allgemein $K(x_1,\dots,x_n)$ mit $x_1,\dots,x_n \in A$. Sei $F = Ae_1 + \cdots + Ae_n$, $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$. Wir studieren zwei Homomorphismen.

- $A \to F$ wird offensichtlich durch $a \mapsto (x_1a,\dots,x_na)$ gegeben.
- Was ist $\wedge^{n-1}F \to \wedge^n F$? Sei $f_i = e_1 \wedge \cdots \wedge \hat{e_i} \wedge \cdots \wedge e_n$. Dann ist $f_1,\dots,f_n$ eine Basis von $\wedge^{n-1}F$. Es gilt:
$$x \wedge f_i = (x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) \wedge f_i = x_ie_i \wedge f_i = (-1)^{i+1}x_ie_1 \wedge \cdots \wedge e_n.$$

Wir betrachten jetzt den Komplex $M \otimes K(x_1,\dots,x_n)$, wo M ein A-Modul ist. Er sieht wie folgt aus:
$$0 \to M \to M^n \to M \otimes \wedge^2 F \to \cdots \to M \otimes \wedge^{n-1}F \to M \otimes \wedge^n F \to 0.$$
Wir betrachten wieder zwei Randabbildungen näher:

- $M \otimes \wedge^0 F \to M \otimes \wedge^1 F$, d.h. $M \to M^n$, ist gegeben durch $m \mapsto (x_1m,\dots,x_nm)$.
- $M \otimes \wedge^{n-1}F \to M \otimes \wedge^n F$, d.h. $M^n \simeq M \otimes \wedge^{n-1}F \to M \otimes \wedge^n F \simeq M$, ist bei entsprechender Identifizierung:
$$\begin{aligned}(m_1,\dots,m_n) \quad &\simeq m_1 \otimes f_1 + \cdots + m_n \otimes f_n\\ &\mapsto (x_1m_1 - x_2m_2 + - \cdots \pm x_nm_n)e_1 \wedge \cdots \wedge e_n\\ &\simeq x_1m_1 - x_2m_2 + - \dots x_nm_n.\end{aligned}$$

Damit erhalten wir sofort für die Homologiegruppen:

Ergebnis:

- $H^0(M \otimes K(x_1,\dots,x_n)) = \{m \in M : x_1m = \cdots = x_nm = 0\}$ und
- $H^n(M \otimes K(x_1,\dots,x_n)) = M/(x_1,\dots,x_n)M$.

Bemerkung: Im folgenden wird es darum gehen, die Komplexe $M \otimes K(x_1,\dots,x_n)$ auf Exaktheit zu untersuchen. Hat man z.B. $H^i(K(x_1,\dots,x_n)) = 0$ für $i < n$, so liefert der Koszul-Komplex eine freie Auflösung von $A/(x_1,\dots,x_n)$:
$$0 \to A \to A^n \to \wedge^2 A^n \to \cdots \to \wedge^{n-1}A^n \to \wedge^n A^n \to A/(x_1,\dots,x_n) \to 0.$$

Beispiele:

1. $n = 1$. Dann ist $M \otimes K(x)$ für $x \in A$:
$$0 \to M \xrightarrow{x\cdot} M \to 0,$$
also
$$H^0(M \otimes K(x)) = \{m \in M : xm = 0\} \text{ und } H^1(M \otimes K(x)) = M/xM.$$
$H^0(M \otimes K(x)) = 0$ genau dann, wenn x kein Nullteiler in M ist.
2. $n = 2$. Dann ist $M \otimes K(x,y)$ mit $x,y \in A$
$$0 \to M \xrightarrow{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} M^2 \xrightarrow{(-y\,x)} M \to 0.$$
Also gilt für die Homologie:
$$\begin{aligned}H^0(M \otimes K(x,y)) &= \{m \in M : xm = ym = 0\},\\ H^1(M \otimes K(x,y)) &= \{(m_1,m_2) \in M^2 : ym_1 = xm_2\}/\{(xm,ym) : m \in M\},\\ H^2(M \otimes K(x,y)) &= M/(x,y)M.\end{aligned}$$
Wir wollen noch untersuchen, wann der Komplex bis auf die rechte Seite exakt ist, d.h. wann $H^0(M \otimes K(x,y)) = H^1(M \otimes K(x,y)) = 0$ gilt.
Behauptung: Ist x kein Nullteiler in M, so gilt
$$H^0(M \otimes K(x,y)) = 0 \text{ und } H^1(M \otimes K(x,y)) = Kern(M/xM \xrightarrow{y\cdot} M/xM).$$
Beweis: Natürlich ist $H^0(M \otimes K(x,y)) = 0$. Es ist $\overline{m} \in Kern(M/xM \xrightarrow{y} M/xM)$ genau dann, wenn es $m' \in M$ gibt mit $ym = xm'$. Also ist
$$\{(m,m') : ym = xm'\} \xrightarrow{\phi} M/xM \xrightarrow{y} M/xM$$

exakt, wenn ϕ die Projektion auf den ersten Faktor ist. Weiter ist $(m, m') \in Kern(\phi)$ genau dann, wenn $m = xm''$. Dann ist $x(m' - ym'') = ym - ym = 0$, also $m' = ym''$, d.h. $Kern(\phi) = \{(xm'', ym'')\}$, woraus dann sofort die Behauptung folgt. ■

Bemerkung: Ist $f : M \to M'$ ein A-Homomorphismus, $x \in M$, so induziert f einen Komplexhomomorphismus $K(x) \to K(f(x))$:

$$\begin{array}{ccccccc} \wedge^i M & \overset{x\wedge}{\to} & \wedge^{i+1} M & \qquad & m_1 \wedge \cdots \wedge m_i & \mapsto & x \wedge m_1 \wedge \cdots \wedge m_i \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \wedge^i M' & \overset{f(x)\wedge}{\to} & \wedge^{i+1} M' & & f(m)_1 \wedge \cdots \wedge f(m)_i & \mapsto & f(x) \wedge f(m)_1 \wedge \cdots \wedge f(m)_i \end{array}$$

Ist f ein Isomorphismus, so ist auch $K(x) \simeq K(f(x))$, insbesondere haben die Komplexe gleiche Homologie. Dies zeigt, daß $H^i(M \otimes K(x_1, \ldots, x_n)) = H^i(M \otimes K(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)}))$ für alle Permutationen π und alle i gilt.

3. Produkte von Komplexen

Sind $G = (G_i, g_i)$ und $H = (H_i, h_i)$ zwei Komplexe, so definieren wir $G \otimes H$ wie folgt:

$$(G \otimes H)_n = \sum_{i+j=n} G_i \otimes H_j$$

mit $k_n : (G \otimes H)_n \to (G \otimes H)_{n+1}$ durch

$$k_n(a_i \otimes b_{n-i}) = g_i(a_i) \otimes b_{n-i} + (-1)^i a_i \otimes h_{n-i}(b_{n-i})$$

für $a_i \otimes b_{n-i} \in G_i \otimes H_{n-i}$. Man zeigt dann, daß $G \otimes H$ wirklich ein (Ko-)Komplex ist.

Beispiel: Sei $y \in A$, $K = K(y)$ und G irgendein Komplex.

- Es ist $K_0 = K_1 = A$ und $K_0 \overset{y}{\to} K_1$.
- Es gilt
$$(G \otimes K)_n = G_{n-1} \otimes K_1 + G_n \otimes K_0 \simeq G_{n-1} \oplus G_n.$$
Sei $(a, b) \in G_{n-1} \oplus G_n \simeq (G \otimes K)_n$. Dann gilt für die Ableitung k:
$$\begin{array}{rcl} k_n(a,b) & = & k_n(a \otimes 1 + b \otimes 1) = \\ & = & g_{n-1}(a) \otimes 1 + (-1)^n a \otimes 0 + g_n(b) \otimes 1 + (-1)^{n-1} b \otimes y = \\ & = & g_{n-1}(a) \otimes 1 + g_n(b) \otimes 1 + (-1)^{n-1} yb \otimes 1 = \\ & = & (g_{n-1}(a) + (-1)^{n-1} yb) \otimes 1 + g_n(b) \otimes 1 \simeq \\ & \simeq & (g_{n-1}(a) + (-1)^{n-1} yb, g_n(b)). \end{array}$$
- Wir definieren jetzt $G[-1]$ durch $G[-1]_n = G_{n-1}$. Dann liefert
$$0 \to G[-1] \to G \otimes K \to G \to 0$$
durch $0 \to G_{n-1} \to G_{n-1} \oplus G_n \to G_n \to 0$ eine exakte Sequenz von Komplexen. Die Kommutativität der Diagramme prüft man schnell nach.
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & G_{n-1} & \to & G_{n-1} \oplus G_n & \to & G_n & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & G_n & \to & G_n \oplus G_{n+1} & \to & G_{n+1} & \to & 0 \end{array}$$
- Wir erhalten also eine lange exakte Kohomologiesequenz:
$$\cdots \to H^i(G[-1]) \to H^i(G \otimes K) \to H^i(G) \to H^{i+1}(G[-1]) \to \ldots$$
Dabei ist $H^{i+1}(G[-1]) = H^i(G)$.
- Wie sieht der Verbindungshomomorphismus $H^n(G) \to H^{n+1}(G[-1])$ aus? Wähle $b \in Z^n(G)$. Ein Urbild in $G_{n-1} \oplus G_n$ ist $(0, b)$, dann $k_n(0, b) = ((-1)^n yb, g_n(b)) = ((-1)^n yb, 0)$, ein Urbild in $G[-1]_{n+1} = G_n$ also $(-1)^n yb$. Also ist der Verbindungshomomorphismus einfach Multiplikation mit $(-1)^n y$:
$$H^n(G) \overset{(-1)^n y}{\to} H^{n+1}(G[-1]) = H^n(G).$$

- Wir rechnen noch etwas mit der Homologie: Sei $(a,b) \in Z^n(G \otimes K) = G_{n-1} \oplus G_n$, also $0 = (g_{n-1}(a) + (-1)^n yb, g_n(b))$. Dann gilt
$$\begin{aligned} y \cdot (a,b) &= (ya, yb) = (ya, (-1)^{n+1} g_{n-1}(a)) = \\ &= (-1)^{n-1}((-1)^{n-1} ya, g_{n-1}(a)) = (-1)^{n-1} k_{n-1}(0,a) = \\ &= k_{n-1}(0, (-1)^{n-1} a) \in B^n(G \otimes K), \end{aligned}$$
also $y \cdot \overline{(a,b)} = 0$ in $H^n(G \otimes K)$, d.h.
$$y \cdot H^n(G \otimes K) = 0.$$

Wir formulieren Teil der Ergebnisse als Satz:

Satz. *Sei $G = (G_i, g_i)$ ein Komplex und $y \in A$. Dann gilt für den Komplex $G \otimes K(y)$:*

1. $(G \otimes K(y))_n \simeq G_{n-1} \oplus G_n$, *wobei die Randabbildung wie folgt aussieht ($(a,b) \in G_{n-1} \oplus G_n$):*
$$(a,b) \mapsto (g_{n-1}(a) + (-1)^{n-1} yb, g_n(b)).$$
2. *Man erhält eine lange exakte Kohomologiesequenz*
$$\cdots \to H^i(G \otimes K(y)) \to H^i(G) \stackrel{(-1)^i y}{\to} H^i(G) \to H^{i+1}(G \otimes K(y)) \to \dots$$
3. *Für alle i gilt $y \cdot H^i(G \otimes K(y)) = 0$.*

Wir wollen dies jetzt in einem Spezialfall anwenden:

Satz. *Es gilt*
$$K(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \simeq K(x_1, \dots, x_{n-1}) \otimes K(x_n).$$

Beweis:

1. Wir betrachten zuerst $H = K(x_1, \dots, x_{n-1}) \otimes K(x_n)$ wie zuvor. Sei $x' = x_1 e_1 + \dots + x_{n-1} e_{n-1}$. Dann gilt
$$H_i = K(x_1, \dots, x_{n-1})_{i-1} \oplus K(x_1, \dots, x_{n-1})_i$$
und $h_i : H_i \to H_{i+1}$ wird
$$h_i(a,b) = (x' \wedge a + (-1)^i b, x' \wedge b).$$
2. Wir betrachten jetzt $K(x_1, \dots, x_n)$ mit $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$. Offensichtlich gilt
$$K(x_1, \dots, x_n)_i = K(x_1, \dots, x_{n-1})_{i-1} \wedge e_n \oplus K(x_1, \dots, x_{n-1})_i.$$
Sei $(a,b) \in K(x_1, \dots, x_{n-1})_{i-1} \oplus K(x_1, \dots, x_{n-1})_i$, also $a \wedge e_n + b \in K(x_1, \dots, x_n)_i$. Dann wird die Ableitung
$$\begin{aligned} x \wedge (a \wedge e_n + b) &= (x' + x_n e_n) \wedge (a \wedge e_n + b) = \\ &= x' \wedge a \wedge e_n + x' \wedge b + x_n e_n \wedge b = \\ &= x' \wedge a \wedge e_n + x' \wedge b + (-1)^i x_n b \wedge e_n = \\ &= (x' \wedge a + (-1)^i x_n b) \wedge e_n + x' \wedge b, \end{aligned}$$
entspricht also $(x' \wedge a + (-1)^i x_n b, x' \wedge b)$. Daher sind die Komplexe gleich. ■

Natürlich folgt damit auch sofort $K(x_1, \dots, x_n) = K(x_1) \otimes \dots \otimes K(x_n)$. Ähnlich sieht man $M \otimes K(x_1, \dots, x_n) \simeq (M \otimes K(x_1, \dots, x_{n-1})) \otimes K(x_n)$.

Folgerung. *Für $y \in (x_1, \dots, x_n)$ gilt $y \cdot H^i(M \otimes K(x_1, \dots, x_n)) = 0$ für alle i. Anders ausgedrückt:*
$$(x_1, \dots, x_n) \cdot H^i(M \otimes K(x_1, \dots, x_n)) = 0.$$

Beweis: Es gilt
$$M \otimes K(x_1, \dots, x_n) \simeq (M \otimes K(x_1, \dots, x_{n-1})) \otimes K(x_n).$$
Nach einem vorangegangenen Satz folgt $x_n \cdot H^i(M \otimes K(x_1, \dots, x_n)) = 0$ für alle i. Aus Symmetriegründen folgt ebenso $x_j \cdot H^i(M \otimes K(x_1, \dots, x_n)) = 0$ für alle i und alle j. Daraus folgt sofort die Behauptung. ■

FOLGERUNG. *Ist M endlich erzeugt, so gilt mit $I = (x_1, \dots, x_n)$:*

$$H^i(M \otimes K(x_1, \dots, x_n)) = 0 \text{ für alle } i \iff IM = M.$$

Beweis: $\Rightarrow$: Unter der Voraussetzung gilt insbesondere

$$0 = H^n(M \otimes K(x_1, \dots, x_n)) = M/(x_1, \dots, x_n) = M/IM,$$

also $M = IM$.
$\Leftarrow$: Da M endlich erzeugt ist und $M = IM$ gilt, gibt es ein $y \in I$ mit $(1-y)M = 0$. Dann gilt natürlich auch $(1-y) \cdot H^i(M \otimes K(x_1, \dots, x_n)) = 0$, nach unserer letzten Folgerung $y \cdot H^i(M \otimes K(x_1, \dots, x_n)) = 0$, und somit $H^i(M \otimes K(x_1, \dots, x_n)) = 0$. ■

Bemerkung: Ist M endlich erzeugt, $M = Am_1 + \dots + Am_r$, und $M = IM$, so gibt es $c_{ij} \in I$ mit $m_i = \sum c_{ij} m_j$. Wie üblich folgt $\det(1 - (c_{ij})) \cdot M = 0$. Wählt man $y = 1 - \det(1 - (c_{ij}))$, so folgt $(1-y)M = 0$ und $y \in I$, wie in obigem Beweis verwendet.

