Schemata

Algebraische Geometrie II

Wolfgang M. Ruppert

Sommersemester 1997

29. Juli 1997[1]

[1] Im Sommersemester 1997 am Mathematischen Institut der Universität Erlangen-Nürnberg abgehaltene Vorlesung

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

Das Spektrum eines Ringes

Im folgenden meint Ring meist einen kommutativen Ring mit 1. Wichtige Beispiele sind Körper und Integritätsringe ($1 \neq 0$ in A und $xy = 0$ in A impliziert $x = 0$ oder $y = 0$).
Ein Ideal $\mathfrak{p} \subseteq A$ heißt Primideal, wenn der Faktorring $A/\mathfrak{p}$ ein Integritätsring ist, d.h. $\mathfrak{p} \neq A$ und $xy \in \mathfrak{p}$ impliziert $x \in \mathfrak{p}$ oder $y \in \mathfrak{p}$.
Ein Ideal $\mathfrak{m} \subseteq A$ heißt maximales Ideal, wenn $A/\mathfrak{m}$ ein Körper ist, d.h. in der Menge $\{\mathfrak{a} \subseteq A : \mathfrak{a} \text{ Ideal }, \mathfrak{a} \neq A\}$ ist $\mathfrak{m}$ bezüglich $\subseteq$ ein maximales Element. Mit dem Zornschen Lemma folgt sofort, daß jeder Ring $A \neq 0$ maximale Ideale besitzt. Außerdem ist klar, daß jedes maximale Ideal ein Primideal ist.

Definition 1. *Für einen Ring A wird das Spektrum von A als Menge definiert durch*

$$\operatorname{Spec}(A) = \{\mathfrak{p} \subseteq A : \mathfrak{p} \textit{ Primideal } \}.$$

Die Elemente des Spektrums werden auch als Punkte bezeichnet.

Nach obigen Bemerkungen ist klar: $\operatorname{Spec}(A) = \emptyset \iff A = 0$.

Beispiel: Für einen Körper k gilt $\operatorname{Spec}(k) = \{(0)\}$.

Beispiele:

1. Sei A ein Hauptidealring, d.h. A ist Integritätsring und jedes Ideal wird von einem Element erzeugt, d.h. hat die Form $(a) = Aa$. Natürlich ist (0) ein Primideal. Für $a \neq 0$ ist (a) genau dann ein Primideal, wenn a irreduzibel ist. Also hat man
$$\operatorname{Spec}(A) = \{(0)\} \cup \{(a) : a \text{ irreduzibel }\}.$$
Bemerken kann man hier noch: $(a) = (b)$ gilt genau dann, wenn $b = au$, wo u ein Einheit in A ist.
2. Damit folgt für den Ring $\mathbf{Z}$ der ganzen Zahlen
$$\operatorname{Spec}(\mathbf{Z}) = \{(0)\} \cup \{(2), (3), (5), (7), (11), (13), (17), \ldots\}.$$
3. Ist k ein Körper, so ist der Polynomring in einer Veränderlichen $A = k[x]$ ein Hauptidealring. Wegen $A^\times = k^\times$ gilt:
$$\operatorname{Spec}(k[x]) = \{(0)\} \cup \{(f(x)) : f(x) \text{ ist normiertes irreduzibles Polynom}\}.$$
4. Ist k ein algebraisch abgeschlossener Körper, so sind die irreduziblen normierten Polynome genau die Polynome der Gestalt $x - a$ mit $a \in k$, so daß man erhält:
$$\operatorname{Spec}(k[x]) = \{(0)\} \cup \{(x - a) : x \in k\}.$$
Abgesehen von einem Punkt stehen die Punkte von $\operatorname{Spec}(k[x])$ also in Bijektion zu den Elementen von k.
5. Die normierten irreduziblen Polynome mit reellen Koeffizienten haben die Gestalt $x - a$ mit $a \in \mathbf{R}$ oder $(x - (b + ic))(x - (b - ic))$ mit $b, c \in \mathbf{R}$ und $c > 0$. Also gilt
$$\operatorname{Spec}(\mathbf{R}[x]) = \{(0)\} \cup \{(x - a) : a \in \mathbf{R}\} \cup \{(x - (b + ic))(x - (b - ic)) : b, c \in \mathbf{R}, c > 0\}.$$

Beispiel: Wir betrachten den Polynomring $A = \mathbf{C}[x, y]$ in zwei Veränderlichen. A ist ein faktorieller Ring. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal. Dann gibt es mehrere Möglichkeiten:

- $\mathfrak{p} = (0)$.
- $\mathfrak{p}$ ist von 0 verschiedenes Hauptideal, d.h. $\mathfrak{p} = (f(x, y))$, wo $f(x, y)$ ein irreduzibles Polynom ist.

- $\mathfrak{p}$ ist kein Hauptideal. Mit $f, g \in \mathfrak{p}$ gilt auch für die Resultanten $resultant_x(f,g), resultant_y(f,g) \in \mathfrak{p}$. Man überlegt sich dann, daß es Polynome gibt mit
$$(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_m), (y-y_1)(y-y_2)\dots(y-y_n) \in \mathfrak{p}.$$
Da $\mathfrak{p}$ Primideal ist, gibt es also $x_0, y_0 \in \mathbf{C}$ mit $x - x_0, y - y_0 \in \mathfrak{p}$. Nun ist aber $(x - x_0, y - y_0)$ ein maximales Ideal, also folgt $\mathfrak{p} = (x - x_0, y - y_0)$.

Damit haben wir:
$$\operatorname{Spec}(\mathbf{C}[x,y]) = \{(0)\} \cup \{(f) : f \text{ irreduzibel}\} \cup \{(x-x_0, y-y_0) : x_0, y_0 \in \mathbf{C}\}.$$
Die Punkte von $\operatorname{Spec}(\mathbf{C}[x,y])$ stehen also in Bijektion zu den Punkten von $\mathbf{C}^2$, den irreduziblen Kurven $\{f = 0\}$ in $\mathbf{C}^2$ und einem weiteren Punkt (0).

Dieses Beispiel verallgemeinert sich mit entsprechenden Kenntnissen aus der algebraischen Geometrie wie folgt:

Beispiel: Ist $X \subseteq \mathbf{C}^n$ eine affine Untervarietät, so ist $I(X) = \{f \in \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n] : f(X) = 0\}$ ein Primideal. Man erhält so eine Bijektion
$$\{\text{Untervarietäten von } \mathbf{C}^n\} \stackrel{X \mapsto I(X)}{\rightarrow} \operatorname{Spec}(\mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]).$$
Ein Punkt $P = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbf{C}^n$ liefert dabei das maximale Ideal $(x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n)$.

Beispiel: Mit A und B ist auch das direkte Produkt $A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$ (durch koordinatenweises Rechnen) ein Ring. Die Primideale von $A \times B$ haben die Gestalt $\mathfrak{p} \times B$ oder $A \times \mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ und $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B)$. Also kann man schreiben
$$\operatorname{Spec}(A \times B) = \operatorname{Spec}(A) \cup \operatorname{Spec}(B).$$

Wir betrachten jetzt Ringhomomorphismen. Ist $\phi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus, $\mathfrak{b}$ ein Ideal in B, so liefert der Homomorphiesatz eine Inklusion der Faktorringe
$$A/\phi^{-1}(\mathfrak{b}) \hookrightarrow B/\mathfrak{b}.$$
Ist $\mathfrak{b}$ ein Primideal, so mit $B/\mathfrak{b}$ auch $A/\phi^{-1}(\mathfrak{b})$ ein Integritätsring, also auch $\phi^{-1}(\mathfrak{b})$ ein Primideal. Damit ist folgende Definition sinnvoll:

Definition 2. *Für einen Ringhomomorphismus $\phi : A \to B$ sei*
$$\phi^* : \operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A), \quad \mathfrak{q} \mapsto \phi^{-1}(\mathfrak{q}).$$

Beispiel: Die Inklusion $\phi : \mathbf{Z} \to \mathbf{Q}$ liefert
$$\phi^* : \operatorname{Spec}(\mathbf{Q}) \to \operatorname{Spec}(\mathbf{Z}), \quad (0) \mapsto (0).$$

Beispiel: Der Ring $\mathbf{Z}/(4)$ hat nur ein Primideal, nämlich (2). Die Reduktion modulo 2 liefert einen Ringhomomorphismus $\phi : \mathbf{Z}/(4) \to \mathbf{Z}/(2)$. Dies induziert
$$\phi^* : \operatorname{Spec}(\mathbf{Z}/(2)) \to \operatorname{Spec}(\mathbf{Z}/(4)), \quad (0) \mapsto (2),$$
also eine Bijektion.

Beispiel: Wir wollen $\operatorname{Spec}(\mathbf{Z}[i])$ betrachten (mit $i^2 = -1$). Bekanntlich ist auch $\mathbf{Z}[i]$ ein Hauptidealring, insbesondere faktoriell. Die Einheiten sind $\pm 1, \pm i$. Die Primelemente von $\mathbf{Z}[i]$ erhält man durch Zerlegung der Primzahlen $p \in \mathbf{Z}$. Es gibt drei Fälle:

- $2 = (1+i)(1-i) = (-i)(1+i)^2$;
- ist $p \in \mathbf{Z}$ prim und $p \equiv 1 \bmod 4$, so ist p ein Produkt $p = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$; dabei sind $a + bi$ und $a - bi$ nicht assoziiert, d.h. $(a + bi)$ und $(a - bi)$ sind verschiedene Primideale;
- ist $p \in \mathbf{Z}$ prim und $p \equiv 1 \bmod 4$, so ist p auch prim in $\mathbf{Z}[i]$.

Damit erhält man

$$\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[i]) = \{(0)\} \cup \{(1+i)\} \cup \{(a+bi), (a-bi) : p = a^2+b^2, p \equiv 1 \bmod 4\} \cup \{(p) : p \equiv 3 \bmod 4\}.$$

Der Ringhomomorphismus $\phi : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}[i]$ induziert eine Abbildung $\phi^* : \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[i]) \to \mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$, die wie folgt aussieht:

$$\begin{array}{rcll} \phi^*((0)) & = & (0), & \\ \phi^*((1+i)) & = & (2), & \\ \phi^*((a+bi)) = \phi^*((a-bi)) & = & (p), & p = a^2+b^2, p \equiv 1 \bmod 4 \\ \phi^*((p)) & = & (p), & p \equiv 3 \bmod 4. \end{array}$$

Eine wichtige Rolle spielt die Bruchrechnung: Ist A ein Ring und $S \subseteq A$ eine multiplikative Teilmenge ($1 \in S$ und $x, y \in S$ impliziert $xy \in S$), so definiert man

$$S^{-1}A = \{\frac{a}{s} : a \in A, s \in S\}$$

mit der Relation

$$\frac{a_1}{s_1} = \frac{a_2}{s_2} \iff s(s_2 a_1 - s_1 a_2) = 0 \text{ für ein } s \in S.$$

$S^{-1}A$ ist ein Ring und die Abbildung $\phi_S : A \to S^{-1}A, a \mapsto \frac{a}{1}$ ein Ringhomomorphismus. Eine zentrale Eigenschaft ist:

Lemma 1. *Ist $\psi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus, S eine multiplikative Teilmenge von A, so daß $\psi(S) \subseteq B^\times$, d.h. die Elemente aus S werden zu Einheiten in B, dann faktorisiert ψ eindeutig über $S^{-1}A$:*

$$\psi : A \xrightarrow{\phi_S} S^{-1}A \xrightarrow{\tilde{\psi}} B.$$

Die wichtigsten Beispiele für $S^{-1}A$:

1. Ist A ein Integritätsring, so ist $S = A \setminus \{0\}$ multiplikativ. $S^{-1}A$ ist dann einfach der Quotientenkörper $Quot(A)$ von A.
2. Die Bruchrechnung wird einfacher, wenn A ein Integritätsring (mit Quotientenkörper K) ist: Ist S eine multiplikative Teilmenge von A mit $0 \notin S$, so ist
$$S^{-1}A = \{\frac{a}{s} \in K : a \in A, s \in S\}.$$
3. Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal von A, so ist $S = A \setminus \mathfrak{p}$ multiplikativ. $S^{-1}A$ wird dann als Lokalisierung $A_\mathfrak{p}$ von A in $\mathfrak{p}$ bezeichnet:
$$A_\mathfrak{p} = \{\frac{a}{s} : a, s \in A, s \notin \mathfrak{p}\}.$$
$A_\mathfrak{p}$ ist ein lokaler Ring, d.h. hat genau ein maximales Ideal, nämlich $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$.
4. Ist $f \in A$, so ist $S = \{1, f, f^2, f^3, f^4, \ldots\}$ eine multiplikative Teilmenge von A. $S^{-1}A$ wird auch als A_f geschrieben:
$$A_f = \{\frac{a}{f^n} : n \geq 0\}.$$

Sei jetzt wieder A ein Ring und S eine multiplikative Teilmenge. Für die Primideale hat man folgende Aussagen:

- Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal in A mit $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$, so ist
$$S^{-1}\mathfrak{p} = \{\frac{a}{s} : a \in \mathfrak{p}, s \in S\}$$
ein Primideal in $S^{-1}A$. Außerdem gilt dann
$$\phi_S^{-1}(S^{-1}\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}.$$
- Ist $\mathfrak{q}$ ein Primideal in $S^{-1}A$, so ist $\phi_S^{-1}\mathfrak{q}$ ein Primideal in A mit $\phi_S^{-1}\mathfrak{q} \cap S = \emptyset$.

Damit erhält man den Satz:

Satz 1. *Ist $S \subseteq A$ eine multiplikative Teilmenge des Rings A, so ist*

$$\mathrm{Spec}(S^{-1}A) \to \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) : \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}, \quad \mathfrak{q} \mapsto \phi^{-1}\mathfrak{q}$$

eine Bijektion. Die Umkehrabbildung ist $\mathfrak{p} \mapsto S^{-1}\mathfrak{p}$.

Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal von A, so gilt für ein Primideal $\mathfrak{q}$:

$$\mathfrak{q} \cap (A \setminus \mathfrak{p}) = \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p},$$

woraus sich als Folgerung ergibt:

Folgerung 1. *Für $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ hat man eine Bijektion*

$$\mathrm{Spec}(A_\mathfrak{p}) \leftrightarrow \{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A) : \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

Beispiel: Sei $A = \mathbf{C}[x, y]$ und $\mathfrak{p} = (x - x_0, y - y_0)$. Ein Primideal $\mathfrak{q} = (x - x_1, y - y_1)$ ist nur dann in $\mathfrak{p}$ enthalten, wenn bereits $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$ gilt. Ein Primideal $\mathfrak{q} = (f(x, y))$ ist genau dann in $\mathfrak{p}$ enthalten, wenn $f(x_0, y_0) = 0$ gilt. Also haben wir in diesem Fall

$$\mathrm{Spec}(A_\mathfrak{p}) \leftrightarrow \{(0)\} \cup \{(f(x, y)) : f(x, y) \text{ irreduzibel und } f(x_0, y_0) = 0\} \cup \{(x - x_0, y - y_0)\}.$$

Beim Lokalisieren bleiben also im wesentlichen nur die Kurven durch (x_0, y_0) übrig.

Ist $f \in A$ und $\mathfrak{p}$ ein Primideal, so gilt $\{1, f, f^2, \ldots\} \cap \mathfrak{p} = \emptyset$ genau dann, wenn $f \notin \mathfrak{p}$, d.h. $f \not\equiv 0 \mod \mathfrak{p}$. Damit ergibt sich:

Folgerung 2. *Für $f \in A$ haben wir eine Bijektion*

$$\mathrm{Spec}(A_f) \leftrightarrow \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) : f \notin \mathfrak{p}\}.$$

Beispiel: Sei $A = \mathbf{C}[x, y]$ und $f(x, y)$ ein Polynom. Dann erhält man eine Bijektion

$$\mathrm{Spec}(A_f) \to \{(0)\} \cup \{g(x, y) \text{ irreduzibel mit } f \not\equiv 0 \mod g\} \cup \{(x - x_0, y - y_0) : f(x_0, y_0) \neq 0\}.$$

Wir wollen jetzt die Elemente von A als Funktionen auf $\mathrm{Spec}(A)$ interpretieren. Was soll $f(\mathfrak{p})$ sein, für $f \in A$ und $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$? Für $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ ist $A/\mathfrak{p}$ ein Integritätsring. Der Quotientenkörper $Quot(A/\mathfrak{p})$ heißt der Restklassenkörper in $\mathfrak{p}$ und wird auch mit $k(\mathfrak{p})$ bezeichnet. Man hat also $A/\mathfrak{p} \subseteq k(\mathfrak{p})$. Für $f \in A$ bezeichnet man die Restklasse von f modulo $\mathfrak{p}$ mit $f(\mathfrak{p})$, d.h. $A \to A/\mathfrak{p} \subseteq k(\mathfrak{p}), f \mapsto f(\mathfrak{p})$. Dadurch kann man die Elemente von A als Funktionen auf $\mathrm{Spec}(A)$ auffassen. Allerdings variiert der Wertebereich mit $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$.

$$f : \mathfrak{p} \mapsto f(\mathfrak{p}) \in k(\mathfrak{p}).$$

Beispiel: Im Fall $A = \mathbf{Z}$ ist $k((0)) = \mathbf{Q}$ und $k((p)) = \mathbf{Z}/(p) = \mathbf{F}_p$.

Beispiel: $A = \mathbf{C}[x]$. Zunächst ist $k((0)) = \mathbf{C}(x)$, der rationale Funktionenkörper. Für $\mathfrak{p} = (x - x_0)$ ist $A/\mathfrak{p} \simeq \mathbf{C}$ vermöge $f(x) \mapsto f(x_0)$. Also ist hier $k(\mathfrak{p}) = \mathbf{C}$.

Ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal in A, so heißt

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \{f \in A : f^n \in \mathfrak{a} \text{ für ein } n \geq 1\}$$

das Radikalideal von $\mathfrak{a}$. Für ein Primideal $\mathfrak{p}$ gilt natürlich $\sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$. Das Radikalideal $\sqrt{(0)}$ besteht genau aus den nilpotenten Elementen von A und heißt das Nilradikal von A. Wir erinnern an folgenden Satz:

Satz 2. *Für ein Ideal $\mathfrak{a}$ von A hat man:*

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \cap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A), \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}} \mathfrak{p},$$

insbesondere ist das Nilradikal der Durchschnitt aller Elemente von $\mathrm{Spec}(A)$.

Wir wenden dies an: Sei $f \in A$. f liefert auf $\mathrm{Spec}(A)$ genau dann die Nullfunktion, wenn $f \in \mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ gilt. Das ist nach dem letzten Satz gleichwertig damit, daß f nilpotent ist.

Wir wollen nun eine Topologie auf $\mathrm{Spec}(A)$ einführen. Für eine Teilmenge $M \subseteq A$ definieren wir

$$V(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) : M \subseteq \mathfrak{p}\},$$

d.h. $V(M)$ besteht aus allen Primidealen, die M enthalten. Für ein Primideal $\mathfrak{p}$ gilt $M \subseteq \mathfrak{p} \iff (M) \subseteq \mathfrak{p}$, wo (M) das von M erzeugte Ideal bezeichnet. Also ist $V(M) = V((M))$.

Lemma 2. 1. *$V(\{1\})=\emptyset$ und $V(\{0\})=\mathrm{Spec}(A)$.*
2. *Für beliebige Teilmengen $M_i \subseteq A, i \in I$ gilt:*
$$\cap_{i\in I} V(M_i) = V(\cup_{i\in I} M_i).$$
3. *Für Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gilt:*
$$V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}),$$
wo $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ das Produkt der Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bezeichnet.

Beweis:
1. Klar.
2. Klar.
3. $\subseteq$: Ist $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$, so $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{a}\mathfrak{b}$, also $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$ und analog für $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{b})$.
$\supseteq$: Sei $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$. Ist $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$, so sind für fertig. Sei also $\mathfrak{p} \notin V(\mathfrak{a})$, d.h. $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}$. Also gibt es ein $a \in \mathfrak{a}$ mit $a \notin \mathfrak{p}$. Sei $b \in \mathfrak{b}$ beliebig. Dann ist $ab \in \mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$, also nach der Primidealeigenschaft von $\mathfrak{p}$ dann $b \in \mathfrak{p}$. Somit $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$, d.h. $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{b})$. ■

Daher erfüllt
$$\{V(M) \subseteq \mathrm{Spec}(A) : M \subseteq A\}$$
das Axiomensystem für die Menge der abgeschlossenen Teilmengen einer Topologie auf $\mathrm{Spec}(A)$.

Definition 3. *Die Topologie auf $\mathrm{Spec}(A)$, so daß genau die Mengen der Gestalt $V(M)$ für $M \subseteq A$ abgeschlossen sind, heißt Zariski-Topologie auf $\mathrm{Spec}(A)$. Wir denken uns fortan $\mathrm{Spec}(A)$ mit dieser Topologie versehen.*

Beispiel: Sei A ein Hauptidealring und $\{p_i : i \in I\}$ ein Repräsentantensystem der Primelemente. Was sind die abgeschlossenen Teilmengen von $\mathrm{Spec}(A)$? Jedes Ideal von A ist Hauptideal, also hat jede abgeschlossene Menge von $\mathrm{Spec}(A)$ die Gestalt $V(f)$ für ein $f \in A$.
- Ist $f = 0$, so ist $V(f) = \mathrm{Spec}(A)$.
- Ist $f \neq 0$, so hat f eine Primfaktorzerlegung $f = u \cdot \prod_{i\in I} p_i^{e_i}$, wobei nur endlich viele e_i von 0 verschieden sind und u eine Einheit ist. Es gilt:
$$V(f) = V(\prod_{i\in I} p_i^{e_i}) = \cup_{e_i \geq 1}\{(p_i)\}.$$

Neben $\mathrm{Spec}(A)$ bestehen die abgeschlossenen Mengen also aus endlich vielen Punkten der Gestalt (p_i).

Lemma 3. 1. *Für Teilmengen $M, N \subseteq A$ gilt*
$$M \subseteq N \quad \Rightarrow \quad V(N) \subseteq V(M).$$
2. *Für ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ gilt:*
$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \cap V(\mathfrak{a}) \quad \text{und} \quad V(\mathfrak{a}) = V(\sqrt{\mathfrak{a}}).$$
3. *Für Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq A$ gilt:*
$$V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\mathfrak{b}) \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{\mathfrak{b}} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}.$$

Beweis:
1. Klar.
2. Dies ist nur eine Umformulierung eines früheren Satzes.
3. $\Rightarrow$: Dies folgt aus 2., $\Leftarrow$ folgt aus 1. ■

Für $f \in A$ schreiben wir $V(f) = V(\{f\})$. Wegen $(f) \subseteq \mathfrak{p} \iff f \in \mathfrak{p} \iff f(\mathfrak{p}) = 0$ können wir auch schreiben:
$$V(f) = \{f \in \mathrm{Spec}(A) : f(\mathfrak{p}) = 0\},$$
d.h. $V(f)$ ist die Nullstellenmenge von f.
Für eine Teilmenge $M \subseteq A$ gilt also:
$$V(M) = \cap_{f\in M} V(f) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) : f(\mathfrak{p}) = 0 \text{ für alle } f \in M\}.$$

Ist $U \subseteq \mathrm{Spec}(A)$ offen, so gibt es M mit

$$U = \mathrm{Spec}(A) \setminus V(M) = \mathrm{Spec}(A) \setminus \cap_{f \in M} V(f) = \cup_{f \in M} (\mathrm{Spec}(A) \setminus V(f)).$$

Für $f \in A$ heißt $D(f) = \mathrm{Spec}(A) \setminus V(f)$ eine basisoffene Menge. Jede offene Menge ist also Vereinigung von basisoffenen Mengen. Wir können noch anders schreiben:

$$D(f) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) : f(\mathfrak{p}) \neq 0\}.$$

$D(f)$ ist also die Menge der Punkten, wo f nicht 0 wird.

Satz 3. $\mathrm{Spec}(A)$ *ist kompakt.*

Beweis: Sei $\cup_{i \in I} U_i = \mathrm{Spec}(A)$ eine offene Überdeckung von $\mathrm{Spec}(A)$. Wir müssen zeigen, daß schon endlich viele U_i zur Überdeckung genügen. Da jedes U_i Vereinigung basisoffener Mengen $D(f)$ ist, können wir o.E. mit einer Überdeckung $\mathrm{Spec}(A) = \cup_{j \in J} D(f_j)$ starten. Damit wird

$$V((f_j : j \in J)) = \cap_{j \in J} V(f_j) = \cap_{j \in J}(\mathrm{Spec}(A) \setminus D(f_j)) = \emptyset.$$

Das Ideal $(f_j : j \in J)$ ist also in keinem maximalen Ideal enthalten, d.h. $(f_j : j \in J) = A$. Wegen $1 \in A$ erhält man also eine endliche Linearkombination

$$1 = f_{i_1} g_1 + \cdots + f_{i_r} g_r.$$

Damit folgt wiederum $(f_{i_1}, \ldots, f_{i_r}) = A$ und damit schließlich wie eben

$$\mathrm{Spec}(A) = D(f_{i_1}) \cup \cdots \cup D(f_{i_r}),$$

d.h. wir haben eine endliche Überdeckung. ■

Wir wollen jetzt den (topologischen) Abschluß eines Punktes $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ bestimmen. $\overline{\{\mathfrak{p}\}}$ ist der Durchschnitt aller abgeschlossener Mengen $V(M)$, die $\mathfrak{p}$ enthalten. Es gilt: $\mathfrak{p} \in V(M) \iff M \subseteq \mathfrak{p}$, insbesondere $V(\mathfrak{p}) \subseteq V(M)$. Daraus ergibt sich sofort:

Lemma 4.

$$\overline{\{\mathfrak{p}\}} = V(\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A) : \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}\},$$

d.h. der Abschluß von $\mathfrak{p}$ besteht aus allen Primidealen, die $\mathfrak{p}$ enthalten.

Folgerung 3. *Ein Punkt $\mathfrak{p} \in Spec(A)$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal in A ist.*

Damit ist sofort klar, daß $\mathrm{Spec}(A)$ fast nie ein Hausdorffraum ist, da in einem Hausdorffraum die Punkte abgeschlossen sind.

Definition 4. *Ein Punkt P eines topologischen Raums X heißt ein generischer Punkt von X, falls der Abschluß von P ganz X ist, d.h. $\overline{\{P\}} = X$.*

Beispiel: Ist A ein Integritätsring, so enthält jedes Primideal $\mathfrak{p}$ das Primideal (0), d.h. $V((0)) = \mathrm{Spec}(A)$, also ist (0) ein generischer Punkt von $\mathrm{Spec}(A)$. Insbesondere ist $\mathrm{Spec}(A)$ kein Hausdorffraum.

Beispiel: Wir betrachten $\mathrm{Spec}(\mathbf{C}[x,y]/(xy))$. Die Primideale von $\mathbf{C}[x,y]/(xy)$ stehen in Bijektion zu den Primidealen von $\mathbf{C}[x,y]$, die das Element xy enthalten. Daher können wir schreiben:

$$\mathrm{Spec}(\mathbf{C}[x,y]/(xy)) \leftrightarrow \{(x),(y)\} \cup \{(x-a,y),(x,y-b) : a,b \in \mathbf{C}\}.$$

Dann ist

$$\overline{\{(x)\}} = \{(x)\} \cup \{(x, y-b) : b \in \mathbf{C}\} \text{ und } \overline{\{(y)\}} = \{(y)\} \cup \{(x-a, y) : a \in \mathbf{C}\},$$

insbesondere besitzt $\mathrm{Spec}(\mathbf{C}[x,y]/(xy))$ keinen generischen Punkt. Es gilt aber $\mathrm{Spec}(\mathbf{C}[x,y]/(xy)) = V(x) \cup V(y)$, d.h. $\mathrm{Spec}(\mathbf{C}[x,y]/(xy))$ ist reduzibel.

Zur Erinnerung:

Definition 5. *Ein topologischer Raum X heißt reduzibel, wenn es abgeschlossene Mengen $X_1, X_2 \subseteq X$ gibt mit*

$$X = X_1 \cup X_2 \textit{ und } \emptyset \neq X_1, X_2 \neq X.$$

Es gilt das folgende Lemma:

LEMMA 5. 1. *Für* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ *ist* $\overline{\{\mathfrak{p}\}} = V(\mathfrak{p})$ *irreduzibel und* $\mathfrak{p}$ *ist generischer Punkt von* $V(\mathfrak{p})$.
2. *Ist* $X \subseteq \operatorname{Spec}(A)$ *abgeschlossen und irreduzibel, so besitzt* X *einen generischen Punkt, d.h. es gibt* $\mathfrak{p}$ *mit* $X = V(\mathfrak{p})$. *Der generische Punkt von* X *ist eindeutig bestimmt.*

Durch $\mathfrak{p} \mapsto V(\mathfrak{p})$ erhält man also eine Bijektion von $\operatorname{Spec}(A)$ mit den abgeschlossenen und irreduziblen Teilmengen von $\operatorname{Spec}(A)$.

Beweis:
1. Wir wissen bereits: $\overline{\{\mathfrak{p}\}} = V(\mathfrak{p})$. Außerdem ist $V(\mathfrak{p})$ abgeschlossen in $\operatorname{Spec}(A)$. Gibt es eine Zerlegung $V(\mathfrak{p}) = X_1 \cup X_2$, wo X_1, X_2 abgeschlossen in $V(\mathfrak{p})$ und damit in $\operatorname{Spec}(A)$ sind, so ist o.E. $\mathfrak{p} \in X_1$ und damit $\overline{\{\mathfrak{p}\}} \subseteq X_1$, was sofort $V(\mathfrak{p}) = X_1$ liefert, d.h. $V(\mathfrak{p})$ ist irreduzibel.
2. Sei $X \subseteq \operatorname{Spec}(A)$ abgeschlossen und irreduzibel. Da X abgeschlossen ist, gibt es ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ mit $X = V(\mathfrak{a})$. Wegen $V(\mathfrak{a}) = V(\sqrt{\mathfrak{a}})$ können wir annehmen, daß $\mathfrak{a}$ ein Radikalideal ist, d.h. $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$. Wir wollen zeigen, daß $\mathfrak{a}$ ein Primideal ist. Seien $f, g \in A$ mit $fg \in \mathfrak{a}$. Dann gilt $X = V(\mathfrak{a}) \subseteq V(fg) = V(f) \cup V(g)$. Da X irreduzibel ist, gilt o.E. $X \subseteq V(f)$ und damit $\sqrt{(f)} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$, insbesondere $f \in \mathfrak{a}$. Da X nicht leer ist, ist $\mathfrak{a} \neq A$, also ist $\mathfrak{a}$ tatsächlich ein Primideal. Wegen $X = V(\mathfrak{a}) = \overline{\{\mathfrak{a}\}}$ ist $\mathfrak{a}$ generischer Punkt von X. Ist $\mathfrak{p}$ ein weiterer generischer Punkt von X, so gilt $V(\mathfrak{p}) = X = V(\mathfrak{a})$, also $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$, d.h. $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}$, der generische Punkt ist also eindeutig bestimmt. ■

Da der Durchschnitt aller Primideale von A das Nilradikal $\sqrt{(0)}$ von A ist, erhält man sofort:

LEMMA 6. $\operatorname{Spec}(A)$ *hat genau dann einen generischen Punkt, wenn das Nilradikal prim ist.*

Bemerkung: Ist A ein noetherischer Ring, so hat A endlich viele minimale Primideale $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$. Es gilt dann
$$\operatorname{Spec}(A) = V(\mathfrak{p}_1) \cup \dots \cup V(\mathfrak{p}_r),$$
wobei diese Zerlegung in irreduzible abgeschlossene Menge im wesentlichen eindeutig ist. (Zerlegung in irreduzible Komponenten)

Wir erinnern an einen weiteren topologischen Begriff:

DEFINITION 6. *Sei* X *ein topologischer Raum. Dann heißt*
$$\sup\{n : \text{ es gibt eine Kette } X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_n \text{ von irreduziblen abgeschlossenen Mengen } X_i\}$$
die Dimension von X.

Da die irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen von $\operatorname{Spec}(A)$ genau die Teilmengen der Gestalt $V(\mathfrak{p})$ sind mit $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$, gilt
$$\dim \operatorname{Spec}(A) = \dim A,$$
wobei wir wieder erinnern an folgende Definition:

DEFINITION 7. *Die Zahl*
$$\sup\{n : \text{ es gibt eine Kette } \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_n \text{ von Primidealen } \mathfrak{p}_i\}$$
heißt die Dimension $\dim A$ *von* A.

Beispiel: Ist A Hauptidealring, so gilt $\dim \operatorname{Spec}(A) = 1$. Insbesondere $\dim \operatorname{Spec}(\mathbf{Z}) = 1$ und $\dim \operatorname{Spec}(k[x]) = 1$, wo k ein Körper ist.

Beispiel: (Ohne Beweis) Ist A noetherscher Ring, so gilt für den Polynomring
$$\dim A[x_1, \dots, x_n] = \dim A + n.$$
Wir wollen schließlich noch Ringhomomorphismen anschauen.

LEMMA 7. *Ist* $\phi : A \to B$ *ein Ringhomomorphismus, so ist*
$$\phi^* : \operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$$
stetig.

Beweis: Sei $V(M) \subseteq \mathrm{Spec}(A)$ eine abgeschlossene Menge. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} \in \phi^{*-1}V(M) &\iff \phi^*(\mathfrak{p}) \in V(M) \iff \phi^{-1}(\mathfrak{p}) \in V(M) \iff \\ &\iff M \subseteq \phi^{-1}(\mathfrak{p}) \iff \phi(M) \subseteq \mathfrak{p} \iff \\ &\iff \mathfrak{p} \in V(\phi(M)), \end{aligned}$$

und damit

$$\phi^{*-1}(V(M)) = V(\phi(M)),$$

d.h. das Urbild einer abgeschlossenen Menge ist wieder abgeschlossen. Also ist ϕ^* stetig. ∎

Wir betrachten ein paar Beispiele.

LEMMA 8. *Ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal in A, so liefert $\phi : A \to A/\mathfrak{a}$ einen Homöomorphismus von* $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a})$ *mit* $V(\mathfrak{a})$.

Beweis: Da die Ideale von $A/\mathfrak{a}$ in Bijektion stehen zu den Idealen von A, die $\mathfrak{a}$ enthalten, liefert die Abbildung $\phi^* : \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a}) \to \mathrm{Spec}(A)$ zunächst eine Bijektion von $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a})$ mit $V(\mathfrak{a})$. Da sich die abgeschlossenen Teilmengen von $V(\mathfrak{a})$ als $V(\mathfrak{b})$ schreiben lassen, wo $\mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{a}$ ein Ideal ist, entsprechen sich auch die abgeschlossenen Teilmengen, d.h. wir erhalten einen Homöomorphismus. ∎

Jede abgeschlossene Teilmenge von $\mathrm{Spec}(A)$ hat die Gestalt $V(\mathfrak{a})$ mit einem Ideal $\mathfrak{a}$. Daher folgt sofort:

FOLGERUNG 4. *Jede abgeschlossene Teilmenge von* $\mathrm{Spec}(A)$ *ist homöomorph zum Spektrum eines Ringes* $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a})$.

LEMMA 9. *Ist S eine multiplikative Teilmenge von A, so induziert $\phi_S : A \to S^{-1}A$ einen Homöomorphismus von* $\mathrm{Spec}(S^{-1}A)$ *mit* $U_S = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) : \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}$.

Beweis: Wir haben die beiden Abbildungen

$$\alpha : \mathrm{Spec}(S^{-1}A) \to U_S, \quad \mathfrak{q} \mapsto \phi_S^{-1}\mathfrak{q} \quad \text{und} \quad \beta : U_S \to \mathrm{Spec}(S^{-1}A), \quad \mathfrak{p} \mapsto S^{-1}\mathfrak{p},$$

wobei wir bereits wissen, daß α und β invers zueinander sind. Außerdem wissen wir, daß α stetig ist. Es bleibt zu zeigen, daß auch β stetig ist. Sei $\mathfrak{b}$ ein Ideal in $S^{-1}A$. Es gilt dann für $\mathfrak{p} \in U_S$:

$$\mathfrak{p} \in \beta^{-1}(V(\mathfrak{b})) \iff S^{-1}\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{b}) \iff \mathfrak{b} \subseteq S^{-1}\mathfrak{p} \iff \phi_S^{-1}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p},$$

also $\beta^{-1}(V(\mathfrak{b})) = V(\phi_S^{-1}(\mathfrak{b})) \cap U_S$, woraus alles folgt. ∎

Für $f \in A$ ist $S = \{1, f, f^2, f^3, \ldots\}$ multiplikativ und mit den Bezeichnungen von eben $U_S = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) : f \notin \mathfrak{p}\} = D(f)$. Damit folgt:

FOLGERUNG 5. *Die basisoffene Menge $D(f)$ ist homöomorph zu* $\mathrm{Spec}(A_f)$.

KAPITEL 2

Garben

Wir haben Spec(A) definiert und mit einer Topologie versehen. Zur Einführung einer weiteren Struktur brauchen wir den Garbenbegriff.

