Variationsprobleme in BV

Vorlesung im Sommersemester 2009

Thomas Schmidt

Stand: 3. August 2009

Inhaltsverzeichnis

Danksagung

Ich danke Felix Zorn für die Vorlesungsvertretungen der letzten Maiwoche, Dr. Christoph Scheven für ausführliches Korrekturlesen des Skriptes und Julian Fischer für einige ergänzende Bemerkungen.

Einleitung: Der Begriff der Variation

Für eine Funktion $u : I \to \mathbb{R}^N$ ($N \in \mathbb{N}$) auf einem Intervall I in $\mathbb{R}$ nennt man

$$\mathrm{Var}_I(u) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^{k} |u(x_i) - u(x_{i-1})| \,:\, k \in \mathbb{N},\; x_0 < x_1 < \ldots < x_k \text{ in } I \right\}$$

die **(punktweise) Variation** von u über I.

Ist - im einfachsten Fall - u stetig auf I und stetig differenzierbar im Innern von I, so gilt gemäß dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\sum_{i=1}^{k} |u(x_i) - u(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{k} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} u' \, dx \right| \le \sum_{i=1}^{k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |u'| \, dx \le \int_I |u'| \, dx.$$

Außerdem kann man mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$\sum_{i=1}^{k} |u(x_i) - u(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{k} |u'(\zeta_i)| \, (x_i - x_{i-1})$$

mit geeigneten Zwischenstellen $\zeta_i \in (x_{i-1}, x_i)$ umschreiben und sieht, dass diese Summen Näherungssummen des Integrals $\int_{x_0}^{x_k} |u'| \, dx$ sind (bei gegen 0 strebender Feinheit der Zerlegung $(x_0, x_1, \ldots, x_k)$). Approximiert man noch mit x_0 und x_k die Randpunkte von I, so folgt, dass $\mathrm{Var}_I(u)$ einfach die Länge des von u beschriebenen Weges in $\mathbb{R}^N$ ist, also

$$\mathrm{Var}_I(u) = \int_I |u'| \, dx.$$

Ist u außerdem injektiv so gilt gemäß der Flächenformel auch

$$\mathrm{Var}_I(u) = \mathscr{H}^1(\mathrm{Bild}\, u)$$

mit dem eindimensionalen Hausdorff-Maß $\mathscr{H}^1$ auf $\mathbb{R}^N$. Wir werden später sehen, dass die letzten beiden Gleichungen schon unter schwächeren Voraussetzungen an u gelten, nämlich wenn u nur schwach differenzierbar (oder äquivalent: absolutstetig) ist.

Im Allgemeinen lässt sich die Variation jedoch nicht so einfach beschreiben: Wir bemerken zunächst, dass für $a < b < c$ in $\mathbb{R}$ gilt

$$\mathrm{Var}_{(a,c)}(u) = \mathrm{Var}_{(a,b]}(u) + \mathrm{Var}_{[b,c)}(u).$$

Ist nun beispielsweise u stetig differenzierbar auf (a,b) und (b,c) und besitzt eine Sprungstelle in b (d. h. die einseitigen Grenzwerte $u(b-)$ und $u(b+)$ existieren, stimmen jedoch nicht beide mit $u(b)$ überein), so gelten

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}_{(a,b]}(u) &= \int_a^b |u'|\,dx + |u(b) - u(b-)|,\\
\mathrm{Var}_{[b,c)}(u) &= |u(b+) - u(b)| + \int_b^c |u'|\,dx,\\
\mathrm{Var}_{(a,c)}(u) &= \int_a^b |u'|\,dx + |u(b) - u(b-)| + |u(b+) - u(b)| + \int_b^c |u'|\,dx.
\end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass bei unstetigem u, zusätzlich zur Länge des von u beschriebenen Weges, auch die Weite der Sprünge in die Variation eingeht.

Tatsächlich sieht man am Beispiel der Cantor-Funktion auf $[0,1]$ (dies ist eine stetige nichtfallende Funktion $c : [0,1] \to [0,1]$ mit $c(0) = 0$, $c(1) = 1$ und $c' \equiv 0$ fast-überall auf $(0,1)$; folglich $\mathrm{Var}_{[0,1]}(c) = 1$), dass bei der Berechnung der Variation außer dem Integral der Ableitung und den Sprungweiten noch ein dritter Anteil eine Rolle spielen kann. Dieser sogenannte Cantor-Anteil ist jedoch anschaulich nur schwer zu verstehen.

Eine Funktion $u : I \to \mathbb{R}^N$ heißt **Funktion von beschränkter Variation** auf dem Intervall I, wenn $\mathrm{Var}_I(u) < \infty$ gilt. Ist I kompakt, so sieht man leicht, dass jede stetig differenzierbare (vgl. oben) und allgemeiner jede Lipschitz-stetige Funktion auf I von beschränkter Variation ist.

Außerdem hat im Fall $N = 1$ jede monotone Funktion u auf dem kompakten Intervall $I = [a,b]$ beschränkte Variation, nämlich $\mathrm{Var}_{[a,b]}(u) = |u(b) - u(a)| < \infty$, und es lässt sich sogar zeigen, dass die Funktionen von beschränkter Variation genau die Differenzen von zwei (gleichsinnig) monotonen Funktionen sind. Insbesondere erben Funktionen von beschränkter Variation die folgenden guten Eigenschaften monotoner Funktionen: Hat u beschränkte Variation auf dem Intervall I, so existieren die einseitigen Grenzwerte $u(a-)$ und $u(a+)$ an jeder[1] Stelle a in I und abgesehen von höchstens abzählbar vielen Sprungstellen stimmen sie mit $u(a)$ überein. Also ist u stetig bis auf abzählbar viele Punkte. Diese Folgerungen gelten auch im vektoriellen Fall, also für $\mathbb{R}^N$-wertige Funktionen mit beliebigem $N \in \mathbb{N}$, wie man durch Betrachtung der einzelnen Komponentenfunktionen sieht.

Der obige Begriff der (punktweisen) Variation hängt stark von einzelnen Werten der Funktion u ab: Für die Nullfunktion 0 und die charakteristische Funktion $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ gilt zum Beispiel $\mathrm{Var}_{(0,1)}(0) = 0 \neq \infty = \mathrm{Var}_{(0,1)}(\mathbb{1}_{\mathbb{Q}})$, obwohl die Funktionen sich nur an abzählbar vielen Stellen unterscheiden. Daher definiert man für Fastfunktionen $u : I \to \mathbb{R}^N$ (das sind Äquivalenzklassen von Funktionen, die sich nur auf einer $\mathscr{L}^1$-Nullmenge unterscheiden; auch Lebesgue-Klassen genannt) die sogenannte **(essentielle) Variation**

$$\mathrm{Var}_I(u) := \inf\{\mathrm{Var}_I(v) \,:\, v \text{ ist ein Repräsentant von } u\}$$

und nennt u eine (Fast-)Funktion von beschränkter Variation auf I, wenn $\mathrm{Var}_I(u) < \infty$ gilt.

[1] In eventuellen Randpunkten von I macht natürlich nur einer der beiden Grenzwerte Sinn.

Diejenigen v, für die das Infimum erreicht wird, heißen die guten Repräsentanten von u. Tatsächlich existieren gute Repräsentanten stets (vergleiche Bemerkung 1.25). Weiterhin lässt sich aus den obigen Überlegungen zur Existenz der einseitigen Grenzwerte ableiten, dass für eine (Fast-)Funktion u von beschränkter Variation die Integralgrenzwerte $u(a-) := \lim_{s\to 0} \fint_{(a-s,a)} u\,dx$ und $u(a+) := \lim_{s\to 0} \fint_{(a,a+s)} u\,dx$ stets existieren. Für alle Repräsentanten v von u, die selbst beschränkte Variation haben, gilt dann offensichtlich $v(a-) = u(a-)$ und $v(a+) = u(a+)$. Die guten Repräsentanten v sind unter ihnen dadurch charakterisiert, dass $v(a)$ in allen inneren Punkten a von I stets auf der Strecke $[u(a-), u(a+)]$ liegt und $v(a) = u(a+)$ bzw. $v(a) = u(a-)$ in linken bzw. rechten Randpunkten a von I gilt.

Im ersten Teil dieser Vorlesung werden wir das vorausgehende klassische Konzept der Variation weitgehend verallgemeinern. Tatsächlich werden wir die Variation von Fastfunktionen $u : \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}^N$ $(n, N \in \mathbb{N})$ als Maß auf Ω verstehen. Funktionen von beschränkter Variation (oder kurz BV-Funktionen) auf Ω sind dann solche, für die dieses Maß endliche Gesamtmasse hat. Obwohl wir uns später hauptsächlich auf den Fall von $n \geq 2$ Veränderlichen konzentrieren, wird sich jedoch zeigen (vgl. Satz 1.26), dass dieses allgemeinere Konzept für $n = 1$ und offene Intervalle I in $\mathbb{R}$ mit den obigen Definitionen übereinstimmt.

Tatsächlich hat sich der moderne Begriff der BV-Funktion besonders in der Variationsrechnung als nützlich erwiesen. Im zweiten Teil dieser Vorlesung sollen daher Anwendungen im Vordergrund stehen:

- **Variationsintegrale mit linearem Wachstum:** Hier liegt eine der Hauptschwierigkeiten beim Beweis der Existenz von Minimierern in den fehlenden Kompaktheitseigenschaften des Sobolevraums $W^{1,1}$. Wir werden sehen, dass der Raum der BV-Funktionen bessere Kompaktheitseigenschaften aufweist und den natürlichen Definitionsbereich für die Untersuchung solcher Integrale darstellt.

- Das klassische **Plateau-Problem**, das Problem des kleinsten Flächeninhalts bei gegebenem Rand, und seine weitreichenden Verallgemeinerungen sind eng mit dem vorigen Punkt verwandt. Es sollen diejenigen Teile der zugehörigen Theorie kurz angerissen werden, bei denen BV-Funktionen eine Rolle spielen.

- **Free discontinuity problems (falls zeitlich möglich)**: Es handelt sich um eine Klasse von Problemen, die das sogenannte Mumford-Shah-Funktional, ein Modell zur Bildsegmentierung, einschließt. Hier sind BV-Funktionen (oder genauer die spezielleren SBV-Funktionen) nützlich zur Modellierung von Sprüngen entlang der Segmentgrenzen.

Kapitel 0

Maßtheorie

In diesem einleitenden Kapitel werden Begriffe und Sätze der Maßtheorie dargestellt, die in den folgenden Kapiteln benötigt werden. Eine gewisse Vertrautheit im Umgang mit Maß und Integral sowie den grundlegendsten Begriffen der Topologie und der Funktionalanalysis wird jedoch hier bereits vorausgesetzt.

Bis auf weiteres sei Ω stets ein **metrischer Raum**. Mit d bezeichnen wir die Metrik von Ω und mit $B_r^\Omega(x)$ die offene Kugel $\{y \in \Omega \,:\, d(x,y) < r\}$ in Ω. Außerdem schreiben wir $\mathscr{B}(\Omega)$ für die Borel-σ-Algebra von Ω, also die Menge aller Borel-Teilmengen von Ω, und führen die Menge

$$\mathscr{K}(\Omega) := \{A \in \mathscr{B}(\Omega) \,:\, A \subset K \subset \Omega \text{ für ein Kompaktum } K\}$$

der relativ kompakten Borel-Mengen und die Menge

$$\mathscr{O}\mathscr{K}(\Omega) := \{A \in \mathscr{K}(\Omega) \,:\, A \text{ ist offen in } \Omega.\}$$

der offenen und relativen kompakten Mengen ein. Man beachte, dass eine Borel-Menge genau dann in $\mathscr{K}(\Omega)$ ist, wenn ihr Abschluss kompakt ist. Unter einem nichtnegativen Maß auf Ω verstehen wir stets ein nichtnegatives inneres Borel-Maß auf Ω, also eine σ-additive Abblidung $\mu : \mathscr{B}(\Omega) \to [0,\infty]$ mit $\mu(\emptyset) = 0$.

Im Folgenden werden wir stets voraussetzen, dass Ω **abzählbar kompakt** (d. h. Ω ist abzählbare Vereinigung von Kompakta) **und lokal kompakt** (d. h. jeder Punkt von Ω liegt im Innern einer kompakten Teilmenge von Ω)[1] ist. Dies ist beispielsweise erfüllt, wenn Ω Schnitt einer offenen und einer abgeschlossen Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) ist; insbesondere, wenn Ω selbst offen oder abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$ ist. Wir halten folgende Charakterisierung der lokalen Kompaktheit fest, die später oft nützlich sein wird.

Lemma 0.1. *Die folgenden beiden Eigenschaften charakterisieren die lokale Kompaktheit von Ω:*

(I) Für jedes $x \in \Omega$ gibt es ein $A \in \mathscr{O}\mathscr{K}(\Omega)$ mit $x \in A$.

[1] $\mathbb{Q}$ und $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x < 0 \text{ oder } x = y = 0\}$ sind abzählbar kompakt, aber nicht lokal kompakt; $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ist weder abzählbar kompakt (Bairescher Kategoriensatz) noch lokal kompakt. In einem abzählbar kompakten und lokal kompakten Grundraum wie beispielsweise $\mathbb{R}^n$ ist jede lokal kompakte Menge auch abzählbar kompakt.

(II) Für jedes Kompaktum K in Ω gibt es ein $A \in \mathscr{OK}(\Omega)$ mit $K \subset A$.

Beweis. (I) ist eine Umformulierung der Definition und folgt offensichtlich aus (II). Es gelte nun (I) und K sei ein Kompaktum. Dann gibt es zu jedem $x \in K$ ein $A_x \in \mathscr{OK}(\Omega)$ mit $x \in A_x$. Aus der offenen Überdeckung $(A_x)_{x \in K}$ von K wählen wir eine endliche Teilüberdeckung $(A_{x_i})_{i=1,\dots,k}$ aus. Dann ist $A := \bigcup_{i=1}^k A_{x_i} \in \mathscr{OK}(\Omega)$ und $K \subset A$. □

0.1 Die Hauptsätze über Radon-Maße

Definition 0.2 (Radon-Maß)**.** *Ein nichtnegatives Maß μ auf Ω heißt* **lokal endlich***, wenn jeder Punkt $x \in \Omega$ im Innern eines $A \in \mathscr{B}(\Omega)$ mit $\mu(A) < \infty$ liegt. Ist μ lokal endlich, so nennen wir μ auch ein* **Radon-Maß**[2].

Proposition 0.3. *Die folgenden Eigenschaften eines nichtnegativen Maßes μ auf Ω sind äquivalent:*

(I) $\mu(A) < \infty$ für jedes $A \in \mathscr{K}(\Omega)$;

(II) $\mu(K) < \infty$ für jedes Kompaktum $K \subset \Omega$;

(III) μ ist lokal endlich.

Beweis. Die Äquivalenz von (I) und (II) ist trivial und wegen der lokalen Kompaktheit von Ω impliziert (II) schon (III). Es gelte nun (III) und K sei ein Kompaktum. Dann gibt es zu jedem $x \in K$ eine offene Teilmenge A_x von Ω mit $x \in A_x$ und $\mu(A_x) < \infty$. Aus der offenen Überdeckung $(A_x)_{x \in K}$ von K wählen wir eine endliche Teilüberdeckung $(A_{x_i})_{i=1,\dots,k}$ aus. Dann ist $K \subset \bigcup_{i=1}^k A_{x_i}$ und folglich $\mu(K) \le \mu(\bigcup_{i=1}^k A_{x_i}) \le \sum_{i=1}^k \mu(A_{x_i}) < \infty$. Also gilt (II). □

Beispiele von Radon-Maßen auf $\mathbb{R}^n$ sind das Lebesgue-Maß $\mathscr{L}^n$ und die Dirac-Maße δ_x mit $x \in \mathbb{R}^n$, definiert durch $\delta_x(A) := \mathbb{1}_A(x)$. Keine Radon-Maße auf $\mathbb{R}^N$ (oder einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^n$) sind die Hausdorff-Maße $\mathscr{H}^s$ mit $s < n$ (einschließlich des Zählmaßes $\mathscr{H}^0$). Sie werden erst dann zu Radon-Maßen, wenn man sie (im Sinne der folgenden Definition) auf geeignete niederdimensionale Mengen einschränkt.

Definition 0.4 (Operationen und Eigenschaften von Maßen)**.** *Seien μ, ν nichtnegative Maße auf Ω, $E \in \mathscr{B}(\Omega)$, $T : \Omega \to \widetilde{\Omega}$ eine Borel-messbare Abbildung in einen weiteren metrischen Raum $\widetilde{\Omega}$ und $f : \Omega \to [0, \infty)$ eine μ-messbare Abbildung. Dann heißt*

- *das Maß $\mu|_E := \mu|_{\mathscr{B}(E)}$ auf E die* **Einschränkung** *von μ auf E;*
- *das Maß $T_\#\mu$ auf $\widetilde{\Omega}$, definiert durch*

$$T_\#\mu(A) := \mu(\{T \in A\}) \qquad \text{für } A \in \mathscr{B}(\widetilde{\Omega}),$$

[2]Man beachte, dass die Definition eines Radon-Maßes auf Ω implizit verlangt, dass Ω abzählbar und lokal kompakter metrischer Raum ist.

das **Bildmaß**[3] *von μ unter T.*

- ν **absolutstetig** *bezüglich μ, notiert $\nu \ll \mu$, wenn für alle $A \in \mathscr{B}(\Omega)$ gilt:*

$$\mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0;$$

- ν **(vollständig) singulär** *zu μ, notiert $\nu \perp \mu$, wenn es ein $A \in \mathscr{B}(\Omega)$ gibt mit*

$$\nu(A) = 0 = \mu(\Omega \setminus A);$$

- *das Maß $f \cdot \mu$, definiert*[4] *durch*

$$(f \cdot \mu)(A) := \int_A f \, d\mu \qquad \text{für } A \in \mathscr{B}(\Omega), \tag{0.1}$$

die **Gewichtung** *von μ mit f.*

Bemerkung 0.5. *Ist noch $g : \Omega \to \mathbb{R}^N$ ein $f \cdot \mu$-messbare Abbildung, so gilt*

$$\int_\Omega g \, d(f \cdot \mu) = \int_\Omega gf \, d\mu,$$

falls eine Seite existiert; dies folgt leicht mit der üblichen Ausdehnungsprozedur der Maß- und Integrationstheorie, da (0.5) per Definition für charakteristische Funktionen $\mathbb{1}_A$ ($A \in \mathscr{B}(\Omega)$) anstelle von g gilt. Insbesondere schließen wir im Falle $N = 1$ und $g \geq 0$ auf

$$g \cdot (f \cdot \mu) = (gf) \cdot \mu.$$

Die nächsten Sätze beantworten nun die Frage, in wie weit es möglich ist, ein gegebenes Maß als Gewichtung eines ebenfalls gegebenen Grundmaßes darzustellen.

Satz 0.6 (**von Radon-Nikodym**). *Für nichtnegative Radon-Maße μ, ν auf Ω gilt:*

$$\nu \ll \mu \iff \text{Es gibt ein } 0 \leq f \in L^1_{\text{lok}}(\Omega; \mu) \text{ mit } \nu = f \cdot \mu.$$

Dabei ist f μ-fast-überall eindeutig durch μ und ν bestimmt und heißt die **Radon-Nikodym-Dichte** *von ν bezüglich μ.* □

Satz 0.7 (**Lebesguescher Zerlegungssatz**). *Seien μ, ν nichtnegative Radon-Maße auf Ω. Dann kann man $\nu = \nu^a + \nu^s$ eindeutig in zwei weitere Radon-Maße ν^a und ν^s auf Ω zerlegen, so dass gelten $\nu^a \ll \mu$ und $\nu^s \perp \mu$. ν^a heißt der* **absolutstetige Anteil** *und ν^s der* **singuläre Anteil** *von ν bzüglich μ.* □

---

[3] Die wohl wichtigste Eigenschaft von Bildmaßen ist die Transformationsformel $\int_{\tilde{\Omega}} g \, d(T_\# \mu) = \int_\Omega g \circ T \, d\mu$.

[4] Das Integral in (0.1) erklärt man hier beispielsweise durch die Integration eines Borel-messbaren Repräsentanten von f (mit der in der Maßtheorie üblichen Konvention $\infty \cdot 0 = 0$).

Definition 0.8 (Maßableitung)**.** *Seien μ, ν nichtnegative Radon-Maße auf Ω. Existiert der Grenzwert*

$$\frac{d\nu}{d\mu}(x) := \lim_{r\to 0} \frac{\nu(B_r^\Omega(x))}{\mu(B_r^\Omega(x))}$$

in $[0,\infty]$ (mit der Konvention $\frac{s}{0} := \infty$ für $s \in [0,\infty]$), so nennen wir ihn die **Maßableitung**[5] *von ν nach μ an der Stelle x.*

Die nächsten Sätze formulieren wir der Einfachheit halber nur für den Fall $\Omega \subset \mathbb{R}^n$; allgemeinere Varianten findet man beispielsweise in [28].

Satz 0.9 (**Lebesguescher Differentiationssatz I**)**.** *Seien μ, ν nichtnegative Radon-Maße auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dann*

- *existiert die Maßableitung $\frac{d\nu}{d\mu}$ stets $(\mu+\nu)$-fast-überall auf Ω, ist μ-fast-überall endlich und definiert eine Funktion in $L^1_{\mathrm{lok}}(\Omega;\mu)$;*
- *gilt $\nu^a = \frac{d\nu}{d\mu} \cdot \mu$, d. h. $\frac{d\nu}{d\mu}$ stimmt (μ-fast-überall) mit der Radon-Nikodym-Dichte von ν^a bezüglich μ überein;*
- *gilt $\nu^s = \mathbb{1}_{\{\frac{d\nu}{d\mu}=\infty\}} \cdot \nu$.* □

Korollar 0.10 (**Lebesguescher Differentiationssatz II**)**.** *Für ein nichtnegatives Radon-Maß μ auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $0 \le f \in L^1_{\mathrm{lok}}(\Omega;\mu)$ gilt*

$$\frac{d(f\cdot\mu)}{d\mu} = f \qquad \mu\text{-fast-überall auf } \Omega.$$ □

Korollar 0.11 (**"Fast-alle Punkte sind Lebesgue-Punkte"**)**.** *Für ein nichtnegatives Radon-Maß μ auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $f \in L^1_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N;\mu)$ gilt*

$$\lim_{r\to 0} \fint_{B_r(x)\cap\Omega} |f - f(x)|\,d\mu = 0 \qquad \text{für } \mu\text{-fast-alle } x \in \Omega.$$

Beweis. Sei $q \in \mathbb{Q}^N$. Das vorige Korollar, angewandt mit $|f-q|$ statt f ergibt

$$\lim_{r\to 0} \fint_{B_r(x)\cap\Omega} |f - q|\,d\mu = |f(x) - q| \tag{0.2}$$

für μ-fast-alle $x \in \Omega$. Da $\mathbb{Q}^N$ abzählbar ist, lässt sich eine μ-Nullmenge E (von q unabhängig!) finden, so dass (0.2) für alle $q \in \mathbb{Q}^N$ und $x \in \Omega \setminus E$ gilt. Wir wählen nun zu jedem $x \in \Omega \setminus E$ und zu jedem vorgegeben $\varepsilon > 0$ ein $q \in \mathbb{Q}^N$ mit $|f(x) - q| < \varepsilon$ und es folgt

$$\begin{aligned}\limsup_{r\to 0} &\fint_{B_r(x)\cap\Omega} |f - f(x)|\,d\mu \\ &\le \lim_{r\to 0} \fint_{B_r(x)\cap\Omega} |f-q|\,d\mu + |f(x)-q| = 2|f(x)-q| < 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Somit gilt $\lim_{r\to 0} \fint_{B_r(x)\cap\Omega} |f - f(x)|\,d\mu = 0$ für alle $x \in \Omega \setminus E$. □

[5] Aus dem Satz von Fubini folgt, dass die Maßableitung eine Borel-Funktion auf Ω definiert.

0.2 Vektormaße und Variation

Als nächstes werden wir eine Definition von $\mathbb{R}^N$-wertigen Radon-Maßen geben. Ein technisches Problem liegt hier in der Tatsache, dass wir (bei nichtkompaktem Ω) auch Maße μ mit unendlicher Gesamtmasse zulassen wollen und sich der Wert $\mu(\Omega)$ daher möglicherweise nicht sinnvoll in $\mathbb{R}^N$ definieren lässt. Wir umgehen dieses Problem, indem wir das Maß zunächst nur auf $\mathscr{K}(\Omega)$ definieren.

Definition 0.12 (Vektormaß)**.** *Eine Abbildung $\nu : \mathscr{K}(\Omega) \to \mathbb{R}^N$ heißt ein* **$\mathbb{R}^N$-wertiges Radon-Maß** *oder* **Vektor-Radon-Maß** *auf Ω, wenn es ein nichtnegatives Radon-Maß μ auf Ω und ein $f \in L^1_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N; \mu)$ gibt mit*

$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu \qquad \text{für alle } A \in \mathscr{K}(\Omega).$$

Wir notieren dann in Analogie zu (0.1) kurz $\nu = f \cdot \mu$ und bezeichnen den reellen Vekotrraum aller $\mathbb{R}^N$-wertigen Radon-Maße auf Ω mit $RM_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Im Falle $N = 1$ spricht man auch von **signierten Maßen**.

Bemerkung 0.13.

(1) Vektor-Radon-Maße sind **σ-additiv** *in folgendem Sinne: Wann immer $A^1, A^2, \ldots$ paarweise disjunkt sind und alle A^i sowie $\bigcup_{i=1}^\infty A^i$ in $\mathscr{K}(\Omega)$ liegen, gilt*

$$\nu\left(\bigcup_{i=1}^\infty A^i\right) = \sum_{i=1}^\infty \nu(A^i),$$

wobei die Reihe auf der rechten Seite absolut konvergiert. Dies folgt aus der Additivität des Integrals und dem Satz über dominierte Konvergenz.

(2) Um einzusehen, dass $RM_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ tatsächlich ein Vektorraum ist, muss man zeigen, dass für $\nu^1 = f^1 \cdot \mu^1$ und $\nu^2 = f^2 \cdot \mu^2$ wie in der Definition auch $\nu^1 + \nu^2$ ein $\mathbb{R}^N$-wertiges Radon-Maß ist. Dazu bemerkt man zunächst, dass $\mu^i \ll \mu^1 + \mu^2$ für $i = 1, 2$ gilt und wendet man Satz 0.6 an, um Funktionen $0 \leq g^i \in L^1_{\mathrm{lok}}(\Omega; \mu^1 + \mu^2)$ zu erhalten mit $\mu^i = g^i \cdot (\mu^1 + \mu^2)$. Nun verwenden wir Bemerkung 0.5: Es folgt, dass $f^1 g^1 + f^2 g^2$ in $L^1_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N; \mu^1 + \mu^2)$ liegt und, dass für $A \in \mathscr{K}(\Omega)$ gilt

$$(\nu^1 + \nu^2)(A) = \int_A f^1\, d\mu^1 + \int_A f^2\, d\mu^2 = \int_A (f^1 g^1 + f^2 g^2)\, d(\mu^1 + \mu^2).$$

Also ist $\nu^1 + \nu^2 = (f^1 g^1 + f^2 g^2) \cdot (\mu^1 + \mu^2)$ ein $\mathbb{R}^N$-wertiges Radon-Maß. □

(3) Im Falle $N = 1$ können die $\mathbb{R}$-wertigen Radon-Maße ν auf Ω mit $\nu(A) \geq 0$ für alle $A \in \mathscr{K}(\Omega)$ mit nichtnegativen Radon-Maßen auf Ω (die auf ganz $\mathscr{B}(\Omega)$ definiert sind) identifiziert werden. Dabei benötigt man hier die abzählbare Kompaktheit von Ω, um einzusehen, dass die Werte eines Maßes auf $\mathscr{B}(\Omega)$ schon durch die Werte auf $\mathscr{K}(\Omega)$ vollständig bestimmt sind.

(4) *Die Komponentenfunktionen* $\nu_1 = f_1 \cdot \mu$, $\nu_2 = f_2 \cdot \mu$, $\dots$, $\nu_N = f_N \cdot \mu$ *von* $\nu = f \cdot \mu \in RM_{\text{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *sind signierte Maße, genannt die* **Komponenten** *von* ν.

(5) *Mit der in der Definition eingeführten Notation gilt die letzte Formel in Bemerkung 0.5 allgemeiner für vektorwertige* g.

Definition 0.14 (Variation)**.** *Sei* $\nu = f \cdot \mu \in RM_{\text{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *wie in der vorigen Definition. Dann heißt das nichtnegative Radon-Maß*

$$|\nu| := |f| \cdot \mu$$

auf Ω *die* **Variation** *von* ν. *Wir definieren außerdem die* **Totalvariation**

$$\|\nu\|_{RM(\Omega,\mathbb{R}^N)} := |\nu|(\Omega)$$

von ν *über* Ω. *Maße* ν *mit endlicher Totalvariation nennen wir auch kurz* **endliche Maße** *und den Raum aller endlichen* $\mathbb{R}^N$*-wertigen Radon-Maße auf* Ω *bezeichnen wir mit* $RM(\Omega, \mathbb{R}^N)$.

Bemerkung 0.15.

(0) **Die Variation ist wohldefiniert:** *Dazu betrachte man zwei Darstellungen* $f^1 \cdot \mu^1 = \nu = f^2 \cdot \mu^2$ *von* $\nu \in RM_{\text{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$. *Wie in der vorigen Bemerkung findet man* g^i *mit*

$$\int_A f^1 g^1 \, d(\mu^1 + \mu^2) = \int_A f^2 g^2 \, d(\mu^1 + \mu^2)$$

für alle $A \in \mathscr{K}(\Omega)$. *Da* Ω *sich durch Kompakta ausschöpfen lässt, folgt* $f^1 g^1 = f^2 g^2 \quad (\mu^1 + \mu^2)$*-fast-überall auf* Ω *und man erhält mit Bemerkung 0.5:*

$$|f^1| \cdot \mu^1 = |f^1| g^1 \cdot (\mu^1 + \mu^2) = |f^2| g^2 \cdot (\mu^1 + \mu^2) = |f^2| \cdot \mu^2. \qquad \square$$

(1) *Analog sieht man, dass im Falle* $N = 1$ *auch die nichtnegativen Radon-Maße* $\nu_+ := f_+ \cdot \mu$ *und* $\nu_- := f_- \cdot \mu$ *(mit* $f_\pm := \max\{\pm f, 0\}$*), der* **Positivteil** *und der* **Negativteil** *des signierten Radon-Maßes* $\nu = f \cdot \mu$, *wohldefiniert sind. Es gelten*

$$\nu = \nu_+ - \nu_-, \qquad |\nu| = \nu_+ + \nu_- \qquad \text{und} \qquad \nu_+ \perp \nu_-.$$

Diese Zerlegung heißt die **Jordan-Zerlegung** *von* ν.

(2) *Für* $\nu \in RM_{\text{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *und* $A \in \mathscr{B}(\Omega)$ *(aber eventuell* $A \notin \mathscr{K}(\Omega)$*) mit* $|\nu|(A) < \infty$, *setzen wir* ν *fort durch* $\nu(A) := \int_A f \, d\mu$. *Diese Fortsetzung ist eindeutig*[6] *und es gilt*

$$|\nu(A)| \leq |\nu|(A)$$

wann immer die rechte Seite endlich ist. Insbesondere können wir so jedes Maß in $RM(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *eindeutig auf ganz* $\mathscr{B}(\Omega)$ *fortsetzen.*

[6] Um dies einzusehen betrachtet man eine Folge $(K_k)_{k \in K}$ von Kompakta mit $\bigcup_{k=1}^\infty K_k = \Omega$ (gibt es, da Ω abzählbar kompakt ist); dann folgt $\nu(A) = \int_A f \, d\mu = \lim_{k \to \infty} \int_A \mathbb{1}_{K_k} f \, d\mu = \lim_{k \to \infty} \nu(A \cap K_k)$ mit dem Satz über dominierte Konvergenz.

(3) Für $A \in \mathscr{B}(\Omega)$ gilt

$$|\nu|(A) = 0 \iff \nu(B) = 0 \text{ für alle } B \in \mathscr{B}(A).$$

Proposition 0.16 (Polarzerlegung). *Sei $\nu \in RM_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Dann gibt es ein $g \in L^1_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N; |\nu|)$ mit*

$$|g| = 1 \qquad |\nu|\text{-fast überall}$$

und

$$\nu = g \cdot |\nu|.$$

Dabei ist g $|\nu|$-fast-überall eindeutig durch ν bestimmt.

Beweis. Die Eindeutigkeit von g ist einfach. Zum Beweis der Existenz sei $\nu = f \cdot \mu$ mit einer Borel-Funktion f. Wir rechnen

$$|\nu|(\{f = 0\}) = (|f| \cdot \mu)(\{f = 0\}) = \int_{\{f=0\}} |f| \, d\mu = 0.$$

$g := \frac{f}{|f|}$ ist somit $|\nu|$-fast-überall definiert und $|g| = 1$ gilt $|\nu|$-fast-überall. Es folgt

$$\nu = f \cdot \mu = g|f| \cdot \mu = g \cdot |\nu|. \qquad \square$$

Als eine erste Anwendung der Polarzerlegung beweisen wir eine alternative Charakterisierung der Variation.

Proposition 0.17 (Variationsformel). *Für $\nu \in RM_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ und $A \in \mathscr{B}(\Omega)$ gilt*

$$|\nu|(A) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\nu(A_k)| \, : \, A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{B}(A) \cap \mathscr{K}(\Omega) \text{ paarweise disjunkt} \right\}.$$

Ist $|\nu|(A) < \infty$ so gilt diese Identität auch mit $\mathscr{B}(A)$ anstelle von $\mathscr{B}(A) \cap \mathscr{K}(\Omega)$ auf der rechten Seite.

Beweis. '$\geq$' folgt in jedem Fall aus der σ-Additivität von $|\nu|$.

Wir zeigen nun '$\leq$' im Falle $|\nu|(A) < \infty$ mit $\mathscr{B}(A)$ rechts. Dazu erreichen wir zunächst durch Anwendung der Polarzerlegung $\nu = g \cdot |\nu|$ mit einer Borel-Funktion g und $g(\Omega) \subset S^{N-1} := \{x \in \mathbb{R}^N \, : \, |x| = 1\}$. Sei nun $\varepsilon > 0$ und $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ eine abzählbare dichte Teilmenge von S^{N-1}. Dann gilt für $E_k := A \cap \{|g - x_k| < \varepsilon\} \in \mathscr{B}(A)$ schon $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = A$. Folglich sind die Mengen $A_k := E_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} E_i$ disjunkt mit $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A$ und wir erhalten

$$\begin{aligned} |\nu(A_k)| = \left| \int_{A_k} g \, d|\nu| \right| &\geq \left| \int_{A_k} x_k \, d|\nu| \right| - \left| \int_{A_k} (g - x_k) \, d|\nu| \right| \\ &\geq |x_k| |\nu|(A_k) - \int_{A_k} |g - x_k| \, d|\nu| \geq (1 - \varepsilon)|\nu|(A_k). \end{aligned}$$

Aufsummieren gibt nun $\sum_{k=1}^{\infty} |\nu(A_k)| \geq (1 - \varepsilon)|\nu|(A)$ und '$\leq$' folgt, da $\varepsilon > 0$ beliebig war.

Ohne die Voraussetzung $|\nu|(A) < \infty$ sehen wir '$\leq$' folgendermaßen ein. Wegen der abzählbaren Kompaktheit von Ω gilt $\Omega = \bigcup_{l=1}^{\infty} K_l$ mit Kompakta K_l. Wir können $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \ldots$ annehmen und erhalten unter Anwendung des bereits Bewiesenen:

$$\begin{aligned}
|\nu|(A) &= \lim_{l\to\infty} |\nu|(A \cap K_l) \\
&= \lim_{l\to\infty} \sup \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k) \ :\ A_k \in \mathscr{B}(A \cap K_l) \text{ disjunkt} \right\} \\
&\leq \sup \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k) \ :\ A_k \in \mathscr{B}(A) \cap \mathscr{K}(\Omega) \text{ disjunkt} \right\}. \qquad \square
\end{aligned}$$

Bemerkung 0.18. *Im Falle $N = 1$ gilt die Variationsformel in Proposition 0.17 auch dann, wenn man statt abzählbar vielen nur zwei Summanden rechts zulässt; dies folgt durch Jordan-Zerlegung oder durch Analyse des vorausgehenden Beweises ($S^0 = \{-1, 1\}$ besteht aus 2 Elementen.).*

Als nächstes halten wir fest, dass σ-Additivität Vektor-Radon-Maße schon charakterisiert. Dies wird uns später erlauben, neue Vektor-Radon-Maße einfach durch Angabe σ-additiver Mengenfunktionen zu definieren.

Proposition 0.19. *Ist eine Abbildung $\nu : \mathscr{K}(\Omega) \to \mathbb{R}^N$ σ-additiv im Sinne von Bemerkung 0.13, so ist ν ein $\mathbb{R}^N$-wertiges Radon-Maß.*

Beweisskizze. Durch Übergang zu den Komponentenfunktionen können wir $N = 1$ annehmen. Als erstes zeigt man, dass es eine Zerlegung $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$ von Ω in zwei disjunkte Mengen $\Omega^+, \Omega^- \in \mathscr{B}(\Omega)$ gibt mit $\nu(A \cap \Omega^-) \leq 0 \leq \nu(A \cap \Omega^+)$ für alle $A \in \mathscr{K}(\Omega)$; diese Zerlegung heißt **Hahn-Zerlegung**, einen Beweis findet man beispielsweise in [26]. Dann definiert man nichtnegative Radon-Maße ν^+ und ν^- auf Ω durch $\nu^+(A) := \nu(A \cap \Omega^+)$ und $\nu^-(A) := -\nu(A \cap \Omega^-)$ (wohldefiniert nach Bemerkung 0.13 (3)). Offensichtlich ist $\mathbb{1}_{\Omega^+} - \mathbb{1}_{\Omega^-} \in L^1_{\text{lok}}(\Omega; \nu^+ + \nu^-)$ und es gilt $\nu = (\mathbb{1}_{\Omega^+} - \mathbb{1}_{\Omega^-}) \cdot (\nu^+ + \nu^-)$. Gemäß Definition 0.12 ist somit ν ein $\mathbb{R}$-wertiges Radon-Maß.[7] $\square$

Satz 0.20. *Dehnen wir die Definitionen des Kapitels 0.1 in naheliegender Weise (z.B. $\nu \ll \mu :\iff |\nu| \ll \mu$ und $\nu^1 \perp \nu^2 :\iff |\nu^1| \perp |\nu^2|$) auf Vektormaße ν und nichtnegative Grundmaße μ aus, so gelten die Sätze 0.6, 0.7 und 0.9 sowie Korollar 0.10 analog in diesem allgemeineren Kontext.*

Beweis. Alle Aussagen lassen sich durch Übergang zu den Komponentenfunktionen und Jordan-Zerlegung auf die entsprechenden Sätze aus Kapitel 0.1 zurückführen. Im Falle von Satz 0.6 kann man auch elegant mit der Polarzerlegung argumentieren. $\square$

Lemma 0.21. *Seien $\nu^1, \nu^2 \in RM_{\text{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Dann gilt:*

$$\nu^1 \perp \nu^2 \implies |\nu^1 + \nu^2| = |\nu^1| + |\nu^2|.$$

[7] Außerdem sehen wir im Nachhinein, dass $\nu^{\pm} = \nu_{\pm}$ die Maße aus der Jordan-Zerlegung sind; folglich $\nu = \nu^+ - \nu^-$ und $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$.

Beweis. Nach Radon-Nikodym gibt es $f^i \in L^1_{\text{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N; |\nu^1| + |\nu^2|)$ mit

$$\nu^i = f^i \cdot (|\nu^1| + |\nu^2|)$$

für $i = 1, 2$. Sei nun $\Omega = A_1 \cup A_2$ mit disjunkten $A_1, A_2 \in \mathscr{B}(\Omega)$ derart, dass $|\nu_i|(\Omega \setminus A_i) = 0$. Dann gelten $f_i = 0$ auf $\Omega \setminus A_i$ und folglich

$$|f_1 + f_2| = |\mathbb{1}_{A_1} f_1 + \mathbb{1}_{A_2} f_2| = \mathbb{1}_{A_1} |f_1| + \mathbb{1}_{A_2} |f_2| = |f_1| + |f_2| \qquad \text{auf } \Omega$$

jeweils $(|\nu^1|+|\nu^2|)$-fast-überall. Nun folgt die Behauptung aus der Definition der Variation. □

Satz 0.22. *$RM(\Omega, \mathbb{R}^N)$ ist mit der Totalvariation als Norm ein Banachraum.*

Beweis. Dass $RM(\Omega, \mathbb{R}^N)$ ein Vektorraum ist und die Totalvariation eine Norm darauf, lässt sich leicht einsehen; u.a. beweist man dazu die **Dreiecksungleichung**

$$|\nu_1 + \nu_2| \leq |\nu_1| + |\nu_2|$$

für die Variation (beispielsweise mit Proposition 0.17 oder ähnlich wie das vorige Lemma) und erhält die Dreiecksungleichung für die Totalvariation als Spezialfall.

Um Vollständigkeit zu zeigen, betrachte man ein Cauchy-Folge $(\mu^k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $RM(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Insbesondere ist dann $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|\mu^k\|_{RM(\Omega,\mathbb{R}^N)} < \infty$ und daher ist auch

$$\mu := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} |\mu^k|$$

ein endliches nichtnegatives Radon-Maß auf Ω. Da alle μ^k bezüglich μ absolutstetig sind, finden wir Radon-Nikodym-Dichten f^k mit $\mu^k = f^k \cdot \mu$ und es gilt $\|\mu^k - \mu^l\|_{RM(\Omega,\mathbb{R}^N)} = \|f^k - f^l\|_{L^1(\Omega,\mathbb{R}^N;\mu)}$. Daher ist $(f^k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L^1(\Omega, \mathbb{R}^N; \mu)$. Nach dem Satz von Riesz-Fischer ist $L^1(\Omega, \mathbb{R}^N; \mu)$ vollständig und daher konvergiert die Folge $(f^k)_{k\in\mathbb{N}}$ in diesem Raum gegen eine Grenzfunktion f^∞. Wir setzen $\mu^\infty := f^\infty \cdot \mu \in RM(\Omega, \mathbb{R}^N)$; dann gelten $\|\mu^\infty\|_{RM(\Omega,\mathbb{R}^N)} = \|f^\infty\|_{L^1(\Omega,\mathbb{R}^N;\mu)} < \infty$ und $\|\mu^k - \mu^\infty\|_{RM(\Omega,\mathbb{R}^N)} = \|f^k - f^\infty\|_{L^1(\Omega,\mathbb{R}^N;\mu)} \longrightarrow 0$. Folglich konvergiert $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $RM(\Omega, \mathbb{R}^N)$ gegen μ. □

Bemerkung 0.23. *Ist Ω überabzählbar, so ist $RM(\Omega, \mathbb{R}^N)$ nicht separabel; dies sieht man daran, dass für je zwei Dirac-Maße $\delta_x, \delta_y \in RM(\Omega, \mathbb{R}^N)$ mit $x \neq y$ in Ω stets $\|\delta_x - \delta_y\|_{RM(\Omega,\mathbb{R}^N)} = 2$ gilt.*

0.3 Der Rieszsche Darstellungssatz

Definition 0.24 (Integration bezüglich Vektormaßen). *Sei $\odot : \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^K$ $(M, N, K \in \mathbb{N})$ eine bilineare Abbildung, $\nu = g \cdot |\nu| \in RM_{\text{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ die Polarzerlegung eines Vektormaßes ν und $f \in L^1_{\text{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^M; |\nu|)$. Dann definieren wir das $\mathbb{R}^K$-wertige Radon-Maß*

$$f \odot \nu := (f \odot g) \cdot |\nu| \in RM_{\text{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^K);$$

außerdem vereinbaren wir für jedes $A \in \mathscr{B}(\Omega)$ mit $|f \odot \nu|(A) < \infty$ die Integralnotation

$$\int_A f \odot \, d\nu := (f \odot \nu)(A) \in \mathbb{R}^K.$$

Bemerkung 0.25. *Es gilt*

$$\left| \int_A f \odot \, d\nu \right| \leq |f \odot \nu|(A) \leq C^{\odot} \int_A |f| \, d|\nu|,$$

wobei $C^{\odot} := \max_{|a|=1,|b|=1} |a \odot b|$ die Operatornorm der bilinearen Abbildung $\odot$ bezeichnet. Im Folgenden wird dies oft mit $C^{\odot} = 1$ angewandt.

Wir schreiben $C_b^0(\Omega, \mathbb{R}^N)$ für den Banachraum aller beschränkten stetigen Funktionen $\Omega \to \mathbb{R}^N$, versehen mit der Supremumsnorm. Mit $C^0_{\mathrm{kpt}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ bezeichnen wir den Unterraum aller $\varphi \in C_b^0(\Omega, \mathbb{R}^N)$, für die der **Träger** $\operatorname{spt} \varphi := \overline{\{\varphi \neq 0\}}$ kompakte Teilmenge von Ω ist. Dieser Unterraum ist i. A. jedoch nicht abgeschlossen (also kein Banachraum); seinen Abschluss bezeichnen wir als den Raum $C_0^0(\Omega, \mathbb{R}^N)$ der stetigen Funktionen mit **Nullrandwerten**[8].

Satz 0.26 (**Rieszscher Darstellungssatz für $(C_0^0)^*$**). *$RM(\Omega, \mathbb{R}^N)$ ist isometrisch isomorph zum Dualraum von $C_0^0(\Omega, \mathbb{R}^N)$ durch die Identifikation eines Maßes ν mit dem Funktional $\varphi \mapsto \int_\Omega \varphi \cdot d\nu$. Dabei bezeichnet $\cdot$ das Skalarprodukt von $\mathbb{R}^N$.* □

Bemerkung 0.27.

- *Die wesentliche Aussage des Satzes ist, dass sich jedes beschränkte lineare Funktional auf $C_0^0(\Omega, \mathbb{R}^N)$ durch Integration bezüglich eines endlichen Radon-Maßes darstellen lässt.*
- *Eine interessante Variante besagt im Falle $N = 1$, dass sich nichtnegative[9] lineare Funktionale auf $C^0_{\mathrm{kpt}}(\Omega)$ stets durch ein (möglicherweise nicht endliches) nichtnegatives Radon-Maß darstellen lassen.*

Wir halten noch zwei Lemmata fest, die in einem gewissen Zusammenhang zum Beweis des Rieszschen Satzes stehen und später nützlich sein werden.

Lemma 0.28. *Für jedes nichtnegative Radon-Maß μ auf Ω ist $C^0_{\mathrm{kpt}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ dicht in $L^1(\Omega, \mathbb{R}^N; \mu)$.*

Beweisskizze. Es reicht, den Fall $N = 1$ zu behandeln. Wegen der abzählbaren Kompaktheit von Ω reicht es außerdem, solche Funktionen, die außerhalb eines

[8] Achtung: Diese Funktionen haben Nullrandwerte in dem Sinne, dass ihre Fortsetzung durch 0 auf die 1-Punkt-Kompaktifizierung von Ω stetig ist; dies bedeutet Nullrandwerte im klassischen Sinne in den nicht zu Ω gehörigen Randpunkten, also nur für offenes Ω Nullrandwerte auf dem ganzen Rand. Man beachte auch, dass bei kompaktem Ω gilt $C^0_{\mathrm{kpt}}(\Omega, \mathbb{R}^N) = C_0^0(\Omega, \mathbb{R}^N) = C_b^0(\Omega, \mathbb{R}^N)$.

[9] Dabei heißt ein Funktional $F : C^0_{\mathrm{kpt}}(\Omega) \to \mathbb{R}$ nichtnegativ, wenn $F(\varphi) \geq 0$ für alle nichtnegativen Funktionen φ gilt.

Kompaktums verschwinden, aus $C^0_{\mathrm{kpt}}(\Omega)$ heraus in der L^1-Norm zu approximieren. Wie üblich können wir uns tatsächlich sogar darauf beschränken, Funktionen $\mathbb{1}_A$ mit $A \in \mathscr{K}(\Omega)$ zu approximieren, und aufgrund der Regularitätseigenschaften von Radon-Maßen reichen sogar Funktionen $\mathbb{1}_K$ zu kompaktem K. Wegen der lokalen Kompaktheit von Ω ist aber jedes solche K Teilmenge eines $A \in \mathscr{OK}(\Omega)$ (Lemma 0.1); insbesondere ist $\mathrm{dist}(K, \Omega \setminus A) > 0$. Dies bedeutet, dass für $L \gg 1$ die Funktionen φ_L zu $\varphi_L(x) := (1 - L\mathrm{dist}(x, K))_+$ Träger in A haben und folglich in $C^0_{\mathrm{kpt}}(\Omega)$ liegen. Andererseits konvergiert $\varphi_L \underset{L\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{1}_K$ punktweise und gemäß dem Satz über dominierte Konvergenz auch in $L^1(\Omega;\mu)$. □

Das folgende Lemma besagt insbesondere, dass

$$|\nu|(\Omega) = \sup\left\{\left|\int_\Omega \varphi \cdot d\nu\right| \,:\, \varphi \in C^0_0(\Omega, \mathbb{R}^N) \text{ mit } \sup_\Omega |\varphi| \le 1\right\}$$

für jedes $\nu \in RM(\Omega, \mathbb{R}^N)$ gilt. Dies bedeutet, dass die Identifikation eines Maßes ν mit dem Funktional $\varphi \mapsto \int_\Omega \varphi \cdot d\nu$ eine isometrische Einbettung von $RM(\Omega, \mathbb{R}^N)$ nach $(C^0_0(\Omega, \mathbb{R}^N))^*$ ist. Die wesentliche Schwierigkeit beim Beweis des Satzes (auf die wir hier nicht eingehen) liegt allerdings darin, zu zeigen, dass diese Einbettung surjektiv ist, also zu einem gegebenen Funktional ein geeignetes Maß zu konstruieren.

Lemma 0.29. *Seien $\nu \in RM_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ und $A \in \mathscr{B}(\Omega)$ mit $|\nu|(A) < \infty$. Dann gilt*

$$|\nu|(A) = \sup\left\{\left|\int_A \varphi \cdot d\nu\right| \,:\, \varphi \in C^0_b(A, \mathbb{R}^N) \text{ mit } \sup_A |\varphi| \le 1\right\}.$$

Ist A lokal kompakt, so bleibt die vorausgehende Gleichung auch dann richtig, wenn wir $C^0_b(A, \mathbb{R}^N)$ durch $C^0_0(A, \mathbb{R}^N)$ oder $C^0_{\mathrm{kpt}}(A, \mathbb{R}^N)$ ersetzen. Im Falle von $C^0_{\mathrm{kpt}}(A, \mathbb{R}^N)$ kann dabei auf $|\nu|(A) < \infty$ verzichtet werden.

Beweis. Nach Bemerkung 0.25 gilt

$$\left|\int_A \varphi \cdot d\nu\right| \le |\nu|(A) \sup_A |\varphi|$$

für alle $\varphi \in C^0_b(A, \mathbb{R}^N)$. Somit ist '$\ge$' in allen Fällen gezeigt.

Als nächstes zeigen wir

$$|\nu|(A) \le \sup\left\{\left|\int_A \varphi \cdot d\nu\right| \,:\, \varphi \in C^0_{\mathrm{kpt}}(A, \mathbb{R}^N) \text{ mit } \sup_A |\varphi| \le 1\right\} \tag{0.3}$$

für lokal kompaktes A mit $|\nu|(A) < \infty$. Sei dazu $\nu = g \cdot |\nu|$ die Polarzerlegung von $\nu \in RM_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ (mit $|g| = 1$ $|\nu|$-fast-überall). Jetzt benutzen wir Lemma 0.28 und damit implizit die lokale Kompaktheit von A: Wir approximieren $g|_A$ in der Norm von $L^1(A, \mathbb{R}^N; |\nu|)$ durch eine Folge $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $\varphi_k \in C^0_{\mathrm{kpt}}(A, \mathbb{R}^N)$. Es ist nicht schwierig zu zeigen, dass auch die modifizierten Funktionen

$$\tilde\varphi_k(x) := \begin{cases} \varphi_k(x) & \text{für } |\varphi_k(x)| \le 1 \\ \frac{\varphi_k(x)}{|\varphi_k(x)|} & \text{für } |\varphi_k(x)| \ge 1 \end{cases}$$

in $C^0_{\mathrm{kpt}}(A,\mathbb{R}^N)$ sind mit $|\tilde\varphi_k - g|_A| \le |\varphi_k - g|_A|$ und folglich $\tilde\varphi_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} g|_A$ in $L^1(A,\mathbb{R}^N;|\nu|)$. Wir schließen

$$\begin{aligned}\sup\left\{\left|\int_A \varphi\cdot d\nu\right| \,:\, \varphi\in C^0_{\mathrm{kpt}}(A,\mathbb{R}^N) \text{ mit } \sup_A|\varphi|\le 1\right\} &\ge \lim_{k\to\infty}\left|\int_A \tilde\varphi_k\cdot d\nu\right| \\ &= \left|\int_A g\cdot d\nu\right| = \left|\int_A |g|^2\, d|\nu|\right| = |\nu|(A)\end{aligned}$$

und (0.3) ist bewiesen. Ein einfaches Approximationsargument zeigt nun, dass (0.3) auch ohne die Endlichkeitsvoraussetzung richtig bleibt, und für lokal kompakte A folgen alle Behauptungen.

Es verbleibt,

$$|\nu|(A) \le \sup\left\{\left|\int_A \varphi\cdot d\nu\right| \,:\, \varphi\in C^0_b(A,\mathbb{R}^N) \text{ mit } \sup_A|\varphi|\le 1\right\} \tag{0.4}$$

auch für nicht lokal kompakte $A\in\mathscr{B}(\Omega)$ zu zeigen. Dazu benutzen wir die Regularitätseigenschaften des Radon-Maßes $|\nu|$, um eine Folge $(O_k)_{k\in\mathbb{N}}$ offener (also insbesondere lokal kompakter) Obermengen von A in Ω zu finden mit $\lim_{k\to\infty}|\nu|(O_k\setminus A)=0$. Es folgt (unter Verwendung des Bewiesenen für O_k)

$$\begin{aligned}|\nu|(A) &\le |\nu|(O_k) \\ &\le \sup\left\{\left|\int_A \varphi\cdot d\nu\right| \,:\, \varphi\in C^0_b(O_k,\mathbb{R}^N) \text{ mit } \sup_{O_k}|\varphi|\le 1\right\} + |\nu|(O_k\setminus A) \\ &\le \sup\left\{\left|\int_A \varphi\cdot d\nu\right| \,:\, \varphi\in C^0_b(A,\mathbb{R}^N) \text{ mit } \sup_A|\varphi|\le 1\right\} + |\nu|(O_k\setminus A)\end{aligned}$$

und Grenzübergang $k\to\infty$ führt zu (0.4). □

0.4 Die schwach-∗-Topologie

Wir erinnern daran, dass eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in einem normierten Raum X schwach konvergent gegen einen Grenzwert $x\in X$ heißt, notiert $x_k \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} x$ schwach, wenn $<y;x_k> \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} <y;x>$ für alle y im Dualraum X^* gilt.[10] Für Folgen im Dualraum X^* führen wir den folgenden verwandten Konvergenzbegriff ein:

Definition 0.30 (Schwach-∗-Konvergenz)**.** *Sei X ein normierter Raum. Dann heißt eine Folge $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X^** **schwach-∗ konvergent** *gegen einen Grenzwert $y\in X^*$, notiert $y_k \underset{k\to\infty}{\overset{*}{\rightharpoonup}} y$ schwach-∗, wenn*

$$<y_k;x> \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} <y;x> \qquad \text{für alle } x\in X$$

gilt.

[10] Dabei schreiben wir hier und im Folgenden $<y;x> := y(x)$ für die Auswertung eines linearen Funktionals y auf einem Element x.

Bemerkung 0.31. *Offensichtlich sind schwach-∗-Grenzwerte eindeutig.*

Wir werden nun sehen, dass es einen engen Zusammenhang zwischen beschränkten und schwach-∗ konvergenten Folgen gibt:

Proposition 0.32. *Sei X ein Banachraum und $y_k \underset{k\to\infty}{\overset{*}{\rightharpoonup}} y$ schwach-∗ konvergent in X^*. Dann gelten:*

- *Beschränktheit schwach-∗ konvergenter Folgen:* $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|y_k\|_{X^*} < \infty$;
- *Unterhalbstetigkeit der Norm:* $\|y\|_{X^*} \le \liminf_{k\to\infty} \|y_k\|_{X^*}$.

