Maßtheorie

Vorlesung im Sommersemester 2011

Thomas Schmidt

Stand: 1. August 2011

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Maße

Einleitung: Das Maßproblem

Diese Vorlesung beschäftigt sich mit Konzepten des Messens von Mengen, insbesondere mit Messungen

- des **k-dimensionalen Inhalts** von Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ $(0 \leq k \leq n \in \mathbb{N})$

und spezieller mit Messungen

- der Anzahl der Elemente einer Menge $(k = 0)$,
- der Länge einer Kurve $(k = 1)$,
- des Inhalts einer Fläche $(k = 2)$
- oder des Volumens eines Raumbereichs $(k = 3)$.

Die Messung ordnet dabei den Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ eine (möglicherweise unendliche) nichtnegative Kennzahl zu. Als mathematisches Modell bieten sich daher Abbildungen

$$\mu \colon \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$$

auf der Potenzmenge $\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ von $\mathbb{R}^n$, also der Menge aller Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, an. Folgenden Grundeigenschaften von μ erscheinen plausibel:

- $\mu(\emptyset) = 0$,
- (Mengen-)**Monotonie**: $\mu(A) \leq \mu(B)$ für $A, B \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ mit $A \subset B$,
- **Additivität**[1]: $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ für *disjunkte* $A, B \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$.
- Additivität bei abzählbarer[2] Vereinigung, genannt **$\boldsymbol{\sigma}$-Additivität**: $\mu(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)$ für *disjunkte*[3] $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$,

[1] Genauer sollte man hier von Additivität bei endlicher Vereinigung oder kurz von endlicher Additivität sprechen.

[2] Additivität bei überabzählbarer Vereinigung ist für $k > 0$ nicht sinnvoll: Dann soll nämlich einerseits $\mu(\{x\}) = 0$ für alle Einermengen $\{x\}$ mit $x \in \mathbb{R}^n$ gelten. Andererseits soll es aber auch Mengen $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ mit $\mu(A) > 0$ geben. Da jedes A disjunkte Vereinigung von Einermengen ist, würde überabzählbare Additivität zu einem Widerspruch führen.

[3] In dieser Vorlesung wird 'disjunkt' stets im Sinne von 'paarweise disjunkt' gebraucht.

- **Translationsinvarianz**[4]: $\mu(b + A) = \mu(A)$ für $b \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$,
- **Rotationsinvarianz**[5]: $\mu(TA) = \mu(A)$ für $T \in \mathcal{O}(n)$ und $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$.

Dabei sind Monotonie und Additivität als Spezialfälle in σ-Additivität enthalten, und Translations- und Rotationsinvarianz werden zusammenfassend als Bewegungsinvarianz bezeichnet.

Leider kann man für $k > 0$ nicht alle diese Anforderungen an k-dimensionale Inhalte aufrechterhalten. Dies zeigt der folgende Satz (von G. Vitali, $\sim$1905):

Satz 1.1 (über die **Unlösbarkeit des Maßproblems**). *Es gibt keine σ-additive und translationsinvariante Abbildung $\mu\colon \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ mit $0 < \mu([0, 1]^n) < \infty$.*

Beweis. Wir nehmen an, es gäbe doch ein solches μ und leiten einen Widerspruch her. Dazu rechnen wir zuerst mit σ-Additivität, Translationsinvarianz und Monotonie nach:

$$\mu([0,2[^n) = \sum_{x\in\{0,1\}^n} \mu(x + [0,1[^n) = \sum_{x\in\{0,1\}^n} \mu([0,1[^n) \le 2^n \mu([0,1]^n) < \infty\,.$$

Jetzt wählen wir ein Repräsentantensystem A des Faktors $\mathbb{R}^n/\mathbb{Q}^n$ in $[0, 1]^n$, d. h. wir bilden eine Teilmenge A von $\mathbb{R}^n$ durch Auswahl eines Repräsentanten in $[0, 1]^n$ aus jeder Restklasse $x + \mathbb{Q}^n$ mit $x \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $(q + A)_{q\in\mathbb{Q}^n}$ eine abzählbare Familie disjunkter Mengen mit

$$[0,1]^n \subset \bigcup_{q\in\mathbb{Q}^n\cap[-1,1]^n} (q + A)\,,$$

Unter Verwendung von Monotonie, σ-Additivität und Translationsinvarianz folgt

$$0 < \mu([0,1]^n) \le \sum_{q\in\mathbb{Q}^n\cap[-1,1]^n} \mu(q + A) = \sum_{q\in\mathbb{Q}^n\cap[-1,1]^n} \mu(A)$$

und deshalb muss $\mu(A) > 0$ gelten. Andererseits ist

$$[0,2[^n \supset \bigcup_{q\in\mathbb{Q}^n\cap[0,1[^n} (q + A)$$

und wir erhalten

$$\infty > \mu([0,2[^n) \ge \sum_{q\in\mathbb{Q}^n\cap[0,1[^n} \mu(A)\,.$$

Da auf der rechten Seite der letzten Formel unendlich viele gleiche Summanden stehen, folgt $\mu(A) = 0$ und der gewünschte Widerspruch ist erreicht. □

[4] Dabei ist $b + A := \{b + a \,:\, a \in A\}$.

[5] $\mathcal{O}(n)$ bezeichnet die Gruppe der orthogonalen $(n\times n)$-Matrizen, die insbesondere die Matrizen zu Rotationen und Spiegelungen enthält. Und wir schreiben $TA := \{Ta \,:\, a \in A\}$ für das Bild von A unter (Multiplikation mit) T.

Die Menge A aus dem Beweis des Satzes wird mit Hilfe des Auswahlaxioms gebildet und tatsächlich sind auch andere Mengen, die zu derartigen Widersprüchen führen, ähnliche pathologische Konstruktionen[6]. Es gibt nun zwei Wege zur Umgehung des Maßproblems und der Problematik solcher Mengen: Man kann

- entweder den Definitionsbereich von μ einschränken und statt auf ganz $\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ nur auf gewissen Teilsystemen $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ arbeiten, die aber dennoch alle "vernünftigen" Mengen enthalten.

- oder die Forderung der σ-Additivität abschwächen zu **σ-Subadditivität**: $\mu(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)$ für alle $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$.

Wir folgen im Wesentlichen dem ersten Weg. Es gibt aber Zusammenhänge zwischen den beiden Vorgehensweisen und wir werden uns in Abschnitt 1.6 auch mit dem zweiten Weg beschäftigen.

Außerdem wollen wir auch **Messungen von Wahrscheinlichkeiten** behandeln. In diesem Fall soll für eine Menge A von möglichen Zufallsereignissen die Kennzahl $\mu(A)$ die Wahrscheinlichkeit angeben, dass eines der Ereignisse aus A eintritt. Nun sind Mengen von Ereignissen im Allgemeinen keine Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ und Bewegungsinvarianz von μ macht in diesem Kontext keinen Sinn. Deshalb entwickeln wir im Folgenden eine Theorie σ-additiver Abbildungen

$$\mu\colon \mathscr{A} \to [0, \infty]$$

auf Teilmengen $\mathscr{A}$ von $\mathscr{P}(\Omega)$ mit einer **beliebigen, von nun an fixierten Grundmenge Ω**. Den Modellfall des k-dimensionalen Inhalts auf $\mathbb{R}^n$ werden wir aber im Auge behalten.

1.1 σ-Algebren und Maße

Definition 1.2 (σ-Algebren und Messräume). *Eine Teilmenge $\mathscr{A}$ der Potenzmenge $\mathscr{P}(\Omega)$ von Ω heißt eine σ-Algebra über Ω, wenn gelten:*

- $\emptyset \in \mathscr{A}$,

- *$\mathscr{A}$ ist abgeschlossen unter Komplementbildung, also:* $A \in \mathscr{A} \implies \Omega \setminus A \in \mathscr{A}$,

- *$\mathscr{A}$ ist abgeschlossen unter abzählbarer Vereinigung, also:* $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathscr{A} \implies \bigcup_{i=1}^\infty A_i \in \mathscr{A}$.

Ist $\mathscr{A}$ eine σ-Algebra über Ω, so heißt das Paar $(\Omega, \mathscr{A})$ ein Messraum, die Mengen in $\mathscr{A}$ werden auch ($\mathscr{A}$-)messbare Mengen und die Mengen in $\mathscr{P}(\Omega)\setminus\mathscr{A}$ nicht-($\mathscr{A}$-)messbare Mengen genannt.

[6] Eine weitere bekannte Konstruktion ist das Paradoxon von Banach und Tarski aus dem Jahr 1924.

Bemerkungen. *Unsere ersten einfachen Beobachtungen sind:*

- *Jede σ-Algebra $\mathscr{A}$ über Ω ist abgeschlossen unter abzählbarem Durchschnitt und es gilt stets $\Omega \in \mathscr{A}$.*
- *$\{\emptyset, \Omega\}$ und $\mathscr{P}(\Omega)$ sind (die extremen Beispiele von) σ-Algebren über Ω.*
- *Ist $(\mathscr{A}_i)_{i\in I}$ eine Familie von σ-Algebren über Ω (mit beliebiger Indexmenge I), so ist $\bigcap_{i\in I} \mathscr{A}_i$ wiederum eine σ-Algebra über Ω.*

Definition 1.3 (**Erzeugte $\boldsymbol{\sigma}$-Algebren**). *Sei $\mathscr{E}$ eine beliebige Teilmenge von $\mathscr{P}(\Omega)$. Nach der vorigen Bemerkung ist der Durchschnitt aller σ-Algebren $\mathscr{A}$ über Ω, für die $\mathscr{E} \subset \mathscr{A}$ gilt, selbst eine σ-Algebra. Wir nennen diese σ-Algebra die von $\mathscr{E}$ erzeugte σ-Algebra und bezeichnen sie mit $\sigma(\mathscr{E})$.*

Bemerkung. *Nach Definition ist $\mathscr{E} \subset \sigma(\mathscr{E})$ und es gilt die Implikation*

$$\mathscr{A} \ \sigma\text{-Algebra mit } \mathscr{E} \subset \mathscr{A} \implies \sigma(\mathscr{E}) \subset \mathscr{A} .$$

In diesem Sinne ist $\sigma(\mathscr{E})$ die kleinste σ-Algebra, die $\mathscr{E}$ enthält.

Definition 1.4 (**Maße und Maßräume**). *Sei $(\Omega, \mathscr{A})$ ein Messraum. Eine Abbildung*

$$\mu \colon \mathscr{A} \to [0, \infty]$$

heißt ein Maß auf $(\Omega, \mathscr{A})$, wenn $\mu(\emptyset) = 0$ gilt und μ im folgenden Sinne σ-additiv ist: Für disjunkte *$A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathscr{A}$ gilt stets*

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) .$$

Ist μ ein Maß auf $(\Omega, \mathscr{A})$, so heißt das Tripel $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum.

Definition 1.5 (**Wahrscheinlichkeitsmaße**). *Ist $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(\Omega) = 1$, so heißt μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß und $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.*

Bemerkung. *Ist $(\mu_i)_{i\in I}$ eine beliebige Familie von Maßen auf $(\Omega, \mathscr{A})$, und $(\omega_i)_{i\in I}$ eine Familie von Parametern in $[0, \infty]$, so definiert die Vorschrift*[7]

$$\Big(\sum_{i\in I} \omega_i \mu_i\Big)(A) := \sum_{i\in I} \omega_i \mu_i(A) \qquad \text{für } A \in \mathscr{A}$$

ein weiteres Maß $\sum_{i\in I} \omega_i \mu_i$ auf $(\Omega, \mathscr{A})$. Dabei verwenden wir die in dieser Vorlesung **stets gültige Konvention $\mathbf{0 \cdot \infty := 0 =: \infty \cdot 0}$.**

[7] Dabei ist eine möglicherweise überabzählbare Summe $\sum_{i\in I} a_i$ nichtnegativer Zahlen a_i erklärt als $\sup \{ \sum_{i\in E} a_i : E \text{ ist endliche Teilmenge von } I \}$.