DEFINITION 8. *Sei X ein topologischer Raum. Eine Prägarbe $\mathcal{F}$ (von abelschen Gruppen) auf X besteht aus folgenden Dingen:*

- *Für jede offene Menge $U \subseteq X$ hat man eine abelsche Gruppe $\mathcal{F}(U)$.*
- *Für je zwei offene Mengen U, V mit $V \subseteq U$ gibt es einen Gruppenhomomorphismus $\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$.*
- *$\mathcal{F}(\emptyset) = 0$, die triviale abelsche Gruppe.*
- *ρ_{UU} ist die Identität auf U.*
- *Für drei offene Mengen $W \subseteq V \subseteq U$ gilt $\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$.*

Analog definiert man auch eine Prägarbe von Ringen, Prägarbe von Mengen, etc.

Beispiel: Sei X ein topologischer Raum und A eine abelsche Gruppe. Für eine offene Menge $U \subseteq X$ sei $\mathcal{F}(U)$ die Menge der Abbildungen von U in A. Durch punktweise Addition wird $\mathcal{F}(U)$ zu einer abelschen Gruppe. Für $V \subseteq U$ sei ρ_{UV} die Einschränkungsabbildung, d.h. für $f \in \mathcal{F}(U)$ ist $\rho_{UV}(f) = f|_V$. Setzt man noch $\mathcal{F}(\emptyset) = \{0\}$, dann ist klar, daß $\mathcal{F}$ eine Prägarbe von abelschen Gruppen auf X ist.

Im Allgemeinfall spricht man auch bei ρ_{UV} von Einschränkungsabbildung. Ebenso schreibt man für $f \in \mathcal{F}(U)$ und $V \subseteq U$ auch manchmal $f|_V = \rho_{UV}(f)$. Die Elemente von $\mathcal{F}(U)$ werden auch als Schnitte von $\mathcal{F}$ über U bezeichnet. Desweiteren findet man die Schreibweise $\Gamma(\mathcal{F}, U) = \mathcal{F}(U)$.

Beispiel: Ist X ein topologischer Raum, $\mathcal{F}(U)$ die Menge der stetigen reellwertigen Funktionen auf U, wo $U \subseteq X$ offen ist, ρ_{UV} die gewöhnliche Einschränkungsabbildung, so ist $\mathcal{F}$ eine Prägarbe, die sogenannte Prägarbe der stetigen (reellwertigen) Funktionen auf X.

Beispiel: Ist X eine Riemannsche Fläche, z.B. $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}^*$, $\mathbf{P}^1$, so erhält man die Prägarbe der holomorphen Funktionen auf X, wenn man für $\mathcal{F}(U)$ die Menge der auf U holomorphen Funktionen nimmt.

Beispiel: Sei X ein topologischer Raum und A eine abelsche Gruppe. Setzt man $\mathcal{F}(U) = A$ (für $U \neq \emptyset$) und $\rho_{UV} = id_A$, so erhält man die sogenannte konstante Prägarbe.

Beispiel: Sei $X = \{P, Q\}$, so daß P und Q abgeschlossene Punkte sind. Eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf X erhalten wir dann durch Angabe von $\mathcal{F}(\{P, Q\})$, $\mathcal{F}(\{P\})$ und $\mathcal{F}(\{Q\})$ sowie zwei Homomorphismen $\mathcal{F}(\{P, Q\}) \to \mathcal{F}(\{P\})$ $\mathcal{F}(\{P, Q\}) \to \mathcal{F}(\{Q\})$. Z.B. $\mathcal{F}(\{P, Q\}) = \mathbf{Z}$, $\mathcal{F}(\{P\}) = \mathbf{Q}$, $\mathcal{F}(\{Q\}) = \mathbf{Z}/(2)$.

Beispiel: Sei X eine algebraische Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k. Für eine offene Menge $U \subseteq X$ ist eine Funktion $f : U \to k$ regulär auf U, wenn sie sich lokal als Quotient von Polynomen schreiben läßt. Ist $\mathcal{O}(U)$ die Menge der auf U regulären Funktionen, so erhält man die Prägarbe der regulären Funktionen auf X. Dies ist eine Prägarbe von Ringen auf X. Wir wissen: Ist X eine affine Varietät, d.h. eine abgeschlossene Teilmenge eines affinen Raums, so ist $\mathcal{O}(X) = k[X] = k[x_1, \ldots, x_n]/I(X)$, der affine Koordinatenring; ist X eine projektive Varietät, d.h. eine abgeschlossene Teilmenge eines projektiven Raums, so ist $\mathcal{O}(X) = k$.

Für einen Integritätsring A wollen wir jetzt eine Prägarbe $\tilde{\mathcal{O}}$ von Ringen auf Spec(A) definieren. Sei K der Quotientenkörper von A. Ein $f \in K$ heißt definiert in $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$, wenn es $a, b \in A$ gibt mit $f = \frac{a}{b}$

und $b(\mathfrak{p}) \neq 0$, d.h. $b \notin \mathfrak{p}$. Definiert man jetzt

$$\tilde{\mathcal{O}}(U) = \{f \in K : f \text{ ist definiert in } \mathfrak{p} \text{ für alle } \mathfrak{p} \in U\},$$

nimmt man für ρ_{UV} die Einschränkung, so ist klar, daß $\tilde{\mathcal{O}}(U)$ eine Prägarbe von Ringen auf $\mathrm{Spec}(A)$ ist. Wir haben hier $A \subseteq \tilde{\mathcal{O}}(U) \subseteq K$ für $U \neq \emptyset$. Was ist $\tilde{\mathcal{O}}(\mathrm{Spec}(A))$?
Sei $f \in \tilde{\mathcal{O}}(\mathrm{Spec}(A)) \subseteq K$. Wir betrachten das Nennerideal von f, nämlich $\mathfrak{a} = \{s \in A : sf \in A\}$. Angenommen, es wäre $\mathfrak{a} \neq A$. Dann gäbe es ein $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, sogar ein maximales Ideal, mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$. Da f in $\mathfrak{p}$ definiert ist, gibt es $a, s \in A$ mit $f = \frac{a}{s}$ und $s(\mathfrak{p}) \neq 0$, also $s \in \mathfrak{a}$ und $s \notin \mathfrak{p}$, ein Widerspruch. Folglich ist $\mathfrak{a} = A$, damit $1 \in \mathfrak{a}$, also $f \in A$. Damit haben wir bewiesen:

LEMMA 10. *Für einen Integritätsring A gilt:*

$$\tilde{\mathcal{O}}(\mathrm{Spec}(A)) = A.$$

Bemerkung: Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf X. Mitunter hat man lokal Daten gegeben, z.B. $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$, wo $\cup_{i \in I} U_i = X$ eine offene Überdeckung von X ist, und sucht dazu einen globalen Schnitt $s \in \mathcal{F}(X)$ mit $s|_{U_i} = s_i$. Eine notwendige Bedingung ist dann:

$$s_i|_{U_i \cap U_j} = s|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}.$$

Prägarben, die unter dieser Voraussetzung ein eindeutig bestimmtes s liefern, sind besonders wichtig:

DEFINITION 9. *Eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf einem topologischen Raum X ist eine Garbe, falls gilt:*
1. *Ist U eine offene Menge und $U = \cup_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von U, ist $s \in \mathcal{F}(U)$ und $s|_{U_i} = 0$ für alle $i \in I$, so gilt $s = 0$.*
2. *Ist U eine offene Menge und $U = \cup_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von U, sind $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ mit $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ für alle $i, j \in I$, so gibt es ein $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $s_i = s|_{U_i}$ für alle $i \in I$.*

Beispiele:
1. Die Prägarbe $\mathcal{F}$ auf X, wo $\mathcal{F}(U)$ die Menge der Abbildungen von X in eine abelsche Gruppe A ist, ist eine Garbe.
2. Die Prägarbe der stetigen reellwertigen Funktionen auf einem topologischen Raum ist eine Garbe.
3. Die Prägarbe der holomorphen Funktionen auf einer Riemannschen Fläche X ist eine Garbe.
4. Die Prägarbe der regulären Funktionen auf einer algebraischen Varietät X ist eine Garbe; sie heißt die Garbe $\mathcal{O}_X$ der regulären Funktionen auf X.

Gegenbeispiele:
1. Sei X ein topologischer Raum, der zwei offene nichtleere disjunkte Teilmengen U und V besitzt. Dann ist die konstante Prägarbe $\mathcal{F}$ mit Werten in einer abelschen Gruppe $A \neq 0$ keine Garbe.
2. Sei $X = \{P, Q\}$, wobei beide Punkte abgeschlossen sind. Setzt man $\mathcal{F}(X) = \mathbf{Z}$ und $\mathcal{F}(\{P\}) = \mathcal{F}(\{Q\}) = \mathbf{Z}/(2)$, so sind beide Garbenaxiome verletzt.

Beide Gegenbeispiele fallen unter folgendes Lemma:

LEMMA 11. *Ist $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X, sind U und V offene disjunkte Teilmengen von X, so gilt*

$$\mathcal{F}(U \cup V) \simeq \mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{F}(V).$$

Beweis: Wir betrachten die Abbildung

$$\mathcal{F}(U \cup V) \to \mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{F}(V), \quad f \mapsto (f|_U, f|_V).$$

Die beiden Garbenaxiome liefern wegen $U \cap V = \emptyset$ sofort, daß diese Abbildung ein Isomorphismus ist. ∎

LEMMA 12. *Für einen Integritätsring A ist die Prägarbe $\tilde{\mathcal{O}}$ auf* $\mathrm{Spec}(A)$ *eine Garbe.*

Beweis: Für jede offene Menge $\emptyset \neq U \subseteq \mathrm{Spec}(A)$ gilt: $A \subseteq \tilde{\mathcal{O}}(U) \subseteq K$. Liegt ein $f \in K$ in $\tilde{\mathcal{O}}(U)$, d.h. es ist in allen Punkten von U definiert, so gilt auch $f \in \tilde{\mathcal{O}}(V) \subseteq K$ für $\emptyset \neq V \subseteq U$; ist $f = 0$ in $\tilde{\mathcal{O}}(V)$, so gilt schon $f = 0$ in K, also auch in $\tilde{\mathcal{O}}(U)$. Daraus folgt insbesondere die erste Garbeneigenschaft. Sei nun eine Überdeckung $U = \cup_{i \in I} U_i$ gegeben mit $U_i \neq \emptyset$ und $f_i \in \tilde{\mathcal{O}}(U_i)$ mit $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$. Alle f_i's können wir als Elemente von K auffassen. Da $\mathrm{Spec}(A)$ irreduzibel ist, schneiden sich zwei offene nichtleere Mengen immer, d.h. $f_i = f_j \in K$ für alle $i, j \in I$. Damit hat man sofort ein globales Element, das die zweite Garbeneigenschaft liefert. ∎

Beispiel: Sei X ein topologischer Raum und A eine abelsche Gruppe. Wir versehen A mit der diskreten Topologie, d.h. alle Elemente von A sind offen und abgeschlossen, und setzen

$$\mathcal{G}(U) = \{f : X \to A \text{ stetig}\}.$$

Dann erhält man eine Garbe $\mathcal{G}$, die sogenannte konstante Garbe auf X mit Werten in A. Die Funktionen auf $\mathcal{G}(U)$ sind lokal konstant.

Wir wollen nun den Halm $\mathcal{F}_P$ einer Prägarbe $\mathcal{F}$ in einem Punkt $P \in X$ definieren. Wir geben eine explizite Konstruktion:

1. Wir betrachten folgende Menge von Paaren:
$$M = \{(s, U) : U \text{ ist offene Umgebung von } P \text{ und } s \in \mathcal{F}(U)\}$$
und führen eine Relation auf M ein:
$$(s_1, U_1) \sim (s_2, U_2) \iff s_1|_V = s_2|_V \text{ für eine offene Umgebung } V \text{ von } P \text{ mit } V \subseteq U_1 \cap U_2.$$
Man sieht schnell, daß dies eine Äquivalenzrelation ist. Die Menge der Äquivalenzklassen ist der Halm $\mathcal{F}_P$ von $\mathcal{F}$ in P. Das Bild von $s \in \mathcal{F}(U)$ in $\mathcal{F}_P$ heißt der Keim in s in P und wird mit $\rho_{UP}(s)$ bezeichnet.
2. Wie addiert man zwei Elemente $s_P, t_P \in \mathcal{F}_P$? Man wählt sich Repräsentanten (s, U) und (t, V), schränkt diese auf eine offene Umgebung $W \subseteq U \cap V$ von P ein und definiert $s_P + t_P$ als die Äquivalenzklasse von $(s|_W + t|_W, W)$. Natürlich muß man noch zeigen, daß dies wohldefiniert ist. Dadurch wird $\mathcal{F}_P$ zu einer abelschen Gruppe (bzw. zu einem Ring etc.) und $\rho_{UP} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_P$ zu einem Homomorphismus.

Die universelle Eigenschaft des direkten Limes ist Inhalt des folgendes Lemmas:

LEMMA 13. *Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf X und $P \in X$ ein Punkt.*

1. *Für offene Umgebungen U und V von P mit $V \subseteq U$ gilt:*
$$\rho_{UP} = \rho_{VP} \circ \rho_{UV}.$$
2. *Ist A eine abelsche Gruppe und hat man Homomorphismen $f_U : \mathcal{F}(U) \to A$ für alle offenen Umgebungen von P, so daß gilt*
$$f_U = f_V \circ \rho_{UV} \text{ für offene Umgebungen } V \subseteq U,$$
so gibt es genau einen Homomorphismus $f : \mathcal{F}_P \to A$, so daß gilt:
$$f_U = f \circ \rho_{UP} \text{ für alle offenen Umgebungen } U.$$
(Hat man also Homomorphismen $\mathcal{F}(U) \to A$, die mit der Einschränkungsabbildung verträglich sind, so faktorisiert dies eindeutig über $\mathcal{F}_P$: $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_P \to A$.)

Beweis:

1. Für $s \in \mathcal{F}(U)$ sind (s, U) und $(\rho_{UV}(s), V)$ äquivalent, haben also den gleichen Keim in P, d.h. $\rho_{UP}(s) = \rho_{VP}(\rho_{UV}(s))$.
2. *Eindeutigkeit:* Sei $f : \mathcal{F}_P \to A$ ein Homomorphismus mit den entsprechenden Eigenschaften. Sei $s_P \in \mathcal{F}_P$. Dann gibt es eine offene Umgebung U von P und ein $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $s_P = \rho_{UP}(s)$. Wir haben
$$f(s_P) = f(\rho_{UP}(s)) = f_U(s),$$
also ist f durch die f_U's eindeutig bestimmt.
Existenz: Nach dem eben Gezeigten ist klar, wie wir f definieren müssen: $f(s_P) = f_U(s)$, wo $s \in \mathcal{F}(U)$ den Keim s_P hat. Wir müssen nur noch zeigen, daß dies wohldefiniert ist. Hat auch $t \in \mathcal{F}(V)$ den Keim s_P, so gibt es eine offene Umgebung $W \subseteq U \cap V$ von P mit $s|_W = t|_W$. Damit gilt aber:
$$f_U(s) = f_W(s|_W) = f_W(t|_W) = f_V(t),$$
was die Wohldefiniertheit zeigt. ∎

Bemerkung: In der Sprache der direkten Limites sagt man auch so: Die offenen Umgebungen von P bilden bezüglich $\supseteq$ eine gerichtete Menge, d.h. zu zwei offenen Umgebungen U und V gibt es eine weitere offene Umgebung W mit $U \supseteq W$ und $V \supseteq W$. Die Einschränkungsabbildungen $\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ erfüllen $\rho_{UW} = \rho_{UV} \circ \rho_{VW}$ und $\rho_{UU} = id$. Der direkte Limes von $(\mathcal{F}(U), \rho_{UV})$ heißt der Halm $\mathcal{F}_P$ in P.

Beispiele:

1. Ist X eine Riemannsche Fläche, $\mathcal{O}$ die Garbe der regulären Funktionen auf X, so ist $\mathcal{O}_P$ der Ring der konvergenten Potenzreihen.
2. Ist $\mathcal{F}$ die konstante Prägarbe auf X mit Werten in einer abelschen Gruppe A, so ist $\mathcal{F}_P = A$.
3. Ist $\mathcal{G}$ die konstante Garbe auf X mit Werten in einer abelschen Gruppe A, so ist $\mathcal{G}_P = A$.
4. Ist $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf $X = \{P, Q\}$, wo beide Punkte abgeschlossen sind, so ist $\mathcal{F}_P = \mathcal{F}(\{P\})$ und $\mathcal{F}_Q = \mathcal{F}(\{Q\})$.

LEMMA 14. *Für einen Integritätsring A und $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ gilt:*

$$\tilde{\mathcal{O}}_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}}.$$

Beweis: Für $\mathfrak{p} \in U$ ist jedes $f \in \tilde{\mathcal{O}}(U)$ in $\mathfrak{p}$ definiert, also erhalten wir $\tilde{\mathcal{O}}(U) \subseteq A_{\mathfrak{p}}$ bzw. $\tilde{\mathcal{O}}(U) \to A_{\mathfrak{p}}$, was natürlich mit der Einschränkungsabbildung verträglich ist. Dies liefert einen Homomorphismus $\lambda : \tilde{\mathcal{O}}_{\mathfrak{p}} \to A_{\mathfrak{p}}$.
λ ist injektiv: Sei $s_0 \in Kern(\lambda)$. Wähle einen Repräsentanten (s, U) für s_0. Dann ist $s = 0$ in $\tilde{\mathcal{O}}(U) \subseteq A_{\mathfrak{p}} \subseteq K$, also auch $s_0 = 0$.
λ ist surjektiv: Jedes Element aus $A_{\mathfrak{p}}$ hat eine Darstellung $f = \frac{a}{s}$ mit $a, s \in A$ und $s(\mathfrak{p}) \neq 0$. Dann liefert die Äquivalenzklasse von $(f, D(s))$ ein Urbild von f in $\tilde{\mathcal{O}}_{\mathfrak{p}}$. ■

Genauso sieht man: Ist X eine algebraische Varietät, so ist der Halm $\mathcal{O}_{X,P}$ der Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ der lokale Ring von X im Punkt P.

LEMMA 15. *Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X, $U \subseteq X$ offen und $s \in \mathcal{F}(U)$. Dann gilt:*

$$s = 0 \iff \rho_{UP}(s) = 0 \text{ für alle } P \in U,$$

d.h. s ist genau dann 0, wenn alle Keime von s in den Punkten von U verschwinden.

Beweis: Da ρ_{UP} ein Homomorphismus ist, ist $\Rightarrow$ trivial. Wir beweisen $\Leftarrow$: für $P \in U$ ist $\rho_{UP}(s) = 0$, d.h. (s, U) und $(0, U)$ sind äquivalent, also gibt es eine offene Umgebung $U_P \subseteq U$ von P, wo s und 0 übereinstimmen, d.h. $s|_{U_P} = 0$. Aus $U = \cup_{P \in X} U_P$ und der ersten Garbeneigenschaft folgt $s = 0$, was zu zeigen war. ■

Daß die Aussage des Lemmas für Prägarben nicht gelten muß, zeigt folgendes Beispiel:

Beispiel: Wir wählen wie früher $X = \{P, Q\}$ und $\mathcal{F}(X) = \mathbf{Z}$, $\mathcal{F}(\{P\}) = \mathcal{F}(\{Q\}) = \mathbf{Z}/(2)$. Das Element $2 \in \mathcal{F}(X)$ verschwindet dann in $\mathcal{F}_P = \mathbf{Z}/(2)$ und in $\mathcal{F}_Q = \mathbf{Z}/(2)$, ist aber von 0 verschieden.

DEFINITION 10. *Ein Morphismus $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ zweier Prägarben auf X besteht aus Morphismen (abelscher Gruppen etc.) $\phi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$, die mit der Einschränkungsabbildung verträglich sind, d.h. für offene Mengen $V \subseteq U$ gilt*

$$\phi(V) \circ \rho^{\mathcal{F}}_{UV} = \rho^{\mathcal{G}}_{UV} \circ \phi(U),$$

Ein Isomorphismus ist ein Morphismus $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, so daß ein Morphismus $\psi : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ existiert mit $\phi(U) \circ \psi(U) = id$, $\psi(U) \circ \phi(U) = id$.

Bemerkung: Ist $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus von Prägarben und $P \in X$, so erhält man für alle offenen Umgebungen von P Abbildungen $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U) \to \mathcal{G}_P$, die über $\mathcal{F}_P$ faktorisieren, also einen Homomorphismus $\phi_P : \mathcal{F}_P \to \mathcal{G}_P$ liefern. Es gilt dann:

$$\phi_P \circ \rho^{\mathcal{F}}_{UP} = \rho^{\mathcal{G}}_{UP} \circ \phi(U).$$

Beispiele:

1. Sei $X = \mathbf{C}^*$, $\mathcal{O}$ die Garbe der holomorphen Funktionen (mit der Addition) und $\mathcal{O}^*$ die Garbe der nirgends verschwindenen holomorphen Funktionen (mit der Multiplikation). Dann ist
$$\phi(U): \quad f \mapsto e^f$$
ein Morphismus von Garben abelscher Gruppen.
2. Sei X ein topologischer Raum und A eine abelsche Gruppe. Wir hatten die konstante Prägarbe $\mathcal{F}$ definiert mit $\mathcal{F}(U) = A$ und die konstante Garbe $\mathcal{G}$ mit $\mathcal{G}(U) = \{f : X \to A \text{ stetig}\}$. Durch
$$\phi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U), \quad a \mapsto (x \mapsto a)$$
erhält man einen Morphismus ϕ von Prägarben. Hier ist für alle Punkte P die Abbildung ϕ_P auf den Halmen ein Isomorphismus, obwohl natürlich ϕ i.a. kein Isomorphismus ist. Dies zeigt, daß bei folgendem Satz Garben als Voraussetzung notwendig sind.

SATZ 4. *Sei $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus von Garben. ϕ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn für alle P der induzierte Morphismus $\phi_P : \mathcal{F}_P \to \mathcal{G}_P$ ein Isomorphismus ist.*

Beweis: Ist ϕ ein Isomorphismus, so gibt es einen Morphismus $\psi : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ mit $\phi(U) \circ \psi(U) = id$ und $\psi(U) \circ \phi(U) = id$, was sofort $\phi_P \circ \psi_P = id$ und $\psi_P \circ \phi_P = id$ liefert, d.h. auch ϕ_P ist ein Isomorphismus. Sei nun ϕ_P ein Isomorphismus für alle Punkte $P \in X$. Wir gehen schrittweise vor:

1. $\phi(U)$ *ist injektiv:* Sei $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $\phi(U)(s) = 0$. Dann gilt für alle $P \in U$:
$$0 = \rho_{UP}(\phi(U)(s)) = \phi_P(\rho_{UP}(s)),$$
was wegen der Injektivität von ϕ_P dann $\rho_{UP}(s) = 0$ liefert. Da $\mathcal{F}$ eine Garbe ist, folgt daraus sofort $s = 0$, was wir zeigen wollten.
2. $\phi(U)$ *ist surjektiv:* Sei $t \in \mathcal{G}(U)$. Für $P \in U$ ist ϕ_P surjektiv, also liegt $\rho_{UP}(t)$ im Bild von ϕ_P, d.h. es gibt einen Keim eines $s_P \in \mathcal{F}(U_P)$ einer offenen Umgebung $U_P \subseteq U$ von P mit
$$\phi_P(\rho_{U_P P}(s_P)) = \rho_{UP}(t).$$
Anders geschrieben:
$$\rho_{U_P P}(\phi(U_P)(s_P)) = \rho_{UP}(t).$$
Die Elemente $(\phi(U_P)(s_P), U_P)$ und (t, U) sind also äquivalent, d.h. nach eventuellem Verkleinern von U_P haben wir $\phi(U_P)(s_P) = t|_{U_P}$. Für zwei Punkte P und Q gilt:
$$\phi(U_P \cap U_Q)(s_P|_{U_P \cap U_Q} - s_Q|_{U_P \cap U_Q}) = 0,$$
was wegen der in 1. gezeigten Injektivität sofort
$$s_P|_{U_P \cap U_Q} = s_Q|_{U_P \cap U_Q}$$
liefert. Nach der Garbeneigenschaft gibt es dann $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $s_P = s|_{U_P}$. Nun gilt:
$$\phi(U)(s)|U_P = \phi(U_P)(s|_{U_P}) = \phi(U_P)(s_P) = t|_{U_P},$$
mit der ersten Garbeneigenschaft folgt sofort $\phi(U)(s) = t$, was wir zeigen wollten.
3. Wir definieren $\psi(U) = \phi(U)^{-1}$. Es ist klar, daß ψ mit der Einschränkungsabbildung verträglich ist. Daher ist ψ ein Morphismus $\mathcal{G} \to \mathcal{F}$, somit ϕ ein Isomorphismus. ■

LEMMA 16. *Sei $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus von Prägarben. Dann sind $U \mapsto Kern(\phi(U))$ und $U \mapsto Bild(\phi(U))$ mit den induzierten Einschränkungsabbildungen Prägarben, der Prägarbenkern und das Prägarbenbild von ϕ.*

Beweis: Dies folgt sofort aus $\phi(V) \circ \rho^{\mathcal{F}}_{UV} = \rho^{\mathcal{G}}_{UV} \circ \phi(U)$. ■

DEFINITION 11. *Ist $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Prägarben, so daß für alle $U \subseteq X$ gilt $\mathcal{G}(U) \subseteq \mathcal{F}(U)$ und die Einschränkungsabbildung für $\mathcal{G}$ einfach die von $\mathcal{F}$ ist, so nennt man $\mathcal{G}$ eine Unterprägarbe von $\mathcal{F}$. Ist $\mathcal{G}$ eine Garbe, so spricht man von einer Untergarbe von $\mathcal{F}$.*

Bemerkungen:
1. Ist $\mathcal{G}$ eine Unterprägarbe der Prägarbe $\mathcal{F}$ und $P \in X$, so gilt $\mathcal{G}_P \subseteq \mathcal{F}_P$.
2. Ist $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus, so ist also der Prägarbenkern eine Unterprägarbe von $\mathcal{F}$, das Prägarbenbild eine Unterprägarbe von $\mathcal{G}$.

LEMMA 17. *Sei $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus von Garben. Dann ist der Prägarbenkern von ϕ sogar eine Garbe $Kern(\phi)$, der Kern von ϕ.*

Beweis: Die erste Garbeneigenschaft ist trivialerweise erfüllt, da $\mathcal{F}$ eine Garbe ist. Sei jetzt $U = \cup_{i\in I} U_i$ und $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ mit $\phi(U_i)(s_i) = 0$ und $s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j}$. Da $\mathcal{F}$ eine Garbe ist, gibt es ein $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $s_i = s|_{U_i}$. Wegen

$$\phi(U)(s)|_{U_i} = \phi(U_i)(s_i) = 0$$

und der Garbeneigenschaft von $\mathcal{G}$ folgt $\phi(U)(s) = 0$, was zu zeigen war. ■

Das Prägarbenbild eines Garbenmorphismus muß i.a. keine Garbe sein, wie folgendes Beispiel zeigt:

Beispiel: Sei $\phi : \mathcal{O}^* \to \mathcal{O}^*$ der durch $\phi(U)(f) = f^2$ induzierte Garbenmorphismus auf $X = \mathbf{C}^*$. Wir betrachten die Funktion $f \in \mathcal{O}^*(X)$ mit $f(z) = z$. Sei $c \in X$ und $U_c = \{z \in \mathbf{C} : |z - c| < |c|\} \subseteq X$ die offene Kreisscheibe um c vom Radius $|c|$. Dann liefert die Formel

$$\sqrt{z} = \sqrt{c} \cdot \sqrt{1 + \frac{z-c}{c}} = \sqrt{c} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\binom{\frac{1}{2}}{n}\right) \left(\frac{z-c}{c}\right)^n$$

ein Element in $\mathcal{O}^*(U_c)$, dessen Bild unter $\phi(U_c)$ das Element $f|_{U_c}$ ist; also $f|_{U_c} \in Bild\phi(U_c)$. Wäre $U \mapsto Bild\phi(U)$ eine Garbe auf X, so müßte demnach auch $f \in Bild\phi(X)$ gelten, was aber nicht der Fall ist. Also ist $U \mapsto Bild\phi(U)$ keine Garbe auf X.

Kann man eine Prägarbe zu einer Garbe machen? Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf einem topologischen Raum X. Wir setzen

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^+(U) \quad = \quad & \{f : U \to \cup_{P\in X}\mathcal{F}_P \text{ mit } f(P) \in \mathcal{F}_P, \text{ so daß es eine offene Überdeckung } U = \cup_{i\in I}U_i \text{ und} \\ & f_i \in \mathcal{F}(U_i) \text{ gibt mit } f(P) = \rho_{U_iP}(f_i) \text{ für alle } P \in U_i \text{ und alle } i \in I\},\end{aligned}$$

wo $\cup_{P\in X}\mathcal{F}_P$ die disjunkte Vereinigung der Halme meint. Mit der gewöhnlichen Einschränkungsabbildung für Funktionen wird $\mathcal{F}^+$ zu einer Prägarbe auf X. Die Garbeneigenschaften sind sofort klar, da es bei den Elementen von $\mathcal{F}^+(U)$ um Funktionen handelt, die lokal gewissen Eigenschaften genügen. Zudem haben wir auch einen Morphismus $\theta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$, der einem $s \in \mathcal{F}(U)$ die Funktion $P \mapsto \rho_{UP}(s)$ zuordnet. $\mathcal{F}^+$ heißt die zu $\mathcal{F}$ assoziierte Garbe.

SATZ 5. *Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf X und $\theta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ wie eben konstruiert.*

1. *Für alle $P \in X$ gilt $\mathcal{F}^+_P = \mathcal{F}_P$.*
2. *Ist $\mathcal{G}$ eine Garbe und $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus, so faktorisiert ϕ eindeutig über θ:*

$$\mathcal{F} \to \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}.$$

3. *Ist $\mathcal{F}$ eine Garbe, so ist θ ein Isomorphismus, d.h. $\mathcal{F}^+ \simeq \mathcal{F}$.*

Beweis:

1. Sei $P \in X$ und U eine offene Umgebung von P. Die Abbildungen

$$\mathcal{F}^+(U) \to \mathcal{F}_P, \quad f \mapsto f(P)$$

sind mit der Einschränkungsabbildung verträglich und faktorisieren daher über $\mathcal{F}^+_P$. Man sieht schnell, daß $\mathcal{F}^+_P \to \mathcal{F}_P$ injektiv und surjektiv ist.

2. Sei $U \subseteq X$ offen. Wir wollen eine Abbildung $\psi(U) : \mathcal{F}^+(U) \to \mathcal{G}(U)$ konstruieren.
Eindeutigkeit: Sei $f \in \mathcal{F}^+(U)$. Dann gibt es eine offene Überdeckung $U = \cup_{i\in I}U_i$ und $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ mit $\rho_{U_iP}(f_i) = f(P)$. Es ist $\theta(U_i)(f_i) = f|_{U_i}$. Für $\psi(U)$ gilt:

$$\psi(U)(f)|_{U_i} = \psi(U_i)(f|_{U_i}) = \psi(U_i)(\theta(U_i)(f_i)) = \phi(U_i)(f_i).$$

Wegen der Garbeneigenschaft von $\mathcal{G}$ ist damit $\psi(U)$ durch ϕ eindeutig bestimmt.
Existenz: Man zeigt jetzt umgekehrt, daß durch obige Formel $\psi(U)$ wohldefiniert ist: die Bilder $\phi(U_i)(f_i)$ erfüllen die Voraussetzung der zweiten Garbeneigenschaft, also gibt es dazu ein $g \in \mathcal{G}(U)$ mit $g|_{U_i} = \phi(U_i)(f_i)$. Wir setzen $\psi(f) = g$. Nun muß man natürlich noch die entsprechenden Eigenschaften nachprüfen.

3. Dies folgt aus 1. und einem früheren Satz. ■

Bemerkung: Durch die 2. Eigenschaft des Satzes ist die einer Prägarbe $\mathcal{F}$ zugeordnete Garbe $\mathcal{F}^+$ eindeutig charakterisiert.

Beispiele:

1. Sei $\mathcal{F}$ die konstante Prägarbe und $\mathcal{G}$ die konstante Garbe auf X mit Werten in A. Der Homomorphismus $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ mit $\phi(U)(a) = (x \mapsto a)$ faktorisiert über $\mathcal{F}^+$ und $\mathcal{F}^+_P = \mathcal{F}_P = \mathcal{G}_P = A$, also ist $\mathcal{G}$ die zu $\mathcal{F}$ assoziierte Garbe.
2. Sei $X = \{P, Q\}$ wie zuvor und $\mathcal{F}$ die Prägarbe mit $\mathcal{F}(X) = \mathbf{Z}$, $\mathcal{F}(\{P\}) = \mathcal{F}(\{Q\}) = \mathbf{Z}/(2)$. Setzen wir $\mathcal{G}(\{P\}) = \mathcal{G}(\{Q\}) = \mathbf{Z}/(2)$ und $\mathcal{G}(X) = \mathcal{G}(\{P\}) \oplus \mathcal{G}(\{Q\})$, so erhalten wir einen Morphismus $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ und man sieht schnell, daß $\mathcal{G}$ die zu $\mathcal{F}$ assoziierte Garbe ist.

Das letzte Beispiel zeigt auch, daß $\mathcal{F}$ keine Untergarbe von $\mathcal{F}^+$ sein muß. Im folgenden Satz geben wir ein Beispiel, wo dies der Fall ist.

SATZ 6. *Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe und $\mathcal{G}$ eine Unterprägarbe. Definiert man für eine offene Menge U*

$$\begin{aligned}\mathcal{G}^\star(U) &= \{f \in \mathcal{F}(U), \text{ so daß es eine Überdeckung } U = \cup_{i \in I} U_i \text{ gibt und } g_i \in \mathcal{G}(U_i) \\ &\quad \text{mit } f|_{U_i} = g_i\},\end{aligned}$$

so ist $\mathcal{G}^\star$ eine Untergarbe von $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}^\star \simeq \mathcal{G}^+$.

Beweis: Zunächst gilt $\mathcal{G}(U) \subseteq \mathcal{G}^\star(U) \subseteq \mathcal{F}(U)$, daher ist die erste Garbeneigenschaft für $\mathcal{G}^\star$ klar, da sie für $\mathcal{F}$ gilt. Die zweite ist klar, da sie für $\mathcal{F}$ gilt und $\mathcal{G}^\star$ durch lokale Bedingungen definiert ist. Ausgehend von der Definition von $\mathcal{G}^\star_P$ sieht man schnell, daß $\mathcal{G}^\star_P = \mathcal{G}_P$ gilt, also folgt $\mathcal{G}^\star \simeq \mathcal{G}^+$. ■

Wir haben bereits den Kern eines Garbenmorphismus definiert.

DEFINITION 12. *Sei $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Garbenmorphismus. Dann heißt die dem Prägarbenbild zugeordnete Garbe das Bild von ϕ: $Bild(\phi)$. ϕ heißt injektiv, wenn $Kern(\phi) = 0$ ist, ϕ heißt surjektiv, wenn $Bild(\phi) = \mathcal{G}$ gilt. Analog wird die Exaktheit einer Garbensequenz definiert.*

Sei $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Garbenmorphismus. Dann gilt also

$$(Kern\phi)(U) = Kern(\phi(U)).$$

Da $Bild\phi$ die zu $U \mapsto Bild(\phi(U)) \subseteq \mathcal{G}(U)$ assoziierte Garbe ist, erhalten wir mit obiger Konstruktion

$$\begin{aligned}(Bild(\phi))(U) &= \{g \in \mathcal{G}(U) : \text{ es gibt Überdeckung } U = \cup_{i \in I} U_i, f_i \in \mathcal{F}(U_i) \\ &\quad \text{mit } f|_{U_i} = \phi(U_i)(f_i)\}.\end{aligned}$$

Damit erhalten wir das Lemma:

LEMMA 18. *Sei $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus von Garben.*

1. *ϕ ist genau dann injektiv, wenn für alle offenen $U \subseteq X$ die Abbildung $\phi(U)$ injektiv ist.*
2. *ϕ ist genau dann surjektiv, wenn für alle offenen Mengen U und alle $g \in \mathcal{G}(U)$ eine Überdeckung $U = \cup_{i \in I} U_i$ und $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ existiert mit $g|_{U_i} = \phi(U_i)(f_i)$.*

Beispiel: Auf $X = \mathbf{C}^*$ betrachten wir den durch $f \mapsto f^2$ definierten Garbenmorphismus $\mathcal{O}^* \to \mathcal{O}^*$. Da sich aus jeder nichtverschwindenden holomorphen Funktion lokal die Wurzel ziehen läßt, folgt mit dem letzten Lemma, daß der Garbenmorphismus surjektiv ist. Wir haben aber schon gesehen, daß dies nicht die Surjektivität von $\mathcal{O}*(U) \to \mathcal{O}^*(U)$ implizieren muß.

Wir wollen jetzt Injektivität und Surjektivität noch auf den Halmen charakterisieren.