Dabei bezeichnet $\|\cdot\|_{X^*}$ die Operatornorm auf X^*.

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit. Die zweite Behauptung ersieht man aus der Ungleichungskette

$$|\langle y; x\rangle| = \lim_{k\to\infty} |\langle y_k; x\rangle| \le \Big(\liminf_{k\to\infty} \|y_k\|_{X^*}\Big)\|x\|_X \qquad \text{für alle } x \in X. \qquad \square$$

Die für die Variationsrechnung wohl wichtigste Eigenschaft der schwach-∗-Konvergenz beschreibt der folgende Satz von (Banach-)Alaoglu(-Bourbaki):

Satz 0.33 (Auswahlsatz/Kompaktheitssatz). *Sei X ein separabler normierter Raum und $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in X^*, also $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|y_k\|_{X^*} < \infty$. Dann besitzt $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine schwach-∗ konvergente Teilfolge in X^*.*

Beweis. Sei $M := \sup_{k\in\mathbb{N}} \|y_k\|_{X^*}$ und $A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ sei eine abzählbare dichte Teilmenge von X. Dann ist $|\langle y_k; x_1\rangle| \le M\|x_1\|_X$ für alle $k \in \mathbb{N}$; folglich gibt es eine Teilfolge $(y_k^1)_{k\in\mathbb{N}}$ von $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$, für die $\lim_{k\to\infty} \langle y_k^1; x_1\rangle$ in $\mathbb{R}$ existiert. Ganz analog findet man eine Teilfolge $(y_k^2)_{k\in\mathbb{N}}$ von $(y_k^1)_{k\in\mathbb{N}}$, für die $\lim_{k\to\infty} \langle y_k^2; x_2\rangle$ existiert. Wir setzen dies nun induktiv fort und erhalten für jedes $l \ge 3$ eine Teilfolge $(y_k^l)_{k\in\mathbb{N}}$ von $(y_k^{l-1})_{k\in\mathbb{N}}$, so dass $\lim_{k\to\infty} \langle y_k^l; x_l\rangle$ existiert. Nun betrachten wir die Diagonalfolge $(y_k^k)_{k\in\mathbb{N}}$; für jedes $l \in \mathbb{N}$ ist diese Folge schließlich Teilfolge von $(y_k^l)_{k\in\mathbb{N}}$ und deshalb existiert $\lim_{k\to\infty} y_k^k(x_l)$ für alle $l \in \mathbb{N}$. Nun definieren wir $\tilde{y} : A \to \mathbb{R}$ durch die Vorschrift $\tilde{y}(x_l) := \lim_{k\to\infty} y_k^k(x_l)$ für alle $l \in \mathbb{N}$. Aus der Konstruktion entnimmt man leicht $|\tilde{y}(a) - \tilde{y}(\tilde{a})| \le M\|a - \tilde{a}\|_X$ für alle $a, \tilde{a} \in A$; also ist $\tilde{y}$ Lipschitz-stetig auf A und kann deshalb eindeutig zu einer Lipschitz-stetigen Funktion y auf dem Abschluss $\overline{A} = X$ fortgesetzt werden; es gilt $|y(x) - y(\tilde{x})| \le M\|x - \tilde{x}\|_X$ für alle $x, \tilde{x} \in X$. Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ und $x \in X$ gibt es nun ein $a \in A$ mit $\|x - a\|_X \le \varepsilon$ und es folgt

$$\begin{aligned}
&\limsup_{k\to\infty} |\langle y_k^k; x\rangle - y(x)| \\
&\le \limsup_{k\to\infty} |\langle y_k^k; x-a\rangle| + \lim_{k\to\infty} |\langle y_k^k; a\rangle - \tilde{y}(a)| + \limsup_{k\to\infty} |y(a) - y(x)| \le 2M\varepsilon.
\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war haben wir somit $\langle y_k^k; x\rangle \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y(x)$ für alle $x \in X$ gezeigt. Jetzt sieht man leicht, dass y linear ist und $y \in X^*$ (mit $\|y\|_{X^*} \le M$) und $y_k^k \underset{k\to\infty}{\overset{*}{\rightharpoonup}} y$ schwach-∗ in X^* folgen sofort. $\square$

Bemerkung 0.34. *Das Konzept der schwach-$*$-Konvergenz hängt nicht nur vom Raum X^*, sondern auch von X selbst ab: Ist beispielsweise der normierte Raum X nicht vollständig und $\overline{X}$ eine Vervollständigung von X, so kann man $X^* = \overline{X}^*$ identifizieren (durch einen isometrischen Isomorphismus). Das Konzept der schwach-$*$-Konvergenz in diesem Raum hängt jedoch davon ab, ob man ihn als Dualraum von X oder $\overline{X}$ auffasst. Tatsächlich gilt:*

$$y_k \xrightharpoonup[k\to\infty]{*} y \text{ schwach-}* \text{ in } \overline{X}^*$$
$$\iff y_k \xrightharpoonup[k\to\infty]{*} y \text{ schwach-}* \text{ in } X^* \text{ und } \sup_{k\in\mathbb{N}} \|y_k\|_{X^*} < \infty.$$

Beweis der Äquivalenz. Die Implikation '$\implies$' folgt sofort aus dem ersten Teil von Proposition 0.32. Für '$\impliedby$' setzt man $M := \|y\|_{X^*} + \sup_{k\in\mathbb{N}} \|y_k\|_{X^*}$ und wählt man zu $x \in \overline{X}$ und $\varepsilon > 0$ ein $\tilde{x} \in X$ mit $\|x - \tilde{x}\|_{\overline{X}} \leq \varepsilon$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
&\limsup_{k\to\infty} |<y_k; x> - <y; x>| \\
&\quad\leq \limsup_{k\to\infty} |<y_k; x-\tilde{x}>| + \lim_{k\to\infty} |<y_k; \tilde{x}> - <y; \tilde{x}>| + \limsup_{k\to\infty} |<y; \tilde{x}-x>| \\
&\quad\leq M\varepsilon.
\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, zeigt dies $<y_k; x> \xrightarrow[k\to\infty]{} <y; x>$ für alle $x \in \overline{X}$. □

Bemerkung 0.35. *Mit der Auswertungsabbildung $\Phi_X : X \to X^{**}, x \mapsto <\cdot\,; x>$ lässt sich schwach-$*$-Konvergenz $y_k \xrightharpoonup[k\to\infty]{*} y$ in X^* äquivalent durch*

$$<\Phi_X(x); y_k> \xrightarrow[k\to\infty]{} <\Phi_X(x); y> \qquad \text{für alle } x \in X$$

beschreiben. Ist X reflexiv, d. h. Φ_X ein isometrischer Isomorphismus von X auf X^{**}, so ist daher schwach-$*$-Konvergenz in X^* dasselbe wir schwache Konvergenz in X^*. Somit ist der Begriff der schwach-$*$-Konvergenz nur in solchen Räumen interessant, die Dualräume eines nichtreflexiven Raumes X sind. Das für uns interessanteste Beispiel ist der Raum $RM(\Omega, \mathbb{R}^N)$, der sich nach dem Rieszschen Darstellungssatz als Dualraum von $C_0^0(\Omega, \mathbb{R}^N)$ auffassen lässt. Ein weiteres prominentes Beispiel ist der Raum $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$, der nach einem anderen Rieszschen Darstellungssatz mit dem Dualraum von $L^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ identifiziert werden kann.

Definition 0.36 (Schwach-$*$-Konvergenz in RM)**.** *Sprechen wir von* **schwach-$*$-Konvergenz** *in $RM(\Omega, \mathbb{R}^N)$, so fassen wir $RM(\Omega, \mathbb{R}^N)$ stets als Dualraum von $C_0^0(\Omega, \mathbb{R}^N)$ auf. Folglich bedeutet* **schwach-$*$-Konvergenz** *$\mu_k \xrightharpoonup[k\to\infty]{*} \mu$ in $RM(\Omega, \mathbb{R}^N)$ nach dem Rieszschen Satz gerade*

$$\int_\Omega \varphi \cdot d\mu_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \int_\Omega \varphi \cdot d\mu \qquad \text{für alle } \varphi \in C_0^0(\Omega, \mathbb{R}^N).$$

Bemerkung 0.37. *Weil $C_0^0(\Omega,\mathbb{R}^N)$ ein separabler Banachraum ist, lassen sich Proposition 0.32 und Satz 0.33 auf die schwach-∗-Konvergenz in RM anwenden. Außerdem lässt sich die schwach-∗-Konvergenz $\mu_k \xrightharpoonup[k\to\infty]{*} \mu$ in $RM(\Omega,\mathbb{R}^N)$ gemäß Bemerkung 0.34 auch durch*

$$\int_\Omega \varphi \cdot d\mu_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega \varphi \cdot d\mu \text{ für alle } \varphi \in C^0_{\mathrm{kpt}}(\Omega,\mathbb{R}^N) \quad \text{und} \quad \sup_{k\in\mathbb{N}} |\mu_k|(\Omega) < \infty$$

charakterisieren.

Definition 0.38 (Lokale schwach-∗-Konvergenz in RM_{lok})**.** *Für Maße $\mu_k,\mu \in RM_{\mathrm{lok}}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ sagen wir, dass $\mu_k \xrightharpoonup[k\to\infty]{*} \mu$* **lokal schwach-∗ konvergiert** *in $RM_{\mathrm{lok}}(\Omega,\mathbb{R}^N)$, wenn gilt:*

$$\int_\Omega \varphi \cdot d\mu_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega \varphi \cdot d\mu \qquad \text{für alle } \varphi \in C^0_{\mathrm{kpt}}(\Omega,\mathbb{R}^N).$$

Bemerkung 0.39.

(1) Aus schwach-∗-Konvergenz $\mu_k \xrightharpoonup[k\to\infty]{*} \mu$ in $RM(\Omega,\mathbb{R}^N)$ folgt die schwach-∗-Konvergenz $\mu_k|_A \xrightharpoonup[k\to\infty]{*} \mu|_A$ der eingeschränkten Maße in $RM(A,\mathbb{R}^N)$ für offene Teilmengen A von Ω.

(2) Für kompakte $A \subset \Omega$ dagegen gilt die vorausgehende Implikation i. A. nicht.

(3) Für $\mu_k,\mu \in RM_{\mathrm{lok}}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ gilt:

$$\begin{aligned} &\mu_k \xrightharpoonup[k\to\infty]{*} \mu \text{ lokal schwach-}* \text{ in } RM_{\mathrm{lok}}(\Omega,\mathbb{R}^N) \\ \iff &\mu_k|_A \xrightharpoonup[k\to\infty]{*} \mu|_A \text{ schwach-}* \text{ in } RM(A,\mathbb{R}^N) \text{ für alle } A \in \mathscr{O}\mathscr{K}(\Omega). \end{aligned}$$

Beweis. Zum Beweis von (1) genügt es, zu zeigen, dass sich jede Funktion in $C^0_{\mathrm{kpt}}(A,\mathbb{R}^N)$ durch 0 zu einer Funktion in $C^0_{\mathrm{kpt}}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ fortsetzen lässt. Dann folgt die Behauptung beispielsweise aus der Charakterisierung in Bemerkung 0.37. Sei also $\varphi \in C^0_{\mathrm{kpt}}(A,\mathbb{R}^N)$. Da $\operatorname{spt}\varphi$ kompakt ist, lässt sich ein $x \in \operatorname{spt}\varphi$ finden mit $\operatorname{dist}(x,\Omega\setminus A) = \operatorname{dist}(\operatorname{spt}\varphi,\Omega\setminus A)$. Weil aber andererseits A offen in Ω ist mit $x \in A$, gilt natürlich $\operatorname{dist}(x,\Omega\setminus A) > 0$. Folglich ist auch $\operatorname{dist}(\operatorname{spt}\varphi,\Omega\setminus A) > 0$. Aus der letzten Ungleichung entnehmen wir nun, dass φ durch den Wert 0 auf $\Omega\setminus A$ zu einer stetigen Funktion auf ganz Ω fortgesetzt wird. Diese Fortsetzung hat den gleichen Träger wie φ und ist daher in $C^0_{\mathrm{kpt}}(\Omega,\mathbb{R}^N)$. Dies beweist Teil (1).

Für (2) betrachten wir folgendes Beispiel: Sei $n = N = 1$, $\Omega = (-2,2)$ und $\mu_k := k\mathbb{1}_{(0,\frac{1}{k})} \cdot \mathscr{L}^1|_\Omega$ für $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\int_\Omega \varphi\, d\mu_k = \fint_0^{\frac{1}{k}} \varphi\, dx \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(0) = \int_\Omega \varphi\, d\delta_0$$

für alle $\varphi \in C^0(\Omega)$; folglich $\mu_k \xrightarrow[k\to\infty]{*} \delta_0|_\Omega$ schwach-$*$ in $RM(\Omega)$. Nun betrachten wir die kompakte Teilmenge $A := [-1, 0]$. Dann ergibt die Einschränkung $\mu_k|_A$ für alle $k \in \mathbb{N}$ das Nullmaß, während die Einschränkung $\delta_0|_A$ des Dirac-Maßes Totalvariation $|\delta_0|(A) = 1$ hat.

Den Beweis von (3) skizzieren wir nur, die Details der Argumente verlaufen ähnlich wie bei (1): Für '$\Longrightarrow$' überlegt man, dass sich für $A \in \mathscr{OK}(\Omega)$ jede Funktion in $C^0_0(A, \mathbb{R}^N)$ durch 0 zu einer Funktion in $C^0_{\mathrm{kpt}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ fortsetzen lässt. Für '$\Longleftarrow$' dagegen betrachtet man ein $\varphi \in C^0_{\mathrm{kpt}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ und schließt mit der lokalen Kompaktheit und Lemma 0.1, dass $\operatorname{spt}\varphi \subset A$ für ein $A \in \mathscr{OK}(\Omega)$ und folglich $\varphi|_A \in C^0_{\mathrm{kpt}}(A, \mathbb{R}^N)$ gilt. □

Als nächstes beschäftigen wir uns mit der Relation zwischen schwach-$*$-Konvergenz $\mu_k \xrightarrow[k\to\infty]{*} \mu$ in $RM(\Omega, \mathbb{R}^N)$ und punktweiser Konvergenz $\mu_k(A) \to \mu(A)$ für alle $A \in \mathscr{B}(\Omega)$:

Proposition 0.40. *Es konvergiere $\mu_k \xrightarrow[k\to\infty]{*} \mu$ schwach-$*$ in $RM(\Omega, \mathbb{R}^N)$.*

(1) Ist $N = 1$ und sind alle μ_k nichtnegativ, so ist auch μ nichtnegativ und es gelten für $A \in \mathscr{B}(\Omega)$ die folgenden Implikationen:

$$A \text{ kompakt} \Longrightarrow \mu(A) \geq \limsup_{k\to\infty} \mu_k(A); \tag{0.5}$$

$$A \text{ offen in } \Omega \Longrightarrow \mu(A) \leq \liminf_{k\to\infty} \mu_k(A). \tag{0.6}$$

(2) Es konvergiere außerdem $|\mu_k| \xrightarrow[k\to\infty]{*} \nu$ schwach-$*$ in $RM(\Omega)$. Dann gilt für $A \in \mathscr{OK}(\Omega)$ mit $\nu(\overline{A} \setminus A) = 0$

$$\mu(A) = \lim_{k\to\infty} \mu_k(A).$$

Insbesondere lässt sich dies natürlich anwenden, wenn A kompakt und offen in Ω ist (z.B. eine kompakte Zusammenhangskomponente von Ω).

Beweis. (2) folgt durch Anwendung von (1) auf Positiv- und Negativteil der Komponenten; daher beweisen wir im Folgenden nur (1). Wir schließen zunächst aus der Nichtnegativität der μ_k, dass $\int_\Omega \varphi\, d\mu \geq 0$ für alle $0 \leq \varphi \in C^0_{\mathrm{kpt}}(\Omega)$ gilt. Mit Lemma 0.28 folgt dasselbe für alle $0 \leq \varphi \in L^1(\Omega; |\mu|)$. Folglich ist $\mu(A) = \int_\Omega \mathbb{1}_A\, d\mu \geq 0$ für alle $A \in \mathscr{B}(\Omega)$, also μ nichtnegativ. Sei nun A kompakt. Wir definieren für $L \gg 1$ Funktionen φ_L durch $\varphi_L(x) := (1 - L\mathrm{dist}(x, A))_+$. Wie früher folgt aus der lokalen Kompaktheit von Ω, dass $\varphi_L \in C^0_{\mathrm{kpt}}(\Omega)$ für $L \gg 1$ gilt. Wir schließen nun

$$\int_\Omega \varphi_L\, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega \varphi_L\, d\mu_k \geq \limsup_{k\to\infty} \mu_k(A)$$

für $L \gg 1$ und die Behauptung (0.5) folgt durch Grenzübergang $L \to \infty$ mit dem Satz über dominierte Konvergenz. (0.6) erhalten wir zunächst im Falle $A = \Omega$ aus Proposition 0.32. Da wir aber mittels Bemerkung 0.39 stets zu den eingeschränkten Maßen übergehen können, folgt (0.6) auch für jede offene Menge A. □

Bemerkung 0.41. *Es konvergiere* $\mu_k \xrightarrow[k\to\infty]{*} \mu$ *in* $RM(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *und* $|\mu_k| \xrightarrow[k\to\infty]{*} \nu$ *schwach-∗ in* $RM(\Omega)$*. Dann gilt* $\nu \geq |\mu|$*, aber selbst im Falle* $N = 1$ *ist i. A.* $\nu \neq |\mu|$*.*

Beweis. Nach Proposition 0.40 ist ν nichtnegativ. Außerdem gilt für alle $\varphi \in C_0^0(\Omega, \mathbb{R}^N)$

$$\left|\int_\Omega \varphi \cdot d\mu\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\int_\Omega \varphi \cdot d\mu_k\right| \leq \lim_{k\to\infty} \int_\Omega |\varphi| \, d|\mu_k| = \int_\Omega |\varphi| \, d\nu$$

Unter Verwendung von Lemma 0.29 schließen wir daraus

$$|\mu|(\Omega) \leq \nu(\Omega).$$

Mit Bemerkung 0.39 übertragen wir nun die letzte Ungleichung auf beliebige offene Teilmengen A von Ω, also $|\mu|(A) \leq \nu(A)$ für alle A, die offen in Ω sind. Mit den Regularitätseigenschaften folgt $|\mu|(A) \leq \nu(A)$ für alle $A \in \mathscr{B}(\Omega)$.

Um einzusehen, dass i. A. $|\mu| \neq \nu$ gilt, betrachten wir folgendes Beispiel: Es sei $\Omega = [0,2]$, $f_k := \sum_{i=0}^{k-1} \Big(\mathbb{1}_{\left[\frac{2i}{k}, \frac{2i+1}{k}\right]} - \mathbb{1}_{\left[\frac{2i+1}{k}, \frac{2i+2}{k}\right]}\Big) \in L^1[0,2]$ und $\mu_k := f_k \cdot \mathscr{L}^1|_{[0,2]}$. Dann ist $|\mu_k| = \mathscr{L}^1|_{[0,2]}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, also auch der Grenzwert $\nu = \mathscr{L}^1|_{[0,2]}$. Weiter ist jede Funktion $\varphi \in C_b^0[0,2]$ gleichmäßig stetig, besitzt also einen Stetigkeitsmodul ω_φ auf $[0,2]$. Daher gilt

$$\left|\int_{[0,2)} \varphi \, d\mu_k\right| = \left|\sum_{i=0}^{k-1} \int_{\frac{2i}{k}}^{\frac{2i+1}{k}} \Big(\varphi(x) - \varphi\Big(x + \frac{1}{k}\Big)\Big) \, dx\right| \leq \omega_\varphi\Big(\frac{1}{k}\Big) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

für alle $\varphi \in C_b^0[0,2]$, also $\mu_k \xrightarrow[k\to\infty]{*} 0$ schwach-∗ in $RM[0,2]$. Somit ist $\mu = 0$, also $|\mu| \neq \nu$. □

Zur späteren Verwendung führen wir einen weiteren Konvergenzbegriff für Maße ein, der zwischen starker Konvergenz und schwach-∗-Konvergenz liegt.

Definition 0.42 (Strikte Konvergenz in RM)**.** *Wir sagen, dass eine Folge* $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *in* $RM(\Omega, \mathbb{R}^N)$ **strikt** *gegen einen Grenzwert* μ *in* $RM(\Omega, \mathbb{R}^N)$ **konvergiert**, *wenn* $\mu_k \xrightarrow[k\to\infty]{*} \mu$ *schwach-∗ in* $RM(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *konvergiert und zudem*

$$\lim_{k\to\infty} |\mu_k|(\Omega) = |\mu|(\Omega)$$

gilt.

Bemerkung 0.43. *Mit einem Teilfolgenargument entnehmen wir aus Bemerkung 0.41 und dem Auswahlsatz, dass für eine strikt konvergente Folge* $\mu_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \mu$ *in* $RM(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *stets auch* $|\mu_k| \xrightarrow[k\to\infty]{*} |\mu|$ *schwach-∗ in* $RM(\Omega)$ *konvergiert.*

0.5 Faltung und Glättung

Von nun an sei stets Ω offen in $\mathbb{R}^n$. Wir beginnen mit einer Bemerkung zur Faltung von Maßen in allgemeinem Kontext.

Bemerkung 0.44. *Für zwei Maße $\nu \in RM(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^M)$, $\mu \in RM(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^N)$ und eine bilineare Abblildung $\odot : \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^K$ $(M, N, K \in \mathbb{N})$ kann man durch die* **Faltung**

$$\nu * \mu(A) := \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A(x+y)\,d\nu(x) \odot d\mu(y) \qquad \text{für } A \in \mathscr{B}(\Omega)$$

eine weiteres Maß $\nu * \mu \in RM(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^K)$ erklären.[11] *Ist $M = N$ und $\odot$ kommutativ, so ist auch $*$ kommutativ. In diesem Zusammenhang identifizieren wir absolutstetige Maße bezüglich $\mathscr{L}^n$ stets mit ihrer Radon-Nikodym-Dichte: Beispielsweise kürzen wir wir im Falle $f \in L^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^M)$*

$$f * \mu := (f \cdot \mathscr{L}^n) * \mu$$

ab. Tatsächlich ist dann $f * \mu \ll \mathscr{L}^n$ und die Dichte von $f * \mu$, die wir ebenfalls mit $f * \mu$ bezeichnen ist gegeben durch

$$f * \mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \odot d\mu(y) \qquad \text{für } \mathscr{L}^n\text{-fast-alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Insbesondere führt die Faltung zweier absolutstetiger Maße zurück auf die klassische Definition der Faltung zweier Funktionen. Im Folgenden interessiert uns der Fall $M = K = 1$ mit der Skalarmultiplikation von $\mathbb{R}^N$ als Verknüpfung $\odot$ und mit absolutstetigem ν.

Definition 0.45 (Glättung von Maßen)**.** *Wir fixieren einen* **glättenden Kern** $0 \le \rho \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *mit* $\operatorname{spt}\rho \subset B_1$ *und* $\int_{\mathbb{R}^n} \rho\,dx = 1$ *und definieren die skalierten Kerne $\rho_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ durch $\rho_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\rho(x/\varepsilon)$. Dann definieren wir zu $\varepsilon > 0$ die (offene)* **ε-Parallelmenge**

$$\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega \,:\, \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) > \varepsilon\}$$

und für $\mu \in RM(\Omega,\mathbb{R}^N)$ die **Glättungen**

$$\rho_\varepsilon * \mu(x) := \int_\Omega \rho_\varepsilon(x-y)\,d\mu(y) \qquad \text{für alle } x \in \Omega_\varepsilon.$$

Bemerkung 0.46. *$\rho_\varepsilon * \mu$ im Sinne von Definition 0.45 stimmt $\mathscr{L}^n$-fast-überall auf Ω_ε mit $\rho_\varepsilon * \tilde{\mu}$ im Sinne von Bemerkung 0.44 überein, wenn $\tilde{\mu} \in RM(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^N)$ eine beliebige (!) Fortsetzung von μ auf $\mathbb{R}^n$ ist, also $\tilde{\mu}|_\Omega = \mu$ gilt.*

Lemma 0.47 (Eigenschaften der Glättung). *Für $\mu \in RM(\Omega,\mathbb{R}^N)$ gelten:*

(I) Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $\rho_\varepsilon * \mu \in C^\infty(\Omega_\varepsilon,\mathbb{R}^N)$;

[11] Gemäß Proposition 0.19 ist $\nu * \mu$ ein Radon-Maß. Endlichkeit von $\nu * \mu$ und einfache Eigenschaften folgen aus dem Satz von Fubini.

(II) Für jedes $\varepsilon > 0$ ist $\rho_\varepsilon * \mu \in L^1(\Omega_\varepsilon, \mathbb{R}^N)$ und

$$\mu_\varepsilon := (\rho_\varepsilon * \mu) \cdot \mathscr{L}^n|_{\Omega_\varepsilon}$$

definiert ein Maß in $RM(\Omega_\varepsilon, \mathbb{R}^N)$ mit

$$|\mu_\varepsilon|(\Omega_\varepsilon) \leq |\mu|(\Omega);$$

(III) $\mu_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \searrow 0]{*} \mu$ lokal schwach-$*$ in $RM_{\text{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$;

(IV) $|\mu_\varepsilon| \xrightarrow[\varepsilon \searrow 0]{*} |\mu|$ lokal schwach-$*$ in $RM_{\text{lok}}(\Omega)$.

(V) Starke Konvergenz $\mu_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \searrow 0]{} \mu$ dagegen kann man i. A. nicht erwarten, auch nicht lokal.

Bemerkung 0.48. *Die Konvergenz in (III) ist dabei im Sinne von*

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \varphi \cdot d\mu_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \searrow 0]{} \int_\Omega \varphi \cdot d\mu$$

für alle $\varphi \in C^0_{\text{kpt}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ zu verstehen. Analog ist die Konvergenz in (IV) zu interpretieren.

Beweis. (I) erhält man problemlos durch Differentiation unter dem Integral. Für (II) berechnet man

$$\begin{aligned} |\mu_\varepsilon|(\Omega_\varepsilon) &= \int_{\Omega_\varepsilon} |\rho_\varepsilon * \mu| \, dx \leq \int_{\Omega_\varepsilon} \int_\Omega \rho_\varepsilon(x-y) \, d|\mu|(y) \, dx \\ &= \int_\Omega \int_{\Omega_\varepsilon} \rho_\varepsilon(x-y) \, dx \, d|\mu|(y) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon \, dx \int_\Omega d|\mu| = |\mu|(\Omega). \end{aligned}$$

Sei nun $\varphi \in C^0_{\text{kpt}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ und $\varepsilon > 0$ ausreichend klein, dass $\operatorname{spt} \varphi \subset \Omega_\varepsilon$ gilt. Wir definieren $\tilde{\rho} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ durch $\tilde{\rho}(x) := \rho(-x)$ und bemerken, dass $\tilde{\rho}$ und dies zugehörigen skalierten Kerne $\tilde{\rho}_\varepsilon$ dieselben Eigenschaften wie ρ und die ρ_ε haben. Jetzt rechnen wir mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} \varphi \cdot d\mu_\varepsilon &= \int_{\Omega_\varepsilon} \varphi(x) \int_\Omega \rho_\varepsilon(x-y) \, d\mu(y) \, dx = \int_\Omega \int_{\Omega_\varepsilon} \rho_\varepsilon(x-y) \varphi(x) \, dx \, d\mu(y) \\ &= \int_\Omega \int_\Omega \tilde{\rho}_\varepsilon(y-x) \varphi(x) \, dx \, d\mu(y) = \int_\Omega \varphi_\varepsilon \, d\mu, \end{aligned}$$

wobei die φ_ε die klassischen Glättungen (bezüglich $\tilde{\rho}$) der gleichmäßig stetigen Funktion φ bezeichnet. Da die φ_ε bei $\varepsilon \searrow 0$ gleichmäßig gegen φ konvergieren, folgt die Behauptung von (III). Schließlich zeigen wir (IV) (wobei wir zur Vereinfachung die Notation der Einschränkung $|_A$ unterdrücken): Gemäß Bemerkung 0.39 (III) reicht es, zu zeigen, dass für alle $A \in \mathscr{OK}(\Omega)$ und zu jeder positiven Nullfolge $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(\varepsilon_{k_l})_{l \in \mathbb{N}}$ existiert mit $|\mu_{\varepsilon_{k_l}}| \xrightarrow[l \to \infty]{*} |\mu|$ schwach-$*$ in $RM(A)$. Seien also $A \in \mathscr{OK}(\Omega)$ und eine positive Nullfolge $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gegeben.

Dann schließen wir zunächst aus (II), dass $\sup_{k\gg 1}|\mu_{\varepsilon_k}|(A) < \infty$ gilt; gemäß dem Kompaktheitssatz können wir daher eine Teilfolge $(\varepsilon_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ auswählen, so dass $|\mu_{\varepsilon_{k_l}}|$ schwach-$*$ in $RM(A)$ gegen ein $\nu \in RM(A)$ konvergiert. Unter Verwendung von (III) erlaubt uns Bemerkung 0.41 auf $\nu \geq |\mu|$ zu schließen. Andererseits folgt aus der Definition der Glättung $|\rho_\varepsilon * \mu| \leq \rho_\varepsilon * |\mu|$ auf Ω_ε, also

$$|\mu_\varepsilon| \leq |\mu|_\varepsilon. \tag{0.7}$$

Wir schließen nun $\nu \leq |\mu|$, indem wir (0.7) auf die Teilfolge $(\varepsilon_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ anwenden und unter erneuter Verwendung von (III) zur Grenze übergehen. Folglich gilt $\nu = |\mu|$ in $RM(A)$. Für (V) betrachten wir als Beispiel δ_0 auf $\Omega = \mathbb{R}^n$, dann gilt wegen $(\delta_0)_\varepsilon \ll \mathscr{L}^n$ und $\delta_0 \perp \mathscr{L}^n$ auch $(\delta_0)_\varepsilon \perp (\delta_0)$. Mit Lemma 0.21 folgt für jede Menge $A \in \mathscr{B}(\Omega)$ mit $0 \in A$

$$|(\delta_0)_\varepsilon - \delta_0|(A) = |(\delta_0)_\varepsilon|(A) + |\delta_0|(A) \geq \delta_0(A) = 1. \qquad \square$$

0.6 Verallgemeinertes Produkt und Disintegration

Für diesen Abschnitt fixieren wir (zusätzlich zur offenen Teilmenge Ω von $\mathbb{R}^n$) einen weiteren abzählbar kompakten und lokal kompakten metrischen Raum M. Mit $\pi : \Omega \times M \to \Omega$ bezeichnen wir die Projektion auf den ersten Faktor des kartesischen Produkts $\Omega \times M$. Wir interessieren uns für Maße auf $\Omega \times M$, die von allgemeinerer Struktur als Produktmaße sind.

Definition 0.49 (Messbarkeit maßwertiger Abbildungen)**.** *Bei einer maßwertigen Abbildung $\nu : \Omega \to RM(M,\mathbb{R}^N)$ schreiben wir im Folgenden stets ν_x für den Wert von ν an der Stelle x. Für ein nichtnegatives Radon-Maß μ auf Ω nennen wir ν eine* ***μ-messbare*** *Abbildung, wenn für jedes $A \in \mathscr{B}(M)$ die Abbildung $\nu_\bullet(A) : \Omega \to \mathbb{R}^N$ stets μ-messbar ist.*

Lemma 0.50. *Sei μ ein nichtnegatives Radon-Maß auf Ω. Für eine μ-messbare Abbildung $\nu : \Omega \to RM(M,\mathbb{R}^N)$ gelten:*

(I) Die Abbildung $\Omega \to \mathbb{R}^N, x \mapsto \int_M f(x,\cdot)\,d\nu_x$ ist für jede beschränkte Borel-Funktion $f : \Omega \times M \to \mathbb{R}$ stets μ-messbar;

(II) auch $\Omega \to RM(M), x \mapsto |\nu_x|$ ist eine μ-messbare Abbildung.

Beweis. Die Behauptung (I) gilt trivial für $f = \mathbb{1}_{B\times A}$ mit $B \in \mathscr{B}(\Omega)$ und $A \in \mathscr{B}(M)$. Mit Standardprozeduren der Maßtheorie geht man nun zunächst zum Fall $f = \mathbb{1}_C$ mit $C \in \mathscr{B}(\Omega \times M)$ und dann zum allgemeinen Fall über.

Um (II) einzusehen, schließen wir mit Lemma 0.29 auf

$$|\nu_x|(A) = \sup\left\{\left|\int_A \varphi \cdot d\nu_x\right| \,:\, \varphi \in C_b^0(A,\mathbb{R}^N) \text{ mit } \sup_A |\varphi| \leq 1\right\} \tag{0.8}$$

für alle $x \in \Omega$ und $A \in \mathscr{B}(M)$. Aus Teil (I) entnehmen wir, dass $\int_A \varphi \cdot d\nu_x$ messbar von x abhängt (dazu betrachte man zuerst die Komponenten $\left(\int_A \varphi_i\,d\nu_x\right)_i$). Ersetzen wir nun noch $C_b^0(A,\mathbb{R}^N)$ in (0.8) durch eine abzählbare dichte Teilmenge, so folgt, dass auch $|\nu_x|(A)$ als abzählbares Supremum μ-messbar von x abhängt. $\square$

Definition 0.51 (Verallgemeinertes Produkt). *Sei μ ein nichtnegatives Radon-Maß auf Ω. Für ein μ-messbares $\nu : \Omega \to RM(M, \mathbb{R}^N)$ mit*

$$|\nu_\bullet|(M) \in L^1_{\mathrm{lok}}(\Omega; \mu)$$

definieren wir

$$\rho(C) := \int_\Omega \int_M \mathbb{1}_C(x, \cdot)\, d\nu_x\, d\mu(x) \qquad \text{für } C \in \mathscr{K}(\Omega \times M).$$

Gemäß Lemma 0.50 (I) und Proposition 0.19 definiert dies ein Radon-Maß $\rho \in RM_{\mathrm{lok}}(\Omega \times M, \mathbb{R}^N)$. Außerdem gilt

$$\int_{\Omega \times M} f\, d\rho = \int_\Omega \int_M f(x, \cdot)\, d\nu_x\, d\mu(x)$$

für jedes $f \in L^1(\Omega \times M; \rho)$. Weil $\int_M \mathbb{1}_C(x, \cdot)\, d\nu_x = \delta_x \otimes \nu_x(C)$ und $\int_M f(x, \cdot)\, d\nu_x = \int_{\Omega \times M} f\, d(\delta_x \otimes \nu_x)$ nach Fubini gelten, drücken wir den Zusammenhang zwischen ρ, ν und μ symbolisch aus durch

$$\rho = \int_\Omega \delta_x \otimes \nu_x\, d\mu(x)$$

und nennen ρ das **verallgemeinerte Produkt** *von μ und ν.*

Bemerkung 0.52. *Ist ν konstant, so reduziert sich das verallgemeinerte Produkt zum gewöhnlichen Produktmaß, d. h. es gilt*

$$\int_\Omega \delta_x \otimes \nu\, d\mu(x) = \mu \otimes \nu.$$

Proposition 0.53 (**Verallgemeinertes Produkt und Variation**). *Seien μ und ν wie in der vorigen Definition. Dann gilt mit der soeben eingeführten Notation die folgende Formel für die Variation:*

$$\left| \int_\Omega \delta_x \otimes \nu_x\, d\mu(x) \right| = \int_\Omega \delta_x \otimes |\nu_x|\, d\mu(x).$$

Außerdem gilt

$$\pi_\# \left| \int_\Omega \delta_x \otimes \nu_x\, d\mu(x) \right| = |\nu_\bullet|(M) \cdot \mu.$$

Beweis. Wir setzen

$$\rho := \int_\Omega \delta_x \otimes \nu_x\, d\mu(x)$$

und

$$\tilde{\rho} := \int_\Omega \delta_x \otimes |\nu_x|\, d\mu(x).$$

Dann ergibt sich durch Anwendung der Definition

$$\pi_\# \tilde{\rho} = |\nu_\bullet|(M) \cdot \mu \tag{0.9}$$

und
$$|\rho(C)| \leq \tilde{\rho}(C) \qquad \text{für alle } C \in \mathscr{K}(\Omega \times M).$$
Mit Proposition 0.17 folgt aus der letzen Ungleichung
$$|\rho| \leq \tilde{\rho}. \tag{0.10}$$
Aus (0.9) und (0.10) schließen wir auf $\pi_\#|\rho| \ll \mu$ und $\pi_\#|\rho| = \frac{d(\pi_\#|\rho|)}{d\mu} \cdot \mu$. Daher gilt für jedes $A \in \mathscr{K}(\Omega)$ und $\varphi \in C_b^0(M, \mathbb{R}^N)$ mit $\sup_M |\varphi| \leq 1$
$$\left| \int_A \int_M \varphi \, d\nu_x \, d\mu(x) \right| = \left| \int_{A\times M} \varphi(y) \, d\rho(x,y) \right| \leq |\rho|(A \times M) = \int_A \frac{d(\pi_\#|\rho|)}{d\mu} \, d\mu.$$
Es folgt
$$\left| \int_M \varphi \, d\nu_x \right| \leq \frac{d(\pi_\#|\rho|)}{d\mu}(x)$$
und gemäß Lemma 0.29 dann
$$|\nu_x|(M) \leq \frac{d(\pi_\#|\rho|)}{d\mu}(x)$$
für μ-fast-alle $x \in \Omega$.[12] Aus der letzten Ungleichung entnehmen wir
$$\tilde{\rho}(A \times M) = \int_A |\nu_x|(M) \, d\mu(x) \leq |\rho|(A \times M) \qquad \text{für alle } A \in \mathscr{K}(\Omega). \tag{0.11}$$
Durch Kombination von (0.10) und (0.11) folgt $|\rho| = \tilde{\rho}$, also die erste Behauptung der Proposition. Die zweite Behauptung ergibt sich aus der ersten unter Berücksichtigung von (0.9). ☐

Wir zeigen nun, dass sich jedes endliche Radon-Maß auf $\Omega \times M$ als verallgemeinertes Produkt schreiben lässt.

Satz 0.54. *Sei μ ein nichtnegatives Radon-Maß auf Ω und $\rho \in RM_{\text{lok}}(\Omega \times M, \mathbb{R}^N)$. Ist $\pi_\#|\rho|$ lokal endlich mit*
$$\pi_\#|\rho| \ll \mu,$$
so gibt es eine μ-messbare Abbildung $\nu : \Omega \to RM(M, \mathbb{R}^N)$ mit
$$|\nu_\bullet|(M) \in L^1_{\text{lok}}(\Omega; \mu)$$
und
$$\rho = \int_\Omega \delta_x \otimes \nu_x \, d\mu(x).$$

Als Korollar erhalten wir schließlich das folgende Resultat, das in der Wahrscheinlichkeitstheorie als die Existenz bedingter Verteilungen bekannt ist.

[12] Tatsächlich ist die obige Argumentation nicht ganz korrekt, weil der Quantor "für μ-fast-alle $x \in \Omega$" mit dem Quantor "für alle φ" vertauscht wird und letzterer über eine überabzählbare Menge von Funktionen läuft. Dieses Problem lässt sich jedoch beheben, indem man nur Funktionen φ in einer abzählbaren dichten Teilmenge von $C_b^0(M, \mathbb{R}^N)$ betrachtet.

Korollar 0.55 (Disintegration). *Sei $\rho \in RM_{\mathrm{lok}}(\Omega \times M, \mathbb{R}^N)$ und $\pi_\#|\rho|$ sei lokal endlich. Dann gibt es eine $\pi_\#|\rho|$-messbare Abbildung $\nu : \Omega \to RM(M, \mathbb{R}^N)$ mit*

$$|\nu_x|(M) = 1 \qquad \text{für } \pi_\#|\rho|\text{-fast-alle } x \in \Omega$$

und

$$\rho = \int_\Omega \delta_x \otimes \nu_x \, d(\pi_\#|\rho|)(x).$$

Beweis. Wir wenden Satz 0.54 mit $\mu := \pi_\#|\rho|$ an und erhalten die Existenz eines ν mit $\rho = \int_\Omega \delta_x \otimes \nu_x \, d(\pi_\#|\rho|)(x)$. Die Behauptung $|\nu_x|(M) = 1$ folgt nun aus der zweiten Gleichung in Proposition 0.53. □

Beweisskizze zu Satz 0.54. Für jedes $\varphi \in C_0^0(M, \mathbb{R}^N)$ definieren wir ein signiertes Radon-Maß μ_φ auf Ω durch

$$\mu_\varphi(A) := \int_{A \times M} \varphi(y) \, d\rho(x, y) \qquad \text{für } A \in \mathscr{K}(\Omega).$$

Für alle $A \in \mathscr{K}(\Omega)$ gilt $|\mu_\varphi(A)| \leq \pi_\#|\rho|(A) \sup_M |\varphi|$, woraus man mit Proposition 0.17 und dem Satz von Radon-Nikodym auf

$$\mu_\varphi \ll \mu \qquad \text{und} \qquad \left| \frac{d\mu_\varphi}{d\mu} \right| \leq \frac{d(\pi_\#|\rho|)}{d\mu} \sup_M |\varphi|$$

schließt. Wir betrachten nun die Funktionale

$$F_x : C_0^0(M, \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}, \varphi \mapsto \frac{d\mu_\varphi}{d\mu}(x).$$

Es lässt sich zeigen, dass F_x für μ-fast-alle $x \in \Omega$ ein wohldefiniertes (betrachte zunächst nur φ in einer abzählbaren dichten Teilmenge) beschränktes lineares Funktional mit Operatornorm $\leq \frac{d(\pi_\#|\rho|)}{d\mu}(x)$ ist. Daher gibt es nach dem Rieszschen Darstellungssatz eine Abbildung $\nu : \Omega \to RM(M, \mathbb{R}^N)$ mit

$$\int_M \varphi \, d\nu_x = \frac{d\mu_\varphi}{d\mu}(x)$$

für alle $\varphi \in C_0^0(M, \mathbb{R}^N)$ und $|\nu_x|(M) \leq \frac{d(\pi_\#|\rho|)}{d\mu}(x)$ für μ-fast-alle $x \in \Omega$. Weiter lässt sich nun zeigen, dass ν tatsächlich μ-messbar ist. Da $\pi_\#|\rho|$ lokal endlich ist, gilt $\frac{d(\pi_\#|\rho|)}{d\mu} \in L^1_{\mathrm{lok}}(\Omega; \mu)$ und folglich

$$|\nu_\bullet|(M) \in L^1_{\mathrm{lok}}(\Omega; \mu).$$

Außerdem ergibt die Konstruktion

$$\int_\Omega \int_M f(x) \varphi \, d\nu_x \, d\mu(x) = \int_\Omega f \frac{d\mu_\varphi}{d\mu} \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu_\varphi = \int_{\Omega \times M} f(x) \varphi(y) \, d\rho(x, y)$$

für jedes $f \in L^1(\Omega; \pi_\#|\rho|)$ und jedes $\varphi \in C_0^0(M, \mathbb{R}^N)$ und aus dieser letzten Gleichung erhalten wir schließlich

$$\int_\Omega \delta_x \otimes \nu_x \, d\mu(x) = \rho. \qquad \square$$

Ausblick (Young-Maße). *Als Young-Maße bezüglich eines gegebenen nichtnegativen Radon-Maßes μ auf Ω bezeichnet man die verallgemeinerten Produkte $\int_\Omega \delta_x \otimes \nu_x \, d\mu(x)$ auf $\Omega \times M$, bei denen ν_x für μ-fast-alle $x \in \Omega$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist (also nichtnegativ mit $\nu_x(M) = 1$). Aus Korollar 0.55 und Proposition 0.53 entnehmen wir, dass die Young-Maße bezüglich des Grundmaßes μ genau die nichtnegativen $\rho \in RM_{\mathrm{lok}}(\Omega \times M)$ mit $\pi_\# \rho = \mu$ sind.*

Meistens betrachtet man Young-Maße zum fixierten Grundmaß $\mathscr{L}^n|_\Omega$. Man identifiziert dann Funktionen $u : \Omega \to M$ mit dem Young-Maß[13] *$\int_\Omega \delta_x \otimes \delta_{u(x)} \, dx$. Allgemeine Young-Maße $\int_\Omega \delta_x \otimes \nu_x \, dx$ versteht man als* **mehrwertige Funktionen** *$\Omega \to M$, die an einer Stelle $x \in \Omega$ keinen einzelnen, sondern viele Werte aus M annehmen – mit Wahrscheinlichkeiten, die durch die Verteilung ν_x beschrieben werden.*

Young-Maße haben sich in vielen Situationen der Variationsrechnung als wichtige Hilfsmittel erwiesen: Nach der ursprünglichen Idee von L.C. Young können sie in nicht-(quasi)konvexen Situationen, in denen keine klassischen Minimierer existieren, als **verallgemeinerte Minimierer** *von Variationsproblemen verstanden werden. Außerdem sind sie nützlich beim systematischen Studium von* **Unterhalbstetigkeitseigenschaften** *und bei der Beschreibung gewisser physikalischer Phänomene (wie Phasenübergänge und Mikrostrukturen).*

Um die Bedeutung von Young-Maßen tiefer zu verstehen, fixieren wir $M = \mathbb{R}^K$ und erinnern uns zunächst an folgendes Prinzip: Ist $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine schwach konvergente Folge in $L^p(\Omega, \mathbb{R}^K)$ mit Grenzwert u und ist $f : \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}$ eine nichtlineare Funktion, so kann man i. A. nicht erwarten, dass $f \circ u_k$ (oder eine Teilfolge) gegen $f \circ u$ konvergiert. Tatsächlich kann $f \circ u \neq 0 = f \circ u_k$ für alle k gelten. Grob gesprochen, zerstören nichtlineare Operationen die schwache Konvergenz von Funktionen. Young-Maße hingegen besitzen die folgende **nichtlineare Permanenzeigenschaft***: Ist $\mathscr{L}^n(\Omega) < \infty$, so lässt sich aus jeder Funktionenfolge $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(u_{k_l})_{l \in \mathbb{N}}$ auswählen, die, aufgefasst als Folge von Young-Maßen bezüglich $\mathscr{L}^n|_\Omega$, schwach-$*$ in $RM(\Omega \times \mathbb{R}^K)$ gegen einen Grenzwert $\rho = \int_\Omega \delta_x \otimes \nu_x \, dx$ konvergiert. Ist $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ nun schwach konvergent gegen einen Grenzwert u in $L^1(\Omega, \mathbb{R}^K)$, so ist ρ wieder ein Young-Maß mit $u(x) = \int_{\mathbb{R}^K} y \, d\nu_x(y)$ für $\mathscr{L}^n$-fast-alle $x \in \Omega$. Außerdem konvergiert (und das ist der entscheidende Punkt) $f \circ u_{k_l}$ für jedes $f \in C^0_b(\mathbb{R}^K)$ schwach-$*$ in $L^\infty(\Omega)$ gegen $f \circ \rho$, definiert durch $f \circ \rho(x) := \int_{\mathbb{R}^K} f \, d\nu_x$.*

0.7 Rektifizierbarkeit

Bevor wir uns dem Begriff der Rektifizierbarkeit zuwenden, führen wir noch die folgende Terminologie ein:

Definition 0.56 (μ-Endlichkeit). *Sei μ ein nichtnegatives Maß auf Ω und A eine μ-messbare Teilmenge von Ω. Dann heißt A* **lokal μ-endlich***, wenn $1_A \cdot \mu$ ein Radon-Maß ist. Ist sogar $\mathbb{1}_A \cdot \mu(\Omega) < \infty$, so heißt A* **μ-endlich***. Gibt es*

[13] $\int_\Omega \delta_x \otimes \delta_{u(x)} \, dx$ lässt sich anschaulich beschreiben als das Bildmaß von $\mathscr{L}^n|_\Omega$ unter der Graphenabbildung $x \mapsto (x, u(x))$.

abzählbar viele μ-endliche Mengen A_1, A_2, A_3, ... mit $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, so nennen wir A eine $\boldsymbol{\mu}$**-**$\boldsymbol{\sigma}$**-endliche** *Menge.*

In diesem Abschnitt fixieren wir ein $k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, n\}$ und bezeichnen mit $\mathscr{H}^k$ das k-dimensionale (sphärische) Hausdorff-Maß auf $\mathbb{R}^n$. Wir werden im Folgenden auch die Bezeichnung $\mathscr{H}^k(A)$ für nur $\mathscr{H}^k$-messbare (und nicht notwendig Borelsche) Mengen A verwenden. Dieses Symbol ist dann als Auswertung des äußeren Hausdorff-Maßes zu interpretieren. Wir erinnern außerdem an die fundamentale Abschätzung

$$\mathscr{H}^k(f(A)) \leq (\operatorname{Lip} f)^k \mathscr{H}^k(A) \tag{0.12}$$

für jede Lipschitz-Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und jede $\mathscr{H}^k$-messbare Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.

Definition 0.57 (Rektifizierbarkeit)**.** *A sei $\mathscr{H}^k$-messbar in $\mathbb{R}^n$.*

(1) A heißt **abzählbar $\boldsymbol{k}$-rektifizierbar**, *wenn es abzählbar viele biLipschitz-Abbildungen (d. h. injektive Lipschitz-Abbildungen mit Lipschitz-stetigen Umkehrabbildungen) $f_1, f_2, f_3, \ldots : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ gibt mit*

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} f_i(\mathbb{R}^k);$$

(2) A heißt **abzählbar $\boldsymbol{\mathscr{H}^k}$-rektifizierbar**, *wenn $\mathscr{H}^k(A \setminus B) = 0$ für eine abzählbar k-rektifizierbare Menge $B \subset \mathbb{R}^n$ gilt;*

(3) A heißt **$\boldsymbol{\mathscr{H}^k}$-rektifizierbar**, *wenn A abzählbar $\mathscr{H}^k$-rektifizierbar ist mit $\mathscr{H}^k(A) < \infty$.*

Der für uns wichtigste dieser Begriffe ist die abzählbare $\mathscr{H}^k$-Rektifizierbarkeit.

Bemerkung 0.58. *In der Literatur werden in der Definition der Rektifizierbarkeit meist Lipschitz-Abbildungen anstelle von biLipschitz-Abbildungen verwendet. Man kann mit einigem Aufwand zeigen, dass dies dieselben Begriffe ergibt. Manchmal – man denke an den Satz von Lusin – wird auch direkt mit C^1-Abbildungen gearbeitet. Für unsere Zwecke ist jedoch die obige Version mit biLipschitz-Abbildungen am praktischsten.*

Bemerkung 0.59. *In den extremen Fällen $k = 0$ und $k = n$ trivialisiert sich der Begriff der Rektifizierbarkeit:*

- *$\mathbb{R}^0$ ist eine einelementige Menge und $\mathscr{H}^0$ das Zählmaß. Folglich sind die abzählbar 0-rektifizierbaren und abzählbar $\mathscr{H}^0$-rektifizierbaren Mengen die abzählbaren Mengen; die $\mathscr{H}^0$-rektifizierbaren Mengen sind gerade die endlichen Mengen.*

- *$\mathscr{H}^n$ ist das Lebesgue-Maß $\mathscr{L}^n$. Daher sind die abzählbar n-rektifizierbaren und abzählbar $\mathscr{H}^n$-rektifizierbaren Mengen genau die $\mathscr{L}^n$-messbaren Mengen; die $\mathscr{H}^n$-rektifizierbaren Mengen sind die $\mathscr{L}^n$-endlichen Mengen.*

Im allgemeinen Fall $0 < k < n$ ist Rektifizierbarkeit eine schwache Bedingung an die Regularität der Menge; man denke an die folgenden Beispiele:

Definition 0.60 (Lipschitz-k-Graphen)**.** *Sei A eine $\mathscr{H}^k$-messbare Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. A heißt ein* **Lipschitz-k-Graph***, wenn es einen k-dimensionalen Unterraum T von $\mathbb{R}^n$ mit orthogonalem Komplement $T^\perp$ und eine Lipschitz-stetige Abbildung $g : T \to T^\perp$ mit*

$$A \subset \{x + g(x) \,:\, x \in T\}.$$

Beispiele.

- *Jeder Lipschitz-k-Graph ist k-rektifizierbar.*
- *Ist $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ eine abzählbare dichte Teilmenge von S^1, so ist $A := \bigcup_{i=1}^\infty \mathbb{R}x_i$ eine abzählbar 1-rektifizierbare Menge in $\mathbb{R}^2$. Allerdings ist A nicht $\mathscr{H}^1$-endlich, auch nicht lokal; daher ist A nicht $\mathscr{H}^1$-rektifizierbar und $\mathbb{1}_A \cdot \mathscr{H}^1$ kein Radon-Maß.*
- *Ist $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ eine abzählbare dichte Teilmenge von $]0,1[^2$ und $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine positive Nullfolge mit $\sum_{i=1}^\infty r_i < \infty$, so ist $\bigcup_{i=1}^\infty S^1_{r_i}(x_i)$ eine $\mathscr{H}^1$-rektifizierbare Menge in $\mathbb{R}^2$.*
- *Als rein $\mathscr{H}^k$-unrektifizierbare Mengen bezeichnet man $\mathscr{H}^k$-messbare Mengen A mit $\mathscr{H}^k(A \cap f(\mathbb{R}^k)) = 0$ für jede Lipschitz-Abbildung $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$. Extreme Beispiele von nicht abzählbar $\mathscr{H}^k$-rektifizierbaren Mengen sind $\mathscr{H}^k$-unrektifizierbare Mengen mit positivem $\mathscr{H}^k$-Maß; ein konkretes Beispiel einer derartige Menge für $k = 1$ und $n = 2$ ist die Kochsche Schneeflocken-Kurve[14].*
- *Die Begriffe in Definition 0.57 sind i. A. alle verschieden, denn es gibt Beispiele von $\mathscr{H}^1$-Nullmengen, die nicht abzählbar 1-rektifizierbar sind. Tatsächlich liefert [28, 2.10.29] eine Serie von Beispielen Cantor-artiger Teilmengen C_i von $[0,1]$ mit $\mathscr{H}^1(C_i \times C_i) = 0$ für $i = 1, 2$ und $\mathscr{H}^2(C_1 \times C_1 \times C_2 \times C_2) = \infty$. Andererseits ist aber $\mathscr{H}^2(A \times B) = 0$ für jede $\mathscr{H}^1$-Nullmenge A und jede abzählbar 1-rektifizierbare Menge B, weil stets $\mathscr{H}^2(A \times \mathbb{R}) = 0$ gilt. Somit kann $C_2 \times C_2$ nicht abzählbar 1-rektifizierbar sein.*

Zur späteren Verwendung halten wir noch fest:

Lemma 0.61. *Sei A eine $\mathscr{L}^k$-messbare Teilmenge von $\mathbb{R}^k$. Dann existieren abzählbar viele paarweise disjunkte kompakte Teilmengen K_1, K_2, K_3, ... von A mit*

$$\mathscr{L}^k\Big(A \setminus \bigcup_{i=1}^\infty K_i\Big) = 0.$$

[14] Diese Kurve hat sogar Hausdorff-Dimension $\frac{\ln 4}{\ln 3} > 1$ und somit unendliches $\mathscr{H}^1$-Maß.