4. Reguläre Folgen

Ein grundlegender Begriff ist der Begriff der regulären Folge:

DEFINITION. Sei M ein A-Modul. Eine Folge $x_1, \dots, x_n \in A$ heißt eine M-reguläre Folge oder eine M-Folge, wenn gilt:

- $(x_1, \dots, x_n)M \neq M$,
- x_i ist kein Nullteiler in $M/(x_1, \dots, x_{i-1})M$ für $i = 1, \dots, n$.

Ist $M = A$, spricht man von einer regulären Folge. Ist $I \subseteq A$ ein Ideal mit $IM \neq M$ und $x_1, \dots, x_n \in I$, so sagt man $x_1, \dots, x_n$ ist eine M-Folge in I.

Beispiele:

1. Sei $A = k[x_1, \dots, x_n]$ Polynomring über einem Körper und $M = A$. Dann gilt: $A/(x_1, \dots, x_{i-1}) \simeq k[x_i, \dots, x_n]$, x_i ist kein Nullteiler in $A/(x_1, \dots, x_{i-1})$ und $A/(x_1, \dots, x_n) = k \neq 0$, also ist $x_1, \dots, x_n$ eine reguläre Folge.
2. Sei $A = k[x, y]$ und $x_1 = x, x_2 = y(1+x)$. Dann ist x_1 kein Nullteiler in A und x_2 operiert wie y auf $A/(x_1) \simeq k[y]$, ist also auch kein Nullteiler. Wegen $(x_1, x_2) = (x, y) \neq A$ ist x_1, x_2 eine reguläre Folge.
3. Sei $A = k[x, y]$ und $x_1 = x, x_2 = xy$. Auf $A/(x_1) \simeq k[y]$ operiert x_2 wie 0, also ist x_1, x_2 keine reguläre Folge.
4. Wir betrachten reguläre Folgen in $\mathbf{Z}$. Sei $x_1 \in \mathbf{Z}$, $x_1 \neq 0$. Dann ist x_1 kein Nullteiler. In $\mathbf{Z}/(x_1)$ sind alle Elemente $\overline{x_2}$ Nullteiler oder Einheiten, d.h. entweder hat $\mathbf{Z}/(x_1) \xrightarrow{x_2} \mathbf{Z}/(x_1)$ einen nichttrivialen Kern oder es gilt $\mathbf{Z}/(x_1, x_2) = 0$. Daher bestehen alle regulären Folgen nur aus einem Element.

Den ersten Zusammenhang zwischen der Exaktheit von $M \otimes K(x_1, \dots, x_n)$ und der M-Regularität von $x_1, \dots, x_n$ zeigt folgender Satz:

SATZ. *Ist $x_1, \dots, x_n$ eine M-Folge, so gilt*

$$H^i(M \otimes K(x_1, \dots, x_n)) = 0 \text{ für } i < n.$$

Es ist $H^n(M \otimes K(x_1, \dots, x_n)) = M/(x_1, \dots, x_n)M \neq 0$.

Beweis:

1. Mit $x_1, \dots, x_n$ ist auch $x_1, \dots, x_i$ eine M-Folge. Wir beweisen jetzt durch Induktion nach j, daß für alle $i < j$ gilt:
$$H^i(M \otimes K(x_1, \dots, x_j)) = 0.$$
2. $j = 1$. Der Komplex $M \otimes K(x_1)$ lautet
$$0 \to M \xrightarrow{x_1} M \to 0,$$
also $H^0(M \otimes K(x_1)) = \{m : x_1 m = 0\}$. Da x_1 kein Nullteiler sein sollte, folgt $H^0(M \otimes K(x_1)) = 0$.

3. Sei jetzt $j \geq 2$ vorausgesetzt. Wir haben die lange exakte Kohomologiesequenz

$$\begin{aligned}\cdots &\to H^{i-1}(M \otimes K(x_1, \ldots, x_{j-1})) \stackrel{\pm x_j}{\to} H^{i-1}(M \otimes K(x_1, \ldots, x_{j-1})) \\ &\to H^i(M \otimes K(x_1, \ldots, x_j)) \to H^i(M \otimes K(x_1, \ldots, x_{j-1})) \\ &\stackrel{\pm x_j}{\to} H^i(M \otimes K(x_1, \ldots, x_{j-1})) \to \ldots\end{aligned}$$

4. Ist $i < j - 1$, so gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$H^{i-1}(M \otimes K(x_1, \ldots, x_{j-1})) = H^i(M \otimes K(x_1, \ldots, x_{j-1})) = 0,$$

woraus sofort $H^i(M \otimes K(x_1, \ldots, x_j)) = 0$ folgt.

5. Es bleibt der Fall $i = j - 1$. Dann reduziert sich die obige Sequenz auf

$$0 \to H^{j-1}(M \otimes K(x_1, \ldots, x_j)) \to M/(x_1, \ldots, x_{j-1})M \stackrel{\pm x_j}{\to} M/(x_1, \ldots, x_{j-1})M \to \ldots$$

Aus der Injektivität von $x_j : M/(x_1, \ldots, x_{j-1})M \to M/(x_1, \ldots, x_{j-1})M$ folgt jetzt auch

$$H^{j-1}(M \otimes K(x_1, \ldots, x_j)) = 0.$$

Damit folgt jetzt die Behauptung. ■

Da $x_1, \ldots, x_n$ eine reguläre Folge im Polynomring $k[x_1, \ldots, x_n]$ ist, folgt sofort:

Folgerung. *Ist $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ Polynomring über dem Körper k, so liefert der Koszul-Komplex $K(x_1, \ldots, x_n)$ eine freie (graduierte) Auflösung des A-Moduls k der Länge n:*

$$0 \to A \to A^n \to \wedge^2 A^n \to \cdots \to \wedge^{n-1} A^n \to \wedge^n A^n \to k \to 0.$$

(Damit ist jetzt der Hilbertsche Syzygiensatz vollständig bewiesen.)

Wir wollen jetzt sehen, ob man obigen Satz umkehren kann.

Beispiel: Sei $A = k[x, y, z]/((x-1)y)$. Wir betrachten die Folge $x_1 = x, x_2 = (x-1)z$.

- x_1 ist kein Nullteiler in A; $A/(x_1) = k[x, y, z]/(xy - y, x) = k[x, y, z]/(x, y) \simeq k[z]$. Das Element x_2 operiert auf $A/(x_1) \simeq k[z]$ wie $-z$, ist also kein Nullteiler. Da außerdem $A/(x_1, x_2) \simeq k$ gilt, ist x_1, x_2 eine reguläre Folge.
- Es gilt $yx_2 = 0$, also ist x_2 Nullteiler in A, d.h. x_2, x_1 ist keine reguläre Folge.
- Wir sehen also, daß die Eigenschaft regulär zu sein, von der Reihenfolge der Elemente abhängt.
- Aus unserem Satz folgt

  $$H^i(K(x_1, x_2)) = 0 \text{ für } i < 2 \text{ und } H^2(K(x_1, x_2)) \neq 0,$$

  also auch

  $$H^i(K(x_2, x_1)) = 0 \text{ für } i < 2 \text{ und } H^2(K(x_2, x_1)) \neq 0,$$

  demzufolge läßt sich die Regularität einer Folge nicht durch das Verschwinden der Homologie des Koszul-Komplexes charakterisieren.

Wir formulieren dies nochmals gesondert:

Bemerkungen:

1. Ist $x_1, \ldots, x_n$ eine reguläre Folge, so folgt i.a. nicht, daß auch $x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)}$ eine reguläre Folge ist, wo π eine Permutation ist.
2. Aus $H^i(K(x_1, \ldots, x_n)) = 0$ für $i < n$ und $H^n(K(x_1, \ldots, x_n)) \neq 0$ folgt i.a. nicht, daß $x_1, \ldots, x_n$ eine reguläre Folge ist.

Betrachtung: Wir wollen aber dennoch versuchen, wieweit man obgen Satz umkehren kann. Gegeben sei ein A-Modul M, Elemente $x_1, \ldots, x_n \in A$ mit der Eigenschaft

$$H^{n-1}(M \otimes K(x_1, \ldots, x_n)) = 0.$$

Was kann man daraus folgern?

- Wir betrachten die lange exakte Kohomologiesequenz

$$
\begin{aligned}
&\to H^{n-2}(M\otimes K(x_1,\dots,x_n))\to H^{n-2}(M\otimes K(x_1,\dots,x_{n-1}))\overset{\pm x_n}{\to} H^{n-2}(M\otimes K(x_1,\dots,x_{n-1}))\to\\
&\to H^{n-1}(M\otimes K(x_1,\dots,x_n))\to H^{n-1}(M\otimes K(x_1,\dots,x_{n-1}))\overset{\pm x_n}{\to} H^{n-1}(M\otimes K(x_1,\dots,x_{n-1}))\to\\
&\to H^{n}(M\otimes K(x_1,\dots,x_n))\to H^{n}(M\otimes K(x_1,\dots,x_{n-1}))\overset{\pm x_n}{\to} H^{n}(M\otimes K(x_1,\dots,x_{n-1}))\to
\end{aligned}
$$

- Wegen $H^{n-1}(M\otimes K(x_1,\dots,x_{n-1}))=M/(x_1,\dots,x_{n-1})M$ folgt, daß

$$x_n : M/(x_1,\dots,x_{n-1})M\to M/(x_1,\dots,x_{n-1})M$$

  injektiv ist, d.h. x_n ist ein Nichtnullteiler in $M/(x_1,\dots,x_{n-1})M$.
- Weiter ist

$$x_n : H^{n-2}(M\otimes K(x_1,\dots,x_{n-1}))\to H^{n-2}(M\otimes K(x_1,\dots,x_{n-1}))$$

  surjektiv, also

$$H^{n-2}(M\otimes K(x_1,\dots,x_{n-1}))=x_nH^{n-2}(M\otimes K(x_1,\dots,x_{n-1})).$$

- Ist A ein lokaler noetherscher Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und $x_n\in\mathfrak{m}$, so folgt mit dem Lemma von Nakayama $H^{n-2}(M\otimes K(x_1,\dots,x_{n-1}))=0$ und man kann Induktion machen.
- Ist A ein graduierter noetherscher Ring, x_n homogen vom Grad ≥ 1 und M ein endlich erzeugter graduierter Modul, so folgt ebenso $H^{n-2}(M\otimes K(x_1,\dots,x_{n-1}))=0$ und man kann induktiv vorgehen und erhält folgenden Satz:

SATZ. *Sei A ein noetherscher Ring, $x_1,\dots,x_n\in A$, $M\neq 0$ ein endlich erzeugter Modul und*

- *A lokal mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und $x_1,\dots,x_n\in\mathfrak{m}$, oder*
- *A graduiert, M graduiert mit x_i homogen vom Grad ≥ 1.*

Gilt nun $H^{n-1}(M\otimes K(x_1,\dots,x_n))=0$, so ist $x_1,\dots,x_n$ eine M-Folge.

FOLGERUNG. *In den angebenen Fällen ist mit $x_1,\dots,x_n$ auch $x_{\pi(1)},\dots,x_{\pi(n)}$ eine M-reguläre Folge.*

5. Charakterisierung maximaler regulärer Folgen — Tiefe

Wir setzen ab jetzt voraus, daß alle Ringe A noethersch sind.

Eine M-Folge $y_1,\dots,y_r$ in $I=(x_1,\dots,x_n)$ heißt maximal, wenn für alle $y\in I$ die Folge $y_1,\dots,y_r,y$ keine M-Folge mehr ist.

Bemerkung: Sei M ein endlich erzeugter A-Modul. Wie erhält man eine maximale M-Folge?

- Wähle $y_1\in A$, so daß y_1 kein Nullteiler von M ist und daß $y_1M\neq M$ ist.
- Wähle $y_2\in A$, so daß y_2 kein Nullteiler von M/y_1M ist und $(y_1,y_2)M\neq M$ gilt.
- So fährt man fort und erhält eine M-Folge $y_1,\dots,y_j$.
- Es gilt natürlich

$$y_1M\subsetneq(y_1,y_2)M\subsetneq\cdots\subsetneq(y_1,\dots,y_{j-1})M\subsetneq(y_1,\dots,y_j)M\subsetneq M.$$

  Die Inklusionen sind echt, denn wäre $(y_1,\dots,y_{i-1})M=(y_1,\dots,y_i)M$, so würde y_i als 0 auf $M/(y_1,\dots,y_{i-1})$ operieren. Da M noethersch ist, muß also obige Folge abbrechen. Also erhält man nach endlich vielen Schritten eine maximale reguläre Folge $y_1,\dots,y_m$.

SATZ. *Sei M ein endlich erzeugter A-Modul, $I=(x_1,\dots,x_n)$ und $IM\neq M$. Sei $r\geq 0$ mit der Eigenschaft*

$$H^i(M\otimes K(x_1,\dots,x_n))\left\{\begin{array}{l} =0 \text{ für } i<r,\\ \neq 0 \text{ für } i=r.\end{array}\right\}$$

Dann hat jede maximale M-Folge in $I=(x_1,\dots,x_n)$ Länge r. Diese maximale Länge r heißt die Tiefe $t(I,M)$ von I auf M. Im Fall $IM=M$ setzt man $t(I,M)=\infty$.

Beweis: Sei $y_1, \dots, y_s$ eine maximale M-Folge in $I = (x_1, \dots, x_n)$. Wir machen Induktion nach s.
$s = 0$: Dann sind alle Elemente aus $(x_1, \dots, x_n)$ Nullteiler von M, d.h. $(x_1, \dots, x_n) \subseteq \cup Ass_A(M)$. Also gibt es ein Primideal $\mathfrak{p} = ann(m)$ mit $(x_1, \dots, x_n) \subseteq \mathfrak{p} = ann(m)$. Dann ist $0 \neq m \in \{m' : x_1 m' = \dots = x_n m' = 0\} = H^0(M \otimes K(x_1, \dots, x_n))$, also stimmt die Behauptung.
$s \geq 1$: Dann ist $M \xrightarrow{y_1} M$ injektiv, also

$$0 \to M \xrightarrow{y_1} M \to M/y_1 M \to 0$$

exakt. Sei $M' = M/y_1 M$. Damit ist auch

$$0 \to M \otimes K(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{y_1} M \otimes K(x_1, \dots, x_n) \to M' \otimes K(x_1, \dots, x_n) \to 0$$

exakte Sequenz von Komplexen. (Jedes $K(x_1, \dots, x_n)_i$ ist freier, also auch flacher A-Modul.) Dies liefert eine lange exakte Kohomologiesequenz

$$\dots \to H^i(M \otimes K(x_1, \dots, x_n)) \xrightarrow{y_1} H^i(M \otimes K(x_1, \dots, x_n)) \to H^i(M' \otimes K(x_1, \dots, x_n)) \to H^{i+1}(M \otimes K(x_1, \dots, x_n)) \to \dots$$

Wegen $y_1 \in (x_1, \dots, x_n)$ ist $y_1 H^i(M \otimes K(x_1, \dots, x_n)) = 0$, also bleibt die exakte Sequenz

$$0 \to H^i(M \otimes K(x_1, \dots, x_n)) \to H^i(M' \otimes K(x_1, \dots, x_n)) \to H^{i+1}(M \otimes K(x_1, \dots, x_n)) \to 0.$$

Nun ist $y_2, \dots, y_s$ eine maximale M'-Folge, als folgt nach Induktionsvoraussetzung

$$H^i(M' \otimes K(x_1, \dots, x_n)) \left\{ \begin{array}{l} = 0 \text{ für } i < s-1, \\ \neq 0 \text{ für } i = s-1. \end{array} \right\}$$

Damit folgt aus unserer Kohomologiesequenz sofort

$$H^i(M \otimes K(x_1, \dots, x_n)) \left\{ \begin{array}{l} = 0 \text{ für } i < s, \\ \neq 0 \text{ für } i = s. \end{array} \right\}$$

Damit folgt die Behauptung. ■

Ist $I = (x_1, \dots, x_n)$, so hat man also folgende Formel:

$$t(I, M) = \inf\{i : H^i(M \otimes K(x_1, \dots, x_n)) \neq 0\}.$$

KAPITEL 5

Cohen-Macaulay-Ringe

Alle Ringe seien als noethersch vorausgesetzt. Für Primideale $\mathfrak{p}$ kennen wir bereits den Begriff der Höhe:

$$h(\mathfrak{p}) = \sup\{n : \mathfrak{p}_0 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p} \text{ Primidealkette}\}.$$

Für ein beliebiges Ideal I setzen wir

$$h(I) = \inf\{h(\mathfrak{p}) : I \subseteq \mathfrak{p}, \mathfrak{p} \text{ Primideal}\},$$

wobei dann formal $h(A) = \infty$ gesetzt wird. Sind $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ die minimalen Primoberideale von I, so ist also $h(I) = \min(h(\mathfrak{p}_1), \ldots, h(\mathfrak{p}_r))$. (Geometrisch: $V(I) = V(\mathfrak{p}_1) \cup \cdots \cup V(\mathfrak{p}_r)$ ist die Zerlegung von $V(I)$ in irreduzible Komponenten.)