LEMMA 19. *Sei $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Garbenmorphismus. Dann gilt*

$$(Kern\phi)_P = Kern(\phi_P) \quad \text{und} \quad (Bild\phi)_P = Bild(\phi_P).$$

Beweis:

1. $Kern\phi$ ist eine Untergarbe von $\mathcal{F}$, also ist $(Kern\phi)_P \subseteq \mathcal{F}_P$ und natürlich ebenso $Kern(\phi_P) \subseteq \mathcal{F}_P$.
   $\subseteq$: Sei $s_P \in (Kern\phi)_P$. Dann gibt es $s \in (Kern\phi)(U)$ mit $s_P = \rho_{UP}(s)$. Es folgt
   $$\phi_P(s_P) = \phi_P(\rho_{UP}(s)) = \rho_{UP}(\phi(U)(s)) = \rho_{UP}(0) = 0,$$
   also $s_P \in Kern(\phi_P)$.
   $\supseteq$: Sei $s_P \in Kern(\phi_P)$. Wir schreiben $s_P = \rho_{UP}(s)$ mit $s \in \mathcal{F}(U)$. Dann ist
   $$0 = \phi_P(s_P) = \phi_P(\rho_{UP}(s)) = \rho_{UP}(\phi(U)(s)),$$
   also sind $(0, X)$ und $(\phi(U)(s), U)$ äquivalent, es gibt also eine Umgebung $V \subseteq U$ mit $\phi(U)(s)|_V = 0$, d.h. $\phi(V)(s|_V) = 0$ und damit $s|_V \in (Kern\phi)(V)$ und damit
   $$s_P = \rho_{VP}(s|_V) \in (Kern\phi)_P.$$
2. $Bild\phi$ ist eine Untergarbe von $\mathcal{G}$, also gilt $(Bild\phi)_P \subseteq \mathcal{G}_P$; ebenso gilt $Bild(\phi_P) \subseteq \mathcal{G}_P$. Der Halm $(Bild\phi)_P$ ist auch der Halm der Bildprägarbe $U \mapsto Bild\phi(U)$.
   $\subseteq$: Sei $t_P \in (Bild\phi)_P$. Dann gibt es eine Umgebung U und $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $t_P = \rho_{UP}(\phi(U)(s))$. Es folgt sofort
   $$t_P = \phi_P(\rho_{UP}(s)) \in Bild(\phi_P).$$
   $\supseteq$: Sei $t_P \in Bild(\phi_P)$. Dann gibt es $s_P \in \mathcal{F}_P$ mit $t_P = \phi_P(s_P)$. Weiter gibt es eine offene Umgebung U und $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $s_P = \rho_{UP}(s)$. Es folgt
   $$t_P = \phi_P(\rho_{UP}(s)) = \rho_{UP}(\phi(U)(s)) \in \rho_{UP}(Bild\phi(U)),$$
   also $t_P \in (Bild\phi)_P$. ■

Damit erhalten wir:

LEMMA 20. *Für einen Garbenmorphismus $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ gilt:*

1. *ϕ ist genau dann injektiv, wenn für alle $P \in X$ die Abbildung $\phi_P : \mathcal{F}_P \to \mathcal{G}_P$ injektiv ist.*
2. *ϕ ist genau dann surjektiv, wenn für alle $P \in X$ die Abbildung $\phi_P : \mathcal{F}_P \to \mathcal{G}_P$ surjektiv ist.*

Beweis: Wir haben die Äquivalenzen

$$\begin{aligned} \phi \text{ injektiv} \quad &\Longleftrightarrow \quad Kern\phi = 0 \iff (Kern\phi)_P = 0 \text{ für alle } P \\ &\Longleftrightarrow \quad Kern(\phi_P) = 0 \text{ für alle } P \\ &\Longleftrightarrow \quad \phi_P \text{ injektiv für alle } P. \end{aligned}$$

Genauso:

$$\begin{aligned} \phi \text{ surjektiv} \quad &\Longleftrightarrow \quad Bild\phi = \mathcal{G} \iff (Bild\phi)_P = \mathcal{G}_P \text{ für alle } P \\ &\Longleftrightarrow \quad Bild(\phi_P) = \mathcal{G}_P \text{ für alle } P \\ &\Longleftrightarrow \quad \phi_P \text{ surjektiv für alle } P. \quad ■ \end{aligned}$$

Bemerkung: Eine Garbensequenz

$$\mathcal{F}' \xrightarrow{\phi} \mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{F}''$$

heißt exakt, wenn gilt $Bild\phi = Kern\psi$. Nach dem Lemma ist dies gleichwertig damit, daß die Sequenz exakt auf den Halmen ist, d.h. daß für alle $P \in X$ die Sequenz

$$\mathcal{F}'_P \xrightarrow{\phi_P} \mathcal{F}_P \xrightarrow{\psi_P} \mathcal{F}''_P$$

exakt ist. Haben wir eine exakte Garbensequenz

$$0 \to \mathcal{F}' \xrightarrow{\phi} \mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{F}'' \to 0,$$

so kann man zeigen, daß für alle offenen Mengen $U \subseteq X$ die Sequenz

$$0 \to \mathcal{F}'(U) \xrightarrow{\phi(U)} \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\psi(U)} \mathcal{F}''(U)$$

exakt ist, $\psi(U)$ muß allerdings nicht surjektiv sein, wie wir schon im Beispiel gesehen haben.

Der folgende Satz ist unmittelbar klar.

SATZ 7. *Ist $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf X, $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge, so ist $\mathcal{F}|_U$ mit $\mathcal{F}|_U(V) = \mathcal{F}(V)$ eine Prägarbe auf U, die Einschränkung von $\mathcal{F}$ auf U. Ist $\mathcal{F}$ eine Garbe, so auch $\mathcal{F}|_U$. Für $P \in U$ gilt $(\mathcal{F}|_U)_P = \mathcal{F}_P$.*

DEFINITION 13. *Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X. Dann wird durch*

$$V \mapsto \mathcal{F}(f^{-1}(V))$$

eine Garbe auf Y definiert, die sogenannte Bildgarbe $f_*\mathcal{F}$ von $\mathcal{F}$.

Beispiel: Sei X ein topologischer Raum und $P \in X$ ein Punkt. Wir betrachten die Inklusion $i : \{P\} \to X$. Eine Garbe $\mathcal{F}$ auf $\{P\}$ wird durch eine abelsche Gruppe A gegeben mit $\mathcal{F}(\{P\}) = A$. Dann gilt:

$$(i_*\mathcal{F})(U) = A, \text{ falls } P \in U, = 0 \text{ sonst.}$$

Man sieht auch schnell, daß für einen Punkt $Q \in X$ gilt:

$$(i_*\mathcal{F})_Q = A, \text{ falls } Q \in \overline{\{P\}} \text{ und } = 0 \text{ sonst.}$$

Beispiel: Sei X eine algebraische Varietät und $Y \subseteq X$ eine abgeschlossene Untervarietät. Für $Y \subseteq X$ schreiben wir $i : Y \to X$. Die Garben der regulären Funktionen werden mit $\mathcal{O}_X$ und $\mathcal{O}_Y$ bezeichnet. Sei $U \subseteq X$ offen. Dann ist $(i_*\mathcal{O}_Y)(U) = \mathcal{O}_Y(U \cap Y)$. Wir erhalten eine Einschränkungsabbildung

$$\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_Y(U \cap Y), \quad f \mapsto f|_{U \cap Y},$$

also einen Garbenmorphismus $\mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_Y$. Dieser ist surjektiv. Dazu genügt es zu zeigen, daß $\mathcal{O}_{X,P} \to (i_*\mathcal{O}_Y)_P$ surjektiv ist. Dies folgt aber daraus, daß jedes Element aus $(i_*\mathcal{O}_Y)_P$ durch einen Quotienten von Polynomen repräsentiert wird, was auch ein Element in $\mathcal{O}_{X,P}$ liefert. Der Kern ist offensichtlich die Garbe $\mathcal{I}_Y$ mit

$$\mathcal{I}_Y(U) = \{f \in \mathcal{O}_X(U) : f|_Y = 0\}.$$

Also haben wir eine exakte Garbensequenz

$$0 \to \mathcal{I}_Y \to \mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_Y \to 0.$$

KAPITEL 3

Schemata

Für einen Ring A (kommutativ mit Eins) haben wir das Spektrum $\mathrm{Spec}(A) = \{\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \text{ Primideal in } A\}$ betrachtet. $\mathrm{Spec}(A)$ wurde mit einer Topologie versehen, sodaß eine Teilmenge von $\mathrm{Spec}(A)$ genau dann abgeschlossen ist, wenn sie die Gestalt

$$V(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) : M \subseteq \mathfrak{p}\} = \{\mathfrak{p} : f(\mathfrak{p}) = 0 \text{ für alle } f \in M\}$$

hat, für eine Teilmenge $M \subseteq A$. Jede offene Menge ist Vereinigung von Mengen der Form

$$D(f) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) : f(\mathfrak{p}) \neq 0\},$$

wo $f \in A$ ist.

Für einen Integritätsring A mit Quotientenkörper K hatten wir eine Garbe $\tilde{\mathcal{O}}$ von Ringen auf $\mathrm{Spec}(A)$ definiert durch

$$\tilde{\mathcal{O}}(U) = \{f \in K : f \text{ ist definiert in } \mathfrak{p} \text{ für alle } \mathfrak{p} \in U\} \quad (U \neq \emptyset).$$

Dabei ist $f \in K$ definiert in $\mathfrak{p}$, wenn es $a, s \in A$ gibt mit $f = \frac{a}{s}$ und $s \notin \mathfrak{p}$, d.h. $s(\mathfrak{p}) \neq 0$. Man kann also auch sagen: $f \in K$ ist genau dann definiert in $\mathfrak{p}$, wenn $f \in A_\mathfrak{p}$ gilt. Wegen $A \subseteq A_\mathfrak{p} \subseteq K$ können wir also auch schreiben ($U \neq \emptyset$)

$$\tilde{\mathcal{O}}(U) = \cap_{\mathfrak{p} \in U} A_\mathfrak{p}.$$

Für die Halme galt: $\tilde{\mathcal{O}}_\mathfrak{p} = A_\mathfrak{p}$.
Ist A kein Integritätsring, so können wir auf diese Weise keine Garbe definieren, da kein Quotientenkörper existiert. Wir imitieren jetzt die Konstruktion der Garbe $\mathcal{F}^+$ aus einer Prägarbe $\mathcal{F}$.

Definition 14. *Sei A ein Ring und für $U \subseteq \mathrm{Spec}(A)$*

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(U) \quad = \quad & \{\varphi : U \to \cup_{\mathfrak{p} \in U} A_\mathfrak{p}, \textit{ so daß } \varphi(\mathfrak{p}) \in A_\mathfrak{p} \textit{ gilt und eine offene Überdeckung } U = \cup_{i \in I} U_i \\ & \textit{existiert und } a_i, s_i \in A \textit{ mit } \varphi(\mathfrak{p}) = \frac{a_i}{s_i} \textit{ in } A_\mathfrak{p} \textit{ für } \mathfrak{p} \in U_i\} \end{aligned}$$

Dann ist $\mathcal{O}$ eine Garbe von Ringen, die sogenannte Strukturgarbe auf $\mathrm{Spec}(A)$.

Bemerkungen:

1. Da $\mathcal{O}(U)$ aus Funktionen auf U besteht, die lokalen Bedingungen genügen, ist klar, daß $\mathcal{O}$ eine Garbe ist. Diese Funktionen kann man addieren und multiplizieren, also ist $\mathcal{O}$ eine Garbe von Ringen.
2. Sind $a, s \in A$ und $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ mit $s(\mathfrak{p}) \neq 0$, so kann man $\frac{a}{s}$ als Element von $A_\mathfrak{p}$ auffassen. Dabei ist
$$A_\mathfrak{p} = \{\frac{a}{s} : a, s \in A, s(\mathfrak{p}) \neq 0\}/\sim_\mathfrak{p}$$
mit
$$\frac{a_1}{s_1} \sim_\mathfrak{p} \frac{a_2}{s_2} \iff s(s_2 a_1 - s_1 a_2) = 0 \text{ für ein } s \in A \text{ mit } s(\mathfrak{p}) \neq 0.$$
Ist A kein Integritätsring, so hängt diese Äquivalenzrelation natürlich von $\mathfrak{p}$ ab. Es kann passieren, daß $\frac{a_1}{s_1} = \frac{a_2}{s_2}$ in $A_\mathfrak{p}$ gilt, aber gleichzeitig $\frac{a_1}{s_1} \neq \frac{a_2}{s_2}$ in $A_\mathfrak{q}$, wie in nachfolgendem Beispiel sichtbar wird.

Wir betrachten zwei Beispiele:

Beispiel: Für $A = \mathbf{C}[x]/(x^3 - x^2) = \mathbf{C}[x]/(x^2(x-1))$ besteht $\mathrm{Spec}(A)$ aus den zwei Punkten $\mathfrak{p} = (x)$ und $\mathfrak{q} = (x-1)$, die gleichzeitig offen und abgeschlossen sind. Jedes Element aus A hat die Gestalt $a + bx + cx^2$, man rechnet in A mit der Relation $x^3 - x^2$.

In $A_\mathfrak{p}$ ist $x-1$ Einheit, so daß aus $x^2(x-1) = x^3 - x^2 = 0$ folgt $x^2 = 0$. Jedes Element in $A_\mathfrak{p}$ hat also die Gestalt ($a_2 \neq 0$)

$$\frac{a_1 + b_1 x}{a_2 + b_2 x} = \frac{(a_1 + b_1 x)(a_2 - b_2 x)}{(a_2 + b_2 x)(a_2 - b_2 x)} = \frac{a_1 a_2 + (b_1 a_2 - a_1 b_2)x}{a_2^2},$$

was wieder als $a + bx$ geschrieben werden kann. So ist also

$$A_\mathfrak{p} = \{a + bx : a, b \in \mathbf{C}\} = \mathbf{C} + \mathbf{C}x \text{ mit } x^2 = 0 \text{ in } A_\mathfrak{p}.$$

In $A_\mathfrak{q}$ ist x Einheit, also folgt aus $x^2(x-1) - x^3 - x^2 = 0$ sofort $x = 1$ in $A_\mathfrak{q}$. Also ist

$$A_\mathfrak{q} = \mathbf{C} \text{ mit } x = 1 \text{ in } A_\mathfrak{q}.$$

Insbesondere sieht man hier, daß das Element $x^2 \in A$ sich ganz verschieden verhält, je nachdem, wo man es betrachtet: In $A_\mathfrak{p}$ gilt $x^2 = 0$, in $A_\mathfrak{q}$ gilt $x^2 = 1$. Aus der Definition folgt jetzt

$$\mathcal{O}(\{\mathfrak{p}\}) = A_\mathfrak{p} = \mathbf{C} + \mathbf{C}x \text{ mit } x^2 = 0 \text{ und } \mathcal{O}(\{\mathfrak{q}\}) = \mathbf{C} \text{ mit } x = 1.$$

Was ist $\mathcal{O}(\mathrm{Spec}(A))$? Sei $\varphi : \mathrm{Spec}(A) \to A_\mathfrak{p} \cup A_\mathfrak{q}$ eine beliebige Funktion mit $\varphi(\mathfrak{p}) \in A_\mathfrak{p}$ und $\varphi(\mathfrak{q}) \in A_\mathfrak{q}$, also $\varphi(\mathfrak{p}) = a + bx$ und $\varphi(\mathfrak{q}) = c$. Für $f = a + bx + (c - a - b)x^2 \in A$ gilt dann $f = \varphi(\mathfrak{p})$ in $A_\mathfrak{p}$ und $f = \varphi(\mathfrak{q})$ in $A_\mathfrak{q}$. Also ist $\varphi \in \mathcal{O}(\mathrm{Spec}(A))$. Daher ist $\mathcal{O}(\mathrm{Spec}(A)) \simeq A_\mathfrak{p} \oplus A_\mathfrak{q}$, was natürlich auch aus der Garbeneigenschaft $\mathcal{O}(\{\mathfrak{p}, \mathfrak{q}\}) = \mathcal{O}(\{pp\}) \oplus \mathcal{O}(\{\mathfrak{q}\})$ folgt.

Beispiel: Sei $A = \mathbf{C}[x,y]/(xy)$. Jedes Element in A hat die Gestalt $a + xb(x) + yc(y)$, wo b und c Polynome sind. Es ist

$$\mathrm{Spec}(A) = \{(x), (y)\} \cup \{(x-a, y), (x, y-b) : a, b \in \mathbf{C}, a, b \neq 0\} \cup \{(x, y)\}.$$

In $A_{(x)}$ ist y Einheit, also folgt aus $xy = 0$ sofort $x = 0$. Damit hat jedes Element in $A_{(x)}$ die Gestalt $\frac{a(y)}{b(y)}$, also gilt

$$A_{(x)} = \mathbf{C}(y) \text{ mit } x = 0.$$

Genauso sieht man

$$A_{(y)} = \mathbf{C}(x) \text{ mit } y = 0.$$

In $A_{(x,y-b)}$ mit $b \neq 0$ ist y Einheit, also folgt wie eben $x = 0$. Daher hat man

$$A_{(x,y-b)} = \mathbf{C}[y]_{(y-b)} = \{\frac{f(y)}{g(y)} : g(b) \neq 0\} \text{ und } x = 0.$$

Analog ist für $a \neq 0$

$$A_{(x-a,y)} = \mathbf{C}[x]_{(x-a)} = \{\frac{f(x)}{g(x)} : g(a) \neq 0\} \text{ mit } y = 0.$$

Schließlich ist

$$A_{(x,y)} = \{\frac{a + xb_1(x) + yc_1(y)}{1 + xb_2(x) + yc_2(y)}\} \text{ mit der Relation } xy = 0.$$

Wir betrachten das Element $f = \frac{x}{1+y}$. Es ist sinnvoll in allen Ringen $A_\mathfrak{p}$ außer für $\mathfrak{p} = (x, y+1)$. In $A_{(x)}$ und $A_{(x,y-b)}$ ($b \neq -1, 0$) gilt $f = 0$, in $A_{(y)}$ und $A_{(x-a,y)}$ ($a \neq 0$) wird $f = x \neq 0$. Auch in $A_{(x,y)}$ ist $f \neq 0$. Wir werden später noch einige der Ringe $\mathcal{O}(U)$ bestimmen.

SATZ 8. *Für den Halm der Strukturgarbe $\mathcal{O}$ eines Ringes A gilt:*

$$\mathcal{O}_\mathfrak{p} \simeq A_\mathfrak{p}.$$

Beweis: Wir betrachten offene Umgebungen U eines Punktes $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ und Abbildungen $\alpha_U : \mathcal{O}(U) \to A_\mathfrak{p}$ mit $\alpha_U(f) = f(\mathfrak{p})$. Es ist klar, daß die α_U mit den Einschränkungsabbildungen verträglich sind, also gibt es eine Abbildung $\alpha : \mathcal{O}_\mathfrak{p} \to A_\mathfrak{p}$, worüber sie faktorisieren:

$$\alpha_U = \alpha \circ \rho_{U\mathfrak{p}}.$$

α ist injektiv: Jedes Element aus $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ hat die Gestalt $\rho_{U\mathfrak{p}}(f)$ für eine Umgebung U und ein $f \in \mathcal{O}(U)$. Gilt nun $\alpha(\rho_{U\mathfrak{p}}(f)) = 0$, so folgt $\alpha_U(f) = 0$, d.h. $f(\mathfrak{p}) = 0$. Wird f um $\mathfrak{p}$ in einer Umgebung U_1 durch $\frac{a}{s}$ dargestellt, so gibt es also ein $t \notin \mathfrak{p}$ mit $ta = 0$ in A. In der Umgebung $U_1 \cap D(t)$ wird f durch $\frac{a}{s} = \frac{ta}{ts} = 0$ dargestellt, d.h. es ist $f|_{U_1 \cap D(t)} = 0$. Also folgt $\rho_{U\mathfrak{p}}(f) = \rho_{U_1 \cap D(t), \mathfrak{p}}(f|_{U_1 \cap D(t)}) = 0$, was zu zeigen war.

α ist surjektiv: Sei $\frac{a}{s} \in A_\mathfrak{p}$ gegeben mit $a, s \in A$ und $s \notin \mathfrak{p}$. Setzen wir $U = D(s)$ und $f \in \mathcal{O}(U)$ durch $f(\mathfrak{q}) = \frac{a}{s} \in A_\mathfrak{q}$, so gilt $\alpha(\rho_{U\mathfrak{p}}(f)) = \frac{a}{s}$, also ist α surjektiv. ■

FOLGERUNG 6. *Für einen Integritätsring A gilt $\tilde{\mathcal{O}} \simeq \mathcal{O}$.*

Beweis: Wir wissen $A \subseteq \tilde{\mathcal{O}}(U) \subseteq K$, genauer $\tilde{\mathcal{O}}(U) = \cap_{\mathfrak{p} \in U} A_\mathfrak{p}$. Wir definieren $\phi(U) : \tilde{\mathcal{O}}(U) \to O(U)$ wie folgt: $f \in \tilde{\mathcal{O}}(U)$ ist in allen Punkten aus U definiert, also gibt es eine Überdeckung $U = \cup U_i$ und a_i, s_i mit $f = \frac{a_i}{s_i}$ und $s_i(\mathfrak{p}) \neq 0$ für alle $\mathfrak{p} \in U_i$; daher liefert $\mathfrak{p} \mapsto f$ ein Element von $\mathcal{O}(U)$ und wir setzen $\phi(U)(f) = (\mathfrak{p} \mapsto f)$. Also erhalten wir einen Garbenmorphismus $\phi : \tilde{\mathcal{O}} \to \mathcal{O}$. Da die Halme in beiden Fällen jeweils $A_\mathfrak{p}$ sind, sieht man schnell, daß $\phi_\mathfrak{p}$ Isomorphismen sind, also ist auch ϕ ein Isomorphismus. ■

Sei jetzt A ein beliebiger Ring. Wir wollen versuchen, eine etwas konkretere Vorstellung von $\mathcal{O}(U)$ zu bekommen. Sind $a, s \in A$, so gilt $s(\mathfrak{p}) \neq 0$ für alle $\mathfrak{p} \in D(s)$, also ist $(\mathfrak{p} \mapsto \frac{a}{s}) \in \mathcal{O}(D(s))$. Wir verallgemeinern dies etwas: Für $f \in A$ definieren wir

$$\lambda_f : A_f \to \mathcal{O}(D(f)), \quad \frac{a}{f^n} \mapsto (\mathfrak{p} \mapsto \frac{a}{f^n} \in A_\mathfrak{p}).$$

Wir zeigen, daß λ_f wohldefiniert ist: Ist $\frac{a}{f^n} = \frac{b}{f^m}$ in A_f, so gibt es $k \in \mathbf{N}$ mit $f^k(f^m a - f^n b) = 0$. Für $\mathfrak{p} \in D(f)$ ist $f(\mathfrak{p}) \neq 0$, also gilt auch in $A_\mathfrak{p}$ die Beziehung $\frac{a}{f^n} = \frac{b}{f^m}$. Also ist λ_f wohldefiniert. Natürlich ist λ_f ein Ringhomomorphismus. Wir zeigen zunächst:

LEMMA 21. *$\lambda_f : A_f \to \mathcal{O}(D(f))$ ist injektiv.*

Beweis: Sei $\frac{a}{f^n} \in Kern(\lambda_f)$. Dann ist $\frac{a}{f^n} = 0$ in $A_\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in D(f)$, also gibt es $s_\mathfrak{p} \in A \setminus \mathfrak{p}$ mit $s_\mathfrak{p} a = 0$. Wir betrachten das Annullatorideal $\mathfrak{a} = \{s \in A : sa = 0\}$ von a. Für $\mathfrak{p} \in D(f)$ ist $s_\mathfrak{p} \notin \mathfrak{p}$ aber $s_\mathfrak{p} \in \mathfrak{a}$, also ist $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}$, d.h. $\mathfrak{p} \notin V(\mathfrak{a})$. Dies zeigt $V(\mathfrak{a}) \cap D(f) = \emptyset$. Wegen $D(f) = \operatorname{Spec}(A) \setminus V(f)$ folgt $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(f)$, was gleichwertig mit $f \in \sqrt{(f)} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$ ist, d.h. es gibt ein $m \in \mathbf{N}$ mit $f^m \in \mathfrak{a}$, also $f^m a = 0$ und damit $\frac{a}{f^n} = 0$ in A_f, was wir zeigen wollten. ■

Wir wollen uns nun noch etwas allgemeiner überlegen, wie die Elemente von $\mathcal{O}(U)$ aussehen. Sei also $\varphi \in \mathcal{O}(U)$.

1. Es gibt eine Überdeckung $U = \cup_i U_i$ und $a_i, g_i \in A$, so daß für $\mathfrak{p} \in U_i$ gilt $\varphi(\mathfrak{p}) = \frac{a_i}{g_i} \in A_\mathfrak{p}$. Da jede offene Menge Vereinigung von Mengen der Form $D(h)$ ist, können wir o.E. $U_i = D(h_i)$ annehmen. Für alle $\mathfrak{p} \in D(h_i)$ gilt also $g_i(\mathfrak{p}) \neq 0$, d.h. $D(h_i) \subseteq D(g_i)$, was $V(g_i) \subseteq V(h_i)$ und damit $h_i \in \sqrt{(h_i)} \subseteq \sqrt{(g_i)}$ impliziert. Es gibt also $n_i \in \mathbf{N}$ und $b_i \in A$ mit $h_i^{n_i} = b_i g_i$. Für $\mathfrak{p} \in D(h_i)$ ist $g_i(\mathfrak{p}) \neq 0, b_i(\mathfrak{p}) \neq 0$ und es gilt in $A_\mathfrak{p}$:
$$\varphi(\mathfrak{p}) = \frac{a_i}{g_i} = \frac{a_i b_i}{b_i g_i} = \frac{a_i b_i}{h_i^{n_i}}.$$
Wegen $D(h_i) = D(h_i^{n_i})$ können wir nach Umbenennung also annehmen, daß φ auf $D(h_i)$ durch einen Bruch $\frac{a_i}{h_i}$ definiert wird.
2. Wir können also folgende Situation annehmen: Zu $\varphi \in \mathcal{O}(U)$ gibt es $a_i, h_i \in A$, $(i \in I)$, so daß gilt
$$U = \cup_{i \in I} D(h_i) \text{ und } \varphi(\mathfrak{p}) = \frac{a_i}{h_i} \text{ für } \mathfrak{p} \in D(h_i).$$
Was passiert im Durchschnitt $D(h_i) \cap D(h_j)$? Für $\mathfrak{p} \in D(h_i) \cap D(h_j) = D(h_i h_j)$ gilt $\varphi(\mathfrak{p}) = \frac{a_i}{h_i} = \frac{a_j}{h_j}$, wegen $\frac{a_i}{h_i} = \frac{h_j a_i}{h_i h_j}$ und $\frac{a_j}{h_j} = \frac{h_i a_j}{h_i h_j}$ gilt also
$$\lambda_{h_i h_j}(\frac{h_j a_i}{h_i h_j}) = \lambda_{h_i h_j}(\frac{h_i a_j}{h_i h_j}),$$
wegen der gezeigten Injektivität von $\lambda_{h_i h_j}$ also $\frac{h_j a_i}{h_i h_j} = \frac{h_i a_j}{h_i h_j}$ in $A_{h_i h_j}$, d.h. es gibt $n_{ij} \in \mathbf{N}$ mit
$$(h_i h_j)^{n_{ij}}(h_j a_i - h_i a_j) = 0 \text{ in } A.$$
Natürlich kann man n_{ij} auch beliebig vergrößern.

3. Ist U kompakt, so genügen endlich viele $D(h_i)$ zur Überdeckung, d.h. wir können schreiben $U = D(h_1) \cup \dots \cup D(h_r)$. Das Element $\varphi \in \mathcal{O}(U)$ wird auf $D(h_i)$ beschrieben durch $\frac{a_i}{h_i}$. Außerdem gibt es $n \in \mathbf{N}$ mit $(h_i h_j)^n (h_j a_i - h_i a_j) = 0$. Anders geschrieben:
$$h_j^{n+1} \cdot h_i^n a_i = h_i^{n+1} \cdot h_j^n a_j.$$
Setzen wir $\tilde{a}_i = h_i^n a_i$ und $\tilde{h}_i = h_i^{n+1}$, so gilt $\tilde{h}_j \tilde{a}_i = \tilde{h}_i \tilde{a}_j$ für alle i, j. Auf $D(h_i) = D(\tilde{h}_i)$, d.h. in A_{h_i} und $A_\mathfrak{p}$ für $\mathfrak{p} \in D(h_i)$, gilt $\frac{a_i}{h_i} = \frac{\tilde{a}_i}{\tilde{h}_i}$. Nach Umbenennung können wir also sagen: Ist U kompakt und $\varphi \in \mathcal{O}(U)$, so gibt es $a_1, \dots, a_r, h_1, \dots, h_r \in A$ mit $U = D(h_1) \cup \dots \cup D(h_r)$ und $\varphi(\mathfrak{p}) = \frac{a_i}{h_i}$ in $A_\mathfrak{p}$ für $\mathfrak{p} \in D(h_i)$. Außerdem gilt $h_j a_i = h_i a_j$.
4. Wir wenden das eben Gezeigte auf einen speziellen Fall an: Sei $f \in A$. Wir wissen, daß $D(f)$ homöomorph zu $\operatorname{Spec}(A_f)$ ist, also ist $D(f)$ kompakt, d.h. wir sind in der vorangegangenen Situation. Für $\varphi \in \mathcal{O}(D(f))$ gibt es also $a_1, \dots, a_r, h_1, \dots, h_r \in A$ mit $h_j a_i = h_i a_j$ und $\varphi(\mathfrak{p}) = \frac{a_i}{h_i} \in A_\mathfrak{p}$ für $\mathfrak{p} \in D(h_i)$. Nun folgt $V(f) = V(h_1) \cap \dots \cap V(h_r) = V((h_1, \dots, h_r))$, was gleichwertig ist mit
$$\sqrt{(f)} = \sqrt{(h_1, \dots, h_r)}.$$
Also gibt es $n \in \mathbf{N}$ mit $f^n \in (h_1, \dots, h_r)$, d.h. es gibt $b_1, \dots, b_r \in A$ mit
$$f^n = b_1 h_1 + \dots + b_r h_r.$$
Wir definieren $a = b_1 a_1 + \dots + b_r a_r$ und haben dann
$$h_i a = \sum_j h_i b_j a_j = \sum_j h_j b_j a_i = f^n a_i.$$
Damit gilt für alle $\mathfrak{p} \in D(h_i)$ jetzt $\varphi(\mathfrak{p}) = \frac{a_i}{h_i} = \frac{a}{f^n}$, womit sofort folgt $\lambda_f(\frac{a}{f^n}) = \varphi$. Damit haben wir gezeigt, daß λ_f surjektiv ist, und es ergibt sich der folgende Satz:

Satz 9. *Für $f \in A$ ist*
$$\lambda_f : A_f \to \mathcal{O}(D(f)), \quad \frac{a}{f^n} \mapsto (\mathfrak{p} \mapsto \frac{a}{f^n} \in A_\mathfrak{p})$$
ein Isomorphismus. Mittels λ_f können wir also $\mathcal{O}(D(f))$ mit A_f identifizieren.

Setzt man im Satz $f = 1$, so erhält man sofort:

Folgerung 7. $\mathcal{O}(\operatorname{Spec}(A)) \simeq A$.

Beispiel: Wir betrachten nochmals $A = \mathbf{C}[x, y]/(xy)$ mit
$$\operatorname{Spec}(A) = \{(x), (y)\} \cup \{(x - a, y), (x, y - b) : a, b \in \mathbf{C}, a, b \neq 0\} \cup \{(x, y)\}.$$
Es ist
$$D(x) = \{(y)\} \cup \{(x - a, y) : a \in \mathbf{C}, a \neq 0\}.$$
In A_x ist x Einheit, also liefert $xy = 0$ sofort $y = 0$, was dann
$$\mathcal{O}(D(x)) \simeq A_x = \{\frac{f(x)}{x^n} : f(x) \in \mathbf{C}[x], n \in \mathbf{N}\} = \mathbf{C}[x]_x \text{ mit } y = 0$$
ergibt. Analog ist
$$D(y) = \{(x)\} \cup \{(x, y - b) : b \in \mathbf{C}, b \neq 0\}$$
und
$$\mathcal{O}(D(y)) = A_y = \{\frac{g(y)}{y^m} : g(y) \in \mathbf{C}[y], m \in \mathbf{N}\} = \mathbf{C}[y]_y \text{ mit } x = 0.$$
Aus der Garbeneigenschaft von $\mathcal{O}$ folgt dann sofort
$$\mathcal{O}(\operatorname{Spec}(A) \setminus \{(x, y)\}) = \mathcal{O}(D(x) \cup D(y)) = \mathcal{O}(D(x)) \oplus \mathcal{O}(D(y)) \simeq A_x \oplus A_y.$$

Beispiel: Für $A = \mathbf{C}[x, y]$ ist
$$\operatorname{Spec}(A) = \{(0)\} \cup \{(f(x, y)) : f(x, y) \text{ irreduzibel}\} \cup \{(x - a, y - b) : a, b \in \mathbf{C}\}.$$
Für die offene Menge $U = \operatorname{Spec}(A) \setminus \{(x, y)\}$ wollen wir $\mathcal{O}(U)$ bestimmen. Wir können schreiben $U = D(x) \cup D(y)$. Da A eine Integritätsring ist, können wir uns alle Funktionen als Elemente von $\mathbf{C}(x, y)$ denken. Sei $f \in \mathcal{O}(U)$. Dann ist $f = f|_{D(x)} \in \mathcal{O}(D(x)) = A_x$, also gibt es eine Darstellung $f = \frac{g(x,y)}{x^m}$.

Ebenso ist $f = f|_{D(y)} \in \mathcal{O}(D(y)) = A_y$, also hat man $f = \frac{h(x,y)}{y^n}$. In $\mathcal{O}(D(x) \cap D(y)) \subseteq \mathbf{C}(x,y)$ und damit in $\mathbf{C}(x,y)$ gilt $f = \frac{g(x,y)}{x^m} = \frac{h(x,y)}{y^n}$. Also hat man im Polynomring A die Beziehung $y^n g(x,y) = x^m h(x,y)$. Da A faktoriell ist, gibt es ein Polynom $k(x,y)$ mit $g(x,y) = x^m k(x,y)$ und $h(x,y) = y^n k(x,y)$, was sofort $f = k(x,y)$ liefert. Damit haben wir gezeigt, daß $\mathcal{O}(U) = A$ gilt.

Definition 15. *Ein geringter Raum besteht aus einem topologischen Raum X und einer Garbe $\mathcal{O}_X$ von Ringen auf X. Wir schreiben dafür auch $(X, \mathcal{O}_X)$. Ein Isomorphismus geringter Räume $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ besteht aus einem Homöomorphismus $f : X \to Y$ und einem Garbenisomorphismus $\phi : \mathcal{O}_Y \to f_* \mathcal{O}_X$, d.h. man hat für jede offene Menge $U \subseteq Y$ Ringisomorphismen $\phi(U) : \mathcal{O}_Y(U) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$, die mit der Einschränkungsabbildung verträglich sind.*

Beispiel: Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit X zusammen mit der Garbe $\mathcal{O}$ der differenzierbaren Funktionen auf X bildet einen geringten Raum.

Wir kommen nun zur grundlegenden Definition:

Definition 16.
1. *Unter dem Spektrum* $\operatorname{Spec}(A)$ *eines Ringes A verstehen wir von nun an den den geringten Raum* $(\operatorname{Spec}(A), \mathcal{O})$, *wo $\mathcal{O}$ die Strukturgarbe auf* $\operatorname{Spec}(A)$ *ist. Um den Ring bei der Garbe anzudeuten, schreiben wir auch $\mathcal{O} = \mathcal{O}_A$.*
2. *Ein Schema ist ein geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$, wo jeder Punkt $P \in X$ eine offene Umgebung $U \subseteq X$ besitzt, so daß $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ isomorph zum Spektrum eines Ringes* $(\operatorname{Spec}(A), \mathcal{O}_A)$ *ist. Die Garbe $\mathcal{O}_X$ heißt auch die Strukturgarbe von X. Mitunter schreibt man auch einfach X für das Schema $(X, \mathcal{O}_X)$.*
3. *Ein affines Schema ist ein Schema, das isomorph ist zum Spektrum eines Ringes.*
4. *Ist X ein Schema und $P \in X$, so heißt eine offene Umgebung U von P in X eine affine Umgebung, wenn $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ ein affines Schema ist, d.h. $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ ist isomorph zum Spektrum eines Ringes. (Jeder Punkt eines Schemas hat also eine affine Umgebung.)*

Wir geben eine Reihe von Beispielen an:

Beispiel: Sei k algebraisch abgeschlossener Körper und $X \subseteq \mathbf{A}^n$ eine affine Varietät, d.h. X ist Nullstellenmenge von Polynomen $f_1, \ldots, f_r \in k[x_1, \ldots, x_n]$, wo $(f_1, \ldots, f_r)$ ein Primideal ist. Die regulären Funktionen auf X sind die Polynomfunktionen, d.h. die Elemente des affinen Koordinatenrings $A = k[x_1, \ldots, x_n]/(f_1, \ldots, f_r)$. Für jeden Punkt $(p_1, \ldots, p_n) \in X$ ist $(x_1 - p_1, \ldots, x_n - p_n) \in \operatorname{Spec}(A)$ ein abgeschlossener Punkt und umgekehrt haben auch alle abgeschlossenen Punkte von $\operatorname{Spec}(A)$ diese Gestalt. D.h. die Punkte von X entsprechen genau den abgeschlossenen Punkten des affinen Schemas $\operatorname{Spec}(A)$. Allerdings hat $\operatorname{Spec}(A)$ im allgemeinen noch mehr Punkte. Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$, $\mathfrak{p} = (g_1, \ldots, g_s)$ mit Polynomen $g_1, \ldots, g_s$. Dann gilt $(f_1, \ldots, f_r) \subseteq (g_1, \ldots, g_s) \subseteq k[x_1, \ldots, x_r]$. Die Nullstellenmenge $\{g_1 = \cdots = g_s = 0\} \subseteq \mathbf{A}^n$ ist dann eine (irreduzible) affine Untervarietät von X. Alle affinen (irreduziblen) Untervarietäten von X haben auch diese Gestalt. Daher entsprechen die affinen (irreduziblen) Untervarietäten von X genau den Punkten des affinen Schemas $\operatorname{Spec}(A)$. Wenn wir Morphismen von Schemata definiert haben, werden wir allgemeiner die Beziehung zwischen quasi-projektiven Varietäten über k und Schematas noch näher behandeln.