Beweis. Wir erinneren daran, dass für jede $\mathscr{L}^k$-messbare Menge E gilt

$$\mathscr{L}^k(E) = \sup\{\mathscr{L}^k(K) \,:\, K \text{ kompakte Teilmenge von } E\}.$$

Zum Beweis des Lemmas nehmen wir nun o. E. $\mathscr{L}^k(A) < \infty$ an. Gemäß der vorausgehenden Gleichung gibt es ein Kompaktum $K_1 \subset A$ mit $\mathscr{L}^k(A \setminus K_1) \leq \frac{1}{2}\mathscr{L}^k(A)$. Weiter gibt es ein Kompaktum $K_2 \subset A \setminus K_1$ mit $\mathscr{L}^k(A \setminus (K_1 \cup K_2)) \leq \frac{1}{2}\mathscr{L}^k(A \setminus K_1)$ und ein Kompaktum $K_3 \subset A \setminus (K_1 \cup K_2)$ mit $\mathscr{L}^k(A \setminus (K_1 \cup K_2 \cup K_3) \leq \frac{1}{2}\mathscr{L}^k(A \setminus (K_1 \cup K_2))$. Setzen wir diese Konstruktion induktiv fort erhalten wir offensichtlich Kompakta mit den behaupteten Eigenschaften. □

Lemma 0.62. *Ist A abzählbar $\mathscr{H}^k$-rektifizierbar in $\mathbb{R}^n$, so gibt es abzählbar viele Kompakta $K_1, K_2, K_3, \ldots$ in $\mathbb{R}^k$ und abzählbar viele biLipschitz-Abbildungen $f_1, f_2, f_3, \ldots : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ derart, dass die Bilder $f_i(K_i)$ paarweise disjunkte (!) Teilmengen von A sind mit*

$$\mathscr{H}^k\Big(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} f_i(K_i)\Big) = 0.$$

Beweis. Wir können annehmen, dass $A \subset f(\mathbb{R}^k)$ für eine biLipschitz-Abbildung $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ gilt (ansonsten zerlege A in eine Nullmenge und abzählbar viele disjunkte Teilmengen mit dieser Eigenschaft). Nach Lemma 0.61 gibt es abzählbar viele kompakte Teilmengen $K_1, K_2, \ldots$ des Urbilds $f^{-1}(A)$ mit

$$\mathscr{L}^k\Big(f^{-1}(A) \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i\Big) = 0.$$

Folglich sind die $f(K_i)$ disjunkt in A und gemäß (0.12) folgt

$$\mathscr{H}^k\Big(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} f(K_i)\Big) = 0. \qquad \square$$

Die theoretische Bedeutung des Rektifizierbarkeitsbegriffs liegt hauptsächlich in den folgenden zwei Charakterisierungen: Die erste beruht auf den sogenannten k-dimensionalen Dichten. Die zweite und für uns wichtigere beschreibt Rektifizierbarkeit durch die Existenz sogenannter approximativer Tangentialräume.

0.7.1 Rektifizierbarkeit und Dichte

Wir setzen nun $\omega_k := \mathscr{L}^k(B_1^k)$; dann gilt also

$$\mathscr{L}^k(B_r^k(x)) = \omega_k r^k$$

für alle $x \in \mathbb{R}^k$ und $r > 0$.

Definition 0.63 (k-dimensionale Dichte)**.** *Für eine $\mathscr{H}^k$-messbare Teilmenge A von Ω und $x \in \Omega$ definieren wir die* **obere *k*-dimensionale Dichte** *von A bei x*

$$\Theta_k^*(A, x) := \limsup_{r \searrow 0} \frac{\mathscr{H}^k(A \cap \overline{B_r^n(x)})}{\omega_k r^k}$$

und die **untere k-dimensionale Dichte** *von A bei x*

$$\Theta_{*k}(A,x) := \liminf_{r\searrow 0} \frac{\mathscr{H}^k(A\cap \overline{B_r^n(x)})}{\omega_k r^k}.$$

Gilt $\Theta_{*k}(A,x) = \Theta_k^*(A,x)$ so bezeichnen wir den gemeinsamen Wert mit $\Theta_k(A,x)$ und nennen ihn die **k-dimensionale Dichte** *von A bei x.*

Man beachte, dass alle Dichten $\mathscr{H}^k$-messbar in x sind.

Satz 0.64. *Sei A lokal $\mathscr{H}^k$-endlich in $\mathbb{R}^n$. Dann gilt*

$$2^{-k}\mathbb{1}_A(x) \le \Theta_k^*(A,x) \le \mathbb{1}_A(x) \qquad \text{für } \mathscr{H}^k\text{-fast-alle } x\in\mathbb{R}^n$$

(insbesondere existiert $\Theta_k(A,x) = 0$ für $\mathscr{H}^k$-fast alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$).

Beweis. Es reicht, die Behauptung im Falle $A \subset B_R$ (man beachte, dass A somit insbesondere $\mathscr{H}^k$-endlich ist) für alle $x \in B_R$ zu zeigen. Wir zeigen dazu zunächst, dass für jede $\mathscr{H}^k$-messbare Teilmenge E von B_R und jedes $0 < t < \infty$ gelten:

$$\Theta_k^*(A,x) \ge t \text{ auf } E \implies \mathscr{H}^k(A\cap E) \ge t\mathscr{H}^k(E), \tag{0.13}$$
$$\Theta_k^*(A,x) \le t \text{ auf } E \implies \mathscr{H}^k(A\cap E) \le 2^k t\mathscr{H}^k(E). \tag{0.14}$$

Zum Beweis von (0.13) überlegt man sich zunächst, dass $\mathscr{H}^k(E) < \infty$ gilt (wir führen diesen Schrittes nicht aus, da er genau wie das folgende Argument verläuft, nur mit dem Überdeckungssatz von Besicovitch anstelle des Satzes von Vitali). Wir fixieren jetzt eine offene Obermenge $\tilde{E}$ von E und ein $0 < \delta < t$. Dann verwenden wir den Überdeckungssatz von Vitali für das Radon-Maß $\mathbb{1}_E \cdot \mathscr{H}^k$, um eine Familie von abzählbar vielen disjunkten abgeschlossenen Kugeln B_1, B_2, ... mit den folgenden Eigenschaften zu erhalten:

- $\frac{1}{2}\mathrm{diam}(B_i) < \delta$, $B_i \subset \tilde{E}$;
- $\mathscr{H}^k(A\cap B_i) \ge (t-\delta)\omega_k r_i^k$ (benutzt die Voraussetzung an E);
- $\mathscr{H}^k(E \setminus \bigcup_{i=1}^\infty B_i) = 0$.

Es folgen $\mathscr{H}_\delta^k(E \setminus \bigcup_{i=1}^\infty B_i) = 0$ und

$$\mathscr{H}_\delta^k(E) \le \sum_{i=1}^\infty \omega_k r_i^k \le \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{t-\delta}\mathscr{H}^k(A\cap B_i) \le \frac{1}{t-\delta}\mathscr{H}^k(A\cap\tilde{E});$$

lassen wir nun zunächst δ gegen 0 gehen und approximieren dann E durch offene Obermengen $\tilde{E}$, so erhalten wir (0.13). Für (0.14) fixieren wir $\delta > 0$ und $j \in \mathbb{N}$ und betrachten die Menge

$$E_j := \{x\in E \,:\, \mathscr{H}^k(A\cap\overline{B_r(x)}) \le (t+\delta)\omega_k r^k \text{ für alle } 0<r<\tfrac{2}{j}\} \subset E.$$

Dann gibt es nach Definition des Hausdorff-Maßes abzählbar viele Kugeln $B_{r_1}(x_1)$, $B_{r_2}(x_2)$, ... mit Radien $r_i < \frac{1}{j}$, so dass gelten

$$E_j \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{B_{r_i}(x_i)},$$
$$\sum_{i=1}^{\infty} \omega_k r_i^k \leq \mathscr{H}^k_{\frac{1}{j}}(E_j) + \frac{1}{j}.$$

Durch Weglassen von Kugeln können wir annehmen, dass jede Kugel $\overline{B_{r_i}(x_i)}$ ein $y_i \in E_j$ enthält und es folgt

$$\begin{aligned}\mathscr{H}^k(A \cap E_j) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathscr{H}^k(A \cap \overline{B_{r_i}(x_i)}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathscr{H}^k(A \cap \overline{B_{2r_i}(y_i)}) \\ &\leq (t+\delta) \sum_{i=1}^{\infty} \omega_k (2r_i)^k \leq 2^k (t+\delta) \mathscr{H}^k_{\frac{1}{j}}(E_j) + \frac{1}{j} \leq 2^k (t+\delta) \mathscr{H}^k(E) + \frac{1}{j}.\end{aligned}$$

Da $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = E$ nach Voraussetzung an E gilt, gibt Grenzübergang $j \to \infty$

$$\mathscr{H}^k(A \cap E) \leq 2^k (t+\delta) H^k(E)$$

und mit $\delta \searrow 0$ folgt die Behauptung (0.14). Schließlich folgern wir die Behauptungen des Lemmas aus (0.13) und (0.14): Dazu verwenden wir zuerst (0.13) mit $E_t := \{x \in B_R : \Theta^*_k(A,x) \geq t\}$; wir erhalten $\mathscr{H}^k(E_t) \geq \mathscr{H}^k(A \cap E_t) \geq t\mathscr{H}^k(E_t)$ und somit $\mathscr{H}^k(E_t) = 0$ für $t > 1$, also $\Theta^*_k(A,x) \leq 1$ für $\mathscr{H}^k$-fast-alle $x \in B_R$. Als nächstes benutzen wir (0.13) mit $E'_t := E_t \setminus A$ und bekommen $0 = \mathscr{H}^k(A \cap E'_t) \geq t\mathscr{H}^k(E'_t)$, also $\mathscr{H}^k(E'_t) = 0$ für $t > 0$ und $\Theta^*_k(A,x) = 0$ für $\mathscr{H}^k$-fast-alle $x \in B_R \setminus A$. Schließlich wenden wir (0.14) auf $E''_t := \{x \in A : \Theta^*_k(A,x) \leq t\}$ an und finden $\mathscr{H}^k(E''_t) \leq 2^k t \mathscr{H}^k(E''_t)$, also $\mathscr{H}^k(E''_t) = 0$ für $t < 2^{-k}$ und $\Theta^*_k(A,x) \geq 2^{-k}$ für $\mathscr{H}^k$-fast-alle $x \in A$. Somit sind alle Behauptungen gezeigt. □

Im den Fällen $k = 0$ und $k = n$ gilt tatsächlich mehr, nämlich $\Theta_k(A,x) = \mathbb{1}_A(x)$ für $\mathscr{H}^k$-fast alle $x \in \mathbb{R}^n$. Für $0 < k < n$ liegt nun der entscheidende Punkt darin, dass dies für $0 < k < n$ nur unter Voraussetzung der Rektifizierbarkeit gilt; tatsächlich gilt folgender Satz, den wir der Vollständigkeit halber erwähnen, aber weder benutzen noch beweisen werden.

Satz 0.65 (von Besicovitch-Marstrand-Mattila). *Eine lokal $\mathscr{H}^k$-endliche Teilmenge A von $\mathbb{R}^n$ ist genau dann abzählbar $\mathscr{H}^k$-rektifizierbar, wenn*

$$\Theta_k(A,x) = 1_A(x) \qquad \text{für } \mathscr{H}^k\text{-fast-alle } x \in \mathbb{R}^n$$

gilt. □

In weitgehender Verallgemeinerung des letzten Satzes beschreibt ein berühmter Satz von Preiss auch die Rektifizierbarkeitseigenschaften von Radon-Maßen durch die Existenz von Dichten.

0.7.2 Tangentialmaß und approximativer Tangentialraum

Für $\mu \in RM_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $x \in \Omega$ und $r > 0$ definieren wir ein Maß $\mu_{x,r}$ auf $\frac{1}{r}(\Omega - x)$ durch

$$\mu_{x,r} := H^{x,r}{}_{\#}\mu$$

mit der Homothetie $H^{x,r}$ zu

$$H^{x,r}(y) := \frac{y-x}{r}. \tag{0.15}$$

Es gilt also

$$\mu_{x,r}(A) = \mu(x + rA) \qquad \text{für } A \in \mathscr{B}(\tfrac{1}{r}(\Omega - x)).$$

Anschaulich bedeutet dies, dass die Maße $\mu_{x,r}$ für $0 < r \ll 1$ das Verhalten von μ nahe x in extremer Vergrößerung wiedergeben; folglich erhält man durch Grenzübergang $r \searrow 0$ Informationen über lokale Eigenschaften von μ bei x.

Definition 0.66 (Tangentialmaße, approximativer Tangentialraum an Maße)**.** *Es seien $\mu \in RM_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ und $x \in \Omega$. Wenn die reskalierten Maße $r^{-k}\mu_{x,r}$ bei $r \searrow 0$ lokal schwach-$*$ in $RM_{\mathrm{lok}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$ gegen ein Grenzmaß ν konvergieren, so nennen wir ν das* **Tangentialmaß** $\mathrm{Tan}^k(\mu, x)$ *an μ bei x. Ist $\mathrm{Tan}^k(\mu, x) = \theta \mathbb{1}_T \cdot \mathscr{H}^k$ für $0 \neq \theta \in \mathbb{R}^N$ und einen k-dimensionalen Unterraum T von $\mathbb{R}^n$, so sagen wir, dass μ in x den* **approximativen Tangentialraum** *T hat, mit Vielfachheit θ.*

Bemerkung 0.67.

- *Falls sie existieren, sind das Tangentialmaß, der approximative Tangentialraum und seine Vielfachheit eindeutig bestimmt.*
- Tan^k *ist* **linear im ersten Argument**.
- *Ausgeschrieben bedeutet die lokale schwach-$*$-Konvergenz in der Definition gerade*

  $$r^{-k} \int_\Omega \varphi\left(\frac{y-x}{r}\right) \cdot d\mu(y) \underset{r \searrow 0}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\nu \qquad \text{für alle } \varphi \in C^0_{\mathrm{kpt}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N).$$

- *Jedes Tangentialmaß ν ist* **homogen vom Grad** $\boldsymbol{k}$ *im Sinne von*

  $$\nu(sA) = s^k \nu(A) \qquad \text{für alle } A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \text{ und } s \geq 0.$$

  Für $s > 0$ sieht man dies sieht man aus $\nu_{0,s} = \lim_{r \searrow 0} r^{-k}(\mu_{x,r})_{0,s} = s^k \lim_{r \searrow 0}(rs)^{-k}\mu_{x,rs} = s^k\nu$, wobei die Limites als lokale schwach-$*$-Konvergenz zu interpretieren sind; für $s = 0$ folgt es dann durch Grenzübergang.

Lemma 0.68. *Seien $\mu, \nu \in RM_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ und $x \in \Omega$ und es gelte*

$$\lim_{r \searrow 0} r^{-k}|\mu - \nu|(B_r(x)) = 0.$$

Dann existiert $\mathrm{Tan}^k(\mu, x)$ genau dann, wenn $\mathrm{Tan}^k(\nu, x)$ existiert, und im Existenzfalle gilt

$$\mathrm{Tan}^k(\mu, x) = \mathrm{Tan}^k(\nu, x).$$

Insbesondere sind Tangentialmaße **lokal bestimmt**.

Beweis. Es gilt

$$r^{-k}\int_\Omega \varphi\left(\frac{y-x}{r}\right)\cdot d\mu(y) - r^{-k}\int_\Omega \varphi\left(\frac{y-x}{r}\right)\cdot d\nu(y) \xrightarrow[r\searrow 0]{} 0.$$

Daher folgt die Behauptung aus der vorigen Bemerkung und dem Rieszschen Darstellungssatz. □

Definition 0.69 (Lebesgue-Punkte und -Werte)**.** *Seien μ ein nichtnegatives Radon-Maß μ auf Ω und $f \in L^1_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N; \mu)$. Ein Punkt $x \in \Omega$ heißt ein* **Lebesgue-Punkt** *von f bezüglich μ, wenn $\mu(B_r(x)) > 0$ für $0 < r \ll 1$ gilt und es ein $y \in \mathbb{R}^N$ gibt mit*

$$⨍_{B_r(x)} |f-y|\, d\mu \xrightarrow[r\searrow 0]{} 0.$$

Dabei ist y eindeutig bestimmt und wird als der **Lebesgue-Wert** *$f(x)$ von f an der Stelle x bezeichnet.*

Satz 0.70. *Für ein nichtnegatives Radon-Maß μ auf Ω und $f \in L^1_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N; \mu)$ sei $x \in \Omega$ ein Lebesgue-Punkt von f bezüglich μ mit Lebesgue-Wert $f(x)$. Dann gelten:*

- *Existiert $\mathrm{Tan}^k(\mu, x)$, so existiert auch $\mathrm{Tan}^k(f\cdot\mu, x)$;*
- *ist $f(x) \neq 0$ und existiert $\mathrm{Tan}^k(f\cdot\mu, x)$, so existiert auch $\mathrm{Tan}^k(\mu, x)$;*

und in beiden Fällen gilt

$$\mathrm{Tan}^k(f\cdot\mu, x) = f(x)\mathrm{Tan}^k(\mu, x).$$

Beweis. Wir berechnen zunächst

$$\begin{aligned} r^{-k}|f\cdot\mu - f(x)\mu|(B_r(x)) &= r^{-k}|(f-f(x))\cdot\mu|(B_r(x)) \\ &= r^{-k}|f-f(x)|\cdot\mu(B_r(x)) \\ &= r^{-k}\mu(B_r(x))⨍_{B_r(x)} |f-f(x)|\, d\mu \end{aligned}$$

Zeigen wir nun noch

$$\limsup_{r\searrow 0} r^{-k}\mu(B_r(x)) < \infty, \tag{0.16}$$

so erhalten wir die behaupteten Existenzaussagen und

$$\mathrm{Tan}^k(f\cdot\mu, x) = \mathrm{Tan}^k(f(x)\mu, x) = f(x)\mathrm{Tan}^k(\mu, x)$$

aus dem vorigen Lemma. Zum Nachweis von (0.16) nehmen wir zunächst an, dass $\mathrm{Tan}^k(\mu, x)$ existiert; also konvergieren nach Bemerkung 0.39 (3) die Maße $r^{-k}\mu_{x,r}|_{B_1}$ bei $r \searrow 0$ schwach-$*$ in $RM(B_1)$. Da $\mu(B_r(x)) = \mu_{x,r}(B_1)$ gilt, folgt (0.16) in diesem Fall aus dem ersten Teil von Proposition 0.32. Schließlich behandeln wir den verbleibenden Fall, nehmen also an, dass $f(x) \neq 0$ gilt und $\operatorname{Tan}^k(f \cdot \mu, x)$ existiert. Dann gelten

$$\begin{aligned} r^{-k}|f \cdot \mu|(B_r(x)) &= r^{-k}\mu(B_r(x)) \fint_{B_r(x)} |f| \, d\mu \\ &\geq r^{-k}\mu(B_r(x)) \left[|f(x)| - \fint_{B_r(x)} |f - f(x)| \, d\mu \right] \\ &\overset{0<r\ll 1}{\geq} \frac{1}{2}|f(x)| r^{-k}\mu(B_r(x)) \end{aligned}$$

und (mit denselben Argumenten wie zuvor) $\limsup_{r\searrow 0} r^{-k}|f \cdot \mu|(B_r(x)) < \infty$. Also folgt (0.16) auch in diesem Fall. □

Wenden wir den vorigen Satz auf die Polarzerlegung von Vektormaßen an, so erhalten wir:

Korollar 0.71 (**Polarzerlegung von Tangentialmaßen**). *Zu jedem $\mu \in RM_{\text{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ gibt es eine $|\mu|$-Nullmenge E, so dass für alle $x \in \Omega \setminus E$ gilt:* $\operatorname{Tan}^k(\mu, x)$ *existiert genau dann, wenn* $\operatorname{Tan}^k(|\mu|, x)$ *existiert, und im Existenzfalle ist* $\operatorname{Tan}^k(\mu, x)$ *gegeben durch die Multiplikation des nichtnegativen Maßes* $\operatorname{Tan}^k(|\mu|, x)$ *mit einem Einheitsvektor.* □

Im Folgenden wollen wir die Existenz von $\operatorname{Tan}^k(f\mathbb{1}_A \cdot \mathscr{H}^k, x)$ für geeignete k-dimensionale Teilmengen A von $\mathbb{R}^n$ und Dichten $f \in L^1_{\text{lok}}(A, \mathbb{R}^N; \mathscr{H}^k)$ untersuchen. Da sich der allgemeine Fall mit Satz 0.70 darauf zurückführen lässt, beschränken wir uns im Folgenden auf $N = 1$ und $f \equiv 1$. Wir halten fest, dass $\operatorname{Tan}^k(\mathbb{1}_A \cdot \mathscr{H}^k, x)$ (falls existent) ein nichtnegatives Maß und die Vielfachheit eines approximativen Tangentialraums stets positiv ist und befassen uns nun mit der trivialen Situation $x \notin A$.

Lemma 0.72. *Sei A eine lokal $\mathscr{H}^k$-endliche Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Dann gilt*

$$\operatorname{Tan}^k(\mathbb{1}_A \cdot \mathscr{H}^k, x) = 0$$

für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\Theta_k(A, x) = 0.$$

Insbesondere ist dies für $\mathscr{H}^k$-fast-alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ und alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{A}$ der Fall.

Beweis. Ist $\Theta_k(A, x) = 0$ und $\varphi \in C^0_{\text{kpt}}(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{spt} \varphi \subset B_R$, so folgt

$$\left| r^{-k} \int_A \varphi\left(\frac{y - x}{r}\right) \cdot d\mathscr{H}^k(y) \right| \leq \frac{\mathscr{H}^k(A \cap \overline{B_{rR}(x)})}{r^k} \sup_{\mathbb{R}^n} |\varphi| \xrightarrow[r\searrow 0]{} 0.$$

Also ist nach Bemerkung 0.67 schon $\operatorname{Tan}^k(\mathbb{1}_A \cdot \mathscr{H}^k, x) = 0$. Außerdem gilt $\Theta_k(A, x) = 0$ nach Satz 0.64 für $\mathscr{H}^k$-fast-alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ und $\Theta_k(F, x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{A}$ gilt trivial. □

Als nächstes behandeln wir den Fall $x \in A$. Dazu fixieren wir für den folgenden Satz und seine Korollare eine offene Teilmenge U von $\mathbb{R}^k$, ein $S \in \mathscr{K}(U)$ und eine injektive Lipschitz-Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^n$. Wir setzen

$$A := f(S)$$

und bemerken $\mathscr{H}^k(A) \leq (\operatorname{Lip} f)^k \mathscr{L}^k(S) < \infty$; daher ist $\mathbb{1}_A \cdot \mathscr{H}^k$ ein endliches Radon-Maß. Wir erinnern daran, dass die totale Ableitung ∇f von f nach dem **Satz von Rademacher** $\mathscr{L}^k$-fast-überall in S existiert. Außerdem gilt die Flächenformel für die Parametrisierung von A durch die Lipschitz-Abbildung f (mit der $\mathscr{L}^k$-fast-überall definierten Jacobischen $Jf := \det(\nabla f^T \nabla f)$ von f).

Satz 0.73. *Sei $s \in S$ ein Punkt mit folgenden Eigenschaften:*

- *f ist an der Stelle s total differenzierbar;*
- *$\nabla f(s)$ hat vollen Rang;*
- *s ist ein Lebesgue-Punkt von $\mathbb{1}_S Jf$ bezüglich $\mathscr{L}^k$ (mit Lebesgue-Wert $Jf(s)$).*

Dann existiert das Tangentialmaß an $\mathbb{1}_A \cdot \mathscr{H}^k$ an der an der Stelle $x := f(s) \in A$ und es gilt

$$\operatorname{Tan}^k(\mathbb{1}_A \cdot \mathscr{H}^k, x) = \mathbb{1}_{\operatorname{Im}(\nabla f(s))} \cdot \mathscr{H}^k,$$

wobei wir $\operatorname{Im} \nabla f(s) := \{\nabla f(s)v \, : \, v \in \mathbb{R}^k\}$ *abgekürzt haben.*

Beweis. Da $\nabla f(s)$ nach Voraussetzung vollen Rang k hat ist die symmetrische $(k \times k)$-Matrix $\nabla f(s)^T \nabla f(s)$ positiv definit, also $|\nabla f(s)v|^2 = v \cdot \nabla f(s)^T \nabla f(s) v \geq \lambda^2 |v|^2$ für ein $\lambda > 0$ und alle $v \in \mathbb{R}^k$. Da f bei s total differenzierbar ist, können wir $\varepsilon > 0$ klein genug wählen, dass

$$|f(y) - f(s) - \nabla f(s)(y - s)| \leq \frac{1}{2}\lambda |y - s| \qquad \text{für alle } y \in B_\varepsilon(s) \subset U \tag{0.17}$$

gilt. Wir führen die Menge $A_\varepsilon := f(B_\varepsilon(s))$ und die Lipschitz-Parametrisierungen

$$P_r : B_{\varepsilon/r} \to \mathbb{R}^n, v \mapsto \tfrac{1}{r}(f(s + rv) - f(s))$$

von $\frac{1}{r}(A_\varepsilon - x)$ ein. Außerdem fixieren wir ein $\varphi \in C^0_{\mathrm{kpt}}(\mathbb{R}^n)$ und zeigen:

Zwischenbehauptungen.

(1) P_r konvergiert bei $r \searrow 0$ lokal gleichmäßig auf $\mathbb{R}^n$ gegen die lineare Abbildung $\nabla f(s)$;

(2) $JP_r(v) = Jf(s + rv)$ für $\mathscr{L}^k$-fast-alle $v \in B_{\varepsilon/r}$;

(3) $\mathbb{1}_A(x + P_r(v)) = \mathbb{1}_S(s + rv)$ für $\mathscr{L}^k$-fast-alle $v \in B_{\varepsilon/r}$

(4) Die Urbilder von $\operatorname{spt}\varphi$ unter P_r bleiben bei $r \searrow 0$ beschränkt, genauer $B_{\varepsilon/r} \cap \{P_r \in \operatorname{spt}\varphi\} \subset B_{2R/\lambda}$ für alle $r > 0$, falls $\operatorname{spt}\varphi \subset B_R$ gilt.

Tatsächlich ist (1) eine Umformulierung der totalen Differenzierbarkeit von f in s und (2) und (3) folgen sofort durch Nachrechnen. Für (4) sei $v \in B_{\varepsilon/r}$ mit $P_r(v) \in \operatorname{spt}\varphi$, also insbesondere $|P_r(v)| \leq R$. Gemäß (0.17) ist $|P_r(v) - \nabla f(s)v| \leq \frac{1}{2}\lambda|v|$ und folglich

$$R \geq |P_r(v)| \geq |\nabla f(s)v| - \tfrac{1}{2}\lambda|v| \geq \tfrac{1}{2}\lambda|v|,$$

also $|v| \leq 2R/\lambda$, und die Zwischenbehauptungen sind gezeigt. Daher erhalten wir mit der Flächenformel und den Teilen (3) und (4) der Zwischenbehauptung

$$\begin{aligned} r^{-k}\int_{A_\varepsilon} \varphi\left(\frac{y-x}{r}\right)\mathbb{1}_A(y)\,d\mathscr{H}^k(y) &= \int_{\frac{1}{r}(A_\varepsilon - x)} \varphi(y)\mathbb{1}_A(x+ry)\,d\mathscr{H}^k(y) \\ &= \int_{B_{\varepsilon/r}} \varphi(P_r(v))\mathbb{1}_S(s+rv)JP_r(v)\,dv \\ &\overset{0<r\ll 1}{=} \int_{B_{2R/\lambda}} \varphi(P_r(v))Jf(s)\,dv \\ &\quad + \int_{B_{2R/\lambda}} \varphi(P_r(v))\big[\mathbb{1}_S(s+rv)JP_r(v) - Jf(s)\big]\,dv \end{aligned} \tag{0.18}$$

Da φ gleichmäßig stetig ist, erhalten wir aus (1) die Konvergenz $\varphi(P_r(v)) \xrightarrow[r\searrow 0]{} \varphi(\nabla f(s)v)$ gleichmäßig in $v \in B_{2R/\lambda}$; folglich konvegiert das erste Integral auf der rechten Seite von (0.18) gegen

$$\int_{B_{2R/\lambda}} \varphi(\nabla f(s)v)Jf(s)\,dv.$$

Das zweite Integral können wir mit (2) abschätzen durch

$$\mathscr{L}^k(B_{2R/\lambda}) {\int\!\!\!\!\!\!-}_{B_{2rR/\lambda}(s)} \big|\mathbb{1}_S Jf - Jf(s)\big|\,d\mathscr{L}^k \sup_{\mathbb{R}^n}|\varphi|;$$

da $s \in S$ ein Lebesgue-Punkt von $\mathbb{1}_S Jf$ ist, konvergiert es folglich gegen 0. Insgesamt haben wir somit

$$r^{-k}\int_{A_\varepsilon} \varphi\left(\frac{y-x}{r}\right)\mathbb{1}_A(y)\,d\mathscr{H}^k(y) \xrightarrow[r\searrow 0]{} \int_{B_{2R/\lambda}} \varphi(\nabla f(s)v)Jf(s)\,dv$$

gezeigt. Erinnern wir uns an $|\nabla f(s)v| \geq \lambda|v|$ und $\operatorname{spt}\varphi \subset B_R$, so können wir den Integrationsbereich in der rechten Gleichung durch $\mathbb{R}^k$ ersetzen. Außerdem zeigt lineare Transformation

$$\int_{\mathbb{R}^k} \varphi(\nabla f(s)v)Jf(s)\,dv = \int_{\operatorname{Im}\nabla f(s)} \varphi\,d\mathscr{H}^k$$

und gemäß Bemerkung 0.67 bedeuten die letzten beiden Gleichungen zusammen

$$\operatorname{Tan}(\mathbb{1}_{A_\varepsilon \cap A}\cdot\mathscr{H}^k, x) = \mathbb{1}_{\operatorname{Im}\nabla f(s)}\cdot\mathscr{H}^k. \tag{0.19}$$

Jetzt überlegen wir, dass ein $\delta > 0$ gibt mit $A \cap B_\delta(x) \subset A_\varepsilon$. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so gäbe es $x_i \in A \setminus A_\varepsilon$ mit $\lim_{i\to\infty} x_i = x$. Es wäre $x_i = f(s_i)$ für gewisse $s_i \in S \setminus B_\varepsilon(s)$ und wegen der Kompaktheit von $\overline{S}$ hätte $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt $\tilde{s} \in \overline{S} \setminus B_\varepsilon(s)$; folglich $f(\tilde{s}) = x = f(s)$ und (in Anbetracht der Injektivität von f) schon $\tilde{s} = s$. Widerspruch! Also existiert ein δ mit obiger Eigenschaft. Dies bedeutet $A \cap B_\delta(x) = A_\varepsilon \cap A \cap B_\delta(x)$ und aus Lemma 0.68 erhalten wir die Gleichheit $\mathrm{Tan}(\mathbb{1}_A \cdot \mathscr{H}^k, x) = \mathrm{Tan}(\mathbb{1}_{A_\varepsilon \cap A} \cdot \mathscr{H}^k, x)$. Unter Berücksichtigung von (0.19) folgt die Behauptung. □

Korollar 0.74 (**Tangentialraum an Untermannigfaltigkeiten**). *Ist S offen, f stetig differenzierbar auf S und hat ∇f vollen Rang auf S, dann hat $\mathbb{1}_A \cdot \mathscr{H}^k$ in jedem Punkt $x = f(s) \in A$ den klassischen Tangentialraum $T_x(A) := \mathrm{Im}\,\nabla f(s)$ als approximativen Tangentialraum, mit Vielfachheit 1.*

Beweis. Unter den Voraussetzungen des Korollars erfüllt offenbar jeder Punkt $s \in S$ die Anforderungen von Satz 0.73. □

Beispiel. *Sei $k = n - 1 \geq 1$ und $x \in \mathbb{R}^n$ mit $r = |x| > 0$. Dann hat $\mathbb{1}_{S_r(x) \cup S_r(-x)} \cdot \mathscr{H}^{n-1}$ in 0 das orthogonale Komplement $\{x\}^\perp$ von x als approximativen Tangentialraum, mit Vielfachheit 2.*

Beweis. Gemäß dem vorausgehenden Korollar (und der Lokalitätseigenschaft) ist $\mathrm{Tan}^{n-1}(\mathbb{1}_{S_r(x)}, 0) = \mathrm{Tan}^{n-1}(\mathbb{1}_{S_r(-x)}, 0) = \mathbb{1}_{\{x\}^\perp}$. Für $y \neq 0$, also $\mathscr{H}^{n-1}$-fast-alle y, gilt $\mathbb{1}_{S_r(x)\cup S_r(-x)}(y) = \mathbb{1}_{S_r(x)}(y) + \mathbb{1}_{S_r(-x)}(y)$ und die Behauptung folgt aus der Additivität von Tan^{n-1}. □

Korollar 0.75 (**Tangentialraum an Lipschitz-Bilder**). *Unter obigen Voraussetzungen hat $\mathbb{1}_A \cdot \mathscr{H}^k$ für $\mathscr{H}^k$-fast-alle $x \in A$ einen approximativen Tangentialraum an der Stelle x, mit Vielfachheit 1.*

Beweis. Wir bemerken zunächst $\mathbb{1}_S Jf \in L^1_{\mathrm{lok}}(U)$. Sei nur E die Menge der $s \in S$, für die eine der drei Bedingungen aus Satz 0.73 verletzt ist. Nach dem Satz von Rademacher und Korollar 0.11 sind die erste und die dritte Bedingung für $\mathscr{L}^k$-fast-alle $s \in S$ erfüllt , also gilt $\mathscr{L}^k$-fast-überall auf E schon $Jf = 0$. Unter Verwendung der Flächenformel folgt

$$\mathscr{H}^k(f(E)) = \int_E Jf \, d\mathscr{L}^k = 0.$$

Aber in allen Punkten aus $A \setminus f(E)$ existiert der approximative Tangentialraum an $\mathbb{1}_A \cdot \mathscr{H}^k$ nach Satz 0.73, mit Vielfachheit 1. □

Satz 0.76 (**Tangentialraum an rektifizierbare Mengen**). *Sei A lokal $\mathscr{H}^k$-endlich und abzählbar $\mathscr{H}^k$-rektifizierbar. Dann hat $\mathbb{1}_A \cdot \mathscr{H}^k$ in $\mathscr{H}^k$-fast-allen $x \in A$ einen approximativen Tangentialraum mit Vielfachheit 1.*

Beweis. Wir benutzen zunächst Lemma 0.62 und schreiben $A = N \cup \bigcup_{i=1}^\infty f_i(K_i)$ mit K_i und f_i wie in Lemma 0.62 und einer $\mathscr{H}^k$-Nullmenge N. Aus Korollar 0.75 entnehmen wir, dass $\mathbb{1}_{f_1(K_1)} \cdot \mathscr{H}^k$ für $\mathscr{H}^k$-fast-alle $x \in f_1(K_1)$ einen approximativen Tangentialraum mit Vielfachheit 1 hat. Nach Lemma 0.72 ist außerdem $\operatorname{Tan}^k(\mathbb{1}_{A\setminus f_1(K_1)} \cdot \mathscr{H}^k, x) = 0$ für $\mathscr{H}^k$-fast-alle $x \in f_1(K_1)$. Mit der Linearität von Tan^k folgt, dass $\mathbb{1}_A \cdot \mathscr{H}^k$ in $\mathscr{H}^k$-fast-allen $x \in f_1(K_1)$ einen approximativen Tangentialraum mit Vielfachheit 1 hat. Dasselbe gilt natürlich für $\mathscr{H}^k$-fast-alle $x \in f_i(K_i)$ mit $i \geq 2$ und somit für $\mathscr{H}^k$-fast-alle $x \in A$. Der Beweis ist vollständig. □

Unser nächstes Ziel ist nun ein hinreichendes Kriterium für Rektifizierbarkeit, das ebenfalls auf der Existenz approximativer Tangentialräume beruht. Unter anderem werden wir auch eine Umkehrung des vorigen Satzes beweisen. Wir beginnen mit einigen vorbereitenden Lemmata.

Lemma 0.77. *Für ein nichtnegatives Radon-Maß μ auf Ω und $x \in \Omega$ gelte $\operatorname{Tan}^k(\mu, x) = \theta \mathbb{1}_T \cdot \mathscr{H}^k$ mit einem k-dimensionalen Unterraum T von $\mathbb{R}^n$ und einem $\theta \geq 0$. Dann existiert auch*

$$\lim_{r \searrow 0} \frac{\mu(B_r^n(x))}{\omega_k r^k} = \theta.$$

Beweis. Es gilt $\theta \mathbb{1}_T \cdot \mathscr{H}^k(S_1^{n-1}) = 0$ und wir erhalten mit Proposition 0.40 (2)

$$\frac{\mu(B_r^n(x))}{\omega_k r^k} = \frac{r^{-k}\mu_{x,r}(B_1^n)}{\omega_k} \underset{r \searrow 0}{\longrightarrow} \frac{\theta \mathbb{1}_T \cdot \mathscr{H}^k(B_1^n)}{\omega_k} = \theta \frac{\mathscr{H}^k(T \cap B_1^k)}{\omega_k} = \theta. \qquad \square$$

Jetzt erhalten wir als Nebenprodukt eine der Implikationen in Satz 0.65:

Korollar 0.78. *Sei A lokal $\mathscr{H}^k$-endlich und abzählbar $\mathscr{H}^k$-rektifizierbar. Dann gilt*

$$\Theta_k(A, x) = \mathbb{1}_A(x) \qquad \text{für } \mathscr{H}^k\text{-fast-alle } x \in \mathbb{R}^n. \qquad \square$$

Beweis. Durch Kombination von Satz 0.76 und Lemma 0.77 sehen wir

$$\lim_{r \searrow 0} \frac{\mathscr{H}^k(A \cap B_r(x))}{\omega_k r^k} = 1$$

für $\mathscr{H}^k$-fast-alle $x \in A$. Da dies auch dann richtig bleibt, wenn wir die offenen Kugeln durch abgeschlossene ersetzen, folgt $\Theta_k(A, x) = 1$ für $\mathscr{H}^k$-fast-alle $x \in A$. Unter Berücksichtigung von Satz 0.64 ist somit die Behauptung gezeigt. □

Sei T ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$, dann identifizieren wir T mit der Projektion von $\mathbb{R}^n$ auf T. Für einen positiven Parameter M führen wir die Notation

$$K_M(T) := \{y \in \mathbb{R}^n, |T^\perp y| \leq M|Ty|\}$$

für den Kegel um T mit Öffnung M ein. Dabei bezeichnet $T^\perp$ das orthogonale Komplement von T.

Lemma 0.79. *Sei $k \neq 0$. Für ein nichtnegatives Radon-Maß μ auf Ω und $x \in \Omega$ gelte $\operatorname{Tan}^k(\mu, x) = \theta \mathbb{1}_T \cdot \mathscr{H}^k$ mit einem k-dimensionalen Unterraum T von $\mathbb{R}^n$ und einem $\theta \geq 0$. Dann folgt für alle $M > 0$*

$$r^{-k}\mu(B_r(x) \setminus [x + K_M(T)]) \underset{r \searrow 0}{\longrightarrow} 0.$$

Beweis. Mit Proposition 0.40 erhalten wir

$$\begin{aligned} r^{-k}\mu(B_r(x) \setminus [x + K_M(T)]) &= r^{-k}\mu_{x,r}(B_1 \setminus K_M(T)) \\ &\underset{r\searrow 0}{\longrightarrow} \theta \mathbb{1}_T \cdot \mathscr{H}^k(B_1 \setminus K_M(T)) = 0. \end{aligned}$$ □

Lemma 0.80. *Sei A eine $\mathscr{H}^k$-messbare Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ derart, dass zu jedem $x \in A$ positive Parameter r_x und M_x und ein k-dimensionaler Unterraum T_x von $\mathbb{R}^n$ existieren mit*

$$A \cap B_{r_x}(x) \subset x + K_{M_x}(T_x).$$

Dann ist A abzählbar k-rektifizierbar.

Beweis. Wir nehmen an, dass $r_x \geq r > 0$, $M_x \leq M < \infty$ für alle $x \in A$ gelten. Außerdem nehmen wir an, dass $\operatorname{diam} A \leq r$ und

$$\sup_{y \neq 0} \frac{|(T_x - T)y|}{|y|} < \tfrac{1}{2}(M+1)^{-1} =: \delta$$

für alle $x \in A$ und einen fixierten k-dimensionalen Unterraum T gelten. Alle diese Annahmen lassen sich durch Übergang zu geeigenten Teilmengen realisieren. Für beliebige $x, \tilde{x} \in A$ gilt nun nach Voraussetzung

$$|T_x^\perp(\tilde{x} - x)| \leq M|T_x(\tilde{x} - x)|$$

und folglich

$$\begin{aligned} |T^\perp(\tilde{x} - x)| &\leq |T_x^\perp(\tilde{x} - x)| + \delta|\tilde{x} - x| \\ &\leq M|T_x(\tilde{x} - x)| + \delta|\tilde{x} - x| \\ &\leq M|T(\tilde{x} - x)| + \tfrac{1}{2}|\tilde{x} - x| \\ &\leq (M + \tfrac{1}{2})|T(\tilde{x} - x)| + \tfrac{1}{2}|T^\perp(\tilde{x} - x)|. \end{aligned}$$

Wir schließen auf

$$|T^\perp(\tilde{x} - x)| \leq 2(M + \tfrac{1}{2})|T(\tilde{x} - x)|,$$

was bedeutet, dass die Abbildung

$$T \supset T(A) \to T^\perp, Tx \mapsto T^\perp x$$

eine wohldefinierte, Lipschitz-stetige Abbildung von einer Teilmenge von T nach $T^\perp$ ist. Da sich diese Abbildung zu einer Lipschitz-stetigen Abbildung $T \to T^\perp$ fortsetzen lässt, ist A ein Lipschitz-k-Graph, also abzählbar k-rektifizierbar. □

Satz 0.81. *Sei μ ein nichtnegatives Radon-Maß auf Ω und A eine $\mathscr{H}^k$-messbare Teilmenge von Ω, so dass μ in allen $x \in A$ einen approximativen Tangentialraum hat. Dann ist A abzählbar k-rektifizierbar.*

Beweis. Im Falle $k = 0$ muss für alle $x \in A$ schon $\mu(\{x\}) > 0$ gelten. Daher ist A in diesem Fall höchstens abzählbar und wir können uns nun auf den Fall $k \neq 0$ beschränken. Nach Voraussetzung gibt es zu jedem $x \in A$ einen k-dimensionalen Unterraum T_x von $\mathbb{R}^n$ und ein $\theta_x > 0$ mit

$$\operatorname{Tan}^k(\mu, x) = \theta_x \mathbb{1}_{T_x} \cdot \mathscr{H}^k.$$

Setzen wir nun

$$A_i := \{x \in A : \mu(B_r(x)) \geq \tfrac{1}{i} r^k \text{ für alle } 0 < r < \tfrac{1}{i}\} \subset A,$$

so erhalten wir aus Lemma 0.77

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A$$

und es reicht, zu zeigen, dass die A_i abzählbar k-rektifizierbar sind. Wir fixieren nun $i \in \mathbb{N}$ und behaupten, dass es zu allen $x \in A_i$ ein $r_x > 0$ gibt mit

$$A_i \cap B_{r_x}(x) \subset x + K_2(T_x). \tag{0.20}$$

Wäre dies nämlich falsch, so gäbe es eine Folge $x_l \in A_i \setminus [x + K_2(T_x)]$ mit $x_l \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} x$. Sei

$$r_l := \frac{1}{2\sqrt{5}}|x_l - x|,$$

dann erhalten wir aus dem Satz von Pythagoras und

$$|T_x^{\perp}(x_l - x)| > 2|T_x(x_l - x)|$$

die Ungleichung

$$\frac{1}{2}|T_x^{\perp}(x_l - x)| \geq 2r_l.$$

Weiter gilt für alle $y \in B_{r_l}(x_l)$:

$$|T_x^{\perp}(y - x)| \geq |T_x^{\perp}(x_l - x)| - r_l \geq \frac{1}{2}|T_x^{\perp}(x_l - x)| + r_l > |T_x(x_l - x)|,$$

also

$$B_{r_l}(x_l) \cap [x + K_1(T_x)] = \emptyset.$$

Es folgt

$$\mu(B_{r_l + 2\sqrt{5}r_l}(x) \setminus [x + K_1(T_x)]) \geq \mu(B_{r_l}(x_l)) \overset{l \gg 1}{\geq} \tfrac{1}{i} r_l^k$$

und dies widerspricht der Aussage von Lemma 0.79. Also ist (0.20) gezeigt. Somit können wir Lemma 0.80 auf A_i anwenden und sehen, dass A_i abzählbar k-rektifizierbar ist. □

Korollar 0.82 (Rektifizierbarkeitskriterium für Mengen I). *Sei A lokal $\mathscr{H}^k$-endlich in $\mathbb{R}^n$. Dann ist A genau dann abzählbar $\mathscr{H}^k$-rektifizierbar, wenn $\mathbb{1}_A \cdot \mathscr{H}^k$ in $\mathscr{H}^k$-fast-allen $x \in A$ einen approximativen Tangentialraum (mit Vielfachheit 1) hat.*

Beweis. Eine Implikation ergibt sich aus Satz 0.76, die andere aus Satz 0.81. □

Als nächstes wollen wir den Begriff des approximativen Tangentialraums an eine Menge A einführen. Wir wollen (mit Blick auf spätere Anwendungen) dabei nicht voraussetzen, dass A lokal $\mathscr{H}^k$-endlich ist; folglich ist $\mathbb{1}_A \cdot \mathscr{H}^k$ i. A. kein Radon-Maß und wir können nicht direkt auf die obigen Eigenschaften zurückgreifen. Deshalb beweisen wir zunächst noch ein weiteres Lemma.

Lemma 0.83. *Seien A_1 und A_2 lokal $\mathscr{H}^k$-endliche Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Dann gilt*

$$\mathrm{Tan}^k(\mathbb{1}_{A_1} \cdot \mathscr{H}^k, x) = \mathrm{Tan}^k(\mathbb{1}_{A_2} \cdot \mathscr{H}^k, x) \qquad \text{für } \mathscr{H}^k\text{-fast-alle } x \in A_1 \cap A_2.$$

Beweis. Nach Lemma 0.72 gelten

$$\mathrm{Tan}^k(\mathbb{1}_{A_1} \cdot \mathscr{H}^k - \mathbb{1}_{A_1 \cap A_2} \cdot \mathscr{H}^k, x) = \mathrm{Tan}^k(\mathbb{1}_{A_1 \setminus A_2} \cdot \mathscr{H}^k, x) = 0$$

und folglich

$$\mathrm{Tan}^k(\mathbb{1}_{A_1} \cdot \mathscr{H}^k, x) = \mathrm{Tan}^k(\mathbb{1}_{A_1 \cap A_2} \cdot \mathscr{H}^k, x)$$

für $\mathscr{H}^k$-fast-alle $x \in A_1 \cap A_2$. Durch Vertauschen von A_1 und A_2 gelangt man zur Behauptung. □

Definition 0.84 (Approximativer Tangentialraum an Mengen)**.** *Es seien eine $\mathscr{H}^k$-σ-endliche Teilmenge A von $\mathbb{R}^n$ und eine Zerlegung $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ mit abzählbar vielen paarweise disjunkten $\mathscr{H}^k$-endlichen Mengen A_1, A_2, A_3, … gegeben. Wir definieren den* **approximativen Tangentialraum** $\mathrm{Tan}^k(A, x)$ *an A in $x \in A_i$ als den approximativen Tangentialraum von $\mathbb{1}_{A_i} \cdot \mathscr{H}^k$ in x.*

Bemerkung 0.85. *Während $\mathrm{Tan}^k(A, x)$ an einer einzelnen Stelle $x \in A$ möglicherweise von der Wahl der Zerlegung abhängt, folgt aus Lemma 0.83, dass $\mathrm{Tan}^k(A, x)$ für $\mathscr{H}^k$-fast-alle $x \in A$ unabhängig von der Wahl der Zerlegung und in diesem Sinne* **wohldefiniert** *ist.*

Nun können wir eine Verallgemeinerung von Korollar 0.82 formulieren.

Korollar 0.86 (Rektifizierbarkeitskriterium für Mengen II). *Eine Teilmenge A von $\mathbb{R}^n$ ist genau dann abzählbar $\mathscr{H}^k$-rektifizierbar, wenn sie $\mathscr{H}^k$-σ-endlich ist und $\mathrm{Tan}^k(A, x)$ für $\mathscr{H}^k$-fast-alle $x \in A$ (mit Vielfachheit 1) existiert.*

Beweis. Es ist nicht schwierig zu zeigen, dass abzählbar $\mathscr{H}^k$-rektifizierbare Mengen stets $\mathscr{H}^k$-σ-endlich sind. Daher folgt die Behauptung aus Korollar 0.82, Definition 0.84 und Bemerkung 0.85. □

Als abschließenden Höhepunkt dieses Kapitels erhalten wir schließlich ein Rektifizierbarkeitskriterium für Maße:

Definition 0.87 (Rektifizierbarkeit von Maßen)**.** *Ein nichtnegatives Radon-Maß μ auf Ω heißt* **k-rektifizierbar***, wenn es eine abzählbar k-rektifizierbare Teilmenge A von Ω und eine $\mathscr{H}^k$-messbare Funktion $\theta : A \to (0, \infty)$ gibt mit*

$$\mu = \theta \mathbb{1}_A \cdot \mathscr{H}^k|_\Omega.$$

Satz 0.88 (Rektifizierbarkeitskriterium für Maße). *Sei μ ein nichtnegatives Radon-Maß auf Ω, so dass μ in μ-fast-allen $x \in \Omega$ einen approximativen Tangentialraum mit Vielfachheit $\theta(x)$ hat. Dann ist μ k-rektifizierbar.*

Genauer gesagt ist die Menge

$$A := \{x \in \Omega \, : \, \mu \text{ hat einen approximativen Tangentialraum in } x\}$$

abzählbar k-rektifizierbar und die Funktion $\theta : A \to (0, \infty)$ ist $\mathscr{H}^k$-messbar mit

$$\mu = \theta \mathbb{1}_A \cdot \mathscr{H}^k|_\Omega.$$

Beweis. Nach Voraussetzung ist $\mu(\Omega \setminus A) = 0$ und daher ist A jedenfalls μ-messbar. Es folgt die Existenz einer Borel-Teilmenge $\tilde{A}$ von A mit $\mu(\Omega \setminus \tilde{A}) = 0$. Nach Lemma 0.77 gilt insbesondere

$$\lim_{r \searrow 0} \frac{\mu(B_r(x))}{\omega_k r^k} = \theta(x) \qquad \text{für alle } x \in \tilde{A}.$$

Daraus lesen wir insbesondere ab, dass die Einschränkung von θ auf $\tilde{A}$ Borel-messbar ist. Außerdem schließt man mit dem Überdeckungsargument aus Satz 0.64, dass $\mu(E \cap \{\theta \leq L\}) \leq 2^k L \mathscr{H}^k(E \cap \{\theta \leq L\})$ für jede Borel-Teilmenge E von $\tilde{A}$ gilt, und es folgt

$$\mu \ll \mathbb{1}_{\tilde{A}} \cdot \mathscr{H}^k|_\Omega. \tag{0.21}$$

Da μ für alle $x \in \tilde{A}$ einen approximativen Tangentialraum mit Vielfachheit $\theta(x)$ hat, ist $\tilde{A}$ nach Satz 0.81 abzählbar k-rektifizierbar und insbesondere $\mathscr{H}^k$-σ-endlich. Unter Verwendung von Korollar 0.78 zerlegen wir $\tilde{A} = N \cup \bigcup_{i=1}^\infty A_i$ in eine Borelsche $\mathscr{H}^k$-Nullmenge N und abzählbar viele paarweise disjunkte $\mathscr{H}^k$-endliche Borel-Mengen A_1, A_2, A_3, …, so dass

$$\lim_{r \searrow 0} \frac{\mathbb{1}_{A_i} \cdot \mathscr{H}^k(B_r(x))}{\omega_k r^k} = 1 \qquad \text{für alle } x \in A_i$$

gilt. Folglich existiert die Maßableitung

$$\frac{d\mu}{d(\mathbb{1}_{A_i} \cdot \mathscr{H}^k)}(x) = \theta(x) \qquad \text{für alle } x \in A_i$$

und der absolutstetige Anteil $\mathbb{1}_{A_i} \cdot \mu$ von μ bezüglich $\mathbb{1}_{A_i} \cdot \mathscr{H}^k|_\Omega$ hat nach dem Lebesgueschen Differentiationssatz θ als Radon-Nikodym-Dichte, also

$$1_{A_i} \cdot \mu = \theta \mathbb{1}_{A_i} \cdot \mathscr{H}^k|_\Omega.$$

Aufsummieren gibt (man beachte $\mu(N) = 0$ wegen (0.21))

$$\mu = \theta \mathbb{1}_{\tilde{A}} \cdot \mathscr{H}^k|_\Omega$$

und μ ist k-rektifizierbar. Unter erneuter Verwendung von Satz 0.78 folgt jetzt $\mathrm{Tan}^k(\mu, x) = 0$ für $\mathscr{H}^k$-fast-alle $x \in \Omega \setminus \tilde{A}$ und somit $\mathscr{H}^k(A \setminus \tilde{A}) = 0$. Daraus schließen wir, dass A und θ beide $\mathscr{H}^k$-messbar sind mit

$$\mu = \theta \mathbb{1}_A \cdot \mathscr{H}^k|_\Omega.$$

Da wir nun wissen, dass A $\mathscr{H}^k$-messbar ist, folgt durch eine abschließende Anwendung von Satz 0.81 die abzählbare k-Rektifizierbarkeit von A . ☐

Kapitel 1

Funktionen von beschränkter Variation

In diesem Kapitel werden die zentralen Begriffe und Konzepte der Vorlesung eingeführt und untersucht. Da Funktionen von (lokal) beschränkter Variation gerade die Funktionen sind, die ein (lokal) endliches Maß als Ableitung haben, werden wir dabei ständig auf das vorausgehende Kapitel zurückgreifen.

Wie im hinteren Teil des vorigen Kapitels sei **$\boldsymbol{\Omega}$ stets eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$**. Wir vereinbaren die Abkürzung $\mathscr{D}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ für die Menge aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen in $C^0_{\mathrm{kpt}}(\Omega,\mathbb{R}^N)$.

1.1 Maße als Ableitungen

Den klassischen Begriff der Ableitung und das Konzept der Sobolev-Räume $W^{k,p}$ setzen wir als bekannt voraus. Wir benutzen die Bezeichnungen ∂_k und ∂^α (mit einem Index $k \in \{1,2,\dots,n\}$ und einem Multindex $\alpha \in (\mathbb{N}\cup\{0\})^n$) sowohl für klassische als auch für schwache partielle Ableitungen. Außerdem verwenden wir den Operator ∇ für die klassische und die schwache (totale) Ableitung.

In Verallgemeinerung dieser Konzepte führen wir nun Maße als schwache Ableitungen ein; dazu postuliert man (wie bei der Definition schwacher Ableitungen in Sobolev-Räumen) gewisse partielle Integrationsformeln:

Definition 1.1 (Maße als Ableitungen)**.** *Sei $u \in L^1_{\mathrm{lok}}(\Omega,\mathbb{R}^N)$.*

- *Für einen Multiindex α sagen wir, dass u ein* **Maß $\mu \in RM_{\mathrm{lok}}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ als $\boldsymbol{\alpha}$-te schwache partielle Ableitung** *hat, notiert $\mu = \partial^\alpha u$ (schwach), wenn*

  $$\int_\Omega u\cdot\partial^\alpha\varphi\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega \varphi\cdot d\mu \qquad \text{für alle } \varphi\in\mathscr{D}(\Omega,\mathbb{R}^N)$$

  gilt. Ist speziell $|\alpha| = 1$ und steht der Eintrag 1 an der k-ten Stelle, so hat u das **Maß μ als $\boldsymbol{k}$-te schwache partielle Ableitung** *und wir notieren $\mu = \partial_k u$ (schwach).*

- *u hat das* **Maß** $\mu \in RM_{\text{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^{Nn})$ **als schwache (totale) Ableitung**, *notiert* $\mu = Du$ *(schwach), wenn*

$$\int_\Omega u \cdot \operatorname{div} \varphi \, dx = -\int_\Omega \varphi \cdot d\mu \qquad \text{für alle } \varphi \in \mathscr{D}(\Omega, \mathbb{R}^{Nn})$$

gilt. Dabei identifizieren wir den Raum $\mathbb{R}^{Nn}$ *hier und im Folgenden mit dem Raum der* $(N{\times}n)$*-Matrizen und die (klassische) Divergenz* $\operatorname{div}\varphi$ *der* $\mathbb{R}^{Nn}$*-wertigen Funktion* φ *ist zeilenweise zu bilden (also eine* $\mathbb{R}^N$*-wertige Funktion).*

Bemerkung 1.2.

- *Wir verwenden auch abgewandelte Sprechweisen in derselben Bedeutung. Beispielsweise sprechen wir kurz von Maßen als Ableitungen oder Maßableitungen.*

- *Die Operatoren* ∂_k *und* ∂^α *verwenden wir sowohl für Maße als auch für Funktionen als Ableitung. Bei der totalen Ableitung allerdings, die später am häufigsten vorkommt, verwenden wir immer* Du *für Maßableitungen und* ∇u *für Ableitungsfunktionen.*

- *Falls sie existieren, sind schwache Ableitungen* **eindeutig** *bestimmt (weil* $\mathscr{D}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *dicht in* $C_0^0(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *ist).*

- *Maßableiten ist eine* **lineare Operation**.