Modellbeispiel. *Als konkretes Beispiel, an das wir uns öfter zurückerinnern werden, betrachten wir den endlichen Grundraum*

$$\Omega = \{1,2,3,4,5\}\,,$$

die σ-Algebra

$$\begin{aligned}\mathscr{A} = \{&\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, \{4,5\},\\ &\{1,2,3\}, \{1,4,5\}, \{2,3,4,5\},\\ &\{1,2,3,4,5\}\}\end{aligned}$$

und das Maß μ auf $(\Omega, \mathscr{A})$ mit

$$\mu(A) := \sum_{x \in A \cap \{1,2,3\}} x^2 \qquad \text{für } A \in \mathscr{A}\,.$$

Insbesondere erfüllt dieses Maß

$$\mu(\{1\}) = 1\,, \qquad \mu(\{2,3\}) = 13\,, \qquad \mu(\{4,5\}) = 0 \qquad \text{und} \qquad \mu(\Omega) = 14\,,$$

während beispielsweise $\mu(\{2\})$ nicht definiert ist.

Beispiele. *Für einen allgemeinen Grundraum Ω lassen sich folgende Beispiele von Maßen auf $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ sofort hinschreiben: Man definiert*

- *das* **Dirac-Maß** *δ_x zu $x \in \Omega$ durch* $\delta_x(A) := \mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{falls } x \notin A \end{cases}$

für $A \in \mathscr{P}(\Omega)$. Mit der vorigen Bemerkung bildet man daraus ($A \in \mathscr{P}(\Omega)$)

- *das* **Zählmaß** *$\xi := \sum_{x\in\Omega} \delta_x$ mit $\xi(A) = \#A =$ Anzahl der Elemente von A (ξ entspricht dem 0-dimensionalen Inhalt aus der Einleitung),*
- *das Nullmaß $0 \cdot \xi$ mit $(0 \cdot \xi)(A) = 0$,*
- *das ∞-Maß $\infty \cdot \xi$ mit* $(\infty \cdot \xi)(A) = \begin{cases} \infty & \text{falls } A \neq \emptyset \\ 0 & \text{falls } A = \emptyset \end{cases}$
- *und allgemeiner zu jeder Familie $(\omega_x)_{x\in\Omega}$ von Parametern in $[0,\infty]$ ein* **diskretes Maß** *$\omega := \sum_{x\in\Omega} \omega_x \delta_x$ mit $\omega(A) = \sum_{x\in A} \omega_x$ und $\omega(\{x\}) = \omega_x$. Ist $\sum_{x\in\Omega} \omega_x = 1$, so ist ω ein diskretes Wahrscheinlichkeitsmaß.*

Man prüft leicht nach, dass diskrete Maße (und folglich alle vorausgehenden Beispiele) sich nicht nur σ-additiv, sondern sogar überabzählbar-additiv verhalten. Ein Beispiel eines Maßes auf $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$, das die letzte stärkere Eigenschaft nicht mehr hat, ist (bei überabzählbarem Ω)

- *das Überabzählbarkeitsmaß* $\aleph(A) := \begin{cases} 0 & \text{falls } A \text{ endlich oder abzählbar} \\ \infty & \text{falls } A \text{ überabzählbar} \end{cases}.$

Bemerkung (**Fortsetzung von und Einschränkung auf Teilmengen**). *Sei* $(\Omega, \mathscr{A})$ *ein Messraum und* $X \in \mathscr{P}(\Omega)$. *Dann ist*

$$\mathscr{A}|X := \{A \cap X \,:\, A \in \mathscr{A}\}$$

eine σ*-Algebra über* X, *genannt die* **Spur-σ-Algebra** *von* $\mathscr{A}$ *auf* X. *Maße auf* $\mathscr{A}|X$ *kann man stets auf* $\mathscr{A}$ *erweitern:*

- *Ist* μ *ein Maß auf* $(X, \mathscr{A}|X)$, *so erhalten wir daraus ein Maß* μ^0 *auf* $(\Omega, \mathscr{A})$ *durch*
$$\mu^0(A) := \mu(A \cap X) \qquad \text{für } A \in \mathscr{A}\,.$$

Ist $X \in \mathscr{A}$, *so ist* $\mathscr{A}|X = \mathscr{A} \cap \mathscr{P}(X)$ *und wir erhalten zusätzlich:*

- *Die Einschränkung* $\mu|_{\mathscr{A}|X}$ *eines Maßes* μ *auf* $(\Omega, \mathscr{A})$ *ist ein Maß auf* $(X, \mathscr{A}|X)$.
- μ^0 *ist eine Fortsetzung von* μ, *also* $\mu^0|_{\mathscr{A}|X} = \mu$.
- *Schränken wir ein Maß* μ *auf* $(\Omega, \mathscr{A})$ *erst ein und setzen es dann wieder fort, so erhalten wir ein weiteres Maß* $\big(\mu|_{\mathscr{A}|X}\big)^0$ *auf* $(\Omega, \mathscr{A})$. *Wir werden in Abschnitt 2.6 die Schreibweise* $\mathbb{1}_X \cdot \mu$ *für dieses neue Maß kennenlernen.*

Satz 1.6 (über **Stetigkeitseigenschaften von Maßen**). *Seien* $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ *ein Maßraum und* $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathscr{A}$.

- *Dann gilt*
$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \lim_{k\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\Big)\,.$$
- *Ist* $\mu(A_1) < \infty$, *so gilt außerdem*
$$\mu\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \lim_{k\to\infty} \mu\Big(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\Big)\,.$$

Bemerkungen.

- *Im Falle einer aufsteigenden Folge* $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$ *vereinfacht sich die erste Aussage zu* $\mu\big(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\big) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$.
- *Und im Falle einer absteigenden Folge* $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ *mit* $\mu(A_1) < \infty$ *gibt die zweite Aussage* $\mu\big(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\big) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$.
- *Die Notwendigkeit der Voraussetzung* $\mu(A_1) < \infty$ *im zweiten Teil erkennt man am Beispiel* $(\Omega, \mathscr{A}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), \xi)$ *mit* $A_i = \{m \in \mathbb{N} \,:\, m \geq i\}$.

Beweis des Satzes. Wir betrachten die disjunkt gemachten Mengen

$$B_k := A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i\,.$$

Für diese erhalten wir mit der σ-Additivität von μ

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \mu(B_i) = \lim_{k\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\Big).$$

Da $\bigcup_{i=1}^k B_i = \bigcup_{i=1}^k A_i$ für alle $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ gilt, zeigt diese die erste Behauptung. Die zweite Behauptung ergibt sich durch Anwendung der ersten auf die Komplemente $A_1 \setminus A_i$. □

1.2 Halbringe und Prämaße

Wir kommen jetzt zurück auf das Problem des n-dimensionalen Inhalts von Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, also auf den Fall $k = n$ aus der Einleitung. Wie zuvor erläutert, wollen wir den n-dimensionalen Inhalt durch ein Maß auf einer "großen" σ-Algebra über $\mathbb{R}^n$ modellieren, die alle "vernünftigen" Mengen enthält. Die Definition eines solche Maßes muss gewissermaßen alle Formeln für Inhaltberechnungen (für Dreiecke, Quader, Pyramiden, Kreise, Kugeln und was es sonst noch alles gibt) enthalten und kann deshalb nicht so einfach hingeschrieben werden. Es gibt nun etliche verschiedene Konstruktionsverfahren. Wir gehen hier so vor, dass wir unsere Messvorschrift zunächst nur auf einem Halbring, einem "kleinen" Mengensystem, definieren und dann auf eine σ-Algebra fortsetzen:

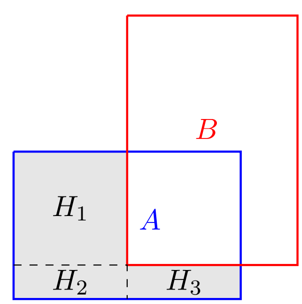
Definition 1.7 (Halbringe[8]). *Eine Teilmenge $\mathscr{H}$ der Potenzmenge $\mathscr{P}(\Omega)$ heißt ein Halbring über Ω, wenn gelten:*

- $\emptyset \in \mathscr{H}$,
- *zu $A, B \in \mathscr{H}$ gibt es stets ein $k \in \mathbb{N}$ und* disjunkte $H_1, H_2, \ldots, H_k \in \mathscr{H}$ *mit $A \setminus B = \bigcup_{i=1}^k H_i$,*
- *$\mathscr{H}$ ist abgeschlossen unter endlichem Durchschnitt, also:* $A, B \in \mathscr{H} \implies A \cap B \in \mathscr{H}$.

Bemerkung. *Jede σ-Algebra über Ω ist auch ein Halbring über Ω.*

Notation & Beispiel. *Für $a, b \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir im Folgenden $a \le b$, wenn $a_i \le b_i$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ gilt. Sind $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $a \le b$, so definieren wir einen halboffenen Quader $[a, b[$ durch*

$$\begin{aligned}[a,b[&:= [a_1,b_1[\times[a_2,b_2[\times\ldots\times[a_n,b_n[\\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : a \le x < b\} \subset \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$



$A \setminus B = H_1 \cup H_2 \cup H_3$
im Halbring $\mathscr{I}_2$

[8] Die Terminologie "Halbring" wird durch den folgenden Sachverhalt motiviert: Als (Mengen-)Ringe bezeichnet man Mengensysteme, die zusätzlich zu den Eigenschaften des Halbrings abgeschlossen unter symmetrischer Differenz $A\Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ sind. Dies ist insofern konsistent mit dem Begriff des algebraischen Rings, dass Mengen-Ringe mit der symmetrischen Differenz als Addition und dem Durchschnitt als Multiplikation die Struktur eines kommutativen Rings im Sinne der Algebra aufweisen.

Mit diesen Bezeichnungen, von denen wir später auch naheliegende Abwandlungen verwenden, ist

$$\mathscr{I}_n := \big\{[a,b[\colon\ a,b \in \mathbb{R}^n \ \textit{mit}\ a \le b\big\}$$

ein Halbring über $\mathbb{R}^n$*.*

Definition 1.8 (**Prämaße**)**.** *Sei* $\mathscr{H}$ *ein Halbring über* Ω*. Eine Abbildung*

$$\eta\colon \mathscr{H} \to [0,\infty]$$

heißt ein Prämaß, wenn $\eta(\emptyset) = 0$ *gilt und* η *im folgenden Sinne* σ*-additiv ist: Für* disjunkte $H_1, H_2, H_3, \ldots \in \mathscr{H}$ *mit* $\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i \in \mathscr{H}$ *gilt stets*

$$\eta\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \eta(H_i)\,.$$

Bemerkung. *Ein Prämaß unterscheidet sich also von einem Maß nur durch die Bauart des Definitionsbereichs (weshalb man hier auch* $\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i \in \mathscr{H}$ *explizit voraussetzen muss). Daraus ergibt sich:*

- *Jedes Maß ist auch ein Prämaß und*
- *jedes Prämaß, das auf einer* σ*-Algebra definiert ist, ist bereits ein Maß.*

Modellbeispiel (**Teil II**)**.** *In unserem* **Modellbeispiel** *ist*

$$\mathscr{H} = \{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, \{4,5\}\}$$

ein Halbring[9]*, der* $\mathscr{A}$ *erzeugt, und* μ *ist durch die Werte des Prämaßes* $\mu|_{\mathscr{H}}$ *schon völlig bestimmt. Eine abstrakte Begründung dafür liefert später Satz 1.12.*

Auf den halboffenen Quadern aus $\mathscr{I}_n$ ist anschaulich klar, wie man den n-dimensionalen Inhalt zu definieren hat, nämlich durch

$$\eta^n([a,b[) := \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \qquad \text{für alle } [a,b[\in \mathscr{I}_n\,. \tag{1.1}$$

Satz & Definition 1.9 (**Lebesguesches Prämaß**)**.** *Die Formel (1.1) definiert ein Prämaß* $\eta^n\colon \mathscr{I}_n \to [0,\infty]$*, genannt das* n*-dimensionale Lebesguesche Prämaß.*

Zum Beweis des Satzes benutzen wir folgendes Lemma über Halbringe:

Lemma 1.10. *Sei* $\mathscr{H}$ *ein Halbring. Zu* $l \in \mathbb{N}$ *und* $A, B_1, B_2, \ldots, B_l \in \mathscr{H}$ *gibt es dann stets ein* $k \in \mathbb{N}$ *und disjunkte* $H_1, H_2, \ldots, H_k \in \mathscr{H}$ *mit*

$$A \setminus \bigcup_{j=1}^{l} B_j = \bigcup_{i=1}^{k} H_i$$

[9] Dieses Beispiel eines Halbrings sehr einfach und nicht charakteristisch, da für $A \neq B$ in $\mathscr{H}$ stets $A \cap B = \emptyset$ und $A \setminus B = A$ gelten.