Im letzten Kapitel hatten wir den Begriff der Tiefe eingeführt, wobei wir jetzt $t(I)$ für $t(I, A)$ schreiben. Es galt die Formel mit $I = (x_1, \ldots, x_n)$:

$$t(I) = \inf\{i : H^i(K(x_1, \ldots, x_n)) \neq 0\},$$

wobei wieder $t(A) = \infty$ gesetzt war.

Bemerkung: Gilt $I = (x_1, \ldots, x_n) \neq A$, so folgt aus der Formel für die Tiefe sofort $t(I) \leq n$. Der Krullsche Hauptidealsatz besagt nun für die Höhe $h(I) \leq n$.

Sowohl die Höhe als auch die Tiefe messen ein Ideal. Wir wollen beide Begriffe vergleichen:

Satz. *Für jedes Ideal I gilt:*

$$t(I) \leq h(I).$$

Beweis: Sei $I \neq A$ ein Ideal mit $t(I) = n$. Wir machen Induktion nach n. Der Fall $n = 0$ ist trivial. Sei nun $n \geq 1$ und $x_1, \ldots, x_n$ eine maximale reguläre Folge in I und $\mathfrak{p}$ ein Primideal mit $I \subseteq \mathfrak{p}$. Dann liefert $\overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}$ eine maximale reguläre Folge in $A/(x_1)$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt also $t(I) - 1 = n - 1 = t(\overline{I}) \leq h(\overline{\mathfrak{p}}) = m$. Sei $\overline{\mathfrak{p}_0} \subset \cdots \subset \overline{\mathfrak{p}_m}$ eine maximale Primidealkette. Nun ist aber $\mathfrak{p}_0 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_m$ keine maximale Primidealkette, denn sonst wäre $\mathfrak{p}_0$ minimales Primideal, insbesondere $\mathfrak{p}_0 \in Ass(A)$ und damit $x_1 \in \mathfrak{p}_0$ Nullteiler, ein Widerspruch. Also ist $h(\mathfrak{p}_m) \geq m - 1$, woraus aber sofort $t(I) \leq h(\mathfrak{p}_m)$ folgt, was zu zeigen war. ■

Beispiele:

1. Sei $A = k[x, y]/(xy)$ und $\mathfrak{m} = (x, y)$. Geometrisch besteht $Spec(A)$ aus zwei sich schneidenden Geraden. $0 = (xy) \subset (x, y)$ ist eine maximale Primidealkette, also $h(\mathfrak{m}) = 1$. Das Element $x + y$ ist kein Nullteiler, also $t(\mathfrak{m}) \geq 1$ und damit $t(\mathfrak{m}) = h(\mathfrak{m}) = 1$.
2. Sei $A = k[x, y]/(x^2, xy)$ und $\mathfrak{m} = (x, y)$. Geometrisch ist $Spec(A)$ eine Gerade mit einem eingebetteten Punkt. Wieder ist $h(\mathfrak{m}) = 1$. Wegen $(x, y) = Ann(x)$ sind alle Elemente aus $\mathfrak{m}$ Nullteiler, also $t(\mathfrak{m}) = 0$, d.h. wir haben $t(\mathfrak{m}) < h(\mathfrak{m})$.

Wir wollen zunächst betrachten, was mit der Tiefe eines Ideals I beim Lokalisieren in einem Primideal $\mathfrak{p}$ passiert.

- Ist $I \not\subseteq \mathfrak{p}$, so ist $I_\mathfrak{p} = A_\mathfrak{p}$, also $t(I_\mathfrak{p}) = \infty$. Wir können also jetzt $I \subseteq \mathfrak{p}$ voraussetzen.
- Sei $x_1, \ldots, x_n$ eine reguläre Folge in I.
- Da Lokalisieren exakt ist, folgt aus $0 \to (x_1, \ldots, x_i) \to A \to A/(x_1, \ldots, x_i) \to 0$ sofort

$$(A/(x_1, \ldots, x_i))_\mathfrak{p} = A_\mathfrak{p}/(x_1, \ldots, x_i)_\mathfrak{p}.$$

- Es ist mit $0 \to A/(x_1,\dots,x_i) \stackrel{x_{i+1}}{\to} A/(x_1,\dots,x_i)$ dann auch die lokalisierte Sequenz $0 \to (A/(x_1,\dots,x_i))_{\mathfrak{p}} \stackrel{x_{i+1}}{\to} (A/(x_1,\dots,x_i))_{\mathfrak{p}}$ exakt.
- Also ist $x_1,\dots,x_n$ auch eine reguläre Folge in $A_{\mathfrak{p}}$.
- Daher gilt auch $t(I) \leq t(I_{\mathfrak{p}})$.

Wir können über die Tiefe allerdings noch mehr sagen:

- Sei I ein Ideal und $I \subseteq \mathfrak{p}$ mit einem Primideal $\mathfrak{p}$. Sei $I = (x_1,\dots,x_n)$. Da im Koszul-Komplex alles mit Lokalisieren verträglich ist (Tensorprodukte, äußere Produkte, exakte Sequenzen), gilt:
$$H^i(K(x_1,\dots,x_n))_{\mathfrak{p}} = H^i(K(\frac{x_1}{1},\dots,\frac{x_n}{1})),$$
wo jetzt $\frac{x_j}{1}$ als Elemente von $A_{\mathfrak{p}}$ betrachtet werden. Mit unserer Formel für die Tiefe folgt dann trivialerweise wieder $t(I) \leq t(I_{\mathfrak{p}})$.
- Ist $r = t(I)$ und $\mathfrak{p} \in \mathit{supp}(H^r(K(x_1,\dots,x_n)))$, so ist also $t(I_{\mathfrak{p}}) = t(I)$, für alle anderen $\mathfrak{p}$ gilt: $t(I_{\mathfrak{p}}) > t(I)$. Ist $\mathfrak{p} \in \mathit{supp}(H^r(K(x_1,\dots,x_n)))$, so ist natürlich auch jedes Primideal $\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{p}$ im Träger. Daher erhalten wir folgendes Lemma:

Lemma. *Ist $x_1,\dots,x_n$ eine reguläre Folge in I, $\mathfrak{p}$ ein Primideal mit $I \subseteq \mathfrak{p}$, so ist auch $x_1,\dots,x_n$ eine reguläre Folge in $I_{\mathfrak{p}} \subseteq A_{\mathfrak{p}}$. Außerdem gilt:*
$$t(I) = \inf\{t(I_{\mathfrak{p}}) : \mathfrak{p} \in \mathit{Spec}(A)\} = \inf\{t(I_{\mathfrak{p}}) : I \subseteq \mathfrak{p}\}.$$
Es gibt also ein Primideal $\mathfrak{p} \supseteq I$ mit $t(I) = t(I_{\mathfrak{p}})$. Insbesondere gilt für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ natürlich $t(\mathfrak{m}) = t(\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}})$.

Daß beim Lokalisieren die Tiefe größer werden kann, zeigen folgende Beispiele:

Beispiel: Sei $A = k[x,y,z]$ und $I = (xz, yz)$. Der Koszul-Komplex $K(xz,yz)$ ist
$$0 \to A \xrightarrow{\begin{pmatrix} xz \\ yz \end{pmatrix}} A^2 \xrightarrow{(yz \ \ -xz)} A \to 0.$$
Es ist $H^0(K(xz,yz)) = 0$ und
$$H^1(K(xz,yz)) = \{(xf,yf)\}/\{(xzg,yzg)\} \neq 0.$$
Daher $t(I) = 1$. Für $\mathfrak{m} = (x,y,z-1)$ ist z Einheit in $A_{\mathfrak{m}}$, also $H^1(K(xz,yz))_{\mathfrak{m}} = 0$, also $t(I_{\mathfrak{m}}) = 2$.

Beispiel: Sei $A = k[x_1,\dots,x_n,y]$ und $I = (x_1y,\dots,x_ny)$. Wir betrachten den Koszul-Komplex $K(x_1y,\dots,x_ny)$. Sei $e_1,\dots,e_n$ die kanonische Basis des A^n und $x = x_1ye_1 + \dots + x_nye_n$. Die Abbildung $\wedge^0 A^n \to \wedge^1 A^n$ ist dann $A \to A^n, f \mapsto \sum fx_iye_i$. Natürlich ist $H^0(K(x_1y,\dots,x_ny)) = 0$. Die Abbildung $\wedge^1 A^n \to \wedge^2 A^n$ ist
$$\sum a_je_j \mapsto x \wedge \sum a_je_j = \sum_{i<j}(x_iya_j - x_jya_i)e_i \wedge e_j,$$
der Kern ist also $A \cdot \sum x_ie_i$. Also ist
$$H^1(K(x_1y,\dots,x_ny)) = A \cdot \sum x_ie_i / A \cdot \sum x_iye_i \simeq A/(y) \neq 0,$$
also $t(I) = 1$. Sei jetzt $\mathfrak{m} = (x_1,\dots,x_n,y-1)$. In $A_{\mathfrak{m}}$ ist y Einheit, also ist mit $x_1,\dots,x_n$ auch $x_1y,\dots,x_ny$ reguläre Folge. Also $t(I_{\mathfrak{m}}) \geq n$. Da auch $t(I_{\mathfrak{m}}) \leq n$ gilt - I wird von n Elementen erzeugt, gilt $t(I_{\mathfrak{m}}) = n$.

Bemerkung: Die Regularität einer Folge läßt sich nicht lokal überprüfen, da lokal die Reihenfolge keine Rolle spielt, global aber schon.

Wir geben eine Anwendung:

Satz. *Ist $x_1,\dots,x_n$ eine reguläre Folge, so auch $x_1^t,\dots,x_n^t$ für alle $t \geq 1$.*

Beweis:

1. Wir beweisen den Satz zunächst im Fall, daß A ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ ist. Wegen $(x_1,\ldots,x_n) \neq A$ ist $(x_1,\ldots,x_n) \subseteq \mathfrak{m}$. Die Abbildung $A/(x_1,\ldots,x_{n-1}) \overset{x_n}{\to} A/(x_1,\ldots,x_{n-1})$ ist injektiv, also auch $A/(x_1,\ldots,x_{n-1}) \overset{x_n^t}{\to} A/(x_1,\ldots,x_{n-1})$, d.h. auch $x_1,\ldots,x_{n-1},x_n^t$ ist eine A-Folge. Da wir im Lokalen sind, ist auch $x_1,\ldots,x_{n-2},x_n^t,x_{n-1}$ eine A-Folge, daher wie eben auch $x_1,\ldots,x_{n-2},x_n^t,x_{n-1}^t$. So fährt man fort und erhält schließlich die Behauptung.
2. Wir betrachten nun den allgemeinen Fall. Wir machen Induktion nach n.
   $n = 1$: Ist x_1 kein Nullteiler von A, so natürlich auch x_1^t nicht.
   $n \geq 2$: Sei $x_1,\ldots,x_n$ eine A-Folge. Nach Induktionsvoraussetzung wissen wir, daß $x_1^t,\ldots,x_{n-1}^t$ eine A-Folge ist. Sei N so gewählt, daß die Sequenz
   $$0 \to N \to A/(x_1^t,\ldots,x_{n-1}^t) \overset{x_n^t}{\to} A/(x_1^t,\ldots,x_{n-1}^t)$$
   exakt ist. Wenn wir $N = 0$ zeigen können, sind wir fertig. Sei $\mathfrak{m} \subseteq A$ ein maximales Ideal. Wir betrachten $N_\mathfrak{m}$:
   - Ist $(A/(x_1^t,\ldots,x_{n-1}^t))_\mathfrak{m} = 0$, so natürlich auch $N_\mathfrak{m} = 0$.
   - Wir können also $(x_1,\ldots,x_{n-1}) \subseteq \mathfrak{m}$ annehmen.
   - Ist $x_n \notin \mathfrak{m}$, so ist x_n Einheit in $A_\mathfrak{m}$, also $N_\mathfrak{m} = 0$.
   - Ist $x_n \in \mathfrak{m}$, so ist nach der vorangegangenen Überlegung $x_1,\ldots,x_n$ eine $A_\mathfrak{m}$-Folge und damit nach dem ersten Teil auch $x_1^t,\ldots,x_n^t$. Dann ist wieder $N_\mathfrak{m} = 0$.

   In allen Fällen ist also $N_\mathfrak{m} = 0$ und damit $N = 0$. ■

Ist $I \subseteq I'$, so gilt natürlich $t(I) \subseteq t(I')$. Wir geben weitere einfache Eigenschaften an:

Satz. *$t(I) = t(\sqrt{I})$, wo $\sqrt{I}$ das Radikalideal von I ist.*

Beweis: Sei $x_1,\ldots,x_n$ eine A-Folge in $\sqrt{I}$. Dann gibt es ein t mit $x_1^t,\ldots,x_n^t \in I$. Außerdem ist $x_1^t,\ldots,x_n^t$ eine A-Folge. Damit folgt $t(\sqrt{I}) \leq t(I)$. Da $t(I) \leq t(\sqrt{I})$ trivial ist, folgt die Behauptung. ■

Satz. *Sei $(A,\mathfrak{m})$ lokal, $I = (x_1,\ldots,x_n) \subseteq \mathfrak{m}$ ein Ideal und $y \in \mathfrak{m}$, so gilt*
$$t(I) \leq t(I + (y)) \leq t(I) + 1.$$

Beweis: Sei $r = t(I)$. Dann ist $H^r(K(x_1,\ldots,x_n)) \neq 0$. Wir schreiben unsere lange exakte Kohomologiesequenz an:
$$H^r(K(x_1,\ldots,x_n)) \overset{\pm y}{\to} H^r(K(x_1,\ldots,x_n)) \to H^{r+1}(K(x_1,\ldots,x_n,y)).$$
Nach dem Lemma von Nakayama ist die Multiplikation mit y nicht surjektiv, also der Modul $H^{r+1}(K(x_1,\ldots,x_n,y)) \neq 0$ und damit $t((x_1,\ldots,x_n,y)) \leq r+1$, was wir zeigen wollten. ■

Daß die Aussage des Lemmas im allgemeinen nicht stimmt, zeigt folgendes Beispiel von früher:

Beispiel: Sei $A = k[x,y,z]/((x-1)y)$. Dann ist $x_1 = x, x_2 = (x-1)z$ eine reguläre Folge, also $t((x_2,x_1)) = 2$, aber $t((x_2)) = 0$, da x_2 Nullteiler ist.