- *Die Maßableitung* Du *existiert genau dann, wenn alle schwachen partiellen Ableitungen* $\partial_1 u$, $\partial_2 u$, $\ldots$, $\partial_n u$ *als Maße existieren, und dann gilt*

$$Du = (\partial_1 u, \partial_2 u, \ldots, \partial_n u).$$

- *Die Maßableitung* Du *von* u *lässt sich alternativ charakterisieren durch*

$$\int_\Omega u \operatorname{div} \psi \, dx = -\int_\Omega \psi \odot dDu \qquad \text{für alle } \psi \in \mathscr{D}(\Omega, \mathbb{R}^n).$$

Dabei ist $x \odot A := Ax \in \mathbb{R}^N$ *die Multiplikation der* $(N \times n)$*-Matrix* A *mit dem Vektor* $x \in \mathbb{R}^n$.

- *Schwache Ableitungen sind* **lokal bestimmt**[1]*: Sei* $(O_i)_{i \in I}$ *eine Überdeckung von* Ω *durch offene Teilmengen und* $u \in L^1_{\text{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$*. Dann gilt* $u \in BV_{\text{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *genau dann, wenn* $u|_{O_i} \in BV_{\text{lok}}(O_i, \mathbb{R}^N)$ *für alle* $i \in I$ *gilt; und dann ist* $D(u|_{O_i}) = (Du)|_{O_i}$ *für alle* $i \in I$.

Definition 1.3 (Funktionen von lokal beschränkter Variation)**.** *Existiert die Maßableitung* Du *von* $u \in L^1_{\text{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$*, so sagen wir, dass* u *auf* Ω **lokal beschränkte Variation** *hat. Wir schreiben* $BV_{\text{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *für den Raum aller solchen Funktionen.*

[1] Dies lässt sich durch Zerlegung der Eins beweisen

Beispiele.

- *Jedes* $u \in W^{1,1}_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, *insbesondere jedes* $u \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, *ist auch in* $BV_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *mit* $Du = \nabla u \cdot \mathscr{L}^n|_\Omega$.

- *Tatsächlich sieht man mit dem Satz von Radon-Nikodym, dass für* $u \in L^1_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *gilt:*

$$u \in W^{1,1}_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N) \iff u \in BV_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N) \text{ und } Du \ll \mathscr{L}^n|_\Omega.$$

- *Für jedes* $a \in \mathbb{R}$ *hat die Heavyside-Funktion* $\mathbb{1}_{(a,\infty)}$ *auf* $\mathbb{R}$ *das Dirac-Maß* δ_a *als schwache Ableitung; um dies zu sehen, wählt man für* $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ *ein* $M > \max(\{a\} \cup \operatorname{spt} \varphi)$ *und rechnet mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{(a,\infty)} \varphi' \, dx = \int_a^M \varphi' \, dx = -\varphi(a) = -\int_{\mathbb{R}} \varphi \, d\delta_a.$$

- *Die Betragsfunktion* $x \mapsto |x|$ *auf* $\mathbb{R}$ *hat das Maß* $2\delta_0$ *als zweite Ableitung, denn partielle Integration zeigt für* $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ *die Gleichungskette*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |x| \varphi''(x) \, dx &= -\int_{-\infty}^0 x\varphi''(x) \, dx + \int_0^\infty x\varphi''(x) \, dx \\ &= \int_{-\infty}^0 \varphi' \, dx - \int_0^\infty \varphi' \, dx = 2\varphi(0) = \int_{\mathbb{R}} \varphi \, d(2\delta_0).\end{aligned}$$

- *Hat* Ω *einen* C^1*-Rand* $\partial\Omega$ *mit äußerem Einheitsnormalenvektorfeld* ν_Ω, *so ist* $\mathbb{1}_\Omega \in BV_{\mathrm{lok}}(\mathbb{R}^n)$ *mit*

$$D(\mathbb{1}_\Omega) = -\nu_\Omega \mathbb{1}_{\partial\Omega} \cdot \mathscr{H}^{n-1};$$

dazu berechnet man für $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ *mit dem Gaußschen Satz*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_\Omega \operatorname{div} \varphi \, dx &= \int_\Omega \operatorname{div} \varphi \, dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \varphi \cdot \nu_\Omega \, d\mathscr{H}^{n-1} = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \cdot \, d(\nu_\Omega \mathbb{1}_\Omega \cdot \mathscr{H}^{n-1}).\end{aligned}$$

Als Fazit aus den vorausgehenden Beispielen halten wir fest, dass Funktionen von lokal beschränkter Variation im Gegensatz zu Sobolev-Funktionen noch **Sprünge entlang gewisser $(n-1)$-dimensionaler Mengen** aufweisen dürfen.

In Analogie zu Bildmaßen verwenden wir für biLipschitz- Abbildungen T im Folgenden die Notation

$$T_\# u := u \circ T^{-1}.$$

Mit dieser Notation gilt die Transformationsformel

$$T_\#(u \cdot \mu) = (T_\# u) \cdot (T_\# \mu)$$

und speziell für das Lebesgue-Maß $\mathscr{L}^n$ ergibt sich

$$T_\#(u \cdot \mathscr{L}^n) = (T_\# u) J(T^{-1}) \cdot \mathscr{L}^n.$$

Insbesondere erhalten wir für $x \in \mathbb{R}^N$, $r > 0$ und die Homothetie $H^{x,r}$ aus (0.15):

$$(H^{x,r}{}_\# u) \cdot \mathscr{L}^n = r^{-n} H^{x,r}{}_\#(u \cdot \mathscr{L}^n).$$

In Anbetracht der letzten Gleichung erscheint nun das folgende Verhalten von Maßableitungen natürlich.

Satz 1.4 (Skalierungsverhalten). *Für $u \in BV_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ ist auch $H^{x,r}{}_\# u \in BV_{\mathrm{lok}}(\frac{1}{r}(\Omega - x), \mathbb{R}^N)$ mit*

$$D(H^{x,r}{}_\# u) = r^{1-n} H^{x,r}{}_\# Du.$$

Beweis. Für alle $\varphi \in \mathscr{D}(\frac{1}{r}(\Omega - x), \mathbb{R}^{Nn})$ zeigt die Transformationsformel

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{r}(\Omega - x)} H^{x,r}{}_\# u \operatorname{div} \varphi \mathscr{L}^n &= r^{-n} \int_\Omega u \,(\operatorname{div} \varphi) \circ H^{x,r} \, d\mathscr{L}^n \\
&= r^{1-n} \int_\Omega u \operatorname{div}(\varphi \circ H^{x,r}) \, d\mathscr{L}^n \\
&= r^{1-n} \int_\Omega \varphi \circ H^{x,r} \, dDu \\
&= r^{1-n} \int_{\frac{1}{r}(\Omega - x)} \varphi \, d(H^{x,r}{}_\# Du)
\end{aligned}$$

und die Behauptung folgt. □

Das nächste Lemma stellt die partielle Integrationsformel aus der Definition der Maßableitung auch für allgemeinere Testfunktionen φ bereit.

Lemma 1.5 (Partielle Integration). *Ist $u \in BV_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, so gilt*

$$\int_\Omega u \cdot \operatorname{div} \varphi \, dx = - \int_\Omega \varphi \cdot dDu \qquad \text{für alle } \varphi \in W^{1,\infty}_{\mathrm{kpt}}(\Omega, \mathbb{R}^{Nn}).$$

Beweis. Man approximiere φ mit Glättungen φ_ε, für die die partielle Integrationsformel per Definition gilt. Da $\varphi_\varepsilon \to \varphi$ gleichmäßig auf $\operatorname{spt} \varphi$ und $\operatorname{div}(\varphi_\varepsilon) = (\operatorname{div} \varphi)_\varepsilon \xrightarrow{*} \operatorname{div} \varphi$ schwach-$*$ in $L^\infty(\operatorname{spt} \varphi, \mathbb{R}^N)$ konvergieren, erhalten wir im Limes die Behauptung. □

Lemma 1.6 (Produktregel). *Für $u \in BV_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ und $f \in W^{1,\infty}_{\mathrm{lok}}(\Omega)$ ist $fu \in BV_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ und*

$$D(fu) = f \cdot Du + (u \otimes \nabla f) \cdot \mathscr{L}^n|_\Omega,$$

wobei $\otimes$ das dyadische Produkt bezeichnet.

Beweis. Gemäß dem vorigen Lemma gilt für alle $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega, \mathbb{R}^{Nn})$ schon

$$\int_\Omega u \cdot \operatorname{div}(\varphi f)\, dx = -\int_\Omega \varphi f \cdot dDu.$$

Durch Ausdifferenzieren der linken Seite erhalten wir daraus

$$\int_\Omega f u \cdot \operatorname{div} \varphi\, dx = -\int_\Omega \varphi(u \otimes \nabla f)\, dx - \int_\Omega \varphi f\, dDu$$

und die Behauptung folgt. □

Als nächstes zeigen wir, dass der Maßableitungsoperator D ein **schwach-$*$-abgeschlossener Operator** ist. Analoges gilt natürlich für die Operatoren ∂_k und ∂^α.

Satz 1.7. *Seien $u \in L^1_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $\mu \in RM_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^{Nn})$ und $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $BV_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Dann gilt:*

$$\left.\begin{array}{rll} u_k \cdot \mathscr{L}^n|_\Omega \xrightarrow[k\to\infty]{*} u \cdot \mathscr{L}^n|_\Omega & \textit{lokal schwach-}* \textit{ in } RM_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N) \\ Du_k \xrightarrow[k\to\infty]{*} \mu & \textit{lokal schwach-}* \textit{ in } RM_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^{Nn}) \end{array}\right\} \Longrightarrow \mu = Du.$$

Beweis. Für alle $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega, \mathbb{R}^{Nn})$ gilt

$$\int_\Omega u \cdot \operatorname{div} \varphi\, dx = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega u_k \cdot \operatorname{div} \varphi\, dx = -\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \varphi \cdot dDu_k = -\int_\Omega \varphi \cdot d\mu. \quad \square$$

Mit anderen Worten sagt Satz 1.7: Falls die Maßableitungen einer konvergenten Folge ebenfalls konvergieren, so ist der Grenzwert der Richtige. Wir werden den Satz später noch verallgemeinern und anstelle von $u \cdot \mathscr{L}^n|_\Omega$ ein weiteres Maß zulassen; siehe Korollar 1.31.

1.2 Der Raum *BV*

Definition 1.8 (Funktionen von beschränkter Variation und der Raum BV)**.** *Wir nennen $u \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ eine Funktion von* **beschränkter Variation** *– oder kurz eine* ***BV*-Funktion** *– auf Ω, wenn die Maßableitung Du existiert und ein endliches Maß auf Ω ist. Den Raum aller $\mathbb{R}^N$-wertigen BV-Funktionen u auf Ω bezeichnen wir mit $BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$ und versehen ihn mit der Norm*

$$\|u\|_{BV(\Omega,\mathbb{R}^N)} := \|u\|_{L^1(\Omega,\mathbb{R}^N)} + \|Du\|_{RM(\Omega,\mathbb{R}^{Nn})}.$$

Satz 1.9. *Mit der obigen Norm ist $BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$ ein Banachraum (und zwar für $\Omega \neq \emptyset$ stets ein nicht-separabler).*

Beweis. Wir zeigen, dass $BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$ ein vollständiger normierter Raum ist und greifen dazu auf die analogen Eigenschaften von $L^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ und $RM(\Omega, \mathbb{R}^{Nn})$ zurück. Da $L^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ und $RM(\Omega, \mathbb{R}^{Nn})$ normierte Räume sind und D ein linearer Operator, ist auch $BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$ ein normierter Raum. Die Vollständikeit von $BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$ folgt mit Satz 1.7[2] aus der von $L^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ und $RM(\Omega, \mathbb{R}^{Nn})$.

Um einzusehen, dass $BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$ nicht separabel ist, können wir gemäß mit Satz 1.4 skalieren und annehmen, dass $B_2 \subset \Omega$ gilt. Wir fixieren einen beliebigen Einheitsvektor $e \in \mathbb{R}^N$ und definieren $u_r(x) := e\mathbb{1}_{B_r}(x)$ für jedes $r \in (1,2)$. Dann sind (vergleiche die vorigen Beispiele) die Funktionen u_r in $BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$ mit $|Du_r| = \mathbb{1}_{S_r} \cdot \mathscr{H}^{n-1}|_\Omega$. Für je zwei verschiedene $r, s \in (1,2)$ erhalten wir folglich aus Lemma 0.21

$$\|u_r - u_s\|_{BV(\Omega,\mathbb{R}^N)} \geq |Du_r - Du_s|(\Omega) = \mathscr{H}^{n-1}(S_r) + \mathscr{H}^{n-1}(S_s) \geq 2n\omega_n.$$

Folglich kann $BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$ nicht separabel sein. □

In Analogie zu den Definitionen 0.36 und 0.42 führen wir nun schwächere Konvergenzbegriffe als Normkonvergenz in BV ein. Man vergleiche auch mit Bemerkung 1.34.

Definition 1.10 (Schwach-$*$-Konvergenz in BV). *Seien $u_k, u \in BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Wir sagen, dass u_k bei $k \to \infty$* **schwach-$*$ in $BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$** *gegen u konvergiert, wenn $u_k \cdot \mathscr{L}^n \xrightharpoonup[k\to\infty]{*} u \cdot \mathscr{L}^n$ und $Du_k \xrightharpoonup[k\to\infty]{*} Du$ schwach-$*$ als Radon-Maße konvergieren. Analog führt man lokale schwach-$*$-Konvergenz in $BV_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ ein.*

Definition 1.11 (Strikte Konvergenz in BV). *Seien $u_k, u \in BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Gelten $u_k \xrightarrow[k\to\infty]{} u$ stark in $L^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ und $Du_k \xrightharpoonup[k\to\infty]{} Du$ strikt in $RM(\Omega)$, so sagen wir, dass die u_k* **strikt in $BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$** *gegen u konvergieren.*

Bemerkung 1.12. *Wenn nur $u_k \xrightarrow[k\to\infty]{} u$ stark in $L^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ und $|Du_k|(\Omega) \xrightarrow[k\to\infty]{} |Du|(\Omega)$ gelten, so liegt bereits strikte Konvergenz $u_k \xrightharpoonup[k\to\infty]{} u$ in $BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$ vor.*

Beweis. Jede Teilfolge von $(Du_k)_{k\in\mathbb{N}}$ enthält nämlich dann nach dem Auswahlsatz eine weitere schwach-$*$-konvergente Teilfolge in $RM(\Omega, \mathbb{R}^{Nn})$. Nach Satz 1.7 ist ihr Grenzwert jedoch stets Du; folglich konvergiert schon die ganze Folge $(Du_k)_{k\in\mathbb{N}}$ schwach-$*$ in $RM(\Omega, \mathbb{R}^{Nn})$ gegen Du. □

Bemerkung 1.13. *Aus Bemerkung 1.12 entnehmen wir, dass strikte Konvergenz in $BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$ von der Metrik d_{str} zu*

$$d_{\mathrm{str}}(u, v) := \int_\Omega |u - v|\, dx + \big||Du|(\Omega) - |Dv|(\Omega)\big|$$

induziert wird. Damit ist sie – anders als strikte Konvergenz in RM oder schwache Konvergenz oder schwach-$*$-Konvergenz in irgendeinem unendlichdimensionalen Raum – eine metrische Konvergenz.

[2]Tatsächlich braucht man hier nicht die volle Stärke von Satz 1.7: Abgeschlossenheit bezüglich Normkonvergenz in $L^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ und $RM(\Omega, \mathbb{R}^{Nn})$ würde auch reichen.

1.3 Die Variation

Wir geben nun eine alternative Charakterisierung von Funktionen beschränkter Variation.

Definition 1.14 (Variation). *Für $u \in L^1_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ definieren wir die* **Variation**

$$V_\Omega(u) := \sup\left\{ \left| \int_\Omega u \cdot \operatorname{div} \varphi \, dx \right| \;:\; \varphi \in \mathscr{D}(\Omega, \mathbb{R}^{Nn}) \text{ mit } \sup_\Omega |\varphi| \le 1 \right\}$$

von u über Ω.

Proposition 1.15. *Für $u \in BV_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ und jede offene Teilmenge A von Ω gilt*

$$V_A(u) = |Du|(A).$$

Beweis. Mit der Definition der Maßableitung und einem Approximationsargument erhalten wir aus Definition 1.14:

$$V_A(u) = \sup\left\{ \left| \int_A \varphi \, dDu \right| \;:\; \varphi \in C^0_{\mathrm{kpt}}(A, \mathbb{R}^{Nn}) \text{ mit } \sup_A |\varphi| \le 1 \right\}.$$

Nun folgt $V_A(u) = |Du|(A)$ aus Lemma 0.29. □

Satz 1.16. *Für $u \in L^1_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ gilt*

$$V_\Omega(u) < \infty \iff u \in BV_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N) \text{ und } |Du|(\Omega) < \infty.$$

Beweis. '$\Longleftarrow$' folgt sofort aus Proposition 1.15. Um '$\Longrightarrow$' zu zeigen, nehmen wir $V_\Omega(u) < \infty$ an. Dann gilt aus Homogenitätsgründen

$$\left| \int_\Omega u \cdot \operatorname{div} \varphi \, dx \right| \le V_\Omega(u) \sup_\Omega |\varphi|$$

für alle $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega, \mathbb{R}^{Nn})$. Also lässt sich $\varphi \mapsto \int_\Omega u \cdot \operatorname{div} \varphi \, dx$ zu einem stetigen linearen Funktional auf $C^0_0(\Omega, \mathbb{R}^{Nn})$ fortsetzen, das nach dem Rieszschen Darstellungssatz durch ein $\mu \in RM(\Omega, \mathbb{R}^N)$ dargestellt wird. Ausgeschrieben bedeutet dies

$$\int_\Omega u \cdot \operatorname{div} \varphi \, dx = \int_\Omega \varphi \, d\mu$$

für alle $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega, \mathbb{R}^N)$; folglich $Du = -\mu$ schwach und die Behauptung ist verifiziert. □

Korollar 1.17. *Für $u \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ gilt*

$$V_\Omega(u) < \infty \iff u \in BV(\Omega, \mathbb{R}^N).$$ □

Es folgen nützliche Konsequenzen aus der Einführung der Variation.

Korollar 1.18. *Für $u_k, u \in L^1_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ konvergiere $u_k \cdot \mathscr{L}^n \xrightarrow[k\to\infty]{*} u \cdot \mathscr{L}^n$ lokal schwach-$*$ in $RM(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Dann gelten:*

- **Unterhalbstetigkeit der Variation**:

$$V_\Omega(u) \leq \liminf_{k\to\infty} V_\Omega(u_k).$$

- **Approximationskriterium**: *Sind alle u_k in $BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$ mit*

$$\liminf_{k\to\infty} \|u_k\|_{BV(\Omega,\mathbb{R}^N)} < \infty,$$

so folgen $u \in BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$ und

$$|Du|(\Omega) \leq \liminf_{k\to\infty} |Du_k|(\Omega).$$

Beweis. Die erste Aussage ist eine direkte Konsequenz von Definition 1.14, die zweite erhält man wie folgendermaßen: Zunächst schließt man mit Lemma 0.29 auf $u \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Mit der Unterhalbstetigkeit der Variation und Proposition 1.15 und sehen wir

$$V_\Omega(u) \leq \liminf_{k\to\infty} |Du_k|(\Omega) < \infty.$$

Jetzt garantiert Korollar 1.17 $u \in BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$ und eine weitere Anwendung von Proposition 1.15 beendet den Beweis. □

1.4 Approximation mit glatten Funktionen

Wir halten einige Aussagen über Glättungen fest, die größtenteils aus Lemma 0.47 folgen.

Lemma 1.19 (**Glättung von *BV*-Funktionen**). *Sei $u \in BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$.*

(I) Für jedes $\varepsilon > 0$ ist $u_\varepsilon := \rho_\varepsilon * u \in C^\infty(\Omega_\varepsilon, \mathbb{R}^N)$ mit

$$\nabla u_\varepsilon = \rho_\varepsilon * Du \qquad \mathscr{L}^n\text{-fast-überall auf } \Omega_\varepsilon$$

und

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon| \, dx \leq |Du|(\Omega);$$

(II) u_ε konvergiert bei $\varepsilon \searrow 0$ lokal schwach-$*$ in $BV_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ gegen u.

(III) $|\nabla u_\varepsilon| \cdot \mathscr{L}^n|_\Omega$ konvergiert bei $\varepsilon \searrow 0$ lokal schwach-$*$ in $RM_{\mathrm{lok}}(\Omega)$ gegen $|Du|$.

Beweis. Es reicht, $\nabla u_\varepsilon = \rho_\varepsilon * Du$ nachzuweisen. Dann folgen alle Behauptungen aus Lemma 0.47 und Standard-Eigenschaften von Glättungen. Um diese Gleichheit einzusehen, nehmen wir nach Übergang zu den Komponentenfunktionen $N = 1$ an und rechnen für einen Index k:

$$\begin{aligned}\partial_k u_\varepsilon(x) &= \int_\Omega \Big[(\partial_k)_x \rho_\varepsilon(x-y)\Big] u(y)\, dy \\ &= -\int_\Omega \Big[(\partial_k)_y \rho_\varepsilon(x-y)\Big] u(y)\, dy = \int_\Omega \rho_\varepsilon(x-y) d\partial_k u(y) = \rho_\varepsilon * \partial_k u(x).\end{aligned}$$

Bemerkung 1.2 liefert nun $\nabla u_\varepsilon = \rho_\varepsilon * Du$. □

Korollar 1.20 (Konstanzsatz). *Ist $u \in BV_{\text{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ mit $|Du|(\Omega) = 0$, so ist (ein Repräsentant von) u konstant auf jeder Zusammenhangskomponente von Ω.*

Beweis. Nach dem vorigen Lemma ist $\nabla u_\varepsilon = \rho_\varepsilon * Du = 0$ auf Ω_ε, also ist u_ε lokal konstant auf Ω_ε. Als Grenzwert lokal konstanter Funktionen ist u lokal konstant auf Ω und die Behauptung folgt. □

Korollar 1.21. *Sei $u \in BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$ und (ein Repräsentant von) u habe kompakten Träger in Ω. Dann gilt*

$$Du(\Omega) = 0.$$

Beweis. Wegen der Lokalität schwacher Ableitungen können annehmen an, dass Ω beschränkt ist. Man überzeugt sich, dass die Fortsetzung $\tilde{u}$ von u durch 0 auf ganz $\mathbb{R}^n$ eine Funktion in $BV(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$ ergibt mit $|D\tilde{u}|(\partial\Omega) = 0$. Für $0 < \varepsilon \ll 1$ haben die Glättungen $\tilde{u}_\varepsilon$ von $\tilde{u}$ kompakten Träger in Ω und partielle Integration zeigt

$$\int_\Omega \nabla \tilde{u}_\varepsilon \, dx = 0.$$

Mit Lemma 1.19 und Proposition 0.40 schließen wir

$$Du(\Omega) = D\tilde{u}(\Omega) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_\Omega \nabla \tilde{u}_\varepsilon \, dx = 0. \qquad \square$$

Da $W^{1,1}$ ein abgeschlossener Unterraum ist, können wir nicht erwarten, dass glatte Funktionen bezüglich der BV-Norm dicht[3] in BV liegen. Tatsächlich werden wir jedoch zeigen, dass sie bezüglich der Metrik der strikten Konvergenz dicht liegen.

Satz 1.22 (Approximation mit glatten Funktionen). *Sei $u \in BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Es gibt es eine Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ mit $u_k \xrightarrow[k\to\infty]{} u$ strikt in $BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$.*

Beweis. Wir fixieren zunächst $k \in \mathbb{N}$ und konstruieren ein $u_k \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ mit

$$\int_\Omega |u_k - u| \, dx < \frac{1}{k},$$
$$\int_\Omega |\nabla u_k| \, dx < |Du|(\Omega) + \frac{1}{k}.$$

Sei dazu $(O_l)_{l\in\mathbb{N}}$ eine Ausschöpfung von Ω durch abzählbar viele Mengen $O_l \in \mathscr{O}\mathscr{K}(\Omega)$ mit endlicher Überlappung. Sei weiter

$$1 = \sum_{l=1}^{\infty} \varphi_l \qquad \text{auf } \Omega$$

[3] Nach dem Satz von Meyers-Serrin liegen glatte Funktionen dicht in den Sobolevräumen $W^{k,p}$ mit $p < \infty$.

eine lokal endliche Zerlegung der Eins, so dass $\varphi_l \in \mathscr{D}(O_l)$ für alle $l \in \mathbb{N}$ gilt. Für jedes $l \in \mathbb{N}$ können wir mit Standard-Eigenschaften der Glättung (von L^1-Funktionen) ein $\varepsilon_l > 0$ finden mit $\operatorname{spt} \varphi_l \subset (O_l)_{\varepsilon_l}$ (also auch $\operatorname{spt} (u\varphi_l)_{\varepsilon_l} \subset O_l$) und

$$\int_\Omega |(u\varphi_l)_{\varepsilon_l} - u\varphi_l| \, dx < \frac{2^{-l}}{k},$$
$$\int_\Omega |(u \otimes \nabla\varphi_l)_{\varepsilon_l} - u \otimes \nabla\varphi_l| \, dx < \frac{2^{-l}}{k}.$$

Wir setzen nun $u_k := \sum_{l=1}^\infty (u\varphi_l)_{\varepsilon_l}$. Da diese Summe lokal endlich ist, ist u_k glatt. Außerdem gelten

$$\int_\Omega |u_k - u| \, dx \leq \sum_{l=1}^\infty \int_\Omega |(u\varphi_l)_{\varepsilon_l} - u\varphi_l| \, dx < \frac{1}{k}$$

und unter Verwendung von Lemma 1.19 (I) und Lemma 1.6

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u_k| \, dx &\leq \sum_{l=1}^\infty \int_\Omega |\nabla (u\varphi_l)_{\varepsilon_l} - u \otimes \nabla\varphi_l| \, dx \\
&\leq \sum_{l=1}^\infty |(\varphi_l \cdot Du)_{\varepsilon_l}|(\Omega) + \sum_{l=1}^\infty \int_\Omega |(u \otimes \nabla\varphi_l)_{\varepsilon_l} - u \otimes \nabla\varphi_l| \, dx \\
&< \sum_{l=1}^\infty |\varphi_l \cdot Du|(\Omega) + \frac{1}{k} \\
&= |Du|(\Omega) + \frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

Insgesamt haben wir jetzt eine Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ konstruiert mit $u_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u$ stark in $L^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ und

$$\limsup_{k\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_k| \, dx \leq |Du|(\Omega).$$

Mit dem zweiten Teil von Korollar 1.18 folgt $\lim_{k\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_k| \, dx = |Du|(\Omega)$ und die Behauptung ergibt sich aus Bemerkung 1.12. □

1.5 Funktionen einer Veränderlichen

Lemma 1.23. *Sei I ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $v : I \to \mathbb{R}^N$ eine Funktion von beschränkter (punktweiser) Variation im Sinne der Einleitung, also* $\operatorname{Var}_I(v) < \infty$.

(I) Sei $N = 1$. Dann gibt es nichtfallende Funktionen $v_1, v_2 : I \to \mathbb{R}$ mit

$$v = v_1 - v_2.$$

(II) Sei $I = \mathbb{R}$. Für $k \in \mathbb{N}$ und $l \in \mathbb{Z}$ wählen wir beliebige

$$x_k^l \in I_k^l := \left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}\right]$$

Dann konvergieren die Treppenfunktionen v_k, definiert durch

$$v_k := \sum_{l \in \mathbb{Z}} v(x_k^l) \mathbb{1}_{I_k^l}$$

bei $k \to \infty$ stark in $L^1_{\text{lok}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ gegen v.

Beweis. Zum Beweis von (I) können wir $\inf I = 0 \in I$ und $v(0) = 0$ annehmen, da sich der allgemeine Fall durch Spiegelung und Verschiebung darauf zurückführen lässt. Wir definieren

$$v_1(x) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^{k} \big[v(x_i) - v(x_{i-1})\big]_+ \,:\, 0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = x \right\}$$

für $x \in I$ und v_2 genauso, jedoch mit dem Index[4] $_-$ statt $_+$. Offensichtlich sind v_1 und v_2 nichtfallend und es bleibt nur $v_1(x) - v_2(x) = v(x)$ zu zeigen. Dazu geben wir uns ein $\varepsilon > 0$ vor und nehmen $x > 0$ an. Wir wählen Zerlegungen von $[0, x]$, für die die Suprema in den Definitionen von v_1 und v_2 bis auf ε erreicht werden. Sei nun $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = x$ eine gemeinsame Verfeinerung dieser Zerlegungen. Dann gelten

$$v_+(x) \geq \sum_{i=1}^{k} \big[v(x_i) - v(x_{i-1})\big]_+ \geq v_+(x) - \varepsilon,$$

$$v_-(x) - \varepsilon \leq \sum_{i=1}^{k} \big[v(x_i) - v(x_{i-1})\big]_- \leq v_-(x)$$

und folglich

$$v_+(x) - v_-(x) + \varepsilon \geq v(x) - v(0) \geq v_+(x) - \varepsilon - v_-(x).$$

Da $v(0) = 0$ war und $\varepsilon > 0$ beliebig, folgt $v_+(x) - v_-(x) = v(x)$ für alle $x \in I$.

Durch Übergang zu den Komponentenfunktionen und Verwendung von Teil (I), reicht es, (II) im Falle $N = 1$ für nichtfallendes v nachzuweisen. Wählen wir nun die x_k^l als linke Randpunkte von I_k^l, so konvergieren die v_k, abgesehen von abzählbar vielen Punkten (nämlich den Randpunkten der I_k^l und eventuell den abzählbar vielen Unstetigkeitsstellen von v), monoton von unten gegen v und der Satz über monotone Konvergenz garantiert Konvergenz auch in $L^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$. Wählen wir die x_k^l als rechte Randpunkte, so argumentiert man analog mit monotoner Konvergenz von oben. Alle anderen Wahlen der x_k^l geben Folgen, die zwischen diesen beiden eingeschachtelt sind, also folgt $v_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} v$ stark in $L^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$ in jedem Fall. □

[4]Dabei ist $r_\pm := \max\{\pm r, 0\}$ für $r \in \mathbb{R}$ zu interpretieren.

Lemma 1.24. *Für ein offenes Intervall I in $\mathbb{R}$, $a \in I$ und $u \in BV_{\mathrm{lok}}(I, \mathbb{R}^N)$ sei*

$$v(x) := \begin{cases} Du((a,x)) & \text{für } x > a \\ -Du([x,a]) & \text{für } x \leq a \end{cases}.$$

Dann gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{R}^N$, so dass $c + v$ ein Repräsentant von u ist.

Beweis. Für $\varphi \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R}^N)$ sehen wir mit dem Satz von Fubini und dem Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung

$$\begin{aligned} \int_I v \cdot \varphi' \, dx &= \int_{I \cap (a,\infty)} \int_{(a,x)} dDu \cdot \varphi'(x) \, dx - \int_{I \cap (-\infty,a]} \int_{[x,a]} dDu \cdot \varphi'(x) \, dx \\ &= \int_{I \cap (a,\infty)} \int_y^\infty \varphi'(x) \, dx \cdot dDu(y) - \int_{I \cap (-\infty,a]} \int_{-\infty}^y \varphi'(x) \, dx \cdot dDu(y) \\ &= -\int_I \varphi \cdot dDu \end{aligned}$$

Dies bedeutet $v \in BV_{\mathrm{lok}}(I, \mathbb{R}^N)$ mit $Dv = Du$ und die Behauptung ergibt sich mit dem Konstanzsatz. □

Bemerkung 1.25. *Der vorausgehende Lemma konstruiert zu jeder Fastfunktion u von beschränkter Variation einen guten Repräsentanten $c + v$, nämlich den (eindeutigen) linksstetigen Repräsentanten.*

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun zeigen, dass das Konzept der Variation V_I aus Definition 1.14 im wesentlichen mit dem in der Einleitung eingeführten Konzept der (essentiellen) Variation Var_I übereinstimmt

Satz 1.26. *Für eine offenes Intervall I in $\mathbb{R}$ und eine Fastfunktion $u : I \to \mathbb{R}^N$ ist*

$$\mathrm{Var}_I(u) < \infty \iff u \in L^1_{\mathrm{lok}}(I, \mathbb{R}^N) \text{ und } V_I(u) < \infty.$$

Und wenn $V_I(u)$ existiert, so gilt

$$\mathrm{Var}_I(u) = V_I(u).$$

Beweis. Wir zeigen zuerst $V_I(u) \leq \mathrm{Var}_I(u)$. Dafür reicht es natürlich $V_I(u) \leq \mathrm{Var}_I(v)$ für alle Repräsentanten v von u mit $\mathrm{Var}_I(v) < \infty$ nachzuweisen. Sei v ein solcher Repräsentant. Wie in der Einleitung erwähnt, lässt sich aus Teil (I) des vorigen Lemmas schließen, dass die einseitigen Grenzwerte von v in den Randpunkten von I existieren, wir können daher v links und rechts von I durch Konstanten so fortsetzen, dass $\mathrm{Var}_{\mathbb{R}}(v) = \mathrm{Var}_I(v)$ gilt. Seien nun v_k die Treppenfunktionen aus dem zweiten Teil von Lemma 1.23. Für $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ mit $\operatorname{spt} \varphi \subset I$ und $\sup_I |\varphi| \leq 1$ gilt[5] nun

$$\begin{aligned} \left| \int_I v_k \cdot \varphi' \, dx \right| &= \left| \sum_{l \in \mathbb{Z}} v(x_k^l) \cdot \left[\varphi\Big(\frac{l+1}{2^k}\Big) - \varphi\Big(\frac{l}{2^k}\Big) \right] \right| \\ &\leq \sum_{l \in \mathbb{Z}} |v(x_k^l) - v(x_k^{l-1})| \left| \varphi\Big(\frac{l}{2^k}\Big) \right| \leq \mathrm{Var}_{\mathbb{R}}(v) = \mathrm{Var}_I(v) \end{aligned}$$

[5]Man beachte, dass bei den Summen in der folgenden Rechnung stets nur endlich viele Summanden $\neq 0$ auftreten.

Gemäß Definition 1.14 folgt $V_I(v_k) \leq \mathrm{Var}_I(v)$ und mit der Konvergenz aus Lemma 1.23 und der Unterhalbstetigkeit der Variation erhalten wir $u \in L^1_{\mathrm{lok}}(I, \mathbb{R}^N)$ und

$$V_I(u) \leq \mathrm{Var}_I(v).$$

Um umgekehrt, $\mathrm{Var}_I(u) \leq V_I(u)$ zu zeigen, nehmen wir $u \in L^1_{\mathrm{lok}}(I, \mathbb{R}^N)$ und $V_I(u) < \infty$ an. Nach Satz 1.16 ist dann $u \in BV_{\mathrm{lok}}(I, \mathbb{R}^N)$ mit $|Du|(I) < \infty$. Sei nun $c + v$ der Repräsentant von u aus Lemma 1.24. Dann folgt

$$\sum_{i=1}^{k} |v(x_i) - v(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{k} |Du([x_{i-1}, x_i))| \leq \sum_{i=1}^{k} |Du|([x_{i-1}, x_i)) \leq |Du|(I),$$

wann immer $k \in \mathbb{N}$ und $x_0 < x_1 < \ldots < x_k$ in I gelten. Also ist $\mathrm{Var}_I(c + v) \leq |Du|(I)$ und durch Anwendung von Proposition 1.15 ergibt sich

$$\mathrm{Var}_I(u) \leq \mathrm{Var}_I(c + v) \leq V_I(u)$$ □

1.6 Einbettungs- und Kompaktheitssätze

Satz 1.27 (**Fortsetzungssatz**). *Sei Ω (beidseitig) Lipschitz mit beschränktem Rand $\partial\Omega$. Dann gibt es zu jeder offenen Obermenge $\widetilde{\Omega}$ von $\overline{\Omega}$ einen beschränkten linearen Fortsetzungsoperator $F : BV(\Omega, \mathbb{R}^N) \to BV(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$, so dass für jedes $u \in BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$ gelten:*

$$Fu|_{\Omega} = u, \quad Fu|_{\mathbb{R}^n \setminus \widetilde{\Omega}} = 0 \quad \text{und} \quad |DFu|(\partial\Omega) = 0.$$

Außerdem lässt sich sich dieser Operator so wählen, dass seine Einschränkung auf $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ für jedes $1 \leq p \leq \infty$ (Im Falle $p > 1$ sei dabei zusätzlich $\mathscr{L}^n(\Omega) < \infty$ vorausgesetzt.) Werte in $W^{1,p}_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$ hat und einen beschränkten linearen Operator $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N) \to W^{1,p}_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$ induziert.

Beweisidee. Der Beweis verläuft analog zur entsprechenden Konstruktion für Sobolev-Räume: Mit Zerlegung der Eins und lokaler biLipschitz-Transformation des Randes reduziert man auf den Fall des Halbraums. In diesem Fall konstruiert man dann den Fortsetzungsoperator durch gerade Spiegelung. □

Der Schlüssel zu allen Einbettungssätzen ist die folgende Abschätzung für Glättungen.

Lemma 1.28 (**Kontrollierte Approximation durch Glättungen**). *Für $u \in BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$ gilt*

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |u_\varepsilon - u| \, dx \leq \varepsilon |Du|(\Omega). \tag{1.1}$$

Beweis. Wir nehmen zunächst $u \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ an. Dann sehen wir für $x \in \Omega_\varepsilon$

$$\begin{aligned} |u_\varepsilon(x) - u(x)| &= \left| \int_{B_1} \rho(z)[u(x - \varepsilon z) - u(x)] \, dz \right| \\ &\leq \varepsilon \int_{B_1} \rho(z) \int_0^1 |\nabla u(x - \varepsilon t z)| \, dt |z| \, dz \end{aligned}$$

durch elementare Integration. Jetzt integrieren wir über Ω_ε und verwenden den Satz von Fubini:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |u_\varepsilon(x) - u(x)|\,dx \le \varepsilon \int_{B_1} \rho(z) \int_0^1 \int_{\Omega_\varepsilon - \varepsilon tz} |\nabla u|\,dx\,dt\,dz \le \varepsilon \int_\Omega |\nabla u|\,dx.$$

Damit ist die Behauptung für $u \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ gezeigt. Ist $u \in BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$ beliebig, so liefert Satz 1.22 eine Folge glatter Funktionen u_k mit $u_k \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} u$ strikt in $BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Standard-Eigenschaften von Glättungen zeigen außerdem

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |(u_k)_\varepsilon - u_\varepsilon|\,dx \le \int_\Omega |u_k - u|\,dx \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

und gemeinsam erlauben es die obigen Konvergenzeigenschaften, (1.1) von den u_ε auf u zu übertragen. □

Satz 1.29 (von Rellich). *Sei $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$.*

(I) **Lokale Version**. *Dann gibt es eine Teilfolge, die stark in $L^1_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ konvergiert.*

(II) **Globale Version**: *Ω sei beschränkt. Ist Ω Lipschitz oder haben alle u_k kompakten Träger in Ω, so gibt es eine Teilfolge, die stark in $L^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ konvergiert.*

Bemerkung 1.30. *Die Beschränktheitsvoraussetzung an Ω in (II) ist notwendig; dies sieht man am Beispiel des wandernden Hügels.*

Beweis von Satz 1.29. In der Situation von (II) können wir die u_k zu BV-Funktionen auf ganz $\mathbb{R}^n$ fortsetzen, entweder mit Satz 1.27 oder trivial durch 0. Daher folgt (II) aus (I). Wir zeigen nun (I): Mit einem Diagonalfolgenargument sieht man, dass es reicht zu jedem konvexen Kompaktum K in Ω eine stark in $L^1(K, \mathbb{R}^N)$ konvergente Teilfolge zu finden. Dazu bemerken wir, dass für $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(K, \partial\Omega)$ gelten

$$\begin{aligned} \sup_K |(u_k)_\varepsilon| &\le \|u_k\|_{L^1(\Omega,\mathbb{R}^N)} \sup_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon, \\ \sup_K |\nabla(u_k)_\varepsilon| &\le \|u_k\|_{L^1(\Omega,\mathbb{R}^N)} \sup_{\mathbb{R}^n} |\nabla\rho_\varepsilon|. \end{aligned}$$

Für $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(K, \partial\Omega)$ ist also ist die Folge $((u_k)_\varepsilon)_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig auf K und mit dem Satz von Arzelà-Ascoli finden wir eine auf K gleichmäßig konvergente Teilfolge. Mit einem weiteren Diagonalfolgenargument finden wir sogar eine Teilfolge $(u_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$, so dass $((u_{k_l})_{\frac{1}{q}})_{l\in\mathbb{N}}$ für alle $q \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{q} < \operatorname{dist}(K, \partial\Omega)$ gleichmäßig auf K konvergiert. Zu vorgegebenem $\delta > 0$ fixieren wir nun ein solches q mit $\frac{1}{q} \sup_{k\in\mathbb{N}} |Du_k|(\Omega) < \delta$. Da $((u_{k_l})_{\frac{1}{q}})_{l\in\mathbb{N}}$ eine gleichmäßige Cauchy-Folge auf K ist, erhalten wir mit (1.1) für $l, \tilde{l} \gg 1$

$$\begin{aligned} &\int_K |u_{k_l} - u_{k_{\tilde{l}}}|\,dx \\ &\quad\le \int_K |u_{k_l} - (u_{k_l})_{\frac{1}{q}}|\,dx + \int_K |(u_{k_l})_{\frac{1}{q}} - (u_{k_{\tilde{l}}})_{\frac{1}{q}}|\,dx + \int_K |(u_{k_{\tilde{l}}})_{\frac{1}{q}} - u_{k_{\tilde{l}}}|\,dx \\ &\quad< \tfrac{1}{q}|Du_{k_l}|(\Omega) + \delta + \tfrac{1}{q}|Du_{k_{\tilde{l}}}|(\Omega) < 3\delta. \end{aligned}$$

Also ist $(u_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L^1(K,\mathbb{R}^N)$ und mit der Vollständigkeit von $L^1(K,\mathbb{R}^N)$ folgt die Behauptung. $\square$

Es folgen einige Korollare aus dem vorigen Satz. Als erstes halten wir eine Verallgemeinerung von Satz 1.7 fest.

Korollar 1.31. *Seien $\nu \in RM_{\text{lok}}(\Omega,\mathbb{R}^N)$, $\mu \in RM_{\text{lok}}(\Omega,\mathbb{R}^{Nn})$ und $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $BV_{\text{lok}}(\Omega,\mathbb{R}^N)$. Gelten nun*

$$\begin{aligned} u_k \cdot \mathscr{L}^n|_\Omega &\xrightarrow[k\to\infty]{*} \nu \quad \textit{lokal schwach-}{*} \textit{ in } RM_{\text{lok}}(\Omega,\mathbb{R}^N), \\ Du_k &\xrightarrow[k\to\infty]{*} \mu \quad \textit{lokal schwach-}{*} \textit{ in } RM_{\text{lok}}(\Omega,\mathbb{R}^{Nn}), \end{aligned}$$

so folgen $\nu \ll \mathscr{L}^n|_\Omega$ und $\frac{d\nu}{d\mathscr{L}^n} \in BV_{\text{lok}}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ mit $D\frac{d\nu}{d\mathscr{L}^n} = \mu$.

Beweis. Sei $A \in \mathscr{O}\mathscr{K}(\Omega)$. Nach Proposition 0.32 ist $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt in $BV(A,\mathbb{R}^N)$ für jedes $A \in \mathscr{O}\mathscr{K}(\Omega)$. Nach Satz 1.29 gibt es daher eine Teilfolge, die stark in $L^1_{\text{lok}}(A,\mathbb{R}^N)$ gegen einen Grenzwert $u \in L^1_{\text{lok}}(A,\mathbb{R}^N)$ konvergiert. Also ist $\nu|_A = u \cdot \mathscr{L}^n|_A$. Da $A \in \mathscr{O}\mathscr{K}(\Omega)$ beliebig war, erhalten wir $\nu \ll \mathscr{L}^n|_\Omega$ und die restlichen Behauptungen folgen aus dem Satz von Radon-Nikodym und Satz 1.7. $\square$

Man könnte vermuten, dass sich analog zu Definition 1.1 auch Ableitungen von Maßen definieren lassen. Tatsächlich ergibt sich dabei jedoch kein allgemeineres Konzept, wie wir nun zeigen können.

Korollar 1.32. *Seien $\nu \in RM_{\text{lok}}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ und $\mu \in RM_{\text{lok}}(\Omega,\mathbb{R}^{Nn})$ mit*

$$\int_\Omega \operatorname{div}\varphi \cdot d\nu = -\int_\Omega \varphi \cdot d\mu \qquad \textit{für alle } \varphi \in \mathscr{D}(\Omega,\mathbb{R}^N).$$

Dann gelten $\nu \ll \mathscr{L}^n|_\Omega$ und $\frac{d\nu}{d\mathscr{L}^n} \in BV_{\text{lok}}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ mit $D\frac{d\nu}{d\mathscr{L}^n} = \mu$

Beweis. Mit dem Argument aus dem Beweis von Lemma 1.19 sieht man, dass für die Glättungen $\nabla\nu_\varepsilon = \mu_\varepsilon$ auf Ω_ε gilt. Außerdem konvergieren nach Lemma 0.47 (III) die Glättungen lokal schwach-$*$ in RM_{lok} und wir können das vorige Korollar anwenden. $\square$

Satz 1.33 (Auswahlsatz/Kompaktheitssatz in BV). *Sei $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $BV(\Omega,\mathbb{R}^N)$. Dann gibt es eine Teilfolge, die schwach-$*$ in $BV(\Omega,\mathbb{R}^N)$ konvergiert.*

Beweis. Mit dem Auswahlsatz 0.33, angewandt auf RM, finden wir eine Teilfolge $(u_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ derart, dass

$$\begin{aligned} u_{k_l} \cdot \mathscr{L}^n|_\Omega &\xrightarrow[l\to\infty]{*} \nu \quad \text{schwach-}{*} \text{ in } RM(\Omega,\mathbb{R}^N), \\ Du_{k_l} &\xrightarrow[l\to\infty]{*} \mu \quad \text{schwach-}{*} \text{ in } RM(\Omega,\mathbb{R}^{Nn}) \end{aligned}$$

konvergieren. Aus Korollar 1.31 entnehmen wir nun $\nu = u \cdot \mathscr{L}^n|_\Omega$ mit einem $u \in BV(\Omega,\mathbb{R}^N)$ und die Behauptung ist gezeigt. $\square$

Alternativ lässt sich Satz 1.33 auch aus Satz 0.33 und der folgenden Bemerkung gewinnen.

Bemerkung 1.34 (*BV* als Dualraum). *$BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$ lässt sich mit dem Dualraum eines separablen Banachraums identifizieren; und zwar so, dass die funktionalanalytische schwach-$*$-Konvergenz mit der Konvergenz aus Definition 1.10 übereinstimmt. Dazu sei B das Bild der stetigen Einbettung*

$$BV(\Omega, \mathbb{R}^N) \to RM(\Omega, \mathbb{R}^{N(n+1)}), u \mapsto (u \cdot \mathscr{L}^n|_\Omega, Du)$$

und K sei der Abschluss von

$$\{(\psi, \varphi) \in \mathscr{D}(\Omega, \mathbb{R}^{N(n+1)}) \,:\, \psi = \mathrm{div}\varphi\}.$$

in $X := C_0^0(\Omega, \mathbb{R}^{N(n+1)})$. Dann folgt aus Korollar 1.32, dass das Bild von B unter dem Rieszschen Isomorphismus genau aus den beschränkten linearen Funktionalen F auf X mit $K \subset \mathrm{Kern}\, F$ besteht. Folglich ist B isometrisch isomorph zum Dualraum des Faktorraums X/K.

Genau wie in den Sobolev-Räumen folgt aus dem Satz von Rellich eine Version der Poincaré-Ungleichung:

Satz 1.35 (Poinaré-Ungleichung). *Für jedes beschränkte Lipschitz-Gebiet*[6] *Ω und $u \in BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$ gilt*

$$\int_\Omega |u - u_\Omega| \, dx \leq C|Du|(\Omega)$$

mit einer von Ω und N abhängigen Konstanten C. Dabei bezeichnet $u_\Omega := \fint_\Omega u \, dx$ den Mittelwert von u über Ω.

Bemerkung 1.36.

- *Die Zusammenhangsvoraussetzung an Ω ist notwendig. Dies sieht man an Beispielen mit lokal konstanten, aber nicht konstanten Funktionen.*
- *Ist Ω eine Kugel mit Radius r oder ein Würfel mit Kantenlänge r in $\mathbb{R}^n$, so zeigt ein Skalierungsargument mit Satz 1.4, dass die Konstante C als $r\widetilde{C}$ mit einer nur von n und N abhängigen Konstanten $\widetilde{C}$ gewählt werden kann.*

Beweis von Satz 1.35. Wir argumentieren indirekt und nehmen an, dass die Behauptung falsch ist. Dann gibt es eine Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$ mit

$$\int_\Omega |u_k - (u_k)_\Omega| \, dx > k|Du_k|(\Omega).$$

Wir können $(u_k)_\Omega = 0$ und $\int_\Omega |u_k| \, dx = 1$ annehmen. Dann folgt, dass $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist in $BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$ mit $Du_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ stark in $RM(\Omega, \mathbb{R}^{Nn})$. Mit dem

[6] Gebiete sind nichtleere und zusammenhängende offene Mengen

Satz von Rellich folgt $u_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u$ stark in $L^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ für einen Grenzwert $u \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ mit

$$(u)_\Omega = 0 \qquad \text{und} \qquad \int_\Omega |u|\,dx = 1. \tag{1.2}$$

Satz 1.7 garantiert nun $Du = 0$ und nach dem Konstanzsatz ist u konstant. Dies widerspricht jedoch (1.2) und die Behauptung ist verifiziert. □

Satz 1.37.

(I) *Durch die* **Sobolev-Einbettung** *ist* $BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *nach* $L^{1^*}_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *(sogar stetig nach* $L^{1^*}(\Omega, \mathbb{R}^N)$*, wenn* Ω *Lipschitz mit beschränktem Rand) eingebettet mit dem Sobolev-Exponenten* $1^* := \frac{n}{n-1}$ *(*$:= \infty$ *für* $n = 1$*).*

(II) *Ist* Ω *beschränkt und* $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine beschränkte Folge in* $BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$*, so gibt es nach dem* **Satz von Rellich-Kondrachov** *eine Teilfolge, die stark in* $L^q_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *(ohne* $_{\mathrm{lok}}$*, falls* Ω *Lipschitz) für jedes* $q \in [1, 1^*)$ *konvergiert.*

Beweis. Wir setzen hier voraus, dass (I) für Sobolev-Funktionen in $W^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ bereits bekannt ist. Mit Satz 1.22, lässt sich diese Aussage auf BV-Funktionen übertragen.

Wir zeigen nun die lokale Version von (II): Mit den Sätzen 1.29 und 1.33 können wir eine Teilfolge $(u_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ und einen Grenzwert $u \in BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$ finden mit $u_{k_l} \underset{k\to\infty}{\overset{*}{\rightharpoonup}} u$ schwach-$*$ in $BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$ und stark in $L^1_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Für jedes Kompaktum K in Ω zeigt die Höldersche Ungleichung

$$\|u_{k_l} - u\|_{L^q(K,\mathbb{R}^N)} \le \|u_{k_l} - u\|^{1-n\frac{q-1}{q}}_{L^1(K,\mathbb{R}^N)} \|u_{k_l} - u\|^{n\frac{q-1}{q}}_{L^{1^*}(K,\mathbb{R}^N)}.$$

Nun konvergiert der erste Faktor auf der rechten Seite gegen 0 und der zweite bleibt nach (I) beschränkt. Daher folgt die Behauptung. Die globale Version von (II) folgt mit Satz 1.27 aus der lokalen. □

1.7 Der Perimeter und die isoperimetrische Ungleichung

Definition 1.38 (Perimeter)**.** *Für eine* $\mathscr{L}^n$*-messbare Teilmenge* A *von* $\mathbb{R}^n$ *bezeichnen wir*

$$P_\Omega(A) := V_\Omega(\mathbb{1}_A)$$

als den **Perimeter** *von* A *in* Ω*. Ist* $\mathbb{1}_A\big|_\Omega \in BV_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *so heißt* A *eine Menge von* **lokal endlichem Perimeter** *in* Ω*. Gilt zusätzlich zu* $\mathbb{1}_A\big|_\Omega \in BV_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *noch* $|D\mathbb{1}_A|(\Omega) < \infty$*, so nennen wir* A *eine Menge von* **endlichem Perimeter** *in* Ω*. Schließlich bezeichnen wir Mengen von lokal endlichem Perimeter in* $\mathbb{R}^n$ *auch als* **Caccioppoli-Mengen***.*

Bemerkung 1.39. *Gemäß Proposition 1.15 gilt für eine Menge A von lokal endlichem Perimeter in Ω und jede offene Teilmenge O von Ω schon*

$$P_O(A) = |D\mathbb{1}_A|(O)$$

Außerdem entnehmen wir aus Korollar 1.17, dass eine $\mathscr{L}^n$-meßbare Teilmenge A von $\mathbb{R}^n$ genau dann eine Menge von endlichem Perimeter in Ω ist, wenn $P_\Omega(A) < \infty$ gilt.

Beispiel. *Aus dem entsprechenden Beispiel zu Maßableitungen entnehmen wir: Hat Ω einen C^1-Rand, so ist Ω eine Caccioppoli-Menge und es gilt $P_{\mathbb{R}^n}(\Omega) = \mathscr{H}^{n-1}(\partial\Omega)$; ist zusätzlich $\mathscr{H}^{n-1}(\partial\Omega) < \infty$, so hat Ω sogar endlichen Perimeter in $\mathbb{R}^n$.*

Aus der Definition ist klar, dass P_Ω viele Eigenschaften von V_Ω erbt. Wir verzichten hier aus Zeitgründen auf die Aufzählung dieser einfachen Eigenschaften und gehen direkt zu fortgeschritteneren Themen über.

Proposition 1.40. *Sei A eine Menge von lokal endlichem Perimeter in Ω und $\alpha_r(y) \in [0,1]$ sei die Abkürzung für den Mittelwert $(\mathbb{1}_A)_{Q_r(y)}$, wobei $Q_r(y)$ den offenen Würfel in $\mathbb{R}^n$ mit Mittelpunkt y und Kantenlänge $r > 0$ bezeichnet. Dann gilt für alle Würfel $\overline{Q_r(y)} \subset \Omega$*

$$\min\{\alpha_r(y), 1-\alpha_r(y)\} \leq C\frac{|D\mathbb{1}_A|(Q_r(y))}{r^{n-1}}$$

mit einer nur von n abhängigen Konstanten C. Dieselbe Behauptung gilt auch mit Kugeln $B_r(y)$ anstelle der Würfel $Q_r(y)$.

Beweis. Wir behandeln nur den Fall von Würfeln, für Kugeln argumentiert man analog. Aus der Poincaré-Ungleichung und der darauf folgenden Bemerkung erhalten wir

$$\int_{Q_r(y)} |\mathbb{1}_A - \alpha_r(y)|\,dx \leq Cr|D\mathbb{1}_A|(Q_r(y)).$$

Die linke Seite dieser Ungleichung lässt sich umschreiben in $2r^n\alpha_r(y)(1-\alpha_r(y))$. Benutzen wir noch die elementare Ungleichung $\min\{t, 1-t\} \leq 2t(1-t)$ für $t \in [0,1]$, so bekommen wir die Behauptung. $\square$

Satz 1.41 (**Isoperimetrische Ungleichung**). *Für jede $\mathscr{L}^n$-messbare Teilmenge A von $\mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$ gilt*

$$\min\left\{\mathscr{L}^n(A), \mathscr{L}^n(\mathbb{R}^n \setminus A)\right\} \leq \widetilde{C}\left[P_{\mathbb{R}^n}(A)\right]^{\frac{n}{n-1}}$$

mit einer nur von n abhängigen Konstanten $\widetilde{C}$.