Beweis. Man beweist das Lemma durch Induktion nach $l \in \mathbb{N}$. □

Beweis des Satzes. Wir zeigen nacheinander:

(1) *Endliche Additivität:* Für disjunkte $H_1, H_2, \ldots, H_l \in \mathscr{I}_n$ mit $\bigcup_{j=1}^l H_j \in \mathscr{I}_n$ gilt $\eta^n\Big(\bigcup_{j=1}^l H_j\Big) = \sum_{j=1}^l \eta^n(H_j)$,

(2) *σ-Superadditivität:* Für disjunkte $B_1, B_2, B_3, \ldots \in \mathscr{I}_n$ mit $\bigcup_{j=1}^\infty B_j \in \mathscr{I}_n$ gilt $\eta^n\Big(\bigcup_{j=1}^\infty B_j\Big) \geq \sum_{j=1}^\infty \eta^n(B_j)$,

(3) *σ-Subadditivität:* Für beliebige $B_1, B_2, B_3, \ldots \in \mathscr{I}_n$ mit $\bigcup_{i=1}^\infty B_i \in \mathscr{I}_n$ gilt $\eta^n\Big(\bigcup_{i=1}^\infty B_i\Big) \leq \sum_{i=1}^\infty \eta^n(B_i)$.

Aus (2) und (3) folgt dann die gewünschte σ-Additivität von η^n und somit die Behauptung des Satzes. Die Beweise von (1), (2) und (3) folgen:

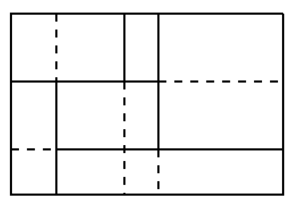
• *Nachweis von (1):* Durch Verfeinerung der Zerlegung und Hinzufügen leerer Quader kann man hierbei auf den Fall

$$(H_j)_{j\in\{1,2,\ldots,l\}} = \Big(\big[a_1^{\gamma_1-1}, a_1^{\gamma_1}\big[\times \big[a_2^{\gamma_2-1}, a_2^{\gamma_2}\big[\times \ldots \times \big[a_n^{\gamma_n-1}, a_n^{\gamma_n}\big[\Big)_{\gamma\in\{1,2,\ldots,k\}^n}$$

reduzieren, mit $l = k^n$ und $a_i^0 \leq a_i^1 \leq a_i^2 \leq \ldots \leq a_i^k$ in $\mathbb{R}$ für $i = 1, 2, \ldots, n$. Dann ist

$$\bigcup_{j=1}^l H_j = \big[a_1^0, a_1^k\big[\times \big[a_2^0, a_2^k\big[\times \ldots \times \big[a_n^0, a_n^k\big[$$

und man rechnet die endliche Additivität (1) mit dem allgemeinen Distributivgesetz folgendermaßen nach:


Verfeinerung einer Quaderzerlegung

$$\eta^n\Big(\big[a_1^0, a_1^k\big[\times \big[a_2^0, a_2^k\big[\times \ldots \times \big[a_n^0, a_n^k\big[\Big) = \prod_{i=1}^n (a_i^k - a_i^0)$$
$$= \prod_{i=1}^n \sum_{\gamma_i=1}^n (a_i^{\gamma_i} - a_i^{\gamma_i-1}) = \sum_{\gamma\in\{1,2,\ldots,k\}^n} \prod_{i=1}^n (a_i^{\gamma_i} - a_i^{\gamma_i-1})$$
$$= \sum_{\gamma\in\{1,2,\ldots,k\}^n} \eta^n\Big(\big[a_1^{\gamma_1-1}, a_1^{\gamma_1}\big[\times \big[a_2^{\gamma_2-1}, a_2^{\gamma_2}\big[\times \ldots \times \big[a_n^{\gamma_n-1}, a_n^{\gamma_n}\big[\Big).$$

• *Nachweis von (2):* Seien $B_1, B_2, B_3, \ldots \in \mathscr{I}_n$ disjunkt und

$$A := \bigcup_{j=1}^\infty B_j \in \mathscr{I}_n\,.$$

Zu jedem $l \in \mathbb{N}$ liefert Lemma 1.10 ein $k \in \mathbb{N}$ und disjunkte $H_1, H_2, \ldots, H_k \in \mathscr{I}_n$ mit

$$A \setminus \bigcup_{j=1}^l B_j = \bigcup_{i=1}^k H_i\,.$$

Es folgt, dass $B_1, B_2, \ldots, B_l, H_1, H_2, \ldots, H_k$ alle disjunkt sind mit

$$A = \bigcup_{j=1}^{l} B_j \cup \bigcup_{i=1}^{k} H_i \,.$$

Wegen der endlichen Additivität (1) ist also

$$\eta^n(A) = \sum_{j=1}^{l} \eta^n(B_j) + \sum_{i=1}^{k} \eta^n(H_i) \geq \sum_{j=1}^{l} \eta^n(B_j)$$

für alle $l \in \mathbb{N}$ und Grenzübergang $l \to \infty$ zeigt

$$\eta^n(A) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \eta^n(B_j) \,.$$

- *Nachweis von (3):* Seien $B_1, B_2, B_3, \ldots \in \mathscr{I}_n$ mit $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathscr{I}_n$. Wir können also

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = [a, b[\qquad \text{und} \qquad B_i = [a_i, b_i[$$

darstellen mit $a \leq b$ und $a_i \leq b_i$ in $\mathbb{R}^n$. Sei jetzt $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\widetilde{b} < b$ mit und zu jedem $i \in \mathbb{N}$ ein $\widetilde{a}_i < a_i$, so dass

$$\eta^n\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \leq \eta^n([a, \widetilde{b}[) + \varepsilon \qquad \text{und} \qquad \eta^n([\widetilde{a}_i, b_i[) \leq \eta^n(B_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$$

gelten. Es ist

$$[a, \widetilde{b}] \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}]\widetilde{a}_i, b_i[,$$

also bilden die $]\widetilde{a}_i, b_i[$ eine offene Überdeckung des Kompaktums $[a, \widetilde{b}]$, aus der wir eine endliche Teilüberdeckung $\big(]\widetilde{a}_{i_j}, b_{i_j}[\big)_{j=1,2,\ldots,l}$ auswählen können. Wir setzen $A_j := [\widetilde{a}_{i_j}, b_{i_j}[\cap [a, \widetilde{b}[\in \mathscr{I}_n$ für $j = 1, 2, \ldots, l$ und schreiben mit Lemma 1.10

$$A_j \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{j-1}) = \bigcup_{i=1}^{k_j} H_i^j$$

mit disjunkten $H_1^j, H_2^j, \ldots, H_{k_j}^j \in \mathscr{I}_n$. Mit der endlichen Additivität (1) folgt[10]

$$\sum_{i=1}^{k_j} \eta^n(H_i^j) \leq \eta^n(A_j) \,.$$

Wegen

$$[a, \widetilde{b}[= \bigcup_{j=1}^{l} A_j = \bigcup_{j=1}^{l} \bigcup_{i=1}^{k_j} H_i^j$$

[10] Tatsächlich muss man zur Anwendung von (1) noch $A_j \setminus \bigcup_{i=1}^{k_j} H_i^j$ als endliche Vereinigung disjunkter Mengen aus $\mathscr{I}_n$ schreiben können. Dies ist nach Lemma 1.10 möglich.

gibt die endliche Additivität außerdem

$$\eta^n([a,\widetilde{b}[) = \sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k_j}\eta^n(H_i^j)\,.$$

Schließlich setzen wir die obigen (Un-)Gleichungen zusammen:

$$\begin{aligned}\eta^n\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\right) &\le \eta^n([a,\widetilde{b}[) + \varepsilon = \sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k_j}\eta^n(H_i^j) + \varepsilon \le \sum_{j=1}^{l}\eta^n(A_j) + \varepsilon \\ &\le \sum_{i=1}^{\infty}\eta^n([\widetilde{a}_i,b_i[) + \varepsilon \le \sum_{i=1}^{\infty}\eta^n(B_i) + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^i} + \varepsilon = \sum_{i=1}^{\infty}\eta^n(B_i) + 2\varepsilon\,.\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt (3). □

Bemerkung. *Die vorausgehende Verfahrenweise zum Nachweis der σ-Subadditivität (3) wird als* **$\frac{\varepsilon}{2^i}$-Trick** *bezeichnet und ist in der Maßtheorie oft nützlich.*

Die obige Beweisstrategie lässt sich verallgemeinern, beispielsweise liefert sie in der 1-dimensionalen Situation:

Satz & Definition 1.11 (Lebesgue-Stieltjessche Prämaße). *Für jede nichtfallende Funktion $F\colon I \to \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall I in $\mathbb{R}$ definiert die Vorschrift*

$$\eta_F^1([a,b[) := F(b-) - F(a-) \qquad \text{für } a \le b \text{ mit } [a,b[\subset I$$

ein Prämaß $\eta_F^1\colon \mathscr{I}_1 \cap \mathscr{P}(I) \to [0,\infty]$ auf dem Halbring $\mathscr{I}_1 \cap \mathscr{P}(I)$. Wir nennen η_F^1 das Lebesgue-Stieltjessche Prämaß zu F.

Bemerkungen.

- *Die linksseitigen Grenzwerte $F(a-)$ und $F(b-)$ existieren für monotones F stets. Ist F linksseitig stetig, so kann man sie durch die entsprechenden Funktionswerte ersetzen.*
- *Arbeitet man mit Intervallen des Typs $]a,b]$, so geht alles analog mit rechsseitigen Grenzwerten und rechtsseitiger Stetigkeit.*

Beispiele. *Zwei Beispiele im Falle $I = \mathbb{R}$ sind:*

- *Für $F(x) := ax + b$ (mit $a \in [0,\infty[$, $b \in \mathbb{R}$) ist $\eta_F^1 = a\,\eta^1$ ein Vielfaches des Lebesgueschen Prämaßes.*
- *Für $F := \mathbb{1}_{]x,\infty[}$ ist*[11] *$\eta_F^1 = \delta_x$ das Dirac-Maß zu $x \in \mathbb{R}^n$.*

Zum Beweis von Satz 1.11. Man verfährt ganz analog zum Beweis von Satz 1.9 (und da man jetzt nur in einer Dimension ist, wird manches sogar einfacher) und verwendet beim Nachweis der σ-Subadditivität zusätzlich die folgende Beobachtung: Wegen der Monotonie von F gibt es zu $[a,b[\subset I$ und $\varepsilon > 0$ immer ein $\widetilde{b} < b$ mit $F(\widetilde{b}-) \ge F(b-) - \varepsilon$ und folglich $\eta_F^1([a,b[) \le \eta_F^1([a,\widetilde{b}[) + \varepsilon$. □

[11] Genauer gesprochen ist η_F^1 die Einschränkung des Dirac-Maßes δ_x von $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ auf $\mathscr{I}_1$.