Nach diesen Vorbereitungen geben wir die

Definition. Ein Ring A heißt ein Cohen-Macaulay-Ring, falls für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m}$ gilt: $t(\mathfrak{m}) = h(\mathfrak{m})$.

Beispiele:
1. Jeder Körper ist ein Cohen-Macaulay-Ring.
2. $\mathbf{Z}$ ist ein Cohen-Macaulay-Ring.
3. Sei $A = k[x_1,\ldots,x_n]$ Polynomring über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k. Jedes maximale Ideal hat die Form $\mathfrak{m} = (x_1 - c_1,\ldots,x_n - c_n)$ mit $c_i \in k$. Dann gilt $t(\mathfrak{m}) = h(\mathfrak{m})$. Also ist A ein Cohen-Macaulay-Ring.
4. Sei $A = k[x,y]/(xy)$. Betrachte $\mathfrak{m} = (x,y)$. Dann ist $h(\mathfrak{m}) = 1$. Weiter ist $x+y$ eine reguläre Folge in $\mathfrak{m}$, also ist $t(\mathfrak{m}) = 1$. Etc. Es folgt, daß A ein Cohen-Macaulay-Ring ist.
5. Sei $A = k[x,y]/(x^2,xy)$ und $\mathfrak{m} = (x,y)$. Wieder gilt $h(\mathfrak{m}) = 1$. Nun ist aber $\mathfrak{m} \cdot x = 0$, also ist $t(\mathfrak{m}) = 0$, also ist A kein Cohen-Macaulay-Ring.

Satz. *Ist A ein Cohen-Macaulay-Ring, so gilt für alle Ideale I:*

$$t(I) = h(I).$$

Vorbemerkung: Sei A ein Cohen-Macaulay-Ring und $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal. Dann gilt:

$$t(\mathfrak{m}_\mathfrak{m}) = t(\mathfrak{m}) = h(\mathfrak{m}) = h(\mathfrak{m}_\mathfrak{m}),$$

also ist auch $A_\mathfrak{m}$ ein Cohen-Macaulay-Ring.

Beweis:

1. Wir betrachten zunächst den Fall, daß A ein lokaler Cohen-Macaulay-Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ ist. Sei $E = \{I \text{ Ideal in } A \text{ mit } t(I) < h(I)\}$. Ist $E \neq \emptyset$, so besitzt E maximale Elemente. Sei I ein solches. Jede echte Oberideal von I erfüllt also die behauptete Gleichung. Seien $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ die minimalen Primoberideale von I.
   1. Fall: $\mathfrak{m}$ ist minimales Primoberideal von I. Dann ist $\mathfrak{m}$ das einzige Primoberideal von I, also $\sqrt{I} = \mathfrak{m}$ und damit $t(I) = t(\mathfrak{m})$ und $h(I) = h(\mathfrak{m})$, woraus die Behauptung folgt.
   2. Fall: $\mathfrak{m}$ ist nicht minimales Primoberideal von I. Dann haben wir eine echte Inklusion $\mathfrak{p}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{p}_n \subset \mathfrak{m}$, denn sonst hätte man $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{p}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{p}_n$, also wäre $\mathfrak{m}$ in einem der $\mathfrak{p}_i$ enthalten, also $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{m}$, was nicht sein sollte. Wähle nun $x \in \mathfrak{m}$, $x \notin \mathfrak{p}_i$ für alle i. Ist $\mathfrak{q}$ ein minimales Primoberideal von $I + (x)$, so ist $\mathfrak{q} \supseteq I$, also gibt es ein i mit $\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{p}_i$. Wegen $x \notin \mathfrak{p}_i$ gilt $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}_i$, also $h(\mathfrak{q}) > h(\mathfrak{p}_i)$. Wegen $h(I) = \inf(h(\mathfrak{p}_1), \ldots, h(\mathfrak{p}_n))$ gilt dann $h(I + (x)) > h(I)$. Damit erhalten wir jetzt:
   $$h(I) + 1 \leq h(I + (x)) = t(I + (x)) \leq t(I) + 1 \leq h(I) + 1,$$
   woraus sofort $t(I) = h(I)$ folgt, ein Widerspruch zu $I \in E$. Also muß E leer sein, d.h. es gilt die Behauptung.
2. Sei nun A ein beliebiger Cohen-Macaulay-Ring und I ein Ideal. Dann gibt es ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ mit $I \subseteq \mathfrak{m}$ und $t(I_\mathfrak{m}) = t(I)$. Da $h(I) \leq h(I_\mathfrak{m})$ klar ist, folgt
   $$h(I) \leq h(I_\mathfrak{m}) = t(I_\mathfrak{m}) = t(I) \leq h(I),$$
   woraus die Behauptung folgt. ■

Wir wenden dies an um eine erste wichtige Eigenschaft von Cohen-Ringen kennenzulernen:

Satz. *Ein Cohen-Macaulay-Ring hat keine eingebetteten Primideale.*

Beweis: Sei $\mathfrak{p} \in Ass(A)$, also $\mathfrak{p} = Ann(a)$ für ein $a \in A$. Da alle Elemente von $\mathfrak{p}$ Nullteiler sind, gilt $t(\mathfrak{p}) = 0$, also auch $h(\mathfrak{p}) = 0$, d.h. $\mathfrak{p}$ ist minimales Primideal. Also gibt es keine nichtminimalen assoziierten Primideale, d.h. A hat keine eingebetteten Primideale. ■

Im eindimensionalen Fall charakterisiert dies auch die Cohen-Macaulay-Ringe:

Satz. *Ein eindimensionaler Ring A ist genau dann Cohen-Macaulay, wenn er keine eingebetteten Primideale besitzt.*

Beweis: Die eine Richtung kennen wir bereits. Sei also A ohne eingebettete Primideale. Sei $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal. Wir müssen zeigen: $t(\mathfrak{m}) = h(\mathfrak{m})$. Ist $h(\mathfrak{m}) = 0$, so natürlich auch $t(\mathfrak{m}) = 0$. Sei also $h(\mathfrak{m}) = 1$. Wäre $t(\mathfrak{m}) = 0$, so wäre jedes Element von $\mathfrak{m}$ Nullteiler, also $\mathfrak{m} \subseteq \cup Ass(A)$. Dann gäbe es ein $\mathfrak{p} \in Ass(A)$ mit $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{p}$, also $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$. Also wäre $\mathfrak{m}$ ein eingebettetes Primideal, ein Widerspruch zur Voraussetzung. ■

Für Cohen-Macaulay-Ringe gilt ein Lokal-Global-Prinzip:

Satz. *Ist A ein Cohen-Macaulay-Ring, so auch $A_\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in Spec(A)$. Ist für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m}$ der lokale Ring $A_\mathfrak{m}$ ein Cohen-Macaulay-Ring, so auch A selbst.*

Beweis:

1. Sei A Cohen-Macaulay und $\mathfrak{p}$ ein Primideal. Dann gilt:
   $$h(\mathfrak{p}_\mathfrak{p}) = h(\mathfrak{p}) = t(\mathfrak{p}) \leq t(\mathfrak{p}_\mathfrak{p}) \leq h(\mathfrak{p}_\mathfrak{p}),$$
   also $t(\mathfrak{p}_\mathfrak{p}) = h(\mathfrak{p}_\mathfrak{p})$, d.h. $A_\mathfrak{p}$ ist Cohen-Macaulay.

2. Sei für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m}$ der Ring $A_{\mathfrak{m}}$ Cohen-Macaulay. Sei $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal in A. Dann gilt:
$$t(\mathfrak{m}) = t(\mathfrak{m}_{\mathfrak{m}}) = h(\mathfrak{m}_{\mathfrak{m}}) = h(\mathfrak{m}).$$
Hieraus folgt, daß A ein Cohen-Macaulay-Ring ist. ∎

SATZ. *Ist A ein Cohen-Macaulay-Ring und $x_1, \ldots, x_n$ eine reguläre Folge in A, so ist auch $A/(x_1, \ldots, x_n)$ ein Cohen-Macaulay-Ring.*

Beweis: Da $\overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}$ eine reguläre Folge in $A/(x_1)$ ist, genügt es offensichtlich, denn Fall $n = 1$ zu behandeln. Sei $x = x_1$ reguläre Folge. Sei $\overline{\mathfrak{m}}$ ein maximales Ideal in $A/(x)$. Sei $n = h(\overline{\mathfrak{m}})$ und $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n = \mathfrak{m}$ eine Primidealkette in A, die als Urbilder einer maximalen Primidealkette
$$\overline{\mathfrak{p}_0} \subset \cdots \subset \overline{\mathfrak{p}_n} = \overline{\mathfrak{m}}$$
in $A/(x)$ entstehen. Wäre $\mathfrak{p}_0$ minimales Primideal, so wäre $\mathfrak{p}_0 \in Ass(A)$ und wegen $x \in \mathfrak{p}_0$ das Element x Nullteiler, was nicht sein soll. Also gilt $h(\mathfrak{m}) \geq h(\overline{\mathfrak{m}}) + 1 = n + 1$. Ergänze x zu einer regulären Folge in $\mathfrak{m}$: $x = y_1, \ldots, y_m$ mit $m = h(\mathfrak{m})$. (Dies benutzt, daß x zu einer maximalen regulären Folge in $\mathfrak{m}$ ergänzt werden kann und daß alle maximalen regulären Folgen gleiche Länge $t(\mathfrak{m})$ haben, was hier gleich $h(\mathfrak{m})$ ist.) Dann ist $\overline{y_2} \ldots, \overline{y_m}$ eine reguläre Folge in $\overline{\mathfrak{m}}$, also
$$t(\overline{\mathfrak{m}}) \geq m - 1 = h(\mathfrak{m}) - 1 \geq h(\overline{\mathfrak{m}}),$$
woraus wegen der trivalen Ungleichung $t(\overline{\mathfrak{m}}) \leq h(\overline{\mathfrak{m}})$ folgt $t(\overline{\mathfrak{m}}) = h(\overline{\mathfrak{m}})$. Also ist auch $A/(x)$ Cohen-Macaulay. ∎

SATZ. *Ist A ein Cohen-Macaulay-Ring, so auch $A[x]$, der Polynomring über A.*

Beweis:

1. Sei $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal in $A[x]$. Wir wollen $t(\mathfrak{m}) = h(\mathfrak{m})$ zeigen. Schon früher haben wir gesehen, daß $t(\mathfrak{m}A[x]_{\mathfrak{m}}) = t(\mathfrak{m})$ und $h(\mathfrak{m}A[x]_{\mathfrak{m}}) = h(\mathfrak{m})$, also genügt es, die Aussage in der Lokalisierung zu zeigen. Nun ist $\mathfrak{p} = A \cap \mathfrak{m}$ ein Primideal in A, also $A_{\mathfrak{p}}$ auch ein Cohen-Macaulay-Ring. Außerdem ist die multiplikative Teilmenge $A \setminus \mathfrak{p}$ enthalten in der multiplikativen Teilmenge $A[x] \setminus \mathfrak{m}$, also können wir schrittweise zuerst $A \setminus \mathfrak{p}$ und dann $A[x] \setminus \mathfrak{m}$ in den Nenner nehmen. D.h. es gilt $A[x]_{\mathfrak{m}} = A_{\mathfrak{p}}[x]_{\mathfrak{m}A_{\mathfrak{p}}[x]}$. Wir können uns also auf den Fall zurückziehen, daß $A \cap \mathfrak{m}$ ein maximales Ideal ist.
2. Sei also $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal in $A[x]$ mit der Eigenschaft, daß auch $\mathfrak{p} = A \cap \mathfrak{m}$ ein maximales Ideal in A ist.
   (a) Wir haben einem Homomorphismus $A[x] \to A[x]/\mathfrak{m}$, aus dem wir $\mathfrak{p}$ herausfaktorisieren können, also $A/\mathfrak{p}[x] = A[x]/(\mathfrak{p}) \to A[x]/\mathfrak{m}$. Da $A/\mathfrak{p}$ ein Körper ist, wird der Kern von einem normierten Polynom $(f(x))$ erzeugt, wo wir $f \in A[x]$ annehmen können. Also ist $\mathfrak{m} = (\mathfrak{p}, f(x))$.
   (b) Sei $t(\mathfrak{p}) = h(\mathfrak{p}) = n$ und $a_1, \ldots, a_n$ eine reguläre Folge in $\mathfrak{p}$. Wegen $A[x]/(a_1, \ldots, a_i) \simeq A/(a_1, \ldots, a_i)[x] \simeq \oplus_{j \geq 0} A/(a_1, \ldots, a_i) \cdot x^j$ ist $a_1, \ldots, a_n$ auch eine reguläre Folge in $A[x]$.
   (c) Nun müssen wir
   $$A/(a_1, \ldots, a_n)[x] \stackrel{f(x)}{\to} A/(a_1, \ldots, a_n)[x]$$
   betrachten. Da f normiert ist, ist die Abbildung injektiv, sicher nicht surjektiv, d.h. $a_1, \ldots, a_n, f(x)$ ist eine reguläre Folge in $\mathfrak{m}$, also $t(\mathfrak{m}) \geq n + 1$.
   (d) Sei $\mathfrak{q}$ minimales Primoberideal von $a_1, \ldots, a_n$ in A. Wegen $n \leq t(\mathfrak{q}) = h(\mathfrak{q}) \leq h(\mathfrak{p}) = n$ gilt schon $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$.
   (e) Sei nun $\mathfrak{q}'$ minimales Primoberideal von $a_1, \ldots, a_n, f(x)$ in $A[x]$. Nach der letzten Bemerkung gilt $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}'$, mit $\mathfrak{m} = (\mathfrak{p}, f(x))$ also $\mathfrak{q}' = \mathfrak{m}$. Das Ideal $\mathfrak{m}$ ist also minimales Primoberideal von $(a_1, a_2, \ldots, a_n, f(x))$, also gilt nach dem Hauptidealsatz $h(\mathfrak{m}) \leq n+1$, also $h(\mathfrak{m}) \leq t(\mathfrak{m})$ und damit $t(\mathfrak{m}) = h(\mathfrak{m})$, was wir zeigen wollten. ∎

Bemerkung: Daß ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \subseteq A[x]$ 'nur' ein Primideal $\mathfrak{p} = A \cap \mathfrak{m} \subseteq A$ liefern kann, zeigt das Beispiel $A = \mathbf{Z}_{(2)}$, $\mathfrak{m} = (2x-1)$. Dann ist $\mathbf{Z}_{(2)}[x]/(2x-1) \simeq \mathbf{Q}$ und $\mathbf{Z}_{(2)} \cap (2x-1) = 0$.

Die beiden letzten Sätze liefern viele Beispiele für Cohen-Macaulay-Ringe.

Beispiel: Ist k ein Körper, so ist k Cohen-Macaulay, also auch der Polynomring $k[x_1, \dots, x_n]$. Ist $f_1, \dots, f_r$ eine reguläre Folge von Polynomen in $k[x_1, \dots, x_n]$, so ist $k[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_r)$ ein Cohen-Macaulay-Ring. Speziell ist für jedes $f \neq 0$ der Ring $k[x_1, \dots, x_n]/(f)$ Cohen-Macaulay.

Für die anderen Eigenschaften benötigen wir folgendes Lemma:

LEMMA. *Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal und*

$$\mathfrak{p}_0 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}$$

eine maximale Primidealkette. Dann gilt $t(\mathfrak{p}) \leq n$.