Beispiel: Sei $f(x,y) \in \mathbf{Q}[x,y]$ ein Polynom und X das affine Schema $X = \operatorname{Spec}(\mathbf{Q}[x,y]/(f(x,y))$. Sind $a, b \in \mathbf{Q}$ eine Lösung der diophantischen Gleichung $f(x,y) = 0$, d.h. gilt $f(a,b) = 0$, so ist $(x - a, y - y)$ ein abgeschlossener Punkt von X. So ist $(x - \frac{3}{5}, y - \frac{4}{5})$ ein abgeschlossener Punkt von $Y = \operatorname{Spec}(\mathbf{Q}[x,y]/(x^2 + y^2 - 1)$. Natürlich besitzt Y noch mehr abgeschlossene Punkte, z.B. $(x^2 + 1, y^2 - 2)$.

Beispiele: Sei k ein Körper.
1. Das affine Schema $\operatorname{Spec}(k)$ besteht aus einem Punkt mit Strukturgarbe k.
2. Das affine Schema $\operatorname{Spec}(k[x]/(x^2)) = \{(x)\}$ besteht aus einem Punkt mit Strukturgarbe $k[x]/(x^2) = k + kx$.

Beispiel: Sei R ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper K, d.h. R ist ein Hauptidealring mit genau einem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$. Ist π ein Erzeuger von $\mathfrak{m}$, so hat jedes Element von $R \setminus \{0\}$ eine eindeutige Darstellung $u\pi^n$, wo u eine Einheit und $n \in \mathbf{N}_0$ ist. Beispiele sind

$$\mathbf{Z}_{(p)} = \{\frac{m}{n} \in \mathbf{Q} : m, n \in \mathbf{Z}, ggT/n, p) = 1\}, \quad \mathbf{C}[x]_{(x-c)} = \{\frac{f(x)}{g(x)} : g(c) \neq 0\}$$

oder die lokalen Ringe von nichtsingulären Punkten von Kurven. Das affine Schema $\mathrm{Spec}(R)$ besteht aus den zwei Punkten (0) und $\mathfrak{m}$, wobei nur $\mathfrak{m}$ abgeschlossen ist. Die offenen Mengen sind also $\emptyset, \{(0)\}, \mathrm{Spec}(R)$. Es ist $R_{(0)} = K$ und $R_\mathfrak{m} = R$. Ist $m \in \mathfrak{m}$ mit $m \neq 0$, so folgt $D(m) = \{(0)\}$ und damit

$$\mathcal{O}(\{(0)\}) = \mathcal{O}(D(m)) = R_m = K \text{ und } \mathcal{O}(\mathrm{Spec}(R)) = R.$$

Beispiel: Die Menge $S = \{n \in \mathbf{N} : ggT(6, n) = 1\}$ ist eine multiplikative Teilmenge von $\mathbf{Z}$. Der Ring

$$\mathbf{Z}_S = \{\frac{m}{n} \in \mathbf{Q} : m, n \in \mathbf{Z}, ggT(6, n) = 1\}$$

hat genau drei Primideale, nämlich (0), (2) und (3). Im affinen Schema $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}_S)$ sind genau die Punkte (2) und (3) abgeschlossen, (0) ist offen. Die offenen Mengen sind also

$$\emptyset, \quad \{(0)\}, \quad \{(0), (2)\}, \quad \{(0), (3)\}, \quad \{(0), (2), (3)\}.$$

Wegen $D(3) = \{(0), (2)\}$ ist

$$\mathcal{O}(\{(0), (2)\} = D(3) = (\mathbf{Z}_S)_3 = \mathbf{Z}_{(2)}, \qquad \text{analog} \quad \mathcal{O}(\{(0), (3)\} = D(2) = (\mathbf{Z}_S)_2 = \mathbf{Z}_{(3)}$$

und schließlich

$$\mathcal{O}(\{(0)\} = D(6) = (\mathbf{Z}_S)_6 = \mathbf{Q} \text{ und } \mathcal{O}(\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}_S)) = \mathbf{Z}_S.$$

Beispiel: Sei R ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper K. Dann ist $\mathrm{Spec}(R) = \{(0), \mathfrak{m}\}$ und $\mathcal{O}_R(\{(0)\}) = K$ und $\mathcal{O}(\{(0), \mathfrak{m}\}) = R$. Wir betrachten einen topologischen Raum $X = \{P, Q_1, Q_2\}$ mit drei Punkten, wobei nur Q_1 und Q_2 abgeschlossen sein sollen, d.h. wir haben die offenen Mengen $X, \{P, Q_1\}, \{P, Q_2\}, \{P\}, \emptyset$. Wir definieren eine Garbe von Ringen auf X durch

$$\mathcal{O}_X(X) = \mathcal{O}_X(\{P, Q_1\}) = \mathcal{O}_X(\{P, Q_2\}) = R \text{ und } \mathcal{O}(\{P\}) = K$$

mit den offensichtlichen Einschränkungsabbildungen. Da für $U \neq \emptyset$ immer $\mathcal{O}_X(U) \subseteq K$ gilt, ist $\mathcal{O}_X$ offensichtlich eine Garbe. Man sieht jetzt sofort, daß $(\{P, Q_1\}, \mathcal{O}_X|_{\{P,Q_1\}})$ isomorph zu $(\mathrm{Spec}(R), \mathcal{O}_R)$ ist, analog für $\{P, Q_2\}$. Daher ist X ein Schema. Wäre X ein affines Schema, so gäbe es einen Ring A mit $X \simeq \mathrm{Spec}(A)$ und damit $A \simeq \mathcal{O}_A(\mathrm{Spec}(A)) \simeq \mathcal{O}_X(X) = R$, was wiederum $X \simeq \mathrm{Spec}(R)$ liefern würde, was aber wegen $|X| = 3$ und $|\mathrm{Spec}(R)| = 2$ nicht geht. (X ist in gewissem Sinn das kleinste nicht affine Schema.)

Beispiele: Sei k ein Körper. Das affine Schema $\mathrm{Spec}(k[x])$ bezeichnen wir mit $\mathbf{A}_k^1$, das affine Schema $\mathrm{Spec}(k[x, y])$ mit $\mathbf{A}_k^2$.

Beispiel: Die Punkte des affinen Schemas $\mathrm{Spec}(\mathbf{C}[x, y]_{(x,y)})$ sind neben dem generischen Punkt (0) und dem (einzigen) abgeschlossenen Punkt (x, y) die Punkte $(f(x, y))$, wo $f(x, y)$ ein irreduzibles Polynom ist mit $f(0, 0) = 0$, d.h. sie entsprechen den irreduziblen ebenen Kurven, die durch den Nullpunkt gehen.

Ist A ein Ring und $f \in A$, so ist $D(f) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) : f(\mathfrak{p}) \neq 0\}$ homöomorph zu $\mathrm{Spec}(A_f)$. Wir können auch schreiben

$$\mathrm{Spec}(A_f) = \{\mathfrak{p}A_f : \mathfrak{p} \in D(f)\} = \{\mathfrak{p}A_f : f(\mathfrak{p}) \neq 0, \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)\}.$$

Wir wollen die geringten Räume $(D(f), \mathcal{O}_A|_{D(f)})$ und $(\mathrm{Spec}(A_f), \mathcal{O}_{A_f})$ vergleichen. Dazu müssen wir für $\mathfrak{p} \in D(f)$ den Ring $(A_f)_{\mathfrak{p}A_f}$ betrachten. Die Elemente von A_f haben die Gestalt $\frac{a}{f^m}$, die des Primideals $\mathfrak{p}A_f$ die Form $\frac{p}{f^n}$ mit $p \in \mathfrak{p}$. Die Elemente von $(A_f)_{\mathfrak{p}A_f}$ kann man also schreiben als

$$\frac{a}{f^m} / \frac{s}{f^n}, \quad s \notin \mathfrak{p},$$

wobei die Bruchstriche in den richtigen Ringen zu lesen sind. Für $a, b \in A$ und $s, t \notin \mathfrak{p}$ gilt nun:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{f^k}/\frac{s}{f^l} = \frac{b}{f^m}/\frac{t}{f^n} \text{ in } (A_f)_{\mathfrak{p}A_f} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{c}{f^r}\left(\frac{ta}{f^{k+n}} - \frac{sb}{f^{l+m}}\right) = 0 \text{ in } A_f \text{ für ein } c \notin \mathfrak{p} \\
&\Longleftrightarrow \quad d(f^{l+m+r}cta - f^{k+n+r}csb) = 0 \text{ in } A \text{ mit } d \notin \mathfrak{p} \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{a}{f^k}/\frac{s}{f^l} = \frac{b}{f^m}/\frac{t}{f^n} \text{ in } A_{\mathfrak{p}}.
\end{aligned}$$

Damit folgt sofort, daß die Abbildung

$$(A_f)_{\mathfrak{p}A_f} \to A_{\mathfrak{p}}, \quad \frac{a}{f^k}/\frac{s}{f^l} \mapsto \frac{a}{f^k}/\frac{s}{f^l} = \frac{f^l a}{f^k s}$$

wohldefiniert und injektiv ist. Da die Surjektivität klar ist, folgt $(A_f)_{\mathfrak{p}A_f} \simeq A_{\mathfrak{p}}$.
Wie sieht $\mathcal{O}_{A_f}(U)$ aus? Für U können wir offene Teilmengen von $D(f)$ wählen. Formal besteht $\mathcal{O}_{A_f}(U)$ aus Funktionen $\varphi : U \to \cup_{\mathfrak{p} \in U}(A_f)_{\mathfrak{p}A_f}$, die sich lokal als Quotienten von Elementen aus A_f schreiben lassen. Nach dem gerade bewiesenen Isomorphismus kann man diese Funktionen aber sofort mit den Elementen von $\mathcal{O}_A(U)$ identifizieren, womit wir folgendes Lemma bewiesen haben:

Lemma 22. *Für $f \in A$ ist $(D(f), \mathcal{O}_A|_{D(f)}) \simeq (\mathrm{Spec}(A_f), \mathcal{O}_{A_f})$, d.h. $D(f)$ ist ein affines Schema.*

Satz 10. *Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema und $U \subseteq X$ offen, so ist auch $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ ein Schema. Man nennt dies ein offenes Unterschema von $(X, \mathcal{O}_X)$.*

Beweis: Sei $P \in U$ ein Punkt. Nach Definition gibt es eine offene Umgebung V von P, die isomorph zum Spektrum eines Ringes ist, d.h. $V \simeq \mathrm{Spec}(A)$. Da jede offene Menge von $\mathrm{Spec}(A)$ Vereinigung von Mengen der Gestalt $D(f)$ ist, gibt es ein f mit $P \in D(f) \subseteq V \cap U \subseteq U$. Dann ist aber $(D(f), \mathcal{O}_X|_{D(f)})$ eine affine Umgebung von P in U, woraus die Behauptung folgt. ■

Aus dem Satz und der Definition eines Schemas folgt unmittelbar:

Folgerung 8. *Die affinen offenen Mengen eines Schemas bilden eine Basis der Topologie.*

Im folgenden werden wir noch zwei Konstruktionsverfahren angeben, wie man zu nichtaffinen Schematas kommen kann.

Verkleben zweier Schemata: Seien $(X_1, \mathcal{O}_{X_1})$ und $(X_2, \mathcal{O}_{X_2})$ zwei Schemata, die isomorphe offene Teilmengen besitzen, d.h. es gibt $U_1 \subseteq X_1$ und $U_2 \subseteq X_2$ mit $(U_1, \mathcal{O}_{X_1}|_{U_1}) \simeq (U_2, \mathcal{O}_{X_2}|_{U_2})$. Wir wollen X_1 und X_2 längs $U_1 \simeq U_2$ verkleben.

1. Wir haben einen Homöomorphismus $\phi : U_1 \to U_2$ und für $U \subseteq U_2$ Ringisomorphismen $\psi(U) : \mathcal{O}_{X_2}(U) \to \mathcal{O}_{X_1}(\phi^{-1}(U))$, die mit der Einschränkungsabbildung verträglich sind.
2. Wir setzen $X = (X_1 \cup X_2)/\sim$, wo $\sim$ durch $x_1 \sim \phi(x_1)$ für $x_1 \in U_1$ definiert wird. Wir haben dann die natürlichen Abbildungen $i_1 : X_1 \to X$ und $i_2 : X_2 \to X$ und damit mengentheoretisch
$$X = \{i_1(x_1) : x_1 \in X_1 \setminus U_1\} \cup \{i_1(x_1) : x_1 \in U_1\} \cup \{i_2(x_2) : x_2 \in X_2 \setminus U_2\}.$$
Außerdem gilt für $x_1 \in U_1$: $i_2(\phi(x_1)) = i_1(x_1)$. Natürlich sind i_1 und i_2 jeweils bijektiv aufs Bild.
3. Wir führen auf X die Quotiententopologie ein, d.h. $V \subseteq X$ ist genau dann offen, wenn $i_1^{-1}(V) \subseteq X_1$ und $i_2^{-1}(V) \subseteq X_2$ offen sind. Sei $W_1 \subseteq X_1$. Dann ist
$$i_1^{-1}(i_1(W_1)) = W_1 \text{ und } i_2^{-1}(i_1(W_1)) = \phi(W_1 \cap U_1).$$
Daraus ersieht man, daß W_1 genau dann offen ist, wenn $i_1(W_1)$ offen ist. Insbesondere ist $i_1(X_1)$ offen in X. Also induziert i_1 einen Homöomorphismus von X_1 und $i_1(X_1)$. Analoges gilt für X_2.
4. Sei $V \subseteq X$ offen. Dann liefert ϕ einen Homöomorphismus $i_1^{-1}(V) \cap U_1 \to i_2^{-1}(V) \cap U_2$, insbesondere ist $\phi^{-1}(i_2^{-1}(V) \cap U_2) = i_1^{-1}(V) \cap U_1$. Wir haben dann einen Ringisomorphismus
$$\psi(i_2^{-1}(V) \cap U_2) : \mathcal{O}_{X_2}(i_2^{-1}(V) \cap U_2) \to \mathcal{O}_{X_1}(i_1^{-1}(V) \cap U_1).$$
Für offene Teilmengen $V \subseteq X$ definieren wir
$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_X(V) \quad = \quad &\{(s_1, s_2) : s_1 \in \mathcal{O}_{X_1}(i_1^{-1}(V)), s_2 \in \mathcal{O}_{X_2}(i_2^{-1}(V)), \text{ und} \\
&\psi(i_2^{-1}(V) \cap U_2)(s_2|_{i_2^{-1}(V) \cap U_2}) = s_1|_{i_1^{-1}(V) \cap U_1}\}.
\end{aligned}$$

Man überzeugt sich schnell davon, daß $\mathcal{O}_X$ eine Garbe von Ringen auf X ist. Also ist $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum.

5. Sei $V_1 \subseteq i_1(X_1)$ offen. Dann gibt es $W_1 \subseteq X_1$ offen mit $V_1 = i_1(W_1)$. Es ist $i_1^{-1}(V_1) = W_1$ und $i_2^{-1}(V_1) = \phi(W_1 \cap U_1)$. Für $(s_1, s_2) \in \mathcal{O}_X(V_1)$ gilt $s_1 \in \mathcal{O}_{X_1}(W_1)$, $s_2 \in \mathcal{O}_{X_2}(\phi(W_1 \cap U_1))$ mit der Bedingung
$$\psi(\phi(W_1 \cap U_1))(s_2) = \psi(\phi(W_1 \cap U_1))(s_2|_{\phi(W_1 \cap U_1)}) = s_1|_{W_1 \cap U_1},$$
was sich auch als
$$s_2 = \psi(\phi(W_1 \cap U_1)^{-1}(s_1|_{W_1 \cap U_1})$$
schreiben läßt, d.h. s_2 ist durch s_1 bereits eindeutig bestimmt. Damit liefert die Zuordnung
$$\mathcal{O}_X(V_1) \to \mathcal{O}_{X_1}(i_1^{-1}(V_1)), (s_1, s_2) \mapsto s_1$$
einen Garbenisomorphismus $\mathcal{O}_X|_{i_1(X_1)} \simeq i_{1*}\mathcal{O}_{X_1}$, die geringten Räume $(i_1(X_1), \mathcal{O}_X|_{i_1(X_1)})$ und $(X_1, \mathcal{O}_{X_1})$ sind also isomorph. Analoges gilt für $i_2(X_2)$. Jeder Punkt aus $i_1(X_1)$ und aus $i_2(X_2)$ besitzt also eine affine Umgebung. Wegen $X = i_1(X_1) \cup i_2(X_2)$ hat also jeder Punkt von X eine affine Umgebung, womit klar ist, daß X ein Schema ist. X_1 und X_2 sind offene Unterschemata von X.

Beispiel: Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper,
$$X_1 = \operatorname{Spec}(k[u]) = \{(0)\} \cup \{(u-c) : c \in k\} \text{ und } X_2 = \operatorname{Spec}(k[v]) = \{(0)\} \cup \{(v-c) : c \in k\}.$$
Ist $W_1 \subseteq X_1$ offen und nichtleer, so gibt es $c_1, \ldots, c_r \in k$ mit $W_1 = X_1 \setminus \{(u-c_1), \ldots, (u-c_r)\}$; verwenden wir $\mathcal{O}_{X_1}(W_1) \subseteq k(u)$, so ist
$$\mathcal{O}_{X_1}(W_1) = \{g(u) \in k(u) : g \text{ definiert außerhalb } c_1, \ldots, c_r\}.$$
Analoges gilt $\mathcal{O}_{W_2}(W_2) \subseteq k(v)$ für $W_2 \subseteq X_2$ offen und nichtleer. Wir haben die Nullpunkte $(u) \in X_1$ und $(v) \in X_2$. Die offenen Mengen
$$U_1 = X_1 \setminus \{(u)\} = \{(0)\} \cup \{(u-c) : c \neq 0\} \text{ und } U_2 = X_2 \setminus \{(v)\} = \{(0)\} \cup \{(v-c) : c \neq 0\}$$
sind dann als geringte Räume isomorph vermöge der durch $u \mapsto v$ gegebenen Abbildung, man schreibt ja nur v statt u. Sei X die Verklebung von X_1 und X_2 längs $U_1 \simeq U_2$. Ist $P_1 = i_1((u))$ und $P_2 = i_2((v))$, so ist
$$X = i_1(U_1) \cup \{P_1, P_2\}.$$
Sei $V \subseteq X$ offen und nichtleer und $(s_1, s_2) \in \mathcal{O}_X(V)$. Wir haben $s_1 \in \mathcal{O}_{X_1}(i_1^{-1}(V)) \subseteq k(u)$ und $s_2 \in \mathcal{O}_{X_2}(i_2^{-1}(V)) \subseteq k(v)$, d.h. es gibt rationale Funktionen $g(u)$ und $h(v)$ mit $s_1 = g(u)$ und $s_2 = h(v)$. Da $i_2^{-1}(V) \cap U_2 \neq \emptyset$, muß gelten $g(v) = h(v)$, also können wir schreiben
$$\mathcal{O}_X(U) = \{f(x) \in k(x) : f(u) \text{ definiert auf } i_1^{-1}(V), f(v) \text{ definiert auf } i_2^{-1}(V)\}.$$
Aus $\mathcal{O}_{X_1}(X_1) = k[u]$ und $\mathcal{O}_{X_2}(X_2) = k[v]$ erhalten wir $\mathcal{O}_X(X) \simeq k[x]$. Die Restklassenkörper sind $k(P_1) = k(P_2) = k$. Allerdings passiert etwas Eigenartiges: Für jedes $f \in k[x] = \mathcal{O}_X(X)$ gilt $f(P_1) = f(P_2)$. Die Punkte können also durch Funktionen nicht getrennt werden. (Daher ist X kein affines Schema.) Man nennt X die affine Gerade mit verdoppeltem Nullpunkt.

Beispiel: Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper, $X_1 = \operatorname{Spec}(k[u])$ und $X_2 = \operatorname{Spec}(k[v])$. Wir nehmen wieder die offenen Mengen
$$U_1 = X_1 \setminus \{(u)\} = \{(0)\} \cup \{(u-c) : c \neq 0\} \text{ und } U_2 = X_2 \setminus \{(v)\} = \{(0)\} \cup \{(v-c) : c \neq 0\},$$
wir wollen aber jetzt den durch die Abbildung $u \mapsto \frac{1}{v}$ induzierten Isomorphismus geringter Räume zwischen $(U_1, \mathcal{O}_{X_1}|_{U_1})$ und $(U_2, \mathcal{O}_{X_2}|_{U_2})$ zum Verkleben benutzen, wobei eine Funktion $h(v) \in k(v)$ in $h(\frac{1}{u}) \in k(u)$ übergeht. Genauer: Wir definieren
$$\phi : U_1 \to U_2 \text{ durch } \phi((0)) = (0) \text{ und } \phi((u-c)) = (v - \frac{1}{c}) \text{ für } c \neq 0.$$
Ist $U \subseteq U_2$ offen und nichtleer, so hat es die Gestalt
$$U = X_2 \setminus \{(v), (v-d_1), \ldots, (v-d_r)\} \text{ mit } d_1, \ldots, d_r \neq 0.$$

Dann ist

$$\phi^{-1}(U) = X_1 \setminus \{(u), (u - \frac{1}{d_1}), \ldots, (u - \frac{1}{d_r})\}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{X_2}(U) &= \{h(v) \in k(v) : h \text{ definiert außerhalb } 0, d_1, \ldots, d_r\} \text{ und} \\ \mathcal{O}_{X_1}(\phi^{-1}(U)) &= \{g(u) \in k(u) : g \text{ definiert außerhalb } 0, \frac{1}{d_1}, \ldots, \frac{1}{d_r}\} \end{aligned}$$

ist klar, daß

$$\psi(U) : \mathcal{O}_{X_2}(U) \to \mathcal{O}_{X_1}(\phi^{-1}(U)), \quad h(v) \mapsto h(\frac{1}{u})$$

ein Ringisomorphismus ist, was schließlich den Isomorphismus $(U_1, \mathcal{O}_{X_1}|_{U_1}) \simeq (U_2, \mathcal{O}_{X_2}|_{U_2})$ geringter Räume liefert. Wir verkleben jetzt X_1 und X_2 längs $U_1 \simeq U_2$ und erhalten X. Mit $P_1 = i_1((u))$ und $P_2 = i_2((v))$ wird

$$X = i_1(X_1) \cup \{P_1, P_2\}.$$

Sei $V \subseteq X$ offen und nichtleer. Für $(s_1, s_2) \in \mathcal{O}_X(V)$ ist $s_1 \in \mathcal{O}_{X_1}(i_1^{-1}(V)) \subseteq k(u)$, $s_2 \in \mathcal{O}_{X_2}(i_2^{-1}(V)) \subseteq k(v)$, mit der Bedingung $\psi(i_2^{-1}(V) \cap U_2)(s_2|_{i_2^{-1}(V)\cap U_2}) = s_1|_{i_1^{-1}(V)\cap U_1}$, was sich hier auf

$$s_1(u) = s_1|_{i_1^{-1}(V)\cap U_1} = \psi(i_2^{-1}(V) \cap U_2)(s_2|_{i_2^{-1}(V)\cap U_2}) = \psi(i_2^{-1}(V) \cap U_2)(s_2(v)) = s_2(\frac{1}{u})$$

reduziert; also ist $s_2(v) = s_1(\frac{1}{v})$. Ähnlich wie oben können wir dann schreiben

$$\mathcal{O}_X(V) = \{f(x) \in k(x) : f(u) \text{ ist definiert auf } i_1^{-1}(V), f(\frac{1}{v}) \text{ ist definiert auf } i_2^{-1}(V)\}.$$

Was ist $\mathcal{O}_X(X)$? Ist $f \in \mathcal{O}_X(X) \subseteq k(x)$, so ist $f(u)$ auf ganz X_1 definiert, also ein Polynom. Da aber auch $f(\frac{1}{v})$ auf ganz X_2 definiert sein muß, ist f konstant. Damit folgt $\mathcal{O}_X(X) = k$. Wir werden später sehen, daß X isomorph zur projektiven Geraden ist.

Das projektive Spektrum graduierter Ringe: Analog zu den projektiven Varietäten in der klassischen algebraischen Geometrie konstruieren wir aus graduierten Ringen eine neue Klasse von Schemata.

1. Ein graduierter Ring S ist ein Ring, der eine Zerlegung $S = \oplus_{d\geq 0} S_d$ in eine direkte Summe abelscher Gruppen bzgl. der Addition besitzt. Für die Multiplikation gilt $S_d \cdot S_e \subseteq S_{d+e}$. Ein Element von S_d heißt homogen vom Grad d. Jedes $f \in S$ hat eine eindeutige Zerlegung $f = f_0 + f_1 + f_2 + \ldots$, wo f_d homogen vom Grad d ist. Ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq S$ heißt homogen, wenn es sich von homogenen Elementen erzeugen läßt; gleichwertig damit ist, daß für $f = f_0 + f_1 + f_2 + \cdots \in S$ gilt: $f \in \mathfrak{a} \iff f_0, f_1, f_2, \cdots \in \mathfrak{a}$. Weitere Eigenschaften gelten, die wir bei Bedarf erwähnen. Eine besondere Rolle spielt das Ideal $S_+ = \oplus_{d>0} S_d$.
2. Wir definieren das projektive Spektrum des graduierten Ringes S als Menge durch
$$\mathrm{Proj}(S) = \{\mathfrak{p} \text{ homogenes Primideal mit } S_+ \not\subseteq \mathfrak{p}\}.$$
3. Definiert man für ein homogenes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq S$
$$V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}(S) : \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\},$$
so erfüllen die Mengen dieser Gestalt das Axiomensystem für die abgeschlossenen Mengen einer Topologie, die von jetzt an zugrunde gelegt wird. Für ein homogenes $f \in S$ definiert man
$$D_+(f) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}(S) : f \notin \mathfrak{p}\}.$$
Wie früher sieht man, daß jede offene Menge von $\mathrm{Proj}(S)$ eine Vereinigung von Mengen der Gestalt $D_+(f)$ ist.
4. Wir wollen jetzt eine Garbe von Ringen auf $\mathrm{Proj}(S)$ einführen. Sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}(S)$. Dann ist
$$T = \{f \in S : f \text{ homogen}, f \notin \mathfrak{p}\}$$
eine multiplikative Teilmenge, wir können also den Ring $T^{-1}S$ betrachten. Wir definieren
$$S_{(\mathfrak{p})} = \{\frac{a}{f} \in T^{-1}S : a \text{ und } f \text{ sind homogen von gleichem Grad}\}.$$

Offensichtlich ist $S_{(\mathfrak{p})}$ ein Ring. Wir definieren jetzt für $U \subseteq \operatorname{Proj}(S)$ offen:

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(U) \quad = \quad & \{\varphi : U \to \cup_{\mathfrak{p}\in U} S_{(\mathfrak{p})}, \varphi(\mathfrak{p}) \in S_{(\mathfrak{p})}, \text{ es gibt offene Überdeckung } U = \cup U_i, \\ & a_i, f_i \in S, \text{ wo } a_i \text{ und } f_i \text{ homogen vom gleichen Grad sind mit} \\ & \varphi(\mathfrak{p}) = \frac{a_i}{f_i} \text{ für } \mathfrak{p} \in U_i\}.\end{aligned}$$

Dann ist $\mathcal{O}$ eine Garbe von Ringen auf $\operatorname{Proj}(S)$. Von nun an denken wir uns $\operatorname{Proj}(S)$ als den geringten Raum $(\operatorname{Proj}(S), \mathcal{O})$. Wie früher sieht man, daß für den Halm in $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj}(S)$ gilt: $\mathcal{O}_\mathfrak{p} \simeq S_{(\mathfrak{p})}$.

5. Für ein homogenes $f \in S$ sei
$$S_{(f)} = \{\frac{a}{f^n} \in S_f : a, f^n \text{ homogen von gleichem Grad}\}.$$
Dann gibt es einen Isomorphismus geringter Räume
$$(D_+(f), \mathcal{O}|_{D_+(f)}) \simeq \operatorname{Spec}(S_{(f)}).$$
Da die $D_+(f)$ ganz $\operatorname{Proj}(S)$ überdecken, hat also jeder Punkt eine affine Umgebung. Damit ist $\operatorname{Proj}(S)$ ein Schema.

Bemerkung: Wie im Fall von $\operatorname{Spec}(A)$ wird es einfacher, wenn der graduierte Ring S ein Integritätsring mit Quotientenkörper K ist. Dann ist
$$K_0 = \{\frac{f}{g} \in K : f, g \text{ homogen vom gleichen Grad}\}$$
ein Teilkörper von K, der Unterkörper der Elemente vom Grad 0. Der Ring
$$S_{(\mathfrak{p})} = \{\frac{f}{g} \in K_0 : f, g \text{ homogen vom gleichen Grad}, g \notin \mathfrak{p}\}$$
besteht aus den Elementen von K_0, die in $\mathfrak{p}$ definiert sind. Wir offenes $U \subseteq \operatorname{Proj}(S)$ kann man schreiben
$$\mathcal{O}(U) = \{f \in K_0, f \text{ ist definiert in allen } \mathfrak{p} \in U\} = \cap_{\mathfrak{p}\in U} S_{(\mathfrak{p})}.$$

Beispiel: Sei A ein Ring und $S = A[x_0, \dots, x_n]$ der Polynomring über A mit der üblichen Graduierung. Es ist $D_+(x_i) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj}(S) : x_i \notin \mathfrak{p}\}$ und
$$S_{(x_i)} = \{\frac{a(x_0, \dots, x_n)}{x_i^d} \in S_{x_i} : a(x_0, \dots, x_n) \in S_d\} \simeq A[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}],$$
also
$$(D_+(x_i), \mathcal{O}|_{D_+(x_i)}) \simeq \operatorname{Spec}(A[y_1, \dots, y_n]) \simeq \mathbf{A}^n_A.$$
Da für $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj}(S)$ gilt $S_1 \not\subseteq \mathfrak{p}$, gibt es ein i mit $x_i \notin \mathfrak{p}$, d.h. $\mathfrak{p} \in D_+(x_i)$. Also wird $\operatorname{Proj}(A[x_0, \dots, x_n])$ von den affinen Schemata $D_+(x_i) \simeq \mathbf{A}^n_A$ überdeckt.

Beispiel: Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und $S = k[x_0, x_1]$. Jedes homogene Polynom $f(x_0, x_1)$ zerfällt in Linearfaktoren. Ist also $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj}(S)$ und $\mathfrak{p} \neq (0)$, so gibt es $\ell = ax_0 + bx_1 \in \mathfrak{p}$, d.h. $(\ell) \subseteq \mathfrak{p}$. Wäre $f(x_0, x_1) \in \mathfrak{p}$, aber $f(x_0, x_1) \notin (\ell)$, so gäbe es einen weiteren Linearfaktor $\ell' = cx_0 + dx_1 \in \mathfrak{p}$, der wesentlich von ℓ verschieden ist, was aber sofort $(x_0, x_1) \subseteq \mathfrak{p}$ liefern würde. Also ist $\mathfrak{p} = (ax_0 + bx_1)$. Damit ist
$$\operatorname{Proj}(k[x_0, x_1]) = \{(0)\} \cup \{(ax_0 + bx_1) : a, b \in k, (a, b) \neq (0, 0\}.$$
Man sieht sofort
$$\begin{aligned} D_+(x_0) &= \{(0)\} \cup \{(x_1 - cx_0) : c \in k\}, \\ D_+(x_1) &= \{(0)\} \cup \{(x_0 - cx_1) : c \in k\}, \end{aligned}$$
und damit
$$\operatorname{Proj}(k[x_0, x_1]) = D_+(x_0) \cup \{(x_0)\} = D_+(x_1) \cup \{(x_1)\}.$$

KAPITEL 4

Morphismen

Wir haben Schemata definiert als geringte Räume, die lokal wie Spektren von Ringen aussehen. Wir müssen nun definieren, was die richtigen Abbildungen zwischen Schemata sind. Zur Motivation betrachten wir zwei wichtige Beispiele:

Beispiele:

1. Sei $\phi : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. $\mathcal{O}_X$ und $\mathcal{O}_Y$ bezeichne die Garbe der reellwertigen stetigen Funktionen auf X bzw. Y. Ist $U \subseteq Y$ offen und $f : U \to \mathbf{R}$ stetig, so ist auch $f \circ \phi : \phi^{-1}(U) \to \mathbf{R}$ stetig, d.h. wir erhalten eine Abbildung
$$\mathcal{O}_Y(U) \to \mathcal{O}_X(\phi^{-1}(U)) = (\phi_*\mathcal{O}_X)(U), \quad f \mapsto f \circ \phi,$$
die offensichtlich mit der Einschränkungsabbildung verträglich ist, d.h. wir haben einen Garbenmorphismus $\mathcal{O}_Y \to \phi_*\mathcal{O}_X$.
2. Seien X und Y algebraische Varietäten über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k. Ein Morphismus $\phi : X \to Y$ ist eine stetige Abbildung, so daß für jede offene Menge $U \subseteq Y$ und jede reguläre Funktion $f : U \to k$ auch $f \circ \phi : \phi^{-1}(U) \to k$ regulär ist. Bezeichnet jetzt $\mathcal{O}_X$ bzw. $\mathcal{O}_Y$ die Garbe der regulären Funktionen auf X bzw. Y, so erhalten wir wieder für jede offene Menge $U \subseteq Y$ einen Ringhomomorphismus
$$\mathcal{O}_Y(U) \to \mathcal{O}_X(\phi^{-1}(U)) = (\phi_*\mathcal{O}_X)(U), \quad f \mapsto f \circ \phi,$$
der mit der Einschränkungsabbildung verträglich ist, damit also einen Garbenmorphismus $\mathcal{O}_Y \to \phi_*\mathcal{O}_X$.

Was soll jetzt ein Morphismus zwischen beliebigen geringten Räumen $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ sein? Natürlich sollte es eine stetige Abbildung $\phi : X \to Y$ geben, da aber $\mathcal{O}_X$ und $\mathcal{O}_Y$ keine Garben von Funktionen sein müssen, kann man nicht die Komposition mit ϕ benutzen um einen Garbenmorphismus $\mathcal{O}_Y \to \phi_*\mathcal{O}_X$ zu definieren. Daher lassen wir zunächst beliebige Garbenmorphismen $\mathcal{O}_Y \to \phi_*\mathcal{O}_X$ zu und gelangen damit zu folgender Definition:

Definition 17. *Ein Morphismus geringter Räume $(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ besteht aus einer stetiger Abbildung $\phi : X \to Y$ und einem Garbenmorphismus $\phi^\sharp : \mathcal{O}_Y \to \phi_*\mathcal{O}_X$, d.h. man hat für jede offene Menge $U \subseteq Y$ Ringhomomorphismen*
$$\phi^\sharp(U) : \mathcal{O}_Y(U) \to \mathcal{O}_X(\phi^{-1}(U)),$$
die mit der Einschränkungsabbildung verträglich sind. Wir schreiben statt $(\phi, \phi^\sharp)$ auch manchmal einfach ϕ.

Unsere obigen Beispiele sind also Morphismen geringter Räume.

Beispiel: Wir definieren einen Morphismus geringter Räume zwischen $\mathrm{Spec}(\mathbf{Q}) = \{(0)\}$ und $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}) = \{(0)\} \cup \{(p) : p \text{ prim}\}$: Wir setzen zunächst $\phi((0)) = (5)$. Ist $U \subseteq \mathrm{Spec}\mathbf{Z}$ offen und nichtleer, so gibt es Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$ mit $U = \mathrm{Spec}\mathbf{Z} \setminus \{(p_1), \ldots, (p_r)\}$. Es ist
$$\mathcal{O}_\mathbf{Z}(U) = \{x \in \mathbf{Q} : x \text{ definiert außerhalb } p_1, \ldots, p_r\} = \mathbf{Z}_{p_1 \cdots p_r} \subseteq \mathbf{Q}.$$
Ist $(5) \notin U$, so ist $\phi^{-1}(U) = \emptyset$, also ist $\phi^*(U) = 0$, ist $(5) \in U$, so ist $\phi^{-1}(U) = \mathrm{Spec}\mathbf{Q}$ und wir definieren $\phi^\sharp(U) : \mathcal{O}_\mathbf{Z}(U) \to \mathcal{O}_\mathbf{Q}(\mathrm{Spec}(\mathbf{Q})) = \mathbf{Q}$ durch die Inklusion. Hier ist also $(\phi_*\mathcal{O}_\mathbf{Q})(U) = 0$ für $(5) \notin U$ und $(\phi_*\mathcal{O}_\mathbf{Q})(U) = \mathbf{Q}$ für $(5) \in U$.