Beweis. Wir nehmen o. E. $P_{\mathbb{R}^n}(A) < \infty$ an. Nach Bemerkung 1.39 bedeutet dies $\mathbb{1}_A \in BV_{\text{lok}}(\mathbb{R}^n)$ mit $|D\mathbb{1}_A|(\mathbb{R}^n) = P_{\mathbb{R}^n}(A) < \infty$. Wir verwenden Proposition 1.40 für Würfel in $\Omega = \mathbb{R}^n$ der fixierten Kantenlänge

$$r := \left[3C|D\mathbb{1}_A|(\mathbb{R}^n)\right]^{\frac{1}{n-1}}.$$

Aus Stetigkeitsgründen muss dann entweder $\alpha_r(y) \leq \frac{1}{3}$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$ oder $\alpha_r(y) \geq \frac{2}{3}$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$ gelten. Sei nun $\{y_1, y_2, \ldots\}$ eine abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, so dass die Würfel $Q_r(y_i)$ disjunkt sind und $\mathbb{R}^n$ bis auf eine $\mathscr{L}^n$-Nullmenge überdecken. Im Falle $\alpha_r \leq \frac{1}{3}$ folgt nun

$$\mathscr{L}^n(A) = \sum_{i=1}^{\infty} r^n \alpha_r(y_i) \leq Cr \sum_{i=1}^{\infty} |D\mathbb{1}_A(Q_r(y_i))| \leq Cr|D\mathbb{1}_A|(\mathbb{R}^n)$$

und im Falle $\alpha_r \geq \frac{2}{3}$ sieht man analog $\mathscr{L}^n(\mathbb{R}^n \setminus A) \leq Cr|D\mathbb{1}_A|(\mathbb{R}^n)$. □

Als nächstes folgt eine Variante der Koflächenformel:

Satz 1.42 (Koflächenformel in BV). *Sei $u \in L^1_{\text{lok}}(\Omega)$. Dann gilt*

$$V_\Omega(u) = \int_{-\infty}^{\infty} P_\Omega(\{u > t\})\, dt. \tag{1.3}$$

Ist außerdem $V_\Omega(u) < \infty$, so ist $u \in BV_{\text{lok}}(\Omega)$, für $\mathscr{L}^1$-fast-alle $t \in \mathbb{R}$ ist $\{u > t\}$ eine Menge von endlichem Perimeter in Ω und es gelten

$$|Du|(A) = \int_{-\infty}^{\infty} |D\mathbb{1}_{\{u>t\}}|(A)\, dt, \tag{1.4}$$

$$Du(A) = \int_{-\infty}^{\infty} D\mathbb{1}_{\{u>t\}}(A)\, dt \tag{1.5}$$

für alle $A \in \mathscr{B}(\Omega)$.

Beweis. In diesem Beweis benutzen wir wiederholt die Ergebnisse von Kapitel 1.3 und Bemerkung 1.39, meist ohne explizite Erwähnung. Der Beweis zerfällt in mehrere Teile:

Schritt 1. Wir zeigen (1.3) und (1.4) für $u \in C^1(\Omega)$ mit $V_\Omega(u) < \infty$: In dieser Situation besagt die bekannte Version der Koflächenformel

$$\int_\Omega f|\nabla u|\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\{u=t\}} f\, d\mathscr{H}^{n-1}\, dt \tag{1.6}$$

für alle $f \in L^\infty(\Omega)$. Insbesondere können wir $f = \mathbb{1}_{\{\nabla u = 0\}}$ einsetzen und sehen, dass $\mathscr{H}^{n-1}(\{u = t, \nabla u = 0\}) = 0$ für $\mathscr{L}^1$-fast-alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Dies bedeutet, dass der Rand der Superniveaumenge $\{u > t\}$ in Ω sich von $\{u = t\}$ nur um eine $\mathscr{H}^{n-1}$-Nullmenge unterscheidet und $\mathscr{H}^{n-1}$-fast-überall C^1 ist. Daher gibt der Gaußsche Satz

$$\int_{\{u>t\}} \operatorname{div} \varphi\, dx = -\int_{\{u=t\}} \varphi \cdot \frac{\nabla u}{|\nabla u|}\, d\mathscr{H}^{n-1},$$

für alle $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Wir schließen $\mathbb{1}_{\{u>t\}} \in BV_{\text{lok}}(\Omega)$ mit

$$|D\mathbb{1}_{\{u>t\}}| = \mathbb{1}_{\{u=t\}} \cdot \mathscr{H}^{n-1}|_\Omega$$

für $\mathscr{L}^1$-fast-alle $t \in \mathbb{R}$. Benutzen wir dies zusammen mit $f = \mathbb{1}_A$ in (1.6), so ergibt sich (1.4). Durch Spezialisieren $A = \Omega$ gelangen wir zu (1.3).

Schritt 2. Wir zeigen '$\leq$' in (1.3) für alle $u \in L^1_{\text{lok}}(\Omega)$: Für $\mathscr{L}^n$-fast-alle $x \in \Omega$ gilt

$$u(x) = \int_0^\infty \mathbb{1}_{\{u>t\}}(x)\, dt - \int_{-\infty}^0 (1 - \mathbb{1}_{\{u>t\}}(x))\, dt.$$

Für $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit $\sup_\Omega |\varphi| \leq 1$ folgt mit dem Satz von Fubini, der Definition des Perimeters und $\int_\Omega \operatorname{div} \varphi\, dx = 0$

$$\begin{aligned}\int_\Omega u \operatorname{div} \varphi\, dx &= \int_{-\infty}^\infty \int_\Omega \mathbb{1}_{\{u>t\}} \operatorname{div} \varphi\, dx\, dt - \int_{-\infty}^0 \int_\Omega \operatorname{div} \varphi\, dx\, dt \\ &\leq \int_{-\infty}^\infty P_\Omega(\{u > t\})\, dt.\end{aligned}$$

Mit der Definition der Variation schließen wir auf '$\leq$' in (1.3).

Schritt 3. Wir nehmen $V_\Omega(u) < \infty$, also insbesondere $u \in BV_{\text{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, an und zeigen, dass $\{u > t\}$ für $\mathscr{L}^1$-fast-alle $t \in \mathbb{R}$ endlichen Perimeter hat, und, dass (1.4) gilt: Sei dazu vorerst $A \in \mathscr{OK}(\Omega)$. Nach Satz 1.22 gibt es eine Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $C^\infty(A)$ mit $u_k \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} u$ strikt in $BV(A)$. Durch Teilfolgenübergang können wir außerdem Konvergenz $\mathscr{L}^n$-fast-überall annehmen und mit dem Satz über dominierte Konvergenz folgt $\mathbb{1}_{\{u_k>t\}} \to \mathbb{1}_{\{u>t\}}$ in $L^1(A)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $\mathscr{L}^n(A \cap \{u = t\}) = 0$. Tatsächlich kann $\mathscr{L}^n(A \cap \{u = t\}) > 0$ aber wegen $\mathscr{L}^n(A) < \infty$ nur für abzählbar viele $t \in \mathbb{R}$ gelten. Mit der Unterhalbstetigkeit der Variation und dem Satz von Fatou erhalten wir daher

$$\int_{-\infty}^\infty V_A(\mathbb{1}_{\{u>t\}})\, dt \leq \int_{-\infty}^\infty \liminf_{k\to\infty} V_A(\mathbb{1}_{\{u_k>t\}})\, dt \leq \liminf_{k\to\infty} \int_{-\infty}^\infty V_A(\mathbb{1}_{\{u_k>t\}})\, dt.$$

Mit der Definition des Perimeters und unter Verwendung von Schritt 1 lässt sich dies umschreiben in

$$\int_{-\infty}^\infty P_A(\{u > t\})\, dt \leq \liminf_{k\to\infty} V_A(u_k).$$

Nun benutzen wir die strikte Konvergenz $u_k \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} u$ in $BV(A)$ und finden

$$\int_{-\infty}^\infty P_A(\{u > t\})\, dt \leq V_A(u) \leq V_\Omega(u) < \infty.$$

Insbesondere ist $\mathbb{1}_{\{u>t\}} \in BV(A)$ für $\mathscr{L}^1$-fast-alle $t \in \mathbb{R}$. Da sich Schritt 2 auch auf jede offene Teilmenge von Ω anwenden lässt, gilt tatsächlich sogar Gleichheit, also folgt (1.4) für $A \in \mathscr{OK}(\Omega)$. Wir bemerken nun, dass wegen der Lokalität schwacher Ableitungen $\mathbb{1}_{\{u>t\}} \in BV_{\text{lok}}(\Omega)$ für $\mathscr{L}^1$-fast-alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Sei jetzt $A \in \mathscr{B}(\Omega)$ beliebig. Dann schöpfen wir A durch eine aufsteigende Folge von Mengen in $\mathscr{OK}(\Omega)$ aus. Für diese Mengen gilt (1.4) nach dem Vorausgehenden und in der Grenze[7] erhalten wir (1.4) auch für beliebiebiges $A \in \mathscr{B}(\Omega)$. Schließlich verwenden wir noch (1.4) mit $A = \Omega$ um auf $|D\mathbb{1}_{\{u>t\}}|(\Omega) < \infty$ für $\mathscr{L}^1$-fast-alle $t \in \mathbb{R}$ zu schließen.

[7] Dabei benutzt man die Regularität der Radon-Maße $|Du|$ und $|D\mathbb{1}_{\{u>t\}}|$ (für $\mathscr{L}^1$-fast-alle t) und den Satz über monotone Konvergenz

Schritt 4. Wir bemerken, dass (1.3) nun vollständig bewiesen ist: '$\leq$' wurde in Schritt 2 gezeigt und erlaubt uns, uns für den Beweis von '$\geq$' auf den Fall $V_\Omega(u) < \infty$ zu beschränken. Unter dieser Annahme ist '$\geq$' jedoch ein Spezialfall des in Schritt 3 gezeigten.

Schritt 5. Wir nehmen $V_\Omega(u) < \infty$ an und zeigen (1.5). Aus dem in Schritt 3 gezeigten entnehmen wir, dass die Vorschrift

$$\mu(A) := \int_{-\infty}^{\infty} D\mathbb{1}_{\{u>t\}}(A)\, dt \qquad \text{für } A \in \mathscr{B}(\Omega)$$

ein endliches Radon-Maß $\mu \in RM(\Omega, \mathbb{R}^N)$ definiert. Durch gleichmässige Approximation mit Treppenfunktionen erhalten wir dann

$$\int_\Omega \psi \cdot d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} \int_\Omega \psi \cdot dD\mathbb{1}_{\{u>t\}}\, dt \qquad \text{für alle } \psi \in C^0_{\text{kpt}}(\Omega, \mathbb{R}^N).$$

Damit rechnen wir für $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ähnlich wie in Schritt 2

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi \cdot dDu = -\int_\Omega u \operatorname{div} \varphi\, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_\Omega \mathbb{1}_{\{u>t\}} \operatorname{div} \varphi\, dx\, dt - \int_{-\infty}^{0} \int_\Omega \operatorname{div} \varphi\, dx\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_\Omega \varphi \cdot dD\mathbb{1}_{\{u>t\}}\, dt \\ &= \int_\Omega \varphi \cdot d\mu\end{aligned}$$

Es folgt $Du = \mu$ und (1.5) ist gezeigt. □

1.8 Struktursätze für Caccioppoli-Mengen

Definition 1.43 (Reduzierter Rand). *Für eine $\mathscr{L}^n$-messbare Teilmenge A von $\mathbb{R}^n$ sei A_* die größte offene Teilmenge[8] von $\mathbb{R}^n$, so dass A noch lokal endlichen Perimeter in A_* hat. Wir schreiben im Folgenden kurz $\mathbb{1}_A$ für $\mathbb{1}_A|_{A_*}$ und nennen*

$$\nu_A := -\frac{dD\mathbb{1}_A}{d|D\mathbb{1}_A|} \in L^1_{\text{lok}}(A_*, \mathbb{R}^n; |D\mathbb{1}_A|).$$

das **verallgemeinerte (äußere) Einheitsnormalenvektorfeld** *von A. Als* **reduzierten Rand** *$\mathscr{F}A$ von A bezeichnen wir die Menge aller Lebesgue-Punkte von ν_A bezüglich $|D\mathbb{1}_A|$ in A_*.*

Bemerkung 1.44.

- *$\mathscr{F}A$ ist eine Borel-Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und ν_A ist – wenn man beispielsweise $\nu_A = 0$ setzt wo $\frac{dD\mathbb{1}_A}{d|D\mathbb{1}_A|}$ nicht existiert – eine Borel-Funktion auf A_*.*
- *Abänderung von A um eine $\mathscr{L}^n$-Nullmenge ändert $\mathscr{F}A$ und ν_A nicht.*

[8] Um zu zeigen, dass eine solche Menge A_* stets ($A_* = \emptyset$ ist zugelassen) existiert, betrachte man die Vereinigung aller offenen Mengen mit der obigen Eigenschaft.

- *Da $-\nu_A$ die Dichte in der Polarzerlegung von $D\mathbb{1}_A$ repräsentiert, gilt $|\nu_A| = 1$ stets $|D\mathbb{1}_A|$-fast-überall auf A_*.*
- *Nach Definition 0.69 ist für $x \in \mathscr{F}A$ insbesondere $|D\mathbb{1}_A|(B_r(x)) > 0$ für $0 < r \ll 1$. Es folgt, dass $\mathscr{F}A$ stets eine Teilmenge des topologischen Randes ∂A ist.*
- *Ein Punkt $x \in A_*$ liegt genau dann in $\mathscr{F}A$, wenn $|D\mathbb{1}_A|(B_r(x)) > 0$ für $0 < r \ll 1$ gilt und $\nu_A(x)$ (im Sinne von Definition 0.8) an der Stelle x definiert ist mit $|\nu_A(x)| = 1$; und dann ist $\nu_A(x)$ der Lebesgue-Wert von ν_A an der Stelle x. Dies sieht man aus der Gleichung*

$$\fint_{B_r(x)} |\nu_A - y|^2 \, d|D\mathbb{1}_A| = 1 + |y|^2 + 2y \cdot \frac{D\mathbb{1}_A(B_r(x))}{|D\mathbb{1}_A|(B_r(x))}.$$

Es folgen nun Strukturuntersuchungen für Mengen von lokal endlichem Perimeter und ihren reduzierten Rand. Wir beginnen mit dem einfachen Fall $n = 1$.

Satz 1.45 (Mengen von endlichem Perimeter in $\mathbb{R}$). *Sei I ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$ und A eine Menge von endlichem Perimeter in I. Dann gibt es endlich viele Parameter $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < a_3 < b_3 < \ldots < a_k < b_k$ in $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ mit*

$$\mathbb{1}_A = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{1}_{(a_i,b_i)} \qquad \mathscr{L}^n\text{-fast-überall auf } I,$$

$$D\mathbb{1}_A\big|_I = \sum_{i=1}^{k} (\delta_{a_i} - \delta_{b_i})\big|_I,$$

$$\mathscr{F}A \cap I = \bigcup_{i=1}^{k} \{a_i, b_i\} \cap I.$$

Beweis. Für $a \in I$ und

$$v(x) := \begin{cases} D\mathbb{1}_A((a,x)) & \text{für } x > a \\ -D\mathbb{1}_A([x,a]) & \text{für } x \le a \end{cases}$$

gibt es nach Lemma 1.24 eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, so dass $c + v$ ein guter Repräsentant von $\mathbb{1}_A$ ist. Für alle $x \in I$ gilt nach Konstruktion

$$v(x+) - D\mathbb{1}_A(\{x\}) = v(x) = v(x-).$$

Da $c + v$ ein Vertreter von $\mathbb{1}_A$ ist, gelten stets $v(x+), v(x-) \in \{-c, 1-c\}$ und $|D\mathbb{1}_A|(\{x\}) = |D\mathbb{1}_A(\{x\})| \in \{0, 1\}$. Somit ist die Menge

$$J := \{x \in I : |D\mathbb{1}_A|(\{x\}) > 0\}$$

nach Voraussetzung endlich. Außerdem ist $c+v$ stetig und $\{0,1\}$-wertig auf $I \setminus J$, also abwechselnd konstant 0 und konstant 1 auf den endlich vielen Zusammenhangskomponenten von $I \setminus J$. Somit können wir nun die Intervalle (a_i, b_i) als diejenigen Zusammenhangskomponenten wählen, auf denen $c+v$ den Wert 1 annimmt. Es ergibt sich die erste Behauptung. Die anderen Behauptungen folgen nun problemlos. ☐

Nun kehren wir zurück zum Fall einer beliebigen Dimension $n \in \mathbb{N}$ und formulieren eines der **zentralen Resultate** der Vorlesung:

Satz 1.46 (**Struktursatz von De Giorgi**). *Sei A eine $\mathscr{L}^n$-messbare Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Dann ist $\mathscr{F}A$ lokal $\mathscr{H}^{n-1}$-endlich und abzählbar $(n-1)$-rektifizierbar und es gelten*

$$|D\mathbb{1}_A| = \mathbb{1}_{\mathscr{F}A} \cdot \mathscr{H}^{n-1}\big|_{A_*}$$

und

$$\operatorname{Tan}^{n-1}(\mathscr{F}A, y) = \nu_A(y)^{\perp} \qquad \textit{für } \mathscr{H}^{n-1}\textit{-fast alle } y \in \mathscr{F}A.$$

Korollar 1.47. *Für jede Menge A von endlichem Perimeter in Ω gilt*

$$\mathscr{H}^{n-1}(\mathscr{F}A \cap \Omega) = P_\Omega(A) < \infty.$$ □

Korollar 1.48 (**Verallgemeinerter Satz von Gauß**). *Sei A eine Menge von lokal endlichem Perimeter in Ω. Dann gilt*

$$\int_A \operatorname{div} \varphi \, dx = \int_{\mathscr{F}A \cap \Omega} \varphi \cdot \nu_A \, d\mathscr{H}^{n-1} \qquad \textit{für alle } \varphi \in \mathscr{D}(\Omega, \mathbb{R}^n).$$

Beweis. Aus den Definitionen der Maßableitung und des verallgemeinerten Einheitsnormalenvektorfelds erhalten wir

$$\int_A \operatorname{div} \varphi \, dx = \int_\Omega \varphi \cdot \nu_A \, d|D\mathbb{1}_A|.$$

Die Behauptung ergibt sich durch Umschreiben der rechten Seite gemäß dem vorigen Satz. □

Der Beweis[9] von Satz 1.46 erfordert zunächst einige Vorbereitungen.

Lemma 1.49. *Seien $u \in BV_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $\overline{B_r(y)} \subset \Omega$ und*

$$f(t) := \int_{B_t(y)} |u| \, dx.$$

Dann gilt

$$V_\Omega(\mathbb{1}_{B_r(y)} u) \le |Du|(\overline{B_r(y)}) + \liminf_{h \searrow 0} \frac{f(r+h) - f(r)}{h}.$$

Ist außerdem $|Du|(S_r(y)) = 0$ und f differenzierbar an der Stelle r, so folgt $\mathbb{1}_{B_r(y)} u \in BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$ mit

$$|D(\mathbb{1}_{B_r(y)} u)|(S_r(y)) \le f'(r).$$

Beweis. O. E. sei $y = 0$. Für jedes $0 < h \ll 1$ setzen wir

$$\eta_h(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } |x| \le r \\ \frac{r+h-|x|}{h} & \text{für } r \le |x| \le r+h \\ 0 & \text{für } r+h \le |x| \end{cases}$$

[9] Im Falle $n = 1$ kann man alles einfach aus Satz 1.45 ablesen.

und $u_h := \eta_h u$. Aus der Produktregel erhalten wir $u_h \in BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$ mit

$$|Du_h| \leq \eta_h \cdot |Du| + |\nabla \eta_h||u| \cdot \mathscr{L}^n|_\Omega$$

und folglich

$$|Du_h|(\Omega) \leq |Du|(B_{r+h}) + \frac{1}{h} \int_{B_{r+h} \setminus B_r} |u| \, dx.$$

Da $u_h \underset{h \searrow 0}{\longrightarrow} \mathbb{1}_{B_r} u$ stark in $L^1(\Omega)$ konvergiert, folgt die erste Behauptung durch Grenzübergang $h \searrow 0$ mit der Unterhalbstetigkeit der Variation. Ist f differenzierbar bei r, so erhalten wir $\mathbb{1}_{B_r(y)} u \in BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$ aus Korollar 1.17 und die zweite behauptete Ungleichung ergibt sich durch Subtraktion von $|Du|(B_r(y))$ auf beiden Seiten. □

Lemma 1.50. *Sei A eine Menge von lokal endlichem Perimeter in Ω und $y \in \mathscr{F}A \cap \Omega$. Dann gibt es einen Radius $r_0 > 0$ mit $B_{r_0}(y) \subset \Omega$, so dass*

$$|D\mathbb{1}_A|(B_r(y)) \leq Cr^{n-1} \qquad \text{für } 0 < r \leq r_0$$

mit einer nur von n abhängigen Konstanten C gilt.

Beweis. Wir nehmen $y = 0$ an. Aus dem letzten Teil von Bemerkung 1.44 sehen wir, dass es ein $r_0 > 0$ gibt mit $B_{2r_0} \subset \Omega$ und

$$|D\mathbb{1}_A|(B_t) \leq 2|D\mathbb{1}_A(B_t)| \qquad \text{für } 0 < t < 2r_0.$$

Außerdem folgt aus der Lokalität schwacher Ableitungen und Korollar 1.21

$$D\mathbb{1}_A(B_t) = D\mathbb{1}_{A \cap B_t}(B_t) = -D\mathbb{1}_{A \cap B_t}(S_t).$$

Nun setzen wir

$$f(t) := \int_{B_t} \mathbb{1}_A \, dx.$$

Dann ist f auf $(0, 2r_0)$ schon $\mathscr{L}^1$-fast-überall differenzierbar[10] und $|D\mathbb{1}_A|(S_t) = 0$ gilt für alle $t \in (0, 2r_0)$ bis auf höchstens endlich viele Ausnahmefälle. Daher lassen sich die vorausgehenden Formeln mit dem vorigen Lemma kombinieren zu

$$|D\mathbb{1}_A|(B_t) \leq 2f'(t) \qquad \text{für } \mathscr{L}^1\text{-fast-alle } t \in (0, 2r_0).$$

Für $0 < r \leq r_0$ erhalten wir daraus

$$|D\mathbb{1}_A|(B_r) \leq \fint_r^{2r} |D\mathbb{1}_A|(B_t) \, dt \leq 2 \fint_r^{2r} f'(t) \, dt \leq 2\frac{f(2r)}{r} \leq 2^{n+1} \omega_n r^{n-1} \qquad \square$$

Proposition 1.51. *Sei A eine $\mathscr{L}^n$-messbare Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $y \in \mathscr{F}A$. Dann gelten*

$$\mathbb{1}_{\frac{A-y}{r}} \underset{r \searrow 0}{\longrightarrow} \mathbb{1}_{\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \nu_A(y) \cdot x < 0\}} \qquad \textit{lokal schwach-}* \textit{ in } BV_{\text{lok}}(\mathbb{R}^n)$$

und

$$\operatorname{Tan}^{n-1}(|D\mathbb{1}_A|, y) = \mathbb{1}_{\nu_A(y)^\perp} \cdot \mathscr{H}^{n-1}.$$

[10] Monotone Funktionen f auf einem Intervall I sind $\mathscr{L}^1$-fast-überall auf I klassisch differenzierbar mit $\int_a^b |f'(t)| \, dt \leq |f(b) - f(a)|$ für alle $a, b \in I$; dies sieht man beispielsweise durch Anwendung von Satz 0.9 auf das Lebesgue-Stieltjes-Maß μ_f mit $\mu_f((a, b]) = |f(b) - f(a)|$.

Beweis. Aus Lemma 1.4 folgt die Gleichheit

$$r^{1-n}(D\mathbb{1}_A)_{y,r} = D(H^{y,r}{}_{\#}\mathbb{1}_A) = D\mathbb{1}_{\frac{A-y}{r}}$$

der reskalierten Maße. Seien nun $R > 0$ beliebig und r_0 (mit $B_{r_0}(y) \subset A_*$) und C seien die Konstanten aus Lemma 1.50 – mit A_* anstelle von Ω. Dann gilt

$$|r^{1-n}(D\mathbb{1}_A)_{y,r}|(B_R) = r^{1-n}|D\mathbb{1}_A|(B_{rR}(y)) \leq CR^{n-1} \qquad \text{für } 0 < r < \frac{r_0}{R}.$$

Mit dem Auswahlsatz und einem Diagonalfolgenargument lässt sich daher eine positive Nullfolge $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ finden mit

$$\mathbb{1}_{\frac{A-y}{r_k}} \xrightharpoonup[k\to\infty]{*} u \qquad \text{lokal schwach-}* \text{ in } BV_{\text{lok}}(\mathbb{R}^n).$$

Mit dem Satz von Rellich lässt sich daraus eine Teilfolge auswählen, die auch stark in $L^1_{\text{lok}}(\mathbb{R}^n)$ und $\mathscr{L}^n$-fast-überall konvergiert; daher folgt, dass $u = \mathbb{1}_E$ für eine Menge E von lokal endlichem Perimeter in $\mathbb{R}^n$ gilt. Tatsächlich zeigt eine Analyse der folgenden Argumente, dass $\mathbb{1}_E$ unabhängig von der Auswahl der (Teil-)Folgen ist und somit sogar $\mathbb{1}_{\frac{A-y}{r}}$ bei $r \searrow 0$ konvergiert; wir nehmen hier zur Vereinfachung direkt an, dass diese Konvergenz

$$\mathbb{1}_{\frac{A-y}{r}} \xrightharpoonup[r\searrow 0]{*} \mathbb{1}_E \qquad \text{lokal schwach-}* \text{ in } BV_{\text{lok}}(\mathbb{R}^n)$$

vorliegt und somit

$$\operatorname{Tan}^{n-1}(D\mathbb{1}_A, y) = D\mathbb{1}_E$$

existiert. Nun verwenden wir die Voraussetzung $y \in \mathscr{F}A$, um mit Satz 0.70 zu schließen, dass auch

$$\operatorname{Tan}^{n-1}(|D\mathbb{1}_A|, y) = |D\mathbb{1}_E|$$

existiert und

$$D\mathbb{1}_E = -\nu_A(y)|D\mathbb{1}_E|$$

gilt. Folglich ist

$$\nabla(\mathbb{1}_E)_\varepsilon = \rho_\varepsilon * D\mathbb{1}_E = -\nu_A(y)\rho_\varepsilon * |D\mathbb{1}_E|$$

und daher ist $(\mathbb{1}_E)_\varepsilon$ nichtfallend in Richtung $-\nu_A(y)$ und konstant in allen Richtungen orthogonal zu $\nu_A(x)$, mit anderen Worten gibt es nichtfallende $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit

$$(\mathbb{1}_E)_\varepsilon(x) = f_\varepsilon(-\nu_A(y) \cdot x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Da $\mathscr{L}^n$-fast-überall $(\mathbb{1}_E)_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\searrow 0]{} \mathbb{1}_E$ konvergiert, gibt es eine weitere Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\mathbb{1}_E(x) = f(-\nu_A(y) \cdot x) \qquad \text{für } \mathscr{L}^n\text{-fast alle } x \in \mathbb{R}^n$$

und

$$f_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\searrow 0]{} f \qquad \text{für } \mathscr{L}^1\text{-fast-alle } x \in \mathbb{R}.$$

Daraus entnehmen wir, dass f – eventuell nach Abänderung auf einer $\mathscr{L}^1$-Nullmenge – nichtfallend und $\{0,1\}$-wertig ist, also $f = \mathbb{1}_{(t,\infty)}$ oder $f = \mathbb{1}_{[t,\infty)}$ für ein $t \in \mathbb{R}$. Dies bedeutet $\mathbb{1}_E = \mathbb{1}_{\{x\in\mathbb{R}^n\,:\,-\nu_A(y)\cdot x>t\}}$ $\mathscr{L}^n$-fast-überall und gemäss den früheren Beispielen ist

$$D\mathbb{1}_E = -\nu_A(y)\mathbb{1}_{\{x\in\mathbb{R}^n\,:\,-\nu_A(y)\cdot x=t\}} \cdot \mathscr{H}^{n-1}.$$

Berücksichtigen wir die Homogenität von Tangentialmaßen, so folgen mit $t = 0$ und

$$\operatorname{Tan}^{n-1}(|D\mathbb{1}_A|, y) = \mathbb{1}_{\nu_A(y)^\perp} \cdot \mathscr{H}^{n-1}$$

die Behauptungen. □

Beweis von Satz 1.46. Nach der vorausgehenden Proposition besitzt $|D\mathbb{1}_A|$ in allen $y \in \mathscr{F}A$ einen approximativen Tangentialraum mit Vielfachheit 1. Aus der Definition von $\mathscr{F}A$ entnehmen wir außerdem

$$|D\mathbb{1}_A|(A_* \setminus \mathscr{F}A) = 0;$$

somit lässt sich das Rektifizierbarkeitskriterium aus Satz 0.88 anwenden und wir sehen, dass $|D\mathbb{1}_A|$ schon $(n-1)$-rektifizierbar ist mit

$$|D\mathbb{1}_A| = \mathbb{1}_{\widetilde{\mathscr{F}A}} \cdot \mathscr{H}^{n-1}\big|_{A_*}$$

für eine abzählbar $(n-1)$-rektifizierbare Menge $\widetilde{\mathscr{F}A}$ mit $\mathscr{F}A \subset \widetilde{\mathscr{F}A} \subset A_*$. Folglich ist auch $\mathscr{F}A$ abzählbar $(n-1)$-rektifizierbar und

$$|D\mathbb{1}_A| = \mathbb{1}_{\mathscr{F}A} \cdot \mathscr{H}^{n-1}\big|_{A_*}.$$

Insbesondere können wir nun ablesen, dass $\mathscr{F}A$ lokal $\mathscr{H}^{n-1}$-endlich ist und alle verbleibenden Behauptungen des Satzes ergeben sich aus der letzten Gleichung und Proposition 1.51. □

Definition 1.52 (Wesentlicher Rand). *Sei A eine $\mathscr{L}^n$-messbare Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $t \in [0,1]$. Wir führen die Borel-Mengen*

$$A^t := \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \Theta_n(A,x) = t\}$$

ein und definieren den **wesentlichen Rand** *$\partial^* A$ von A durch*

$$\partial^* A := \mathbb{R}^n \setminus (A^0 \cup A^1).$$

Bemerkung 1.53. *Das Innere von A ist stets in A^1 und das Äußere von A stets in A^0 enthalten; folglich gilt*

$$A^t \subset \partial^* A \subset \partial A \qquad \text{für } 0 < t < 1.$$

Satz 1.54 (Struktursatz von Federer). *Sei A eine $\mathscr{L}^n$-messbare Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Dann gelten*

$$\mathscr{F}A \subset A^{\frac{1}{2}} \qquad \text{und} \qquad \mathscr{H}^{n-1}(A_* \setminus (A^1 \cup \mathscr{F}A \cup A^0)) = 0.$$

Beweis. Für $y \in \mathscr{F}A$ gilt nach Proposition 1.51

$$\Theta_n(A,x) = \frac{1}{\omega_n} \lim_{r \searrow 0} \mathbb{1}_{\frac{A-y}{r}} \cdot \mathscr{L}^n(B_1) = \frac{1}{\omega_n} \mathscr{L}^n(\{x \in B_1 \,:\, \nu_A(y) \cdot x < 0\}) = \frac{1}{2};$$

dies zeigt die Inklusion $\mathscr{F}A \subset A^{\frac{1}{2}}$. Als Nächstes zeigen wir, dass für $y \in A_*$ mit $\Theta_{n-1}(\mathscr{F}A, y) = 0$ schon $y \in A^1 \cup A^0$ gilt. Da $\Theta_{n-1}(\mathscr{F}A, y) = 0$ nach Satz 0.64 für $\mathscr{H}^{n-1}$-fast-alle $y \in \mathbb{R}^n \setminus \mathscr{F}A$ gilt, reicht dies zum Beweis der zweiten Behauptung. Sei also $\Theta_{n-1}(\mathscr{F}A, y) = 0$. Mit Satz 1.46 erkennen wir dies als Umformulierung von

$$\lim_{r \searrow 0} \frac{|D\mathbb{1}_A|(B_r(y))}{r^{n-1}} = 0$$

und nach Proposition 1.40 folgt

$$\lim_{r \searrow 0} \min\{\alpha_r(y), 1 - \alpha_r(y)\} = 0,$$

mit der Bezeichnung $\alpha_r(y) := (\mathbb{1}_A)_{B_r(y)}$. Da $\alpha_r(y)$ stetig von r abhängt, erhalten wir die Existenz von $\lim_{r \searrow 0} \alpha_r(y) \in \{0, 1\}$, also $y \in A^1 \cup A^0$. $\square$

Bemerkung 1.55. *Der vorige Struktursatz impliziert, dass $A^{\frac{1}{2}} \cap A_*$ und $\partial^* A \cap A_*$ sich von $\mathscr{F}A$ nur um eine $\mathscr{H}^{n-1}$-Nullmenge unterscheiden. Daher kann man $A^{\frac{1}{2}}$, $\partial^* A$ und $\mathscr{F}A$ als im wesentlichen äquivalente Definitionen eines maßtheoretischen Randes verstehen. Alle Sätze, die den Perimeter oder den reduzierten Rand betreffen, lassen sich nun auch mit den anderen beiden Randbegriffen formulieren.*

Wir schließen diesen Abschnitt mit einem Kriterium für die Endlichkeit des Perimeters.

Satz 1.56. *Für jedes $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ gilt*

$$P_{\mathbb{R}^n}(A) \leq \mathscr{H}^{n-1}(\partial A).$$

Insbesondere hat jede Borel-Menge mit $\mathscr{H}^{n-1}$-endlichem Rand in $\mathbb{R}^n$ endlichen Perimeter in $\mathbb{R}^n$.

Beweisskizze. Wir nehmen $\mathscr{H}^{n-1}(\partial A) < \infty$ an. Es reicht jedenfalls zu zeigen, dass $P_{\mathbb{R}^n}(A) < \infty$ ist; denn dann folgt wegen $\mathscr{F}A \subset \partial A$ und Satz 1.46 schon

$$P_{\mathbb{R}^n}(A) = |D\mathbb{1}_A|(\mathbb{R}^n) = \mathscr{H}^{n-1}(\mathscr{F}A) \leq \mathscr{H}^{n-1}(\partial A).$$

Um nun $P_{\mathbb{R}^n}(A) < \infty$ zu zeigen, fixieren wir $\delta > 0$ und wählen eine Überdeckung von ∂A durch abzählbar viele Kugeln $B_{r_1}(x_1)$, $B_{r_2}(x_2)$, … mit Radien $r_i < \delta$, derart dass

$$\sum_{i=1}^{\infty} \omega_{n-1} r_i^{n-1} \leq \mathscr{H}^{n-1}(\partial A) + \delta$$

gilt. Da ∂A lokal kompakt ist, können wir annehmen, dass diese Überdeckung lokal endlich ist. Es folgt, dass

$$A_\delta := A \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{r_i}(x_i)$$

offen und bei $\mathscr{H}^{n-1}$-fast-allen Randpunkten glatt ist mit $\partial A_\delta \subset \bigcup_{i=1}^\infty \partial B_{r_i}(x_i)$ und daher können wir – im Wesentlichen wie früher mit der passenden Version des Gaußschen Satzes – auf

$$P_{\mathbb{R}^n}(A_\delta) = \mathscr{H}^{n-1}(\partial A_\delta) \leq \sum_{i=1}^\infty n\omega_n r_i^{n-1} \leq \frac{n\omega_n}{\omega_{n-1}}\Big[\mathscr{H}^{n-1}(\partial A) + \delta\Big]$$

schließen. Außerdem gilt

$$\mathscr{L}^n(A_\delta \setminus A) \leq \sum_{i=1}^\infty \omega_n r_i^n \leq \delta \frac{\omega_n}{\omega_{n-1}}\Big[\mathscr{H}^{n-1}(\partial A) + \delta\Big] \underset{\delta\searrow 0}{\longrightarrow} 0$$

und daher $\mathbb{1}_{A_\delta} \underset{\delta\searrow 0}{\longrightarrow} \mathbb{1}_A$ stark in $L^1_{\text{lok}}(\mathbb{R}^n)$. Somit liefert uns die Unterhalbstetigkeit des Perimeters

$$P_{\mathbb{R}^n}(A) \leq \frac{n\omega_n}{\omega_{n-1}}\mathscr{H}^{n-1}(\partial A) < \infty$$

und die Behauptung folgt. □

Korollar 1.57. *Genügt $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ einer beidseitigen Kegelbedingung*[11] *mit $\mathscr{H}^{n-1}(\partial A) < \infty$, so gilt*

$$P_{\mathbb{R}^n}(A) = \mathscr{H}^{n-1}(\partial A).$$

Beweis. Aus der beidseitigen Kegelbedingung entnimmt man $\partial A \subset \partial^* A$, gemäß Bemerkung 1.53 also schon $\partial A = \partial^* A$. Daher folgt die Behauptung aus dem vorigen Satz und den Struktursätzen. □

1.9 Approximative Sprungstellen

Unser nächstes Ziel ist nun zu verstehen, welche Maße als Ableitungen von BV-Funktionen überhaupt auftreten können.

Definition 1.58 (Approximative (Un-)Stetigkeitsstellen)**.** *Sei $u \in L^1_{\text{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Wir bezeichnen die (Nicht-)Lebesgue-Punkte von u bezüglich $\mathscr{L}^n$ im Folgenden als die* **approximativen (Un-)Stetigkeitsstellen** *von u. Für die Menge der approximativen Unstetigkeitsstellen von u vereinbaren wir die Abkürzung S_u und wir definieren den* **Lebesgue-Vertreter** *$\bar{u}$ von u als die Abbildung $\Omega \setminus S_u \to \mathbb{R}^N$, die Punkten ihren Lebesgue-Wert zuordnet.*

Bemerkung 1.59. *Es ist $S_u \in \mathscr{B}(\Omega)$ mit $\mathscr{L}^n(S_u) = 0$ und $\bar{u}$ ist eine Borel-Funktion, für die jede Fortsetzung auf ganz Ω ein Repräsentant von u ist. Außerdem liegen alle Stetigkeitsstellen eines Repräsentanten von u in $\Omega \setminus S_u$ und für jedes $y \in \Omega \setminus S_u$ liegt punktweise Konvergenz $u_\varepsilon(y) \underset{\varepsilon\searrow 0}{\longrightarrow} \bar{u}(y)$ der Glättungen vor.*

[11] A genügt einer inneren Kegelbedingung, wenn es zu jedem $x \in \partial A$ einen $(n-1)$-dimensionalen Unterraum T von $\mathbb{R}^n$ und positive Parameter δ und M gibt mit $x + \big[B_\delta \cap K_M(T)\big] \subset A$. A genügt einer äußeren Kegelbedingung, wenn $\mathbb{R}^n \setminus A$ einer inneren Kegelbedingung genügt. A genügt einer beidseitigen Kegelbedingung, wenn es einer inneren und einer äußeren Kegelbedingung genügt.

Im Zusammenhang mit der folgenden Definition nennen wir zwei Tripel (a, b, ν) und $(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{\nu})$ äquivalent, wenn sie entweder gleich sind oder $a = \tilde{b}$, $b = \tilde{a}$ und $\nu = -\tilde{\nu}$ gelten. Wir identifizieren solche Tripel mit ihrer Äquivalenzklasse bezüglich der soeben definierten Relation.

Definition 1.60 (Approximative Sprungstellen)**.** *Sei* $u \in L^1_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$*. Ein Punkt* $y \in \Omega$ *heißt eine* **approximative Sprungstelle** *von* u*, wenn es* $a \neq b$ *in* $\mathbb{R}^N$ *und* $\nu \in S_1^{n-1}$ *gibt mit*

$$\fint_{B_r^+(y,\nu)} |u - a|\,dx \xrightarrow[r \searrow 0]{} 0 \qquad \text{und} \qquad \fint_{B_r^-(y,\nu)} |u - b|\,dx \xrightarrow[r \searrow 0]{} 0.$$

Dabei bezeichnet $B_r^\pm(y, \nu)$ *die Halbkugel*

$$\{x \in B_r(y) \,:\, \pm(x - y) \cdot \nu > 0\}.$$

Dabei ist das Tripel (a, b, ν) *bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt und wird mit* $(u^+(y), u^-(y), \nu_u(y))$ *bezeichnet. Für die Menge der approximativen Sprungsstellen führen wir die Notation* J_u *ein und manchmal nennen wir die Funktion* ν_u *eine* **Orientierung** *von* J_u*.*

Bemerkung 1.61. *Es gelten* $J_u \in \mathscr{B}(\Omega)$ *und*

$$J_u \subset S_u.$$

Außerdem können u^+*,* u^- *und* ν_u *als Borel-Funktionen auf* J_u *gewählt werden und für jedes* $y \in J_u$ *konvergieren die Glättungen*

$$u_\varepsilon(y) \xrightarrow[\varepsilon \searrow 0]{} \frac{u^+(y) + u^-(y)}{2}$$

gegen das arithmetische Mittel von $u^+(y)$ *und* $u^-(y)$*.*

Bemerkung 1.62. *Für jede* $\mathscr{L}^n$*-messbare Teilmenge* A *von* $\mathbb{R}^n$ *gelten*

$$\mathscr{F}A \subset J_{\mathbb{1}_A} \subset A^{\frac{1}{2}} \subset S_{\mathbb{1}_A} = \partial^* A$$

und $\big[(\mathbb{1}_A)^- - (\mathbb{1}_A)^+\big]\nu_{\mathbb{1}_A} = \nu_A$ *auf* $\mathscr{F}A$*. Andererseits unterscheiden sich*

$$\mathscr{F}A, \qquad J_{\mathbb{1}_A} \cap A_*, \qquad A^{\frac{1}{2}} \cap A_* \qquad \text{und} \qquad S_{\mathbb{1}_A} \cap A_* = \partial^* A \cap A_*$$

nur um eine $\mathscr{H}^{n-1}$*-Nullmenge. Später werden wir sehen, dass dieser Zusammenhang zwischen* J_u *und* S_u *auch für beliebige* BV_{lok}*-Funktionen* u *bestehen bleibt.*

Beweis. Die Gleichheit $S_{\mathbb{1}_A} = \partial^* A$ lässt sich problemlos nachrechnen, wenn man bemerkt, dass für $y \in \mathbb{R}^n \setminus S_{\mathbb{1}_A}$ stets $\overline{\mathbb{1}_A}(y) = 1$ oder $\overline{\mathbb{1}_A}(y) = 0$ gilt. Zum Beweis der anderen Inklusionen bemerken wir zunächst, dass $(\mathbb{1}_A)^+$ und $(\mathbb{1}_A)^-$ nur die Werte 0 und 1 annehmen können. Tatsächlich können wir durch

Übergang zu einer geeigneten Orientierung stets $(\mathbb{1}_A)^+ \equiv 1$ und $(\mathbb{1}_A)^- \equiv 0$ auf $J_{\mathbb{1}_A}$ erreichen. Es folgt, dass $y \in \mathbb{R}^n$ genau dann in $J_{\mathbb{1}_A}$ liegt, wenn

$$\fint_{B_r^+(y,\nu)} \mathbb{1}_A \, dx \xrightarrow[r\searrow 0]{} 1 \qquad \text{und} \qquad \fint_{B_r^-(y,\nu)} \mathbb{1}_A \, dx \xrightarrow[r\searrow 0]{} 0$$

für ein $\nu \in S_1^{n-1}$ gelten. Aus dieser Charakterisierung entnehmen wir sofort die Inklusion $J_{\mathbb{1}_A} \subset A^{\frac{1}{2}}$. Schreiben wir in der Charakterisierung noch

$$\fint_{B_r^+(y,\nu)} \mathbb{1}_A \, dx = \fint_{B_1^+(0,\nu)} \mathbb{1}_{\frac{A-y}{r}} \, dx$$

um, so erhalten wir die Inklusion $\mathscr{F}A \subset J_{\mathbb{1}_A}$ mit $\nu_{\mathbb{1}_A} = -\nu_A$ aus Proposition 1.51. Die verbleibende Inklusion $A^{\frac{1}{2}} \subset \partial^* A$ gilt trivial und die restlichen Behauptungen folgen mit Satz 1.54. ☐

Satz 1.63 (Vergleich von $|Du|$ und $\mathscr{H}^{n-1}$). *Sei $u \in BV_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Dann ist J_u stets $\mathscr{H}^{n-1}$-σ-endlich mit*

$$|Du| \geq |u^+ - u^-| \mathbb{1}_{J_u} \cdot \mathscr{H}^{n-1}|_\Omega \tag{1.7}$$

und für jedes $A \in \mathscr{B}(\Omega)$ gelten die Implikationen

$$\mathscr{H}^{n-1}(A) = 0 \implies |Du|(A) = 0, \tag{1.8}$$

$$A \ \mathscr{H}^{n-1}\text{-}\sigma\text{-endlich mit } A \cap S_u = \emptyset \implies |Du|(A) = 0. \tag{1.9}$$

Insbesondere ist jede $\mathscr{H}^{n-1}$-messbare Menge auch $|Du|$-messbar.

Beweis. Wir nehmen o. E. $V_\Omega(u) < \infty$ an. Außerdem beschränken wir uns vorerst auf den Fall $N = 1$ und nehmen (eventuell nach Orientierungswechsel) $u^+ > u^-$ auf J_u an. Sei $A \in \mathscr{B}(\Omega)$ beliebig. Nach der Koflächenformel, dem Struktursatz und Bemerkung 1.62 gibt es dann eine $\mathscr{L}^1$-Nullmenge E, so dass $\{u > t\}$ für alle $t \in \mathbb{R} \setminus E$ eine Menge von endlichem Perimeter in Ω ist mit

$$|D\mathbb{1}_{\{u>t\}}|(A) = \mathscr{H}^{n-1}(A \cap J_{\mathbb{1}_{\{u>t\}}}) = \mathscr{H}^{n-1}(A \cap \partial^*\{u > t\}).$$

Jetzt wählen wir eine abzählbare dichte Teilmenge[12] Q von $\mathbb{R}$ mit $Q \cap E = \emptyset$ und nehmen vorerst an, dass außerdem

$$J_u \cap \{u^- < t < u^+\} \subset J_{\mathbb{1}_{\{u>t\}}} \tag{1.10}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Dann folgt

$$J_u \subset \bigcup_{q \in Q} J_{\mathbb{1}_{\{u>q\}}}.$$

[12] Tatsächlich kann man diese Menge Q als eine Nebenklasse von $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ wählen; träfen nämlich alle diese Nebenklassen E, so wäre $\mathbb{R} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (q+E)$ eine $\mathscr{L}^1$-Nullmenge.

und wir erhalten $\mathscr{H}^{n-1}$-σ-Endlichkeit von J_u. Außerdem sehen wir jetzt mit der Koflächenformel und dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}|Du|(A) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{H}^{n-1}(A \cap J_{\mathbb{1}_{\{u>t\}}})\, dt \\ &\geq \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{H}^{n-1}(A \cap J_u \cap \{u^- < t < u^+\})\, dt \\ &= \int_A [u^+ - u^-]\, d(\mathbb{1}_{J_u} \cdot \mathscr{H}^{n-1}).\end{aligned}$$

Es folgen die Behauptungen (1.8) und (1.7). Um (1.9) einzusehen bemerken wir, dass für $y \in \Omega \setminus S_u$ und $t > \bar{u}(y)$ gilt

$$\Theta_n^*(\{u > t\}, y) \leq \frac{1}{t - \bar{u}(y)} \limsup_{r \searrow 0} \fint_{B_r(y)} |u - \bar{u}(y)|\, dx = 0,$$

also $y \in \{u > t\}^0$. Analog folgt im Falle $t < \bar{u}(y)$ schon $y \in \{u > t\}^1$, also ist für jedes $y \in \Omega \setminus S_u$ die Menge

$$\{t \in \mathbb{R} : y \in \partial^*\{u > t\}\} = \{\bar{u}(y)\}$$

einelementig. Genügt nun A den Voraussetzungen von (1.9), so erhalten wir mit der Koflächenformel und Fubini

$$\begin{aligned}|Du|(A) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{H}^{n-1}(A \cap \partial^*\{u > t\})\, dt \\ &= \int_A \mathscr{L}^1(\{t \in \mathbb{R} : y \in \partial^*\{u > t\}\})\, d\mathscr{H}^{n-1}(y) = 0.\end{aligned}$$

Um den Beweis im Falle $N = 1$ zu vervollständigen, müssen wir also nur noch (1.10) nachweisen: Sei dazu $y \in J_u$ mit $u^-(y) < t < u^+(y)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\fint_{B_r^+(y,\nu_u(y))} |\mathbb{1}_{\{u>t\}} - 1|\, dx &= \fint_{B_r^+(y,\nu_u(y))} \mathbb{1}_{\{u \leq t\}}\, dx \\ &\leq \frac{1}{u^+(y) - t} \fint_{B_r^+(y,\nu_u(y))} |u - u^+(y)|\, dx \underset{r \searrow 0}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Analog sieht man

$$\fint_{B_r^-(y,\nu_u(y))} |\mathbb{1}_{\{u>t\}}|\, dx \underset{r \searrow 0}{\longrightarrow} 0$$

ein und daher ist $y \in J_{\mathbb{1}_{\{u>t\}}}$.

Nun kehren wir schließlich zurück zum Fall einer beliebigen Dimension $N \in \mathbb{N}$. Die Behauptungen (1.8) und (1.9) lassen sich nun unter Verwendung der einfachen Ungleichung

$$|Du| \leq \sum_{i=1}^{N} |Du_i|$$

von den Komponentenfunktionen u_i auf u übertragen. Zur Übertragung von (1.7) schließlich brauchen wir ein etwas komplizierteres Argument: Wir bemerken zunächst, dass

$$J_u \subset \bigcup_{i=1}^{N} J_{u_i}$$

$\mathscr{H}^{n-1}$-σ-endlich ist mit

$$(u^+ - u^-)_i = \big[(u_i)^+ - (u_i)^-\big]\mathbb{1}_{J_{u_i}} \text{ auf } J_u.$$

Daher wissen wir für

$$\mu := (u^+ - u^-)\mathbb{1}_{J_u} \cdot \mathscr{H}^{n-1}|_\Omega$$

bereits $|\mu_i| \leq |Du_i|$. Insbesondere ist $\mu \ll |Du|$, also können wir mit Radon-Nikodym $\mu = f \cdot |Du|$ und $Du = g \cdot |Du|$ schreiben. Es folgen $|f_i| \leq |g_i|$ und $|f| \leq |g| = 1$ jeweils $|Du|$-fast-überall und daher gilt $|\mu| \leq |Du|$. ☐

1.10 Struktursätze für *BV*-Funktionen

Lemma 1.64. *Sei (A_l) eine Folge in $\mathscr{B}(\Omega)$ mit*

$$P_\Omega(A_l) + \mathscr{L}^n(A_l) \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{1.11}$$

Dann gilt für jedes $t > 0$

$$\mathscr{H}^{n-1}\left(\bigcap_{l=1}^{\infty}\{x \in \Omega \,:\, \Theta_n^*(A_l, x) \geq t\}\right) = 0.$$

Beweis. O. E. sei $t \leq 1$. Wir fixieren ein Kompaktum K in Ω und betrachten zunächst ein $A \in \mathscr{B}(\Omega)$ mit $P_\Omega(A) + \mathscr{L}^n(A) < \infty$. Außerdem setzen wir

$$E := \{x \in \Omega \,:\, \Theta_n^*(A, x) \geq t\}.$$

und $\delta := \left(\frac{4\mathscr{L}^n(A)}{t\omega_n}\right)^{\frac{1}{n}}$. Wir behaupten, dass im Falle $\delta < \operatorname{dist}(K, \partial\Omega)$

$$\mathscr{H}^{n-1}_\delta(K \cap E) \leq \frac{C}{t} P_\Omega(A) \tag{1.12}$$

mit einer nur von n abhängigen Konstanten C gilt. Dazu bemerken wir, dass für jedes $y \in K \cap E$ einerseits $\limsup_{r\searrow 0} \fint_{B_r(y)} \mathbb{1}_A \, dx \geq t$ und andererseits $\fint_{B_\delta(y)} \mathbb{1}_A \, dx \leq \frac{t}{4}$ gilt. Somit gibt es aus Stetigkeitsgründen stets einen Radius $r_y \in (0, \delta)$ mit

$$\fint_{B_{r_y}(y)} \mathbb{1}_A \, dx = \frac{t}{2} \leq \frac{1}{2}.$$

Aus Proposition 1.40 erhalten wir nun

$$\frac{t}{2} \leq C \frac{|D\mathbb{1}_A|(B_{r_y}(y))}{r_y^{n-1}}.$$

Mit dem Überdeckungssatz von Besicovitch können wir nun $K \cap E$ durch Kugeln $B_{r_y}(y)$ mit $y \in K \cap E$ bei kontrollierter Überlappung überdecken und erhalten (1.12) (mit einer anderen Konstanten C). Nun verwenden wir in naheliegender Weise die Notationen δ_l und E_l und setzen $E_\infty := \bigcap_{l=1}^\infty E_l$. Dann konvergiert $\delta_l \to 0$ und Anwendung von (1.12) für $l \gg 1$ gibt

$$\mathscr{H}^{n-1}(K \cap E_\infty) = \lim_{l\to\infty} \mathscr{H}^{n-1}_{\delta_l}(K \cap E_\infty) \leq \limsup_{l\to\infty} \mathscr{H}^{n-1}_{\delta_l}(K \cap E_l) = 0.$$

Da K beliebig war folgt $\mathscr{H}^{n-1}(E_\infty) = 0$. ☐

Das nächste Lemma kann als eine Vorstufe der Kettenregel verstanden werden; man vergleiche Kapitel 1.13.

Lemma 1.65. *Ist $u \in BV_{\text{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ und ist $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^K$ Lipschitz-stetig, so ist $f \circ u \in BV_{\text{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^K)$ mit*

$$|D(f \circ u)| \leq (\operatorname{Lip} f)|Du|.$$

Beweis. Es reicht im Falle $\mathscr{L}^n(\Omega) < \infty$ und $u \in BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$ zu zeigen, dass

$$V_\Omega(f \circ u) \leq (\operatorname{Lip} f)|Du|(\Omega) \tag{1.13}$$

gilt. Sei dazu $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von glatten Funktionen, die strikt in $BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$ gegen u konvergiert. Dann ist $f \circ u_k$ lokal Lipschitz. Folglich ist $D(f \circ u_k) = \nabla(f \circ u_k) \cdot \mathscr{L}^n|_\Omega$ und nach dem Satz von Rademacher lässt sich $\nabla(f \circ u_k)$ sogar $\mathscr{L}^n$-fast-überall als klassisches Differential berechnen. Insbesondere folgt

$$|\nabla(f \circ u_k)| \leq (\operatorname{Lip} f)|\nabla u_k| \qquad \mathscr{L}^n\text{-fast-überall auf } \Omega.$$

Außerdem konvergiert dann $f \circ u_k \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} f \circ u$ stark in $L^1(\Omega)$ und mit der Unterhalbstetigkeit der Variation erhalten wir (1.13). □

Lemma 1.66. *Für $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, $A \in \mathscr{B}(\Omega)$ und jedes nichtnegative Radon-Maß μ auf Ω gelten*

$$\mathscr{H}^k\Big(\{y \in \Omega \,:\, \limsup_{r \searrow 0} r^{-k}\mu(B_r(y)) = \infty\}\Big) = 0,$$

$$\mu(A) = 0 \implies \mathscr{H}^k\Big(\{y \in A \,:\, \limsup_{r \searrow 0} r^{-k}\mu(B_r(y)) > 0\}\Big) = 0.$$

Beweis. Wir nehmen $\mu(\Omega) < \infty$ an. Mit dem Überdeckungsargument aus Satz 0.64 sehen wir, dass für jedes $E \in \mathscr{B}(\Omega)$ und $0 < t < \infty$ gilt

$$\limsup_{r \searrow 0} \frac{\mu(B_r(x))}{\omega_k r^k} \geq t \text{ für alle } x \in E \implies \mu(E) \geq t\mathscr{H}^k(E).$$

Die Behauptungen folgen nun durch die Grenzübergänge $t \to \infty$ und $t \searrow 0$. □

Lemma 1.67. *Für jedes $u \in BV_{\text{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ ist*

$$\mathscr{H}^{n-1}\left(\left\{y \in \Omega \,:\, \limsup_{r \searrow 0} \fint_{B_r(y)} |u|^{1^*}\,dx = \infty\right\}\right) = 0.$$

Beweis. Wie üblich können wir $u \in BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$ annehmen. Wir verwenden Lemma 1.65 mit $f(x) = |x|$ um auf den Fall $N = 1$ und $u \geq 0$ zu reduzieren. Aus Lemma 1.66 entnehmen wir, dass

$$D := \{y \in \Omega \,:\, \limsup_{r \searrow 0} r^{1-n}|Du|(B_r(y)) = \infty\}$$

eine $\mathscr{H}^{n-1}$-Nullmenge ist. Zeigen wir nun noch, dass für $\mathscr{H}^{n-1}$-fast-alle $y \in \Omega \setminus D$ die Mittelwerte $u_{y,r} = u_{B_r(y)}$ beschränkt bleiben bei $r \searrow 0$, so folgt die Behauptung aus der Sobolev-Poincaré-Ungleichung. Um den Beweis zu vervollständigen betrachten wir nun einen Punkt $y \in \Omega \setminus D$ mit unbeschränkten Mittelwerten. Dann gibt es eine Nullfolge $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $u_{y,r_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Setzen wir

$$u_k(x) := u(y + r_k x) - u_{y,r_k},$$

so gilt für $k \gg 1$

$$|Du_k|(B_1) = r_k^{1-n}|Du|(B_{r_k}(y))$$

und mit der Poincaré-Ungleichung folgt, dass die u_k bei $k \to \infty$ beschränkt bleiben in $BV(B_1)$. Mit dem Satz von Rellich können wir nach Teilfolgenübergang annehmen, dass die u_k $\mathscr{L}^n$-fast-überall gegen einen Grenzwert $v \in L^1(B_1)$ konvergieren, also

$$u(y + r_k x) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty \text{ für } \mathscr{L}^n\text{-fast-alle } x \in B_1.$$

Dies impliziert

$$\Theta_n^*(\{u > s\}, y) \geq \lim_{k\to\infty} \omega_n^{-1}\mathscr{L}^n(\{x \in B_1 \,:\, u(y + r_k x) > s\}) = 1$$

für alle $s \in \mathbb{R}$. Wir wählen nun zu jedem $l \in \mathbb{N}$ ein $s_l \in (l-1, l)$ mit

$$P_\Omega(\{u > s_l\}) \leq \int_{l-1}^{l} P_\Omega(\{u > s\})\, ds$$

und betrachten die Folge $A_l := \{u > s_l\}$. Aus der Koflächenformel entnehmen wir, dass $\sum_{l=1}^{\infty} P_\Omega(A_l) < \infty$ gilt. Dies benutzen wir zusammen mit der Summierbarkeit von u, um zu schließen, dass die Voraussetzung (1.11) von Lemma 1.64 erfüllt ist. Also liegt y in der $\mathscr{H}^{n-1}$-Nullmenge aus Lemma 1.64. □

Wir sagen im Folgenden, dass eine abzählbar $\mathscr{H}^{n-1}$-rektifizierbare Menge Γ in $\mathbb{R}^n$ durch eine $\mathscr{H}^{n-1}$-messbare Funktion $\nu : \Gamma \to S_1^{n-1}$ orientiert wird, wenn für $\mathscr{H}^{n-1}$-fast-alle $y \in \Gamma$

$$\mathrm{Tan}^{n-1}(\Gamma, y) = \nu(y)^\perp$$

gilt. In dieser Situation bezeichnen wir ν auch als eine Orientierung von Γ.