Beweis: Wir beweisen dies durch Induktion nach n.
$n = 0$: Hier ist $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0$ minimales Primideal, also assoziiertes Primideal, also alle Elemente Nullteiler und damit $t(\mathfrak{p}) = 0$.
$n \geq 1$: Wegen $t(\mathfrak{p}) \leq t(\mathfrak{p}A_\mathfrak{p})$ ist es klar, daß es genügt, die Aussage im lokalen Fall zu zeigen, d.h. o.E. $(A, \mathfrak{p})$ lokaler Ring. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $t(\mathfrak{p}_{n-1}) \leq n-1$. Sei nun $x \in \mathfrak{p}$, $x \notin \mathfrak{p}_{n-1}$. Dann ist $\mathfrak{p}$ das einzige Primoberideal von $\mathfrak{p}_{n-1} + (x)$, also $\sqrt{\mathfrak{p}_{n-1} + (x)} = \mathfrak{p}$. Damit erhalten wir:

$$t(\mathfrak{p}) = t(\mathfrak{p}_{n-1} + (x)) \leq t(\mathfrak{p}_{n-1}) + 1 \leq (n-1) + 1 = n,$$

was gezeigt werden sollte. ■

FOLGERUNG. *Ist A ein Cohen-Macaulay-Ring, $\mathfrak{p}$ ein Primideal und*

$$\mathfrak{p}_0 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_m = \mathfrak{p} \textit{ und } \mathfrak{p}'_0 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}'_n = \mathfrak{p}$$

maximale Primidealketten, so gilt $m = n$.

Beweis: Es gilt:

$$\max(m, n) \leq h(\mathfrak{p}) = t(\mathfrak{p}) \leq \min(m, n),$$

woraus sofort $m = n$ folgt. ■

DEFINITION. Ein Ring A heißt Kettenring, wenn für je zwei Primideale $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ gilt: Sind

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_m = \mathfrak{q} \text{ und } \mathfrak{p} = \mathfrak{p}'_0 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}'_n = \mathfrak{q}$$

maximale Primidealketten, so gilt $m = n$, d.h. die maximalen Primidealketten zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ haben gleiche Länge.

Beispiel: In $\mathbf{Z}[x]$ sind $0 \subset (x) \subset (2, x)$ und $0 \subset (2) \subset (2, x)$ maximale Primidealketten gleicher Länge.

SATZ. *Jeder Cohen-Macaulay-Ring ist ein Kettenring. Genauer: Sind $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ Primideale, so hat jede maximale Primidealkette zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ die Länge $h(\mathfrak{q}) - h(\mathfrak{p})$.*

Beweis: Sind $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ Primideale und

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_m = \mathfrak{q} \text{ und } \mathfrak{p} = \mathfrak{p}'_0 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}'_n = \mathfrak{q}$$

maximale Primidealketten, so wähle man eine maximale Primidealkette

$$\mathfrak{p}''_0 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}''_r = \mathfrak{p}.$$

Dann folgt $m = n$ mit unserem Satz und $m = h(\mathfrak{q}) - h(\mathfrak{p})$. ■

FOLGERUNG. *Jede endlich erzeugte Algebra über einem Cohen-Macaulay-Ring ist ein Kettenring.*

Beweis: Eine endlich erzeugte Algebra über einem Cohen-Macaulay-Ring A hat die Form $B = A[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{a}$, wo $\mathfrak{a}$ ein Ideal im Polynomring $A[x_1, \dots, x_n]$ ist. Nun ist auch $A[x_1, \dots, x_n]$ Cohen-Macaulay. Primidealketten in B stehen in Bijektion zu Primidealketten in $A[x_1, \dots, x_n]$, wo alle Primideale $\mathfrak{a}$ enthalten. Damit folgt die Behauptung. ■

Wir geben eine weitere Folgerung an:

SATZ. *Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Cohen-Macaulay-Ring. Dann gilt für jedes Ideal I:*

$$h(I) + \dim A/I = \dim A.$$

Beweis: Seien $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ die minimalen Primoberideale von I. Diese liefern genau die minimalen Primideale von A/I. Dann gilt

$$\begin{aligned} \dim A/I &= \sup\{h(\mathfrak{m}) - h(\mathfrak{p}_1), \dots, h(\mathfrak{m}) - h(\mathfrak{p}_r)\} = \\ &= h(\mathfrak{m}) - \inf\{h(\mathfrak{p}_1), \dots, h(\mathfrak{p}_r)\} = h(\mathfrak{m}) - h(I) = \\ &= \dim A - h(I), \end{aligned}$$

was gezeigt werden sollte. ■

Wir folgern daraus jetzt eine wichtige geometrische Eigenschaft von Cohen-Macaulay-Ringen: Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Cohen-Macaulay-Ring und $\mathfrak{p}$ ein minimales Primideal. Wir nennen $\dim A/\mathfrak{p}$ auch $\dim \mathfrak{p}$. Dies entspricht der Dimension von $V(\mathfrak{p})$ in $Spec(A)$. Wegen $h(\mathfrak{p}) = 0$ gilt nach dem letzten Satz $\dim \mathfrak{p} = \dim A$ und damit:

SATZ. *In einem lokalen Cohen-Macaulay-Ring haben alle minimalen Primideale die gleiche Dimension.*

Geometrische Interpretation: Sei $(A, \mathfrak{m})$ lokaler Cohen-Macaulay-Ring und

$$Spec(A) = V(\mathfrak{p}_1) \cup \dots \cup V(\mathfrak{p}_r)$$

die Zerlegung in irreduzible Komponenten. Die $\mathfrak{p}_i$ sind genau die minimalen Primideale von A. Dann haben alle Komponenten $V(\mathfrak{p}_i)$ gleiche Dimension.

Beispiel: Sei $A = k[x, y, z]/(xz, yz)$ und $\mathfrak{m} = (x, y, z)$. Dann gilt

$$Spec(A) = V(x, y) \cup V(z),$$

d.h. $Spec(A)$ ist die Vereingung einer Geraden und einer Ebene. Der Punkt $\mathfrak{m}$ liegt in Komponenten unterschiedlicher Dimension, also ist $A_{\mathfrak{m}}$ nicht Cohen-Macaulay.

Bevor wir eine weitere geometrische Eigenschaft von Cohen-Macaulay-Ringen betrachten, brauchen wir ein Lemma:

LEMMA. *Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring.*

1. *Sind I_1, I_2 Ideale mit $0 \neq I_1, I_2 \subseteq \mathfrak{m}$ und $I_1 \cdot I_2 = 0$. Dann gilt $t(I_1 + I_2) \leq 1$.*
2. *Sind J_1, J_2 Ideale mit $J_1, J_2 \subseteq \mathfrak{m}$ und der Eigenschaft, daß $J_1 \cap J_2$ nilpotent ist, J_1 und J_2 aber nicht, dann gilt $t(J_1 + J_2) \leq 1$.*

Beweis:

1. Ist $t(I_1 + I_2) = 0$, sind wir fertig. Sei also $t(I_1 + I_2) \geq 1$ und $a = a_1 + a_2$ ein Nichtnullteiler mit $a_i \in I_i$. Wir wollen a zu einer maximalen regulären Folge fortsetzen.
   Behauptung: $a_1 \not\equiv 0 \bmod a$.
   Beweis: Wäre $a_1 \equiv 0 \bmod a$, so gäbe es ein c mit $a_1 = ca = c(a_1 + a_2)$, also $(1 - c)a_1 = ca_2$.
   1. Fall: $c \in \mathfrak{m}$. Dann ist $1 - c$ Einheit, also
   $$a = a_1 + a_2 = \frac{1}{1 - c} a_2 \text{ und damit } I_1 \cdot a = 0,$$
   ein Widerspruch.
   2. Fall: $c \notin \mathfrak{m}$. Dann ist c Einheit und $a = \frac{1}{c} a_1$, also $I_2 \cdot a = 0$, ebenfalls ein Widerspruch.
   Damit ist die Behauptung bewiesen.
   Sei nun $b = b_1 + b_2$ mit $b_i \in I_i$. Dann gilt modulo a:
   $$a_1 \cdot b = a_1 b_1 + a_1 b_2 = a_1 b_1 \equiv -a_2 b_1 = 0,$$

d.h. $A/(a) \xrightarrow{b} A/(a)$ ist nicht injektiv, also ist a, b keine reguläre Folge in $I_1 + I_2$. Damit folgt $t(I_1 + I_2) = 1$.

2. Wegen $J_1 J_2 \subseteq J_1 \cap J_2$ ist mit $J_1 \cap J_2$ auch $J_1 J_2$ nilpotent. Also gibt es ein $n \geq 1$ mit $J_1^n J_2^n = 0$. Setze nun $I_i = J_i^n$. Dann läßt sich der erste Teil anwenden und man erhält:
$$1 \geq t(J_1^n + J_2^n) = t(\sqrt{J_1^n + J_2^n}) = t(\sqrt{J_1 + J_2}) = t(J_1 + J_2),$$
was wir zeigen wollten. ■

Der folgende Satz ist eine Version des Zusammenhangssatzes von Hartshorne.

SATZ. *Sei* $(A, \mathfrak{m})$ *ein lokaler Cohen-Macaulay-Ring. Ist* $Spec(A) = V(J_1) \cup V(J_2)$ *eine nichttriviale Zerlegung, d.h.* $\emptyset \neq V(J_i) \neq Spec(A)$, *dann hat der Durchschnitt* $V(J_1) \cap V(J_2) = V(J_1 + J_2)$ *höchstens Kodimension* 1, *d.h.* $h(J_1 + J_2) \leq 1$.

Beweis: Wir übersetzen die geometrischen Aussagen in die Algebra: $Spec(A) = V(J_1) \cup V(J_2) = V(J_1 \cap J_2)$ bedeutet, daß $J_1 \cap J_2$ nilpotent ist. $\emptyset \neq V(J_i) \neq Spec(A)$ bedeutet, daß J_i nicht nilpotent ist und $J_i \subseteq \mathfrak{m}$ gilt. Nach dem letzten Lemma folgt $t(J_1 + J_2) \leq 1$. Da A Cohen-Macaulay ist, folgt $h(J_1 + J_2) \leq 1$. Mit $V(J_1 + J_2) = V(J_1) \cap V(J_2)$ folgt die Behauptung. ■

Beispiele:

1. Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Cohen-Macaulay-Ring mit der geometrischen Eigenschaft, daß $Spec(A)$ in zwei irreduzible Komponenten zerfällt: $Spec(A) = V(\mathfrak{p}_1) \cup V(\mathfrak{p}_2)$, die sich in einem Punkt schneiden: $V(\mathfrak{p}_1) \cap V(\mathfrak{p}_2) = \{\mathfrak{m}\}$. Der Satz besagt dann, daß $h(\mathfrak{m}) \leq 1$ gilt, d.h. $(A, \mathfrak{m})$ ist eindimensional.
2. Sei $A = k[x,y,u,v]/(x,y) \cap (u,v) = k[x,y,u,v]/(xu, xv, yu, yv)$. $Spec(A)$ besteht aus den zwei Ebenen $\{x = y = 0\}$ und $\{u = v = 0\}$, die sich nur in dem Punkt $\mathfrak{m} = (x,y,u,v)$ schneiden. Also ist $A_\mathfrak{m}$ nicht Cohen-Macaulay.
3. Der Durchschnitt der drei Ebenen $\{x = y = 0\}$, $\{u = v = 0\}$ und $\{y = v = 0\}$ wird in $k[x,y,u,v]$ definiert durch
$$(x,y) \cap (u,v) \cap (y,v) = (xu, xv, yu, yv) \cap (y,v) = (xv, yu, yv).$$
Wir betrachten $A = k[x,y,u,v]/(xv, yu, yv)$. Was ist $t(\mathfrak{m})$, wo $\mathfrak{m} = (x,y,u,v)$ ist? $y + v$ ist kein Nullteiler, ist also eine reguläre Folge. Nun ist
$$A/(y+v) \simeq k[x,y,u]/(xy, yu, y^2),$$
worin alles von y annulliert wird. Also ist $y + v$ eine maximale reguläre Folge, d.h. $t(\mathfrak{m}) = 1$. Daher ist A und damit auch $A_\mathfrak{m}$ nicht Cohen-Macaulay.

Frage: Sei $(A, \mathfrak{m})$ Cohen-Macaulay und
$$Spec(A) = V(\mathfrak{p}_1) \cup \cdots \cup V(\mathfrak{p}_r)$$
die Zerlegung in irreduzible Komponenten. Hat dann jede irreduzible Komponente von $V(\mathfrak{p}_i) \cap V(\mathfrak{p}_j)$ für $i \neq j$ Kodimension 1?

Wir wollen jetzt Ideale $I = (x_1, \ldots, x_n)$ untersuchen mit $h(I) = n$. Nach dem Krullschen Hauptidealsatz hat dann jedes minimale Primoberideal von I die Höhe n. Sei
$$I = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{r+s}$$
eine reduzierte Primärzerlegung von I, wo $\mathfrak{q}_i$ ein $\mathfrak{p}_i$- primäres Ideal ist; also ist $Ass(A/\mathfrak{q}_i) = \{\mathfrak{p}_i\}$ und $Ass(A/I) = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r, \mathfrak{p}_{r+1}, \ldots, \mathfrak{p}_{r+s}\}$, wo die $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ die minimalen Primoberideale von I sind. Der Rest sind eingebettete Komponenten.

Bemerkung: Im allgemeinen folgt aus $h(x_1, \ldots, x_n) = n$ nicht, daß $x_1, \ldots, x_n$ eine reguläre Folge ist, wie folgendes Beispiel zeigt:

Beispiel: Der Ring $A = k[x,y,z]/((x-1)y)$ ist Cohen-Macaulay. Mit $x_1 = x, x_2 = (x-1)z$ ist x_1, x_2 eine reguläre Folge, also $t(x_1, x_2) = h(x_1, x_2) = 2$. Das Ideal $I = (x_2, x_1)$ hat Höhe 2, wird von 2 Elementen erzeugt, aber x_2, x_1 ist keine reguläre Folge.