1.3 Fortsetzung von Prämaßen zu Maßen

Wie schon angekündigt wollen wir η^n nun vom Halbring $\mathscr{I}_n$ auf eine σ-Algebra fortsetzen. Dazu verwenden wir den folgenden Satz über die Fortsetzung zu einem Maß auf der erzeugten σ-Algebra, den wir erst in Abschnitt 1.6 beweisen werden.

Satz 1.12 (**Maßfortsetzungssatz**). *Sei $\eta\colon \mathscr{H} \to [0,\infty]$ ein Prämaß auf einem Halbring $\mathscr{H}$ über Ω. Dann gelten:*

- Existenz: *Es gibt ein Maß μ auf $(\Omega, \sigma(\mathscr{H}))$ mit $\mu|_{\mathscr{H}} = \eta$.*
- Eindeutigkeit: *Ist η σ-endlich, so gibt es höchstens ein solches Maß.*

Dabei haben wir schon verwendet:

Definition 1.13 (**Endlichkeit und $\boldsymbol{\sigma}$-Endlichkeit**). *Sei η ein Prämaß auf einem Halbring $\mathscr{H}$ über Ω. Ein $H \in \mathscr{H}$ heißt η-endlich, wenn $\eta(H) < \infty$ gilt. Und ein $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ heißt η-σ-endlich, wenn es η-endliche $H_1, H_2, H_3, \ldots \in \mathscr{H}$ gibt mit $\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i = A$. Schließlich heißt η selbst (σ-)endlich, wenn der Grundraum Ω eine η-(σ-)endliche Menge ist.*

Die σ-Endlichkeitsvoraussetzung im zweiten Teil des Satzes sollte man sich technische Voraussetzung vorstellen. Sie schließt manch unsinnige Situation aus, wie beispielsweise die, dass $\mathscr{H}$ gar nicht ganz Ω trifft, also $\bigcup_{H\in\mathscr{H}} H \neq \Omega$ ist und μ auf (Teilmengen von) $\Omega \setminus \bigcup_{H\in\mathscr{H}} H$ beliebig gewählt werden kann. Aber Vorsicht, auch einige relevante Situationen werden durch diese Voraussetzung ausgeschlossen: Beispielsweise können wir für den k-dimensionalen Inhalt auf $\mathbb{R}^n$ mit $k < n$ keine σ-Endlichkeit erwarten. Deshalb taugt der Fortsetzungssatz nur für $k = n$: Er liefert in diesem Fall eine Fortsetzung von η^n zu einem Maß auf $(\mathbb{R}^n, \sigma(\mathscr{I}_n))$ (und für $k = n = 1$ außerdem eine Fortsetzung von η_F^1 zu einem Maß auf $(\mathbb{R}, \sigma(\mathscr{I}_1 \cap \mathscr{P}(I)))$. Somit können wir also Mengen aus $\sigma(\mathscr{I}_n)$ einen n-dimensionalen Inhalt zuordnen. Im nächsten Abschnitt wollen wir besser verstehen, was $\sigma(\mathscr{I}_n)$ eigentlich ist und welche Mengen wir damit behandeln können.

1.4 Die Borelsche $\boldsymbol{\sigma}$-Algebra und das Lebesgue-Borelsche Maß

Erinnerung:

Definition (**Topologien und topologische Räume**). *Eine Teilmenge $\mathcal{T}$ von $\mathscr{P}(\Omega)$ heißt eine Topologie auf Ω, wenn gelten:*

- *$\emptyset \in \mathcal{T}$ und $\Omega \in \mathcal{T}$,*
- *$\mathscr{T}$ ist abgeschlossen unter endlichem Durchschnitt, also:*
  $O, U \in \mathcal{T} \implies O \cap U \in \mathcal{T}$
- *$\mathscr{T}$ ist abgeschlossen unter beliebiger Vereinigung, also:*
  $O_i \in \mathcal{T}$ für alle $i \in I \implies \bigcup_{i\in I} O_i \in \mathcal{T}$ (bei beliebiger Indexmenge I).

Ist $\mathcal{T}$ eine Topologie auf Ω, so heißt das Paar $(\Omega, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Die Mengen in $\mathcal{T}$ nennt man dann die ($\mathcal{T}$-)offenen Mengen und die Mengen $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ mit $\Omega \setminus A \in \mathcal{T}$ die ($\mathcal{T}$-)abgeschlossene Mengen.

Bemerkungen.

- *Für zwei topologische Räume $(\Omega, \mathcal{T}_\Omega)$ und $(X, \mathcal{T}_X)$ lassen sich u. a. die folgenden Konzepte erklären: Inneres, Äußeres, Rand und Abschluß von Teilmengen von Ω; Konvergenz von Folgen in Ω; Stetigkeit von Funktionen*[12] *$f : \Omega \to X$.*

- *Jeder metrische Raum, insbesondere jede Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, ist (mit der üblichen Definition offener Mengen) auch ein topologischer Raum.*

- *Trotz der formalen Ähnlichkeit der Definitionen erfahren Topologien in der Mathematik also eine gänzlich andere Interpretation als σ-Algebren.*

- *Ist X irgendeine Teilmenge eines topologischen Raums $(\Omega, \mathcal{T})$, so ist $\mathcal{T}|X := \{O \cap X : O \in \mathcal{T}\}$ eine Topolgie und $(X, \mathcal{T}|X)$ ein topologischer Raum. $\mathcal{T}|X$ heißt die Spurtopologie (von $\mathcal{T}$) auf X und die Elemente von $\mathcal{T}|X$ heißen (relativ) offene Mengen in X.*

Definition & Bemerkungen (Kompaktheit). *Sei $(\Omega, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.*

- *Eine Teilmenge K von Ω heißt (überdeckungs-)kompakt, wenn es zu jeder Überdeckung $K \subset \bigcup_{i \in I} O_i$ mit offenen Mengen $O_i \in \mathcal{T}$ eine endliche Teilüberdeckung gibt, also ein $k \in \mathbb{N}$ und $O_{i_1}, O_{i_2}, \dots, O_{i_k} \in \mathcal{T}$ mit $K \subset \bigcup_{j=1}^{k} O_{i_j}$.*

- *Eine Teilmenge K von Ω heißt folgenkompakt, wenn jede Folge in K eine in $(\Omega, \mathcal{T})$ konvergente Teilfolge besitzt.*

- *Jede kompakte Menge ist auch folgenkompakt. Und jede folgenkompakte Menge in einem metrischen Raum ist auch kompakt.*

- *Kompaktheit ist eine innere Eigenschaft in folgenden Sinne: Eine Teilmenge K von Ω ist genau dann in $(\Omega, \mathcal{T})$ kompakt, wenn sie auch in $(K, \mathcal{T}|K)$, also bezüglich ihrer eigenen Spurtopologie, kompakt ist.*

- *In $\mathbb{R}^n$ sind die Kompakta nach dem Überdeckungssatz von Heine-Borel genau die abgeschlossenen und beschränkten Mengen.*

Definition 1.14 (Borelsche $\boldsymbol{\sigma}$-Algebra). *Sei $(\Omega, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Die von den offenen Mengen erzeugte σ-Algebra $\sigma(\mathcal{T})$ über Ω wird mit $\mathscr{B}(\Omega)$ bezeichnet*[13] *und heißt die σ-Algebra der Borelschen Teilmengen von Ω — oder kurz die Borel-σ-Algebra über Ω.*

Bemerkung (Borel-σ-Algebren auf Teilmengen)**.** *Versieht man eine Teilmenge X von Ω mit der Spurtopologie, so ist $\mathscr{B}(X)$ gleich der Spur-σ-Algebra $\mathscr{B}(\Omega)|X$. Folglich gilt $\mathscr{B}(X) = \mathscr{B}(\Omega) \cap \mathscr{P}(X)$ genau dann, wenn X selbst in $\mathscr{B}(\Omega)$ ist.*

Bemerkungen.

- *Per Definition ist $\mathcal{T} \subset \mathscr{B}(\Omega)$, mit anderen Worten:* **Jede offene Menge ist Borelsch**.

- *Da σ-Algebren unter Komplementbildung abgeschlossen sind, gilt auch:* **Jede abgeschlossene Menge ist Borelsch**.

[12] Definition: $f : \Omega \to X$ heißt stetig, wenn das Urbild jeder offenen Menge unter f wieder offen ist, wenn also $f^{-1}(O) \in \mathcal{T}_\Omega$ für alle $O \in \mathcal{T}_X$ gilt.

[13] Die Notation $\mathscr{B}(\Omega)$ ist etwas ungenau, da $\mathscr{B}(\Omega)$ nicht nur von Ω, sondern auch von $\mathcal{T}$ maßgeblich abhängt. Meist ist die zugrundegelegte Topologie $\mathcal{T}$ jedoch aus dem Kontext klar.

- *Da σ-Algebren auch unter abzähbarem Durchschnitt und abzähbarer Vereinigung abgeschlossen sind, folgt weiter: Abzähbare Vereinigungen von abgeschlossenen Mengen, genannt* $\boldsymbol{F_\sigma}$**-Mengen**, *und abzählbare Durchschnitte von offenen Mengen, genannt* $\boldsymbol{G_\delta}$**-Mengen**, *sind Borelsch.*

- *Im Falle* $\Omega = \mathbb{R}^n$ *sind somit schon alle "vernünftigen" Mengen (und viele mehr) Borelsch. Insbesondere sind halboffene Quader wie in der Definition von* $\mathscr{I}_n$ *sowohl* F_σ *als auch* G_δ *und damit Borelsch. Wir werden sogar die folgende stärkere Aussage beweisen:*

Satz 1.15. *Halboffene Quader erzeugen die Borel-σ-Algebra über* $\mathbb{R}^n$*, d. h. für den Halbring* $\mathscr{I}_n$ *über* $\mathbb{R}^n$ *aus Abschnitt 1.2 gilt*

$$\sigma(\mathscr{I}_n) = \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)\,.$$

Beweis. Es reicht,

$$\mathscr{I}_n \subset \sigma(\mathcal{T}) \qquad \text{und} \qquad \mathcal{T} \subset \sigma(\mathcal{I}_n) \tag{1.2}$$

zu zeigen. Sind diese Inklusionen nämlich gezeigt, so gelten nach der Bemerkung zur erzeugten σ-Algebra auch $\sigma(\mathscr{I}_n) \subset \sigma(\mathcal{T})$ und $\sigma(\mathcal{T}) \subset \sigma(\mathcal{I}_n)$, also $\sigma(\mathscr{I}_n) = \sigma(\mathcal{T}) = \mathscr{B}(X)$.

Zum Beweis der ersten Inklusion in (1.2) betrachten wir einen halboffenen Quader $[a, b[\in \mathscr{I}_n$ mit $a \le b$ in $\mathbb{R}^n$. Wir schreiben

$$[a, b[= \bigcap_{i=1}^{\infty} \,]a_1 - \tfrac{1}{i}, b_1[\times]a_2 - \tfrac{1}{i}, b_2[\times \ldots \times]a_n - \tfrac{1}{i}, b_n[$$

als abzähbaren Durchschnitt offener Mengen und erhalten $[a, b[\in \sigma(\mathcal{T})$.