Satz 1.68 (Innere Spuren). *Sei $u \in BV_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ und Γ sei eine abzählbar $\mathscr{H}^{n-1}$-rektifizierbare Teilmenge von Ω mit Orientierung ν. Dann gibt es für $\mathscr{H}^{n-1}$-fast-alle $y \in \Gamma$ zwei Werte $u_\Gamma^+(y), u_\Gamma^-(y) \in \mathbb{R}^N$ mit*

$$⨍_{B_r^+(y,\nu(y))} |u - u_\Gamma^+(y)|\, dx \underset{r\searrow 0}{\longrightarrow} 0 \quad \text{und} \quad ⨍_{B_r^-(y,\nu(y))} |u - u_\Gamma^-(y)|\, dx \underset{r\searrow 0}{\longrightarrow} 0. \quad (1.14)$$

Außerdem gilt

$$\mathbb{1}_\Gamma \cdot Du = (u_\Gamma^+ - u_\Gamma^-) \otimes \nu \mathbb{1}_\Gamma \cdot \mathscr{H}^{n-1}|_\Omega. \quad (1.15)$$

Beweis. Wir können $N = 1$ annehmen. Wir zeigen zunächst, dass es wie behauptet u_Γ^+ und u_Γ^- mit (1.14) gibt. Als erstes betrachten wir dazu den Fall $u = \mathbb{1}_A$ mit einer Menge A von lokal endlichem Perimeter in Ω. In diesem Fall können wir offensichtlich $u_\Gamma^+(y) = u_\Gamma^-(y) = 1$ für $y \in A^1 \cap \Gamma$ und $u_\Gamma^+(y) = u_\Gamma^-(y) = 0$ für $y \in A^0 \cap \Gamma$ wählen. Im Falle $y \in \mathscr{F}A \cap \Gamma$ gilt dagegen $\nu(y) = \pm\nu_A(y)$ nach Lemma 0.83 und dem Struktursatz von De Giorgi. Folglich (vergleiche Bemerkung 1.62) ist (1.14) erfüllt wenn wir $u_\Gamma^+(y) = 0$, $u_\Gamma^-(y) = 1$ im Falle $\nu(y) = \nu_A(y)$ und $u_\Gamma^+(y) = 1$, $u_\Gamma^-(y) = 0$ im Falle $\nu(y) = -\nu_A(y)$ wählen. Da nach dem Struktursatz von Federer $\mathscr{H}^{n-1}(\Omega \setminus (A^1 \cup \mathscr{F}A \cup A^0)) = 0$ gilt, ist die erste Behauptung im Falle $u = \mathbb{1}_A$ gezeigt. Man überzeugt sich nun problemlos, dass sich auch im Falle endlicher Linearkombinationen $u = \sum_{i=1}^k a_i \mathbb{1}_{A_i}$ mit Koeffizienten $a_i \in \mathbb{R}$ und Mengen A_i von lokal endlichem Perimeter in Ω geeignete Spuren finden lassen. Dasselbe gilt dann auch für lokal gleichmäßige Limites solcher Treppenfunktionen und mit der Koflächenformel lässt sich einsehen, dass dadurch schon jedes lokal beschränkte $u \in BV_{\mathrm{lok}}(\Omega)$ erfasst wird. Um den Fall eines beliebigen $u \in BV_{\mathrm{lok}}(\Omega)$ zu behandeln, führen wir für $k \in \mathbb{N}$ die Lipschitz-Funktion

$$f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \max\{\min\{x, k\}, -k\}$$

ein. Nach Lemma 1.65 ist dann $u_k := f_k \circ u \in BV_{\mathrm{lok}}(\Omega)$. Außerdem sind die u_k beschränkt und nach dem bereits gezeigten gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ eine Ausnahmemenge N_k von verschwindendem $\mathscr{H}^{n-1}$-Maß, so dass $(u_k)_\Gamma^\pm$ auf $\Gamma \setminus N_k$ existiert. Nach Lemma 1.67 ist außerdem

$$L := \left\{ y \in \Omega \, : \, \limsup_{r \searrow 0} \fint_{B_r(y)} |u|^{1^*} \, dx = \infty \right\}$$

eine $\mathscr{H}^{n-1}$-Nullmenge und für $y \in \Gamma \setminus \left[L \cup \bigcup_{k=1}^\infty N_k \right]$ bilden wegen

$$|(u_k)_\Gamma^\pm(y)| \leq \limsup_{r \searrow 0} \fint_{B_r^\pm(y,\nu(y))} |u_k| \, dx \leq 2 \limsup_{r \searrow 0} \left(\fint_{B_r(y)} |u|^{1^*} \, dx \right)^{\frac{1}{1^*}}$$

die $(u_k)_\Gamma^\pm(y)$ eine beschränkte Folge. Ist nun $z^\pm$ der Grenzwert einer Teilfolge $(u_{k_l})_\Gamma^\pm(y)$, so folgt

$$\begin{aligned}
&\limsup_{r \searrow 0} \fint_{B_r^\pm(y,\nu(y))} |u - z^\pm| \, dx \\
&\qquad \leq \limsup_{r \searrow 0} \fint_{B_r^\pm(y,\nu(y))} |u - u_{k_l}| \, dx + |(u_{k_l})_\Gamma^\pm(y) - z^\pm| \\
&\qquad \leq \frac{2}{k_l^{1^*-1}} \limsup_{r \searrow 0} \fint_{B_r(y)} |u|^{1^*} \, dx + |(u_{k_l})_\Gamma^\pm(y) - z^\pm|
\end{aligned}$$

und durch Grenzübergang $l \to \infty$ sehen wir, dass wir $u_\Gamma^\pm(y) := z^\pm$ wählen können.

Nun kommen wir zum Beweis von (1.15). Wir können annehmen, dass Γ (lokal) $\mathscr{H}^{n-1}$-endlich ist; anonsten zerlege man Γ in abzählbar viele disjunkte $\mathscr{H}^{n-1}$-endliche Mengen und argumentiere mit Lemma 0.83. Dann wissen wir aus (1.8) bereits $\mathbb{1}_\Gamma \cdot Du \ll \mathbb{1}_\Gamma \cdot \mathscr{H}^{n-1}|_\Omega$ und nach dem Lebesgueschen Differentiationssatz reicht es,

$$\lim_{r \searrow 0} \frac{\mathbb{1}_\Gamma \cdot Du(B_r(y))}{\mathbb{1}_\Gamma \cdot \mathscr{H}^{n-1}(B_r(y))} = (u_\Gamma^+(y) - u_\Gamma^-(y))\nu(y)$$

für $\mathscr{H}^{n-1}$-fast-alle $y \in \Gamma$, für die der Grenzwert existiert, zu zeigen. Da wir aus Lemma 1.66 und Korollar 0.78 bereits

$$\lim_{r \searrow 0} r^{1-n} \mathbb{1}_{\Omega \setminus \Gamma} \cdot Du(B_r(y)) = 0 \qquad \text{und} \qquad \Theta_{n-1}(\Gamma, y) = 1$$

für $\mathscr{H}^{n-1}$-fast-alle $y \in \Gamma$ wissen reicht es tatsächlich sogar, für $\mathscr{H}^{n-1}$-fast-alle $y \in \Gamma$ eine positive Nullfolge $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$ zu finden mit

$$\lim_{k \to \infty} \frac{Du(B_{r_k}(y))}{\omega_{n-1} r_k^{n-1}} = (u_\Gamma^+(y) - u_\Gamma^-(y))\nu(y).$$

Unter erneuter Verwendung von Lemma 1.66 sehen wir, dass wir dazu nur für alle $y \in \Gamma$ mit $\limsup_{r \searrow 0} r^{1-n}|Du|(B_r(y)) < \infty$ eine solche Folge finden müssen. Wir betrachten nun die skalierten Funktionen $u_r(x) := u(y + rx)$ und lesen aus (1.14) ab, dass u_r bei $r \searrow 0$ stark in $L^1(B_1)$ gegen die Grenzfunktion v zu

$$v(x) := \begin{cases} u_\Gamma^+(y) & \text{für } x \cdot \nu(y) \geq 0 \\ u_\Gamma^-(y) & \text{für } x \cdot \nu(y) \leq 0 \end{cases}$$

mit $Dv = (u_\Gamma^+(y) - u_\Gamma^-(y))\nu(y)\mathbb{1}_{\nu(y)^\perp} \cdot \mathscr{H}^{n-1}|_{B_1}$ konvergiert. Da wir

$$\limsup_{r \searrow 0} |Du_r|(B_1) = \limsup_{r \searrow 0} r^{1-n}|Du|(B_r(y)) < \infty$$

angenommen haben, gilt die Konvergenz $u_r \xrightarrow[r \searrow 0]{*} v$ auch schwach-$*$ in $BV(B_1)$ und außerdem konvergiert nach dem Auswahlsatz $|Du_{\varrho_k}| \xrightarrow[k \to \infty]{*} \mu$ schwach-$*$ in $RM(B_1)$ für eine positive Nullfolge (ϱ_k). Wählen wir ein $t \in (0,1)$ mit $\mu(S_t) = 0$, so erhalten wir für $r_k := t\varrho_k$

$$\lim_{k \to \infty} \frac{Du(B_{r_k}(y))}{\omega_{n-1} r_k^{n-1}} = \lim_{k \to \infty} \frac{Du_{\varrho_k}(B_t)}{\omega_{n-1} t^{n-1}} = \frac{Dv(B_t)}{\omega_{n-1} t^{n-1}} = (u_\Gamma^+(y) - u_\Gamma^-(y))\nu(y).$$

Somit ist (1.15) gezeigt und der Beweis ist vollständig. □

Bemerkung 1.69. *Ist in Satz 1.68 speziell $\Gamma = \Omega \cap \mathscr{F}A$, orientiert durch ν_A, der reduzierte Rand einer Menge A von lokal endlichem Perimeter in Ω, so können wir die Spuren alternativ charakterisieren durch*

$$r^{-n} \int_{B_r(y) \setminus A} |u - u_{\mathscr{F}A}^+(y)| \, dx \xrightarrow[r \searrow 0]{} 0 \qquad \text{und} \qquad r^{-n} \int_{B_r(y) \cap A} |u - u_{\mathscr{F}A}^-(y)| \, dx \xrightarrow[r \searrow 0]{} 0$$

für $\mathscr{H}^{n-1}$-fast-alle $y \in \Omega \cap \mathscr{F}A$, wobei wir kurz $u_{\mathscr{F}A}^\pm$ für $u_{\Omega \cap \mathscr{F}A}^\pm$ geschrieben haben.

Beweis. Wir betrachten ein $y \in \mathscr{F}A$, für das beide Spuren $u^+_{\mathscr{F}A}(y)$ und $u^-_{\mathscr{F}A}(y)$ existieren. Dann erhalten wir mit der Konvergenz aus Proposition 1.51

$$\begin{aligned} r^{-n} &\int_{B_r(y)\cap A} |u - u^-_{\mathscr{F}A}(y)|\, dx \\ &\leq r^{-n} \int_{B_r^-(y,\nu_A(y))} |u - u^-_{\mathscr{F}A}(y)|\, dx + r^{-n} \int_{B_r^+(y,\nu_A(y))} |u - u^+_{\mathscr{F}A}(y)|\, dx \\ &\qquad\qquad + |u^+_{\mathscr{F}A}(y) - u^-_{\mathscr{F}A}(y)| \int_{B_1^+(0,\nu_A(y))} \mathbb{1}_{\frac{A-y}{r}}\, dx \xrightarrow[r\searrow 0]{} 0. \end{aligned}$$

Dies zeigt eine der beiden behaupteten Konvergenzen; die andere weist man analog nach. Dass diese Konvergenzen die Werte $u^\pm_{\mathscr{F}A}(y)$ eindeutig bestimmen, entnehmen wir schließlich aus der Inklusion $\mathscr{F}A \subset A^{\frac{1}{2}}$. □

Bemerkung 1.70. *In der Situation von Satz 1.68 können wir für $y \in \Gamma \setminus S_u$ natürlich $u^+_\Gamma(y) = u^-_\Gamma(y) = \bar{u}(y)$ wählen. Also garantiert der Satz, dass für $\mathscr{H}^{n-1}$-fast-alle $y \in S_u$ schon $y \in J_u$ gilt mit $(u^+(y), u^-(y), \nu_u(y)) = (u^+_\Gamma(y), u^-_\Gamma(y), \nu(y))$[13]. Mit anderen Worten gilt*

$$\mathscr{H}^{n-1}((S_u \setminus J_u) \cap \Gamma) = 0$$

für jede abzählbar $\mathscr{H}^{n-1}$-rektifizierbare Menge Γ. Wir werden nun zeigen, dass tatsächlich S_u selbst abzählbar $\mathscr{H}^{n-1}$-rektifizierbar ist und deshalb eine Version des vorigen Satzes auch ohne Bezug auf eine spezielle Hyperfläche Γ gilt.

Satz 1.71 (von Federer-Vol'pert). *Für jedes $u \in BV_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ ist S_u abzählbar $\mathscr{H}^{n-1}$-rektifizierbar mit*

$$\mathscr{H}^{n-1}(S_u \setminus J_u) = 0.$$

Außerdem ist

$$\mathbb{1}_{J_u} \cdot Du = (u^+ - u^-) \otimes \nu_u \mathbb{1}_{J_u} \cdot \mathscr{H}^{n-1}|_\Omega$$

und für $\mathscr{H}^{n-1}$-fast-alle $y \in J_u$ gilt

$$\mathrm{Tan}^{n-1}(J_u, y) = \nu_u(y)^\perp.$$

Beweis. Wir zeigen, dass S_u abzählbar $\mathscr{H}^{n-1}$-rektifizierbar ist; dazu nehmen wir $N = 1$ und $V_\Omega(u) < \infty$ an. Nach der Koflächenformel gibt es eine abzählbare dichte Teilmenge Q von $\mathbb{R}$, so dass $\{u > t\}$ für alle $t \in Q$ eine Menge von endlichem Perimeter in Ω ist. Zeigen wir

$$S_u \subset L \cup \bigcup_{t\in Q} \partial^*\{u > t\}$$

mit der Menge

$$L := \Big\{ y \in \Omega \,:\, \limsup_{r\searrow 0} \fint_{B_r(y)} |u|^{1^*}\, dx = \infty \Big\}$$

[13] Diese Gleichung gilt dabei bis auf Äquivalenz im Sinne von Definition 1.60.

aus Lemma 1.67, so ergibt sich die abzählbare $\mathscr{H}^{n-1}$-Rektifizierbarkeit von S_u aus den Struktursätzen des Kapitels 1.8. Um diese Inklusion zu verifizieren betrachten wir ein $y \in \Omega \setminus \left[L \cup \bigcup_{t\in Q} \partial^*\{u > t\}\right]$. Dann ist

$$\Theta_n(\{u > t\}, y) \in \{0, 1\} \qquad \text{für alle } t \in Q.$$

Aber wegen $\Theta_n(\{u > t\}, y) \leq \frac{1}{t} \limsup_{r\searrow 0} \fint_{B_r(y)} |u|\, dx \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ ist tatsächlich $\Theta_n(\{u > t\}, y) = 0$ für $1 \ll t \in Q$ und analog sieht man $\Theta_n(\{u > t\}, y) = 1$ für $-1 \gg t \in Q$. Beachten wir $s < t \implies \{u > t\} \subset \{u > s\}$, so folgt die Existenz eines $z \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} \Theta_n(\{u > t\}, y) &= 0 \qquad \text{für alle } t > z,\\ \Theta_n(\{u > t\}, y) &= 1 \qquad \text{für alle } t < z. \end{aligned}$$

Insbesondere ist

$$\Theta_n(\{|u - z| > \varepsilon\}, y) = 0$$

für jedes $\varepsilon > 0$ und mit der Hölderschen Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} \fint_{B_r(y)} |u - z|\, dx &\leq \varepsilon + \frac{1}{\mathscr{L}^n(B_r)} \int_{\{|u-z|>\varepsilon\}} |u - z|\, dx \\ &\leq \varepsilon + \left[\fint_{B_r(y)} \mathbb{1}_{\{|u-z|>\varepsilon\}}\, dx\right]^{\frac{1}{n}} \left[\fint_{B_r(y)} |u - z|^{1^*}\, dx\right]^{\frac{n-1}{n}}. \end{aligned}$$

Lassen wir nun unter Berücksichtigung von $y \notin L$ erst r und dann ε gegen 0 gehen, so sehen wir $y \in \Omega \setminus S_u$ mit $\bar{u}(y) = z$. Dies zeigt die abzählbare $\mathscr{H}^{n-1}$-Rektifizierbarkeit von S_u.

Nun kehren wir zum Fall einer beliebigen Dimension $N \in \mathbb{N}$ zurück und wenden Satz 1.68 mit $\Gamma = S_u$ und einer Orientierung ν von S_u an: Wir erhalten nacheinander

$$\begin{gathered} \mathscr{H}^{n-1}(S_u \setminus J_u) = 0,\\ (u^+, u^-, \nu_u) = (u^+_{S_u}, u^-_{S_u}, \nu) \qquad \mathscr{H}^{n-1}\text{-fast-überall auf } J_u,\\ \mathbb{1}_{J_u} \cdot Du = (u^+ - u^-) \otimes \nu_u \mathbb{1}_{J_u} \cdot \mathscr{H}^{n-1}|_\Omega. \end{gathered}$$

Insbesondere ist $\nu_u = \pm\nu$ eine Orientierung von J_u und deshalb gilt für $\mathscr{H}^{n-1}$-fast-alle $y \in J_u$

$$\mathrm{Tan}^{n-1}(J_u, y) = \nu_u(y)^\perp. \qquad \square$$

Bemerkung 1.72. *Die Glättungen u_ε von $u \in BV_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ konvergieren punktweise auf $\Omega \setminus (S_u \setminus J_u)$ gegen den* **ausgezeichneten Repräsentanten**

$$u^* : \Omega \setminus (S_u \setminus J_u) \to \mathbb{R}^N$$

mit $u^*(y) = \bar{u}(y)$ für $y \in \Omega \setminus S_u$ und $u^*(y) = \frac{u^+(y)+u^-(y)}{2}$ für $y \in J_u$. Aus Satz 1.71 entnehmen wir, dass u^* stets $\mathscr{H}^{n-1}$-fast-überall definiert ist. Im Falle $n = 1$ ist u^* folglich überall definiert und ein spezieller guter Repräsentant.

1.11 Der Spuroperator

Lemma 1.73. *Ist $u \in BV_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ und A eine $\mathscr{L}^n$-messbare Teilmenge von Ω, so gilt*

$$u = 0 \ \mathscr{L}^n\text{-fast-überall auf } A \implies \mathbb{1}_{A^1} \cdot Du = 0.$$

Beweis. Wir nehmen $N = 1$ an. Für $t > 0$ gilt $\mathscr{L}^n(A \cap \{u > t\}) = 0$ und daraus folgt $A^1 \subset \{u > t\}^0$, also $A^1 \cap \partial^*\{u > t\} = \emptyset$. Ein analoges Argument im Falle $t < 0$ zeigt, dass die letzte Gleichung tatsächlich für alle $t \neq 0$ richtig bleibt. Mit der Koflächenformel und den Struktusätzern folgt

$$|Du|(A^1) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{H}^{n-1}(A^1 \cap \partial^*\{u > t\})\, dt = 0. \qquad \square$$

Lemma 1.74 (Abschneiden von *BV*-Funktionen). *Seien $u, v \in BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$, A eine Menge von lokal endlichem Perimeter in Ω und*

$$w := \mathbb{1}_A u + \mathbb{1}_{\Omega \setminus A} v.$$

Dann ist

$$w \in BV(\Omega, \mathbb{R}^N) \iff \int_{\Omega \cap \mathscr{F}A} |v^+_{\mathscr{F}A} - u^-_{\mathscr{F}A}|\, d\mathscr{H}^{n-1} < \infty,$$

wobei die Spuren $v^+_{\mathscr{F}A}$ und $u^-_{\mathscr{F}A}$ wie in Bemerkung 1.69 bezüglich ν_A gebildet werden; und dann gilt

$$Dw = \mathbb{1}_{A^1} \cdot Du + (v^+_{\mathscr{F}A} - u^-_{\mathscr{F}A}) \otimes \nu_A \mathbb{1}_{\mathscr{F}A} \cdot \mathscr{H}^{n-1}|_{\Omega} + \mathbb{1}_{A^0} \cdot Dv. \tag{1.16}$$

Beweis. Wir nehmen zunächst $w \in BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$ an. Zeigen wir

$$\mathbb{1}_{A^1} \cdot Dw = \mathbb{1}_{A^1} \cdot Du, \tag{1.17}$$
$$\mathbb{1}_{\mathscr{F}A} \cdot Dw = (v^+_{\mathscr{F}A} - u^-_{\mathscr{F}A}) \otimes \nu_A \mathbb{1}_{\mathscr{F}A} \cdot \mathscr{H}^{n-1}|_{\Omega}, \tag{1.18}$$
$$\mathbb{1}_{A^0} \cdot Dw = \mathbb{1}_{A^0} \cdot Dv, \tag{1.19}$$

so folgen

$$\int_{\mathscr{F}A} |v^+_{\mathscr{F}A} - u^-_{\mathscr{F}A}|\, d\mathscr{H}^{n-1} = |Dw|(\mathscr{F}A) < \infty$$

und – da nach Satz 1.54 und (1.8) schon $|Dw|(\Omega \setminus (A^1 \cup \mathscr{F}A \cup A^0)) = 0$ gilt – die Darstellung (1.16). Es verbleibt, (1.17), (1.18) und (1.19) herzuleiten: (1.17) und (1.19) folgen aus Lemma 1.73 und (1.18) folgt, da wir aus Bemerkung 1.69

$$v^+_{\mathscr{F}A} = w^+_{\mathscr{F}A} \qquad \text{und} \qquad u^-_{\mathscr{F}A} = w^-_{\mathscr{F}A} \qquad \mathscr{H}^{n-1}\text{-fast-überall auf } \mathscr{F}A \tag{1.20}$$

entnehmen, aus Satz 1.68.

Um die umgekehrte Implikation ’ $\Longleftarrow$ ’ zu zeigen, nehmen wir $N = 1$ an und überlegen uns, dass man BV-Funktionen auch unter Erhaltung einer L^∞-Schranke mit glatten Funktionen approximieren kann. Durch derartige Approximation schliesst man leicht, dass für zwei Funktionen in $BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ auch das Produkt in $BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ ist. Nun betrachten wir die abgeschnittenen Funktionen $u_k := f_k \circ u$ und $v_k := f_k \circ v$ zu

$$f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \max\{\min\{x, k\}, -k\},$$

die nach Lemma 1.65 in $BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ sind mit $|Du_k| \leq |Du|$ und $|Dv_k| \leq |Dv|$. Mit der vorausgehenden Produktregel folgt dann $w_k := \mathbb{1}_A u_k + \mathbb{1}_{\Omega\setminus A} v_k \in BV_{\mathrm{lok}}(\Omega)$ und nach dem bereits gezeigten gilt insbesondere die Darstelluns-formel (1.16) mit u_k, v_k und w_k anstelle von u, v und w. Da w_k stark in $L^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ gegen w konvergiert, folgt mit der Unterhalbstetigkeit der Variation und $|(v_k)^+_{\mathscr{F}A} - (u_k)^-_{\mathscr{F}A}| = |f_k \circ v^+_{\mathscr{F}A} - f_k \circ u^-_{\mathscr{F}A}| \leq |v^+_{\mathscr{F}A} - u^-_{\mathscr{F}A}|$ auf $\mathscr{F}A$

$$\begin{aligned}
|Dw|(\Omega) &\leq \liminf_{k\to\infty} |Dw_k|(\Omega) \\
&\leq \liminf_{k\to\infty} \left[|Du_k|(\Omega) + \int_{\mathscr{F}A} |(v_k)^+_{\mathscr{F}A} - (u_k)^-_{\mathscr{F}A}| \, d\mathscr{H}^{n-1} + |Dv_k|(\Omega) \right] \\
&\leq |Du|(\Omega) + \int_{\mathscr{F}A} |v^+_{\mathscr{F}A} - u^-_{\mathscr{F}A}| \, d\mathscr{H}^{n-1} + |Dv|(\Omega)
\end{aligned}$$

und das Lemma ist bewiesen. □

Lemma 1.75. *Für* $u \in BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *und* $\Gamma \in \mathscr{K}(\Omega)$ *gebe es positive Konstanten* M *und* r_0 *mit*

$$\mathscr{H}^{n-1}(\Gamma \cap B_r(x)) \leq M r^{n-1} \qquad \textit{für alle } x \in \Gamma \textit{ und } 0 < r < r_0. \tag{1.21}$$

Dann gilt

$$\int_\Gamma |u^*| \, d\mathscr{H}^{n-1} \leq \int_{\Gamma\setminus S_u} |\bar{u}| \, d\mathscr{H}^{n-1} + \int_{\Gamma\cap J_u} (|u^+| + |u^-|) \, d\mathscr{H}^{n-1} \leq C \|u\|_{BV(\Omega,\mathbb{R}^N)}$$

mit einer positiven Konstanten C*, die nur von* M*,* r_0 *und* $\mathscr{H}^{n-1}(\Gamma)$ *abhängt.*

Korollar 1.76 (Integrierbarkeit der Spuren). *Ist* $u \in BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *und* $\Gamma \in \mathscr{K}(\Omega)$ *abzählbar* $\mathscr{H}^{n-1}$*-rektifizierbar mit* (1.21)*, so ist*

$$\int_\Gamma (|u^+_\Gamma| + |u^-_\Gamma|) \, d\mathscr{H}^{n-1} < \infty.$$ □

Beweis von Lemma 1.75. Unter Verwendung von Lemma 1.65 können wir $N = 1$ und $u \geq 0$ annehmen. Ein einfaches Überdeckungsargument zeigt zunächst $\mathscr{H}^{n-1}(\Gamma) < \infty$. Als nächstes zeigen wir, dass für eine Menge A von endlichem Perimeter in Ω mit $3\mathscr{L}^n(A) < \omega_n r_0^n$ und

$$E := \{y \in \Omega \, : \, \Theta^*_n(A, y) \geq \tfrac{1}{2}\}$$

gilt

$$\mathscr{H}^{n-1}(E \cap \Gamma) \leq C P_\Omega(A), \tag{1.22}$$

mit einer Konstanten C, die nur von n abhängt. Dazu bemerken wir zunächst, dass für $y \in E \cap \Gamma$ einerseits $\limsup_{r\searrow 0} \fint_{B_r(y)} \mathbb{1}_A \, dx \geq \frac{1}{2}$ und andererseits

$\fint_{B_{r_0}(y)} \mathbb{1}_A \, dx < \frac{1}{3}$ gilt. Daher gibt es ein $r_y \in (0, r_0)$ mit $\fint_{B_{r_y}(y)} \mathbb{1}_A \, dx = \frac{1}{3}$ und Proposition 1.40 gibt

$$r_y^{n-1} \leq 3C|D\mathbb{1}_A|(B_{r_y}(y)).$$

Wir überdecken mit Besicovitch $E \cap \Gamma$ durch Kugeln $B_{r_y}(y)$ mit $y \in E \cap \Gamma$ und kontrollierter Überlappung. Unter Verwendung von (1.21) folgt dann wie üblich (1.22). Weiterhin setzen wir

$$A_t := \{u > \tfrac{t}{2}\},$$
$$E_t := \{y \in \Omega \,:\, \Theta_n^*(A_t, y) \geq \tfrac{1}{2}\}$$

und zeigen

$$J_u \cap \{u^+ + u^- > t\} \subset E_t.$$

Ist nämlich $y \in J_u$ mit $u^+(y) > \frac{t}{2}$, so folgt

$$\begin{aligned}
\Theta_n^*(A_t, y) &\geq \frac{1}{2} \limsup_{r \searrow 0} \fint_{B_r^+(y, \nu_u(y))} \mathbb{1}_{A_t} \, dx \\
&\geq \frac{1}{2} \limsup_{r \searrow 0} \fint_{B_r^+(y, \nu_u(y))} \Big(1 - \frac{|u^+(y) - u|}{u^+(y) - \frac{t}{2}}\Big) \, dx = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

und analog sieht man $\Theta_n^*(A_t, y) \geq \frac{1}{2}$ auch im Falle $u^-(y) > \frac{t}{2}$. Nun bemerken wir noch, dass für $t > \frac{6}{\omega_n r_0^n} \int_\Omega u \, dx$ schon $3\mathscr{L}^n(A_t) < \omega_n r_0^n$ gilt und sich deshalb (1.22) für $\mathscr{L}^1$-fast-alle solchen t auf E_t und A_t anwenden lässt; deshalb erhalten wir mit dem Satz von Fubini und der Koflächenformel

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma \cap J_u} (u^+ + u^-) \, d\mathscr{H}^{n-1} &= \int_0^\infty \mathscr{H}^{n-1}(\Gamma \cap J_u \cap \{u^+ + u^- > t\}) \, dt \\
&\leq \int_0^\infty \mathscr{H}^{n-1}(\Gamma \cap E_t) \, dt \\
&\leq \frac{6\mathscr{H}^{n-1}(\Gamma)}{\omega_n r_0^n} \int_\Omega u \, dx + C \int_0^\infty P_\Omega(A_t) \, dt \\
&\leq C\|u\|_{BV(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Eine etwas einfachere Version der vorausgehenden Argumente gibt eine analoge Abschätzung für $\int_{\Gamma \setminus S_u} \bar{u} \, d\mathscr{H}^{n-1}$. □

Nach all diesen Vorbereitungen können wir schließlich Randwerte von BV-Funktionen einführen.

Satz 1.77 (**Spuren auf dem Rand**). *Sei Ω Lipschitz mit beschränktem Rand. Dann gibt es einen beschränkten linearen Spuroperator*

$$T_\Omega : BV(\Omega, \mathbb{R}^N) \to L^1(\partial\Omega, \mathbb{R}^N; \mathscr{H}^{n-1}),$$

so dass für $u \in BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$ gilt:

$$r^{-n} \int_{\Omega \cap B_r(y)} |u - T_\Omega u(y)| \, dx \underset{r \searrow 0}{\longrightarrow} 0 \qquad \textit{für } \mathscr{H}^{n-1}\textit{-fast-alle } y \in \partial\Omega. \tag{1.23}$$

Außerdem erfüllt die Fortsetzung $\tilde{u}$ von $u \in BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$ durch 0 auf ganz $\mathbb{R}^n$ stets $\tilde{u} \in BV(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$ und

$$D\tilde{u} = \widetilde{Du} - T_\Omega u \otimes \nu_\Omega \mathbb{1}_{\partial\Omega} \cdot \mathscr{H}^{n-1},$$

wobei die Fortsetzung $\widetilde{Du} \in RM(\Omega, \mathbb{R}^{Nn})$ von Du durch $\widetilde{Du}(A) := Du(A \cap \Omega)$ definiert ist.

Beweis. Man sieht leicht $\mathscr{H}^{n-1}(\partial\Omega) < \infty$ ein und deshalb folgt aus Korollar 1.57, dass Ω eine Menge von endlichem Perimeter in $\mathbb{R}^n$ ist mit $\mathscr{H}^{n-1}(\partial\Omega \setminus \mathscr{F}\Omega) = 0$. Insbesondere ist $\partial\Omega$ abzählbar $\mathscr{H}^{n-1}$-rektifizierbar und wir können

$$T_\Omega u := (Fu)^-_{\partial\Omega},$$

als innere Spur im Sinne von Satz 1.68 definieren, wobei F den Fortsetzungsoperator aus Satz 1.27 bezeichnet und wir $\mathscr{H}^{n-1}$-fast-überall $\partial\Omega$ durch ν_Ω orientiert haben. Gemäß Bemerkung 1.69 erfüllt diese Festlegung (1.23). Außerdem überzeugt man sich, dass $\partial\Omega$ der Annahme (1.21) genügt; deshalb folgt die Beschränktheit von T_Ω aus Lemma 1.75 und Satz 1.27. Schließlich bemerken wir die Gleichheit $\mathbb{1}_{\Omega^1} \cdot D(Fu) = \widetilde{Du}$; deshalb ergeben sich die Behauptungen über die Fortsetzung $\tilde{u} = \mathbb{1}_\Omega Fu$ aus Satz 1.74. □

Bemerkung 1.78 (Surjektivität des Spuroperators). *Nach einem bemerkenswerten Satz von Gagliardo [30] ist das Bild von $W^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ unter T_Ω schon ganz $L^1(\partial\Omega, \mathbb{R}^N; \mathscr{H}^{n-1})$. Insbesondere ist der Spuroperator in Satz 1.77 surjektiv.*

Korollar 1.79 (Zusammensetzen von *BV*-Funktionen). *Sei Ω Lipschitz mit beschränktem Rand. Sind dann $u \in BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$ und $v \in BV(\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, so definiert*

$$w(x) := \begin{cases} u(x) & \text{für } x \in \Omega \\ v(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega} \end{cases}$$

eine Funktion $w \in BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$ mit

$$Dw = \widetilde{Du} + (T_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}} v - T_\Omega u) \otimes \nu_\Omega \mathbb{1}_{\partial\Omega} \cdot \mathscr{H}^{n-1} + \widetilde{Dv}.$$

Beweis. Auch $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ ist Lipschitz mit beschränktem Rand $\partial(\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}) = \partial\Omega$ und $\mathscr{L}^n(\partial\Omega) = 0$. Daher sind nach Satz 1.77 die Fortsetzungen $\tilde{u}$ und $\tilde{v}$ in $BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$ mit $w = \tilde{u} + \tilde{v}$; deshalb ist auch $w \in BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$ und die Formel für die Ableitung von w folgt aus der für $D\tilde{u}$ in Satz 1.77. □

Korollar 1.80 (Partielle Integrationsformel). *Sei Ω Lipschitz mit beschränktem Rand und $u \in BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Dann gilt*

$$\int_\Omega u \cdot \operatorname{div} \varphi \, dx = -\int_\Omega \varphi \cdot dDu + \int_{\partial\Omega} \varphi \cdot (T_\Omega u \otimes \nu_\Omega) \, d\mathscr{H}^{n-1} \quad \text{für } \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{Nn}).$$

Beweis. Man benutze die Fomel für $D\tilde{u}$ in Satz 1.77 in der Definition der Maßableitung. □

Der Spuroperator in Satz 1.77 ist stetig bezüglich der Normtopologien auf $BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$ und $L^1(\partial\Omega, \mathbb{R}^N; \mathscr{H}^{n-1})$. Andererseits haben wir bereits gesehen, dass die Normtopologie auf $BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$ in vielen Situationen zu einschränkend ist. Ersetzen wir jedoch die Normtopologie auf $BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$ durch die schwach-$*$-Topologie, so zeigen einfach Beispiele, dass die Stetigkeit des Spuroperators verloren[14] geht. Das richtige Konzept ist hier – wie der nächste Satz zeigt – die Topologie der strikten Konvergenz aus Definition 1.11.

Satz 1.81 (**Strikte Stetigkeit des Spuroperators**). *Sei Ω Lipschitz mit beschränktem Rand. Dann ist der Spuroperator T_Ω aus Satz 1.77 noch stetig, wenn wir $BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$ mit der (metrischen) Topologie der strikten Konvergenz versehen.*

Beweisskizze. Der Beweis verläuft in mehreren Schritten.

Schritt 1. Wir überlegen, dass für eine strikt konvergente Folge $u_k \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} u$ in $BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$ stets

$$T_\Omega u_k \otimes \nu_\Omega \mathbb{1}_{\partial\Omega} \cdot \mathscr{H}^{n-1} \underset{k\to\infty}{\overset{*}{\rightharpoonup}} T_\Omega u \otimes \nu_\Omega \mathbb{1}_{\partial\Omega} \cdot \mathscr{H}^{n-1} \quad \text{schwach-}* \text{ in } RM(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{Nn})$$

konvergiert. Dazu überlegt man sich unter Ausnutzung der strikten Konvergenz, dass die ersten zwei Terme in der partiellen Integrationsformel aus Korollar 1.80 stets konvergieren, also auch der dritte. Da wir aus Satz 1.77 bereits Beschränktheit wissen, gibt dies die behauptete Konvergenz.

Schritt 2. Sei $Q =]-2,2[^{n-1} \times]0,1[$ und $\Gamma =]-1,1[^{n-1}$ mit $\Gamma \times \{0\} \subset \partial Q$. Wir zeigen zunächst für glatte u und dann für $u \in BV(Q, \mathbb{R}^N)$, dass

$$\int_\Gamma \left| T_Q u(x,0) - \fint_0^t u(x,s)\,ds \right| d\mathscr{H}^{n-1}(x) \le |Du|(\Gamma \times]0,t[) \qquad \text{für } 0 < t < 1$$

gilt. Man beachte dabei, dass ein elementarer Beweis dieser Formel zuerst nur für bis zum Randstück $\Gamma \times \{0\}$ glatte u funktioniert. Ist $u \in BV(Q, \mathbb{R}^N)$, so setzen wir u über Γ hinaus fort und approximieren strikt mit bis $\Gamma \times \{0\}$ glatten Funktionen. Unter Verwendung der Konvergenz aus Schritt 1 (und der Unterhalbstetigkeit der Norm) können wir dann die Behauptung von diesen glatten Funktionen auf u übertragen.

Schritt 3. Für Q und Γ wie im vorigen Schritt betrachten wir eine strikt konvergente Folge $u_k \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} u$ in $BV(Q, \mathbb{R}^N)$. Unter Verwendung von Schritt 2 und der strikten Konvergenz sehen wir für $0 < t < 1$

$$\begin{aligned} \limsup_{k\to\infty} \int_\Gamma & |T_Q u_k(x,0) - T_Q u(x,0)|\, d\mathscr{H}^{n-1}(x) \\ & \le \limsup_{k\to\infty} |Du_k|(\Gamma \times]0,t[) + |Du|(\Gamma \times]0,t[) \le 2|Du|(\overline{\Gamma} \times]0,t]). \end{aligned}$$

Durch Grenzübergang $t \searrow 0$ schließen wir auf starke Konvergenz der Spuren $T_Q u_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} T_Q u$ in $L^1(\Gamma \times \{0\}, \mathbb{R}^N; \mathscr{H}^{n-1})$.

[14] Tatsächlich ist der Abschluss von $\mathscr{D}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ in der schwach-$*$-Topologie schon ganz $BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$; man vergleiche Übungsaufgabe 6.

Schritt 4. Mit lokaler biLipschitz-Transformation und Überdeckungsargumenten überträgt man die L^1-Konvergenz aus Schritt 3 auf den beschränkten (und folglich kompakten) Rand $\partial\Omega$ eines beliebigen Lipschitz-Bereichs Ω. $\square$

1.12 Approximative Differenzierbarkeit

Definition 1.82 (Approximative Differenzierbarkeit). *Seien $u \in L^1_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ und $y \in \Omega \backslash S_u$. Dann heißt y eine* **approximative Differenzierbarkeitsstelle** *von u und u* **approximativ differenzierbar** *an der Stelle y, wenn es ein $L \in \mathbb{R}^{Nn}$ gibt mit*

$$\fint_{B_r(y)} \left| \frac{u(x) - \bar{u}(y) - L(x-y)}{r} \right| dx \underset{r \searrow 0}{\longrightarrow} 0.$$

Die Matrix L ist dabei eindeutig bestimmt und wird als **approximatives Differential** *$\nabla u(x)$ von u an der Stelle x bezeichnet. Für die Menge aller approximativen Differenzierbarkeitsstellen von u schreiben wir $\mathscr{D}_u$.*

Bemerkung 1.83. *Ist u an einer Stelle in Ω klassisch (total) differenzierbar, so existiert auch das approximative Differential und stimmt mit der klassischen Ableitung überein. Außerdem ist die Bildung des approximativen Differentials eine lineare Operation, es ist $\mathscr{D}_u \in \mathscr{B}(\Omega)$ mit*

$$\mathscr{D}_u \subset \Omega \setminus S_u$$

und ∇u ist eine Borel-Funktion auf $\mathscr{D}_u$.

Lemma 1.84. *Sind $u, v \in L^1_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, so gilt*

$$\nabla u = \nabla v \qquad \mathscr{L}^n\text{-fast-überall auf } \{u = v\} \cap \mathscr{D}_u \cap \mathscr{D}_v.$$

Beweis. Wegen der Linearität des approximativen Differentials reicht es zu zeigen, dass ∇u $\mathscr{L}^n$-fast-überall auf $\{u = 0\} \cap \mathscr{D}_u$ verschwindet. Sei dazu $y \in \mathscr{D}_u$ ein Lebesgue-Punkt von $\mathbb{1}_{\{u=0\}}$ mit Lebesgue-Wert 1 und außerdem sei $\bar{u}(y) = 0$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
&\fint_{B_1} |\nabla u(y)x| \, dx \\
&= \fint_{B_r(y)} (1 - \mathbb{1}_{\{u=0\}}) \left| \frac{\nabla u(y)(x-y)}{r} \right| dx + \fint_{B_r(y)} \mathbb{1}_{\{u=0\}} \left| \frac{\nabla u(y)(x-y)}{r} \right| dx \\
&\le |\nabla u(y)| \fint_{B_r(y)} (1 - \mathbb{1}_{\{u=0\}}) \, dx + \fint_{B_r(y)} \left| \frac{u(x) - \bar{u}(y) - \nabla u(y)(x-y)}{r} \right| dx \\
&\underset{r \searrow 0}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

und daraus entnimmt man $\nabla u(y) = 0$. $\square$

Lemma 1.85. *Für $u \in BV(B_r(y), \mathbb{R}^N)$ mit $y \notin S_u$ gilt*

$$\int_{B_r(y)} \frac{|u(x) - \bar{u}(y)|}{|x-y|} \, dx \le \int_0^1 \frac{|Du|(B_{tr}(y))}{t^n} \, dt.$$

Beweis. Sei $s \in (0,1)$ fixiert. Für $u \in C^1(B_r(y), \mathbb{R}^N)$ sehen wir durch radiale Integration mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}\int_{B_r} \frac{|u(y+x) - u(y+sx)|}{|x|}\,dx &\leq \int_{B_r} \int_s^1 |\nabla u(y+tx)|\,dt\,dx \\ &= \int_s^1 t^{-n} \int_{B_{tr}(y)} |\nabla u|\,dx\,dt.\end{aligned} \tag{1.24}$$

Wir überlegen nun, dass (1.24) auch für beliebige $u \in BV(B_r(y), \mathbb{R}^N)$ richtig bleibt (mit $|Du|(B_{ty}(y))$ statt dem inneren Integral rechts). Dazu wählen wir zu solchem u eine Folge von glatten Funktionen u_k mit $u_k \xrightarrow[k\to\infty]{} u$ strikt in $BV(B_r(y), \mathbb{R}^N)$ und $\mathscr{L}^n$-fast-überall auf $B_r(y)$ und übertragen (1.24) von den u_k auf u. Man kann auf der linken Seite mit dem Lemma von Fatou zur Grenze übergehen und auf der rechten Seite mit dem Satz über dominierte Konvergenz (denn $t^{-n} \int_{B_{tr}(y)} |\nabla u_k|\,dx \to |Du|(B_{tr}(y))$ konvergiert für alle $t \in (0,s)$, majorisiert durch $t^{-n} \sup_{k\in\mathbb{N}} \int_{B_r(y)} |\nabla u_k|\,dx$). Schließlich schließen wir aus der Voraussetzung $y \notin S_u$, dass die Funktionen u_s zu $u_s(x) := u(y+sx)$ bei $s \searrow 0$ stark in $L^1(B_r, \mathbb{R}^N)$ gegen die Konstante $\bar{u}(y)$ konvergieren. Insbesondere können wir eine Nullfolge $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ finden mit $u(y+s_k x) \xrightarrow[k\to\infty]{} \bar{u}(y)$ für $\mathscr{L}^n$-fast-alle $x \in B_r$ und eine erneute Verwendung des Lemmas von Fatou führt zur Behauptung. □

Definition 1.86. *Für $u \in BV_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ bezeichnen wir mit $D^a u$ den* **absolutstetigen** *und mit $D^s u$ den* **singulären Anteil** *von Du bezüglich $\mathscr{L}^n|_\Omega$.*

Satz 1.87 (von Calderon-Zygmund). *Jedes $u \in BV_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ ist $\mathscr{L}^n$-fast-überall approximativ differenzierbar, also*

$$\mathscr{L}^n(\Omega \setminus \mathscr{D}_u) = 0,$$

mit

$$D^a u = \nabla u \cdot \mathscr{L}^n|_\Omega.$$

Beweis. Es sei $D^a u = v \cdot \mathscr{L}^n|_\Omega$. Es reicht zu zeigen, dass für $y \in \Omega \setminus (S_u \cup S_v)$ mit $\lim_{r\searrow 0} r^{-n} |D^s u|(B_r(y)) = 0$ (diese Bedingungen sind nach dem Lebesgueschen Differentiationssatz $\mathscr{L}^n$-fast-überall erfüllt) schon $y \in \mathscr{D}_u$ mit $\nabla u(y) = \bar{v}(y)$ gilt. Dazu wenden wir Lemma 1.85 auf die Funktion $x \mapsto u(x) - \bar{v}(y)(x-y)$ auf $B_r(y)$ mit $r \ll 1$ an und erhalten

$$\begin{aligned}&\int_{B_r(y)} \frac{|u(x) - \bar{u}(y) - \bar{v}(y)(x-y)|}{|x-y|}\,dx \\ &\qquad\leq \int_0^1 \frac{|D^s u|(B_{tr}(y)) + |v - \bar{v}(y)| \cdot \mathscr{L}^n(B_{tr}(y))}{t^n}\,dt\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}&\fint_{B_r(y)} \frac{|u(x) - \bar{u}(y) - \bar{v}(y)(x-y)|}{r}\,dx \\ &\qquad\leq \int_0^1 \left[\frac{|D^s u|(B_{tr}(y))}{\omega_n (tr)^n} + \fint_{B_{tr}(y)} |v - \bar{v}(y)|\,dx \right] dt \xrightarrow[r\searrow 0]{} 0,\end{aligned}$$

also $y \in \mathscr{D}_u$ mit $\nabla u(y) = \bar{v}(y)$. □

1.13 Einige weitere Eigenschaften

In diesem letzten Abschnitt des Kapitels 1 geben wir einen Ausblick auf weitere Ergebnisse aus der Theorie der BV-Funktionen. Wir werden hier auf Beweise verzichten.

Unter Berücksichtigung unserer bisher gewonnen Erkenntnisse können wir nun die Ableitung Du einer BV-Funktion u folgendermaßen zerlegen:

Definition 1.88 (Zerlegung von Du)**.** *Für $u \in BV_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ definieren wir den* **Sprunganteil** $D^j u := \mathbb{1}_{J_u} \cdot Du = \mathbb{1}_{J_u} \cdot D^s u$, *den* **Cantoranteil** $D^c u := \mathbb{1}_{\Omega \setminus S_u} \cdot D^s u$ *und den diffusen Anteil $\tilde{D}u := D^a u + D^c u$ der Ableitung Du.*

Mit diesen Definitionen gilt

$$Du = D^a u + D^s u = \tilde{D}u + D^j u = D^a u + D^c u + D^j u$$

und $D^a u$, $D^c u$ und $D^j u$ sind paarweise singulär zueinander. Den absolutstetigen Anteil $D^a u$ und den Sprunganteil $D^j u$ haben wir mit den Darstellungsformeln

$$D^a u = \nabla u \cdot \mathscr{L}^n|_\Omega$$

und

$$D^j u = (u^+ - u^-) \otimes \nu_u \mathbb{1}_{J_u} \cdot \mathscr{H}^{n-1}|_\Omega$$

bereits gut verstanden. Insbesondere ist der Sprunganteil $D^j u$ Rang-1-wertig in dem Sinne, dass die Dichte $\frac{dDu}{d|Du|}$ in der Polarzerlegung $|D^j u|$-fast-überall auf Ω Rang 1 hat. Über den Cantoranteil $D^c u$ lässt sich im Allgemeinen nur wenig sagen, jedoch besagt ein bekannter Satz von Alberti [3], dass auch er die vorausgehende Rang-1-Eigenschaft hat.

Satz 1.89 (Rang-1-Satz). *Für $u \in BV_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ hat $\frac{dDu}{d|Du|}$ stets $|D^s u|$-fast-überall Rang 1.*

Ein weiteres Resultat von Alberti [2] zeigt, dass jedes L^1-Vektorfeld als approximatives Differential auftreten kann; man beachte, dass man hierfür im Gegensatz zur klassischen Theorie glatter Funktionen keine Integrabilitätsbedingungen an das Vektorfeld stellen muss.

Satz 1.90. *Zu jedem $V \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ gibt es ein $u \in BV(\mathbb{R}^n)$ mit*

$$\nabla u = V \qquad \mathscr{L}^n\text{-fast-überall auf } \Omega$$

und

$$|Du|(\mathbb{R}^n) \le C \int_{\mathbb{R}^n} |V| \, dx$$

mit einer nur von n abhängigen Konstanten C. Außerdem kann u so gewählt werden, dass $D^c u = 0$ gilt.

Schließlich kehren wir zurück zu der in Lemma 1.65 angerissenen Frage nach einer Kettenregel für die Komposition mit Lipschitz-Funktionen. Wir haben in Lemma 1.65 bereits gesehen, dass für eine Lipschitz-Funktion $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^K$ und $u \in BV_{\text{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ stets $f \circ u \in BV_{\text{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^K)$ gilt mit

$$|D(f \circ u)| \leq (\operatorname{Lip} f)|Du|.$$

Mit dem Satz von Radon-Nikodym können wir dann natürlich eine Dichte $V \in L^1_{\text{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^{Kn}; |Du|)$ finden mit

$$D(f \circ u) = V \cdot |Du|.$$

Nun wollen wir aber $D(f \circ u)$ bzw. V durch f, u und ihre Ableitungen ausdrücken. Ist zusätzlich $f \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^K)$, so leistet dies der folgende Satz.

Satz 1.91 (**Kettenregel im C^1-Fall**). *Für eine stetig differenzierbare Lipschitz-Funktion $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^K$ und $u \in BV_{\text{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ gilt*

$$D(f \circ u) = (\nabla f \circ \bar{u}) \cdot \tilde{D}u + (f \circ u^+ - f \circ u^-) \otimes \nu_u \mathbb{1}_{J_u} \cdot \mathscr{H}^{n-1}|_\Omega.$$

Ist f allerdings nur Lipschitz, so ist zunächst nicht klar, ob $\nabla f \circ \bar{u}$ mit der nach Rademacher $\mathscr{L}^N$-fast-überall existenten Ableitung ∇f überhaupt wohldefiniert ist. Allerdings folgt im skalaren Fall $N = 1$ aus der Koflächenformel, dass tatsächlich

$$|Du|(\{x \in \Omega \setminus S_u : \bar{u}(x) \in E\}) = 0 \tag{1.25}$$

für jede $\mathscr{L}^1$-Nullmenge E gilt. Die Anwendung dieser Beobachtung auf die Menge E der Nichtdifferenzierbarkeitsstellen von f führt zur folgenden Version der Kettenregel.

Satz 1.92 (**Kettenregel im skalaren Fall**). *Für eine Lipschitz-Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^K$ und $u \in BV_{\text{lok}}(\Omega)$ ist $\nabla f \circ \bar{u}$ stets $|\tilde{D}u|$-fast-überall wohldefiniert und es gilt*

$$D(f \circ u) = (\nabla f \circ \bar{u}) \cdot \tilde{D}u + (f \circ u^+ - f \circ u^-) \otimes \nu_u \mathbb{1}_{J_u} \cdot \mathscr{H}^{n-1}|_\Omega.$$

Tatsächlich gilt (1.25) auch bei vektorwertigem u, also beliebigem $N \in \mathbb{N}$, noch für alle $\mathscr{H}^1$-Nullmengen E in $\mathbb{R}^N$ und die Kettenregel aus Satz 1.92 bleibt richtig, wenn die Menge E der Nichtdifferenzierbarkeitsstellen von f nur $\mathscr{H}^1(E) = 0$ erfüllt. Diese Erkenntnisse lassen sich nun beispielsweise auf die Betragsfunktion anwenden und wir erhalten

$$|Du|(\{x \in \Omega \setminus S_u : \bar{u}(x) = 0\}) = 0$$

zusammen mit der Regel

$$D|u| = \frac{\bar{u}}{|\bar{u}|} \cdot \tilde{D}u + (|u^+| - |u^-|) \otimes \nu_u \mathbb{1}_{J_u} \cdot \mathscr{H}^{n-1}|_\Omega,$$

Für eine allgemeine Lipschitz-Funktion $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^K$ mit $N > 1$ muss jedoch nicht $\mathscr{H}^1(E) = 0$ gelten und das Obige lässt sich nicht anwenden. Trotzdem gilt noch die folgende allgemeinste Version der Kettenregel von Ambrosio-Dal Maso [9]:

Satz 1.93 (Kettenregel im Vektorfall). *Seien $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^K$ eine Lipschitz-Funktion und $u \in BV_{\text{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ mit Polarzerlegung $Du = g \cdot |Du|$ und*

$$G(x) := \{g(x)v \,:\, v \in \mathbb{R}^n\}.$$

Dann ist f für $|Du|$-fast-alle $x \in \Omega \setminus S_u$ an der Stelle $\bar{u}(x)$ in allen Richtungen aus $G(x)$ differenzierbar, wir können die Ableitung $\nabla_G f(x)$ als lineare Abbildung $G(x) \to \mathbb{R}^K$ verstehen und es gilt

$$D(f \circ u) = (\nabla_G f \circ \bar{u}) g \cdot |\tilde{D}u| + (f \circ u^+ - f \circ u^-) \otimes \nu_u \mathbb{1}_{J_u} \cdot \mathscr{H}^{n-1}|_{\Omega}.$$

Kapitel 2

Variationsintegrale mit linearem Wachstum

In diesem Kapitel bezeichne Ω – wie bisher – eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Zusätzlich werden wir nun jedoch stets annehmen, dass Ω **beschränkt** ist.