LEMMA. *Sei A Cohen-Macaulay und $I = (x_1, \dots, x_n)$ mit $h(I) = n$. Dann ist auch A/I Cohen-Macaulay.*

Beweis:
- Da Cohen-Macaulay eine lokale Eigenschaft ist, genügt es die Aussage für den lokalen Fall zu zeigen. Sei $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von A.
- Wegen $n = h(I) = t(I)$ ist $H^i(K(x_1, \dots, x_n)) = 0$ für $i < n$ und $H^n(K(x_1, \dots, x_n)) \neq 0$. Da wir im Lokalen sind, ist nun auch $x_1, \dots, x_n$ eine reguläre Folge, und damit auch $A/(x_1, \dots, x_n)$ Cohen-Macaulay. ■

FOLGERUNG (Ungemischtheitssatz). *Sei A Cohen-Macaulay und $I = (x_1, \dots, x_n)$ mit $h(I) = n$. Dann gibt es keine eingebetteten Komponenten bei der Primärzerlegung von I.*

Beweis: Da A/I Cohen-Macaulay ist, hat A/I keine eingebetteten Primideale, woraus sofort die Behauptung folgt. ■

Der Ungemischtheitssatz wurde 1916 von Macaulay für Polynomringe bewiesen, 1946 von Cohen für reguläre lokale Ringe. Er charakterisiert auch die Cohen-Macaulay-Ringe:

SATZ. *Ist A ein Ring mit der Eigenschaft, daß jedes Ideal I, das von n Elementen erzeugt wird und Höhe n hat, keine eingebetteten Primärkomponenten hat, so ist A ein Cohen-Macaulay-Ring.*

Beweis: Sei $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal. Wir müssen $t(\mathfrak{m}) = h(\mathfrak{m})$ zeigen. Sei $n = t(\mathfrak{m})$ und $x_1, \dots, x_n$ eine maximale reguläre Folge in $\mathfrak{m}$. Sei $I = (x_1, \dots, x_n)$ und $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ die minimalen Primoberideale von I. Wegen des Hauptidealsatzes und $n = t(I) \leq h(I) \leq h(\mathfrak{p}_i) \leq n$ ist $h(\mathfrak{p}_i) = n$. Die Ungemischtheitsbedingung liefert für die Primärzerlegung von I:

$$I = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_r,$$

wo $\mathfrak{q}_i$ $\mathfrak{p}_i$-primär ist, d.h. $Ass(A/\mathfrak{q}_i) = \{\mathfrak{p}_i\}$.
Annahme: $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{p}_i$ für alle i. Dann gibt es ein $x \in \mathfrak{m}$ mit $x \notin \mathfrak{p}_i$ für alle i. Nun ist aber

$$x \notin \cup Ass(A/I) = \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r\},$$

also x kein Nullteiler in A/I. Damit ist auch $x_1, \dots, x_n, x$ eine reguläre Folge in $\mathfrak{m}$: ein Widerspruch zur vorausgesetzten Maximalität.
Daher gilt jetzt $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}_j$ für ein j und deshalb $h(\mathfrak{m}) = n$, was gezeigt werden sollte. ■

Weitere Beispiele. Beispiel: Der Ring $A = k[x, y, z]/(xz, yz)$ ist nicht Cohen-Macaulay. Sei $\mathfrak{m} = (x, y, z)$. Dann ist $h(\mathfrak{m}) = 2$. Das Element $y+z$ ist kein Nullteiler in $\mathfrak{m}$, aber für $A/(y+z) \simeq k[x, y]/(xy, y^2)$ gilt $\mathfrak{m} \in Ass(A/(y+z))$, also ist $y+z$ eine maximale reguläre Folge in $\mathfrak{m}$, d.h. $t(\mathfrak{m}) = 1$. Sei $I = (y+z)$. Wir wollen die Primärzerlegung von I finden. Man sieht schnell, daß $\mathfrak{p} = (y, z)$ das einzige minimale Primoberideal von I ist. Wir betrachten $A/I \simeq k[x, y]/(xy, y^2)$; man sieht, daß $Ass(A/I) = \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}\}$ gilt. Also hat I eine eingebettete Primärkomponente. Offensichtlich ist $(x, y+z)$ ein $\mathfrak{m}$-primäres Ideal.
Behauptung: $(y+z) = (y, z) \cap (x, y+z)$ ist eine Primärzerlegung.
Beweis: $\subseteq$ ist klar. $\supseteq$: Sei $f \in (y, z) \cap (x, y+z)$, also $f = a(x, y, z)y + b(x, y, z)z = c(x, y, z)x + d(x, y, z)(y+z)$. Wir rechnen gleich modulo $(y+z)$. Dann ist $z \equiv -y$ und $xy \equiv y^2 \equiv 0$. Also erhält man:

$$\begin{aligned} f &\equiv a(x, y, -y)y - b(x, y, -y)y \equiv c(x, y, -y)x \equiv \\ &\equiv a(0, 0, 0)y - b(0, 0, 0)y \equiv c(x, 0, 0)x, \end{aligned}$$

was offensichtlich $f \equiv 0$ liefert, also $f \in (y+z)$, wie behauptet.

Im folgenden Beispiel wird ein Integritätsring angegeben, der nicht Cohen-Macaulay ist.

Beispiel: Sei $A = k[x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3] \subseteq k[x, y]$. Die Elemente aus A sind also genau die Polynome der Form $f = f_0 + f_2 + f_3 + f_4 + \dots$, wo $f_i(x, y)$ homogen vom Grad i ist. A ist Integritätsring. Sei $\mathfrak{m} = A \cap (x, y)$. $x^2 \in A$ ist kein Nullteiler. $x^3 \notin (x^2)$. Aber $f \in \mathfrak{m}$ impliziert $x^3 f \in (x^2)$, d.h. jedes f ist Nullteiler modulo (x^2) und damit $t(\mathfrak{m}) = 1$. Also ist A nicht Cohen-Macaulay.

KAPITEL 6

Reguläre lokale Ringe

Alle Ringe seien in diesem Kapitel als noethersch vorausgesetzt. Wir wiederholen zunächst einige bekannte Tatsachen:

Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring mit Restklassenkörper $k = A/\mathfrak{m}$, $n = \dim A = h(\mathfrak{m})$ und $d = \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Sind $x_1, \ldots, x_e \in \mathfrak{m}$ mit $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = k\overline{x_1} + \cdots + k\overline{x_e}$, so ist $\mathfrak{m} = Ax_1 + \cdots + Ax_e + \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m}$, nach dem Lemma von Nakayama also $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_e)$. Wählt man also $x_1, \ldots, x_d \in \mathfrak{m}$, die linear unhängig modulo $\mathfrak{m}^2$ sind, so ist $x_1, \ldots, x_d$ ein minimales Erzeugendensystem von $\mathfrak{m}$. Sind $x_1, \ldots, x_e \in \mathfrak{m}$ linear unabhängig modulo $\mathfrak{m}^2$, so können sie zu einem minimalen Erzeugendensystem von $\mathfrak{m}$ ergänzt werden. Der Krullsche Hauptidealsatz liefert sofort $n \leq d$, d.h.

$$\dim A \leq \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2.$$

Man definiert nun:

Definition. Ein lokaler Ring $(A, \mathfrak{m})$ heißt regulär, falls $\dim A = h(\mathfrak{m}) = \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ gilt, d.h. $\mathfrak{m}$ kann von $\dim A$ Elementen erzeugt werden.

Beispiele:

1. Die 0-dimensionalen regulären lokalen Ringe sind genau die Körper.
2. Die 1-dimensionalen regulären lokalen Ringe sind genau die diskreten Bewertungsringe. (Warum?)
3. Der lokale Ring $k[x_1, \ldots, x_n]_{(x_1, \ldots, x_n)}$ ist regulär mit Dimension n.
4. Sei k algebraisch abgeschlossener Körper, $\mathfrak{a} = (f_1, \ldots, f_r) \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$. Wir betrachten $A = k[x_1, \ldots, x_n]/(f_1, \ldots, f_r)$. Sei $\mathfrak{m} = (x_1 - p_1, \ldots, x_n - p_n) \in Spec(A)$ ein maximales Ideal. Dann gilt (Übung):
$$dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = n - Rang((\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P))_{i,j}).$$
Hat der lokale Ring $A_\mathfrak{m}$ Dimension d, so ist also $A_\mathfrak{m}$ genau dann regulär, wenn
$$n - d = Rang((\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P))_{i,j})$$
gilt. In der algebraischen Geometrie sagt man dann, daß $(p_1, \ldots, p_n)$ ein nichtsingulärer Punkt von $\{f_1 = \cdots = f_r = 0\}$ ist.

Zum Herleitung einiger wichtiger Eigenschaften regulärer lokaler Ringe benötigen wir noch einige Aussagen:

Lemma. *Ist $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring und $x \in \mathfrak{m}$, so gilt*

$$\dim A/(x) \geq \dim A - 1.$$

Ist x in keinem minimalen Primideal enthalten, so gilt sogar Gleichheit:

$$\dim A/(x) = \dim A - 1.$$

Beweis:

1. Sei $m = \dim A/(x) = h(\mathfrak{m})$. Nach der Umkehrung des Krullschen Hauptidealsatzes gibt es $x_1, \ldots, x_m \in \mathfrak{m}$, so daß $\mathfrak{m}$ minimales Primoberideal von $\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_m}$ ist. Also ist $\mathfrak{m}$ minimales Primoberideal von $x, x_1, \ldots, x_m$. Nach dem Hauptidealsatz folgt $\dim A = h(\mathfrak{m}) \leq m+1 = \dim A/(x)+1$, die Behauptung.

2. Sei $\overline{\mathfrak{p}_0} \subset \cdots \subset \overline{\mathfrak{p}_m}$ eine maximale Primidealkette in $A/(x)$. Die Urbilder liefern eine Primidealkette $\mathfrak{p}_0 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_m$ in A mit $(x) \subseteq \mathfrak{p}_0$. Da x nach Voraussetzung in keinem minimalem Primideal enthalten ist, ist $\mathfrak{p}_0$ nicht minimal, d.h. es gibt ein Primideal $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}_0$. Dann gilt aber
$$\dim A = h(\mathfrak{m}) \geq m + 1 = \dim A/(x) + 1.$$
Aus 1. folgt $\dim A \leq \dim A/(x) + 1$ und damit $\dim A = \dim A/(x) + 1$. ■

LEMMA. *Ist $(A, \mathfrak{m})$ regulärer lokaler Ring und $x \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$, so ist auch $A/(x)$ regulär. Außerdem gilt* $\dim A/(x) = \dim A - 1$.

Beweis: Ergänze x zu einem minimalen Erzeugendensystem $x, x_2, \ldots, x_n$ von $\mathfrak{m}$ mit $n = \dim A$. In $\overline{A} = A/(x)$ ist $\overline{\mathfrak{m}} = (\overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n})$. Also gilt nach dem Krullschen Hauptidealsatz $\dim A/(x) \leq \dim A - 1$. Nach dem letzten Lemma ist $\dim A/(x) \geq n-1$, also folgt $\dim A/(x) = n - 1$. Da $\overline{\mathfrak{m}}$ von $n-1$ Elementen erzeugt wird, ist also $A/(x)$ regulär. ■

SATZ. *Ist $(A, \mathfrak{m})$ regulärer lokaler Ring, so ist A Integritätsring.*

Beweis des Satzes: Wir machen Induktion nach $n = \dim A$:
$n = 0$: Dann ist $\mathfrak{m} = 0$, A also Körper.
$n \geq 1$: Ist $x \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$, so ist $A/(x)$ regulär, $\dim A/(x) = n - 1$, nach Induktionsvoraussetzung also Integritätsring, also (x) Primideal. Nach dem Krullschen Hauptidealsatz ist $h(x) \leq 1$.
1. Fall: Es gibt ein $x \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$ mit $h(x) = 1$. Dann gibt es ein (minimales) Primideal $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{p} \subset (x)$. Ist $p \in \mathfrak{p}$, so $p \in (x)$, also $p = ax$ mit $a \in A$. Wegen $ax = p \in \mathfrak{p}$ und $x \notin \mathfrak{p}$ ist $a \in \mathfrak{p}$, also $p \in x\mathfrak{p}$. Damit folgt $\mathfrak{p} = x\mathfrak{p}$, nach Nakayama also $\mathfrak{p} = 0$. Da 0 Primideal ist, ist A Integritätsring, wie behauptet.
2. Fall: Für alle $x \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$ ist (x) minimales Primideal. Wähle $x \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$ und $y \in \mathfrak{m} \setminus (x)$. Für jedes $n \geq 2$ ist dann $(x + y^n)$ ein minimales Primideal. Da es nur endlich viele minimalen Primideale gibt, existieren natürliche Zahlen $2 \leq m < n$ mit $(x + y^m) = (x + y^n)$. Sei $\mathfrak{p} = (x - y^m)$. Dann gilt:
$$(1 - y^{n-m})y^m = y^n - y^m = (x + y^n) - (x + y^m) \in \mathfrak{p},$$
da $1 - y^{n-m}$ Einheit ist, folgt $y \in \mathfrak{p}$ und somit $x \in \mathfrak{p}$. Wegen $(x) \subseteq \mathfrak{p}$ und $h(\mathfrak{p}) = 0$ ist $\mathfrak{p} = (x)$. Die Aussage $y \in \mathfrak{p} = (x)$ widerspricht aber nun der Wahl von y. Also kann dieser Fall nicht eintreten. ■

Aus dem letzten Satz ergibt sich zusammen mit dem Lemma sofort:

FOLGERUNG. *Ist $(A, \mathfrak{m})$ ein regulärer lokaler Ring und $x \in \mathfrak{m}, x \notin \mathfrak{m}^2$, dann ist (x) ein Primideal.*

Das folgende Lemma stellt eine Verbindung zu den letzten Kapitels her:

LEMMA. *Ist $(A, \mathfrak{m})$ ein regulärer lokaler Ring der Dimension n und $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$, so ist $x_1, \ldots, x_n$ eine reguläre Folge.*

Beweis: Wir machen Induktion nach $n = \dim A$. Der Fall $n = 0$ ist klar. Sei $n \geq 1$. Da $\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}$ eine $A/\mathfrak{m}$-Basis von $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ bilden, gilt $x_1 \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$, also ist zunächst $x_1 \neq 0$, also kein Nullteiler, und dann $A/(x_1)$ regulär mit $\overline{\mathfrak{m}} = (\overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n})$. Nach Induktionsvoraussetzung bilden $\overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}$ eine reguläre Folge in $A/(x_1)$, woraus folgt, daß $x_1, \ldots, x_n$ eine reguläre Folge ist. ■

In einem regulärer lokalen Ring $(A, \mathfrak{m})$ mit einem minimalen Erzeugendensystem $x_1, \ldots, x_n$ von $\mathfrak{m}$ ist also $t(\mathfrak{m}) \geq n$, nach dem Krullschen Hauptidealsatz $h(\mathfrak{m}) \leq n$, und damit $t(\mathfrak{m}) = h(\mathfrak{m})$, woraus folgt:

FOLGERUNG. *Jeder reguläre lokale Ring ist Cohen-Macaulay.*

Bemerkung: Ist A ein regulärer lokaler Ring und $f_1, \ldots, f_n$ eine reguläre Folge in A, so ist also auch $A/(f_1, \ldots, f_n)$ ein Cohen-Macaulay-Ring. Ringe dieser Bauart heißen vollständige Durchschnitte.

Um die regulären lokalen Ringe genauer zu studieren, werden wir projektive und freie Auflösungen betrachten.

FOLGERUNG. *Ist $(A, \mathfrak{m})$ ein regulärer lokaler Ring der Dimension n und $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$, so liefert der Koszul-Komplex $K(x_1, \ldots, x_n)$ eine freie Auflösung des A-Moduls $k = A/\mathfrak{m}$ der Länge n:*
$$0 \to A \to A^n \to \wedge^2 A^n \to \cdots \to \wedge^{n-1} A^n \to \wedge^n A^n \to k \to 0.$$

Beweis: Da $x_1, \ldots, x_n$ eine reguläre Folge ist, ist der Koszul-Komplex $K(x_1, \ldots, x_n)$ exakt bis auf die 0-te Stelle; dort ist die Kohomologie $A/(x_1, \ldots, x_n) = k$. ■

Erinnerung: Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring mit $k = A/\mathfrak{m}$.

- Sei M ein endlich erzeugter A-Modul. Dann ist $M/\mathfrak{m}M$ ein endlich dimensionaler k-Vektorraum. Seien $m_1, \ldots, m_r \in M$ so gewählt, daß sie eine k-Basis von $M/\mathfrak{m}M$ liefern. Nach dem Lemma von Nakayama gilt $M = Am_1 + \cdots + Am_r$. Definiere $\phi : A^r \to M$ durch $\phi(e_i) = m_i$, wo e_i den i-ten kanonischen Basisvektor bezeichnet. ϕ ist surjektiv. Ist $a_1 e_1 + \cdots + a_r e_r \in Kern(\phi)$, so ist $a_1 m_1 + \cdots + a_r m_r = 0$. Modulo $\mathfrak{m}M$ betrachtet folgt wegen der linearen Unabhängigkeit der $\overline{m_i}$ nun $\overline{a_i} = 0$, d.h. $a_i \in \mathfrak{m}$ und damit $a_1 e_1 + \cdots + a_r e_r \in \mathfrak{m}A^r$.
- Iteriert man nun diesen Prozeß, indem man für M den endlich erzeugten A-Modul $Kern(\phi)$ nimmt, so kommt man zu einer sogenannten minimalen freien Auflösung von M:
$$\cdots \to A^{b_2} \to A^{b_1} \to A^{b_0} \to M \to 0,$$
mit $Bild(\phi_{i+1}) \subseteq \mathfrak{m}A^{b_i}$ für $i \geq 0$. Anders ausgedrückt: die Matrix, die die Abbildung $A^{b_{i+1}} \to A^{b_i}$ beschreibt, hat Koeffizienten in $\mathfrak{m}$.
- Tensoriert man die minimale freie Auflösung von M mit $k = A/\mathfrak{m}$, so sind alle Abbildungen 0, also folgt:
$$Tor_i(M, k) = k^{b_i}.$$
- Ist $b_{m+1} = 0$, so können wir die Auflösung ab dieser Stelle durch 0 ersetzen, also folgt $b_{m+i} = 0$ für alle $i \geq 1$. Insbesondere hat dann M eine freie Auflösung der Länge $\leq m$. Wir formulieren dies nochmals:

FOLGERUNG. *Ist $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring und M ein endlich erzeugter A-Modul, so gilt:*
$$Tor_n(M, k) = 0 \Rightarrow Tor_{n+i}(M, k) = 0 \text{ für alle } i \geq 0.$$

DEFINITION. Sei A ein Ring.