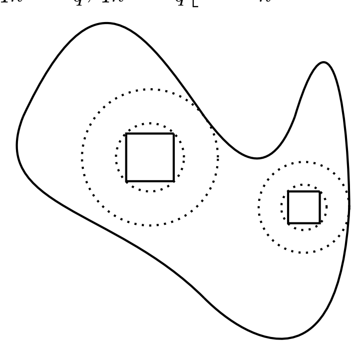
Zum Beweis der zweiten Inklusion in (1.2) sei O eine offene Menge in $\mathbb{R}^n$. Wir bemerken, dass jedes $x \in O$ positiven Abstand $\operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus O) > 0$ zum Komplement von O hat, und für $q \in O \cap \mathbb{Q}^n$ setzen wir $r_q := \frac{1}{2\sqrt{n}} \operatorname{dist}(q, \mathbb{R}^n \setminus O)$ und

$$I_q := [q_1 - r_q, q_1 + r_q[\times [q_2 - r_q, q_2 + r_q[\times \ldots \times [q_n - r_q, q_n + r_q[\in \mathscr{I}_n\,.$$

Zeigen wir nun, dass

$$O = \bigcup_{q \in O \cap \mathbb{Q}^n} I_q \in \sigma(\mathscr{I}_n)$$

gilt, so sind wir fertig. Zum Beweis dieser Gleichheit überlegen wir uns einerseits, dass jeder Punkt in I_q höchstens Abstand[14] $r_q\sqrt{n} = \frac{1}{2}\operatorname{dist}(q, \mathbb{R}^n \setminus O)$ von q hat und deshalb noch in O liegt. Und andererseits argumentieren wir wie folgt: Zu $x \in O$ können wir stets ein $q \in O \cap \mathbb{Q}^n$ finden mit $(1+2\sqrt{n})\,|x - q| \le \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus O)$.



Zwei Quadrate des Typs I_q in einer offenen Menge in $\mathbb{R}^2$

[14] Für $x \in I_q$ gilt ja $|x - q| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - q_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^n (r_q)^2} = r_q\sqrt{n}$.

Dann ist

$$r_q = \frac{1}{2\sqrt{n}}\operatorname{dist}(q, \mathbb{R}^n \setminus O) \geq \frac{1}{2\sqrt{n}}\big[\operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus O) - |x-q|\big] \geq |x-q|$$

und folglich $x \in I_q$. □

Bemerkungen. *Dieselbe Beweisidee zeigt:*

- *Es gilt $\sigma(\mathscr{I}_1 \cap \mathscr{P}(I)) = \mathscr{B}(I)$ über Intervallen I in $\mathbb{R}$.*
- *In jedem separablen*[15] *metrischen Raum wird die Borel-σ-Algebra vom System aller offenen (oder abgeschlossenen) Kugeln erzeugt.*

Korollar & Definition 1.16 (Lebesgue-Borelsches Maß). *Es gibt ein eindeutig bestimmtes Maß β^n auf $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$, das auf $\mathscr{I}_n$ mit dem Lebesgueschen Prämaß η^n übereinstimmt. Wir nennen β^n das n-dimensionale Lebesgue-Borelsche Maß.*

Beweis. Schreiben wir $\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^{\infty}[-i, i[^n$, so ist ersichtlich, dass η^n σ-endlich ist. Daher können wir η^n nach dem Maßfortsetzungssatz 1.12 auf genau eine Weise zu einem Maß β^n auf $(\mathbb{R}^n, \sigma(\mathscr{I}_n))$ fortsetzen, für das $\beta^n\big|_{\mathscr{I}_n} = \eta^n$ gilt. Gemäß dem vorigen Satz ist aber $\sigma(\mathscr{I}_n) = \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$. □

Bemerkung. *Die Lebsgue-Stieltjesschen Prämaße η_F^1 lassen sich ganz analog zu Maßen β_F^1 auf $(I, \mathscr{B}(I))$ fortsetzen.*

Wir erwarten natürlich, dass β^n bewegungsinvarint ist. Dies ist auch so (siehe Korollar 1.41), aber im Moment begnügen wir uns erst einmal mit Translationsinvarianz und Skalierungsverhalten von β^n:

Satz 1.17 (über die **Translationsinvarianz von $\boldsymbol{\beta^n}$**). *Seien $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $x + A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ und es gilt*

$$\beta^n(x + A) = \beta^n(A)\,.$$

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ für den restlichen Beweis fixiert. Wir betrachten

$$\mathscr{B}_x := \{A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \;:\; x + A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)\} \subset \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)\,.$$

Man prüft leicht nach, dass $\mathscr{B}_x$ eine σ-Algebra ist, die alle offenen Mengen enthält. Mit der Bemerkung zur erzeugten σ-Algebra folgt $\mathscr{B}_x = \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$, also $x + A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ für alle $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$.

Jetzt definieren wir durch $\beta_x(A) := \beta^n(x{+}A)$ eine Abbildung $\beta_x\colon \mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$. Man rechnet nach, dass β_x ein Maß ist und für $[a,b[\in \mathscr{I}_n$ findet man:

$$\beta_x([a,b[) = \eta^n(x{+}[a,b[) = \prod_{i=1}^{n}\big((x_i{+}b_i) - (x_i{+}a_i)\big) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i) = \eta^n([a,b[).$$

Also stimmt β_x auf $\mathscr{I}_n$ mit η^n überein und aus dem Eindeutigkeitsteil des Maßfortsetzungssatzes folgt $\beta_x = \beta^n$. Dies ist die Behautung. □

[15] Definition: Ein topologischer Raum heißt separabel, wenn er eine abzählbare, dichte Teilmenge enthält. Dabei heißt eine Teilmenge eines topologischen Raumes dicht, wenn ihr Äußeres die leere Menge ist.

Analoge Argumente ergeben zwar nicht die Bewegungsinvarianz von β^n, aber doch zumindest die von $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$.

Satz 1.18 (über das **Skalierungsverhalten von $\boldsymbol{\beta^n}$**). *Seien $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ und $r \in [0, \infty[$. Dann ist $rA \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ und es gilt*

$$\beta^n(rA) = r^n \beta^n(A) .$$

Beweis. Für $r > 0$ beweist man dies genau wie den vorigen Satz. Im Falle $r = 0$ schließt man $\beta^n(\{0\}) = 0$ aus der für alle $\varepsilon > 0$ gültigen Abschätzung

$$\beta^n(\{0\}) \leq \beta^n([0, \varepsilon[^n) = \eta^n([0, \varepsilon[^n) = \varepsilon^n . \qquad \square$$

Satz 1.19 (über die **Eindeutigkeit von $\boldsymbol{\beta^n}$**). *β^n ist das einzige translationsinvariante Maß auf $(\Omega, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$ mit $\beta^n([0, 1[^n) = 1$.*

Beweisskizze. Ist μ ein weiteres solches Maß, so finden wir durch Zerlegung von $[0, 1[^n$ in $k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n$ maßgleiche Teilquader zuerst, dass μ und β^n auf Quadern der Form $[0, \frac{1}{k_1}[\times [0, \frac{1}{k_2}[\times \ldots \times [0, \frac{1}{k_n}[$ mit $k_i \in \mathbb{N}$ übereinstimmen. Daraus ergibt sich dann Übereinstimmung auf allen Quadern $[a, b[$ mit $a \leq b$ in $\mathbb{Q}^n$. Diese Quader bilden einen Halbring, der $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ erzeugt. Deshalb ist $\mu = \beta^n$ nach dem Eindeutigkeitsteil des Maßfortsetzungssatzes 1.12. $\square$

1.5 Nullmengen, Vervollständigung, Lebesgue-Maß (oder: Auch Borel-Mengen sind noch nicht genug)

Definition 1.20 (**Nullmengen**). *Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum. Eine Menge $A \in \mathscr{A}$ heißt eine (μ-)Nullmenge, wenn $\mu(A) = 0$ ist.*

Unsere erste Beobachtung zu Nullmengen ist nun, dass Modifikation durch eine Nullmenge das Maß nicht verändert:

Lemma 1.21. *Für einen Maßraum $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, ein $A \in \mathscr{A}$ und eine μ-Nullmenge N ist stets*

$$\mu(A \cup N) = \mu(A) = \mu(A \setminus N) .$$

Beweis. Wegen der Monotonie von μ ist $\mu(N \setminus A) = 0$ und mit der Additivität von μ folgt $\mu(A \cup N) = \mu(A) + \mu(N \setminus A) = \mu(A)$. Genauso sieht man $\mu(A) = \mu(A \setminus N) + \mu(A \cap N) = \mu(A \setminus N)$ ein. $\square$

Als Nächstes wollen wir uns kurz mit Kriterien für Nullmengen beschäftigen: Allgemein folgt aus der σ-Additivität von μ, dass jede abzählbare Vereinigung von μ-Nullmengen wieder eine μ-Nullmenge ist. Speziell für das Lebesgue-Borelsche-Maß gilt außerdem:

Satz 1.22. *Jeder echte affine Unterraum von $\mathbb{R}^n$ ist eine β^n-Nullmenge.*

Teilbeweis. Wir bemerken zuerst, dass jeder Unterraum abgeschlossen, also Borelsch ist. Jetzt beschränken wir uns auf den Fall einer Achsen-Hyperebene $H = \{x \in \mathbb{R}^n : x_\gamma = 0\}$, wobei $\gamma \in \{1, 2, \ldots, n\}$ fixiert ist. Der allgemeine Fall wird daraus folgen sobald wir in Korollar 1.41 die volle Bewegungsinvarianz von β^n gezeigt haben.

Sei $i \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir schließen aus

$$\beta^n(H \cap [-i, i[^n) \leq \eta^n(\{x \in [-i, i[^n : 0 \leq x_\gamma < \varepsilon\}) \leq (2i)^{n-1}\varepsilon$$

für alle $\varepsilon > 0$, dass $H \cap [-i, i[^n$ eine β^n-Nullmenge ist. Damit ist H eine abzählbare Vereinigung von β^n-Nullmengen, also selbst eine β^n-Nullmenge. □

Der vorige Satz würde ein einfaches und schlagkräftiges Kriterium für Nullmengen liefern, wenn auch jede Teilmenge T einer μ-Nullmenge N wieder eine μ-Nullmenge wäre. Letzteres klingt plausibel, ist allerdings nicht immer der Fall, denn es kann passieren, dass T gar nicht messbar ist (also $T \notin \mathscr{A}$ gilt). Daher definieren wir:

Definition 1.23 (**Vollständige Maße**). *Ein Maßraum $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ heißt vollständig (und μ ein vollständiges Maß auf $(\Omega, \mathscr{A})$), wenn jede Teilmenge einer μ-Nullmenge wieder zu $\mathscr{A}$ gehört (und damit selbst eine μ-Nullmenge ist).*

Ist ein Maßraum nicht vollständig, so können wir das obige Problem nichtmessbarer Teilmengen einfach dadurch beheben, dass wir jede Teilmenge einer Nullmenge per Definition zu einer messbaren Menge erklären. Wie dies funktioniert und dass dabei nichts mit der Additivität des Maßes schiefgeht, besagt der folgende Satz:

Satz & Definition 1.24 (**Vervollständigung von Maßräumen**). *Es sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum. Dann ist*

$$\mathscr{M}_\mu := \{A \cup T \,:\, T \text{ ist Teilmenge einer } \mu\text{-Nullmenge und } A \in \mathscr{A}.\}$$

eine σ-Algebra über Ω mit $\mathscr{A} \subset \mathscr{M}_\mu$ und die Vorschrift

$$\overline{\mu}(A \cup T) := \mu(A) \qquad \text{für } A \in \mathscr{A} \text{ und jede Teilmenge } T \text{ einer } \mu\text{-Nullmenge}$$

definiert ein vollständiges Maß $\overline{\mu}$ auf $(\Omega, \mathscr{M}_\mu)$ mit $\overline{\mu}|_{\mathscr{A}} = \mu$. Man nennt $\mathscr{M}_\mu$ die σ-Algebra der μ-messbaren Mengen und $(\Omega, \mathscr{M}_\mu, \overline{\mu})$ die Vervollständigung von $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$.