Definition 2.1. *Unter einem* **Variationsfunktional von 0ter Ordnung** *verstehen wir eine Zuordnung G der Form*

$$G[u] := \int_\Omega g(\cdot, u)\, dx$$

mit einem **Integranden** $g : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$*, die gewissen Funktionen* $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$ *einen Wert in* $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ *zuordnet.*

Ein **Variationsfunktional F von 1ter Ordnung** *dagegen ist von der Form*

$$F[u] := \int_\Omega f(\cdot, u, \nabla u)\, dx$$

mit **Integranden** $f : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{Nn} \to \mathbb{R}$*, wobei die Ableitung* ∇u *in einem noch zu präzisierenden Sinn zu bilden ist.*

Wir werden nun versuchen, eine geeignete Formulierung des Variationsproblems zu finden, die es erlaubt die Existenz von Minimierern – so nennt man in der Variationsrechnung die Minimalstellen von Funktionalen – zu beweisen. Für Funktionale G von 0ter Ordnung lässt sich die Minimierung von G (unter schwachen Voraussetzungen) auf die Minimierung des Integranden g zurückführen: Die Minimierer von G sind nämlich genau die Funktionen u, für die $u(x)$ für $\mathscr{L}^n$-fast-alle $x \in \Omega$ ein Minimum von $g(x, \cdot)$ ist. Die Minimierung von Funktionalen F von 1ter Ordnung dagegen ist viel schwieriger und wird im Folgenden unser Hauptziel sein. Wie in der Theorie partieller Differentialgleichungen ist dabei das Minimierungsproblem nur sinnvoll, wenn man zusätzlich noch eine Randbedingung stellt (dazu später mehr).

Um mit dem Funktional F sinnvoll arbeiten zu können, möchten wir, dass für jedes nichtnegative Radon-Maß ν und jedes ν-messbare $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$ mit ν-messbarer Ableitung $\nabla u : \Omega \to \mathbb{R}^{Nn}$ auch die Komposition $f(\cdot, u, \nabla u) : \Omega \to \mathbb{R}$ stets ν-messbar ist. Dies ist jedenfalls der Fall, wenn f Borel-messbar ist;

wir werden diese (schwache) Messbarkeitseigenschaft von f im Folgenden stets stillschweigend annehmen. Analoges gilt für den Integranden g des Funktionals G.

Definition 2.2. *Wir sagen, dass das Integral F (oder genauer der Integrand f)* **lineares Wachstum**[1] *hat, wenn es positive Konstanten γ und Γ gibt mit*

$$\gamma|z| \leq f(x,y,z) \leq \Gamma(1+|z|) \qquad \textit{für alle } (x,y,z) \in \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{Nn}.$$

Analog definieren wir lineares Wachstum von G, wobei wir den Integranden g als Funktion von $(x,z) \in \Omega \times \mathbb{R}^N$ auffassen.

Tatsächlich könnte man auch eine untere Schranke der Form $\gamma|z| - C$ mit einer Konstanten C zulassen; dies bringt jedoch keinen Gewinn an Allgemeinheit, da sich durch Addition einer Konstanten[2] zu f stets auf die vorausgehende Bedingung reduzieren lässt.

Um nun einen **Minimierer** von F zu finden, verwenden wir die **direkte Methode der Variationsrechnung**. Darunter versteht man folgende heuristische Idee: Wir suchen einen Raum $\mathcal{F}$ von Funktionen $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$ und eine Topologie $\mathcal{T}$ auf $\mathcal{F}$, so dass einerseits ein Auswahlsatz für diese Topologie gilt und andererseits $F : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ bezüglich $\mathcal{T}$ unterhalbstetig ist. Haben wir eine solche Topologie gefunden, so betrachten wir eine **Minimalfolge** für F, also eine Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{F}$ mit

$$F[u_k] \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \inf_{\mathcal{F}} F < \infty$$

und können eine bezüglich $\mathcal{T}$ konvergente Teilfolge $u_{k_l} \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} u$ auswählen. Es folgt

$$F[u] \leq \liminf_{l\to\infty} F[u_{k_l}] = \inf_{\mathcal{F}} F,$$

also ist u ein Minimierer von $\mathcal{F}$.

Hat F lineares Wachstum, so ist $F[u]$ wohldefiniert, nichtnegativ und endlich für alle $u \in W^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Daher bietet es sich scheinbar[3] an, $\mathcal{F} = W^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ zu wählen. Allerdings gilt keinerlei Auswahlsatz für die schwache Topologie auf $W^{1,1}$ (erst recht nicht für die starke oder eine noch andere Topologie). Stattdessen können wir nur erwarten, dass eine Minimalfolge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $W^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ eine Teilfolge mit $u_{k_l} \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} u$ schwach-$*$ in $BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$ besitzt. Folglich ist **der Raum $\boldsymbol{BV}$** in diesem Zusammenhang **das natürliche Substitut für $\boldsymbol{W^{1,1}}$**. Wollen wir die Grenzfunktion u als Minimierer interpretieren, so stehen wir vor dem Problem, dass **Funktional $\boldsymbol{F}$ geeignet auf $\boldsymbol{BV}$-Funktionen fortzusetzen**, also $F[u]$ für $u \in BV_{\text{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ zu definieren, so dass sich für $Du \ll \mathscr{L}^n|_\Omega$

[1] Allgemeiner spricht man von p-Wachstum wenn analog $\gamma|z|^p \leq f(x,y,z) \leq \Gamma(1+|z|^p)$ mit einem $p \in [1,\infty)$ gilt.

[2] Für alle folgenden Resultate ist eine solche Addition irrelevant.

[3] Hat F nämlich p-Wachstum mit $p > 1$, so ist $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ reflexiv, es gilt ein Auswahlsatz für die schwache Topologie und das Minimierungsproblem lässt sich in $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ behandeln; der Fall $p > 1$ führt daher zu klassischeren Resultaten der Variationsrechnung, auf die wir hier nicht eingehen.

wieder die ursprüngliche Definition ergibt. Tatsächlich reicht es zum Existenzbeweis aus, das approximative Differential ∇u in f einzusetzen. Wie wir später verstehen werden, vergisst man dabei jedoch die singulären Anteile von Du und verkleinert das Minimum von F möglicherweise unnötig.

2.1 Funktionale von Maßen

Als Vorstufe zur Fortsetzung von F folgen wir zunächst [34] und beschäftigen wir uns zuerst mit der einfacheren Frage nach der Fortsetzung von Funktionalen G von 0ter Ordnung auf den Raum der endlichen Radon-Maße, also mit der Definition von $G[\mu]$ für $\mu \in RM_{\text{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$.

Speziell für $g(x,z) = |z|$ ist es naheliegend $G[\mu] := |\mu|(\Omega)$ zu definieren. Wir erinnern uns jetzt an die Definition der Variation zurück und erkennen, dass diese Idee sich auch allgemeiner verwenden lässt, nämlich wenn $g(x,z)$ **homogen vom Grad 1 in z** ist. Dann können wir nämlich zu $\mu \in RM_{\text{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ ein nichtnegatives Radon-Maß ν auf Ω mit $\mu \ll \nu$ als Grundmaß[4] wählen und

$$G[\mu] := \int_\Omega g\Big(\cdot, \frac{d\mu}{d\nu}\Big)\, d\nu \tag{2.1}$$

setzen. Wegen der Homogenität von g sieht man – wie im Falle der Variation selbst – mit dem Satz von Radon-Nikodym, dass $G[\mu]$ nicht von der Auswahl von ν abhängt.

Die Homogenitätsvoraussetzung an g ist jedoch störend. Tatsächlich soll unsere Theorie (vergleiche auch später) auf jeden Fall den Integranden $g(x,z) = \sqrt{1+|z|^2}$ einschließen; deshalb folgen wir einer Idee von Giaquinta-Modica-Soucek [31] und führen für konvexe, aber nicht homogene Integranden einen homogenen Hilfsintegranden ein:

Definition 2.3. *$g(x,z)$ sei konvex in $z \in \mathbb{R}^N$ und habe lineares Wachstum. Dann definieren wir die* **Rezessionsfunktion** $g^\infty : \Omega \times \mathbb{R}^N \to [0,\infty)$ *durch*

$$g^\infty(x,z) := \lim_{t \searrow 0} t g\Big(x, \frac{z}{t}\Big)$$

und den **homogenisierten (oder parametrischen) Integranden** $\tilde{g} : \Omega \times [0,\infty) \times \mathbb{R}^N \to [0,\infty)$ *durch*

$$\tilde{g}(x,t,z) := \begin{cases} t g\big(x, \frac{z}{t}\big) & \text{für } t > 0 \\ g^\infty(x,z) & \text{für } t = 0 \end{cases}.$$

Lemma 2.4. *$g(x,z)$ sei konvex in $z \in \mathbb{R}^N$ und habe lineares Wachstum.*

(I) g^∞ ist wohldefiniert, konvex in z und homogen vom Grad 1 in z mit

$$\gamma|z| \le g^\infty(x,z) \le \Gamma|z| \qquad \text{für alle } (x,z) \in \Omega \times \mathbb{R}^N;$$

[4] Ein solches Grundmaß gibt es stets, beispielsweise kann man $\nu := |\mu|$ nehmen.

(II) $\tilde{g}$ *ist konvex in* (t,z) *und homogen vom Grad* 1 *in* (t,z) *mit*

$$\gamma|z| \leq \tilde{g}(x,t,z) \leq \Gamma(t+|z|) \qquad \textit{für alle } (x,t,z) \in \Omega \times [0,\infty) \times \mathbb{R}^N;$$

(III) ist g *unterhalbstetig, so sind dies auch* g^∞ *und* $\tilde{g}$*;*

(IV) sind g *und* g^∞ *stetig*[5]*, so ist dies auch* $\tilde{g}$*;*

(V) ist g *selbst homogen vom Grad* 1 *in* z*, so gilt*

$$g^\infty(x,z) = g(x,z) = \tilde{g}(x,t,z). \qquad \textit{für alle } (x,t,z) \in \Omega \times [0,\infty) \times \mathbb{R}^N.$$

Beweis. Der Grenzwert in der Definition von g^∞ stimmt offensichtlich überein mit

$$\lim_{s\to\infty} \frac{g(x,sz)-g(x,0)}{s}.$$

Aber diese Differenzenquotienten der konvexen Funktion $s \mapsto g(x,sz)$ sind nichtfallend und von oben beschränkt durch $\Gamma\frac{(1+s|z|)}{s}$. Daher existiert $g^\infty(x,z)$ mit $g^\infty(x,z) \leq \Gamma|z|$. Für $x \in \Omega$, $\lambda \in [0,1]$ und $(t_1,z_1),(t_2,z_2) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^N$ erhalten wir außerdem aus der Konvexität von g

$$\begin{aligned}
&\lambda\tilde{g}(x,t_1,z_1) + (1-\lambda)\tilde{g}(x,t_2,z_2)\\
&\quad = (\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2)\Big[\frac{\lambda t_1}{\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2} g\Big(x,\frac{z_1}{t_1}\Big) + \frac{(1-\lambda)t_2}{\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2} g\Big(x,\frac{z_2}{t_2}\Big)\Big]\\
&\quad \geq (\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) g\Big(x, \frac{\lambda z_1 + (1-\lambda)z_2}{\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2}\Big)\\
&\quad = \tilde{g}(x, \lambda t_1 + (1-\lambda)t_2, \lambda z_1 + (1-\lambda)z_2).
\end{aligned}$$

Aus Stetigkeitsgründen bleibt die resultierende Ungleichung auch in den Fällen $t_1 = 0$ und/oder $t_2 = 0$ noch richtig und wir haben die behauptete Konvexität von $\tilde{g}$ und g^∞ gezeigt. Alle verbleibenden Behauptungen in (I) und (II) folgen jetzt problemlos. Zum Beweis von (III) sei $(x_k,t_k,z_k) \to (x,t,z)$ eine konvergente Folge in $\Omega \times [0,\infty) \times \mathbb{R}^N$. Im Falle $t > 0$ folgt dann aus der Definition von $\tilde{g}$ sofort

$$\tilde{g}(x,t,z) \leq \liminf_{k\to\infty} \tilde{g}(x_k,t_k,z_k). \tag{2.2}$$

Im Falle $t = 0$ finden wir zu $\varepsilon > 0$ ein $s > 0$ mit

$$\tilde{g}(x,t,z) = g^\infty(x,z) \leq \frac{\tilde{g}(x,sz)-\Gamma}{s} + \varepsilon$$

und mit der obigen Monotonie der Differenzenquotienten folgt

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(x,t,z) &\leq \liminf_{k\to\infty} \frac{g(x_k,sz_k)-g(x_k,0)}{s} + \varepsilon\\
&\overset{\frac{1}{t_k}\geq s}{\leq} \liminf_{k\to\infty} t_k\Big[g\Big(x_k,\frac{z_k}{t_k}\Big) - g(x_k,0)\Big] + \varepsilon\\
&= \liminf_{k\to\infty} \tilde{g}(x_k,t_k,z_k) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

[5]Ist g unabhängig von x, so sind g und g^∞ als konvexe Funktionen auf $\mathbb{R}^N$ immer stetig.

Also gilt (2.2) in jedem Fall und (III) ist gezeigt. (IV) lässt sich unter erneuter Verwendung der Monotonie der Differenzenquotienten ähnlich einsehen und (V) ist trivial. □

Definition 2.5. *$g(x,z)$ sei konvex in $z \in \mathbb{R}^N$ und habe lineares Wachstum. Dann definieren wir das (konkrete) Funktional*

$$G : RM_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N) \to [0,\infty]$$

durch die Vorschrift

$$G[\mu] := \int_\Omega \tilde{g}\Big(\cdot, \frac{d\mathscr{L}^n}{d\nu}, \frac{d\mu}{d\nu}\Big)\, d\nu \qquad \text{für } \mu \in RM_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N),$$

wobei ν ein beliebiges nichtnegatives Radon-Maß auf Ω mit $(\mathscr{L}^n, \mu) \ll \nu$ ist. Nach dem Satz von Radon-Nikodym hängt $G[\mu]$ nicht von der Auswahl des Grundmaßes ν ab und ist folglich wohldefiniert.

Lemma 2.6. *$g(x,z)$ sei konvex in $z \in \mathbb{R}^N$ und habe lineares Wachstum. Dann gilt für $\mu \in RM_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ stets*

$$G[\mu] = \int_\Omega g\Big(\cdot, \frac{d\mu}{d\mathscr{L}^n}\Big)\, d\mathscr{L}^n + \int_\Omega g^\infty\Big(\cdot, \frac{d\mu^s}{d|\mu^s|}\Big)\, d|\mu^s|,$$

wobei μ^s den zu $\mathscr{L}^n$ singulären Anteil in der Lebesgue-Zerlegung von μ bezeichnet. Insbesondere erhalten wir für absolutstetiges $\mu = u \cdot \mathscr{L}^n|_\Omega$ die ursprüngliche Definition von G zurück.

Beweis. Es gibt eine Zerlegung von Ω in disjunkte Teilmengen A und S mit

$$\mathscr{L}^n(S) = 0 = |\mu^s|(A).$$

Setzen wir nun $\nu = |\mu^s| + \mathscr{L}^n$, so erhält man aus $\mathbb{1}_A \cdot \nu = \mathscr{L}^n$ und $\mathbb{1}_S \cdot \nu = |\mu^s|$ durch Lebesgue-Zerlegung

$$\mathbb{1}_A \cdot \nu = \frac{d\mathscr{L}^n}{d\nu} \cdot \nu \qquad \text{und} \qquad \Big(\frac{d\mu}{d\mathscr{L}^n}\mathbb{1}_A + \frac{d\mu^s}{d|\mu^s|}\mathbb{1}_S\Big) \cdot \nu = \frac{d\mu}{d\nu} \cdot \nu.$$

Verwenden wir ν als Grundmaß in Definition 2.5, so folgt

$$\begin{aligned} G[\mu] &= \int_\Omega \tilde{g}\Big(\cdot, \mathbb{1}_A, \frac{d\mu}{d\mathscr{L}^n}\mathbb{1}_A + \frac{d\mu^s}{d|\mu^s|}\mathbb{1}_S\Big)\, d\nu \\ &= \int_\Omega \tilde{g}\Big(\cdot, 1, \frac{d\mu}{d\mathscr{L}^n}\Big)\, d\mathscr{L}^n + \int_\Omega \tilde{g}\Big(\cdot, 0, \frac{d\mu^s}{d|\mu^s|}\Big)\, d|\mu^s| \\ &= \int_\Omega g\Big(\cdot, \frac{d\mu}{d\mathscr{L}^n}\Big)\, d\mathscr{L}^n + \int_\Omega g^\infty\Big(\cdot, \frac{d\mu^s}{d|\mu^s|}\Big)\, d|\mu^s|. \end{aligned}$$ □

Beispiel. *Für*

$$g(x,z) = \sqrt{1 + |z|^2}$$

ist $g^\infty(x,z) = |z|$ und

$$G[\mu] = \int_\Omega \sqrt{1 + \Big|\frac{d\mu}{d\mathscr{L}^n}\Big|^2}\, dx + |\mu^s|(\Omega).$$

Wie oben erläutert hängt das Minimierungsproblem für F eng mit Unterhalbstetigkeitseigenschaften zusammen, während das Minimierungsproblem für G einfacher ist und sich auch ohne derartige Überlegungen lösen lässt. Deshalb dient der folgende Satz aus [45] über die Unterhalbstetigkeitseigenschaften von G nicht der Minimierung von G, sondern der Vorbereitung der analogen Ergebnisse für F.

Satz 2.7 (**Unterhalbstetigkeitssatz von Reshetnyak**). *$g(x,z)$ sei konvex in z, unterhalbstetig in (x,z) und habe lineares Wachstum. Dann gilt für eine lokal schwach-$*$-konvergente Folge $\mu_k \xrightarrow[k\to\infty]{*} \mu$ in $RM_{\mathrm{lok}}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ stets*

$$G[\mu] \le \liminf_{k\to\infty} G[\mu_k].$$

Zusatz 2.8 (**Stetigkeitssatz von Reshetnyak**). *$g(x,z)$ sei konvex in z und habe lineares Wachstum. Außerdem seien g und g^∞ stetig in (x,z). Dann gilt für eine strikt konvergente Folge $\mu_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \mu$ in $RM(\Omega,\mathbb{R}^N)$ stets*

$$G[\mu] = \lim_{k\to\infty} G[\mu_k].$$

Der Beweis des Satzes fußt auf dem folgenden maßtheoretischen Lemma, das Proposition 0.40 verallgemeinert.

Lemma 2.9. *Seien M ein lokal und abzählbar kompakter metrischer Raum, $g : M \to [0,\infty)$ eine unterhalbstetige Funktion und $\rho_k \xrightarrow[k\to\infty]{*} \rho$ eine lokal schwach-$*$-konvergente Folge nichtnegativer Maße in $RM_{\mathrm{lok}}(M)$. Dann gilt*

$$\int_M g\,d\rho \le \liminf_{k\to\infty} \int_M g\,d\rho_k. \tag{2.3}$$

Ist die Folge sogar strikt konvergent in $RM(M)$ und g stetig und beschränkt, so gilt stärker

$$\int_M g\,d\rho = \lim_{k\to\infty} \int_M g\,d\rho_k. \tag{2.4}$$

Beweis. Für $t > 0$ ist $g_t : M \to [0,\infty)$, definiert durch

$$g_t(x) := \inf_{y\in M}[g(y) + td(x,y)],$$

eine stetige, sogar Lipschitz-stetige, Funktion mit $g_t \le g$ auf M. Für jedes $\varphi \in C^0_{\mathrm{kpt}}(M)$ mit $\sup_M \varphi \le 1$ gilt daher

$$\int_M \varphi g_t\,d\rho = \lim_{k\to\infty} \int_M \varphi g_t\,d\rho_k \le \liminf_{k\to\infty} \int_M g\,d\rho.$$

Nun bedeutet die Unterhalbstetigkeit von g aber gerade, dass g_t bei $t \to \infty$ punktweise auf M gegen g konvergiert. Deshalb folgt die Behauptung (2.3) mit dominierter und/oder monotoner Konvergenz. Ist g stetig und beschränkt, also

$g \leq L$ auf M für ein $L \geq 0$, so können wir (2.3) auf $(L-g)$ anwenden und erhalten für eine strikt konvergente Folge

$$\begin{aligned}
L\rho(M) - \int_M g\,d\rho &= \int_M (L-g)\,d\rho \\
&\leq \liminf_{k\to\infty} \int_M (L-g)\,d\rho_k \\
&= \liminf_{k\to\infty} \Big[L\rho_k(M) - \int_M g\,d\rho_k\Big] \\
&= L\rho(M) - \limsup_{k\to\infty} \int_M g\,d\rho_k.
\end{aligned}$$

Kombinieren wir die resultierende Ungleichung erneut mit (2.3), so ergibt sich (2.4). □

Beweis von Satz 2.7. Wir nehmen an, dass g homogen vom Grad 1 ist. Ansonsten ersetzen[6] wir g durch den homogenisierten Integranden $\tilde{g}$ und μ_k durch $(\mathscr{L}^n, \mu_k)$; dabei bleiben nach Lemma 2.4 alle vorausgesetzten Eigenschaften erhalten. Unter der Homogenitätsannahme reduziert sich nun Definition 2.5 auf (2.1). Weiterhin reicht es eine Folge $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ wie im Satz zu betrachten, für die

$$\lim_{k\to\infty} G[\mu_k] \text{ in } [0,\infty) \text{ existiert.} \tag{2.5}$$

Insbesondere ist wegen der unteren Abschätzung in der Wachstumsbedingung dann $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt (und global schwach-$*$-konvergent) in $RM(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Wir betrachten nun die Polarzerlegungen $\mu_k = f_k \cdot |\mu_k|$, wobei wir die Dichten als S_1^{N-1}-wertige Funktionen verstehen, und führen die nichtnegativen endlichen Radon-Maße

$$\rho_k := \int_\Omega \delta_x \otimes \delta_{f_k(x)}\,d|\mu_k|(x) \in RM(\Omega \times S_1^{N-1})$$

ein, mit dem verallgemeinerten Produkt aus Kapitel 0.6. Wie in Kapitel 0.6 bezeichne $\pi : \Omega \times S_1^{N-1} \to \Omega$ die Projektion. Wegen $\pi_\# \rho_k = |\mu_k|$ ist $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $RM(\Omega \times S_1^{N-1})$ und besitzt eine schwach-$*$-konvergente Teilfolge. Gemäß (2.5) können wir annehmen, dass sogar die ganze Folge

$$\rho_k \xrightharpoonup[k\to\infty]{*} \rho \qquad \text{schwach-}* \text{ in } RM(\Omega \times S_1^{N-1})$$

konvergiert mit einem nichtnegativen Grenzmaß ρ. Durch Disintegration können wir jetzt

$$\rho = \int_\Omega \delta_x \otimes \nu_x\,d(\pi_\# \rho)$$

[6] Wir begehen hier zwecks Vereinfachung eine geringfügige Ungenauigkeit, da die Variablen (t, z) des homogenisierten Integrands in einem Halbraum laufen, während z Werte in einem Vollraum annimmt. Dies lässt sich jedoch problemlos präzisieren; man beachte insbesondere, dass sich Lemma 2.9 auch für Halbräume (und Halbsphären) noch anwenden lässt.

schreiben mit einer $\pi_\#\rho$-messbaren Abbildung $\nu : \Omega \to RM(S_1^{n-1})$, so dass ν_x für $\pi_\#\rho$-fast-alle $x \in \Omega$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist. Für $\varphi \in C^0_{\mathrm{kpt}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ rechnen wir nun (beachte, dass S_1^{N-1} kompakt ist)

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \varphi(x) \cdot \int_{S_1^{N-1}} y \, d\nu_x(y) \, d(\pi_\#\rho)(x) &= \int_{\Omega \times S_1^{N-1}} \varphi(x) \cdot y \, d\rho(x,y) \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega \times S_1^{N-1}} \varphi(x) \cdot y \, d\rho_k(x,y) \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_\Omega \varphi \cdot f_k \, d|\mu_k| \\
&= \int_\Omega \varphi \cdot \, d\mu.
\end{aligned}$$

Daraus lesen wir

$$|\mu| \le \pi_\#\rho$$

und

$$\frac{d\mu}{d(\pi_\#\rho)}(x) = \int_{S_1^{N-1}} y \, d\nu_x(y) \qquad \text{für } \pi_\#\rho\text{-fast-alle } x \in \Omega \tag{2.6}$$

ab. Dies verwenden wir nun zusammen mit (2.3) und der Jensenschen Ungleichung:

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \int_\Omega g(\cdot, f_k) \, d|\mu_k| &= \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega \times S_1^{N-1}} g \, d\rho_k \\
&\ge \int_{\Omega \times S_1^{N-1}} g \, d\rho \\
&= \int_\Omega \int_{S_1^{N-1}} g(x,y) \, d\nu_x(y) \, d(\pi_\#\rho)(x) \qquad (2.7) \\
&\ge \int_\Omega g\Big(x, \int_{S_1^{N-1}} y \, d\nu_x(y)\Big) \, d(\pi_\#\rho)(x) \\
&= \int_\Omega g\Big(\cdot, \frac{d\mu}{d(\pi_\#\rho)}\Big) \, d(\pi_\#\rho).
\end{aligned}$$

Gemäß (2.1) ist dies die Behauptung. □

Beweis von Zusatz 2.8. Wir steigen erneut in den vorigen Beweis ein. Man beachte, dass wir nun Lemma 2.4 (IV) verwenden um unter Erhaltung der Stetigkeit auf den Fall eines homogenen g zu reduzieren. Ist $\mu_k \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} \mu$ strikt konvergent in $RM(\Omega, \mathbb{R}^N)$, so folgt

$$|\mu|(\Omega) = \lim_{k\to\infty} |\mu_k|(\Omega) = \lim_{k\to\infty} \rho_k(\Omega \times S_1^{N-1}) \ge \rho(\Omega \times S_1^{N-1}) = \pi_\#\rho(\Omega).$$

Zusammen mit der obigen Ungleichung $|\mu| \le \pi_\#\rho$ erhalten wir daher

$$|\mu| = \pi_\#\rho.$$

In dieser Situation impliziert (2.6)

$$\int_{S_1^{N-1}} y\,d\nu_x(y) \in S_1^{N-1} \qquad \text{für } \pi_{\#}\rho\text{-fast-alle } x \in \Omega.$$

Es folgt, dass ν_x für $\pi_{\#}\rho$-fast-alle $x \in \Omega$ ein Dirac-Maß ist (und zwar zur Stelle $\frac{d\mu}{d|\mu|}(x)$). Mit diesem Wissen und (2.4) können wir nun die Rechnung (2.7) erneut durchführen und sehen, dass überall Gleichheit eintritt. Man beachte dabei, dass g – wie für (2.4) vorausgesetzt – gemäß der Wachstumsbedingung beschränkt ist auf $\Omega \times S_1^{N-1}$. □

2.2 Funktionale auf *BV*

Nun kehren wir zurück zum Hauptziel dieses Kapitels, nämlich dem Studium von Funktionalen

$$F[u] = \int_\Omega f(\cdot, u, \nabla u)\,dx$$

erster Ordnung. Wir sagen, dass F **unabhängig von u** ist, wenn $f(x, y, z)$ konstant in y ist. Wir fassen dann f als Funktion der Variablen x und z auf und deuten kurz durch die Notation $f(x, z)$ an, dass wir diesen Fall betrachten wollen. Wir werden uns vorerst auf den Fall ohne u-Abhängigkeit beschränken und wir werden sehen, dass sich dann vieles auf die vorausgehende Theorie der Funktionale 0ter Ordnung zurückführen lässt. Der allgemeine Fall ist deutlich schwieriger und teilweise nicht vollständig verstanden.

Wie oben erwähnt macht die Minimierung des Funktionals F nur Sinn, wenn wir zusätzlich eine Randbedingung auf $\partial\Omega$ stellen. Wir beschränken uns hier auf den (einfachsten und wohl grundlegendsten) Fall einer Dirichlet-Randbedingung, verlangen also im klassischen Fall glatter Funktionen einfach, dass Minimierer der Randbedingung

$$u\big|_{\partial\Omega} = u_0$$

mit einer gegebenen Funktion u_0 auf dem Rand $\partial\Omega$ genügen.

Für eine Theorie in Sobolevräumen $W^{1,p}$ formuliert man dies (um die technischen Schwierigkeiten von Spuren zu vermeiden) meist folgendermaßen um. Man betrachtet eine gegebene Funktion $v_0 \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ und verlangt, dass u dieselben Randwerte wie v_0 hat im Sinne von

$$u \in v_0 + W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N).$$

Der affine Unterraum $\mathcal{D} := v_0 + W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ heißt dabei auch eine Dirichlet-Klasse. Tatsächlich lässt sich für $p > 1$ das Minimierungsproblem für Integrale mit p-Wachstum in $\mathcal{D}$ lösen, wesentlich ist dabei jedoch, dass $\mathcal{D}$ bezüglich schwacher Konvergenz in $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ abgeschlossen ist.

Ist Ω Lipschitz, so können wir mit Hilfe des Spuroperators eine Dirichlet-Klasse in $BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$ definieren als Menge von Funktionen mit gleicher Spur. Derartige Dirichlet-Klassen sind jedoch nicht abgeschlossen[7] bezüglich schwach-$*$-Konvergenz – sondern nur bezüglich strikter Konvergenz; somit können wir

[7] Tatsächlich ist der Abschluss von $\mathscr{D}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ in der schwach-$*$-Topologie schon ganz $BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$; man vergleiche Übungsaufgabe 6.

nicht garantieren, dass der Grenzwert einer (schwach-$*$-konvergenten) Minimalfolge in derselben Dirichlet-Klasse liegt, in der die Folge verläuft, und dieses Konzept bringt uns nicht weiter. Wir gehen deshalb etwas anders vor und erzwingen in der folgenden Konstruktion gewissermaßen die richtigen Randwerte:

Wir nehmen an, dass Ω Lipschitz ist und definieren den Spurraum $\mathcal{T}$ als das Bild von $W^{1,1}(\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega})$ unter dem Spuroperator $T_{\mathbb{R}^n\setminus\overline{\Omega}}$. Nach Bemerkung 1.78 ist tatsächlich $\mathcal{T} = L^1(\partial\Omega, \mathbb{R}^N; \mathscr{H}^{n-1})$, aber dies haben wir hier nicht bewiesen und wollen es deshalb nicht benutzen. Wir nehmen nun weiter an, dass $f(x,z)$ auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{Nn}$ definiert und konvex in z mit linearem Wachstum ist. Wir fixieren $w_0 \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega})$ mit $u_0 = T_{\mathbb{R}^n\setminus\overline{\Omega}} w_0 \in \mathcal{T}$ und definieren die Fortsetzung $\tilde{u}$ von $u \in BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$ durch w_0 als

$$\tilde{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{für } x \in \Omega \\ w_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega} \end{cases}. \tag{2.8}$$

Nach Korollar 1.79 ist dann $\tilde{u} \in BV(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$ und wir können – für Funktionale ohne u-Abhängigkeit – in Analogie zu Definition 2.5

$$\widetilde{F}_{w_0}[u] := \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}\Big(\cdot, \frac{d\mathscr{L}^n}{d\nu}, \frac{dD\tilde{u}}{d\nu}\Big)\, d\nu \tag{2.9}$$

für jedes $u \in BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$ definieren, wobei ν ein beliebiges nichtnegatives Radon-Maß auf $\mathbb{R}^n$ ist mit $(\mathscr{L}^n, D\tilde{u}) \ll \nu$. Außerdem besagt Korollar 1.79 noch

$$D\tilde{u} = \widetilde{Du} + (u_0 - T_\Omega u) \otimes \nu_\Omega \mathbb{1}_{\partial\Omega} \cdot \mathscr{H}^{n-1} + \nabla w_0 \mathbb{1}_{\mathbb{R}^n\setminus\overline{\Omega}} \cdot \mathscr{L}^n, \tag{2.10}$$

wobei $\widetilde{Du}$ wie in Satz 1.77 und Korollar 1.79 die Fortsetzung des Maßes Du durch 0 bezeichnet. Mit der Wahl $\nu = \mathscr{L}^n + |\widetilde{D^s u}| + \mathbb{1}_{\partial\Omega} \cdot \mathscr{H}^{n-1}$ sehen wir deshalb wie in Lemma 2.6 (man erinnere sich an $D^a u = \nabla u \cdot \mathscr{L}^n|_\Omega$)

$$\begin{aligned} \widetilde{F}_{w_0}[u] = &\int_\Omega f(\cdot, \nabla u)\, d\mathscr{L}^n + \int_\Omega f^\infty\Big(\cdot, \frac{dD^s u}{d|D^s u|}\Big)\, d|D^s u| \\ &+ \int_{\partial\Omega} f^\infty(\cdot, (u_0 - T_\Omega u) \otimes \nu_\Omega)\, d\mathscr{H}^{n-1} + \int_{\mathbb{R}^n\setminus\overline{\Omega}} f(\cdot, \nabla w_0)\, d\mathscr{L}^n. \end{aligned}$$

Tatsächlich hängt der letzte Term auf der rechten Seite der vorigen Gleichung nicht von u ab, während die anderen drei nur von u, Ω, f auf $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^{Nn}$ und u_0 abhängen, aber nicht von f auf $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ oder der Fortsetzung w_0 von $u_0 \in \mathcal{T}$. Dies motiviert die folgende Definition:

Definition 2.10. *Ω sei Lipschitz und $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^{Nn} \to [0,\infty)$ sei konvex im zweiten Argument z und habe lineares Wachstum*[8]*. Dann definieren wir zu gegebenen Randwerten $u_0 \in L^1(\partial\Omega, \mathbb{R}^N; \mathscr{H}^{n-1})$*

$$\begin{aligned} F_{u_0}[u] := &\int_\Omega f(\cdot, \nabla u)\, d\mathscr{L}^n + \int_\Omega f^\infty\Big(\cdot, \frac{dD^s u}{d|D^s u|}\Big)\, d|D^s u| \\ &+ \int_{\partial\Omega} f^\infty(\cdot, (u_0 - T_\Omega u) \otimes \nu_\Omega)\, d\mathscr{H}^{n-1} \qquad \textit{für } u \in BV(\Omega, \mathbb{R}^N). \end{aligned}$$

[8]Dies ist so gemeint, dass die Wachstumsbedingung für alle $(x,z) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^{Nn}$ gelten soll.

Beispiel. *Für* $f(x,z) = \sqrt{1+|z|^2}$ *ist*

$$F_{u_0}[u] = \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla u|^2}\,dx + |D^s u|(\Omega) + \int_{\partial\Omega} |u_0 - T_\Omega u|\,d\mathscr{H}^{n-1}.$$

Dabei sind die ersten zwei Terme auf der rechten Seite der Definition gerade die, die man nach Definition 2.5 auch erwarten würde. Der dritte Term dagegen ist als **Penalisierungsterm** zu verstehen, der die Annahme von falschen Randwerten zwar (mit größeren Werten des Funktionals) bestraft, sie aber nicht vollständig verhindert. Wir werden später sehen, dass es – abgesehen von speziellen Fällen – keine Minimierer mit vorgegebenen Randwerten gibt und falsche Randwerte tatsächlich auftreten können.

2.2.1 Unterhalbstetigkeit und Existenz

Mit der direkten Methode und dem Satz von Reshetnyak erhalten wir nun einen Existenzsatz für Minimierer von F_{u_0}.

Satz 2.11 (**Existenzsatz**). *Ω sei Lipschitz und $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^{Nn} \to [0,\infty)$ sei konvex in z, unterhalbstetig in (x,z) und habe lineares Wachstum. Dann gelten für $u_0 \in \mathcal{T}$ die folgenden beiden Aussagen:*

(I) Für jede schwach-$*$-konvergente Folge $u_k \underset{k\to\infty}{\overset{*}{\rightharpoonup}} u$ in $BV(\Omega,\mathbb{R}^N)$ gilt

$$F_{u_0}[u] \le \liminf_{k\to\infty} F_{u_0}[u_k];$$

(II) es gibt einen Minimierer von F_{u_0} in $BV(\Omega,\mathbb{R}^N)$.

Im Beweis des Satzes benutzen wir:

Lemma 2.12 (**Poincaré-Ungleichung**). *Ω sei Lipschitz mit Durchmesser $< 2R$. Dann gilt für $u \in BV(\Omega,\mathbb{R}^N)$ stets*

$$\int_\Omega |u|\,dx \le R\left[|Du|(\Omega) + \int_{\partial\Omega} |T_\Omega u|\,d\mathscr{H}^{n-1}\right].$$

Beweis. Hat der Träger von $u \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^N)$ Durchmesser $< 2R$, so beweist man

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|\,dx \le R\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|\,dx$$

durch Integration nach der ersten Variablen. Ist $u \in BV(\Omega,\mathbb{R}^N)$, so ist nach Satz 1.77 die Fortsetzung $\tilde{u}$ von u durch 0 in $BV(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^N)$ mit

$$D\tilde{u} = \widetilde{Du} - T_\Omega u \otimes \nu_\Omega \mathbb{1}_{\partial\Omega} \cdot \mathscr{H}^{n-1} \tag{2.11}$$

und die Glättungen $\tilde{u}_\varepsilon$ sind in $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^N)$. Für $0 < \varepsilon \ll 1$ hat außerdem der Träger von $\tilde{u}_\varepsilon$ Durchmesser $< 2R$ und wir erhalten

$$\int_\Omega |u|\,dx = \lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_\Omega |\tilde{u}_\varepsilon|\,dx \le R\limsup_{\varepsilon\searrow 0}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\tilde{u}_\varepsilon| \le R|D\tilde{u}|(\mathbb{R}^n).$$

Die Behauptung ergibt sich jetzt durch Verwendung von (2.11) auf der rechten Seite der vorausgehenden Ungleichung. ∎

Beweis von Satz 2.11. Wir beginnen mit dem Beweis von (I). Dazu setzen wir zunächst f unter Erhaltung aller Voraussetzungen auf ganz $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{Nn}$ fort; dazu kann man beispielsweise $f(x,z) := \Gamma(1+|z|)$ für $x \notin \overline{\Omega}$ setzen. Außerdem wählen wir ein $w_0 \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ mit $T_{\mathbb{R}^n\setminus\overline{\Omega}} w_0 = u_0$. Sei nun $u_k \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} u$ eine schwach-$*$-konvergente Folge in $BV(\Omega,\mathbb{R}^N)$. Dann folgt (mit dem Satz von Rellich) problemlos die starke Konvergenz $\tilde{u}_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \tilde{u}$ der Fortsetzungen durch w_0 in $L^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^N)$. Außerdem entnehmen wir aus (2.10) und der Beschränktheit des Spuroperators (Satz 1.77), dass $\sup_{k\in\mathbb{N}} |D\tilde{u}_k|(\mathbb{R}^n) < \infty$ ist und deshalb tatsächlich

$$\tilde{u}_k \overset{*}{\underset{k\to\infty}{\rightharpoonup}} \tilde{u} \qquad \text{schwach-}* \text{ in } BV(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^N)$$

konvergiert. Mit Satz 2.7 erhalten[9] wir für das in der Vorüberlegung definierte Funktional $\widetilde{F}_{w_0}$ aus (2.9)

$$\widetilde{F}_{w_0}[u] \le \liminf_{k\to\infty} \widetilde{F}_{w_0}[u_k].$$

Da sich $\widetilde{F}_{w_0}$ nur um die Konstante $\int_{\mathbb{R}^n\setminus\overline{\Omega}} f(\cdot,\nabla w_0)\,d\mathscr{L}^n$ von F_{u_0} unterscheidet, ist (I) gezeigt. Für (II) sei $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Minimalfolge für F_{u_0} in $BV(\Omega,\mathbb{R}^N)$, also

$$\lim_{k\to\infty} F_{u_0}[u_k] = \inf_{BV(\Omega,\mathbb{R}^N)} F_{u_0}.$$

Dann gilt wegen der unteren Abschätzung in der Wachstumsbedingung schon

$$\gamma \sup_{k\in\mathbb{N}} \left[|Du_k|(\Omega) + \int_{\partial\Omega} |u_0 - T_\Omega u_k|\, d\mathscr{H}^{n-1} \right] \le \sup_{k\in\mathbb{N}} F_{u_0}[u_k] < \infty.$$

Mit der Poincaré-Ungleichung des Lemmas 2.12 schließen wir, dass $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $BV(\Omega,\mathbb{R}^N)$ ist. Gemäß dem Auswahlsatz können wir eine schwach-$*$-konvergente Teilfolge $u_{k_l} \overset{*}{\underset{l\to\infty}{\rightharpoonup}} u$ in $BV(\Omega,\mathbb{R}^N)$ auswählen und Anwendung von (I) zeigt, dass u ein Minimierer von F_{u_0} ist. □

Natürlich interpretieren wir den Minimierer u von F_{u_0}, dessen Existenz wir gerade gezeigt haben, als verallgemeinerten Minimierer des ursprünglichen Variationsproblems. Der nächste Satz besagt, dass diese Interpretation sinnvoll ist in dem Sinne, dass der Minimalwert $F_{u_0}[u]$ mit dem Infimum des für Dirichlet-Klassen in $W^{1,1}$ formulierten Problems übereinstimmt.

Satz 2.13. *Ω sei C^2 und $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^{Nn} \to [0,\infty)$ sei konvex in z mit linearem Wachstum. Außerdem seien f und f^∞ stetig in (x,z). Dann gibt es zu jedem $u_0 \in \mathcal{T}$ ein $v_0 \in W^{1,1}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ mit $Tv_0 = u_0$ und für die Dirichlet-Klasse $\mathcal{D} := v_0 + W^{1,1}_0(\Omega,\mathbb{R}^N)$ gelten die folgenden beiden Aussagen:*

(I) Zu einem $u \in BV(\Omega,\mathbb{R}^N)$ gibt es stets eine schwach-$*$-konvergente Folge $\mathcal{D} \ni u_k \overset{*}{\underset{k\to\infty}{\rightharpoonup}} u$ in $BV(\Omega,\mathbb{R}^N)$ mit

$$F_{u_0}[u] = \lim_{k\to\infty} F[u_k];$$

[9] Man beachte, dass wir Satz 2.7 strenggenommen nur für die Integration über beschränkte Mengen formuliert haben. Da weit außen jedoch stets dieselbe Funktion w_0 integriert wird, lässt sich der vorliegende Fall darauf zurückführen.

(II) es gilt

$$\min_{BV(\Omega,\mathbb{R}^N)} F_{u_0} = \inf_{\mathcal{D}} F.$$

Dabei ist F auf $\mathcal{D}$ klassisch definiert ist.

Bemerkung 2.14. *Tatsächlich gilt der Satz allgemeiner für C^1-Gebiete; dies sieht man mit einem etwas anderen Beweis, der die von Gagliardo [30] konstruierte Rechtsinverse des Spuroperators benutzt. Man vergleiche mit Bemerkung 1.78 und [33, Kapitel 2 und 14]. Ob der Satz auch nur unter einer Lipschitz-Voraussetzung an Ω gilt, ist dem Vorlesenden nicht bekannt.*

Lemma 2.15. *Ω sei Lipschitz und die Lipschitz-Funktionen $\eta_l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ seien für $l \in \mathbb{N}$ definiert durch*

$$\eta_l(y) := f_l(\operatorname{dist}(y, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)),$$
$$f_l(s) := \begin{cases} 0 & \textit{für } s \leq \frac{1}{l} \\ ls - 1 & \textit{für } \frac{1}{l} \leq s \leq \frac{2}{l} \\ 1 & \textit{für } \frac{2}{l} \leq s \end{cases}.$$

Dann konvergiert

$$\eta_l \xrightarrow[l\to\infty]{*} \mathbb{1}_\Omega \qquad \textit{schwach-}*\textit{ in } BV(\mathbb{R}^n).$$

Ist Ω von der Klasse C^2, so liegt sogar strikte Konvergenz in $BV(\mathbb{R}^n)$ vor.

Beweis. Offensichtlich konvergiert $\eta_l \xrightarrow[l\to\infty]{} \mathbb{1}_\Omega$ punktweise und stark in $L^1(\mathbb{R}^n)$. Außerdem hat η_l kompakten Träger in $\mathbb{R}^n$ und genügt $\operatorname{Lip}(\eta_l) \leq l$, folglich $\eta_l \in BV(\mathbb{R}^n)$. Durch Überdeckung des Randes und lokale biLipschitz-Transformation sieht man außerdem, dass für $l \gg 1$ stets

$$\int_\Omega |\nabla \eta_l|\, dx \leq l \mathscr{L}^n\Big(\big\{y \in \Omega \,:\, \operatorname{dist}(y, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) \leq \tfrac{2}{l}\big\}\Big) \leq C \mathscr{H}^{n-1}(\partial\Omega)$$

gilt. Dabei hängt die Konstante C nur von der Überdeckung und den Lipschitz-Konstanten der (endlich vielen) Transformationen und ihrer Inversen ab. Es folgt die behauptete schwach-$*$-Konvergenz. Um die strikte Konvergenz einzusehen, müssen wir stärker

$$\limsup_{l\to\infty} \int_\Omega |\nabla \eta_l|\, dx \leq \mathscr{H}^{n-1}(\partial\Omega) \tag{2.12}$$

zeigen. Dazu schreiben wir mit der Koflächenformel

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla \eta_l|\, dx &= \int_0^1 \mathscr{H}^{n-1}(\{\eta_l = t\})\, dt \\ &= l \int_{\frac{1}{l}}^{\frac{2}{l}} \mathscr{H}^{n-1}(\{y \in \Omega \,:\, \operatorname{dist}(y, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) = t\})\, dt. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Wir betrachten nun die Abbildungen

$$F_t : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n, x \mapsto x - t\nu_\Omega(x),$$

wobei ν_Ω das äußere Einheitsnormalenvektorfeld an x bezeichnet. Weil nun Ω von der Klasse C^1 ist $\{y \in \Omega : \operatorname{dist}(y, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) = t\} \subset F_t(\partial\Omega)$ für $t > 0$, denn aus $\operatorname{dist}(y, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) = t$ folgt erst $\operatorname{dist}(x, y) = t$ für ein $x \in \partial\Omega$ und dann $x - y = t\nu_\Omega(x)$. Weil Ω aber sogar C^2 ist, ist ν_Ω tatsächlich eine Lipschitz-Funktion[10] (auf dem Kompaktum $\partial\Omega$ mit der Metrik von $\mathbb{R}^n$) und es folgt

$$\begin{aligned} \mathscr{H}^{n-1}(\{y \in \Omega : \operatorname{dist}(y, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) = t\}) &\le \mathscr{H}^{n-1}(F_t(\partial\Omega)) \\ &\le (\operatorname{Lip} F_t)^{n-1} \mathscr{H}^{n-1}(\partial\Omega) \\ &\le (1 + t \operatorname{Lip} \nu_\Omega)^{n-1} \mathscr{H}^{n-1}(\partial\Omega). \end{aligned}$$

Durch Zusammensetzen mit (2.13) erhalten wir (2.12) aus der letzten Ungleichung. □

Lemma 2.16. *Ω sei C^2 und η_l seien die Funktionen aus Lemma 2.15. Dann ist für $v \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$ und $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$ stets $v + \eta_l\psi \in W^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ und es konvergiert*

$$v + \eta_l\psi \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} v + \mathbb{1}_\Omega\psi \qquad \textit{strikt in } BV(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N).$$

Beweis. Nach dem Satz über dominierte Konvergenz gilt $v + \eta_l\psi \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} v + \mathbb{1}_\Omega\psi$ stark in $L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$. Außerdem ist nach der Kettenregel $v + \eta_l\psi \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$ mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(v + \eta_l\psi)|\, dx \le \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v + \eta_l \nabla\psi|\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} |\psi||\nabla\eta_l|\, dx.$$

Mit dem Satz über dominierte Konvergenz und der aus Lemma 2.15 folgenden schwach-$*$-Konvergenz $|\nabla\eta_l| \cdot \mathscr{L}^n \underset{l\to\infty}{\overset{*}{\longrightarrow}} \mathbb{1}_{\partial\Omega} \cdot \mathscr{H}^{n-1}$ in $RM(\mathbb{R}^n)$ erhalten wir

$$\limsup_{l\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(v + \eta_l\psi)|\, dx \le \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v + \mathbb{1}_\Omega \nabla\psi|\, dx + \int_{\partial\Omega} |\psi|\, d\mathscr{H}^{n-1} \tag{2.14}$$

und folglich $v + \mathbb{1}_\Omega\psi \in BV(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$. Wegen der Stetigkeit von ψ gilt $\mathscr{H}^{n-1}$-fast-überall $(\psi)^-_{\partial\Omega} = \psi$ auf $\partial\Omega$ (für die innere Spur im Sinne von Satz 1.68 bei Orientierung von $\partial\Omega$ durch ν_Ω) und Lemma 1.74 ergibt

$$D(\mathbb{1}_\Omega\psi) = \nabla\psi \mathbb{1}_\Omega \cdot \mathscr{L}^n - \psi \otimes \nu_\Omega \mathbb{1}_{\partial\Omega} \cdot \mathscr{H}^{n-1}.$$

Damit erkennen wir die rechte Seite von (2.14) als $|D(v + \mathbb{1}_\Omega\psi)|(\mathbb{R}^n)$. Somit haben wir

$$\limsup_{l\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(v + \eta_l\psi)|\, dx \le |D(v + \mathbb{1}_\Omega\psi)|(\mathbb{R}^n)$$

gezeigt und die Behauptung ist bewiesen. □

[10] Dazu bemerke man, dass der äußere Normalenvektor an den Subgraphen einer $\mathbb{R}$-wertigen C^1-Funktion f im Punkte $(s, f(s))$ gegeben ist durch $\frac{(-\nabla f(s),1)}{\sqrt{1+|\nabla f(s)|^2}}$, und lese ab, dass für eine C^2-Funktion f dieser Vektor lokal Lipschitz-stetig von $(s, f(s))$ abhängt.

Lemma 2.17. *Ω sei Lipschitz. Dann konvergiert für $v \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$ und $\zeta \in BV(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$ mit $|D\zeta|(\partial\Omega) = 0$ stets*

$$v + \mathbb{1}_\Omega \zeta_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\searrow 0]{} v + \mathbb{1}_\Omega \zeta \qquad \textit{strikt in } BV(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N).$$

Beweis. Nach Standard-Eigenschaften von Glättungen konvergieren $\zeta_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\searrow 0]{} \zeta$ und $v + \mathbb{1}_\Omega\zeta_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\searrow 0]{} v + \mathbb{1}_\Omega\zeta$ stark in $L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$. Nach Lemma 1.74 ist außerdem $v + \mathbb{1}_\Omega\zeta_\varepsilon \in BV(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$ mit

$$\begin{aligned}
&|D(v + \mathbb{1}_\Omega\zeta_\varepsilon)|(\mathbb{R}^n)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v + \mathbb{1}_\Omega \nabla\zeta_\varepsilon| \, dx + \int_{\partial\Omega} |\zeta_\varepsilon| \, d\mathscr{H}^{n-1}\\
&\le \int_\Omega |\nabla v - \nabla v_\varepsilon| \, dx + \int_\Omega |\nabla(v+\zeta)_\varepsilon| + \int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} |\nabla v| \, dx + \int_{\partial\Omega} |\zeta_\varepsilon| \, d\mathscr{H}^{n-1}.
\end{aligned}$$

Als nächstes benutzen wir die strikte Konvergenz der Glättungen $\zeta_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\searrow 0]{} \zeta$ in $BV(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$. Wegen $|D\zeta|(\partial\Omega) = 0$ gilt diese strikte Konvergenz auch in $BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$ (für die Einschränkungen auf Ω) und Satz 1.81 garantiert Konvergenz der Spuren $\zeta_\varepsilon|_{\partial\Omega} \xrightarrow[\varepsilon\searrow 0]{} T_\Omega\zeta$. Verwenden wir dies mit weiteren (einfachereren) Konvergenzeigenschaften der Glättungen, so erhalten wir

$$\limsup_{\varepsilon\searrow 0} |D(v + \mathbb{1}_\Omega\zeta_\varepsilon)|(\mathbb{R}^n) \le |D(v+\zeta)|(\overline{\Omega}) + \int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} |\nabla v| \, dx + \int_{\partial\Omega} |T_\Omega\zeta| \, d\mathscr{H}^{n-1}.$$

Nach Satz 1.77 ist

$$D(\mathbb{1}_\Omega\zeta) = 1_\Omega \cdot D\zeta - T_\Omega\zeta \otimes \nu_\Omega \mathbb{1}_{\partial\Omega} \cdot \mathscr{H}^{n-1}$$

und damit vereinfacht sich die rechte Seite der letzten Abschätzung (beachte auch $|D(v+\zeta)|(\partial\Omega) = 0$) zu $|D(v + 1_\Omega\zeta)|(\mathbb{R}^n)$. Also ist

$$\limsup_{\varepsilon\searrow 0} |D(v + \mathbb{1}_\Omega\zeta_\varepsilon)|(\mathbb{R}^n) \le |D(v + 1_\Omega\zeta)|(\mathbb{R}^n)$$

gezeigt und die Behauptung folgt. □

Proposition 2.18. *Ω sei C^2 und $u \in BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $w_0 \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ und $u_0 := T_{\mathbb{R}^n\setminus\overline{\Omega}} w_0 \in \mathcal{T}$ seien gegeben. Dann gibt es ein $v_0 \in W^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ mit $Tv_0 = u_0$ und eine Folge $u_k \in v_0 + W_0^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ mit*

$$\tilde{u}_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \tilde{u} \qquad \textit{strikt in } BV(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N),$$

wobei $\tilde{\ }$ wie oben in (2.8) *die Fortsetzung durch w_0 bezeichnet.*

Beweis. Mit dem Fortsetzungssatz 1.27 setzen wir w_0 zu einer Funktion $v \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$ fort und definieren $v_0 := v|_\Omega \in W^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Nach Korollar 1.79 ist

$$Dv = \widetilde{Dv_0} + (u_0 - T_\Omega v_0) \otimes \nu_\Omega \mathbb{1}_{\partial\Omega} \cdot \mathscr{H}^{n-1} + \widetilde{Dw_0}.$$

Wegen $v \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$ ist aber $|Dv|(\partial\Omega) = 0$ und folglich

$$T_\Omega v_0 = u_0.$$

Eine erneute Anwendung des Fortsetzungssatzes gibt uns eine Fortsetzung $\zeta \in BV(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$ mit beschränktem Träger von $u - v_0$. Sei nun d_{str} die Metrik der strikten Konvergenz in $BV(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$ aus Bemerkung 1.13. Wegen

$$v + \mathbb{1}_\Omega \zeta = \tilde{u}$$

liefert uns Lemma 2.17 zu vorgegebenem $k \in \mathbb{N}$ ein $\varepsilon > 0$ mit

$$d_{\mathrm{str}}(v + \mathbb{1}_\Omega \zeta_\varepsilon, \tilde{u}) < \frac{1}{k}.$$

Weiter gibt es nach Lemma 2.16 ein $l \in \mathbb{N}$ mit

$$d_{\mathrm{str}}(v + \eta_l \zeta_\varepsilon, v + \mathbb{1}_\Omega \zeta_\varepsilon) < \frac{1}{k},$$

wobei wir mit η_l weiterhin die Funktionen aus Lemma 2.15 bezeichnen. Wir definieren nun $u_k := (v + \eta_l \chi_\varepsilon)|_\Omega \in W^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^N)$; dann konvergiert $\tilde{u}_k = v + \eta_l \chi_\varepsilon$ bei $k \to \infty$ strikt in $BV(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$ gegen $\tilde{u}$. Außerdem hat $u_k - v_0 = (\eta_l \chi_\varepsilon)|_\Omega$ kompakten Träger in Ω und es folgt (zum Beispiel durch Glätten) $u_k - v_0 \in W_0^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^N)$. □

Beweis von Satz 2.13. Wir bemerken zunächst, dass für $v \in v_0 + W_0^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ stets $T_\Omega v = T_\Omega v_0 = u_0$ gilt; deshalb stimmt F_{u_0} auf $\mathcal{D}$ mit der klassischen Definition von F überein und es reicht beide Aussagen mit F_{u_0} anstelle von F zu zeigen. Wir setzen nun f unter Erhalt aller vorausgesetzten Eigenschaften fort; genauer finden wir zunächst durch lokale Lipschitz-Transformation des Randes, gerade Spiegelung und Zerlegung der 1 eine Fortsetzung auf $\widetilde{\Omega} \times \mathbb{R}^{Nn}$, mit einer Umgebung $\widetilde{\Omega}$ von $\overline{\Omega}$, und dann durch glattes Verbinden mit $\Gamma|z|$ eine Fortsetzung auf ganz $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{Nn}$. Außerdem wählen wir ein $w_0 \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega})$ mit $T_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}} w_0 = u_0$. Zu beliebigem $u \in BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$ seien nun v_0 und u_k die Funktionen aus Proposition 2.18. Dann folgt durch Anwendung[11] von Zusatz 2.8

$$\widetilde{F}_{w_0}[u] = \lim_{k \to \infty} \widetilde{F}_{w_0}[u_k].$$

Da sich F_{u_0} und $\widetilde{F}_{w_0}$ nur um eine Konstante unterscheiden, haben wir somit (I) gezeigt. Es folgt

$$\inf_{BV(\Omega, \mathbb{R}^N)} F_{u_0} = \inf_{\mathcal{D}} F_{u_0}$$

und nach Satz 2.11 ist das Infimum auf der linken Seite tatsächlich ein Minimum. □

[11] Auch hier trifft das in der Fußnote zum Beweis von Satz 2.11 Gesagte zu.