1. Für einen A-Modul M heißt
$$pd(M) = \inf\{n : M \text{ besitzt eine projektive Auflösung der Länge } n\}$$
die projektive Dimension von M. Besitzt M keine projektive Auflösung endlicher Länge, so setzen wir $pd(M) = \infty$.
2. Wir nennen
$$gd(A) = \sup\{pd(M) : M \text{ ist endlich erzeugter } A\text{-Modul}\}$$
die globale Dimension von A. (Auslander hat gezeigt, daß man die gleiche Zahl erhält, wenn man alle Moduln zuläßt.)

Bemerkung: Ein A-Modul M hat genau dann projektive Dimension 0, wenn er projektiv ist.

Beispiel: Sei $A = \mathbf{Z}$ und M ein endlich erzeugter Modul, also $M \simeq \mathbf{Z}/(d_1) \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}/(d_r) \oplus \mathbf{Z}^s$ mit $d_i \geq 2$ und $r, s \geq 0$. Dann ist
$$0 \to \mathbf{Z}^r \stackrel{(d_1, \ldots, d_r, 0 \ldots, 0)}{\to} \mathbf{Z}^{r+s} \to M \to 0$$
eine freie Auflösung von M, also $pd(M) \leq 1$. Ist $r \geq 1$, so ist M nicht projektiv, also $pd(M) = 1$. Damit folgt $gd(\mathbf{Z}) = 1$.

LEMMA. *Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring und M ein endlich erzeugter Modul. Dann gilt:*
$$pd(M) = \inf\{i : Tor_{i+1}(M, k) = 0\}.$$
Insbesondere ist $pd(M)$ die Länge einer minimalen freien Auflösung von M.

Beweis: $\leq$: Ist $Tor_{i+1}(M, k) = 0$, so wissen wir nach den vorangegangenen Überlegungen, daß $b_{i+1} = 0$ ist, daß also M eine freie Auflösung der Länge $\leq i$ besitzt.
$\geq$: Sei $n = pd(M)$ und $0 \to P_n \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$ eine projektive Auflösung von M. Dann folgt $Tor_{n+1}(M, k) = 0$. ■

FOLGERUNG. *Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring. Dann gilt:*

$$gd(A) = pd(k).$$

Beweis: $\geq$ ist klar. Wir können annehmen, daß $pd(k) = n$ endlich ist. Also gibt es eine projektive Auflösung $0 \to P_n \to \cdots \to P_0 \to k \to 0$. Dann folgt aber $Tor_{n+1}(M, k) = 0$ für jeden endlich erzeugten A-Modul M, also $pd(M) \leq n$, woraus die Behauptung folgt. ■

Ohne Beweis geben wir folgenden Satz an (Beweis als Übung):

SATZ. *Für einen endlich erzeugten A-Modul M gilt:*

$$pd(M) = \sup\{pd(M_\mathfrak{p}) : \mathfrak{p} \in Spec(A)\}$$

und für die globale Dimension von A:

$$gd(A) = \sup\{gd(A_\mathfrak{p}) : \mathfrak{p} \in Spec(A)\}.$$

Für einen regulären Ring $(A, \mathfrak{m})$ mit $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$ und $\dim A = n$ lieferte der Koszul-Komplex $K(x_1, \ldots, x_n)$ eine freie Auflösung von k. Damit ist $Tor_n(k, k) = k$, $Tor_{n+i}(k, k) = 0$ für alle $i \geq 1$. Also ist $pd(k) = n$. Wir formulieren dies als Satz:

SATZ. *Für einen regulären lokalen Ring $(A, \mathfrak{m})$ gilt:*

$$\dim A = pd(k) = gd(A) < \infty.$$

Konstruktion einer minimalen freien Auflösung des Restklassenkörpers:

- Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring und $k = A/\mathfrak{m}$. Wir wollen eine minimale freie Auflösung von k konstruieren. Der Anfang ist klar: $A \to k \to 0$. Als Kern tritt $\mathfrak{m}$ auf, wir brauchen also ein minimales Erzeugendensystem $x_1, \ldots, x_n$ von $\mathfrak{m}$ und können dann mit $A^n \to A \to k \to 0$ weitermachen. So endet auch der Koszul-Komplex $K(x_1, \ldots, x_n)$.
- Der Koszul-Komplex ist im allgemeinen nicht exakt. Er ist genau dann exakt, wenn $x_1, \ldots, x_n$ eine reguläre Folge ist, was dann äquivalent damit ist, daß A regulär ist, wegen $n = t(x_1, \ldots, x_n) \leq h(x_1, \ldots, x_n) = h(\mathfrak{m}) \leq n$. Wir versuchen, den Koszul-Komplex durch freie Moduln zu ergänzen, daß er exakt wird.
- Sei $e_1, \ldots, e_n$ die kanonische Basis von A^n, $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ und $K_i = \wedge^{n-i} A^n$. Wir wollen freie Moduln E_i, Abbildungen

  $$\phi_i : K_i \oplus E_i \to K_{i-1} \oplus E_{i-1}, \quad (y, z) \mapsto (x \wedge y + \alpha_i(z), \beta_i(z))$$

  konstruieren, so daß der Komplex $(K_i \oplus E_i, \phi_i)$ eine minimale freie Auflösung von k liefert. Wir machen dies induktiv. Dabei müssen wir $E_0 = E_1 = 0$ wählen, wie wir bereits bemerkt haben.
- Sei der Komplex bereits bis m konstruiert mit den gewünschten Eigenschaften. Wir wissen auch $Kern(\phi_m) \subseteq \mathfrak{m}K_m \oplus \mathfrak{m}E_m$. Wir brauchen jetzt ein minimales Erzeugendensystem von $Kern(\phi_m)$.
- Wir bemerken zunächst, daß die Elemente

  $$(x \wedge e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{n-m-1}}, 0), i_1 < \cdots < i_{n-m-1}$$

  wegen $x \wedge x = 0$ im Kern von ϕ_m liegen.
- Wir wollen nun zeigen: Obige Elemente sind linear unabhängig modulo $\mathfrak{m}Kern(\phi_m)$. Wir machen den Ansatz:

  $$0 = (\sum_{i_1 < \cdots < i_{n-m-1}} a_{i_1 \ldots i_{n-m-1}} x \wedge e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{n-m-1}}, 0) \in \mathfrak{m}Kern(\phi_m)$$

  Wir müssen zeigen: $a_{i_1 \ldots i_{n-m-1}} \in \mathfrak{m}$. Sei $f_1 = \sum_{i_1 < \cdots < i_{n-m-1}} a_{i_1 \ldots i_{n-m-1}} x \wedge e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{n-m-1}}$.
- Alle Terme aus f_1 liegen in $\mathfrak{m}K_m$. Natürlich ist $0 = f_1 \in \mathfrak{m}^2 K_m$. Wir studieren also $f_1 = 0$ in $\mathfrak{m}K_m / \mathfrak{m}^2 K_m$.
- Eine Basis von $\mathfrak{m}K_m / \mathfrak{m}^2 K_m$ liefern die Bilder von

  $$x_i e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{n-m}}, \quad 1 \leq i \leq n, i_1 < \cdots < i_{n-m},$$

  wie man sich schnell überlegt.

- Nun gilt in $\mathfrak{m}K_m/\mathfrak{m}^2K_m$ die Gleichung $f_1 = 0$, also
$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i_1<\cdots<i_{n-m-1}} a_{i_1\ldots i_{n-m-1}} x \wedge e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{n-m-1}} = \\ &= \sum_i \sum_{i_1<\cdots<i_{n-m-1}} a_{i_1\ldots i_{n-m-1}} x_i e_i \wedge e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{n-m-1}} \end{aligned}$$
Sei $i_1 < \cdots < i_{n-m-1}$. Wähle ein $i \neq i_1, \ldots, i_{n-m-1}$. Der Koeffizient in f_1 bei $x_i e_i \wedge e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{n-m-1}}$ ist $a_{i_1\ldots i_{n-m-1}}$, muß also 0 sein. Damit haben wir unsere Zwischenbehauptung bewiesen.
- Ergänze nun obige Elemente durch $(y_i, z_i), i = 1, \ldots, r$ zu einem minimalen Erzeugendensystem von $Kern(\phi_m)$. Sei E_{m+1} mit Basis $b_1, \ldots, b_r$. Definiere $\phi_{m+1} : K_{m+1} \oplus E_{m+1} \to K_m \oplus E_m$ durch
$$\phi_{m+1}(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{n-m-1}}, 0) = x \wedge e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{n-m-1}}, 0) \text{ und } \phi_{m+1}(0, b_i) = (y_i, z_i).$$
Damit haben wir das Gewünschte erreicht und bewiesen:

LEMMA. *Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring, $x_1, \ldots, x_n$ ein minimales Erzeugendensystem von $\mathfrak{m}$. Dann kann der Koszul-Komplex $K(x_1, \ldots, x_n)$ zu einer minimalen freien Auflösung von k ergänzt werden:*
$$\cdots \to \wedge^{n-2}A^n \oplus E_2 \to \wedge^{n-1}A^n \oplus E_1 \to \wedge^n A^n \oplus E_0 \to k \to 0.$$

Da mit den Bezeichnungen des Lemmas der Koszul-Komplex $K(x_1, \ldots, x_n)$ an der n-ten Stelle $\neq 0$ ist, und $n = \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ gilt, folgt:

FOLGERUNG. *Für einen lokalen Ring $(A, \mathfrak{m})$ gilt:*
$$pd(k) \geq \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2.$$

Im folgenden wollen wir Tiefe und projektive Dimension vergleichen.

Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring und $M \neq 0$ ein endlich erzeugter A-Modul. Wir wollen die Beziehung zwischen Tiefe $t(\mathfrak{m}, M)$ und projektiver Dimension $pd(M)$ von M betrachten. Sei dazu $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$ mit minimalem n gewählt.

- Ist $pd(M) = 0$, so ist $M \simeq A^b$ mit $b \geq 1$. Für den Koszul-Komplex gilt:
$$M \otimes K(x_1, \ldots, x_n) = A^b \otimes K(x_1, \ldots, x_n) \simeq K(x_1, \ldots, x_n) \oplus \cdots \oplus K(x_1, \ldots, x_n),$$
woraus sofort
$$H^i(A^b \otimes K(x_1, \ldots, x_n)) = (H^i(K(x_1, \ldots, x_n)))^b$$
folgt. Also gilt
$$t(\mathfrak{m}, A^b) = t(\mathfrak{m}, A).$$
- Sei $pd(M) = 1$. Wähle eine minimale freie Auflösung von M:
$$0 \to A^{b_1} \xrightarrow{C} A^{b_0} \to M \to 0.$$
Dabei hat die Matrix C Einträge in $\mathfrak{m}$. Wir tensorieren mit $K(x_1, \ldots, x_n)$ und erhalten wie eben:
$$0 \to K(x_1, \ldots, x_n)^{b_1} \xrightarrow{C} K(x_1, \ldots, x_n)^{b_0} \to M \otimes K(x_1, \ldots, x_n) \to 0.$$
Wir erhalten eine lange exakte Kohomologiesequenz:
$$\begin{aligned} \ldots &\to (H^i(K(x_1, \ldots, x_n)))^{b_1} \xrightarrow{C} (H^i(K(x_1, \ldots, x_n)))^{b_0} \to H^i(M \otimes K(x_1, \ldots, x_n)) \to \\ &\to (H^{i+1}(K(x_1, \ldots, x_n)))^{b_1} \to \ldots \end{aligned}$$
Da C Koeffizienten in $\mathfrak{m}$ hat und $\mathfrak{m} \cdot H^i(K(x_1, \ldots, x_n)) = 0$ gilt, spaltet die lange exakte exakte Sequenz in kurze exakte Sequenzen auf:
$$0 \to H^i(K(x_1, \ldots, x_n))^{b_0} \to H^i(M \otimes K(x_1, \ldots, x_n)) \to H^{i+1}(K(x_1, \ldots, x_n))^{b_1} \to 0.$$
Für $i = -1$ erhält man $H^0(K(x_1, \ldots, x_n)) = 0$, also $t(\mathfrak{m}, A) > 0$. Dann sieht man schnell aus der Formel für die Tiefe $t(\mathfrak{m}, M) = t(\mathfrak{m}, A) - 1$.

Was wir hier angefangen haben, verallgemeinert sich zur sogenannten Auslander-Buchsbaum-Formel:

SATZ. *Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring, M ein endlich erzeugter A-Modul mit $pd(M) < \infty$. Dann gilt:*
$$t(\mathfrak{m}, A) = t(\mathfrak{m}, M) + pd(M).$$

Beweis: Wir machen Induktion nach $pd(M)$. Die Fälle $pd(M) = 0$ und $pd(M) = 1$ haben wir bereits behandelt. Sei jetzt $pd(M) \geq 2$. Wir fangen an, eine minimale freie Auflösung von M zu konstruieren und stoppen nach dem ersten Schritt:

$$0 \to N \xrightarrow{\phi} A^b \to M \to 0.$$

Dabei gilt $\phi(N) \subseteq \mathfrak{m}A^b$ und $N \neq 0$. Ist $\cdots \to A^{b_1} \to A \to A^{b_0} \to N \to 0$ eine minimale freie Auflösung von N, so ist $\cdots \to A^{b_1} \to A^{b_0} \to A^b \to M \to 0$ eine minimale freie Auflösung von M und damit $Tor_i(N, k) = b_i = Tor_{i+1}(M, k)$ für $i \geq 0$, woraus sofort $pd(N) = pd(M) - 1$ folgt. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $t(\mathfrak{m}, N) + pd(N) = t(\mathfrak{m}, A)$ und wegen $pd(M) = pd(N) + 1$ müssen wir also $t(\mathfrak{m}, M) = t(\mathfrak{m}, N) - 1$ zeigen. Ist $r = t(\mathfrak{m}, N)$, so gilt nach Induktionsvoraussetzung auch $r < t(\mathfrak{m}, A)$. Zu zeigen ist $t(\mathfrak{m}, M) = r + 1$.