Bemerkung: Seien X und Y affine Varietäten über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k und den affinen Koordinatenringen $k[X]$ und $k[Y]$. Wir hatten dann gesehen, daß es eine Bijektion gibt

$$\text{Morphismen } X \to Y \quad \leftrightarrow \quad \text{Ringhomomorphismen } k[Y] \to k[X].$$

Etwas Ähnliches wollen wir für affine Schemata erreichen.

Konstruktion des assoziierten Morphismus $\tilde{\varphi}$: Spec$(B) \to$ Spec(A) zu einem Ringhomomorphismus $\varphi : A \to B$:

1. Wir wissen bereits, daß ein Ringhomomorphismus $\varphi : A \to B$ eine stetige Abbildung
$$\tilde{\varphi} : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A), \quad \mathfrak{q} \mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$$
liefert. Für $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B)$ ist also $\tilde{\varphi}(\mathfrak{q}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$. Alle Elemente aus $A \setminus \varphi^{-1}\mathfrak{q}$ werden unter der Abbildung $A \to B \to B_\mathfrak{q}$ zu Einheiten, also erhalten wir eine induzierte Abbildung
$$\varphi_\mathfrak{q} : A_{\tilde{\varphi}(\mathfrak{q})} \to B_\mathfrak{q}, \quad \frac{a}{s} \mapsto \frac{\varphi(a)}{\varphi(s)}.$$
2. Wir wollen jetzt einen Garbenmorphismus $\mathcal{O}_A \to \tilde{\varphi}_*\mathcal{O}_B$ konstruieren, d.h. mit der Einschränkungsabbildung verträgliche Ringhomomorphismen $\mathcal{O}_A(U) \to \mathcal{O}_B(\tilde{\varphi}^{-1}(U))$ für alle offenen Mengen $U \subseteq \mathrm{Spec}(A)$. Nun ist
$$\begin{aligned} \mathcal{O}_A(U) &= \{\alpha : U \to \cup_{\mathfrak{p}\in U} A_\mathfrak{p}, \text{ es gibt } a_i, s_i \text{ mit } U = \cup D(s_i) \text{ und} \\ &\qquad \alpha(\mathfrak{p}) = \frac{a_i}{s_i} \in A_\mathfrak{p} \text{ für } \mathfrak{p} \in D(s_i)\}, \\ \mathcal{O}_B(\tilde{\varphi}^{-1}(U)) &= \{\beta : \tilde{\varphi}^{-1}(U) \to \cup_{\mathfrak{q}\in\tilde{\varphi}^{-1}(U)} B_\mathfrak{q}, \text{ es gibt } b_i, t_i \text{ mit } \tilde{\varphi}^{-1}(U) = \cup D(t_i) \text{ und} \\ &\qquad \beta(\mathfrak{q}) = \frac{b_i}{t_i} \in B_\mathfrak{q} \text{ für } \mathfrak{q} \in D(t_i)\}. \end{aligned}$$
Sei jetzt $\alpha \in \mathcal{O}_A(U)$. Ist $\mathfrak{q} \in \tilde{\varphi}^{-1}(U)$, so ist $\tilde{\varphi}(\mathfrak{q}) \in U$, darauf kann man α anwenden, erhält $\alpha(\tilde{\varphi}(\mathfrak{q})) \in A_{\tilde{\varphi}(\mathfrak{q})}$, worauf man wiederum $\varphi_\mathfrak{q}$ anwenden kann und $\varphi_\mathfrak{q}(\alpha(\tilde{\varphi}(\mathfrak{q}))) \in B_\mathfrak{q}$ erhält. Wir definieren also
$$\beta : \tilde{\varphi}^{-1}(U) \to \cup_{\mathfrak{q}\in\tilde{\varphi}^{-1}(U)} B_\mathfrak{q}, \quad \mathfrak{q} \mapsto \varphi_\mathfrak{q}(\alpha(\tilde{\varphi}(\mathfrak{q}))) \in B_\mathfrak{q}.$$
3. Seien jetzt $a_i, s_i \in A$ mit $U = \cup D(s_i)$ und $\alpha(\mathfrak{q}) = \frac{a_i}{s_i} \in A_\mathfrak{p}$ für $\mathfrak{p} \in D(s_i)$. Für $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B)$ gilt
$$\begin{aligned} \mathfrak{q} \in \tilde{\varphi}^{-1}(D(s_i)) &\iff \tilde{\varphi}(\mathfrak{q}) \in D(s_i) \iff s_i \notin \tilde{\varphi}(\mathfrak{q}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \iff \varphi(s_i) \notin \mathfrak{q} \\ &\iff \mathfrak{q} \in D(\varphi(s_i)), \end{aligned}$$
d.h. $\tilde{\varphi}^{-1}(D(s_i)) = D(\varphi(s_i))$, und damit
$$\tilde{\varphi}^{-1}(U) = \tilde{\varphi}^{-1}(\cup D(s_i)) = \cup\tilde{\varphi}^{-1}(D(s_i)) = \cup D(\varphi(s_i)).$$
Für $\mathfrak{q} \in D(\varphi(s_i))$ ist $\tilde{\varphi}(\mathfrak{q}) \in D(s_i)$ und damit gilt in $B_\mathfrak{q}$:
$$\beta(\mathfrak{q}) = \varphi_\mathfrak{q}(\alpha(\tilde{\varphi}(\mathfrak{q}))) = \varphi_\mathfrak{q}(\frac{a_i}{s_i}) = \frac{\varphi(a_i)}{\varphi(s_i)}.$$
Also ist $\beta \in \mathcal{O}_B(\tilde{\varphi}^{-1}(U))$. Damit ist klar, daß
$$\tilde{\varphi}^\sharp : \mathcal{O}_A(U) \to \mathcal{O}_B(\tilde{\varphi}^{-1}(U)), \quad \alpha \mapsto (\mathfrak{q} \mapsto \varphi_\mathfrak{q}(\alpha(\tilde{\varphi}(\mathfrak{q}))) \quad)$$
sinnvoll definiert ist und einen Ringhomomorphismus liefert, der mit Einschränkung verträglich ist. Somit liefert $(\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}^\sharp)$ einen Morphismus geringter Räume zwischen Spec(B) und Spec(A).

Wir wissen, daß für $f \in A$ gilt $\mathcal{O}_A(D(f)) \simeq A_f$. Damit liefert obige Konstruktion das folgende Lemma:

Lemma 23. *Sei $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus und $(\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}^\sharp) : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A))$ der zugeordnete Morphismus zwischen den Spektrum. Für $f \in A$ ist dann $\tilde{\varphi}^{-1}(D(f)) = D(\varphi(f))$ und der Ringhomomorphismus $\tilde{\varphi}^\sharp(D(f)) : \mathcal{O}_A(D(f)) \to \mathcal{O}_B(D(\varphi(f))$ wird mit der Isomorphie $\mathcal{O}_A(D(f)) \simeq A_f$ und $\mathcal{O}_B(D(\varphi(f)) \simeq B_{\varphi(f)}$ gegeben durch*
$$A_f \to B_{\varphi(f)}, \quad \frac{a}{f^n} \mapsto \frac{\varphi(a)}{\varphi(f)^n}.$$

Bemerkung: Ist A ein Integritätsring mit Quotientenkörper K, so gilt $A \subseteq A_\mathfrak{p} \subseteq K$ für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$. Der Ring $A_\mathfrak{p}$ besteht genau aus den Elementen von K, die in $\mathfrak{p}$ definiert sind. Ist $U \subseteq \mathrm{Spec}(A)$ offen und nichtleer, so ist

$$\mathcal{O}_A(U) \simeq \{x \in K : x \text{ definiert in allen Punkten } \mathfrak{p} \in U\} = \cap_{\mathfrak{p}\in U} A_\mathfrak{p},$$

wobei eine Funktion $\alpha \in \mathcal{O}_A(U)$, $\alpha : U \to \cup_{\mathfrak{p}\in U} A_\mathfrak{p}$ durch ein Element $x \in K$, genauer $x \in \cap_{\mathfrak{p}\in U} A_\mathfrak{p}$ und $\alpha(\mathfrak{p}) = x$ gegeben wird. Wenn A ein Integritätsring ist, benutzen wir oft diese Identifikation für $\mathcal{O}_A(U)$.

Beispiel: Sei A ein Integritätsring mit Quotientenkörper K und $\varphi : A \to K$ die Inklusion. Dann ist

$$\tilde{\varphi} : \mathrm{Spec}(K) \to \mathrm{Spec}(A), \quad (0) \mapsto (0).$$

(0) ist generischer Punkt von $\mathrm{Spec}(A)$, d.h. die kleinste abgeschlossene Menge, die (0) enthält, ist $\mathrm{Spec}(A)$. Also ist (0) in jeder offenen nichtleeren Menge enthalten. Sei jetzt $U \subseteq \mathrm{Spec}(A)$ offen und nichtleer. Dann ist $\tilde{\varphi}^{-1}(U) = \mathrm{Spec}(K)$. Die Abbildung $\tilde{\varphi}^\sharp : \mathcal{O}_A(U) \to \mathcal{O}_K(\mathrm{Spec}(K))$ ist dann wegen

$$\mathcal{O}_A(U) = \cap_{\mathfrak{p}\in U} A_\mathfrak{p} \subseteq K \text{ und } \mathcal{O}_K(\mathrm{Spec}(K)) = K$$

einfach die Inklusion.

Beispiel: Sei $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus zwischen Integritätsringen. Bezeichnet K den Quotientenkörper von A und L den von B, so können wir schreiben

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_A(U) &= \{x \in K : x \text{ definiert in allen } \mathfrak{p} \in U\} = \cap_{\mathfrak{p}\in U} A_\mathfrak{p}, \\ \mathcal{O}_B(V) &= \{y \in L : y \text{ definiert in allen } \mathfrak{q} \in V\} = \cap_{\mathfrak{q}\in V} B_\mathfrak{q} \end{aligned}$$

für nichtleere offene Mengen $U \subseteq \mathrm{Spec}(A)$ und $V \subseteq \mathrm{Spec}(B)$. Nach unserer Definition wird $\tilde{\varphi}^\sharp : \mathcal{O}_A \to \tilde{\varphi}_*\mathcal{O}_B$ durch eine Abbildung der Art $\frac{a}{s} \mapsto \frac{\varphi(a)}{\varphi(s)}$ definiert. Wir wollen dies noch genauer betrachten.
Da B Integritätsring ist, ist $(0) \in \mathrm{Spec}(B)$. Dann ist $\mathfrak{p}_0 := Kern(\varphi) = \tilde{\varphi}((0))$. In natürlichen Weise setzt sich $\varphi : A \to B$ fort zu einem Ringhomomorphismus

$$\varphi : A_{\mathfrak{p}_0} \to L, \quad \frac{a}{s} \mapsto \frac{\varphi(a)}{\varphi(s)},$$

mit Kern $\mathfrak{p}_0 A_{\mathfrak{p}_0}$.
Sei jetzt $U \subseteq \mathrm{Spec}(A)$ offen. Wir unterscheiden zwei Möglichkeiten:

1. Ist $\tilde{\varphi}^{-1}(U) = \emptyset$, so ist $\mathcal{O}_B(\tilde{\varphi}^{-1}(U)) = 0$, also $\tilde{\varphi}^\sharp(U) = 0$.
2. Ist $\tilde{\varphi}^{-1}(U) \neq \emptyset$, so gibt es ein $\mathfrak{q} \in \tilde{\varphi}^{-1}(U)$, also ist $\varphi^{-1}\mathfrak{q} \in U$. Natürlich hat man $\mathfrak{p}_0 \subseteq \varphi^{-1}\mathfrak{q}$ und damit $A_{\varphi^{-1}\mathfrak{q}} \subseteq A_{\mathfrak{p}_0} \subseteq K$, woraus sofort folgt
$$\mathcal{O}_A(U) = \cap_{\mathfrak{p}\in U} A_\mathfrak{p} \subseteq A_{\varphi^{-1}\mathfrak{q}} \subseteq A_{\mathfrak{p}_0}$$
und damit $\tilde{\varphi}^\sharp(U) = \varphi$.

Beispiel: Wir betrachten den Ringhomomorphismus $\varphi : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/(6)$. Man hat dann

$$\tilde{\varphi} : \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}/(6)) \to \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}), \quad (2) \mapsto (2), \quad (3) \mapsto (3).$$

Auf $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}/(6))$ haben wir mit der Abkürzung $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathbf{Z}/(6)}$:

$$\mathcal{O}(\{(2)\}) = \mathbf{Z}/(2), \quad \mathcal{O}(\{(3)\}) = \mathbf{Z}/(3), \quad \mathcal{O}(\{(2),(3)\}) = \mathbf{Z}/(6).$$

Ist $U \subseteq \mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$ offen und nichtleer, so gibt es Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$ mit $U = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}) \setminus \{(p_1), \ldots, (p_r)\}$; es ist dann

$$\mathcal{O}_\mathbf{Z}(U) = \{x \in \mathbf{Q} : x \text{ definiert auf } U\} = \mathbf{Z}_{p_1 \cdots p_r}.$$

Es gibt nun 4 Fälle für offenes $U \subseteq \mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$:

- Ist $(2) \notin U, (3) \notin U$, so ist $\tilde{\varphi}^{-1}(U) = \emptyset$, also $\tilde{\varphi}^\sharp(U) = 0$.
- Ist $(2) \in U, (3) \notin U$, so ist $\mathcal{O}_\mathbf{Z}(U) \subseteq \mathbf{Z}_{(2)}$, $\tilde{\varphi}^{-1}(U) = \{(2)\}$ und $\tilde{\varphi}^\sharp(U)$ die Reduktion modulo 2.
- Ist $(3) \in U, (2) \notin U$, so ist $\mathcal{O}_\mathbf{Z}(U) \subseteq \mathbf{Z}_{(3)}$, $\tilde{\varphi}^{-1}(U) = \{(3)\}$ und $\tilde{\varphi}^\sharp(U)$ die Reduktion modulo 3.
- Ist $(2) \in U, (3) \in U$, so ist $\mathcal{O}_\mathbf{Z}(U) \subseteq \mathbf{Z}_{(2)} \cap \mathbf{Z}_{(3)}$, $\tilde{\varphi}^{-1}(U) = \{(2),(3)\}$ und $\tilde{\varphi}^\sharp(U)$ die Reduktion modulo 6.

Hat jeder Morphismus geringter Räume zwischen $\mathrm{Spec}(B)$ und $\mathrm{Spec}(A)$ die Gestalt $\tilde{\varphi}$ für einen Ringhomomorphismus $\varphi : A \to B$?

Beispiel: Wir betrachten das frühere Beispiel: $\phi : \mathrm{Spec}(\mathbf{Q}) \to \mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$ mit $\phi((0)) = (5)$ etc. Da es nur einen Ringhomomorphismus $\varphi : \mathbf{Z} \to \mathbf{Q}$ gibt, nämlich die Inklusion, und für diesen gilt $\tilde{\varphi}((0)) = (0)$, kommt ϕ nicht von einem Ringhomomorphismus her. So etwas wollten wir eigentlich nicht haben.

Bemerkung: Sei $(\phi, \phi^\sharp) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ ein Morphismus geringter Räume, $P \in X$ und $Q = \phi(P)$. Ist U eine offene Umgebung von Q, so $\phi^{-1}(U)$ eine offene Umgebung von P, woraus sich eine Abbildung

$$\mathcal{O}_Y(U) \overset{\psi(U)}{\to} \mathcal{O}_X(\phi^{-1}(U)) \overset{\rho_{\phi^{-1}(U),P}}{\to} \mathcal{O}_{X,P}$$

ergibt, die offensichtlich mit Einschränkung verträglich ist, so daß wir eine induzierte Abbildung

$$\phi^\sharp_P : \mathcal{O}_{Y,\phi(P)} \to \mathcal{O}_{X,P}$$

erhalten.

Beispiel: Sei $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus und $\tilde{\varphi} : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ der assoziierte Morphismus geringter Räume. Ist $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B)$, dann ist $\mathcal{O}_{B,\mathfrak{q}} = B_{\mathfrak{q}}$, $\mathcal{O}_{A,\tilde{\varphi}(\mathfrak{q})} = A_{\tilde{\varphi}(\mathfrak{q})}$ und nach Konstruktion

$$\tilde{\varphi}^\sharp_{\mathfrak{q}} = \varphi_{\mathfrak{q}} : A_{\tilde{\varphi}(\mathfrak{q})} \to B_{\mathfrak{q}}.$$

Beispiel: Wir betrachten das frühere Beispiel $(\phi, \phi^\sharp) : \mathrm{Spec}(\mathbf{Q}) \to \mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$ mit $\phi((0)) = (5)$. Dann ist $\mathcal{O}_{\mathbf{Z},(5)} = \mathbf{Z}_{(5)}$, $\mathcal{O}_{\mathbf{Q},(0)} = \mathbf{Q}$ und $\phi^\sharp_{(0)} : \mathbf{Z}_{(5)} \to \mathbf{Q}$ die Inklusion.

Beispiel: Wir betrachten nochmals die geometrische Situation: Sei $\phi : X \to Y$ stetig, $\mathcal{O}_X$ und $\mathcal{O}_Y$ die Garbe der stetigen Funktionen auf X und Y und ψ der durch $\mathcal{O}_Y(U) \to \mathcal{O}_X(\phi^{-1}(U)), f \mapsto f \circ \phi$ definierte Morphismus geringter Räume. Für $P \in X$ besteht $\mathcal{O}_{X,P}$ aus den Keimen der in P stetigen Funktionen, analog für $\mathcal{O}_{Y,Q}$. Der Ring $\mathcal{O}_{X,P}$ ist ein lokaler Ring, d.h. er hat genau ein maximales Ideal $\mathfrak{m}_{X,P}$, das aus den Funktionen besteht, die in P eine Nullstelle haben. Ist nun f eine um $\phi(P)$ definierte stetige Funktion mit $f(\phi(P)) = 0$, so ist $f \circ \phi$ um P definiert und hat eine Nullstelle in P, d.h. wir haben

$$\phi^\sharp_P(\mathfrak{m}_{Y,\phi(P)}) \subseteq \mathfrak{m}_{X,P}.$$

Diese in der geometrischen Situation natürliche Aussage muß man im allgemeinen zusätzlich fordern.

DEFINITION 18. *Ein Ringhomomorphismus zwischen lokalen Ringen $\varphi : (A, \mathfrak{m}_A) \to (B, \mathfrak{m}_B)$ heißt lokal, wenn gilt*

$$\varphi(\mathfrak{m}_A) \subseteq \mathfrak{m}_B.$$

Bemerkungen:

1. Ein Ringhomomorphismus $\varphi : A \to B$ zwischen lokalen Ringen ist also lokal, wenn aus $f \equiv 0 \bmod \mathfrak{m}_A$ folgt $\varphi(f) \equiv 0 \bmod \mathfrak{m}_B$. D.h. hat f eine Nullstelle in $\mathfrak{m}_A \in \mathrm{Spec}(A)$, so $\varphi(f)$ eine Nullstelle in $\mathfrak{m}_B \in \mathrm{Spec}(B)$.
2. Sei $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus zwischen lokalen Ringen. Wir haben disjunkte Zerlegungen

   $$A = A^\times \cup \mathfrak{m}_A \quad \text{und} \quad B = B^\times \cup \mathfrak{m}_B.$$

   Natürlich werden Einheiten auf Einheiten abgebildet, d.h.

   $$\varphi(A^\times) \subseteq B^\times,$$

   was man auch in der Form $\varphi^{-1}(\mathfrak{m}_B) \subseteq \mathfrak{m}_A$ schreiben kann. Im allgemeinen kann es passieren, daß Nichteinheiten auf Einheiten abgebildet werden. Ist φ lokal, d.h. $\varphi(\mathfrak{m}_A) \subseteq \mathfrak{m}_B$, so ist dies nicht der Fall. Man kann dann auch sagen: Für $a \in A$ gilt:

   $$a \text{ ist Einheit in } A \iff \varphi(a) \text{ ist Einheit in } B.$$

   Außerdem gilt dann $\varphi^{-1}(\mathfrak{m}_B) = \mathfrak{m}_A$.

Beispiele: Der Ring $\mathbf{Z}_{(p)} = \{\frac{a}{b} \in \mathbf{Q} : a, b \in \mathbf{Z} : b \not\equiv 0 \bmod p\}$ ist lokal mit maximalem Ideal $p\mathbf{Z}_{(p)}$.

1. Wir betrachten die Reduktion modulo p
$$\varphi : \mathbf{Z}_{(p)} \to \mathbf{F}_p.$$
die alle Elemente aus $p\mathbf{Z}_{(p)}$ auf 0 abgebildet werden, ist φ lokal.
2. Wir betrachten die Inklusion
$$\varphi : \mathbf{Z}_{(p)} \to \mathbf{Q}.$$
Offensichtlich gehen hier Nichteinheiten in Einheiten über, d.h. φ ist nicht lokal.
3. Ist $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus und $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B)$, so erhalten wir einen induzierten Ringhomomorphismus lokaler Ringe
$$\varphi_{\mathfrak{q}} : A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{q})} \to B_{\mathfrak{q}}.$$
Da da maximale Ideal von A einfach $\varphi^{-1}(\mathfrak{q})A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{q})}$ ist, ist klar, daß $\varphi_{\mathfrak{q}}$ lokal ist.
4. Für unseren früheren Morphismus geringter Räume $(\phi, \phi^\sharp) : \operatorname{Spec}(\mathbf{Q}) \to \operatorname{Spec}(\mathbf{Z})$ mit $\phi((0)) = (5)$ war
$$\phi^\sharp_{(0)} : \mathbf{Z}_{(5)} \to \mathbf{Q}.$$
$\phi^\sharp_{(0)}$ ist also Ringhomomorphismus zwischen lokalen Ringen, der nicht lokal ist. Dies verursacht genau unser früheres Problem.

Wir kommen jetzt zur entscheidenden Definition für Morphismen:

DEFINITION 19. 1. *Ein lokal geringter Raum ist ein geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$, so daß für alle Punkte $P \in X$ der Halm $\mathcal{O}_{X,P}$ ein lokaler Ring ist. Das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{X,P}$ schreiben wir auch als $\mathfrak{m}_{X,P}$.*
2. *Ein Morphismus lokal geringter Räume zwischen $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ist ein Morphismus geringter Räume $(\phi, \phi^\sharp) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$, so daß für alle $P \in X$ die induzierten Ringhomorphismen*
$$\phi^\sharp_P : \mathcal{O}_{Y,\phi(P)} \to \mathcal{O}_{X,P}$$
lokal sind.

LEMMA 24. *Schemata sind lokal geringte Räume.*

Beweis: Ein Schema schaut lokal wie ein affines Schema, also wie $\operatorname{Spec}(A)$ aus. Der Halm der Strukturgarbe $\mathcal{O}_A$ in einem Punkt $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ ist aber $\mathcal{O}_{A,\mathfrak{p}} \simeq A_{\mathfrak{p}}$, also ein lokaler Ring. ■

DEFINITION 20. *Ein Morphismus von Schemata ist ein Morphismus lokal geringter Räume zwischen Schemata. Wenn wir Schemata haben, meinen wir mit Morphismus immer einen Morphismus von Schemata.*

Gegenbeispiel: Unser früher betrachteter Morphismus $(\phi, \phi^\sharp) : \operatorname{Spec}(\mathbf{Q}) \to \operatorname{Spec}(\mathbf{Z})$ mit $\phi((0)) = (5)$ ist also kein Morphismus von Schemata, da $\phi^\sharp_{(0)}$ nicht lokal ist.

Bemerkung: Ein Morphismus zwischen Schemata $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ setzt sich also wie folgt zusammen:

1. Es gibt eine stetige Abbildung $\phi : X \to Y$.
2. Für jede offene Menge $U \subseteq Y$ hat man einen Ringhomomorphismus $\phi^\sharp(U) : \mathcal{O}_Y(U) \to \mathcal{O}_X(\phi^{-1}(U))$; diese Ringhomomorphismen sind mit den Einschränkungsabbildungen verträglich, d.h. für zwei offene Mengen $V \subseteq U \subseteq Y$ gilt: $\rho_{\phi^{-1}(U),\phi^{-1}(V)} \circ \phi^\sharp(U) = \phi^\sharp(V) \circ \rho_{UV}$. (Anders ausgedrückt: $\phi^\sharp : \mathcal{O}_Y \to \phi_*\mathcal{O}_X$ ist ein Garbenmorphismus.)
3. Für jeden Punkt $P \in X$ ist der induzierte Ringhomomorphismus
$$\phi^\sharp_P : \mathcal{O}_{Y,\phi(P)} \to \mathcal{O}_{X,P}$$
lokal, d.h. $\phi^\sharp_P(\mathfrak{m}_{Y,\phi(P)}) \subseteq \mathfrak{m}_{X,P}$. Man kann dies auch so ausdrücken: Ist U eine offene Umgebung von $\phi(P)$, $f \in \mathcal{O}_Y(U)$ mit $\rho_{UP}(f) \in \mathfrak{m}_{Y,\phi(P)}$, so gilt auch $\rho_{\phi^{-1}(U),P}(\phi^\sharp(f)) \in \mathfrak{m}_{X,P}$.

Beispiel: Sei k ein Körper und X ein Schema. Was ist dann ein Morphismus $\phi : X \to \mathrm{Spec}(k)$? Da $\mathrm{Spec}(k)$ nur einen Punkt hat, ist klar, daß $\phi(P) = (0)$ für alle $P \in X$ gelten muß. Dann braucht man einen Ringhomomorphismus

$$\phi^\sharp(\mathrm{Spec}(k)) : k = \mathcal{O}_k(\mathrm{Spec}(k)) \to \mathcal{O}_X(X),$$

d.h. $\mathcal{O}_X(X)$ ist ein k-Vektorraum bzw. eine k-Algebra. Über die Einschränkungsabbildungen ρ_{XU} und ρ_{XP} sind dann auch alle $\mathcal{O}_X(U)$ und $\mathcal{O}_{X,P}$ k-Algebren. Natürlich ist die induzierte Abbildung $\phi^\sharp_P : k \to \mathcal{O}_{X,P}$ lokal. Es gibt also genau dann einen Morphismus $X \to \mathrm{Spec}(k)$, wenn $\mathcal{O}_X(X)$ eine k-Algebra ist.

Beispiel: Sei K ein Körper. Wie sieht ein Morphismus $\mathrm{Spec}(K) \to X$ aus?

1. Sei $(\phi, \phi^\sharp) : \mathrm{Spec}(K) \to X$ ein Morphismus und $P = \phi((0))$. Sei $U \subseteq X$ offen. Ist $P \notin U$, so ist $\phi^\sharp(U) = 0$. Ist $P \in U$, so haben wir einen Ringhomomorphismus $\phi^\sharp(U) : \mathcal{O}_X(U) \to K$. Außerdem ist $\phi^\sharp_P : \mathcal{O}_{X,P} \to K$ lokal, d.h. $\mathfrak{m}_{X,P}$ geht auf 0 oder anders ausgedrückt: $\mathcal{O}_{X,P}/\mathfrak{m}_{X,P} \hookrightarrow K$. Man nennt $\mathcal{O}_{X,P}/\mathfrak{m}_{X,P}$ auch den Restklassenkörper $\kappa(P)$ von P.
2. Sei umgekehrt $\lambda : \kappa(P) \to K$ gegeben. Wir definieren $\phi : \mathrm{Spec}(K) \to X$ durch $\phi((0)) = P$; für jede offene Umgebung U von P definieren wir

   $$\phi^\sharp(U) : \mathcal{O}_X(U) \to K \text{ durch die Komposition } \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_{X,P} \to \kappa(P) \to K.$$

   So erhalten wir einen Schemamorphismus $\mathrm{Spec}(K) \to X$.

Die Morphismen $\mathrm{Spec}(K) \to X$ entsprechen also den Punkten $P \in X$ mit einer Einbettung $\kappa(P) \hookrightarrow K$.

Wir fassen die Ergebnisse der letzten beiden Beispiele nochmals zusammen:

Lemma 25. *Sei K ein Körper und X ein Schema.*

1. *Die Morphismen $X \to \mathrm{Spec}(K)$ entsprechen den Ringhomomorphismen $K \to \mathcal{O}_X(X)$.*
2. *Die Morphismen $\mathrm{Spec}(K) \to X$ entsprechen den Punkten $P \in X$ zusammen mit einer Einbettung $\kappa(P) \hookrightarrow K$.*

Bemerkung: Ist $X = \mathrm{Spec}(A)$, $\mathfrak{p} \in X$, so ist $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} = A_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{m}_{X,\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$, also

$$\kappa(\mathfrak{p}) = A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} \simeq Quot(A/\mathfrak{p}).$$

Beispiel: Es ist

$$\mathrm{Spec}(\mathbf{Q}[x]) = \{(0)\} \cup \{(f(x)) : f(x) \text{ normiert und irreduzibel}\},$$

also gilt für die Restklassenkörper

$$\kappa((0)) = \mathbf{Q}(x) \text{ und } \kappa((f(x)) = \mathbf{Q}[x]/(f(x)).$$

Daher haben die Morphismen $\mathrm{Spec}(\mathbf{Q}) \to \mathrm{Spec}(\mathbf{Q}[x])$ die Gestalt $(0) \mapsto (x - c)$ für ein $c \in \mathbf{Q}$.

Lemma 26. *Ist $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus, so ist der assoziierte Morphismus $(\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}^\sharp) : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ ein Morphismus von Schemata.*

Beweis: Wir haben bereits gesehen, daß für $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B)$ gilt $\tilde{\varphi}^\sharp_\mathfrak{q} = \varphi_\mathfrak{q} : A_{\varphi^{-1}\mathfrak{q}} \to B_\mathfrak{q}$, was natürlich ein lokaler Ringhomomorphismus ist. ■

Lemma 27. *Ist $(\phi, \phi^\sharp) : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ ein Schemamorphismus, so gibt es einen Ringhomomorphismus $\tilde{\varphi} : A \to B$ mit $\phi = \tilde{\varphi}$, $\phi^\sharp = \tilde{\varphi}^\sharp$.*

Beweis:

1. Aus dem Ringhomomorphismus $\phi^\sharp(\mathrm{Spec}(A)) : A \simeq \mathcal{O}_A(\mathrm{Spec}(A)) \to \mathcal{O}_B(\mathrm{Spec}(B))$ erhalten wir über die Isomorphismen $\mathcal{O}_A(\mathrm{Spec}(A)) \simeq A$ und $\mathcal{O}_B(\mathrm{Spec}(B)) \simeq B$ einen Ringhomomorphismus $\varphi : A \to B$. Dazu gibt es dann natürlich wieder den assoziierten Morphismus $(\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}^\sharp) : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A))$ zwischen den affinen Schemata. Wir wollen ϕ und $\tilde{\varphi}$ vergleichen.

2. Sei $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B)$. Durch die Einschränkungsabbildung ist klar, daß $\phi^\sharp_\mathfrak{q} : A_{\phi(\mathfrak{q})} \to B_\mathfrak{q}$ gegeben ist durch
$$\phi^\sharp_\mathfrak{q}(\frac{a}{s}) = \frac{\varphi(a)}{\varphi(s)}.$$
Nun gilt für $x \in A$, da $\phi^\sharp_\mathfrak{q}$ lokal ist:
$$\begin{aligned} x \in \phi(\mathfrak{q}) &\iff \frac{x}{1} \text{ keine Einheit in } A_{\phi(\mathfrak{q})} \\ &\iff \frac{\varphi(x)}{\varphi(1)} = \phi^\sharp_\mathfrak{q}(\frac{x}{1}) \text{ keine Einheit in } B_\mathfrak{q} \\ &\iff \varphi(x) \in \mathfrak{q} \iff x \in \varphi^{-1}\mathfrak{q}, \end{aligned}$$
d.h. $\phi(\mathfrak{q}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \tilde{\varphi}(\mathfrak{q})$. Also stimmen die Abbildungen ϕ und $\tilde{\varphi}$ auf $\operatorname{Spec}(B)$ überein.
3. Wir müssen nun nur noch $\phi^\sharp$ und $\tilde{\varphi}^\sharp$ vergleichen. Da es sich um Garbenabbildungen handelt, können wir uns auf offene Mengen der Gestalt $U = D(f)$ beschränken. Es ist aber klar, daß sowohl $\phi^\sharp(D(f))$ als auch $\tilde{\varphi}^\sharp(D(f))$ die Gestalt $A_f \to B_{D(f)}, \frac{a}{f^n} \mapsto \frac{\varphi(a)}{\varphi(f)^n}$ haben, da beide von der gleichen Abbildung $\varphi : A \to B$ herkommen. ■

Satz 11. *Für Ringe A und B ist*
$$\{\textit{Ringhomomorphismen } A \to B\} \to \{\textit{Schemamorphismen } \operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)\}, \quad \varphi \mapsto (\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}^\sharp)$$
bijektiv. Die Umkehrabbildung ist $(\phi, \phi^\sharp) \mapsto \phi^\sharp(\operatorname{Spec}(A))$, *wenn man die Isomorphien* $A \simeq \mathcal{O}_A(\operatorname{Spec}(A))$ *und* $B \simeq \mathcal{O}_B(\operatorname{Spec}(B))$ *benutzt.*

Beweis: Die Surjektivität haben wir im letzten Lemma gezeigt, die Injektivität ist klar, da gilt $\varphi = \tilde{\varphi}^\sharp(\operatorname{Spec}(A))$. ■

Bemerkung: Wir wissen, daß Morphismen zwischen affinen Varietäten $X \to Y$ immer durch einen Ringhomomorphismus $k[Y] \to k[X]$ der affinen Koordinatenringe gegeben wird. Obiger Satz liefert die gleiche Aussage jetzt für affine Schematas. Der Satz läßt sich auch so formulieren: Die Kategorie der affinen Schematas ist (im wesentlichen) isomorph zur Kategorie der kommutativen Ringe mit 1.

Bemerkung: Ein Morphismus $(\phi, \phi^\sharp) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ von Schemata läßt sich mit dem Satz also auch folgendermaßen beschreiben: Y besitzt eine Überdeckung aus offenen affinen Mengen $U_i \simeq \operatorname{Spec}(A_i)$; $\phi^{-1}(U_i)$ ist offen in X, also ein Schema, besitzt also eine Überdeckung durch offene affine Mengen $W_{ij} \simeq \operatorname{Spec}(B_{ij}$; der eingeschränkte Morphismus $W_{ij} \to U_i$ wird durch einen Ringhomomorphismus $A_i \to B_{ij}$ eindeutig beschrieben.

Bemerkung: Sei $\phi : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata, seien $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$ offen mit $\phi(U) \subseteq V$. Dann sind auch U und V Schemata. ϕ liefert eine stetige Abbildung $U \to V$. Ist $W \subseteq V$ offen, so ist W auch offen in X, also hat man eine Abbildung $\mathcal{O}_Y(W) \to \mathcal{O}_X(\phi^{-1}(W))$, was man natürlich weiter einschränken kann mit $\mathcal{O}_X(\phi^{-1}(W)) \to \mathcal{O}_X(\phi^{-1}(W) \cap U)$. Die lokale Abbildung bleibt gleich, also erhält man einen Morphismus von Schemata $U \to V$. In gleicher expliziter Weise zeigt man, daß die Komposition von Schemamorphismen wieder ein Schemamorphismus ist.

Der letzte Satz läßt sich wie folgt verallgemeinern:

Satz 12. *Sei A ein Ring und* $(X, \mathcal{O}_X)$ *ein Schema. Dann ist*
$$\{\textit{Schemamorphismen } X \to \operatorname{Spec}(A)\} \to \{\textit{Ringhomomorphismen } A \to \mathcal{O}_X(X)\}, \quad (\phi, \phi^\sharp) \mapsto \phi^\sharp(\operatorname{Spec}(A))$$
bijektiv.

Beweisansatz: Wir wollen diesen Satz nicht beweisen, aber doch skizzieren, wie man von einem Ringhomomorphismus $\varphi : A \to \mathcal{O}_X(X)$ zu einer Abbildung $\phi : X \to \operatorname{Spec}(A)$ kommt.
Ist zunächst $(\phi, \phi^\sharp) : X \to \operatorname{Spec}(A)$ ein Schemamorphismus, so ist für $P \in X$ die Abbildung $\phi^\sharp_P : A_{\phi(P)} \to \mathcal{O}_{X,P}$ lokal, d.h. $\phi(P)A_{\phi(P)} = (\phi^\sharp_P)^{-1}(\mathfrak{m}_{X,P})$. Daraus folgt sofort, daß für $A \overset{\phi^\sharp(\operatorname{Spec}(A))}{\to} \mathcal{O}_X(X) \overset{\rho_{X,P}}{\to} \mathcal{O}_{X,P}$ gilt
$$\phi(P) = (\rho_{X,P} \circ \phi^\sharp(\operatorname{Spec}(A)))^{-1}(\mathfrak{m}_{X,P}).$$

Haben wir umgekehrt $\varphi : A \to \mathcal{O}_X(X)$, so müssen wir also $\phi : X \to \mathrm{Spec}(A)$ definieren durch

$$\phi(P) = (\rho_{X,P} \circ \varphi)^{-1}(\mathfrak{m}_{X,P}). \quad \blacksquare$$

DEFINITION 21. *Sei S ein Schema. Ein S-Schema X ist ein Schema X zusammen mit einem Morphismus $X \to S$. Ein S-Morphismus zwischen zwei S-Schemata X und Y ist ein Morphismus $X \to Y$, so daß $X \to Y \to S$ identisch mit $X \to S$ ist. Ist $S = \mathrm{Spec}(A)$, so spricht man statt von S-Schema auch von A-Schema, von A-Morphismus statt von S-Morphismus. Mit $Mor_S(X,Y)$ bezeichnen wir die Menge der S-Morphismen zwischen zwei S-Schematas X und Y.*

Beispiel: Sei X ein Schema. Dann gibt es genau einen Ringhomomorphismus $\mathbf{Z} \to \mathcal{O}_X(X)$, also gibt es genau einen Morphismus $X \to \mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$. Damit ist jedes Schema auf genau eine Weise ein $\mathbf{Z}$-Schema.