Falls der Integrand nicht von u abhängt, ergeben die Sätze 2.11 und 2.13 eine zufriedenstellende Existenztheorie. Wir beschäftigen uns nun mit dem allgemeineren Fall von Integralen

$$F[u] := \int_\Omega f(\cdot, u, \nabla u)\, dx \qquad \text{für } u : \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}^N$$

mit u-Abhängigkeit. Dazu nehmen wir zunächst einen etwas abstrakteren Standpunkt ein: Für eine fixierte Dirichlet-Klasse $\mathcal{D} = v_0 + W_0^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ definieren wir das **relaxierte Funktional**

$$\mathcal{F}_\mathcal{D}[u] := \inf \left\{ \liminf_{k\to\infty} F[u_k] \,:\, \mathcal{D} \ni u_k \xrightarrow[k\to\infty]{*} u \text{ schwach-}* \text{ in } BV(\Omega, \mathbb{R}^N) \right\}$$

auf Funktionen $u \in BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Wir folgen nun einer klassischen Idee der Variationsrechnung und versuchen, dieses Funktional als Fortsetzung von F zu interpretieren. Diese Vorgehensweise heißt **Lebesgue-Serrin-Erweiterung** oder Fortsetzung durch Unterhalbstetigkeit. Hat f lineares Wachstum, so ist es nicht schwierig zu zeigen, dass $\mathcal{F}_\mathcal{D}$ bezüglich der schwach-$*$-Konvergenz auf $BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$ unterhalbstetig ist und deshalb Minimierer besitzt; tatsächlich ist $\mathcal{F}_\mathcal{D}$ das größte bezüglich dieser Konvergenz unterhalbstetige Funktional auf $BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$, das auf $\mathcal{D}$ nicht größer als F ist. Die Herangehensweise über die Lebesgue-Serrin-Erweiterung hat einige technische Vorteile gegenüber dem früheren Ansatz mit einer expliziten Integralformel für die Fortsetzung. Beispielsweise haben wir bisher keinerlei Regularitätsvoraussetzung[12] an Ω stellen müssen. Im Wesentlichen sind beide Ansätze aber dennoch äquivalent: Während oben die wesentliche Schwierigkeit im Beweis der Unterhalbstetigkeit lag, liegt sie nun darin zu zeigen, dass $\mathcal{F}_\mathcal{D}$ wirklich eine Fortsetzung von F ist, also die Gleichheit von $\mathcal{F}_\mathcal{D}$ und F auf $\mathcal{D}$ nachzuweisen. Tatsächlich sieht man aus der Definition von $\mathcal{F}_\mathcal{D}$, dass sich dies folgendermaßen präzisieren lässt:

$$\mathcal{F}_\mathcal{D} = F \text{ auf } \mathcal{D} \iff \begin{array}{l} F \text{ ist auf } \mathcal{D} \text{ unterhalbstetig bezüglich} \\ \text{schwach-}*\text{-Konvergenz in } RM(\Omega, \mathbb{R}^N). \end{array}$$

Schließlich führen beide Ansätze nicht nur auf dieselben Schwierigkeiten, sondern ergeben im Falle ohne u-Abhängigkeit – zumindest wenn die Voraussetzungen von Satz 2.13 erfüllt sind – auch dieselbe Fortsetzung: Für $u_0 = T_\Omega v_0 \in \mathcal{T}$ erhalten wir dann nämlich als einfache Folgerung aus den Sätzen 2.11 und 2.13 die Gleichheit $\mathcal{F}_\mathcal{D} = F_{u_0}$ auf $BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Es gibt nun auch im Falle mit u-Abhängigkeit Formeln, die $\mathcal{F}_\mathcal{D}$ durch Integrale ausdrücken. Wir geben hier nur im **skalaren**[13] **Fall $N = 1$** eine solche Formel an. Der Einfachheit halber beschränken wir uns dabei auf die Analyse der inneren Situation und ignorieren

[12] Allerdings kann es bei irregulärem Ω – für $u \notin \mathcal{D}$ – vorkommen, dass die Menge in der Definition von $\mathcal{F}_\mathcal{D}[u]$ leer ist; dann ist das Infimum als ∞ zu interpretieren. Ist Ω dagegen Lipschitz, so kann dies nach Übungsaufgabe 6 nicht passieren; man vergleiche auch mit Proposition 2.18.

[13] Der vektorwertige Fall mit $\boldsymbol{u}$-Abhängigkeit ist wesentlich schwieriger; siehe [13, 12] und die dort angegebenen Referenzen.

die Modellierung der Randwerte, die keine wesentlichen Neuigkeiten birgt; wir untersuchen also statt $\mathcal{F}_{\mathcal{D}}$ das global relaxierte Funktional

$$\mathcal{F}[u] := \inf\left\{\liminf_{k\to\infty} F[u_k] \,:\, u_k \xrightarrow[k\to\infty]{*} u \text{ schwach-}* \text{ in } BV(\Omega,\mathbb{R}^N)\right\}.$$

Dafür gilt:

Satz 2.19 (**von (Buttazzo-)Dal Maso [22]**). *Es sei $N=1$. $f(x,y,z)$ sei konvex in z mit linearem Wachstum. Außerdem seien f und f^∞ stetig in (x,y,z). Dann gilt*

$$\mathcal{F}[u] = \int_\Omega \tilde{f}\left(\cdot,\bar{u},\frac{d\mathscr{L}^n}{d\nu},\frac{d\tilde{D}u}{d\nu}\right)d\nu + \int_{J_u}\int_{u^-(x)}^{u^+(x)} f^\infty(x,t,\nu_u(x))\,dt\,d\mathscr{H}^{n-1}(x)$$

für alle $u\in BV(\Omega)$. Dabei ist ν ein beliebiges nichtnegatives Radon-Maß auf Ω mit $(\mathscr{L}^n,\tilde{D}u) \ll \nu$ und $\nu(S_u)=0$ und die Sprungwerte seien so gewählt, dass $u^+>u^-$ auf J_u gilt.

Auf einen formalen Beweis von Satz 2.19 verzichten wir aus Zeitgründen, es folgen jedoch einige Bemerkungen zum besseren Verständnis der Formel: Durch Wahl $\nu = \mathscr{L}^n + |D^c u|$ lässt sich das erste Integral auf der rechten Seite umschreiben in

$$\int_\Omega f(\cdot,u,\nabla u)\,dx + \int_\Omega f^\infty\left(\cdot,\bar{u},\frac{dD^c u}{d|D^c u|}\right)d|D^c u|.$$

In diesem Sinne gehen der absolutstetige Anteil $D^a u$ und der Cantoranteil $D^c u$ also in derselben Weise wie in unseren früheren Formeln ein. Das zweite Integral auf der rechten Seite lässt sich alternativ schreiben als

$$\int_\Omega \fint_{u^-(x)}^{u^+(x)} f^\infty\left(x,t,\frac{dD^j u}{d|D^j u|}(x)\right)dt\,d|D^j u|(x).$$

Im Wesentlichen verhält sich somit auch der Sprunganteil $D^j u$ wie wir es von oben für singuläre Anteile kennen. Allerdings wird für die y-Variable kein fixierter Wert eingesetzt – der auf J_u ja nicht wohldefiniert wäre –, sondern es wird über alle Werte zwischen u^- und u^+ gemittelt. Anschaulich bedeutet dies, dass die Relaxierung die **Lücken im Graph von u durch Einfügen vertikaler Stücke schließt**. Im Vektorfall $N>1$ gibt es übrigens viele Möglichkeiten, Lücken zu schließen, und dies ist – grob gesprochen – der Grund, warum die Verallgemeinerung auf diesen Fall schwierig ist.

Abschließend sei noch erwähnt, dass die Existenztheorie dieses Abschnitts sich auch auf quasikonvexe Integranden – im Sinne von Morrey – verallgemeinern lässt. Bei linearem Wachstum gibt es jedoch nur wenige Beispiele solcher Integranden; daher ist diese Verallgemeinerung von eher technischem Interesse, motiviert durch die Tatsache, dass Quasikonvexität ein im Wesentlichen notwendiges und hinreichendes Kriterium für schwach-$*$-Unterhalbstetigkeit ist.

2.2.2 Zu Euler-Gleichung und Regularitätstheorie

Zum Abschluss dieses Abschnitts erwähnen wir ohne Beweise einige weitergehende Resultate über Funktionale mit linearem Wachstum, die auf dem vorausgehenden Existenzsatz und den Darstellungsformeln fußen. Wir beginnen mit der Frage nach einer Euler-Gleichung für Minimierer. Dazu nehmen wir an, dass $f(x,z)$ konvex und C^1 in z ist mit linearem Wachstum und bemerken zunächst, dass dann schon Beschränktheit der Ableitung $\nabla_z f$ folgt. Für $W^{1,1}(\Omega,\mathbb{R}^N)$-Minimierer u des Funktionals

$$F[u] = \int_\Omega f(\cdot,\nabla u)\,dx$$

in einer Dirichlet-Klasse sieht man dann durch Ausführung der Differentiation $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} F[u+t\varphi]$ unter dem Integral

$$\int_\Omega \nabla_z f(\cdot,\nabla u)\nabla\varphi\,dx = 0 \qquad \text{für alle } \varphi\in W_0^{1,1}(\Omega,\mathbb{R}^N).$$

Dies ist eine schwache Formulierung des nichtlinearen partiellen Differentialgleichungssytems[14]

$$\operatorname{div}\Big[\nabla_z f(\cdot,Du)\Big] = 0 \qquad \text{auf } \Omega,$$

des sogenannten **Euler-(Lagrange-)Systems** von F, und das wichtigste (notwendige) Kriterium für Minimierer. Wir werden im nächsten Satz ein ähnliches Kriterium (aus [15]) für $BV(\Omega,\mathbb{R}^N)$-Minimierer des Funktionals

$$F_{u_0}[u] := \int_\Omega f(\cdot,\nabla u)\,d\mathscr{L}^n + \int_\Omega f^\infty\Big(\cdot,\frac{dD^s u}{d|D^s u|}\Big)\,d|D^s u| \\ + \int_{\partial\Omega} f^\infty(\cdot,(u_0-T_\Omega u)\otimes\nu_\Omega)\,d\mathscr{H}^{n-1}$$

aus Definition 2.10 angeben. Natürlich wird dafür auch Differenzierbarkeit von f^∞ eine Rolle spielen. Man beachte jedoch, dass wir wegen der 1-Homogenität von f^∞ in z nicht erwarten können, dass $\nabla_z f^\infty(x,0)$ existiert.

Satz 2.20. *$f(x,z)$ sei konvex und C^1 in z mit linearem Wachstum und f^∞ sei stetig differenzierbar in $z\neq 0$. Weiter seien $u_0\in L^1(\partial\Omega,\mathbb{R}^N;\mathscr{H}^{n-1})$ und $u,\varphi\in BV(\Omega,\mathbb{R}^N)$ gegeben. Dann existiert die Richtungsableitung $\frac{d}{dt}\big|_{t=0}F_{u_0}[u+t\varphi]$ genau dann, wenn*

$$|D^s\varphi| \ll |D^s u| \quad \text{und} \quad T_\Omega\varphi = 0 \ \mathscr{H}^{n-1}\text{-fast-überall auf } \{T_\Omega u = u_0\} \tag{2.15}$$

gelten; und in diesem Fall ist sie gegeben durch

$$\int_\Omega \nabla_z f(\cdot,\nabla u)\nabla\varphi\,d\mathscr{L}^n + \int_\Omega \nabla_z f^\infty\Big(\cdot,\frac{dD^s u}{d|D^s u|}\Big)\,dD^s\varphi \\ - \int_{\partial\Omega} \nabla_z f^\infty(\cdot,(u_0-T_\Omega u)\otimes\nu_\Omega)\cdot(T_\Omega\varphi\otimes\nu_\Omega)\,d\mathscr{H}^{n-1}. \tag{2.16}$$

[14] Die Divergenz ist zeilenweise auf die matrixwertige Funktion anzuwenden.

Korollar 2.21 (**Euler-Gleichung**). *Ist unter den Voraussetzungen des vorigen Satzes $u \in BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$ ein Minimierer von F_{u_0}, so verschwindet* (2.16) *für alle $\varphi \in BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$, die* (2.15) *genügen.*

Bemerkung 2.22. *Man beachte, dass die beiden Bedingungen in* (2.15) *gerade verhindern, dass $D_z f^\infty(x, z)$ für $z = 0$ ausgewertet wird, was nicht definiert wäre. Eine Analogie der beiden Bedingungen in* (2.15) *erkennt man, wenn man die zweite schreibt als*

$$|T_\Omega \varphi| \mathbb{1}_{\partial\Omega} \cdot \mathscr{H}^{n-1} \ll |u_0 - T_\Omega u| \mathbb{1}_{\partial\Omega} \cdot \mathscr{H}^{n-1}.$$

Beispiel. *Speziell für $f(x, z) = \sqrt{1 + |z|^2}$ besagt die Euler-Gleichung*

$$\int_\Omega \frac{\nabla u \cdot \nabla \varphi}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \, dx + \int_\Omega \frac{dD^s u}{d|D^s u|} \cdot dD^s \varphi = \int_{\partial\Omega} \frac{u_0 - T_\Omega u}{|u_0 - T_\Omega u|} \cdot T_\Omega \varphi \, d\mathscr{H}^{n-1}$$

für alle $\varphi \in BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$, die (2.15) *erfüllen.*

Auch in der Situation von Satz 2.19 lässt sich in ähnlicher Weise eine Euler-Gleichung formulieren. Wir verzichten darauf, dies im Detail darzustellen.

Schließlich kommen wir zu qualitativen Eigenschaften von Minimierern von Variationsintegralen mit linearem Wachstum. Genauer geht es um Glattheitseigenschaften wie Stetigkeit und Differenzierbarkeit, die im Rahmen der Regularitätstheorie untersucht werden. Obwohl es hierzu eine Reihe von Resultaten gibt, erfassen nur wenige den Modellfall $f(x, z) = \sqrt{1 + |z|^2}$ in beliebiger Kodimension $N \in \mathbb{N}$ (für den viel studierten Fall $N = 1$ verweisen wir auf das folgende Kapitel); tatsächlich sind dem Vorlesenden nur die folgenden Resultate hierzu bekannt.

Satz 2.23 (**von Anzellotti-Giaquinta [16]**). *$f(z)$ sei konvex in z mit linearem Wachstum und zu $u_0 \in L^1(\partial\Omega, \mathbb{R}^N; \mathscr{H}^{n-1})$ sei $u \in BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$ ein Minimierer von F_{u_0}. Für $(x, z) \in \Omega \times \mathbb{R}^{Nn}$ gelte*

$$\frac{d|Du - z\mathscr{L}^n|}{d\mathscr{L}^n}(x) = 0, \tag{2.17}$$

f sei C^∞ in einer Umgebung von z und $\nabla^2 f(z)$ sei positiv definit. Dann ist (ein Repräsentant von) u schon C^∞ in einer Umgebung von x.

Ein Umformulierung von (2.17) lautet

$$\lim_{r \searrow 0} \left[\fint_{B_r(x)} |\nabla u - z| \, d\mathscr{L}^n + \frac{|D^s u|(B_r(x))}{\mathscr{L}^n(B_r)} \right] = 0.$$

Da $\mathscr{L}^n$-fast-alle $x \in \Omega$ dies (mit $z = \overline{\nabla u}(x)$) erfüllen, erhalten wir:

Korollar 2.24 (**Partielle Regularität**). *Zusätzlich zu den Voraussetzungen des Satzes sei f von der Klasse C^∞ auf $\mathbb{R}^{Nn}$ und $\nabla^2 f(z)$ sei positiv definit für alle $z \in \mathbb{R}^{Nn}$. Dann gibt es eine offene Teilmenge Ω_0 von Ω mit $\mathscr{L}^n(\Omega \setminus \Omega_0) = 0$, so dass (ein Repräsentant von) u schon C^∞ ist auf Ω_0.*

Eine Variante dieses Resultats gilt für $f(x,z)$, der allgemeine Fall $f(x,y,z)$ dagegen ist offen. Ebenfalls ungelöst sind, selbst im Modellfall, die Fragen nach Randregularität, Annahme von Randwerten und Dimensionsreduktion für die singuläre Menge $\Omega \setminus \Omega_0$. Schließlich stellt sich die Frage, ob sich schwächere Regularitätsaussagen vielleicht überall (und nicht nur fast-überall) auf Ω beweisen lassen. Auch diese letzte Frage ist weitgehend offen, einen Beitrag leistet jedoch folgendes Resultat:

Satz 2.25 (von Bildhauer [17, 18]). *$f(z)$ sei C^2 in z mit linearem Wachstum. Außerdem gelte*

$$\lambda(1+|z|)^{-3}|\xi|^2 \le \nabla^2 f(z)(\xi,\xi) \le \Lambda(1+|z|)^{-1}|\xi|^2 \quad \textit{für alle } z,\xi \in \mathbb{R}^{Nn}. \tag{2.18}$$

Ist nun

$$n = 2 \qquad \textit{oder} \qquad u \in L^\infty_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N), \tag{2.19}$$

so gibt es zu $u_0 \in L^1(\partial\Omega, \mathbb{R}^N; \mathscr{H}^{n-1})$ einen Minimierer $u \in BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$ von F_{u_0} mit

$$u \in W^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^N) \qquad \textit{und} \qquad |\nabla u| \log(1+|\nabla u|) \in L^1_{\mathrm{lok}}(\Omega).$$

Bemerkung 2.26. *Für $f(z) = \sqrt{1+|z|^2}$ gilt*

$$\nabla^2 f(z)(\xi,\xi) = \frac{(1+|z|^2)|\xi|^2 - (z\cdot\xi)^2}{(1+|z|^2)^{\frac{3}{2}}}$$

und deshalb ist (2.18) *in diesem Fall (gerade noch) erfüllt.*

Bemerkung 2.27. *Die gerade angegebene Version von Satz 2.25 ist nicht ganz korrekt. Statt $u \in L^\infty_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ muss man in* (2.19) *nämlich tatsächlich eine geringfügig stärkere technische Annahme machen. Es sei jedoch bemerkt, dass sich diese Annahme im Modellfall $f(z) = \sqrt{1+|z|^2}$ mit einem einfachen Maximumprinzip aus Beschränktheit der Randwerte u_0 folgern lässt.*

Kapitel 3

Zum Flächenintegral

Dieses Kapitel hat nur berichtenden Charakter

Das **klassische Plateau-Problem** besteht darin, zu einer gegebenen Kurve Γ in $\mathbb{R}^3$ die (2-dimensionale) Fläche mit Randkurve Γ und kleinstmöglichem Flächeninhalt zu finden. Genauer besteht das mathematische Problem hier darin, das Problem zu präzisieren und die Existenz eines Minimums, einer sogenannten **Minimalfäche**, zu zeigen. Die ersten Lösungen des Problems gehen auf Arbeiten von Douglas [25] und Rado [42, 43] aus den 30er Jahren zurück. Natürlich gibt es verschiedene Herangehensweisen an das Problem und mit diesen ersten Arbeiten wurden bei weitem nicht alle Fragen beantwortet; tatsächlich gehören heutzutage sowohl die Existenz als auch die Regularität dieser (klassischen) Minimalflächen zu den am meisten studierten Problemen in der Analysis des 20ten Jahrhunderts (siehe beispielsweise [24])... und dennoch verbleiben noch offene Fragen.

Natürlich ist die folgende Verallgemeinerung, die auch als Plateau-Problem oder Problem des kleinsten Flächeninhalts bezeichnet wird, naheliegend: Für zwei beliebige Dimensionen $n, N \in \mathbb{N}$ finde man zu einer gegebenen $(n-1)$-dimensionalen Fläche Γ in $\mathbb{R}^{n+N}$ eine n-dimensionale Fläche mit (geometrischem) Rand Γ. In dieser Situation bezeichnet man n als die Dimension und N als die Kodimension des Problems. Tatsächlich wurden Lösungsansätze für diese Problem in beliebiger Dimension erst in den 60er und 70er Jahren gefunden. Wir werden nun – in groben[1] Zügen – zwei Zugänge zu dieser Theorie beschreiben, die in beliebiger Dimension anwendbar sind und BV-Funktionen verwenden; sie sind allerdings auf den Fall $N = 1$ von Hyperflächen beschränkt. Einige Kommentare zum allgemeineren Zugang der geometrischen Maßtheorie, der beliebige Kodimensionen $N \in \mathbb{N}$ erfasst, folgen später.

[1] Wir werden in diesem Kapitel nur wenig über Beweise sagen. Außerdem verzichten wir aus Zeitgründen vollständig auf die Diskussion mancher Aspekte wie beispielsweise Maximumsprinzipien, Randregularität.

3.1 Minimale Hyperflächen

3.1.1 Parametrische Theorie

Wir folgen dem Ansatz von De Giorgi [23] und betrachten n-dimensionale Hyperflächen H in $\mathbb{R}^{n+1}$, die wir als reduzierte Ränder von Caccioppoli-Mengen A in $\mathbb{R}^{n+1}$ verstehen. Nach dem Struktursatz von DeGiorgi stimmt dabei der zu minimierende Flächeninhalt $\mathscr{H}^n(H)$ mit dem Perimeter von A überein.

Wir identifizieren von nun an alle $\mathscr{L}^{n+1}$-messbaren Teilmengen A von $\mathbb{R}^{n+1}$, die sich nur um eine Nullmenge unterscheiden[2]. Unter dem topologischen Rand ∂A einer solchen Äquivalenzklasse A von Mengen verstehen wir dabei den Durchschnitt der topologischen Ränder aller Repräsentanten von A. Man beachte, dass ∂A somit eine (punktweise wohldefinierte) abgeschlossene Menge ist.

Um das Problem zu präzisieren, fixieren wir eine offene Menge Ω in $\mathbb{R}^{n+1}$. Dann interessieren wir uns für Caccioppoli-Mengen A in $\mathbb{R}^{n+1}$, die

$$P_\Omega(V) = |D\mathbb{1}_V|(\Omega) = \mathscr{H}^n(\mathscr{F}V \cap \Omega)$$

minimieren unter allen Vegleichsmengen V, die mit A am Rand von Ω übereinstimmen. Tatsächlich ist dabei der Ausdruck "am Rand übereinstimmen" noch nicht präzise definiert und es stellt sich als sinnvoll heraus, ähnlich wie im vorigen Kapitel vorzugehen und zunächst folgende Definition auf offenen Obermengen von $\overline{\Omega}$ zu betrachten:

Definition 3.1 (Minimale Menge). *Sei Ω offen und beschränkt in $\mathbb{R}^{n+1}$. Eine $\mathscr{L}^{n+1}$-messbare Menge A in $\mathbb{R}^{n+1}$ heisst* **Menge von minimalem Perimeter** *in Ω oder kurz* **minimale Menge** *in Ω, wenn es eine offene Obermenge O von $\overline{\Omega}$ gibt mit $P_O(A) < \infty$ und*

$$P_O(A) \leq P_O(V) \tag{3.1}$$

für jede $\mathscr{L}^{n+1}$-messbare Menge V in $\mathbb{R}^{n+1}$ mit $A \setminus \Omega = V \setminus \Omega$.

Nach dieser Präzisierung des Problems lässt sich nun mit der direkten Methode ein Existenzsatz beweisen.

Satz 3.2 (Existenz parametrischer Minimalflächen, [23]). *Sei Ω offen und beschränkt in $\mathbb{R}^{n+1}$. Zu einer $\mathscr{L}^{n+1}$-messbaren Menge B mit $P_O(B) < \infty$ für eine offene Obermenge O von Ω gibt es dann stets eine minimale Menge A in Ω mit $A \setminus \Omega = B \setminus \Omega$.*

Beweis. Wir nehmen o. E. an, dass O beschränkt ist und betrachten die Klasse

$$\mathcal{V} := \{V \subset \mathbb{R}^n \,:\, V \text{ ist } \mathscr{L}^{n+1}\text{-messbar mit } V \setminus \Omega = B \setminus \Omega\}$$

Da $B \in \mathcal{V}$ ist, ist nach Voraussetzung $\inf_{\mathcal{V}} P_O < \infty$. Sei nun $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Minimalfolge für P_O in $\mathcal{V}$. Dann ist $\mathbb{1}_{A_k}|_O$ beschränkt in $BV(O)$ und mit dem Satz von Rellich können wir eine stark in $L^1_{\text{lok}}(O)$ konvergente Teilfolge auswählen. Der Grenzwert ist von der Form $\mathbb{1}_A|_O$ mit einem $A \in \mathcal{V}$ und aus der Unterhalbstetigkeit der Variation erhalten wir $P_O(A) \leq P_O(V)$ für alle $V \in \mathcal{V}$. □

[2]Präziser gesprochen identifizieren wir $\mathscr{L}^{n+1}$-messbare Teilmengen A_1 und A_2 von $\mathbb{R}^{n+1}$ genau dann, wenn $\mathscr{L}^{n+1}$-fast-überall $\mathbb{1}_{A_1} = \mathbb{1}_{A_2}$ auf $\mathbb{R}^{n+1}$ gilt.

Bemerkung 3.3 (**Umformulierung der Minimierungseigenschaft**). *Die Bedingung $P_O(A) < \infty$ für eine offene Obermenge O von $\overline{\Omega}$ lässt sich auch durch $\overline{\Omega} \subset A_*$ ausdrücken und die Minimierungseigenschaft in* (3.1) *lässt sich äquivalent umschreiben in*

$$|D\mathbb{1}_A|(\overline{\Omega}) \leq |D\mathbb{1}_V|(\overline{\Omega})$$

für solche V mit $\overline{\Omega} \subset V_*$. Ist Ω Lipschitz, so können wir das Minimierungsproblem weiter umformulieren: Wir bemerken zunächst, dass die äußere Spur $(\mathbb{1}_A)^+_{\partial\Omega}$ (bei Orientierung von $\partial\Omega$ durch ν_A) durch $\mathbb{1}_{A_0}$ mit einer $\mathscr{H}^n$-messbaren Teilmenge A_0 von $\partial\Omega$ gegeben ist und schreiben dann (3.1) *als*

$$\mathcal{P}_{A_0}[A] \leq \mathcal{P}_{A_0}[V]$$

mit dem modifizierten[3] *Perimeter*

$$\mathcal{P}_{A_0}[V] := |D\mathbb{1}_V|(\Omega) + \int_{\partial\Omega} |\mathbb{1}_{A_0} - (\mathbb{1}_V)^-_{\partial\Omega}|\, d\mathscr{H}^n.$$

Dabei hängt $\mathcal{P}_{A_0}[V]$ nur von $V \cap \Omega$ und nicht mehr von $V \setminus \Omega$ ab; ist also eine $\mathscr{H}^n$-messbare Teilmenge A_0 von $\partial\Omega$ gegeben, so sind die minimalen Mengen A mit Spur[4] *$(\mathbb{1}_A)^+_{\partial\Omega} = \mathbb{1}_{A_0}$ also gerade die Minimierer von $\mathcal{P}_{A_0}$ unter allen $\mathscr{L}^{n+1}$-messbaren Mengen V mit $\overline{\Omega} \subset V_*$.*

In Anbetracht des in Bemerkung 3.3 Gesagten lässt sich der Existenzsatz umformulieren. Der Vorteil dieser Umformulierung ist, dass sie erlaubt, einen sinnvollen Minimalwert, nämlich das Minimum von $\mathcal{P}_{A_0}$, anzugeben.

Korollar 3.4. *Sei Ω beschränkter, offener Lipschitz-Bereich in $\mathbb{R}^{n+1}$. Zu einer $\mathscr{H}^n$-messbaren Teilmenge A_0 von $\partial\Omega$ gibt es dann stets einen Minimierer von $\mathcal{P}_{A_0}$ in der Klasse $\{V \subset \mathbb{R}^{n+1} : V \text{ ist } \mathscr{L}^{n+1}\text{-messbar mit } \overline{\Omega} \subset V_*\}$.*

Bemerkung 3.5 (**Geometrische Interpretation**). *Haben wir das Problem wie in Bemerkung 3.3 umformuliert und sind $\partial\Omega$ und A_0 ausreichend glatt, so lässt sich der Rand $H := \partial A \cap \Omega$ einer glatten minimalen Menge A in Ω als Minimalfläche auffassen. Dabei stimmt – in gutartigen Fällen – der Rand von H in ∂A mit $\partial A \cap \partial\Omega$ und dem Rand von A_0 in $\partial\Omega$ überein. Folglich können wir durch A_0 in einem gewissen Sinne Randwerte vorgeben. Tatsächlich ist die Situation im Allgemeinen komplizierter als gerade beschrieben: Zusätzlich kann sich nämlich – wenn Ω nicht konvex ist – der Rand von Ω als Hindernis auswirken, in dem Sinne, dass sich für eine minimale Menge A in Ω ein Teil der Fläche $\partial A \cap \overline{\Omega}$ an einen Teil von $\partial\Omega$ anschmiegt; dann sind die obigen Ränder i. A. verschieden und H ist nicht mehr bis zum Rande glatt (mehr dazu später).*

---

[3] Der erste Term in der Definition von $\mathcal{P}_{A_0}$ lässt sich auch als $P_\Omega(V)$ schreiben und ist $(\mathbb{1}_V)^-_{\partial\Omega} = \mathbb{1}_{V_0}$, so erkennen wir den zweiten Term als $\mathscr{H}^n(A_0 \Delta V_0)$ mit der symmetrischen Mengendifferenz Δ.

[4] Man sollte sich an dieser Stelle bewußt machen, dass es zu A_0 stets eine Caccioppoli-Menge A mit $(\mathbb{1}_A)^+_{\partial\Omega} = \mathbb{1}_{A_0}$ gibt; dazu findet man zunächst mit dem Satz von Gagliardo und dem Fortsetungssatz eine $BV(\mathbb{R}^n)$-Funktion u mit $\bar{u} = \mathbb{1}_{A_0}$ auf $\partial\Omega$ und dann mit der Koflächenformel einen Parameter $t \in (0,1)$, für den $A = \{u > t\}$ eine Caccioppoli-Menge ist.

Als interessante Nebenbemerkung halten wir fest, dass (3.1) tatsächlich eine auf den ersten Blick stärker erscheinende Minimierungseigenschaft impliziert:

Bemerkung 3.6 (Verbesserte Minimierungseigenschaft). *Sei A eine minimale Menge in Ω. Gilt dann $\mathscr{L}^{n+1}$-fast-überall $u = \mathbb{1}_A$ auf $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Omega$ für ein $u \in L^1_{\text{lok}}(\mathbb{R}^{n+1})$, so ist stets*

$$P_O(A) \leq V_O(u). \tag{3.2}$$

Auch diese Minimierungseigenschaft lässt sich wie in Bemerkung 3.3 umformulieren.

Beweis. Es gilt $\{u > t\} \setminus \Omega = A \setminus \Omega$ für jedes $t \in (0,1)$. Deshalb folgt mit der Minimierungseigenschaft (3.1) und der Koflächenformel

$$P_O(A) \leq \int_0^1 P_O(\{u > t\})\, dt \leq V_O(u) \qquad \square$$

Somit ist das Existenzproblem behandelt. Wir übergehen die Fragen[5] nach Eindeutigkeit von Minimierern oder Annahme der Randwerte und kommen direkt zum Regularitätsproblem, das in der Literatur ausführlich studiert worden ist.

Satz 3.7 (Partielle Regularität parametrischer Minimalflächen, [23, 39]). *Sei Ω offen und beschränkt in $\mathbb{R}^{n+1}$ und A eine minimale Menge in Ω. Dann gibt es zu jedem $x \in \mathscr{F}A \cap \Omega$ eine Umgebung U von x in Ω, so dass $\partial A \cap U$ eine glatte Hyperfläche ist und für die singuläre Menge*

$$S_\Omega(A) := (\partial A \setminus \mathscr{F}A) \cap \Omega$$

gilt

$$\mathscr{H}^n(S_\Omega(A)) = 0.$$

Der Beweis der Regularität von ∂A nahe den Punkten aus $\mathscr{F}A$ ist mit dem Beweis von Satz 2.23 verwandt und ist zu aufwendig, um ihn hier zu behandeln. Stattdessen skizzieren wie man den leichteren Teil $\mathscr{H}^n((\partial A \setminus \mathscr{F}A) \cap \Omega) = 0$ der Aussage beweist:

Lemma 3.8. *Sei A eine Menge von lokal endlichem Perimeter in O. Dann stimmt $\partial A \cap O$ mit dem Abschluss von $\mathscr{F}A \cap O$ in O überein.*

Beweis. Ist $x \notin \partial A$, so gibt es ein $r > 0$, so dass 1_A konstant ist auf $B_r(x)$. Daher ist $|D\mathbb{1}_A|(B_r(x)) = 0$ und $x \notin \mathscr{F}A$. Also ist $\mathscr{F}A \subset \partial A$ und – da ∂A abgeschlossen ist – auch $\overline{\mathscr{F}A \cap O} \subset \partial A \cap O$.

Ist dagegen $x \in O \setminus \overline{\mathscr{F}A}$, so gibt ein $r > 0$ mit $B_r(x) \subset A_*$ und $B_r(x) \cap \mathscr{F}A = \emptyset$. Mit dem Struktursatz von De Giorgi folgt

$$|D\mathbb{1}_A|(B_r(x)) = 0$$

und nach dem Konstanzsatz ist $x \notin \partial A$. Dies zeigt $\partial A \cap O \subset \overline{\mathscr{F}A \cap O}$. $\square$

[5] Auf beides kann man nur in speziellen Fällen hoffen.

Proposition 3.9. *Unter den Voraussetzungen von Satz 3.7 gilt*

$$\mathscr{H}^n((\partial A \setminus \mathscr{F}A) \cap \Omega) = 0.$$

Beweisidee. Man überlegt sich zunächst die **Monotonieformel**

$$r^{-n}|D\mathbb{1}_A|(B_r(x)) \leq R^{-n}|D\mathbb{1}_A|(B_R(x)) \qquad \text{für } 0 < r < R \leq \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^{n+1} \setminus \Omega).$$

Dazu testet man nach einem Approximationsargument die verbesserte Minimierungseigenschaft mit recht expliziten Testfunktionen; siehe [33, Chapter 5]. Nun verwendet man den Struktursatz von De Giorgi und Lemma 0.77 und schliesst durch Grenzübegang $r \searrow 0$ auf

$$\omega_n R^n \leq |D\mathbb{1}_A|(B_R(x)) \qquad \text{für } x \in \mathscr{F}A \text{ mit } R \leq \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^{n+1} \setminus \Omega).$$

Mit dem vorigen Lemma sehen wir, dass die letzte Ungleichung allgemeiner für $x \in \partial A$ statt $x \in \mathscr{F}A$ gilt. Daraus folgt nun

$$\mathscr{H}^n((\partial A \setminus \mathscr{F}A) \cap \Omega) \leq |D\mathbb{1}_A|((\partial A \setminus \mathscr{F}A) \cap \Omega)$$

und durch eine erneute Anwendung des Struktursatzes sehen wir, dass die rechte Seite dieser Ungleichung verschwindet. □

Satz 3.7 lässt die Möglichkeit offen, dass ∂A im Innern von Ω Singularitäten aufweist. Es sind jedoch feinere Aussagen über die Struktur dieser Singularitäten bekannt, aus denen man ableiten kann, dass tatsächlich für $n \leq 6$ stets $S_\Omega(A) = \emptyset$ gilt und somit in diesen Dimensionen doch keine Singularitäten auftreten (siehe [48]). Allgemeiner gilt für jede Dimension $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$\dim_{\mathcal{H}}(S_\Omega(\mathbb{1}_A)) \leq n - 7$$

aus [29] für die Hausdorff-Dimension der singulären Menge und diese Aussagen sind scharf, denn der Simons-Kegel

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \,:\, |x|^2 > |y|^2\}$$

ist gemäß [19] eine 7-dimensionale minimale Menge (in jeder beschränkten offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^8$) mit einer Punktsingularität.

3.1.2 Nichtparametrische Theorie

In der nichtparametrischen[6] Theorie modelliert man n-dimensionale Hyperflächen als Graphen skalarer Funktionen $u : \mathbb{R}^n \supset\!\!\!\rightarrow \mathbb{R}$. Genauer fixiert man eine offene Teilmenge Ω von $\mathbb{R}^n$. Dann erhält man für den Flächeninhalt des Graphen

$$G_u := \{(x, u(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} \,:\, x \in \Omega\}$$

[6]Das Wort “nichtparamterisch” bedeutet dabei nicht, dass keine Parametrisierung vorkommt, sondern, dass sie nicht frei gewählt werden kann und bereits durch die Formulierung des Problems fixiert wird.

mit der Flächenformel

$$A[u] := \mathscr{H}^n(G_u) = \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla u|^2}\, d\mathscr{L}^n. \tag{3.3}$$

A heisst das Flächenfunktional, die Minimierer von A bezeichnet man als **minimale Graphen** und die zugehörige Euler-Gleichung, die im glatten Fall

$$\operatorname{div} \frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} = 0$$

lautet, heisst die **(nichtparametrische) Minimalflächengleichung**.

Bemerkung 3.10 (**Klassische Theorie**). *Es gibt eine klassische Theorie des Minimierungsproblems für A, die Minimierer – und damit insbesondere Lösungen der Minimalflächengleichung – im Raum der Lipschitz-stetigen Funktionen auf Ω liefert. Genauer gibt es für ein konvexes C^2-Gebiet oder allgemeiner ein Gebiet mit einem C^2-Rand von nichtnegativer mittlerer Krümmung (siehe [35] für die letztere bedingung) Ω und eine C^2-Funktion $u_0 : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ stets einen Lipschitz-Minimierer u von A mit $u|_{\partial\Omega} = u_0$. Sind außerdem $\partial\Omega$ und u_0 glatt, so ist auch u glatt bis zum Rand von Ω.*

Wir folgen nun einem allgemeineren Ansatz, der zunächst auch ohne Konvexitäts- oder Krümmungseigenschaften funktioniert und fassen das Flächenintegral A als Spezialfall der in Kapitel 2.2 behandelten Variationsintegrale mit linearem Wachstum auf. Tatsächlich handelt es sich bei A sogar um den in Kapitel 2.2 betrachteten Modellfall in der skalaren Situation $N = 1$ und minimale Graphen lassen sich präziser definieren – wenn Ω beschränkter Lipschitz-Bereich ist – als die Minimierer des Funktionals

$$A_{u_0}[u] := \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla u|^2}\, d\mathscr{L}^n + |D^s u|(\Omega) + \int_{\partial\Omega} |u_0 - T_\Omega u|\, d\mathscr{H}^{n-1}$$

in $BV(\Omega)$, zu gegebenen Randwerten $u_0 \in L^1(\partial\Omega; \mathscr{H}^{n-1})$.

Insbesondere lassen sich natürlich die Existenz- und Regularitätsresultate aus Kapitel 2.2 auf minimale Graphen anwenden. Außerdem kann man zeigen, dass der Subgraph $SG_u := \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : u(x)\}$ eines minimalen Graphen u eine minimale Menge ist in jeder offenen und beschränkten Teilmenge von $\Omega \times \mathbb{R}$ (siehe [38]), und deshalb sind auch die Resultate aus Kapitel 3.1.1 verfügbar. Tatsächlich gelten jedoch für minimale Graphen sogar noch bessere Regularitätssätze:

Satz 3.11 (**Innere Regularität minimaler Grpahen**). *Sei Ω ein beschränkter Lipschitz-Bereich in $\mathbb{R}^n$ und $u \in BV(\Omega)$ ein Minimierer von A_{u_0} zu Randwerten $u_0 \in L^1(\partial\Omega; \mathscr{H}^{n-1})$. Dann ist $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Beweisskizze. Nach der Vorbemerkung und Kapitel 3.1.1 ist ∂SG_u glatt außerhalb einer abgeschlossenen Menge mit Hausdorff-Dimension $\leq n-7$. Bezeichnet Σ die Projektion dieser Menge auf $\Omega \times \{0\}$, so lässt sich nun zeigen, dass u glatt ist außerhalb von Σ, also insbesondere $|D^s u|(\Omega \setminus \Sigma) = 0$. Wegen (1.8) ist dann aber schon $D^s u = 0$, also $u \in W^{1,1}(\Omega)$. Wissen wir dies erst einmal, so kann man die übliche schwache Formulierung der Minimalflächengleichung für u hinschreiben und es lässt sich eine a-priori-Abschätzung aus [20] herleiten, die im Wesentlichen das Supremum von ∇u durch das Supremum von u abschätzt. Lokale Beschränktheit von u lässt sich aber recht einfach (beispielsweise mit parametrischer Theorie) zeigen und es folgt lokale Beschränktheit von ∇u auf Ω. Ab dieser Stelle lässt sich höhere Regularität aus der Standardtheorie elliptischer partieller Differentialgleichungen gewinnen. □

Bemerkung 3.12 (**Eindeutigkeit minimaler Graphen I**). *Das approximative Differential ∇u eines Minimierers von A_{u_0} ist eindeutig durch die Randwerte $u_0 \in L^1(\partial\Omega, \mathbb{R}^N; \mathscr{H}^{n-1})$ bestimmt; dies folgt leicht aus der Tatsache, dass A_{u_0} konvex von u und sogar strikt konvex von ∇u abhängt. Zusammen mit dem vorigen Regularitätssatz sehen wir, dass tatsächlich sogar die ganze Ableitung Du eindeutig bestimmt ist und deshalb sind minimale Graphen* **eindeutig bis auf eine additive Konstante**.

Dass minimale Graphen tatsächlich die vorgegebenen Randwerte u_0 realisieren kann man im Allgemeinen nicht erwarten. Es gilt jedoch der folgende Satz, der eine Verbindung zur klassischen Theorie herstellt.

Satz 3.13 (**Randwerte minimaler Graphen, [40]**). *Es sei Ω ein beschränkter Lipschitz-Bereich in $\mathbb{R}^n$ und $u \in BV(\Omega)$ ein Minimierer von A_{u_0} zu Randwerten $u_0 \in L^1(\partial\Omega; \mathscr{H}^{n-1})$. Hat $\partial\Omega$ nahe einem Punkt $x_0 \in \partial\Omega$ nichtnegative mittlere Krümmung und ist u_0 stetig in x_0, so gilt*

$$\lim_{\Omega \ni x \to x_0} u(x) = u_0(x_0).$$

Bemerkung 3.14 (**Eindeutigkeit minimaler Graphen II**). *Ist Ω ein beschränkter Lipschitz-Bereich in $\mathbb{R}^n$ und u_0 ein stetiges Randdatum auf $\partial\Omega$, so lässt sich zeigen, dass der Minimierer von A_{u_0} (vollständig) eindeutig ist. Ist Ω sogar C^2, so folgt dies direkt aus dem vorigen Satz, da es dann stets einen Punkt $x_0 \in \partial\Omega$ gibt, nahe dem $\partial\Omega$ nichtnegative mittlere Krümmung hat.*

Ohne derartige Zusatzvoraussetzungen kann man allerdings weder Eindeutigkeit noch Annahme der Randwerte erwarten:

Beispiel (**Nichteindeutigkeit und Nichtannahme der Randwerte, [46]**). *Es $1 < r < \sqrt{2}$ fixiert und Ω sei die Menge aller Punkte in $]-1,1[^2 \subset \mathbb{R}^2$, die zu jedem der 4 Eckpunkte $(\pm 1, \pm 1)$ Abstand $> r$ haben. Weiter sei die Randfunktion u_0 auf $\partial\Omega$ definiert durch $u_0(x,y) := \frac{xy}{|xy|}M$ mit einer positiven Konstanten M, also $u_0 = M$ auf dem Randteil im ersten und dritten Quadranten und $u_0 = -M$ im zweiten und vierten. Dann gibt es aus Symmetriegründen einen Minimierer u von A_{u_0}, mit $u(x,0) = 0 = u(0,y)$ und durch Vergleich (mittels einem einfachen Maximumsprinzip) mit expliziten Lösungen der Minimalflächengleichung auf Ringen kann man einsehen, dass u durch eine von M unabhängige Konstante L beschränkt ist auf Ω. Wählt man nun $M > L$, so nimmt folglich u die vorgegebenen Randwerte u_0 nicht an und für jedes $a \in \mathbb{R}$ mit $|a| \leq M - L$ ist $a + u$ ein Minimierer von A_{u_0}.*

3.2 Zu Minimalflächen von höherer Kodimension

Auch für beliebige Kodimensionen $N \in \mathbb{N}$ lässt sich natürlich die Frage nach n-dimensionalen Flächen minimalen Inhalts in $\mathbb{R}^{N+n}$ stellen und das Problem kann sowohl vom parametrischen als auch vom nichtparametrischen Standpunkt betrachtet werden.

Das parametrische Problem kann dabei mit den Methoden der geometrischen Maßtheorie (siehe [28, 41]) behandelt werden – und war tatsächlich ein wesentlicher Anreiz zur Entwicklung dieser Methoden. Eine Möglichkeit besteht dabei darin, verallgemeinerte n-dimensionale Flächen durch sogenannte rektifizierbare n-Stöme zu modellieren. Solchen Strömen lässt sich ein verallgemeinerter Flächeninhalt, die sogenannte Masse, zuordnen und die Existenz von minimalen Strömen, d. h. Strömen mit minimaler Masse, kann mit der direkten Methode der Variationsrechnung gezeigt werden. Für solche minmalen Ströme gelten partielle Regularitätssätze aus [44, 5, 4] und die Frage nach einer Dimensionsreduktion für die singuläre Menge ist in Almgren's monumentalem Paper [6, 7, 8] studiert worden.

Eine erfolgreiche[7] nichtparametrische Theorie dagegen ist für den Fall höherer Kodimension $N > 1$ bisher nicht entwickelt worden. Zwar kann man den Flächeninhalt des Graphen G_u von glatten Funktionen $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$ weiterhin mit dem Hausdorff-Maß $\mathscr{H}^n$ modellieren, doch ist die Jacobische in der Flächenformel nun komplizierter und es gilt

$$A[u] := \mathscr{H}^n(G_u) = \int_\Omega |\mathcal{M}(Du)|\, d\mathscr{L}^n, \tag{3.4}$$

wobei $\mathcal{M}(z)$ den Vektor aller Minoren, also Unterdeterminanten, der Matrix $z \in \mathbb{R}^{Nn}$ bezeichnet. Tatsächlich ordnen wir z dabei neben den $(k\times k)$-Minoren mit $1 \leq k \leq \min\{n, N\}$ formal auch noch eine (0×0)-Minore mit dem Wert 1 zu, die ebenfalls in $\mathcal{M}(z)$ eingetragen wird. Sind nun n und N beide größer als 1, so lässt sich das Funktional A aus mehreren Gründen nur schwer behandeln: Erstens ist A nicht konvex (sondern nur polykonvex) und zweitens hat es nicht mehr lineares Wachstum und genügt tatsächlich keiner Standard-Wachstumsbedingung. Dennoch kann man mit einer Variante der Lebesgue-Serrin-Erweiterung A auf BV-Funktionen oder verwandte Funktionenräume zu einem unterhalbstetigen Funktional fortsetzen (siehe [1, 32]). Diese Funktionale lassen sich dann zwar minimieren, doch sind sie im Allgemeinen nichtlokal, nicht durch Integrale darstellbar und erlauben keine weitergehende Interpretation. Daher erscheint es – bei derartigem Vorgehen – unmöglich, Regularität von Minimierern zu beweisen, und es stellt sich daher die Frage, ob diese Art der Fortsetzung überhaupt sinnvoll ist. Tatsächlich sind für die Euler-Gleichung von (3.4), also das Minimalflächensystem, sogar negative Resultate (Nichtexistenz, Uneindeutigkeit und Irregularität) in klassischen Funktionenräumen bekannt; siehe [36].

[7] Jedoch finden sich in [49, 50, 1, 32] einige interessante Resultate.

Literaturverzeichnis

[1] E. Acerbi, G. Dal Maso: New lower semicontinuity results for polyconvex integrals. *Calc. Var. Partial Differ. Equ.* **2**, 329–371 (1994).

[2] G. Alberti: A Lusin type theorem for gradients. *J. Funct. Anal.* **100**, 110.–118 (1991).

[3] G. Alberti: Rank one property for derivatives of functions with bounded variation. *Proc. R. Soc. Edinb., Sect. A* **123**, 239–274 (1993).

[4] W.K. Allard: On the first variation of a varifold. *Ann. Math. (2)* **95**, 417–491 (1972).

[5] F.J. Almgren Jr.: Existence and regularity almost everywhere of solutions to elliptic variational problems among surfaces of varying topological type and singularity structure. *Ann. Math. (2)* **87**, 321–391 (1968).

[6] F.J Almgren Jr.: Q valued functions minimizing Dirichlet's integral and the regularity of area minimizing rectifiable currents up to codimension two. *Bull. Am. Math. Soc., New Ser.* **8**, 327–328 (1983).

[7] F.J Almgren Jr.: *Q-valued functions minimizing Dirichlet's integral and the regularity of area minimizing rectifiable currents up to codimension two.* Princeton University (1984).

[8] F.J Almgren Jr.: *Almgren's big regularity paper. Q-valued functions minimizing Dirichlet's integral and the regularity of area-minimizing rectifiable currents up to codimension* 2*. Edited by V. Scheffer and Jean E. Taylor.* World Scientific, Singapore (2000).

[9] L. Ambrosio, G. Dal Maso: A general chain rule for distributional derivatives. *Proc. Am. Math. Soc.* **108**, 691–702 (1990).

[10] L. Ambrosio, N. Fusco, D. Pallara: Partial regularity of free discontinuity sets, II. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci., IV. Ser.* **24**, 39–62 (1997).

[11] L. Ambrosio, N. Fusco, D. Pallara: Higher regularity of solutions of free discontinuity problems. *Differ. Integral Equ.* **12**, 499–520 (1999).

[12] L. Ambrosio, N. Fusco, D. Pallara: *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems.* Oxford University Press, Oxford (2000).

[13] L. Ambrosio, D. Pallara: Integral representation of relaxed functionals on $BV(\Omega;\mathbb{R}^k)$ and polyhedral approximation. *Indiana Univ. Math. J.* **42**, 295–321 (1993).

[14] L. Ambrosio, D. Pallara: Partial regularity of free discontinuity sets, I. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci., IV. Ser.* **24**, 1–38 (1997).

[15] G. Anzellotti: The Euler equation for functionals with linear growth. *Trans. Am. Math. Soc.* **290**, 483–501 (1985).

[16] G. Anzellotti, M. Giaquinta: Convex functionals and partial regularity. *Arch. Ration. Mech. Anal.* **102**, 243–272 (1988).

[17] M. Bildhauer: A priori gradient estimates for bounded generalized solutions of a class of variational problems with linear growth. *J. Convex Anal.* **9**, 117–137 (2002).

[18] M. Bildhauer: Two dimensional variational problems with linear growth. *Manuscr. Math.* **110**, 325–342 (2003).

[19] E. Bombieri, E. De Giorgi, E. Giusti: Minimal cones and the Bernstein problem. *Invent. Math.* **7**, 243–268 (1969).

[20] E. Bombieri, E. De Giorgi, M. Miranda: Una maggiorazione a priori relativa alle ipersuperfici minimali non parametriche. *Arch. Ration. Mech. Anal.* **32**, 255–267 (1969).

[21] G. Buttazzo: *Semicontinuity, Relaxation and Integral Representation in the Calculus of Variations.* Pitman Research Notes in Mathematics Series **207**, Longman (1989).

[22] G. Dal Maso: Integral representation on $BV(\Omega)$ of Γ-limits of variational integrals. *Manuscr. Math.* **30**, 387 – 416 (1980).

[23] E. De Giorgi: Frontiere orientate di misura minima. *Seminario di Matematica Scuola Norm. Sup. Pisa*, Editrice Tecnico Scientifica, Pisa (1961).

[24] U. Dierkes, S. Hildebrandt, A. Küster, O. Wohlrab: *Minimal Surfaces, Part I: Boundary Value Problems, Part II: Boundary regularity.* Springer, Berlin (1992).

[25] J. Douglas: Solution of the problem of Plateau. *Trans. Am. Math. Soc.* **33**, 263–321 (1931).

[26] J. Elstrost: *Maß- und Integrationstheorie.* Springer, Berlin (2002).

[27] L.C. Evans, R.F. Gariepy: *Measure Theory and Fine Properties of Functions.* CRC, Boca Raton (1992).

[28] H. Federer: *Geometric Measure Theory.* Springer, New York (1969).

[29] H. Federer: The singular sets of area minimizing rectifiable currents with codimension one and of area minimizing flat chains modulo two with arbitrary codimension. *Bull. Am. Math. Soc.* **76**, 767–771 (1970).

[30] E. Gagliardo: Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **27**, 284–305 (1957).

[31] M. Giaquinta, G. Modica, J. Soucek: Functionals with linear growth in the calculus of variations. *Commentat. Math. Univ. Carol.* **20**, 143–172 (1979).

[32] M. Giaquinta, G. Modica, J. Soucek: *Cartesian Currents in the Calculus of Variations, Part I: Cartesian Currents, Part II: Variational Integrals.* Springer, New York (1998).

[33] E. Giusti: *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation.* Birkhäuser, Basel (1984).

[34] C. Goffman, J. Serrin: Sublinear functions of measures and variational integrals. *Duke Math. J.* **31**, 159–178 (1964).

[35] H. Jenkins, J. Serrin: The Dirichlet problem for the minimal surface equation in higher dimensions. *J. Reine Angew. Math.* **229**, 170–187 (1968).

[36] H.B. Lawson, R. Osserman: Non-existence, non-uniqueness and irregularity of solutions to the minimal surface system. *Acta Math.* **139**, 1–17 (1977).

[37] P. Mattila: *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces. Fractals and Rectifiability.* Cambridge Univerity Press, Cambridge (1995).

[38] M. Miranda: Superfici cartesiane generalizzate ed insiemi di perimetro localmente finito sui prodotti cartesiani. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Sci. Fis. Mat., III. Ser.* **18**, 515–542 (1964).

[39] M. Miranda: Sul minimo dill'integrale del gradiente di une funzione. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Sci. Fis. Mat., III. Ser.* **19**, 627–665 (1965); Errata. **20**, 653–654 (1966).

[40] M. Miranda: Un principio di massimo forte per le frontiere minimali e una sua applicazione alla risoluzione del problema al contorno per l'equazione delle superfici di area minima. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **45**, 355–366 (1971).

[41] F. Morgan: *Geometric measure theory. A beginner's guide.* Academic Press, San Diego (2009).

[42] T. Rado: The problem of the least area and the problem of Plateau. *Math. Z.* **32**, 763–795 (1930).

[43] T. Rado: On Plateaus problem. *Ann. Math. (2)* **31**, 457–469 (1930).

[44] E.R. Reifenberg: On the analyticity of minimal surfaces. *Ann. Math. (2)* **80**, 15–21 (1964).

[45] Y.G. Reshetnyak: Weak convergence of completely additive vector functions on a set. *Sib. Math. J.* **9**, 1039–1045 (1968).

[46] E. Santi: Sul problema al contorno per l'equazione delle superfici di area minima su domini limitati qualunque. *Ann. Univ. Ferrara, N. Ser., Sez. VII* **17**, 13–26 (1972).

[47] L. Simon: *Theorems on regularity and singularity of energy minimizing maps.* Lecture Notes in Mathematics. ETH Zürich. Birkhäuser (1996).

[48] J. Simons: Minimal varieties in riemannian manifolds. *Ann. Math. (2)* **88**, 62–105 (1968).

[49] B. White: Existence of least-area mappings of N-dimensional domains. *Ann. Math. (2)* **118**, 179–185 (1983).

[50] B. White: Mappings that minimize area in their homotopy classes. *J. Differ. Geom.* **20**, 433–446 (1984).

[51] W.P. Ziemer: *Weakly Differentiable Functions. Sobolev Spaces and Functions of Bounded Variation*. Springer, Berlin (1989).