Sei $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$. Da alle Moduln des Koszul-Komplexes $K(x_1, \ldots, x_n)$ frei sind, erhält man durch Tensorieren des Komplexes mit $0 \to N \to A^b \to M \to 0$ eine exakte Sequenz von Komplexen:

$$0 \to N \otimes K(x_1, \ldots, x_n) \to A^b \otimes K(x_1, \ldots, x_n) \to M \otimes K(x_1, \ldots, x_n) \to 0,$$

was eine lange exakte Kohomologiesequenz induziert:

$$\begin{aligned} \ldots \quad & \to H^{i-1}(N \otimes K(x_1, \ldots, x_n)) \to H^{i-1}(A^b \otimes K(x_1, \ldots, x_n)) \to H^{i-1}(M \otimes K(x_1, \ldots, x_n)) \to \\ & \to H^i(N \otimes K(x_1, \ldots, x_n)) \to H^i(A^b \otimes K(x_1, \ldots, x_n)) \to H^i(M \otimes K(x_1, \ldots, x_n)) \to \end{aligned}$$

Für $i \leq r-1$ ist $H^i(N \otimes K(x_1, \ldots, x_n)) = H^i(A^b \otimes K(x_1, \ldots, x_n)) = 0$, also folgt $H^j(M \otimes K(x_1, \ldots, x_n)) = 0$ für $j \leq r - 2$. Wir setzen jetzt $i = r$ ein und erhalten mit $H^r(K(x_1, \ldots, x_n)) = 0$ sofort:

$$0 \to H^{r-1}(M \otimes K(x_1, \ldots, x_n)) \to H^r(N \otimes K(x_1, \ldots, x_n)) \to 0,$$

also $t(\mathfrak{m}, M) = r - 1 = t(\mathfrak{m}, N) - 1$, wie behauptet. ■

Bemerkung: Aus der Auslander-Buchsbaum-Formel folgt auch, daß $t(\mathfrak{m}, M) \leq t(\mathfrak{m}, A)$ gilt für alle endlich erzeugten Moduln M mit $pd(M) < \infty$. Dies gilt aber allgemein nicht, wie folgendes Beispiel zeigt:

Beispiel: Seien $x, y_1, \ldots, y_n$ Unbestimmte, $A = k[x, y_1, \ldots, y_n]/(x^2, xy_1, \ldots, xy_n)$ und $\mathfrak{m} = (x, y_1, \ldots, y_n)$. Dann ist $\mathfrak{m}$ assoziiertes Primideal wegen $\mathfrak{m} = ann(x)$, also $t(\mathfrak{m}, A) = 0$. Andererseits ist in $A/(x)$ die Folge $y_1, \ldots, y_n$ eine maximale reguläre Folge, also ist $t(\mathfrak{m}, A/(x)) = n$.

Beispiel: Ist $(A, \mathfrak{m})$ lokaler Ring mit $\mathfrak{m} \in Ass(A)$, so sind alle endlich erzeugten Moduln mit einer endlichen projektiven Auflösung bereits frei, denn keine Abbildung $A^{b_{i+1}} \xrightarrow{C} A^{b_i}$ mit $b_{i+1} \geq 1$, wo die Matrix C Einträge in $\mathfrak{m}$ hat, ist injektiv.

Jetzt sind wir in der Lage, folgenden wichtigen Satz zu beweisen:

SATZ (Auslander-Buchsbaum-Serre). *Für einen lokalen Ring $(A, \mathfrak{m})$ gilt:*

$$A \textit{ ist regulär} \iff gd(A) < \infty.$$

Beweis: Die Richtung $\Rightarrow$ wurde bereits bewiesen. Sei nun $gd(A) < \infty$. Dann ist $pd(k) = gd(A) < \infty$. Wegen $t(\mathfrak{m}, k) = 0$ liefert die Auslander-Buchsbaum-Formel: $t(\mathfrak{m}, A) = pd(k)$ und damit

$$\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \leq pd(k) = t(\mathfrak{m}, A) \leq h(\mathfrak{m}) = \dim A \leq \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2.$$

Also ist $\dim A = \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, d.h. A ist regulär. ■

FOLGERUNG. *Ist $(A, \mathfrak{m})$ regulärer lokaler Ring, so ist auch $A_\mathfrak{p}$ regulärer lokaler Ring für alle $\mathfrak{p} \in Spec(A)$.*

Beweis: Sei $\mathfrak{p} \in Spec(A)$. Dann gibt es eine endliche freie Auflösung von $A/\mathfrak{p}$:

$$0 \to F_m \to \cdots \to F_0 \to A/\mathfrak{p} \to 0.$$

Da Lokalisieren exakt ist, erhält man aus

$$0 \to (F_m)_\mathfrak{p} \to \cdots \to (F_0)_\mathfrak{p} \to A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} \to 0$$

eine endliche freie Auflösung des $A_\mathfrak{p}$-Moduls $A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$, also $pd_{A_\mathfrak{p}}(A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}) = gd(A_\mathfrak{p}) < \infty$, weswegen auch $A_\mathfrak{p}$ ein regulärer lokaler Ring ist. ■

Bemerkung: Ist $(A, \mathfrak{m})$ ein regulärer lokaler Ring und $\mathfrak{p}$ ein Primideal der Höhe 1, so ist also $A_\mathfrak{p}$ ein diskreter Bewertungsring.

Unser letztes Ziel ist der Beweis des folgenden Satzes von Auslander-Buchsbaum:

SATZ. *Jeder reguläre lokale Ring ist faktoriell.*

Wir wollen diesen Satz durch Induktion nach $\dim A$ beweisen. Zur Dimensionsreduzierung dient folgendes erste Lemma:

LEMMA (Nagata). *Sei A ein (noetherscher) Integritätsring, x prim. Ist A_x faktoriell, so auch A.*

Beweis:

1. A_x ist die Lokalisierung von A nach der multiplikativen Teilmenge $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$. Also ist
$$A_x = \{\frac{a}{x^n} \in Quot(A) : a \in A, n \geq 0\}.$$
2. Wir wissen, daß ein noetherscher Ring genau dann faktoriell ist, wenn jedes Primideal der Höhe 1 Hauptideal ist.
3. Sei also jetzt $\mathfrak{p} \in Spec(A)$ mit $h(\mathfrak{p}) = 1$. Der Fall $\mathfrak{p} = (x)$ ist klar. Sei jetzt $\mathfrak{p} \neq (x)$. Dann ist $\mathfrak{p} \cap \{1, x, x^2, \dots\} = \emptyset$, also ist $\mathfrak{p}A_x$ Primideal der Höhe 1 in A_x, weswegen es nach Voraussetzung ein $p \in \mathfrak{p}, n \geq 0$ mit $\mathfrak{p}A_x = \frac{p}{x^n}A_x$ gibt.
4. $\frac{p}{x^n}$ ist natürlich nur bis auf Einheiten in A_x bestimmt. Klar ist $\mathfrak{p}A_x = pA_x$.
5. Gilt $x|p$ in A, so ist $\mathfrak{p}A_x = \frac{p}{x}A_x$, wir können also o.E. p durch $\frac{p}{x}$ ersetzen. Nach endlich vielen Schritten haben wir dann $x \nmid p$ in A, da A noethersch ist.
6. Wir wissen $\mathfrak{p} \supseteq (p)$ in A. Sei umgekehrt $a \in \mathfrak{p}$. Dann ist $\frac{a}{1} \in pA_x$, also gibt es $b \in A, n \geq 0$ mit $a = \frac{bp}{x^n}$. Dann ist $x^n a = bp$. Ist $n \geq 1$, so gilt $x|bp$, also wegen $x \nmid p$ dann $x|b$. Induktiv folgt $x^n|b$ und damit $a \in (p)$. Es folgt $\mathfrak{p} = (p)$, was zu zeigen war. ∎

Mit dem folgenden Lemma kann man schließen, wann ein projektiver Moduln schon *fast* frei ist.

LEMMA. *Ist P ein endlich erzeugter projektiver A-Modul mit einer endlichen freien Auflösung (bestehend aus freien Moduln endlichen Rangs), so ist P stabil frei, d.h. es gibt $m, n \geq 0$ mit $P \oplus A^m \simeq A^n$.*

Beweis: Sei also
$$0 \to F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to P \to 0$$
eine endliche freie Auflösung von P, wo alle F_i endlichen Rang haben. Da P projektiv ist, spaltet die letzte Abbildung, d.h. $F_0 = P \oplus P_0$, wo $F_0 \to P$ die Projektion auf die erste Komponente ist; es ist $Kern(F_0 \to P) = P_0$; auch P_0 ist projektiv, da direkter Summand eines freien Moduls. Die Abbildung $F_1 \to F_0$ induziert eine Surjektion $F_1 \to P_0 \to 0$. Da P_0 surjektiv ist, spaltet die Sequenz, d.h. $F_1 \simeq P_0 \oplus P_1$, wo jetzt auch P_1 projektiv ist und $Kern(F_1 \to F_0) = P_1$. Induktiv erhalten wir projektive Moduln P_i mit $F_i \simeq P_{i-1} \oplus P_i$ und $Kern(F_i \to F_{i-1}) = P_i$. Damit gilt jetzt:
$$\begin{aligned} P \oplus F_1 \oplus F_3 \oplus F_5 \oplus \dots &= P \oplus (P_0 \oplus P_1) \oplus (P_2 \oplus P_3) \oplus (P_4 \oplus P_5) \oplus \dots = \\ &= (P \oplus P_0) \oplus (P_1 \oplus P_2) \oplus (P_3 \oplus P_4) \oplus P_5 \oplus \dots = \\ &= F_0 \oplus F_2 \oplus F_4 \oplus \dots . \end{aligned}$$
Ist nun $F_1 \oplus F_3 \oplus F_5 \oplus \dots \simeq A^m$ und $F_0 \oplus F_2 \oplus F_4 \oplus \dots \simeq A^n$, so hat man $P \oplus A^m \simeq A^n$, wie behauptet. ∎

Bemerkung: Es gibt Beispiele für stabil freie Moduln, die nicht frei sind.

Das nächste Lemma zeigt, wann ein *fast* freier Modul auch frei ist.

LEMMA. *Ist M ein A-Modul mit $M \oplus A^{n-1} \simeq A^n$, so ist $M \simeq A$.*

Beweis: Zunächst ist M als direkter Summand eines freien endlich erzeugten Moduls projektiv und endlich erzeugt, also lokal frei, d.h. $M_\mathfrak{p} \simeq A_\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in Spec(A)$. Damit gilt für $i \geq 2$: $(\wedge^i M)_\mathfrak{p} = \wedge^i M_\mathfrak{p} \simeq \wedge^i A_\mathfrak{p} = 0$, also auch $\wedge^i M = 0$. Mit $\wedge^n A^{n-1} = 0$ folgt

$$\begin{aligned} A &\simeq \wedge^n A^n = \wedge^n (M \oplus A^{n-1}) \simeq \oplus_{i+j=n} (\wedge^i M \otimes \wedge^j A^{n-1}) = \\ &= (A \otimes \wedge^n A^{n-1}) \oplus (M \otimes \wedge^{n-1} A^{n-1}) \simeq M \otimes A \simeq M, \end{aligned}$$

was wir zeigen wollten. ■

Beweis des Satzes:

- Sei $(A, \mathfrak{m})$ regulär. Wir wollen sehen, daß A faktoriell ist. Dazu machen wir Induktion nach $\dim A$. Der Induktionsanfang $\dim A = 0$ ist klar, denn in diesem Fall ist A ein Körper. Sei nun $\dim A \geq 1$.
- Wähle $x \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$. Dann ist (x) ein Primideal. Nach Nagata genügt es zu zeigen, daß A_x faktoriell ist. Wegen $\mathfrak{m} A_x = A_x$ gilt $\dim A_x < \dim A$. (Im allgemeinen ist aber A_x kein lokaler Ring mehr.)
- Sei $\mathfrak{q}$ ein Primideal der Höhe 1 in A_x. Zu zeigen ist: $\mathfrak{q}$ ist Hauptideal bzw. $\mathfrak{q} \simeq A_x$. Wir werden zunächst zeigen, daß $\mathfrak{q}$ ein projektiver A-Modul ist, und dann, daß $\mathfrak{q}$ ein freier A-Modul ist. Da $\mathfrak{q}$ endlich erzeugt ist, bedeutet projektiv einfach lokal frei.
- Sei $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal in A_x. Dann gibt es ein Primideal $\mathfrak{p}'$ in A mit $\mathfrak{p}' A_x = \mathfrak{p}$ und $x \notin \mathfrak{p}'$. Dann ist aber (im Quotientenkörper von A) $(A_x)_\mathfrak{p} = A_{\mathfrak{p}'}$, also Lokalisierung eines regulären lokalen Ring, und damit selbst regulär. Nach Induktionsvoraussetzung ist also $(A_x)_\mathfrak{p}$ faktoriell. Damit wird $\mathfrak{q}_\mathfrak{p}$ Hauptideal, also $\mathfrak{q}_\mathfrak{p} \simeq (A_x)_\mathfrak{p}$. Da dies für alle maximalen Ideale $\mathfrak{p}$ von A_x gilt, ist $\mathfrak{q}$ ein projektiver A_x-Modul (vom Rang 1).
- Nun ist $\mathfrak{q}$ Lokalisierung eines Primideals $\mathfrak{q}'$ von A. Da A regulär ist, ist $pd(\mathfrak{q}') < \infty$, also besitzt $\mathfrak{q}'$ eine endliche freie Auflösung. Durch Lokalisieren erhält man eine endliche freie Auflösung von $\mathfrak{q}$. Nach unserem Lemma gibt es dann m, n mit $\mathfrak{q} \oplus A_x^m \simeq A_x^n$. Durch Lokalisieren sieht man sofort $m = n - 1$. Mit dem anderen Lemma folgt $\mathfrak{q} \simeq A_x$, d.h. $\mathfrak{q}$ ist Hauptideal, was zu zeigen war. ■

ANHANG A

Vorlesungsankündigung

MATHEMATISCHES INSTITUT
UNIVERSITÄT ERLANGEN-NÜRNBERG
Priv.-Doz. Dr. W. Ruppert

Bismarckstraße $1\frac{1}{2}$, 2. Februar 1995
D-91054 Erlangen
Tel. (09131) 85 2466 (Durchwahl)

Vorlesungsankündigung
für das Sommersemester 1995

Kommutative Algebra II

Die vierstündige Vorlesung setzt meine Vorlesung *Kommutative Algebra* aus dem Wintersemester 1994/95 fort. Zu Beginn soll eine kurze Einführung in die Homologische Algebra gegeben werden. Die weitere Stoffauswahl ist teilweise motiviert durch Fragestellungen aus der Algebraischen Geometrie. Einige Themen bzw. Stichworte:

Projektive Moduln, projektive Auflösungen, Ext und Tor, Derivationen, Koszul-Komplexe, reguläre Ringe, Cohen-Macaulay-Ringe, Gorenstein-Ringe.

Interessenten, die den ersten Teil der Vorlesung nicht besucht haben, kann ein Skript zum ersten Teil der Vorlesung zur Verfügung gestellt werden.

Literatur:

- D. Eisenbud, Commutative Algebra, Springer, 1995.
- E. Kunz, Einführung in die kommutative Algebra und algebraische Geometrie, Vieweg, 1980.
- H. Matsumura, Commutative Algebra, 2nd edition, Benjamin/Cummings, 1980.

Zeit und Ort: Di, Do 8-10, Übungsraum 3
Beginn: 2. Mai 1994
Nummer im Vorlesungsverzeichnis:

gez. W. Ruppert

Literaturverzeichnis

[Eis95] D. Eisenbud, Commutative Algebra, Graduate Texts in Mathematics **??**, Springer-Verlag, 1995.
[Hut81] H. C. Hutchins, Examples of Commutative Rings, Polygonal Publishing House, Passaic NJ, 1981.
[Jac80] N. Jacobson, Basic Algebra II, Freeman, 1980.
[Kun80] E. Kunz, Einführung in die kommutative Algebra und algebraische Geometrie, Vieweg, 1980.
[Lan84] S. Lang, Algebra, second edition, Addison-Wesley Publishing Company, 1984.
[Mat80] H. Matsumura, Commutative Algebra, Benjamin/Cummings, 1980.
[Mat86] H. Matsumura, Commutative ring theory, Cambridge University Press, 1986.