Beispiel: Sei K ein Körper. Ein K-Schema X ist dann gegeben durch einen Morphismus $X \to \mathrm{Spec}(K)$, d.h. durch einen Ringhomomorphismus $K \to \mathcal{O}_X(X)$. Durch Einschränkung erhält man

$$K \to \mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_{X,P} \to \mathcal{O}_{X,P}/\mathfrak{m}_{X,P} = \kappa(P),$$

insbesondere ist also der Restklassenkörper $\kappa(P)$ eine Körpererweiterung von K. Ist Y ein weiteres K-Schema, so ist ein K-Morphismus $X \to Y$ ein Morphismus $\phi : X \to Y$, so daß $K \to \mathcal{O}_Y(Y) \xrightarrow{\phi^\sharp(Y)} \mathcal{O}_X(X)$ mit $K \to \mathcal{O}_X(X)$ übereinstimmt.

Beispiel: Sei K ein Körper, $\mathfrak{a} = (f_1, \dots, f_r)$ ein Ideal in $K[x_1, \dots, x_n]$. Dann ist $X = \mathrm{Spec}(K[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{a})$ ein K-Schema vermöge $K \to K[x_1, \dots, x_n]$. Sei L ein Erweiterungskörper von K. Die Inklusion $K \to L$ liefert $\mathrm{Spec}(L) \to \mathrm{Spec}(K)$, insbesondere ist $\mathrm{Spec}(L)$ auch ein K-Schema. Was ist ein K-Morphismus $\phi : \mathrm{Spec}(L) \to X$? Er ist gegeben durch einen K-Algebrahomomorphismus $\varphi : K[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{a} \to L$. Er ist bestimmt durch die Bilder $\varphi(x_1) = p_1, \dots, \varphi(x_n) = p_n \in L$, die natürlich die Bedingungen $f_i(p_1, \dots, p_n) = 0$ erfüllen. Umgekehrt liefert jede Lösung

$$f_1(p_1, \dots, p_n) = \dots = f_r(p_1, \dots, p_n) = 0 \text{ mit } p_1, \dots, p_n \in L$$

einen K-Morphismus $\mathrm{Spec}(K) \to X$. Wir haben also eine Bijektion

$$Mor_K(\mathrm{Spec}(L), X) \leftrightarrow \{(p_1, \dots, p_n) \in L^n : f_1(p_1, \dots, p_n) = \dots = f_r(p_1, \dots, p_n) = 0\}.$$

$Mor_K(\mathrm{Spec}(L), X)$ sind also genau die Lösungen des Gleichungssystems $f_1 = \dots = f_r = 0$ im Körper L.

Das letzte Beispiel motiviert folgende Definition:

DEFINITION 22. *Seien X und T S-Schemata. Dann heißt*

$$X(T) = Mor_S(T, X)$$

die Menge der T-wertigen Punkte von X. Ist $T = \mathrm{Spec}(L)$, L ein Körper, so heißt $X(L) = X(\mathrm{Spec}(L))$ auch die Menge der L-rationalen Punkte von X.

Beispiel: Für eine Primzahl $p > 2$ sei $X_p = \mathrm{Spec}(\mathbf{Q}[x,y]/(x^p + y^p - 1)$. Nach Wiles weiß man jetzt, daß $X_p(\mathbf{Q})$ genau zwei Elemente enthält, was den Punkten $(x, y-1)$ und $(x-1, y)$ von X_p entspricht. Nach Faltings weiß man, daß für jeden Zahlkörper K die Menge $X_p(K)$ endlich ist.

Wir kommen nun zu Unterschematas eines Schemas X.

DEFINITION 23. *Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema, $U \subseteq X$ offen, so ist auch $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ ein Schema. Man nennt dies ein offenes Unterschema von X. Eine Morphismus $\phi : X \to Y$ heißt eine offene Immersion, wenn ϕ einen Isomorphismus von X mit einem offenen Unterschema von Y liefert.*

Beispiel: Der Ringhomomorphismus $\varphi : \mathbf{Z}_{(5)} \to \mathbf{Q}$ liefert eine offene Immersion $\tilde{\varphi} : \mathrm{Spec}(\mathbf{Q}) \to \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}_{(5)})$.

Bei Varietäten über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k sind die abgeschlossenen Untervarietäten interessante Objekte. Ist X ein Schema, Y eine abgeschlossene Teilmenge von X, so ist zunächst überhaupt nicht klar, wie man Y mit einer Schemastruktur versehen kann. Wir beginnen mit einem Beispiel:

Beispiel: Sei X eine algebraische Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper und Y eine abgeschlossene Untervarietät von X. Bezeichnet $\mathcal{O}_X$ und $\mathcal{O}_Y$ jeweils die Garbe der regulären Funktionen, so hatten wir eine exakte Garbensequenz

$$0 \to \mathcal{I} \to \mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_Y \to 0.$$

Wir betrachten jetzt ein Beispiel bei affinen Schemata:

SATZ 13. *Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in A, $X = \operatorname{Spec}(A)$, $Y = \operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a})$ und $(\phi, \phi^\sharp) : Y \to X$ der durch $\varphi : A \to A/\mathfrak{a}$ gegebene Schemamorphismus. Dann gilt:*

1. *$\phi(Y) = V(\mathfrak{a})$ ist abgeschlossen.*
2. *ϕ liefert einen Homöomorphismus $Y \to V(\mathfrak{a})$.*
3. *$\phi^\sharp : \mathcal{O}_X \to \phi_*\mathcal{O}_Y$ ist surjektiv.*

Beweis: Die Aussagen 1. und 2. kennen wir bereits. Wir zeigen die 3. Behauptung: Die Punkte aus Y haben die Gestalt $\mathfrak{p}/\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$. Sei $\mathfrak{p} \in X$. Dann ist $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} = A_\mathfrak{p}$. Wir unterscheiden zwei Fälle:
$\mathfrak{p} \notin V(\mathfrak{a})$: Dann ist $U = X \setminus V(\mathfrak{a})$ eine offene Umgebung von $\mathfrak{p}$ und $(\phi_*\mathcal{O}_Y)(U) = \mathcal{O}_Y(\phi^{-1}U) = \mathcal{O}_Y(\emptyset) = 0$, also $(\phi_*\mathcal{O}_Y)_\mathfrak{p} = 0$ und damit $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} \to (\phi_*\mathcal{O}_Y)_\mathfrak{p}$ surjektiv.
$\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$: Da jede offene Menge in Y die Gestalt $\phi^{-1}U$ mit einer offenen Menge $U \subseteq X$ hat, da U genau dann Umgebung von $\mathfrak{p}$ ist, wenn $\phi^{-1}U$ Umgebung von $\mathfrak{p}/\mathfrak{a}$ ist, folgt aus $(\phi_*\mathcal{O}_Y)(U) = \mathcal{O}_Y(\phi^{-1}U)$ sofort

$$(\phi_*\mathcal{O}_Y)_\mathfrak{p} \simeq \mathcal{O}_{Y,\mathfrak{p}/\mathfrak{a}}.$$

Damit ist $(\mathcal{O}_X)_\mathfrak{p} \to (\phi_*\mathcal{O}_Y)_\mathfrak{p}$ die Abbildung $A_\mathfrak{p} \to (A/\mathfrak{a})_{\mathfrak{p}/\mathfrak{a}}$, die natürlich surjektiv ist.
Da nun $\mathcal{O}_X \to \phi_*\mathcal{O}_Y$ auf allen Halmen surjektiv ist, ist die Garbenabbildung selbst surjektiv. ■

Dies motiviert folgende Definition:

DEFINITION 24. *Eine abgeschlossene Immersion ist ein Morphismus $\phi : Y \to X$, so daß ϕ einen Homöomorphismus von Y auf eine abgeschlossene Teilmenge von X liefert und $\phi^\sharp : \mathcal{O}_X \to \phi_*\mathcal{O}_Y$ surjektiv ist. Ein abgeschlossenes Unterschema $Y \subseteq X$ besteht aus einer abgeschlossenen Teilmenge $Y \subseteq X$, einer Garbe $\mathcal{O}_Y$ von Ringen auf Y, so daß $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ein Schema und $\mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_Y$ surjektiv ist, wo $i : Y \to X$ die Inklusion ist.*

Beispiele:

1. Ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal in A, so wird $\operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a}) \to \operatorname{Spec}(A)$ eine abgeschlossene Immersion. Versieht man $V(\mathfrak{a})$ mit der Struktur von $\operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a})$, so ist $V(\mathfrak{a})$ dadurch ein abgeschlossenes Unterschema. Mit dieser Identifikation nennen wir auch $\operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a})$ ein abgeschlossenes Unterschema von $\operatorname{Spec}(A)$.
2. Sei k ein Körper und $X = \operatorname{Spec}(k[x])$. Für jedes $n \in \mathbf{N}$ erhalten wir ein abgeschlossenes Unterschema $Y_n = \operatorname{Spec}(k[x]/(x^n))$ von X. Als Menge besteht Y_n nur aus einem Punkt, als Schemata sind aber die Y_n's alle verschieden.

Bemerkung: Bei den abgeschlossenen Unterschemata bzw. abgeschlossenen Untervarietäten weichen also klassische algebraische Geometrie und Schematheorie stark voneinander ab. Ist $f(x, y)$ ein Polynom in $k[x, y]$, so liefern f und f^2 die gleiche Kurve $\{f = 0\} \subseteq \mathbf{A}^2$, die Unterschemata $\operatorname{Spec}(k[x, y]/(f))$ und $\operatorname{Spec}(k[x, y]/(f^2)$ von $\operatorname{Spec}(k[x, y])$ sind aber verschieden. Einen Vorgeschmack gibt es allerdings auch klassisch: Betrachtet man z.B. alle Quadriken im $\mathbf{P}^2$, so hat man auch die Doppelgeraden $(a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2)^2 = 0$, die eigentlich ja nur eine Gerade sind.

Ein wichtiger Satz, dessen Beweis wir verschieben, ist folgender:

SATZ 14. *Ist Y ein abgeschlossenes Unterschema eines affinen Schemas X, so ist auch Y affin. Genauer: Die abgeschlossenen Unterschemata von $\operatorname{Spec}(A)$ haben die Gestalt $\operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a})$, wo $\mathfrak{a}$ ein Ideal in A ist.*

Wir kommen nun zu einigen weiteren Grundbegriffen:

DEFINITION 25. *Sei X ein Schema.*

1. *X heißt zusammenhängend, wenn X als topologischer Raum zusammenhängend ist.*
2. *X heißt irreduzibel, wenn X als topologischer Raum irreduzibel ist.*

Bemerkung: Ein topologischer Raum $X \neq \emptyset$ ist genau dann irreduzibel, wenn je zwei offene nichtleere Teilmengen von X einen nichtleeren Schnitt haben. Damit ist klar, daß auch jede nichtleere offene Teilmenge eines irreduziblen Raumes X irreduzibel ist.
Sei $Z \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge eines Schemas X. Ein Punkt $P \in Z$ heißt generischer Punkt von Z, falls der Abschluß von $\{P\}$ ganz Z ist. Wir haben bereits früher gesehen: Hat Z einen generischen Punkt, so ist Z irreduzibel. Für Schemata gilt auch die Umkehrung:

SATZ 15. *Sei X ein Schema und $Z \subseteq X$ abgeschlossen und irreduzibel. Dann hat Z einen eindeutig bestimmten generischen Punkt P.*

Beweis: Wir haben die Aussage bereits früher bewiesen im Fall, daß X ein affines Schema ist.

1. Sei $U \subseteq X$ offen affin mit $U \cap Z \neq \emptyset$. Dann ist auch $U \cap Z$ in U abgeschlossen und irreduzibel, besitzt also einen generischen Punkt P, d.h. $\overline{\{P\}}^U = U \cap Z$, und damit $\overline{\{P\}} \cap U = Z \cap U$. Da Z abgeschlossen ist, gilt auch $\overline{\{P\}} \subseteq Z$. Wir haben die Zerlegung
$$Z = (Z \cap U) \cup (Z \setminus U) = \overline{\{P\}} \cup (Z \setminus U).$$
Mit $Z \setminus U \neq Z$ und der Irreduzibilität von Z folgt $Z = \overline{\{P\}}$. D.h. P ist auch generischer Punkt von Z.
2. Ist Q ein weiterer generischer Punkt von Z, d.h. $\overline{\{Q\}}$, so ist $Q \notin Z \setminus U$, da dies eine echte abgeschlossene Teilmenge von Z ist, also ist $Q \in Z \cap U$. Es folgt $\overline{\{Q\}}^U = \overline{\{Q\}} \cap U = Z \cap U$, also ist Q auch generischer Punkt von $Z \cap U$ in U. Da bei affinen Schemata die generischen Punkte eindeutig bestimmt sind, folgt $P = Q$. ■

DEFINITION 26. *Ein Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt reduziert, wenn für jede offene Menge $U \subseteq X$ der Ring $\mathcal{O}_X(U)$ reduziert ist, d.h. keine nilpotenten Elemente besitzt.*

LEMMA 28. *Das affine Schema* $\operatorname{Spec}(A)$ *ist genau dann reduziert, wenn der Ring A reduziert ist.*

Beweis: Ist $\operatorname{Spec}(A)$ reduziert, so auch $A \simeq \mathcal{O}_A(\operatorname{Spec}(A))$. Sei umgekehrt A reduziert. Wir zeigen zunächst, daß dann auch $A_\mathfrak{p}$ für $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ reduziert ist. Sei also $\frac{a}{s} \in A_\mathfrak{p}$ nilpotent, d.h. $(\frac{a}{s})^n = 0$. Dann gibt es ein $t \in A \setminus \mathfrak{p}$ mit $ta^n = 0$, insbesondere $(ta)^n = 0$. Da A reduziert ist, folgt $ta = 0$ und damit $\frac{a}{s} = 0$ in $A_\mathfrak{p}$, was die Reduziertheit von $A_\mathfrak{p}$ liefert. Da die Elemente von $\mathcal{O}_A(U)$ Funktionen $\alpha : U \to \cup_{\mathfrak{p} \in U} A_\mathfrak{p}$ sind, folgt sofort, daß auch $\mathcal{O}_A(U)$ reduziert ist. Also ist $\operatorname{Spec}(A)$ reduziert. ■

Beispiel: $\operatorname{Spec}(\mathbf{C}[x,y]/(xy))$ ist reduziert, $\operatorname{Spec}(\mathbf{C}[x,y]/(x^2))$ ist nicht reduziert.

Für einen Ring A bezeiche $A_{red} = A/\sqrt{(0)}$. Der Ring A_{red} ist dann reduziert. Der Ringhomomorphismus $A \to A_{red}$ liefert eine abgeschlossene Immersion $\operatorname{Spec}(A_{red}) \to \operatorname{Spec}(A)$, die ein Homöomorphismus der zugrundeliegenden Räume ist wegen $V(\sqrt{(0)}) = \operatorname{Spec}(A)$. Das reduzierte Schema $\operatorname{Spec}(A_{red})$ ist also ein abgeschlossenes Unterschema von $\operatorname{Spec}(A)$.
Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beliebiges Schema, so ist $U \mapsto (\mathcal{O}_X(U))_{red}$ eine Prägarbe. Sei $(\mathcal{O}_X)_{red}$ die assoziierte Garbe. Dann ist $(X, (\mathcal{O}_X)_{red})$ ein reduziertes Schema, das mit X_{red} bezeichnet wird. Der Garbenmorphismus $\mathcal{O}_X(U) \to (\mathcal{O}_X(U))_{red} \to (\mathcal{O}_X)_{red}(U)$ liefert eine abgeschlossene Immersion $X_{red} \to X$, die ein Homömorphismus der zugrundeliegenden Räume ist. Damit erhalten wir folgenden Satz:

SATZ 16. *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema. Ist $(\mathcal{O}_X)_{red}$ die zur Prägarbe $U \mapsto (\mathcal{O}_X(U))_{red}$ assoziierte Garbe, so ist $X_{red} = (X, (\mathcal{O}_X)_red)$ ein abgeschlossenes Unterschema von X und reduziert.*

Beispiel: Für $X = \operatorname{Spec}(\mathbf{C}[x,y]/(x^2))$ ist $X_{red} = \operatorname{Spec}(\mathbf{C}[x,y]/(x))$.

DEFINITION 27. *Ein Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt integer (französisch: intègre, englisch: integral), wenn für jede offene Menge $U \subseteq X$, $U \neq \emptyset$ der Ring $\mathcal{O}_X(U)$ ein Integritätsring ist.*

Beispiel: Ein affines Schema $\operatorname{Spec}(A)$ ist genau dann integer, wenn A ein Integritätsring ist. In diesem Fall ist ja
$$\mathcal{O}_A(U) = \{x \in K : x \text{ definiert auf } U\} = \cap_{\mathfrak{p} \in U} A_\mathfrak{p},$$
wo K den Quotientenkörper von A bezeichnet. Wir bemerken noch: Ist $f \in A$ mit $f|_U = 0$, so ist schon $f = 0$, wenn U eine nichtleere offene Menge ist.

SATZ 17. *Ein Schema ist genau dann integer, wenn es reduziert und irreduzibel ist.*

Beweis: Sei zunächst X ein integres Schema. Natürlich ist dann X reduziert. Seien $U_1, U_2 \subseteq X$ zwei offene nichtleere Teilmengen von X. Wäre $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, so mit der Garbeneigenschaft $\mathcal{O}_X(U_1 \cup U_2) = \mathcal{O}_X(U_1) \oplus \mathcal{O}_X(U_2)$ sicher kein Integritätsring, was nicht sein soll, also ist $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ und damit ist X irreduzibel.
Wir nehmen jetzt an, daß X reduziert und irreduzibel ist. Dann ist auch jedes offene Unterschema von X reduziert und irreduzibel. Sei $U \simeq \mathrm{Spec}(A)$ eine offene nichtleere affine Teilmenge von X. Sind $f, g \in A$ mit $fg = 0$, so folgt $\mathrm{Spec}(A) = V(f) \cup V(g)$, wegen der Irreduzibilität also o.E. $V(f) = \mathrm{Spec}(A)$; also ist $f \in \cap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)} \mathfrak{p} = \sqrt{(0)}$, dem Nilradikal von A, das 0 sein sollte, also $f = 0$. Damit ist A ein Integritätsring. Sei nun $U \subseteq X$ eine beliebige offene nichtleere Teilmenge von X und $U = \cup_i U_i$ eine affine offene Überdeckung von U mit $U_i \neq \emptyset$. Wir wissen bereits, daß die Ringe $\mathcal{O}_X(U_i)$ Integritätsringe sind. Seien $f, g \in \mathcal{O}_X(U)$ mit $fg = 0$. Dann gilt auch $(fg)|_{U_i} = 0$, also ist $f|_{U_i} = 0$ oder $g|_{U_i} = 0$. Sei j ein fester Index und o.E. $f_{U_j} = 0$. Da X irreduzibel ist, gilt $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Dann gilt $f|_{U_i \cap U_j} = 0$, also folgt sofort $f|_{U_i} = 0$, da $\mathcal{O}_X(U_i)$ Integritätsring ist, und mit der Garbenbedingung $f = 0$, was zu zeigen war. ■

SATZ 18. *Sei X ein integres Schema, P der generische Punkt von X. Der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,P}$ ist ein Körper, der sogenannte Funktionenkörper $K(X)$ von X. Für jede offene nichtleere Menge U ist die Einschränkungsabbildung $\mathcal{O}_X(U) \to K(X)$ injektiv, insbesondere sind alle Einschränkungsabbildungen $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(V)$ injektiv. Ist U affin offen, so ist $K(X)$ der Quotientenkörper von $\mathcal{O}_X(U)$.*

Beweis: Ist X ein integres affines Schema, $X \simeq \mathrm{Spec}(A)$, so ist A Integritätsring und

$$\mathcal{O}_A(U) = \{x \in K : x \text{ definiert auf ganz } U\} = \cap_{\mathfrak{p} \in U} A_{\mathfrak{p}} \subseteq K,$$

wo K den Quotientenkörper von A bezeichnet. Der generische Punkt ist (0) und $\mathcal{O}_{A,(0)} = A_{(0)} = K$. Dies ergibt sofort die Behauptung für affine Schemata.
Sei jetzt X ein beliebiges integres Schema. Ist U offen affin, so ist $P \in U$ und damit $\mathcal{O}_{X,P} = \mathcal{O}_{U,P}$ ein Körper. Wir müssen nur noch zeigen, daß die Einschränkungsabbildungen injektiv sind. Seien also $W \subseteq V$ zwei offene nichtleere Teilmengen und $f \in \mathcal{O}_X(V)$ mit $f|_W = 0$. Sei U eine beliebige offene affine Teilmenge von V. Dann ist $U \cap W \neq \emptyset$. Aus $f|_{U \cap W} = 0$ folgt mit unserem Wissen über affine Schemata $f|_U = 0$. Da die offenen affinen Mengen U die Menge V überdecken, folgt mit der Garbenbedingung sofort $f = 0$, was wir zeigen wollten. ■

Bemerkung: Daß ein Schema lokal wie $\mathrm{Spec}(A)$ aussieht, geht in den letzten Satz wesentlich ein. Definiert man $X = \{P, Q\}$, wo $\emptyset$, $\{P\}$ und X die offenen Mengen sind, setzt man

$$\mathcal{O}(\emptyset) = 0, \quad \mathcal{O}(\{P\}) = \mathbf{F}_7, \quad \mathcal{O}(X) = \mathbf{Z}_{(7)}$$

mit den offensichtlichen Einschränkungsabbildungen, so ist $(X, \mathcal{O})$ ein lokal geringter Raum, wo alle $\mathcal{O}(U)$ für $U \neq \emptyset$ Integritätsringe sind, die wesentliche Einschränkungsabbildung ist aber nicht injektiv.

DEFINITION 28. *Ein Schema heißt noethersch, wenn es von endlich vielen offenen affinen Schemata $\mathrm{Spec}(A_i)$ überdeckt wird, wo jeder Ring A_i noethersch ist.*

Beispiel: Sei A ein noetherscher Ring. Dann ist

$$\mathbf{A}^n_A = \mathrm{Spec} A[x_1, \ldots, x_n]$$

ein noethersches Schema, da $A[x_1, \ldots, x_n]$ ein noetherscher Ring ist. Außerdem ist

$$\mathbf{P}^n_A = \mathrm{Proj} A[x_0, \ldots, x_n]$$

ein noethersches Schema, da es von offenen Mengen

$$D_+(x_i) \simeq \mathrm{Spec} A[\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}]$$

überdeckt wird und $A[\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}]$ noethersch ist.

SATZ 19. *Ein affines Schema $X = \mathrm{Spec}(A)$ ist genau dann noethersch, wenn der Ring A noethersch ist.*

Beweis: Ist A noethersch, so natürlich auch $\operatorname{Spec}(A)$. Sei also jetzt $\operatorname{Spec}(A)$ noethersch, $\operatorname{Spec}(A) = \cup_i U_i$ mit $U_i \simeq \operatorname{Spec}(B_i)$ offen und B_i noethersch. $U_i \subseteq X$ ist gegeben durch einen Ringhomomorphismus $\varphi_i : A \to B_i$. Die Eigenschaft $X = \cup_i U_i$ besagt, daß zu jedem $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ ein Index i und ein $\mathfrak{q} \in B_i$ existiert mit $\mathfrak{p} = \varphi_i^{-1}\mathfrak{q}$. Da U_i ein offenes Unterschema von X ist, sind die lokalen Ringe für U_i und X gleich, d.h. $A_\mathfrak{p} \simeq (B_i)_\mathfrak{q}$. Sei jetzt $\mathfrak{a}$ ein Ideal in A. Da es nur endlich viele Ringe B_i gibt, da B_i noethersch ist, können wir endlich viele $f_1, \ldots, f_n \in \mathfrak{a}$ wählen, so daß für alle i gilt

$$\varphi_i(\mathfrak{a})B_i = \varphi_i(f_1, \ldots, f_n)B_i.$$

Sei $\mathfrak{b} = (f_1, \ldots, f_n) \subseteq \mathfrak{a}$. Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ und $\mathfrak{p} = \varphi_i^{-1}\mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B_i$. Dann gilt in B_i, also auch in $(B_i)_\mathfrak{q}$ die Beziehung $\varphi_i(\mathfrak{a})(B_i)_\mathfrak{q} = \varphi_i(\mathfrak{b})(B_i)_\mathfrak{q}$, was gleichwertig ist mit $\mathfrak{a}A_\mathfrak{p} = \mathfrak{b}A_\mathfrak{p}$. Da dies für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ gilt, folgt $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, d.h. $\mathfrak{a}$ ist endlich erzeugt. ∎

Bemerkung: Ist $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus, so operiert A auf B durch $(a, b) \mapsto \varphi(a)b$. Man kann dann B als A-Modul oder als A-Algebra auffassen. B ist eine endlich erzeugte A-Algebra, wenn es $b_1, \ldots, b_n \in B$ gibt mit $B = \varphi(A)[b_1, \ldots, b_n]$, d.h. jedes Element aus B läßt sich als Polynom in $b_1, \ldots, b_n$ mit Koeffizienten aus $\varphi(A)$ darstellen. B ist ein endlich erzeugter A-Modul, wenn es $b_1, \ldots, b_n \in B$ gibt mit $B = \varphi(A)b_1 + \cdots + \varphi(A)b_n$, d.h. jedes Element aus B ist Linearkombination von $b_1, \ldots, b_n$ mit Koeffizienten aus $\varphi(A)$.

DEFINITION 29. *Ein Morphismus $\phi : X \to Y$ von Schemata heißt von endlichem Typ, wenn es eine offene affine Überdeckung*

$$Y = \cup_{i \in I} V_i \text{ mit } V_i \simeq \operatorname{Spec}(A_i)$$

gibt, so daß für jedes $i \in I$ eine endliche offene affine Überdeckung

$$\phi^{-1}V_i = \cup_{j=1}^{n_i} U_{ij} \text{ mit } U_{ij} \simeq \operatorname{Spec}(B_{ij}) \text{ und } n_i \in \mathbf{N}$$

existiert, so daß für alle i, j der Ring B_{ij} eine endlich erzeugte A_i-Algebra ist. Dabei ergibt sich der Ringhomomorphismus $A_i \to B_{ij}$ aus dem eingeschränkten Morphismus $\operatorname{Spec}(B_{ij}) \simeq U_{ij} \to V_i \simeq \operatorname{Spec}(A_i)$. Ist X ein S-Schema und $X \to S$ von endlichem Typ, so sagt man auch: X ist ein Schema von endlichem Typ über S.

Beispiele:

1. Sei K ein Körper, $\mathfrak{a}$ ein Ideal im Polynomring $K[x_1, \ldots, x_n]$. Der Ring $K[x_1, \ldots, x_n]$ ist eine endlich erzeugte K-Algebra, also ist $X = \operatorname{Spec}(K[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{a})$ ein K-Schema und $X \to \operatorname{Spec}(K)$ von endlichem Typ, d.h. X ist ein Schema von endlichem Typ über K.
2. Das Schema $Y = \operatorname{Proj}(K[x_0, \ldots, x_n])$ wird von endlich vielen Mengen $D_+(x_i) \simeq \operatorname{Spec}(K[y_1, \ldots, y_n])$ überdeckt, also ist Y von endlichem Typ über K.
3. Ist $A \to B$ ein Ringhomomorphismus und B eine endlich erzeugte A-Algebra, so ist natürlich $\operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ von endlichem Typ. Ist $g \in B$, so hat man $B \to B_g$ und B_g wird über B erzeugt von $\frac{1}{g}$. Daher ist über $A \to B \to B_g$ auch B_g eine endlich erzeugte A-Algebra, d.h. auch $\operatorname{Spec}(B_g) \to \operatorname{Spec}(A)$ ist von endlichem Typ. Dabei ist $\operatorname{Spec}(B_g)$ homöomorph zu offener Menge $D(g) \subseteq \operatorname{Spec}(B)$.

SATZ 20. *Sei K ein Körper und X ein K-Schema, d.h. man hat einen Morphismus $X \to \operatorname{Spec}(K)$. Dann ist X genau dann von endlichem Typ über K, d.h. $X \to \operatorname{Spec}(K)$ von endlichem Typ, wenn es eine endliche offene affine Überdeckung $X = \cup_{i=1}^r$ gibt mit*

$$U_i \simeq \operatorname{Spec}(K[x_1, \ldots, x_{n_i}]/\mathfrak{a}_i),$$

wo $\mathfrak{a}_i$ ein Ideal im Polynomring $K[x_1, \ldots, x_{n_i}]$ ist.

Beweis: Gibt es eine Überdeckung obiger Art, so ist $X \to \operatorname{Spec}(K)$ von endlichem Typ. Sei umgekehrt $X \to \operatorname{Spec}(K)$ von endlichem Typ. Dann ist $V = \operatorname{Spec}(K) = \{(0)\}$, wozu es endlich viele offene affine $U_i \simeq \operatorname{Spec}(A_i)$ gibt mit $X = \cup_i U_i$. Nun ist A_i eine endlich erzeugte K-Algebra, also von der im Satz behaupteten Form. ∎

Der Satz macht deutlich, daß die für die klassische algebraische Geometrie interessanten Schemata von endlichem Typ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper sind.

Gegenbeispiel: $\phi : \mathrm{Spec}(\mathbf{Q}) \to \mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$ ist nicht von endlichem Typ. (Ist $V \subseteq \mathrm{Spec}\mathbf{Z}$ offen und nichtleer, so gibt es endlich viele Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$ mit $V = \mathrm{Spec}\mathbf{Z} \setminus \{(p_1), \ldots, (p_r)\}$. Es ist $\mathcal{O}_{\mathbf{Z}}(V) = \mathbf{Z}_{p_1 \cdots p_r}$. Es ist $\phi^{-1}V = \mathrm{Spec}(\mathbf{Q}) = \{(0)\}$ und $\mathcal{O}_{\mathbf{Q}}(\phi^{-1}V) = \mathbf{Q}$. Wäre $\mathrm{Spec}(Q) \to \mathrm{Spec}(Z)$ von endlichem Typ, so müßte $\mathbf{Q}$ über einem Ring der Gestalt $\mathbf{Z}_{p_1,\ldots,p_r}$ endlich erzeugt sein, was nicht der Fall ist.)

SATZ 21. *Ein Morphismus $\phi : X \to Y$ ist genau dann von endlichem Typ, wenn sich für jede offene affine Menge $V = \mathrm{Spec}(A) \subseteq Y$ das Urbild $\phi^{-1}(V)$ von endlich vielen affinen offenen Mengen $U_i = \mathrm{Spec}(B_i)$ überdecken läßt, so daß B_i eine endlich erzeugte A-Algebra ist.*

Beweis: Wir müssen ersichtlich nur eine Richtung beweisen.

1. Sei nach Definition $Y = \cup_i V_i$, $V_i = \mathrm{Spec}(A_i)$, $\phi^{-1}V_i = \cup_{il} U_{il}$, $U_{il} = \mathrm{Spec}(B_{il})$, wo nur endlich viele Indizes l vorkommen und B_{il} endlich erzeugte A_i-Algebra vermöge des Ringhomomorphismus $\varphi_{il} : A_i \to B_{il}$, der vom eingeschränkten Morphismus $U_{il} \to V_i$ kommt.
2. Sei jetzt $V \subseteq Y$ offen affin, $V = \mathrm{Spec}(A)$. Da $V \cap V_i$ offen in $V = \mathrm{Spec}(A)$ ist, gibt es $f_{ij} \in A$ mit
$$V \cap V_i = \cup_j D_A(f_{ij}).$$
Wegen $V = \cup_i (V \cap V_i) = \cup_{i,j} D_A(f_{ij})$ und der Kompaktheit von V als Spektrum eines Ringes genügen endlich viele Indizes i und j.
3. In $V_i = \mathrm{Spec}(A_i)$ ist $D_A(f_{ij})$ offen und (als Spektrum des Ringes $A_{f_{ij}}$) kompakt, also gibt $g_{ijk} \in A_i$ mit
$$D_A(f_{ij}) = \cup_k D_{A_i}(g_{ijk}),$$
wo endlich viele Indizes k genügen.
4. Nun gilt
$$\phi^{-1} D_{A_i}(g_{ijk}) = \cup_l (U_{il} \cap \phi^{-1} D_{A_i}(g_{ijk})) = \cup_l D_{B_l}(\varphi_{il}(g_{ijk})).$$
und damit
$$\phi^{-1}V = \cup_i \phi^{-1}(V \cap V_i) = \cup_{i,j} \phi^{-1} D_A(f_{ij}) = \cup_{i,j,k} \phi^{-1} D_{A_i}(g_{ijk}) = \cup_{i,j,k,l} D_{B_l}(\varphi_{il}(g_{ijk})).$$
Da nur endlich viele Indizes i, j, k, l auftreten, wird also $\phi^{-1}V$ von endlich vielen affinen offenen Mengen überdeckt.
5. Die affine Menge $D_{B_l}(\varphi_{il}(g_{ijk}))$ ist das Spektrum des Ringes $(B_l)_{\varphi_{il}(g_{ijk})}$. Die Menge V ist das Spektrum des Ringes A. Wir müssen zeigen, daß der natürliche Ringhomomorphismus $A \to (B_l)_{\varphi_{il}(g_{ijk})}$ endlich erzeugt ist.
6. Aus den Inklusionen $D_{A_i}(g_{ijk}) \subseteq D_A(f_{ij}) \subseteq V_i$ ergeben sich die Ringhomomorphismen
$$A_i \to A_{f_{ij}} \to (A_i)_{g_{ijk}},$$
woraus folgt, daß $(A_i)_{g_{ijk}}$ über $A_{f_{ij}}$ erzeugt ist. Die Inklusionen von affinen Schemata
$$D_{A_i}(g_{ijk}) \subseteq D_A(f_{ij}) \subseteq V$$
entsprechen den Ringhomomorphismen
$$A \to A_{f_{ij}} \to (A_i)_{g_{ijk}}.$$
Der Ringhomomorphismus $A \to (B_l)_{\varphi_{il}(g_{ijk})}$ faktorisiert über
$$A \to A_{f_{ij}} \to (A_i)_{g_{ijk}} \to (B_l)_{\varphi_{il}(g_{ijk})}.$$
Da jeder Einzelschritt endlich erzeugt ist, ist alles endlich erzeugt, woraus die Behauptung folgt. ■

SATZ 22. *Ist $\phi : Y \to X$ eine abgeschlossene Immersion, so ist ϕ von endlichem Typ.*

Beweis: Dies ergibt sich aus der nachfolgenden Aussage, daß abgeschlossene Immersionen endlich und endliche Morphismen von endlichem Typ sind. ■

Frage: Unter welchen Bedingungen ist eine offene Immersion von endlichem Typ?

DEFINITION 30. *Ein Morphismus $\phi : X \to Y$ von Schemata heißt endlich, wenn Y durch offene affine Mengen $V_i \simeq \mathrm{Spec}(A_i)$ überdeckt wird, so daß $\phi^{-1}V_i$ affin ist, d.h. $\phi^{-1}V_i \simeq \mathrm{Spec}(B_i)$ und B_i bzgl. des Ringhomomorphismus $A_i \to B_i$ ein endlich erzeugter A_i-Modul ist. (Dabei kommt $A_i \to B_i$ von dem eingeschränkten Morphismus $\phi^{-1}V_i \to V_i$ her.)*

Beispiele:

1. $\operatorname{Spec}(\mathbf{Z}[i]) \to \operatorname{Spec}(\mathbf{Z})$ ist ein endlicher Morphismus.
2. $\operatorname{Spec}(k[x,y]/(y^2 - f(x)) \to \operatorname{Spec}(k[x])$ ist ein endlicher Morphismus. Dies ist eine Projektion.
3. Sei $f(x,y) \in K[x,y]$. Dann ist $K[x,y]/(f)$ ein endlich erzeugter $K[x,y]$-Modul, also ist die abgeschlossene Immersion $\operatorname{Spec}(K[x,y]/(f)) \to \operatorname{Spec}(K[x,y])$ endlich.