Modellbeispiel (**Teil III**). *In unserem* **Modellbeispiel** *ist $\{4, 5\}$ (abgesehen von $\emptyset$) die einzige μ-Nullmenge. Die Vervollständigung macht nun auch die Teilmengen $\{4\}$ und $\{5\}$ zu Nullmengen, genauer ist*

$$\begin{aligned}\mathscr{M}_\mu = \{&\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, \{4\}, \{5\},\\ &\{1,2,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,3,4\}, \{2,3,5\}, \{4,5\},\\ &\{1,2,3,4\}, \{1,2,3,5\}, \{1,4,5\}, \{2,3,4,5\},\\ &\{1,2,3,4,5\}\}\end{aligned}$$

und das Maß $\overline{\mu}$ ist durch die Festlegungen

$$\overline{\mu}(\{4\}) = 0 \qquad \text{und} \qquad \overline{\mu}(\{5\}) = 0$$

(und natürlich $\overline{\mu}(A) = \mu(A)$ für $A \in \mathscr{A}$) bestimmt.

Bemerkung (Minimalität der Vervollständigung). *Ist $(\Omega, \widetilde{\mathscr{A}}, \widetilde{\mu})$ irgendein vollständiger Maßraum mit $\mathscr{A} \subset \widetilde{\mathscr{A}}$ und $\widetilde{\mu}|_{\mathscr{A}} = \mu$, so gilt $\mathscr{M}_\mu \subset \widetilde{\mathscr{A}}$ und $\widetilde{\mu}|_{\mathscr{M}_\mu} = \overline{\mu}$. In diesem Sinne ist $\overline{\mu}$ die eindeutig bestimmte kleinste Fortsetzung von μ zu einem vollständigen Maß auf dem natürlichen Definitionsbereich $\mathscr{M}_\mu$.*

Beweis des Satzes. Man verifiziert problemlos, dass $\mathscr{A} \subset \mathscr{M}_\mu$ gilt und $\mathscr{M}_\mu$ abgeschlossen unter abzählbarer Vereinigung ist. Um zu sehen, dass $\mathscr{M}_\mu$ abgeschlossen unter Komplementbildung ist, schreibt man für $A \in \mathscr{A}$ und $T \subset N$ mit einer μ-Nullmenge N

$$\Omega \setminus (A \cup T) = \big[\underbrace{\Omega \setminus (A \cup N)}_{\in \mathscr{A}}\big] \cup \big[\underbrace{N \setminus (A \cup T)}_{\subset N}\big] \in \mathscr{M}_\mu \,.$$

Damit ist $\mathscr{M}_\mu$ eine σ-Algebra.

Weiter überlegen wir uns nur noch, dass $\overline{\mu}$ wohldefiniert ist, dann folgen die restlichen Behauptungen sofort. Sei dazu $M \in \mathscr{M}_\mu$ auf zwei Weisen dargestellt, also

$$A \cup T = M = \widetilde{A} \cup \widetilde{T}$$

mit $A, \widetilde{A} \in \mathscr{A}$, $T \subset N$, $\widetilde{T} \subset \widetilde{N}$ und mit μ-Nullmengen N und $\widetilde{N}$. Dann gilt

$$A \cup N \cup \widetilde{N} = \widetilde{A} \cup N \cup \widetilde{N}$$

und nach Lemma 1.21 ist

$$\mu(A) = \mu(A \cup N \cup \widetilde{N}) = \mu(\widetilde{A} \cup N \cup \widetilde{N}) = \mu(\widetilde{A}) \,.$$

Folglich ist die Definition von $\overline{\mu}(M)$ unabhängig davon, ob wir die Darstellung $M = A \cup T$ oder die alternative Darstellung $M = \widetilde{A} \cup \widetilde{T}$ betrachten. Dies war zu zeigen. □

Ausgehend von einem Prämaß η auf einem Halbring $\mathscr{H}$ wollen wir nun den Maßfortsetzungssatz 1.12 und die Vervollständigung hintereinanderschalten. Wir setzen also zunächst η zu einem Maß μ auf $\sigma(\mathscr{H})$ und dann μ zu einem vollständigen Maß $\overline{\mu}$ auf $\mathscr{M}_\mu$ fort[16]. In dieser Weise definieren wir jetzt das Lebesguesche Maß, das wohl wichtigste Maß überhaupt und dasjenige Objekt, das der Vorstellung eines n-dimensionalen Inhalts auf $\mathbb{R}^n$ am Nächsten kommt:

Definition 1.25 (Lebesguesches Maß). *Sei $(\mathbb{R}^n, \mathscr{M}^n, \mathscr{L}^n)$ die Vervollständigung des Lebesgue-Borelschen Maßraums $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n), \beta^n)$. Wir nennen $\mathscr{M}^n$ die σ-Algebra der (Lebesgue-)messbaren Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ und $\mathscr{L}^n$ das (n-dimensionale) Lebesguesche Maß.*

Ganz analog definieren wir auch:

[16] Übrigens kann man in vielen Fällen auch zu einem Maß auf einem noch größeren Definitionsbereich als $\mathscr{M}_\mu$ fortsetzen, aber Eindeutigkeit solcher Fortsetzungen kann man nicht mehr erwarten.

Definition 1.26 (**Lebesgue-Stieltjessche Maße**). *Sei I ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$, $F\colon I \to \mathbb{R}$ sei nichtfallend und $(I, \mathscr{M}^1_F, \mathscr{L}^1_F)$ sei die Vervollständigung von $(I, \mathscr{B}(I), \beta^1_F)$. Dann heißt $\mathscr{L}^1_F$ das Lebesgue-Stieltjesssche Maß zu F.*

Auf die Lebesgue-Stieltjesschen Maße werden wir in Abschnitt 1.8 zurückkommen, wo wir sehen werden, dass alle "gutartigen" Maße auf Intervallen diese Form haben. Hier konzentrieren wir uns erst einmal auf $\mathscr{L}^n$ und die σ-Algebra $\mathscr{M}^n$ seiner messbaren Mengen.

Bemerkung. *Die Translationsinvarianz und das Skalierungsverhalten von β^n auf $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ (Sätze 1.17 und 1.18) übertragen sich auf $\mathscr{L}^n$ und $\mathscr{M}^n$. Aus Satz 1.19 und der Bemerkung zur Minimalität der Vervollständigung ergibt sich außerdem eine Eindeutigkeitsaussage[17] für $\mathscr{L}^n$. Einen schöneren Eindeutigkeitssatz für $\mathscr{L}^n$ werden wir in Abschnitt 1.8 kennenlernen.*

In Anbetracht der Translationsinvarianz von $\mathscr{L}^n$ erhalten wir aus Satz 1.1:

Korollar 1.27 (**Existenz nicht-Lebesgue-messbarer Mengen**). *$\mathscr{M}^n$ ist eine* **echte** *Teilmenge von $\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$.*

Eine Analyse des Beweises von Satz 1.1 zeigt, dass tatsächlich die dort konstruierte Menge A nicht in $\mathscr{M}^n$ ist. Solche Beispiele nicht-messbarer Mengen heißen Vitali-Mengen in $\mathbb{R}^n$.

Man mag sich fragen, welchen Gewinn die Vervollständigung des Lebesgue-Borelschen Maßes β^n zum Lebesgueschen Maß $\mathscr{L}^n$ eigentlich bringt: Was nutzt diese Fortsetzung von $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ auf $\mathscr{M}^n$, wo man doch trotz allem nicht auf ganz $\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen kann? Schließlich konnten wir schon zuvor die Mengen der sehr reichhaltigen Klasse $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ messen und wir haben bisher kein Beispiel einer Menge angegeben, die in $\mathscr{M}^n \setminus \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ liegt. War $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ dann nicht auch genug?

Die Anwort ist, dass $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ tatsächlich noch nicht genug war, denn es gibt (hauptsächlich zwei) Gründe, die für (die Fortsetzung auf) $\mathscr{M}^n$ sprechen: Einerseits werden wir im folgenden Abschnitt 1.6 sehen, dass $\mathscr{M}^n$ noch auf eine zweite natürlich Weise als Definitionsbereich ins Spiel kommt. Und andererseits ist $\mathscr{M}^n$ tatsächlich viel größer als $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$:

Satz 1.28. *$\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ ist gleichmächtig[18] zu $\mathbb{R}$, während $\mathscr{M}^n$ gleichmächtig zu $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ ist.*

Zum Beweis. Der Beweis benutzt fortgeschrittene Mengenlehre und übersteigt den Rahmen dieser Vorlesung, daher machen wir nur wenige Bemerkungen zur Beweisstrategie: Die erste Aussage beweist man "durch stufenweise Konstruktion aller Borel-Mengen" mit transfiniter Induktion. Zum Beweis der zweiten Aussage benötigt man eine $\mathscr{L}^n$-Nullmenge $C \in \mathscr{M}^n$, die gleichmächtig zu $\mathbb{R}$

[17] Es handelt sich um folgenden Sachverhalt: Ist $(\mathbb{R}^n, \mathscr{A}, \mu)$ vollständiger Maßraum und sind $\mathscr{A}$ und μ translationsinvariant mit $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{A}$ und $\mu([0,1[^n) = 1$, so ist $\mathscr{A} \subset \mathscr{M}^n$ und $\mu|_{\mathscr{M}^n} = \mathscr{L}^n$.

[18] Zwei Mengen A und B heißen gleichmächtig, wenn es eine Bijektion von A auf B gibt. Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation.

ist. Man kann ein solches C beispielsweise als Cantor-Menge der mittleren Drittel konstruieren und dann ist sogar $C \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$. Da $\mathscr{L}^n$ vollständig ist, ist $\mathscr{P}(C) \subset \mathscr{M}^n \subset \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$. Da $\mathscr{P}(C)$ und $\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ beide gleichmächtig zu $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ sind, folgt mit dem (plausiblen, aber tiefliegenden) Satz von Schröder und Bernstein, dass auch $\mathscr{M}^n$ gleichmächtig zu $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ ist. □

Nach einem Satz von Cantor[19] ist keine Menge gleichmächtig zu ihrer Potenzmenge, daher erhalten wir aus Satz 1.28 insbesondere:

Korollar 1.29. *$\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ ist eine* **echte** *Teilmenge von $\mathscr{M}^n$ und $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n), \beta^n)$ ist kein vollständiger Maßraum.*

Für $n \geq 2$ kann man eine Menge in $\mathscr{M}^n \setminus \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ übrigens als $A \times \{0\}^{n-1}$ mit einer beliebigen nicht-Borelschen Teilmenge A von $\mathbb{R}$ konstruieren[20], beispielsweise kann man als A eine Vitali-Menge in $\mathbb{R}$ nehmen.

1.6 Äußere Maße, Beweis des Maßfortsetzungssatzes

Nun kommen wir zum eingangs erwähnten zweiten Zugang zur Maßtheorie.

Definition 1.30 (Äußere Maße). *Eine Abbildung*

$$\lambda\colon \mathscr{P}(\Omega) \to [0, \infty]$$

heißt ein äußeres Maß auf Ω, wenn $\lambda(\emptyset) = 0$ gilt und λ im folgenden Sinne monoton und σ-subadditiv ist:

- *Für $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$ gilt*

$$A \subset B \implies \lambda(A) \leq \lambda(B)\,,$$

- *für beliebige $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathscr{P}(\Omega)$ gilt*

$$\lambda\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i)\,.$$

Aus einem äußeren Maß lässt sich in folgender Weise ein Maß gewinnen:

Definition 1.31 (Carathéodory's Messbarkeitsdefinition). *Sei λ ein äußeres Maß über Ω. Eine Menge $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ heißt λ-messbar, wenn sie beliebige Testmengen T additiv zerlegt, wenn also für alle $T \in \mathscr{P}(\Omega)$ gilt:*

$$\lambda(T) = \lambda(T \cap A) + \lambda(T \setminus A)\,.$$

Wir bezeichnen die Menge der λ-messbaren Mengen mit $\mathscr{M}_\lambda$.