Analog wie bei den Morphismen von endlichem Typ gilt folgender Satz:

Satz 23. *Ein Morphismus $\phi : X \to Y$ ist genau dann endlich, wenn für jede offene affine Menge $V = \operatorname{Spec}(A)$ das Urbild $\phi^{-1}V$ affin ist, d.h. $\phi^{-1}V = \operatorname{Spec}(B)$ und B ein endlich erzeugter A-Modul ist.*

Wir beweisen diesen Satz hier nicht. In [**EGAII**, Proposition (6.1.4), p.110] findet sich ein Beweis, Hartshorne stellt ihn als Übungsaufgabe [**H**, Ex. II, 3.4].

Satz 24. *Ist $\phi : X \to Y$ ein endlicher Morphismus, so ist für alle $P \in Y$ die Menge $\phi^{-1}(P)$ endlich.*

Beweis:

1. Sei $P \in Y$ und $U \simeq \operatorname{Spec}(A)$ eine offene affine Umgebung von P in Y. Dann ist $\phi^{-1}U$ offen affin, also $\phi^{-1}U \simeq \operatorname{Spec}(B)$. Der Ring B ist über den Ringhomomorphismus $\varphi : A \to B$ ein endlich erzeugter A-Modul, d.h. $B = \varphi(A)b_1 + \cdots + \varphi(A)b_n$ mit geeigneten endlich vielen $b_1, \ldots, b_n \in B$. Wegen $\phi^{-1}P \subseteq \phi^{-1}U$ können wir uns auf den Morphismus $\operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ beschränken.
2. Der Punkt P ist ein Primideal $\mathfrak{p}$ in A. Die Punkte aus $\phi^{-1}P$ sind Primideale $\mathfrak{q}_i, i \in I$ mit $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}\mathfrak{q}_i$. Wir müssen sehen, daß die Indexmenge I endlich ist.
3. Die Menge $S = A \setminus \mathfrak{p}$ ist multiplikativ in A, die Menge $\varphi(S)$ multiplikativ in B. Wir erhalten einen Ringhomomorphismus $S^{-1}A \to \varphi(S)^{-1}B$. Dabei sind nun die $\mathfrak{q}_i\varphi(S)^{-1}B$ verschiedene Primideale, die alle wieder $\mathfrak{p}S^{-1}A$ liefern. O.E. können wir also annehmen, daß $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal ist.
4. Nun ist $A/\mathfrak{p}$ ein Körper, $B/\mathfrak{q}_i$ ein Integritätsring und $A/\mathfrak{p} \hookrightarrow B/\mathfrak{q}_i$. $B/\mathfrak{q}_i$ ist also endlich dimensionaler $A/\mathfrak{p}$-Vektorraum. Jedes Element $x \in B/\mathfrak{q}_i$ genügt dann einer charakteristischen Gleichung $x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m = 0$ mit $a_i \in A/\mathfrak{p}$. Ist $X \neq 0$, so kann man nach eventueller Division durch x o.E. $a_m \neq 0$ annehmen. Dann ist aber $x(x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}) = -a_m$, also x Einheit und damit $B/\mathfrak{q}_i$ Körper. Also ist auch $\mathfrak{q}_i$ ein maximales Ideal.
5. Sind $\mathfrak{q}_i$, $\mathfrak{q}_j$ verschieden, so ist $\mathfrak{q}_i + \mathfrak{q}_i = B$ wegen der Maximalität der Ideale, wir können also den chinesischen Restsatz anwenden: Sind $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_r$ endlich viele der $\mathfrak{q}_i$'s, so erhalten wir eine Surjektion
$$B \to B/\mathfrak{q}_1 \oplus \cdots \oplus B/\mathfrak{q}_r.$$
$B/\mathfrak{q}_1 \oplus \cdots \oplus B/\mathfrak{q}_r$ kann also über A von n Elementen erzeugt werden. Da $\mathfrak{p}$ trivial operiert, ist also $B/\mathfrak{q}_1 \oplus \cdots \oplus B/\mathfrak{q}_r$ ein $A/\mathfrak{p}$-Vektorraum der Dimension $\leq n$. Insbesondere folgt $r \leq n$ und damit die Behauptung. ∎

Bemerkung: Einen Morphismus $\phi : X \to Y$, so daß für alle $P \in Y$ die Menge $\phi^{-1}P$ endlich ist, nennt man auch quasiendlich. Die Umkehrung dieses Satzes muß nicht gelten, wie folgendes Beispiel zeigt:

Beispiel: Sei $\phi : \operatorname{Spec}(k[x,y]/(xy-1)) \to \operatorname{Spec}(k[x])$ und k algebraisch abgeschlossen. Dann gilt
$$\phi^{-1}(0) = \{(0)\}, \quad \phi^{-1}(x) = \emptyset, \quad \phi^{-1}(x-c) = \{(x-c, y-\frac{1}{c})\} \text{ für } c \neq 0,$$
also hat ϕ endliche Fasern. Andererseits ist $k[x,y]/(xy-1) \simeq k[x]_x$ nicht endlich erzeugt als $k[x]$-Modul.

Satz 25. *Ist $\phi : Y \to X$ eine abgeschlossene Immersion, so ist ϕ endlich.*

Beweis: Sei $U \subseteq X$ offen affin, $U \simeq \operatorname{Spec}(A)$. Dann induziert ϕ auch eine abgeschlossene Immersion $\phi^{-1}U \to U$. Wir haben den Satz erwähnt, daß dann $\phi^{-1}U$ die Gestalt $\operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a})$ hat. Da $A/\mathfrak{a}$ ein endlich erzeugter A-Modul ist, folgt die Behauptung. ∎

Offene Immersionen sind i.a. nicht endlich, wie folgende Beispiele zeigen:

Beispiele:

1. Sei $X = \operatorname{Spec}(k[x,y])$ und $Y = X \setminus \{(x,y)\}$. Dann ist Y offenes Unterschema von X, aber nicht affin. Wäre $Y \to X$ endlich, so müßte mit X selbst auch $Y = X \cap Y$ affin sein, was nicht der Fall ist.
2. Der Ringhomomorphismus $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_5 = \{\frac{a}{5^n} \in \mathbf{Q} : a \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}\}$ liefert die offene Immersion $\operatorname{Spec}(\mathbf{Z}_5) \to \operatorname{Spec}(\mathbf{Z})$, die natürlich nicht endlich ist.

Bemerkung: Aus der Definition ist sofort klar, daß endliche Morphismen von endlichem Typ sind. Daher folgt aus dem letzten Satz, daß abgeschlossene Immersionen von endlichem Typ sind.

SATZ 26. *Ist $\phi : X \to Y$ ein endlicher Morphismus, so ist ϕ abgeschlossen, d.h. ist $Z \subseteq X$ abgeschlossen, so ist $\phi(Z) \subseteq Y$ abgeschlossen.*

Wir beweisen zunächst ein Lemma:

LEMMA 29. *Sei $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus und B endlich erzeugter A-Modul. Dann gilt*
$$\varphi^{-1}V(\mathfrak{b}) = V(\varphi^{-1}\mathfrak{b}),$$
wenn $\mathfrak{b}$ ein Ideal in B ist. Also ist $\tilde{\varphi} : \operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ eine abgeschlossene Abbildung.

Beweis: $\subseteq$: Ist $\mathfrak{p} \in \varphi^{-1}V(\mathfrak{b})$, so gibt es ein $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B)$ mit $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{q}$ und $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}\mathfrak{q}$, was wegen $\varphi^{-1}\mathfrak{b} \subseteq \varphi^{-1}\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$ sofort $\mathfrak{p} \in V(\varphi^{-1}\mathfrak{b})$ liefert.
$\supseteq$: Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ mit $\varphi^{-1}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$. Der induzierte Ringhomomorphismus $A/\varphi^{-1}\mathfrak{b} \hookrightarrow B/\mathfrak{b}$ ist auch endlich, somit ist der Ring $B/\mathfrak{b}$ ganz über dem Unterring $A/\varphi^{-1}\mathfrak{b}$, also gibt es ein Primideal, das über $\mathfrak{p}/\varphi^{-1}\mathfrak{b}$ liegt [**AM**, Theorem 5.10], d.h. ein $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B)$ mit $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{q}$ und $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}\mathfrak{q}$. Dann ist aber $\mathfrak{p} \in \varphi^{-1}V(\mathfrak{b})$. ■

Wir beweisen jetzt den Satz:

Beweis: Sei $\phi : X \to Y$ endlich, $Y = \cup_i U_i$ eine offene affine Überdeckung und $Z \subseteq X$ abgeschlossen. Der induzierte Morphismus $\phi^{-1}U_i \to U_i$ ist ein endlicher Morphismus affiner Schemata, nach dem Lemma also abgeschlossen. Daher ist $\phi(Z) \cap U_i = \phi(\phi^{-1}U_i \cap Z)$ abgeschlossen in U_i, woraus folgt, daß $\phi(Z)$ abgeschlossen in Y ist. ■

KAPITEL 5

Produkte

Unser Ziel ist es, für zwei Schemata X und Y das Produkt $X \times Y$ zu definieren bzw. etwas allgemeiner für zwei S-Schemata X und Y das Faserprodukt $X \times_S Y$.

Bemerkungen:

1. In der klassischen algebraischen Geometrie ist das Produkt zweier Varietäten X und Y mengentheoretisch $\{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$, aber die Topologie war nicht die Produkttopologie. Es gilt für einen algebraisch abgeschlossenen Körper k die Beziehung $\mathbf{A}_k^1 \times \mathbf{A}_k^1 \simeq \mathbf{A}_k^2$.
2. Ist k ein algebraisch abgeschlossener Körper, so haben wir

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_k^1 &= \operatorname{Spec}(k[x]) = \{(0)\} \cup \{(x-c) : c \in k\} \text{ und} \\ \mathbf{A}_k^2 &= \operatorname{Spec}(k[x,y]) = \{(0)\} \cup \{(f(x,y)) : f(x,y) \text{ irreduzibel } \} \cup \{(x-a, y-b) : a, b \in k\}, \end{aligned}$$

   also kann man $\{(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) : \mathfrak{p} \in \mathbf{A}_k^1, \mathfrak{q} \in \mathbf{A}_k^1\}$ sicher nicht natürlich mit $\mathbf{A}_k^2$ identifizieren.
3. Seien X und Y Schemata über S, d.h. man hat Morphismen $X \to S$ und $Y \to S$. Welche Eigenschaften sollte das Produkt $X \times_S Y$ haben? Natürlich sollte es Projektionen $X \times_S Y \to X$ und $X \times_S Y \to Y$ geben. Durch die Kompositionen $X \times_S Y \to X \to S$ und $X \times_S Y \to Y \to S$ wird $X \times_S Y$ ein S-Schema; damit dies eindeutig ist, sollte $X \times_S Y \to X \to S$ identisch mit $X \times_S Y \to Y \to S$ sein, d.h. es sollte ein kommutatives Diagramm geben

$$\begin{tikzcd} & X \times_S Y \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

   Durch diese Bedingungen ist $X \times_S Y$ natürlich i.a. noch nicht eindeutig bestimmt, d.h. es kann weitere Schemata Z geben mit der Eigenschaft, daß nachfolgendes Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

   Das Produkt sollte nun entsprechende universelle Eigenschaften haben.

Definition 31. *Seien X und Y Schemata über S. Ein Schema Z_0 heißt Produkt von X und Y über S, wenn folgendes gilt:*

1. *Es gibt Morphismen, die nachfolgendes Diagramm kommutativ machen:*

$$\begin{tikzcd} & Z_0 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

2. *Ist Z ein Schema, so daß das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

kommutiert, so gibt es genau einen Morphismus $Z \to Z_0$, so daß die Diagramme

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr] \arrow[dr] & & Z_0 \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Z \arrow[rr] \arrow[dr] & & Z_0 \arrow[dl] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

kommutativ sind.

Durch die universelle Eigenschaft ist Z_0 natürlich eindeutig bestimmt und wird dann mit $X \times_S Y$ bezeichnet.

Bemerkungen:

1. Aus der Definition folgt natürlich noch nicht, daß das Produkt $X \times_S Y$ zweier S-Schemata X und Y auch existiert.
2. In jeder Kategorie kann man ein Produkt wie oben durch universelle Eigenschaften definieren. Wir wollen die Bedeutung zunächst im Fall von Mengen klarmachen.

Produkte bei Mengen: Seien X, Y und S Mengen, $\phi : X \to S$ und $\psi : Y \to S$ Abbildungen. Wir definieren

$$X \times_S Y = \{(x, y) \in X \times Y : \phi(x) = \psi(y)\}.$$

Dann ist konstruktionsgemäß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & X \times_S Y \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

kommutativ, wo wir die natürlichen Projektionen zugrundelegen. Ist Z eine Menge, sind $\alpha : Z \to X$ und $\beta : Z \to Y$ Abbildungen, so daß

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

kommutiert, so gibt es genau eine Abbildung $\lambda : Z \to X \times_S Y$, die

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr] \arrow[dr] & & X \times_S Y \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Z \arrow[rr] \arrow[dr] & & X \times_S Y \arrow[dl] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

kommutativ macht, nämlich $\lambda(z) = (\alpha(z), \beta(z))$. Also ist $X \times_S Y$ wirklich das Produkt von X und Y über S in der Kategorie der Mengen.

Beispiele: Wir geben Beispiele für Produkte bei Mengen.

1. Besteht S nur aus einem Element, so gilt natürlich $X \times_S Y = X \times Y$.
2. Sind X und Y Teilmengen von S, ϕ und ψ die Inklusionen, so ist

   $$X \times_S Y = \{(x, y) \in X \times Y : x = y\} = \{(x, x) \in X \times Y : x \in X \cap Y\} \simeq X \cap Y,$$

   d.h. wir erhalten den Schnitt von X und Y.

3. Sei jetzt $Y \subseteq S$ und ψ die Inklusion. Dann ist

$$\begin{aligned} X \times_S Y &= \{(x,y) \in X \times Y : \phi(x) = y\} = \{(x,\phi(x)) \in X \times Y : \phi(x) \in Y\} \\ &= \{(x,\phi(x)) \in X \times Y : x \in \phi^{-1}Y\} \simeq \phi^{-1}Y \end{aligned}$$

also das Urbild von Y in X.

SATZ 27. *Für S-Schemata X und Y existiert das Produkt $X \times_S Y$. Dabei gilt im affinen Fall*

$$\mathrm{Spec}(A) \times_{\mathrm{Spec}(R)} \mathrm{Spec}(B) = \mathrm{Spec}(A \otimes_R B).$$

Beweis: Ein Beweis findet sich bei Hartshorne [**H**, p.87-88]. Wir skizzieren den Beweis für affine Schemata. Sei also

$$X = \mathrm{Spec}(A), \quad Y = \mathrm{Spec}(B), \quad S = \mathrm{Spec}(R).$$

Den Morphismen $X \to S$ und $Y \to S$ entsprechen Ringhomomorphismen $R \to A$ und $R \to B$. Wir betrachten die R-Algebra

$$C = A \otimes_R B.$$

Wir erhalten Ringhomomorphismen

$$A \to A \otimes_R B, a \mapsto a \otimes 1 \text{ und } B \to A \otimes_R B, b \mapsto 1 \otimes b.$$

Die Eigenschaft des Tensorprodukts liefert sofort, daß $R \to A \to C$ und $R \to B \to C$ gleich sind. Also haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Spec}(A \otimes_R B) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathrm{Spec}(A) \arrow[dr] & & \mathrm{Spec}(B) \arrow[dl] \\ & \mathrm{Spec}(R) & \end{tikzcd}$$

Sei Z ein Schema, das folgendes Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathrm{Spec}(A) \arrow[dr] & & \mathrm{Spec}(B) \arrow[dl] \\ & \mathrm{Spec}(R) & \end{tikzcd}$$

Dies entspricht Ringhomomorphismen $A \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_Z(Z)$ und $B \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}_Z(Z)$, so daß $R \to A \to \mathcal{O}_Z(Z)$ gleich $R \to B \to \mathcal{O}_Z(Z)$ ist. Dann ist aber $A \times B \to \mathcal{O}_Z(Z), (a,b) \mapsto \varphi(a)\psi(b)$ eine R-bilineare Abbildung, die somit eindeutig über das Tensorprodukt faktorisiert: $A \otimes_R B \to \mathcal{O}_Z(Z)$. Dies liefert somit einen eindeutigen Morphismus $Z \to \mathrm{Spec}(A \otimes_R B)$, wobei die Diagramme

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{Spec}(A \otimes_R B) \arrow[dl] \\ & \mathrm{Spec}(A) & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Z \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{Spec}(A \otimes_R B) \arrow[dl] \\ & \mathrm{Spec}(B) & \end{tikzcd}$$

nach Konstruktion kommutativ sind. Damit haben wir gezeigt, daß $\mathrm{Spec}(A \otimes_R B)$ das Produkt von $\mathrm{Spec}(A)$ und $\mathrm{Spec}(B)$ über $\mathrm{Spec}(R)$ ist. Den Allgemeinfall leitet man hieraus durch Zusammenkleben ab. ■

Beispiele:

1. Ist $\mathbf{A}_A^n = \mathrm{Spec}(A[x_1, \ldots, x_n])$, so gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_A^m \times_{\mathrm{Spec}(A)} \mathbf{A}_A^n &= \mathrm{Spec}(A[x_1, \ldots, x_m]) \times_{\mathrm{Spec}(A)} \mathrm{Spec}(A[y_1, \ldots, y_n]) = \\ &= \mathrm{Spec}(A[x_1, \ldots, x_m] \otimes_A A[y_1, \ldots, y_n]) \\ &\simeq \mathrm{Spec}(A[x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n]) = \mathbf{A}_A^{m+n}, \end{aligned}$$

wie wir es haben wollten.

2. Was ist $\operatorname{Spec}(\mathbf{C}) \times_{\operatorname{Spec}(\mathbf{R})} \operatorname{Spec}(\mathbf{C})$? Es ist
$$C \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} = \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{R}[x]/(x^2+1) \simeq \mathbf{C}[x]/(x^2+1) \simeq \mathbf{C} \oplus \mathbf{C},$$
und damit
$$\operatorname{Spec}(\mathbf{C}) \times_{\operatorname{Spec}(\mathbf{R})} \operatorname{Spec}(\mathbf{C}) = \operatorname{Spec}(\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}) \simeq \operatorname{Spec}(\mathbf{C} \oplus \mathbf{C}) \simeq \operatorname{Spec}(\mathbf{C}) \cup \operatorname{Spec}(\mathbf{C}),$$
besteht also aus zwei Punkten. Das Produkt zweier Punkte kann also aus zwei Punkten bestehen.

Satz 28. *Für Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ in A gilt:*
$$\operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a}) \times_{\operatorname{Spec}(A)} \operatorname{Spec}(A/\mathfrak{b}) \simeq \operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a}+\mathfrak{b}).$$
D.h. das Produkt der abgeschlossenen Unterschemata $\operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a})$ *und* $\operatorname{Spec}(A/\mathfrak{b})$ *in* $\operatorname{Spec}(A)$ *ist das abgeschlossene Unterschema* $\operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$.

Beweis: Wir müssen nur $A/\mathfrak{a} \otimes_A A/\mathfrak{b}$ ausrechnen. Die A-bilineare Abbildung $A/\mathfrak{a} \times A/\mathfrak{b} \to A/\mathfrak{a} + \mathfrak{b}, (a,b) \mapsto ab$ ist surjektiv und faktorisiert übers Tensorprodukt: $A/\mathfrak{a} \otimes_A A/\mathfrak{b} \to A/\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$. Jedes Element aus $A/\mathfrak{a} \otimes_A A/\mathfrak{b}$ läßt sich schreiben als $a \otimes 1$. Ist $a \otimes 1$ im Kern obiger Abbildung, so ist $a \in \mathfrak{a}+\mathfrak{b}$, also $a = a_1 + a_2$ mit $a_1 \in \mathfrak{a}$, $a_2 \in \mathfrak{b}$, und damit gilt in $A/\mathfrak{a} \otimes_A A/\mathfrak{b}$ dann $a \otimes 1 = a_1 \otimes 1 + a_2 \otimes 1 = a_1 \otimes 1 + 1 \otimes a_2 = 0$. Also ist $A/\mathfrak{a} \otimes_A /\mathfrak{b} \simeq A/\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$, woraus sofort die Behauptung folgt. ∎

Beispiel: Sei K ein Körper und $f_1, \ldots, f_r, g_1, \ldots, g_s \in K[x_1, \ldots, x_n]$. Dann gilt also
$$\begin{aligned} &\operatorname{Spec}(K[x_1,\ldots,x_n]/(f_1,\ldots,f_r)) \otimes_{\mathbf{A}_K^n} \operatorname{Spec}(K[x_1,\ldots,x_n]/(g_1,\ldots,g_s)) \\ &\simeq \operatorname{Spec}(K[x_1,\ldots,x_n]/(f_1,\ldots,f_r,g_1,\ldots,g_s)), \end{aligned}$$
das Tensorprodukt entspricht also anschaulich dem Durchschnitt der abgeschlossenen Unterschemata.

Bemerkung: Wir betrachten S-Schemata X, Y, Z, T. Es ist $X(T) = Mor_S(T, X)$ die Menge der T-wertigen Punkte von X. Ist $X \to Z$ ein Morphismus, so liefert $(T \to X) \in X(T)$ das Element $(T \to X \to Z) \in Z(T)$, d.h. wir haben eine Abbildung von Mengen $X(T) \to Z(T)$. Damit gilt jetzt folgender Satz:

Satz 29. *Wir betrachten S-Schemata. Hat man Morphismen $X \to Z$ und $Y \to Z$, so gilt*
$$(X \times_Z Y)(T) = X(T) \times_{Z(T)} Y(T),$$
wobei das zweite Faserprodukt in der Kategorie der Mengen zu bilden ist.

Beweis: Ein Element von $(X \times_Z Y)(T)$ ist ein Morphismus $T \to X \times_Z Y$, also eindeutig gegeben durch Morphismen $T \to X$ und $T \to Y$, so daß $T \to X \to Z$ und $T \to Y \to Z$ gleich sind. Dies ist aber gleichwertig mit $((T \to X), (T \to Y)) \in X(T) \times_{Z(T)} Y(T)$. ∎

Beispiel: Seien X und Y Schemata über $\mathbf{C}$. Dann gilt nach obiger Formel
$$(X \times_{\operatorname{Spec}(\mathbf{C})} Y)(\mathbf{C}) = X(\mathbf{C}) \times_{(\operatorname{Spec}(\mathbf{C}))(\mathbf{C})} Y(\mathbf{C}) = X(\mathbf{C}) \times Y(\mathbf{C}).$$
Dies ist eine Aussage, wie sie auch in der klassischen algebraischen Geometrie gilt.

Wir zeigen noch eine Verträglichkeitseigenschaft des Produkts:

Lemma 30. *Seien X und Y zwei S-Schemata vermöge $X \xrightarrow{\phi} S$ und $Y \xrightarrow{\psi} S$, $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$ und $W \subseteq S$ offene Unterschemata mit $\phi(U) \subseteq W$ und $\psi(V) \subseteq W$. Dann haben wir einen Isomorphismus von S-Schemata:*
$$p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V) \simeq U \times_W V = U \times_S V,$$
wo $p : X \times_S Y \to X$ und $q : X \times_S Y \to Y$ die Projektionen sind.

Beweis: Sei Z ein Schema, so daß
$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ U \arrow[dr] & & V \arrow[dl] \\ & W & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Dies liefert sofort das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

und damit einen eindeutig bestimmten Morphismus $Z \to X \times_S Y$, wobei klar, ist, daß das Bild in $p^{-1}U \cap q^{-1}V$ liegt. Damit folgt $U \times_W V \simeq p^{-1}U \cap q^{-1}V$. Da W irgendein offenes Unterschema von S war, kann man auch $W = S$ wählen und erhält die zweite Formel, da $p^{-1}U \cap q^{-1}V$ nicht von W abhängt. ■

Fasern eines Morphismus

Bemerkung: Sei X ein Schema, $x \in X$ ein Punkt und K ein Körper. Genau dann gibt es einen Morphismus $\phi : \mathrm{Spec}(K) \to X$ mit $\phi((0)) = x$, wenn sich der Restklassenkörper $\kappa(x)$ in K einbetten läßt: $\kappa(x) \hookrightarrow K$. Insbesondere erhalten wir so in kanonischer Weise einen Morphismus $\mathrm{Spec}(\kappa(x)) \to X$, der (0) auf x abbildet.

Ist $\phi : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata, $y \in Y$ ein Punkt, so trägt die Faser $\phi^{-1}(y) \subseteq X$ eine natürliche Struktur als topologischer Raum. Wir wollen eine Schemastruktur auf $\phi^{-1}(y)$ einführen und beginnen mit einem Satz:

Satz 30. *Sei $\phi : X \to Y$ ein Morphismus und $y \in Y$. Ist $p : X \times_Y \mathrm{Spec}(\kappa(y)) \to X$ die Projektion, so gilt*

$$p(X \times_Y \mathrm{Spec}(\kappa(y))) = \phi^{-1}(y).$$

Genauer: Die eingeschränkte Abbildung

$$X \times_Y \mathrm{Spec}(\kappa(y)) \to \phi^{-1}(y)$$

ist ein Homöomorphismus.

Beweis:

1. Aus dem Diagramm

$$\begin{tikzcd} & X \times_Y \mathrm{Spec}(\kappa(y)) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X \arrow[dr] & & \mathrm{Spec}(\kappa(y)) \arrow[dl] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

   folgt sofort $p(X \times_Y \mathrm{Spec}(\kappa(y)) \subseteq \phi^{-1}(y)$.
2. Sei jetzt $x \in \phi^{-1}(y)$. ϕ induziert dann einen Morphismus $\mathrm{Spec}(\kappa(x)) \to \mathrm{Spec}(\kappa(y))$, zusammen mit $\mathrm{Spec}(\kappa(x)) \to X$ faktorisiert dies über $\mathrm{Spec}(\kappa(x)) \xrightarrow{\lambda} X \times_Y \mathrm{Spec}(\kappa(y))$, also ist $p(\lambda((0)) = x$. Sei $z = \lambda((0))$, also $p(z) = x$. Insbesondere liefert dies $p(X \times_Y \mathrm{Spec}(\kappa(y))) = \phi^{-1}$. Außerdem folgt sofort $\kappa(x) = \kappa(z)$.
3. Sei $\tilde{z} \in X \times_Y \mathrm{Spec}(\kappa(y))$ ein weiterer Punkt mit $p(\tilde{z}) = x$. Dann ist $\kappa(x) \hookrightarrow \kappa(\tilde{z})$. Wir erhalten natürliche Abbildungen

$$\mathrm{Spec}(\kappa(\tilde{z})) \to X \quad \text{und } \mathrm{Spec}(\kappa(\tilde{z})) \to \mathrm{Spec}(\kappa(y)),$$

   die wir aber auf zwei Weisen nach $\mathrm{Spec}(\kappa(\tilde{z})) \xrightarrow{\psi} X \times_Y \mathrm{Spec}(\kappa(y))$ liften können, nämlich durch $\psi((0)) = z$ oder $\psi((0)) = \tilde{z}$. Wegen der Eindeutigkeit der Liftung folgt $z = \tilde{z}$, d.h. p ist injektiv.
4. Es wäre schön, könnte man zeigen auf ähnliche Weise zeigen, daß p einen Homöomorphismus $X \times_Y \mathrm{Spec}(\kappa(y)) \to \phi^{-1}(y)$ liefert. Ich weiß aber nicht wie. Daher müssen wir die zweite Behauptung durch lokale Betrachtungen beweisen.

5. Sei $V \subseteq Y$ eine offene affine Umgebung von y. Dann ist $\phi^{-1}(y) \subseteq \phi^{-1}(V)$. Wir überdecken $\phi^{-1}(V)$ durch offene affine Mengen $U_i \subseteq X$: $\phi^{-1}(V) = \cup_i U_i$. Es genügt jetzt, zu zeigen, daß die eingeschränkten Abbildungen
$$p^{-1}(U_i) \to \phi^{-1}(y) \cap U_i$$
Homöomorphismen sind. Nun gilt aber nach dem vorangegangenen Lemma:
$$p^{-1}U_i \simeq U_i \times_V \operatorname{Spec}(\kappa(y)).$$
Im nachfolgenden Lemma wird die Behauptung für affine Schemata gezeigt, also gilt damit $U_i \times_V \operatorname{Spec}(\kappa(y)) \simeq \phi^{-1}(y) \cap U_i$ und daher $p^{-1}U_i \simeq \phi^{-1}(y) \cap U_i$, was wir zeigen wollten. ■

Es bleibt noch folgendes Lemma zu beweisen:

LEMMA 31. *Sei $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus und $\phi : \operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ der assoziierte Schemamorphismus. Für $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ haben wir einen Homöomorphismus*
$$\phi^{-1}(\mathfrak{p}) \simeq \operatorname{Spec}(B) \times_{\operatorname{Spec}(A)} \kappa(\mathfrak{p}),$$
wo $\kappa(\mathfrak{p}) = A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ der Restklassenkörper von $\mathfrak{p}$ ist.

Beweis:

1. Wir wollen die Menge $\phi^{-1}(\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B) : \varphi^{-1}\mathfrak{q} = \mathfrak{p}\}$ untersuchen, die die induzierte Topologie trägt. Die Mengen $S = A \setminus \mathfrak{p} \subseteq A$ und $\varphi(S) \subseteq B$ sind multiplikativ. φ induziert einen eindeutigen Ringhomomorphismus $S^{-1}A \to \varphi(S)^{-1}B$, den wir wieder mit φ bezeichnen; schreibt man $B_0 = \varphi(S)^{-1}B$, so hat man also $\varphi : A_\mathfrak{p} \to B_0$. Damit erhält man
$$\begin{aligned}\phi^{-1}(\mathfrak{p}) &= \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B) : \varphi^{-1}\mathfrak{q} = \mathfrak{p}\} \simeq \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B_0) : \varphi^{-1}\mathfrak{q} = \mathfrak{p}A_\mathfrak{p}\} = \\ &= \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B_0) : \varphi^{-1}\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{p}A_\mathfrak{p}\} = \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B_0) : \varphi(\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}) \subseteq \mathfrak{q}\} = \\ &= \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B_0) : \varphi(\mathfrak{p}A_\mathfrak{p})B_0 \subseteq \mathfrak{q}\} \simeq \operatorname{Spec}(B_0/\varphi(\mathfrak{p}A_\mathfrak{p})B_0).\end{aligned}$$
Dabei sind die Isomorphismen Homöomorphismen.
2. Wir haben einen Ringhomomorphismus $A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} \to B_0/\varphi(\mathfrak{p}A_\mathfrak{p})B_0$. Dann erhält man durch Multiplikation eine A-bilineare Abbildung
$$B \times A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} \to B_0/\varphi(\mathfrak{p}A_\mathfrak{p})B_0.$$
Diese ist surjektiv, da alle Nenner von B_0 schon von $A_\mathfrak{p}$ stammen. Also haben wir eine Surjektion
$$B \otimes_A A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} \to B_0/\varphi(\mathfrak{p}A_\mathfrak{p})B_0.$$
Jedes Element aus $B \otimes_A A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ kann in der Form $b \otimes \frac{1}{s}$ geschrieben werden. Liegt es im Kern der Abbildung, so gibt es $a_i \in \mathfrak{p}, b_i \in B, s_i \in S$ mit
$$\frac{b}{\varphi(s)} = \sum_i \frac{\varphi(a_i)b_i}{\varphi(s_i)}.$$
O.E. können wir $s_i = s$ annehmen. Dann gibt es $t \in S$ mit
$$\varphi(t)(b - \sum_i \varphi(a_i)b_i) = 0$$
und somit
$$b \otimes \frac{1}{s} \;=\; \varphi(t)b \otimes \frac{1}{st} = \sum_i \varphi(ta_i)b_i \otimes \frac{1}{st} = \sum_i b_i \otimes \frac{a_i}{s} = 0.$$
also haben wir einen Isomorphismus
$$B \otimes_A A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} \simeq B_0/\varphi(\mathfrak{p}A_\mathfrak{p})B_0,$$
woraus mit obigen Überlegungen folgt
$$\phi^{-1}\mathfrak{p} \simeq \operatorname{Spec}(B_0/\varphi(\mathfrak{p}A_\mathfrak{p})B_0) \simeq \operatorname{Spec}(B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})) = \operatorname{Spec}(B) \times_{\operatorname{Spec}(A)} \operatorname{Spec}(\kappa(\mathfrak{p})),$$
was die Behauptung liefert. ■

Mit diesen Vorbereitungen ist folgende Definition sinnvoll:

DEFINITION 32. *Sei $\phi : X \to Y$ ein Morphismus und $y \in Y$. Dann haben wir einen natürlichen Morphismus* $\mathrm{Spec}(\kappa(y)) \to Y$, *wo $\kappa(y)$ der Restklassenkörper von y ist. (Der einzige Punkt von* $\mathrm{Spec}(\kappa(y))$ *wird auf $y \in Y$ abgebildet.) Die Faser von ϕ über dem Punkt y wird definiert durch*

$$X_y = X \times_Y \mathrm{Spec}(\kappa(y)).$$

X_y ist ein Schema über $\kappa(y)$.

Beispiele:

1. Sei X ein Schema über $\mathbf{Z}$. Dann ist $X_p = X_{(p)}$ ein Schema über $\mathbf{F}_p$ und $X_{\mathbf{Q}} = X_{(0)}$ ein Schema über $\mathbf{Q}$. Explizit: Ist $X = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[x_1, \ldots, x_n]/(f_1, \ldots, f_r))$, so ist
$$X_p = \mathrm{Spec}(\mathbf{F}_p[x_1, \ldots, x_n]/(f_1, \ldots, f_r)) \text{ und } X_{\mathbf{Q}} = \mathrm{Spec}(\mathbf{Q}[x_1, \ldots, x_n]/(f_1, \ldots, f_r)).$$
2. Sei K algebraisch abgeschlossener Körper und $\phi : \mathrm{Spec}(K[x,y]/(x - y^2)) \to \mathrm{Spec}(K[x])$. Der Restklassenkörper von $(x - c) \in \mathrm{Spec}(K[x])$ ist $K[x]/(x - c) \simeq K$, wegen
$$K[x,y]/(x - y^2) \otimes_{K[x]} K[x]/(x - c) \simeq K[x,y]/(x - c, x - y^2) \simeq K[y]/(y^2 - c)$$
ist die Faser von ϕ über $(x - c)$ das Schema $\mathrm{Spec}(K[y]/(y^2 - c))$. Für $c \neq 0$ besteht aus aus zwei Punkten, für $c = 0$ besteht es aus einem Punkt und ist nicht reduziert. Der generische Punkt $(0) \in \mathrm{Spec}(K[x])$ hat Restklassenkörper $K(x)$. Wegen
$$K[x,y]/(x - y^2) \otimes_{K[x]} K(x) \simeq K(x) \otimes_{K[x]} K[x][y]/(y^2 - x) \simeq K(x)[y]/(y^2 - x)$$
ist die Faser über (0) das Schema $\mathrm{Spec}(K(x)[y]/(y^2 - x))$. Es ist das Spektrum eines Körpers.

Bemerkung: Ist $\phi : X \to Y$ ein Morphismus, so ist für jeden Punkt $y \in Y$ die Faser $X_y \simeq \phi^{-1}(y)$ ein Schema über $\mathrm{Spec}(\kappa(y))$. Man kann daher $\phi : X \to Y$ auch als Familie von Schemata $X_y \to \mathrm{Spec}(\kappa(y))$ auffassen, wo $y \in Y$ läuft.

Basiswechsel

Ist X ein S-Schema, so hat man einen Morphismus $X \to S$. Hat man einen Morphismus $S' \to S$, so ist $X' = X \times_S S'$ ein Schema über S'. Man sagt, X' ist aus X durch Basiswechsel von S nach S' hervorgegangen.

Beispiele:

1. $X = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[x]/(x^2 + 1))$ ist ein integres $\mathbf{Z}$-Schema. Nach Basiswechsel $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}/(2)) \to \mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$ erhält man das Schema $X' = \mathrm{Spec}(\mathbf{F}_2[x]/(x+1)^2)$ über $\mathbf{F}_2$, das nicht mehr reduziert ist.

SATZ 31. *Sei $S' \to S$ ein Morphismus, X ein S-Schema und $X' = X \times_S S'$ das durch Basiswechsel erhaltene S'-Schema. Dann gilt:*

1. *Ist X von endlichem Typ über S, so X' von endlichem Typ über S'.*
2. *Ist $X \to S$ eine abgeschlossene Immersion, so auch $X' \to S'$.*
3. *Ist $X \to S$ endlich, so auch $X' \to S'$.*

Man sagt, daß diese Eigenschaften stabil unter Basiswechsel sind.

Beweis: Seien $\phi : X \to S$, $\phi' : X' \to S'$, $\lambda : S' \to S$ und $\mu : X' \to X$ die Morphismen, also

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{\mu} & X' \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi' \\ S & \xleftarrow{\lambda} & S' \end{array}$$

1. Sei $V \subseteq S$ offen affin, $V \simeq \mathrm{Spec}(A)$. Dann ist $\lambda^{-1}V \subseteq S'$ offen. Sei $V' \subseteq \lambda^{-1}V$ offen affin, $V' \simeq \mathrm{Spec}(A')$. Variiert man V und V', dann wird S' von offenen affinen Mengen der Gestalt V' überdeckt. Da $X \to S$ von endlichem Typ ist, gibt es endlich viele offene affine Mengen $U_i \simeq \mathrm{Spec}(B_i)$, $i = 1, \ldots, n$ mit $\phi^{-1}V = \cup_{i=1}^n U_i$, so daß B_i endlich erzeugte A-Algebra ist. Nun ist
$$(\phi \circ \mu){\phi'}^{-1}V' = (\lambda \circ \phi'){\phi'}^{-1}V' \subseteq \lambda V' \subseteq V,$$
also
$${\phi'}^{-1}V' \subseteq \mu^{-1}\phi^{-1}V = \cup_{i=1}^n \mu^{-1}U_i$$

und damit
$$\phi'^{-1}V' = \cup_{i=1}^{n}(\phi'^{-1}V' \cap \mu^{-1}U_i).$$
Nun gilt:
$$\phi'^{-1}V' \cap \mu^{-1}U_i = U_i \times_V V' = \mathrm{Spec}(B_i) \times_{\mathrm{Spec}(A)} \mathrm{Spec}(A') = \mathrm{Spec}(B_i \otimes_A A'),$$
da B_i endlich erzeugte A-Algebra ist, ist $B_i \otimes_A A'$ endlich erzeugte A'-Algebra. Daraus folgt, daß $X' \to S'$ von endlichem Typ ist.

2. Sei $\phi : X \to S$ eine abgeschlossene Immersion. Ist $V \subseteq S$ offen affin, $V \simeq \mathrm{Spec}(A)$, so induziert ϕ auch eine abgeschlossene Immersion $\phi^{-1}V \to V$, also ist $\phi^{-1}V \simeq \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a})$. Sei jetzt $V' \subseteq S'$ offen affin mit $V' \subseteq \lambda^{-1}V$, $V' \simeq \mathrm{Spec}(A')$. Wegen
$$\phi'^{-1}V' \subseteq \phi'^{-1}\lambda^{-1}V = \mu^{-1}(\phi^{-1}V)$$
gilt
$$\begin{aligned}\phi'^{-1}V' &= \phi'^{-1}V' \cap \mu^{-1}(\phi^{-1}V) = \phi^{-1}V \times_V V' = \\ &= \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a}) \times_{\mathrm{Spec}(A)} \mathrm{Spec}(A') = \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a} \otimes_A A') = \\ &= \mathrm{Spec}(A'/\mathfrak{a}A'),\end{aligned}$$
also ist $\phi'^{-1}V' \to V'$ einfach $\mathrm{Spec}(A'/\mathfrak{a}A') \to \mathrm{Spec}(A)$, also eine abgeschlossene Immersion und damit auch ϕ'.

3. Sei $\phi : X \to S$ endlich. Sei $V \subseteq S$ offen affin, $V \simeq \mathrm{Spec}(A)$. Dann ist auch $\phi^{-1}V \subseteq X$ offen affin, $\phi^{-1}V \simeq \mathrm{Spec}(B)$, und B endlich erzeugter A-Modul. Sei $V' \subseteq \lambda^{-1}V \subseteq S'$ offen affin, $V' \simeq \mathrm{Spec}(A')$. Wegen
$$\phi'^{-1}V' \subseteq \phi'^{-1}\lambda^{-1}V = \mu^{-1}\phi^{-1}V$$
gilt
$$\begin{aligned}\phi'^{-1}V' &= \mu^{-1}\phi^{-1}V \cap \phi'^{-1}V' = \phi^{-1}V \times_V \phi'^{-1}V' = \\ &\simeq \mathrm{Spec}(B) \times_{\mathrm{Spec}(A)} \mathrm{Spec}(A') = \mathrm{Spec}(B \otimes_A A').\end{aligned}$$
Da B endlich erzeugter A-Modul ist, ist $B \otimes_A A'$ endlich erzeugter A'-Modul. Da durch Mengen der Gestalt V' ganz S' überdeckt wird, ist $X' \to S'$ endlich. ■

KAPITEL 6

Gruppenschemata

Eine Gruppe G lebt davon, daß es eine Verknüpfung $G \times G \to G$ gibt. Nun haben wir für ein S-Schema G zwar ein Produkt $G \times_S G$, das aber i.a. nicht das mengentheoretische Produkt von G mit sich selbst ist. Durch einen Morphismus $G \times_S G \to G$ erhält man also i.a. keine Verknüpfung auf G. Man muß also anders vorgehen.

Beispiel: Für ein Schema X ist $\mathcal{O}_X(X)^*$ eine Gruppe bzgl. der Multiplikation. (Für einen Ring R ist $\mathcal{O}_R(\mathrm{Spec}(R)) = R^*$ die Gruppe der Einheiten von R.) Ist $\phi : X \to Y$ ein Schemamorphismus, so induziert $\phi^\sharp(Y) : \mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_X(X)$ einen Gruppenhomomorphismus $\mathcal{O}_Y(Y)^* \to \mathcal{O}_X(X)^*$. Die Zuordnung $X \mapsto \mathcal{O}_X(X)^*$ ist also ein sogenannter Gruppenfunktor nach folgender Definition:

DEFINITION 33. *Sei S ein Schema. Ein Gruppenfunktor über S ist ein kontravarianter Funktor von der Kategorie der S-Schemata in die Kategorie der Gruppen. D.h. für jedes S-Schema X hat man eine Gruppe $F(X)$ und für jeden S-Morphismus $X \xrightarrow{\phi} Y$ einen Gruppenhomomorphismus $F(Y) \xrightarrow{F(\phi)} F(X)$, so daß $F(\phi \circ \psi) = F(\psi) \circ F(\phi)$ und $F(id) = id$ gilt.*

Beispiele:

1. Für ein Schema X ist $\mathcal{O}_X(X)$ bzgl. der Addition eine Gruppe. $X \mapsto \mathcal{O}_X(X)$ ist ein Gruppenfunktor über $\mathbf{Z}$.
2. Sei n eine natürliche Zahl. Dann ist für jedes Schema X die Menge $E_n(X) = \{\alpha \in \mathcal{O}_X(X)^* : \alpha^n = 1\}$ eine Gruppe bzgl. der Multiplikation und damit E_n ein Gruppenfunktor.
3. Sei p eine Primzahl. Ist X ein $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$-Schema, so hat man einen Ringhomomorphismus $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \to \mathcal{O}_X(X)$, also ist $p = 0$ in $\mathcal{O}_X(X)$ und damit $(\alpha+\beta)^{p^n} = \alpha^{p^n} + \beta^{p^n}$. Daher ist $A_{p^n}(X) = \{\alpha \in \mathcal{O}_X(X) : \alpha^{p^n} = 0\}$ eine Gruppe bzgl. Addition und damit A_{p^n} ein Gruppenfunktor über $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.
4. Ist G eine feste Gruppe, so ist $X \mapsto G$ der konstante Gruppenfunktor.

Bemerkung: Kontravariante Funktoren treten auf natürliche Weise auch folgendermaßen auf: Wir betrachten S-Schemata. Sei G ein festes S-Schema. Für jedes S-Schema X ist die Menge der X-wertigen Punkte von G eine Menge: $G(X) = Mor_S(X, G)$. Ist $\phi : X \to Y$ ein S-Morphismus, so ist

$$G(\phi) : G(Y) \to G(X), \quad (Y \xrightarrow{\alpha} G) \mapsto (X \xrightarrow{\phi} Y \xrightarrow{\alpha} G)$$

eine Abbildung zwischen Mengen. Also ist $X \mapsto G(X)$ ein kontravarianter Funktor von der Kategorie der S-Schemata in die Kategorie der Mengen.

DEFINITION 34. *Ein Funktor F über S heißt darstellbar, wenn es ein S-Schema G gibt mit*

$$F(X) = G(X) = Mor_S(X, G) \quad \text{und} \quad F(\phi) = G(\phi)$$

für alle S-Schemata X und alle S-Morphismen ϕ.

Beispiel: Wir betrachten das $\mathbf{Z}$-Schema $\mathbf{G}_m = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[x, \frac{1}{x}])$. Für einen Ring R ist ein

$$\tilde{\varphi} \in \mathbf{G}_m(R) = \mathbf{G}_m(\mathrm{Spec}(R)) = Mor(\mathrm{Spec}(R), \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[x, \frac{1}{x}]))$$

gegeben durch einen Ringhomomorphismus $\varphi : \mathbf{Z}[x, \frac{1}{x}] \to R$. Dann ist $1 = \varphi(1) = \varphi(x)\varphi(\frac{1}{x})$, also $\varphi(x) \in R^*$. Ist umgekehrt $u \in R^*$ gegeben, so erhält man durch $\varphi_u : \mathbf{Z}[x, \frac{1}{x}] \to R$, $\varphi(x) = u$ einen Ringhomomorphismus und damit $\tilde{\varphi} \in \mathbf{G}_m(R)$. Also haben wir eine Bijektion $\mathbf{G}_m(R) \simeq R^*$, $\tilde{\varphi} \mapsto \varphi(x)$. Ähnlich sieht man, daß für eine beliebiges Schema X gilt $\mathbf{G}_m(X) \simeq \mathcal{O}_X(X)^*$. Das Schema $\mathbf{G}_m$ stellt also den Funktor unseres ersten Beispiels dar.

Frage: Sei F ein Gruppenfunktor über S und G ein S-Schema mit $F(X) = G(X)$, d.h. G stellt F dar. Für jedes S-Schema X ist $F(X)$ eine Gruppe, also gibt es eine Verknüpfung $\mu(X) : F(X) \times F(X) \to F(X)$. Kann man dies auf G zurückführen?

Überlegungen: Wir betrachten nur Schemata über S. Sei G ein festes S-Schema und X ein S-Schema, $X \xrightarrow{\tau} S$ der Strukturmorphismus.

1. Da wir nur S-Morphismen betrachten, muß jedes Element aus $Mor_S(X, S)$ mit den Strukturmorphismen $X \xrightarrow{\tau} S$ und $S \xrightarrow{id} S$ verträglich sein, also ist nur $\tau : X \to S$ möglich, d.h.
$$S(X) = Mor_S(X, S) = \{\tau\},$$
$S(X)$ besteht also nur aus einem Punkt.
2. Da $S(X)$ nur aus einem Element besteht, erhält man
$$(G \times_S G)(X) \simeq G(X) \times_{S(X)} G(X) = G(X) \times G(X).$$
Explizit: Sind $(\phi_1, \phi_2) \in G(X) \times G(X)$ gegeben, d.h. $X \xrightarrow{\phi_1} G$ und $X \xrightarrow{\phi_2} G$, so hat man ein kommutatives Diagramm
$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\phi_1"'] \arrow[dr, "\phi_2"] & \\ G \arrow[dr] & & G \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$
Daher gibt es einen eindeutig bestimmten Morphismus $X \xrightarrow{\phi} G \times_S G$, so daß $\phi_1 = p \circ \phi$ und $\phi_2 = q \circ \phi$, wo p und q die beiden Projektionen $G \times_S G \to G$ sind. Also $(\phi_1, \phi_2) \mapsto \phi \in (G \times_S G)(X)$.
3. Hat man einen Morphismus $G \times_S G \xrightarrow{\mu} G$, so liefert dieser eine Abbildung
$$(G \times_S G)(X) \xrightarrow{\mu(X)} G(X), \quad (X \xrightarrow{\alpha} G \times_S G) \mapsto (X \xrightarrow{\alpha} G \times_S G \xrightarrow{\mu} G),$$
was wir auch also Verknüpfung
$$G(X) \times G(X) \xrightarrow{\mu(X)} G(X)$$
interpretieren können. Durch eine Morphismus μ erhalten wir also viele Verknüpfungen $\mu(X)$.
4. Wie kann man durch G ein neutrales Element in allen $G(X)$ auszeichnen? Ist $S \xrightarrow{\epsilon} G$ ein S-Morphismus, so hat man $S(X) \xrightarrow{\epsilon(X)} G(X)$. Da $S(X)$ aus nur einem Element besteht, ist $\epsilon(X)(S(X))$ einelementig, also erhält man so ein ausgezeichnetes Element in $G(X)$.
5. Die Inversenbildung kann man so beschreiben: Für jedes S-Schema X ist die Inversenbildung in $G(X)$ eine Abbildung $G(X) \to G(X)$. Hat man einen Morphismus $G \xrightarrow{i} G$, so hat man für jedes X eine Abbildung $G(X) \xrightarrow{i(X)} G(X)$.
6. Formuliert man nun noch die Eigenschaften, die $\mu(X)$, $\epsilon(X)$ und $i(X)$ für $G(X)$ als Gruppe erfüllen müssen, mit μ, ϵ und i allein, so kommt man zu folgender Definition:

Definition 35. *Eine Gruppenschema über S besteht aus einem S-Schema G, d.h. $G \xrightarrow{\pi} S$, aus Morphismen $\mu : G \times_S G \to G$ (Multiplikation), $\epsilon : S \to G$ (neutrales Element) und $i : G \to G$ (Inversenbildung), so daß folgende Diagramme kommutativ sind:*

1. *(Assoziativgesetz)*
$$\begin{array}{ccc} G \times_S G \times_S G & \xrightarrow{id \times \mu} & G \times_S G \\ \downarrow \mu \times id & & \downarrow \mu \\ G \times_S G & \xrightarrow{\mu} & G \end{array}$$
2. *(Eigenschaften des neutralen Elements)*
$$\begin{array}{ccc} G \times_S G & \xrightarrow{\mu} & G \\ \uparrow \epsilon \times id & & \uparrow id \\ S \times_S G & \xrightarrow{id} & G \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} G \times_S G & \xrightarrow{\mu} & G \\ \uparrow id \times \epsilon & & \uparrow id \\ G \times_S S & \xrightarrow{id} & G \end{array}$$

3. *(Eigenschaften der Inversenbildung)*

$$\begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{\Delta} G \times_S G \xrightarrow{id \times i} & G \times_S G \\ \downarrow \pi & & \downarrow \mu \\ S & \xrightarrow{\epsilon} & G \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{\Delta} G \times_S G \xrightarrow{i \times id} & G \times_S G \\ \downarrow \pi & & \downarrow \mu \\ S & \xrightarrow{\epsilon} & G \end{array}$$

In der Definition wurden noch einige Bezeichungen verwendet, die noch kurz erklärt werden müssen:

1. Wenn man S-Schemata betrachtet, ist natürlich $S \to S$ die Identität, daher folgt sofort
$$X \times_S S \simeq S.$$
Ähnlich gilt
$$(X \times_S Y) \times_S Z \simeq X \times_S (Y \times_S Z),$$
wofür man dann auch $X \times_S Y \times_S Z$ schreibt.
2. Wir betrachten S-Schemata X, X', Y, Y' und S-Morphismen $\phi : X \to X'$ und $\psi : Y \to Y'$. Wir haben die Projektionen $p : X \times_S Y \to X$, $q : X \times_S Y \to Y$ und $p' : X' \times_S Y' \to X'$, $q' : X' \times_S Y' \to Y'$. Die S-Morphismen
$$\phi \circ p : X \times_S Y \to X \to X' \text{ und } \psi \circ q : X \times_S Y \to Y \to Y'$$
faktorisieren also über $X' \times_S Y'$, was wir mit $\phi \times \psi$ bezeichnen:
$$X \times_S Y \xrightarrow{\phi \times \psi} X' \times_S Y'.$$
3. Ist $\phi : X \to S$ ein Morphismus, so faktorisieren die zwei Morphismen $X \xrightarrow{id} X$ und $X \xrightarrow{id} X$ über $X \times_S X$, d.h. man erhält einen Morphismus
$$X \xrightarrow{\Delta} X \times_S X,$$
wobei $p \circ \Delta = q \circ \Delta = id$, wo p und q die beiden Projektionen $X \times_S X \xrightarrow{p,q} X$ sind. Δ heißt Diagonalabbildung.

Bemerkung: Ein Gruppenschema ist also kein Schema mit einer Gruppenstruktur, sondern als Schema, wo es Morphismen gibt, die die Eigenschaften einer Gruppe widerspiegeln. Die Definition wurde genau so gemacht, daß jetzt folgender Satz gilt:

SATZ 32. *Sei G ein S-Gruppenschema mit den Morphismen $G \times_S G \xrightarrow{\mu} G$, $S \xrightarrow{\epsilon} G$ und $G \xrightarrow{i} G$. Dann ist für jedes S-Schema X die Menge $G(X)$ der X-wertigen Punkte von G eine Gruppe bzgl. der Verknüpfung $\mu(X)$, dem neutralen Element $\epsilon(X)(X \to S)$ und der Inversenbildung $i(X)$.*

Bemerkung: Ist G ein affines Gruppenschema über $\mathbf{Z}$, d.h. $G = \mathrm{Spec}(A)$, so sind die Strukturabbildungen $G \times_{\mathbf{Z}} G \xrightarrow{\mu} G$, $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}) \xrightarrow{\epsilon} G$ und $G \xrightarrow{i} G$ gegeben durch Ringhomomorphismen
$$A \xrightarrow{\mu^*} A \otimes_{\mathbf{Z}} A, \quad A \xrightarrow{\epsilon^*} \mathbf{Z}, \quad A \xrightarrow{i^*} A$$
mit entsprechenden Eigenschaften. Ist $X = \mathrm{Spec}(R)$, so sind die Elemente von $G(X) = Mor(X, G) = Mor(\mathrm{Spec}(R), \mathrm{Spec}(A))$ von der Gestalt $\tilde{\varphi}$, wo $\varphi : A \to R$ ein Ringhomomorphismus ist. Sind $(\tilde{\varphi_1}, \tilde{\varphi_2}) \in G(T) \times G(T)$ gegeben, so ist $A \times A \to R$, $(y, z) \mapsto \varphi_1(y)\varphi_2(z)$ $\mathbf{Z}$-bilinear, faktorisiert also über $A \otimes_{\mathbf{Z}} A \xrightarrow{\varphi_1 \otimes \varphi_2} R$ mit $(\varphi_1 \otimes \varphi_2)(y \otimes z) = \varphi_1(y)\varphi_2(z)$. Dann ist $\mu(X)(\tilde{\varphi_1}, \tilde{\varphi_2})$ gegeben durch den Ringhomomorphismus $A \xrightarrow{(\varphi_1 \otimes \varphi_2) \circ \mu^*} R$.

Beispiel: Das Schema $\mathbf{G}_m = \mathrm{Spec}(A)$ mit $A = \mathbf{Z}[x, \frac{1}{x}]$ wird mit den Ringhomomorphismen $A \xrightarrow{\mu^*} A \otimes_{\mathbf{Z}} A$, $A \xrightarrow{\epsilon^*} \mathbf{Z}$ und $A \xrightarrow{i^*} A$, die durch
$$\mu^*(x) = x \otimes x, \quad \epsilon^*(x) = 1, \quad i^*(x) = \frac{1}{x}$$
gegeben werden, zu einem Gruppenschema über $\mathbf{Z}$. (Natürlich müßte man die entsprechenden Eigenschaften nachrechnen.) Wir wollen nur sehen, daß wir für einen Ring R die richtige Gruppenstruktur auf $\mathbf{G}_m(R)$ erhalten. Die Zuordnung $\mathbf{G}_m(R) \to R^*$, $\tilde{\varphi} \mapsto \varphi(x)$ ist bijektiv. Seien $u, v \in R^*$ und $\tilde{\varphi_1}, \tilde{\varphi_2} \in \mathbf{G}_m(R)$ mit

$\varphi_1(x) = u$ und $\varphi_2(x) = v$. Dann ist $\mu(X)(\tilde{\varphi_1}, \tilde{\varphi_2})$ gegeben durch den Ringhomomorphismus $(\varphi_1 \otimes \varphi_2) \circ \mu^*$, das entsprechende Element in R^* also

$$((\varphi_1 \otimes \varphi_2) \circ \mu^*)(x) = (\varphi_1 \otimes \varphi_2)(x \otimes x) = \varphi_1(x)\varphi_2(x) = uv,$$

wie es sein sollte.

Beispiel: Sei $\mathbf{G}_a = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[x])$ und $\mu^*(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1$, $\epsilon^*(x) = 0$ und $i^*(x) = -x$. Dann ist $\mathbf{G}_a(X) \simeq \mathcal{O}_X(X)$ mit der Addition.

Beispiel: $\mu_n = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[x]/(x^n - 1))$, die Strukturmorphismen wie bei $\mathbf{G}_m$, d.h.

$$\mu^*(x) = x \otimes x, \quad \epsilon^*(x) = 1, \quad i^*(x) = x^{n-1}.$$

Für einen Ring R ist $\mu_n(R) \simeq \{\alpha \in R : \alpha^n = 1\}$. Der Strukturmorphismus $\mu_n \to \mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$ ist endlich.

Bemerkung: Ein S-Gruppenschema G heißt endlich, wenn der Morphismus $G \to S$ endlich ist. Es ist ein schwieriges Problem, die endlichen Gruppenschemata über $\mathbf{Z}$ zu klassifizieren. Vgl. [**OT**], [**F**] und die anschließenden Beispiele.

Endliche flache Gruppenschemata der Ordnung 2 über Z

Sei G ein endliches flaches Gruppenschema über $\mathbf{Z}$ mit den Strukturmorphismen μ, ϵ und i von der Ordnung 2. Wir wollen sehen, welche Möglichkeiten es gibt.

- Da $G \to \mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$ endlich ist, ist auch G affin, also $G = \mathrm{Spec}(A)$. Daß G flach über $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$ ist, heißt, daß A flacher $\mathbf{Z}$-Modul ist, also torsionsfreier $\mathbf{Z}$-Modul. Als endlich erzeugter torsionsfreier $\mathbf{Z}$-Modul ist $A \simeq \mathbf{Z}^r$. Wir setzen nun noch voraus, daß $r = 2$ ist, also $A \simeq \mathbf{Z}^2$, als $\mathbf{Z}$-Modul. Die Strukturmorphismen liefern Ringhomomorphismen

$$A \xrightarrow{\mu^*} A \otimes_{\mathbf{Z}} A, \quad A \xrightarrow{\epsilon^*} \mathbf{Z}, \quad A \xrightarrow{i^*} A.$$

- Wegen $\epsilon^*(1) = 1$ können wir $\mathbf{Z} \subseteq A$ annehmen. Da $\epsilon^*|_{\mathbf{Z}}$ injektiv ist, ist $\mathbf{Z} \cap Kern(\epsilon^*) = 0$. Ist $z \in A$, so ist $\epsilon^*(z - \epsilon^*(z)) = 0$, also $z = \epsilon^*(z) + (z - \epsilon^*(z)) \in \mathbf{Z} + Kern(\epsilon^*)$ und damit

$$A = \mathbf{Z} \oplus Kern(\epsilon^*).$$

  $Kern(\epsilon^*)$ ist ein freier $\mathbf{Z}$-Modul vom Rang 1, d.h. es gibt ein $x \in A$ mit $Kern(\epsilon^*) = \mathbf{Z}x$. Damit haben wir:

$$A = \mathbf{Z} + \mathbf{Z}x, \quad \epsilon^*(m + nx) = m \text{ für } m, n \in \mathbf{Z}.$$

  Aus $\epsilon^*(x^2) = \epsilon^*(x)^2 = 0$ und $\epsilon^*(m + nx) = m$ folgt, daß es ein $a \in \mathbf{Z}$ gibt mit

$$x^2 = ax.$$

  Also können wir auch schreiben

$$A = \mathbf{Z}[x]/(x^2 - ax).$$

- Der Ringhomomorphismus $A \xrightarrow{\mu^*} A \otimes_{\mathbf{Z}} A$ ist bestimmt durch $\mu^*(x)$. Es gibt $b_1, b_2, b_3, b_4 \in \mathbf{Z}$ mit

$$\mu^*(x) = b_1(1 \otimes 1) + b_2(1 \otimes x) + b_3(x \otimes 1) + b_4(x \otimes x).$$

  Das erste Diagramm für die Inversenbildung bedeutet, daß

$$A \xrightarrow{\mu^*} A \otimes_{\mathbf{Z}} A \xrightarrow{\epsilon^* \otimes id} \mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}} A \to A$$

  die Identität sein muß, d.h.

$$\begin{aligned} x &= ((\epsilon^* \otimes id) \circ \mu^*)(x) = (\epsilon^* \otimes id)(b_1(1 \otimes 1) + b_2(1 \otimes x) + b_3(x \otimes 1) + b_4(x \otimes x) = \\ &= b_1 + b_2 x, \end{aligned}$$

  also ist $b_1 = 0$, $b_2 = 1$. Das zweite Diagramm liefert analog $b_2 = 1$. Schreiben wir $b_4 = b$, so ist also

$$\mu^*(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1 + bx \otimes x.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} 0 &= \mu^*(x^2 - ax) = \\ &= (1 \otimes x^2 + x^2 \otimes 1 + b^2x^2 \otimes x^2 + 2x \otimes x + 2bx \otimes x^2 + 2bx^2 \otimes x) - \\ &\quad -a(1 \otimes x + x \otimes 1 + bx \otimes x) = \\ &= (a^2b^2 + 3ab + 2)(x \otimes x) = (ab+1)(ab+2)(x \otimes x) \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Bedingung

$$(ab+1)(ab+2) = 0.$$

- Natürlich ist $i^*(1) = 1$. Sei $i^*(x) = cx + c'$. Das eine Diagramm für Inversenbildung zeigt, daß die beiden Ringhomomorphismen

$$A \xrightarrow{\mu^*} A \otimes_{\mathbf{Z}} A \xrightarrow{id \otimes i^*} A \otimes_{\mathbf{Z}} \xrightarrow{\Delta^*} A$$

und

$$A \xrightarrow{\epsilon^*} \mathbf{Z} \to A$$

gleich sind. Insbesondere ist dann

$$\begin{aligned} 0 &= \epsilon^*(x) = (\Delta^* \circ (id \otimes i^*) \circ \mu^*)(x) = \\ &= (\Delta^* \circ (id \otimes i^*)(1 \otimes x + x \otimes 1 + bx \otimes x) = \\ &= \Delta^*(1 \otimes (cx + c') + x \otimes 1 + bx \otimes (cx + c')) = \\ &= (cx + c') + x + bx(cx + c') = cx + c' + x + abcx + bc'x = \\ &= c' + (c + 1 + abc + bc')x, \end{aligned}$$

was sofort $c' = 0$ und damit $0 = c + 1 + abc$, also $c(ab+1) = -1$ liefert. Nun wissen wir bereits $(ab+1)(ab+2) = 0$, also folgt $ab = -2$ und $c = 1$. Damit ist $i^*(x) = x$ und daher $i^* = id$.

- Wir fassen unsere bisherigen Ergebnisse zusammen:

$$ab = -2, \quad x^2 = ax, \quad \mu^*(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1 + bx \otimes x, \quad i^* = id, \quad \epsilon^*(x) = 0.$$

Natürlich hätten wir statt x auch $-x$ wählen können. Dafür gilt:

$$(-x)^2 = (-a)(-x), \quad \mu^*(-x) = 1 \otimes (-x) + (-x) \otimes 1 + (-b)(-x) \otimes (-x), \quad \epsilon^*(-x) = 0.$$

Geht man also von x zu $-x$ über, so geht a in $-a$ und b in $-b$ über. Wir können also o.E. $a > 0$ und $b < 0$ annehmen und erhalten so nur zwei Möglichkeiten: $(a,b) = (1,-2)$ oder $(a,b) = (2,-1)$. Das Assoziativgesetz prüft man leicht nach. Also ist

$$G \simeq \operatorname{Spec}(\mathbf{Z}[x]/(x^2 - x)) \text{ oder } G \simeq \operatorname{Spec}(\mathbf{Z}[x]/(x^2 - 2x)).$$

Basiswechsel nach $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ergibt das reduzierte Schema $\operatorname{Spec}(\mathbf{F}_2[x]/(x^2 - x))$ und das nicht reduzierte Schema $\operatorname{Spec}(\mathbf{F}_2[x](x^2))$, daher sind die zwei Gruppenschemata nicht isomorph. Wir fassen zusammen:

Satz 33. *Es gibt genau zwei endliche flache Gruppenschemata der Ordnung* 2 *über* $\mathbf{Z}$, *nämlich*

1. $G = \operatorname{Spec}(\mathbf{Z}[x]/(x^2 - x))$ *mit*
$$\mu^*(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1 - 2x \otimes x, \quad i^* = id, \quad \epsilon^*(x) = 0.$$
2. $G = \operatorname{Spec}(\mathbf{Z}[x]/(x^2 - 2x))$ *mit*
$$\mu^*(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1 - x \otimes x, \quad i^* = id, \quad \epsilon^*(x) = 0.$$

Wir wollen jetzt die zwei Gruppenschemata noch genauer anschauen:

Beispiel: Wir betrachten das zweite Gruppenschema

$$G = \operatorname{Spec}(\mathbf{Z}[x]/(x^2 - 2x)), \quad \mu^*(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1 - x \otimes x, \quad i^* = id, \quad \epsilon^*(x) = 0.$$

Für $y = 1 - x$ gilt $y^2 = 1 - 2x + x^2 = 1$, $\epsilon^*(y) = 1$ und

$$\mu^*(y) = 1 \otimes 1 - 1 \otimes x - x \otimes 1 + x \otimes x = (1 - x) \otimes (1 - x) = y \otimes y.$$

Wir können also genauso schreiben:

$$G = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[y]/(y^2-1)), \quad \mu^*(y) = y \otimes y, \quad i^* = id, \quad \epsilon^*(y) = 1.$$

Dies ist aber das Gruppenschema μ_2, das den Gruppenfunktor

$$X \mapsto \{\alpha \in \mathcal{O}_X(X)^* : \alpha^2 = 1\}$$

darstellt.

Beispiel: Wir betrachten jetzt das erste Gruppenschema mit

$$G = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[x]/(x^2-x)), \quad \mu^*(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1 - 2x \otimes x, \quad i^* = id, \quad \epsilon^*(x) = 0.$$

Ein Element $\tilde{\varphi} \in G(R)$ ist gegeben durch einen Ringhomomorphismus $\varphi : \mathbf{Z}[x]/(x^2-x) \to R$, also erfüllt $u = \varphi(x)$ die Gleichung $u^2 = u$. Umgekehrt liefert jedes $u \in R$ mit $u^2 = u$ einen Ringhomomorphismus $\varphi_u : \mathbf{Z}[x]/(x^2-x) \to R$ mit $\varphi_u(x) = u$ und damit ein Element $\tilde{\varphi_u} \in G(R)$. Wir können also schreiben $G(R) \simeq \{u \in R : u^2 = u\}$. Wie sieht die Verknpfung auf dieser Menge aus? Seien $u, v \in R$ wie oben gegeben. Die Verknüpfung wird gegeben durch den Ringhomomorphismus $A \xrightarrow{\mu^*} A \otimes_{\mathbf{Z}} A \xrightarrow{\varphi_u \otimes \varphi_v} R$, das Element x wird also auf

$$(\varphi_u \otimes \varphi_v \circ \mu^*)(x) = (\varphi_u \otimes \varphi_v)(1 \otimes x + x \otimes 1 - 2x \otimes x) = u + v - 2uv$$

abgebildet. Setzt man $H(R) = \{u \in R : u^2 = u\}$, so definiert $(u,v) \mapsto u + v - 2uv$ eine Gruppenstruktur auf $H(R)$, wobei 0 das neutrale Element und u invers zu u ist. Die Menge der Idempotenten von R ist so ein $\mathbf{F}_2$-Vektorraum.

Beispiele für endliche nichtflache Gruppenschemata über Z

Für $n \in \mathbf{N}$ betrachten wir den Ring $A = \mathbf{Z}[x]/(x^2 - x, nx)$. Wir definieren $A \xrightarrow{\mu^*} A \otimes_{\mathbf{Z}} A$, $A \xrightarrow{\epsilon^*} \mathbf{Z}$ und $A \xrightarrow{i^*} A$ durch

$$\mu^*(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1 - 2x \otimes x, \quad \epsilon^*(x) = 0, \quad i^* = id.$$

Dann ist $G = \mathrm{Spec}(A)$ ein nichtflaches endliches Gruppenschema über $\mathbf{Z}$. Definiert man $H(R) = \{u \in R : u^2 = u, nu = 0\}$ mit $(u,v) \mapsto u + v - 2uv$, so sieht man genau wie beim vorangegangenen Beispiel, daß $H(R)$ eine abelsche Gruppe ist und $G(R) \simeq H(R)$.

ANHANG A

Vorlesungsankündigung

MATHEMATISCHES INSTITUT
UNIVERSITÄT ERLANGEN-NÜRNBERG
Priv.-Doz. Dr. W. Ruppert

Bismarckstraße 1 1/2, 6. Februar 1997
D-91054 Erlangen
Telefon: 09131/852466
Email: ruppert@mi.uni-erlangen.de

Vorlesungsankündigung
für das Sommersemester 1997

Schemata

(Algebraische Geometrie II)

Der in den 50er Jahren von Grothendieck eingeführte Begriff eines Schemas und die daran anschließende Entwicklung haben die algebraische Geometrie und die Zahlentheorie grundlegend verändert. Zu den Früchten dieser Entwicklung sind sicher auch der Beweis der Mordell-Vermutung durch Faltings 1983 sowie der Beweis der Fermat-Vermutung durch Wiles 1994 zu zählen.

Ist A ein kommutativer Ring mit Eins, so bezeichnet man die Menge der Primideale von A als Spektrum $\mathrm{Spec}(A)$ von A, führt darauf eine Topologie ein, betrachtet die Elemente von A als Funktionen auf $\mathrm{Spec}(A)$ und erhält damit ein sogenanntes affines Schema. Ein Schema ist ein Raum, der lokal wie ein affines Schema aussieht. Ein Zusammenhang mit der klassischen algebraischen Geometrie ergibt sich wie folgt: die Untervarietäten von $\mathbf{C}^n$ stehen in Bijektion zu den Primidealen des Polynomrings $\mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]$, d.h. zu den Elementen von $\mathrm{Spec}(\mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n])$, indem man jeder Untervarietät $X \subseteq \mathbf{C}^n$ das Ideal $I(X)$ der auf X verschwindenden Polynome zuordnet.

In der klassischen algebraischen Geometrie studiert man die affinen Untervarietäten des n-dimensionalen affinen Raums $\mathbf{C}^n$; ordnet man einer Untervarietät $X \subseteq \mathbf{C}^n$ die Menge $I(X)$ der auf X verschwindenden Polynome zu, so erhält man eine Bijektion zwischen den Untervarietäten von $\mathbf{C}^n$ und den Primidealen des Polynomrings $\mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Die Verallgemeinerung entsteht nun wie folgt: statt $\mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]$ nimmt einen beliebigen kommutativen Ring A (mit Eins) und betrachtet die Menge der Primideale von A, das sogenannte Spektrum $Spec(A)$ von A. Auf $Spec(A)$ führt man eine Topologie ein und erhält dann ein sogenanntes affines Schema. Ein Schema ist ein Raum, der lokal wie ein das Spektrum eines Ringes aussieht.

In der vierstündigen Vorlesung sollen die Grundlagen der algebraischen Geometrie in der Sprache der Schemata entwickelt werden. Zum Verständnis ist der erste Teil der Vorlesung nicht notwendig, ein Grundwissen in klassischer algebraischer Geometrie ist aber sicher hilfreich. Algebra-Kenntnisse werden vorausgesetzt.

Literatur:

- R. Hartshorne, Algebraic Geometry, Springer 1977.
- D. Eisenbud, J. Harris, Schemes: The Language of Modern Algebraic Geometry, Wadsworth & Brooks/Cole 1992.
- I. Shafarevich, Basic Algebraic Geometry 2, second, revised and expanded edition, Springer 1994.

Zeit und Ort der Vorlesung: Di, Do 8-10, Übungsraum 3
Beginn: 6. Mai 1997
Nummer im Vorlesungsverzeichnis:

gez. W. Ruppert

Literaturverzeichnis

[AM] M.F. Atiyah, I.G. MacDonald, Introduction to Commutative Algebra, Addison-Wesley 1969.

[EGA] A. Grothendieck, J. Dieudonné, Eléments de Géométrie Algébrique EGA I-IV, Publ. Math. IHES, ab 1960.

[EGAII] A. Grothendieck, J. Dieudonné, Eléments de Géométrie Algébrique, Étude Globale Élémentaire de quelques classes de Morphismes, Publ. Math. IHES **8** 1961.

[EH] D. Eisenbud, J. Harris, Schemes: The Language of Modern Algebraic Geometry, Wadsworth & Brooks/Cole 1992.

[F] J.-M. Fontaine, Il n'y a pas de variété abélienne sur $\mathbf{Z}$, Invent. Math. **81**(1985), 515-538.

[G] F. Grunewald, Some facts from the theory of group schemes, in G. Faltings, G. Wüstholz (eds.), Rational points, 3. Auflage, Vieweg 1992, S.53-113.

[H] R. Hartshorne, Algebraic Geometry, Springer 1977. Achtung: Spätere Ausgaben unterscheiden sich teilweise. Z.B. closed subschemes.

[I] S. Iitaka, Algebraic Geometry, Springer 1982.

[M] D. Mumford, The red book of varieties and schemes, Springer 1988.

[OT] F. Oort, J. Tate, Group schemes of finite order, Ann. Sci. École Norm. Sup. **3**(1970), 1-21.

[S] I. Shafarevich, Basic Algebraic Geometry 2, second, revised and expanded edition, Springer 1994.

[Sh] S. S. Shatz, Group schemes, formal groups, and p-divisible groups, in G. Cornell, J. H. Silverman (eds.), Arithmetic Geometry, Springer 1986, S.29-78.