[19] Der *Beweis* des Cantorschen Satzes ist wunderschön und sei deshalb kurz ausgeführt: Sei A eine beliebige Menge und $f\colon A \to \mathscr{P}(A)$ eine beliebige Abbildung. Dann bilden wir $B := \{x \in A : x \notin f(x)\} \in \mathscr{P}(A)$. Gäbe es nun ein $a \in A$ mit $f(a) = B$, so müsste entweder $a \in B$ oder $a \notin B$ gelten. Im ersten Fall folgte aber $a \notin f(a) = B$ und im zweiten $a \in f(a) = B$, was jeweils einen Widerspruch ergibt. Daher gibt es kein $a \in A$ mit $f(a) = B$, f ist nicht surjektiv und erst recht nicht bijektiv. □

[20] An dieser Stelle verwenden wir, dass $\mathscr{B}(\mathbb{R}\times\{0\}^{n-1}) = \mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \cap \mathscr{P}(\mathbb{R}\times\{0\}^{n-1})$ gemäß einer Bemerkung aus Abschnitt 1.4 gilt.

Satz 1.32 (von C. Carathéodory, ∼1914)**.** *Sei λ ein äußeres Maß über Ω. Dann ist $\mathscr{M}_\lambda$ eine σ-Algebra und $\lambda|_{\mathscr{M}_\lambda}$ ist ein vollständiges Maß auf $(\Omega, \mathscr{M}_\lambda)$.*

Beweis. Sind $A_1, A_2 \in \mathscr{M}_\lambda$, so findet man durch jeweils zweimalige Anwendung der Messbarkeitsdefinition und der σ-Subadditivität von λ für jede Testmenge $T \in \mathscr{P}(\Omega)$ (beachte $((T \cap A_1) \setminus A_2) \cup (T \setminus A_1) = T \setminus (A_1 \cap A_2)$):

$$\begin{aligned}\lambda(T) = \lambda(T \cap A_1) + \lambda(T \setminus A_1) &= \lambda(T \cap A_1 \cap A_2) + \lambda((T \cap A_1) \setminus A_2) + \lambda(T \setminus A_1)\\ &\geq \lambda(T \cap A_1 \cap A_2) + \lambda(T \setminus (A_1 \cap A_2)) \geq \lambda(T)\,.\end{aligned}$$

Insbesondere stimmt der Ausdruck zwischen den beiden Ungleichheitszeichen mit $\lambda(T)$ überein, es gilt $A_1 \cap A_2 \in \mathscr{M}_\lambda$ und $\mathscr{M}_\lambda$ ist bezüglich endlichem Durchschnitt abgeschlossen. Man sieht leicht, dass $\mathscr{M}_\lambda$ bezüglich Komplementbildung und folglich auch bezüglich endlicher Vereinigung abgeschlossen ist. Zeigen wir noch, dass $\mathscr{M}_\lambda$ auch unter abzählbarer Vereinigung *disjunkter* Mengen abgeschlossen ist, so folgt, dass $\mathscr{M}_\lambda$ eine σ-Algebra ist (denn für beliebige Mengen $B_i \in \mathscr{M}_\lambda$ ist dann auch $\bigcup_{i=1}^\infty B_i = \bigcup_{i=1}^\infty \left[B_i \cap (\Omega \setminus B_{i-1}) \cap \ldots \cap (\Omega \setminus B_2) \cap (\Omega \setminus B_1)\right] \in \mathscr{M}_\lambda$). Zeigen wir außerdem σ-Additivität von $\lambda|_{\mathscr{M}_\lambda}$, so folgt sofort, dass $\lambda|_{\mathscr{M}_\lambda}$ ein vollständiges Maß ist.

Insgesamt reicht es daher aus zu zeigen, dass für disjunkte $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathscr{M}_\lambda$ stets

$$A := \bigcup_{i=1}^\infty A_i \in \mathscr{M}_\lambda \qquad \text{und} \qquad \lambda(A) = \sum_{i=1}^\infty \lambda(A_i)$$

gelten. Dazu seien $T \in \mathscr{P}(\Omega)$ und $k \in \mathbb{N}$. Wir rechnen mit Carathéodory's Messbarkeitsdefinition für die A_i induktiv nach:

$$\begin{aligned}\lambda\Big(T \cap \bigcup_{i=1}^k A_i\Big) &= \lambda(T \cap A_1) + \lambda\Big(T \cap \bigcup_{i=2}^k A_i\Big)\\ &= \lambda(T \cap A_1) + \lambda(T \cap A_2) + \lambda\Big(T \cap \bigcup_{i=3}^k A_i\Big)\\ &= \ldots = \sum_{i=1}^k \lambda(T \cap A_i)\,.\end{aligned}$$

Da wir $\bigcup_{i=1}^k A_i \in \mathscr{M}_\lambda$ wissen, folgt

$$\lambda(T) = \lambda\Big(T \setminus \bigcup_{i=1}^k A_i\Big) + \lambda\Big(T \cap \bigcup_{i=1}^k A_i\Big) \geq \lambda(T \setminus A) + \sum_{i=1}^k \lambda(T \cap A_i)\,.$$

Jetzt machen wir den Grenzübergang $k \to \infty$ und erhalten

$$\lambda(T) \geq \lambda(T \setminus A) + \sum_{i=1}^\infty \lambda(T \cap A_i) \geq \lambda(T \setminus A) + \lambda(T \cap A) \geq \lambda(T)\,,$$

wobei die letzten beiden Ungleichungen Konsequenzen der σ-Subadditivität von λ sind. Aus dieser Ungleichungskette liest man einerseits $A \in \mathscr{M}_\lambda$ und mit der speziellen Wahl $T = A$ andererseits $\lambda(A) = \sum_{i=1}^\infty \lambda(A_i)$ ab. □

Umgekehrt gibt der nächste Satz uns ein sehr allgemeines Verfahren zur Konstruktion von äußeren Maßen durchs abzählbare Überdeckungen an die Hand. Insbesondere können wir damit jedes Maß zu einem äußeren Maß fortsetzen.

Satz 1.33 (über die **Carathéodory-Konstruktion**). *Sei $\mathscr{S}$ (irgend)eine Teilmenge von $\mathscr{P}(\Omega)$ mit $\emptyset \in \mathscr{S}$ und $\eta\colon \mathscr{S} \to [0,\infty]$ eine Funktion mit $\eta(\emptyset) = 0$. dann definiert die Festlegung*

$$\eta^*(A) := \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \eta(S_j) \,:\, S_j \in \mathscr{S} \text{ und } A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j \right\}$$

(mit der Konvention $\inf\emptyset = \infty$) eine äußeres Maß η^* auf Ω mit $\eta^*|_{\mathscr{S}} \leq \eta$.

Ist η ein Prämaß auf einem Halbring $\mathscr{H}$ über Ω, so gilt sogar $\eta^*|_{\mathscr{H}} = \eta$ und jede Menge aus $\mathscr{H}$ ist η^*-messbar, also ist $\mathscr{H} \subset \mathscr{M}_{\eta^*}$ und folglich $\sigma(\mathscr{H}) \subset \mathscr{M}_{\eta^*}$.

Bemerkungen.

- *Für jedes Mengensystem $\mathscr{A}$ mit $\mathscr{S} \subset \mathscr{A}$ gilt*[21] *$\left(\eta^*|_{\mathscr{A}}\right)^* = \eta^*$; in diesem Sinne ändert eine zweite Anwendung der Carathéodory-Konstruktion also nichts mehr.*

- *Ist η ein Prämaß auf einem Halbring, so kann man sich in der Definition von η^* auf die Betrachtung disjunkter S_j beschränken.*

- *Ist $\eta\colon \mathscr{A} \to [0,\infty]$ monoton und σ-subadditiv auf einer σ-Algebra $\mathscr{A}$, so lässt sich die Definition von η^* vereinfachen*[22] *zu*

  $$\eta^*(A) = \min\{\eta(B) \,:\, B \in \mathscr{A} \text{ und } A \subset B\}\,.$$

  Insbesondere trifft dies stets zu, wenn η ein Maß ist.

Modellbeispiel (Teil IV). *In unserem* **Modellbeispiel** *ist*

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \{1,2,3\} \cap A = \emptyset \\ 1 & \text{wenn } \{1,2,3\} \cap A = \{1\} \\ 13 & \text{wenn } \{1,2,3\} \cap A = \{2\} \text{ oder } = \{3\} \text{ oder } = \{2,3\} \\ 14 & \text{wenn } \{1,2,3\} \cap A = \{1,2\} \text{ oder } = \{1,3\} \text{ oder } = \{1,2,3\} \end{cases}$$

Insbesondere ist

$$\mu^*(\{2\}) = \mu^*(\{3\}) = 13 = \mu^*(\{2,3\})$$

und

$$\mu^*(\{4\}) = \mu^*(\{5\}) = 0 = \mu^*(\{4,5\})\,,$$

weshalb $\mathscr{M}_{\mu^*}$ mit $\mathscr{M}_\mu$ aus Teil III übereinstimmt; vergleiche Satz 1.36 unten.

[21] Dabei ergibt sich '$\geq$', wenn man in der Definition von $\left(\eta^*|_{\mathscr{A}}\right)^*$ benutzt, dass η^* ein äußeres Maß ist. Und ausgehend von $\eta^*|_{\mathscr{S}} \leq \eta$ erhält man $\left(\eta^*|_{\mathscr{A}}\right)^* \leq \left(\eta^*|_{\mathscr{S}}\right)^* \leq \eta^*$ und damit '$\leq$'.

[22] Um zu sehen, dass das Minimum realisiert wird, schneidet man die Mengen einer Minimalfolge und nutzt die Monotonie von η.

Definition & Bemerkung 1.34 (**Reguläre äußere Maße**). *Sei λ ein äußeres Maß über Ω und $\mathscr{R} \subset \mathscr{M}_\lambda$. Dann nennt man λ ein $\mathscr{R}$-reguläres äußeres Maß, wenn für alle $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ gilt:*

$$\lambda(A) = \inf\{\lambda(R) \,:\, R \in \mathscr{R} \text{ und } A \subset R\}\,.$$

Als reguläres äußeres Maß bezeichnet man ein $\mathscr{M}_\lambda$-reguläres äußeres Maß λ.

Aus der vorigen Bemerkung entnehmen wir, dass das für das äußere Maß η^* aus Satz 1.33 stets

$$\eta^*(A) = \left(\eta^*|_{\sigma(\mathscr{S})}\right)^*(A) = \min\{\eta^*(S) \,:\, S \in \sigma(\mathscr{S}) \text{ und } A \subset S\}$$

gilt. Ist η ein Prämaß auf einem Halbring $\mathscr{H} = \mathscr{S}$, so ist η^* wegen $\sigma(\mathscr{H}) \subset \mathscr{M}_{\eta^*}$ also stets $\sigma(\mathscr{H})$-regulär (und insbesondere regulär).

Beweis des Satzes. Monotonie von η^* und die Ungleichung $\eta^*|_{\mathscr{S}} \leq \eta$ sind klar, die σ-Subadditivität von η^* weisen wir für $A_1, A_2, A_3 \ldots \in \mathscr{P}(\Omega)$ mit dem $\frac{\varepsilon}{2^i}$-Trick folgendermaßen nach: Wir können ohne Einschränkung $\eta^*(A_i) < \infty$ für alle $i \in \mathbb{N}$ annehmen. Dann gibt es zu beliebigem $\varepsilon > 0$ und A_i stets $S_{i,j} \in \mathscr{S}$ mit $A_i \subset \bigcup_{j=1}^\infty S_{i,j}$ und

$$\sum_{j=1}^\infty \eta(S_{i,j}) \leq \eta^*(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}\,.$$

Wegen $\bigcup_{i=1}^\infty A_i \subset \bigcup_{i,j=1}^\infty S_{i,j}$ ist

$$\eta^*\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) \leq \sum_{i,j=1}^\infty \eta(S_{i,j}) \leq \sum_{i=1}^\infty \left[\eta^*(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}\right] = \sum_{i=1}^\infty \eta^*(A_i) + \varepsilon\,.$$

Damit ist η^* ein äußeres Maß.

Ist η ein Prämaß auf einem Halbring $\mathscr{H}$, so beweisen wir die η^*-Messbarkeit einer Menge $A \in \mathscr{H}$ so: Seien $T \in \mathscr{P}(\Omega)$ und $S_j \in \mathscr{H}$ mit $T \subset \bigcup_{j=1}^\infty S_j$. Dann nutzen wir die Halbringeigenschaft von $\mathscr{H}$ und schreiben $S_j \setminus A = \bigcup_{i=1}^{k_j} H_i^j$ mit disjunkten $H_1^j, H_2^j, \ldots, H_{k_j}^j \in \mathscr{H}$. Mit der Additivität von η und der Definition von η^* erhalten wir erst

$$\sum_{j=1}^\infty \eta(S_j) = \sum_{j=1}^\infty \eta(S_j \cap A) + \sum_{j=1}^\infty \sum_{i=1}^{k_j} \eta(H_i^j) \geq \eta^*(T \cap A) + \eta^*(T \setminus A)$$

und dann

$$\eta^*(T) \geq \eta^*(T \cap A) + \eta^*(T \setminus A)\,.$$

In Anbetracht der Subadditivität von η^* zeigt dies die η^*-Messbarkeit von A.

Schließlich ist noch zu zeigen, dass für $A, S_1, S_2, S_3, \ldots \in \mathscr{H}$ mit $A \subset \bigcup_{j=1}^\infty S_j$ gilt:

$$\sum_{j=1}^\infty \eta(S_j) \geq \eta(A)\,.$$

Der Beweis dieser Ungleichung ist dem letzten Schritt im Beweis von Satz 1.9 (Nachweises der σ-Subadditivität des Lebesgueschen Prämaßes) sehr ähnlich und sei hier nur skizziert: Wir setzen $A_j := A \cap S_j \in \mathscr{H}$ und schreiben mit Lemma 1.10

$$A_j \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{j-1}) = \bigcup_{i=1}^{k_j} H_i^j$$

mit disjunkten $H_1^j, H_2^j, \ldots, H_{k_j}^j \in \mathscr{H}$. Dann folgt mit Lemma 1.10 und der σ-Additivität von η

$$\sum_{j=1}^{\infty} \eta(S_j) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \eta(A_j) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k_j} \eta(H_i^j) = \eta(A)\,. \qquad \square$$

Nun können wir problemlos den ersten Teil des Maßfortsetzungssatzes aus Abschnitt 1.3 beweisen:

Beweis des Existenzteils von Satz 1.12. Sei $\eta\colon \mathscr{H} \to [0,\infty]$ ein Prämaß auf einem Halbring $\mathscr{H}$ über Ω. Wir verwenden die Carathéodory-Konstruktion und schränken anschließender auf $\sigma(\mathscr{H})$ ein: Aus Satz 1.33 wissen wir zunächst, dass η^* ein äußeres Maß ist mit $\eta^*|_{\mathscr{H}} = \eta$ und $\sigma(\mathscr{H}) \subset \mathscr{M}_{\eta^*}$. Nach Satz 1.32 ist dann $\eta^*|_{\mathscr{M}_{\eta^*}}$ und erst recht $\eta^*|_{\sigma(\mathscr{H})}$ eine Fortsetzung von η zu einem Maß. $\square$

Für den zweiten Teil des Maßfortsetzungssatzes benutzen wir folgendes Eindeutigkeitslemma für äußere Maße:

Lemma 1.35. *Sei $\eta\colon \mathscr{H} \to [0,\infty]$ ein σ-endliches Prämaß auf einem Halbring $\mathscr{H}$ über Ω und μ eine Fortsetzung von η zu einem Maß auf $(\Omega, \mathscr{A})$ mit $\mathscr{H} \subset \mathscr{A} \subset \mathscr{M}_{\eta^*}$ Dann gilt $\mu^* = \eta^*$.*

Proof. Mit Satz 1.33 sieht man problemlos, dass $\mu^* \leq \eta^*$ und $\mu^*|_{\mathscr{H}} = \eta = \eta^*|_{\mathscr{H}}$ gelten.

Als Nächstes weisen wir $\eta^*(A) \leq \mu(A)$ für alle $A \in \mathscr{A}$ mit $\eta^*(A) < \infty$ nach. Für solche A und $\varepsilon > 0$ gibt es $S_1, S_2, S_3, \ldots \in \mathscr{H}$ mit $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j$ und

$$\sum_{j=1}^{\infty} \eta(S_j) \leq \eta^*(A) + \varepsilon\,.$$

Wir können annehmen an, dass die S_j disjunkt sind (sonst wende wie früher Lemma 1.10 an auf $S_j \setminus (S_{j-1} \cup \ldots \cup S_2 \cup S_1)$) und erhalten mit der σ-Additivität von η^* auf den messbaren Mengen $A, S_j \in \mathscr{M}_{\eta^*}$:

$$\mu^*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j \setminus A\Big) \leq \eta^*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j \setminus A\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \eta^*(S_j) - \eta^*(A) \leq \varepsilon\,.$$

Wegen $\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j \in \sigma(\mathscr{H}) \subset \mathscr{A}$ folgt

$$\eta^*(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \eta(S_j) = \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j\Big) = \mu(A) + \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j \setminus A\Big) \leq \mu(A) + \varepsilon\,.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebeg war, muß $\eta^*(A) \leq \mu(A)$ gelten. Unter Verwendung der σ-Endlichkeitsvoraussetzung folgt $\eta^*|_{\mathscr{A}} \leq \mu$. Und mit der ersten Bemerkung nach Satz 1.33 erhalten wir schließlich $\eta^* = (\eta^*|_{\mathscr{A}})^* \leq \mu^*$. $\square$

Beweis des Eindeutigkeitsteils von Satz 1.12. Es sei $\eta\colon \mathscr{H} \to [0,\infty]$ ein σ-endliches Prämaß auf einem Halbring $\mathscr{H}$ über Ω und μ eine Fortsetzung von η zu einem Maß auf $(\Omega, \sigma(\mathscr{H}))$. Nach Satz 1.33 gelten $\mu = \mu^*|_{\sigma(\mathscr{H})}$ und $\sigma(\mathscr{H}) \subset \mathscr{M}_{\eta^*}$. Aus der letzten Inklusion erhalten wir mit dem vorausgehenden Lemma $\mu^* = \eta^*$, also insgesamt $\mu = \eta^*|_{\sigma(\mathscr{H})}$. Dies zeigt die Eindeutigkeit von μ. $\square$

Unsere Terminologie für die neueingeführte σ-Algebra $\mathscr{M}_\lambda$ unterscheidet sich von der für die σ-Algebra $\mathscr{M}_\mu$ aus Abschnitt 1.5 nur dadurch, dass einmal ein äußeres Maß und einmal ein Maß als Index auftritt. Diese Ähnlichkeit der Bezeichnungen ist aber dadurch gerechtfertigt, dass die beiden zugehörigen Konzepte messbarer Mengen im Wesentlichen übereinstimmen: Ist einerseits λ ein äußeres Maß und $\mu := \lambda|_{\mathscr{M}_\lambda}$ das vollständige Maß des Satzes 1.32, so gilt $\mathscr{M}_\lambda = \mathscr{M}_\mu$ trivial. Beginnen wir andererseits mit einem σ-endlichen Maß μ und betrachten die Carathéodory-Konstruktion $\lambda := \mu^*$, so gilt $\mathscr{M}_\lambda = \mathscr{M}_\mu$ gemäß dem folgenden Satz ebenfalls.

Satz 1.36. *Sei μ ein σ-endliches*[23] *Maß auf $(\Omega, \mathscr{A})$ und μ^* das äußere Maß des Satzes 1.33. Dann ist $(\Omega, \mathscr{M}_{\mu^*}, \mu^*|_{\mathscr{M}_{\mu^*}})$ die Vervollständigung von $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$.*

Beweis des Satzes. Gemäß Satz 1.32 ist $(\Omega, \mathscr{M}_{\mu^*}, \mu^*|_{\mathscr{M}_{\mu^*}})$ ein vollständiger Maßraum und nach Satz 1.33 ist $\mathscr{A} \subset \mathscr{M}_{\mu^*}$ und $\mu^*|_{\mathscr{A}} = \mu$. Mit der Bemerkung zur Minimalität der Vervollständigung folgen daher $\mathscr{M}_\mu \subset \mathscr{M}_{\mu^*}$ und $\mu^*|_{\mathscr{M}_\mu} = \overline{\mu}$. Um auch die umgekehrte Inklusion $\mathscr{M}_{\mu^*} \subset \mathscr{M}_\mu$ zu zeigen, betrachten wir ein $A \in \mathscr{M}_{\mu^*}$ und mit Hilfe der σ-Endlichkeit reduzieren wir auf den Fall $\mu^*(A) < \infty$. Nach den auf Satz 1.33 folgenden Bemerkungen gibt es ein $B \in \mathscr{A}$ mit $A \subset B$ und $\mu^*(A) = \mu(B) = \mu^*(B)$. Mit derselben Begründung gibt es ein $C \in \mathscr{A}$ mit $B \setminus A \subset C$ und $\mu^*(B \setminus A) = \mu(C)$. Mit dem Carathéodory's Messbarkeitsdefinition und der Endlichkeit von $\mu^*(A)$ erhalten wir

$$0 = \mu^*(B) - \mu^*(A) = \mu^*(B \setminus A) = \mu^*(C)\,,$$

$A \cap C$ ist Teilmenge einer μ-Nullmenge und $A = (A \setminus C) \cup (A \cap C)$ ist in $\mathscr{M}_\mu$. $\square$

Insgesamt ergibt sich aus den Resultaten dieses Abschnitts die folgende Korrespondenz zwischen den beiden Zugängen zur Maßtheorie:

Korollar 1.37 (Korrespondenz zwischen Maßen und äußeren Maßen). *Die Carathéodory-Konstruktion $(\Omega, \mathscr{A}, \mu) \mapsto \mu^*$ ist eine Bijektion von den σ-endlichen, vollständigen Maßräumen auf die σ-endlichen*[24]*, regulären äußeren*

[23] Auf die σ-Endlichkeitsvoraussetzung kann nicht verzichtet werden. Ist nämlich $\mathscr{A}$ die σ-Algebra $\{A \in \mathscr{P}(\Omega) \ :\ A \text{ oder } \Omega \setminus A \text{ ist abzähbar}\}$, so ist $(\Omega, \mathscr{A}, \xi|_{\mathscr{A}})$ mit dem Zählmaß ξ vollständig, also seine eigene Vervollständigung. Aber für $(\xi|_{\mathscr{A}})^* = \xi$ ist die σ-Algebra seiner messbaren Mengen $\mathscr{M}_\xi = \mathscr{P}(\Omega)$ bei überabzählbarem Ω echt größer als $\mathscr{A}$.

[24] Für äußere Maße haben wir σ-Endlichkeit noch nicht definiert, deshalb hier die zu (Prä-)Maßen analoge Definition: Eine äußeres Maß λ über Ω heißt σ-endlich, wenn es $E_1, E_2, E_3, \ldots \in \mathscr{P}(\Omega)$ gibt mit $\lambda(E_i) < \infty$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $\bigcup_{i=1}^\infty E_i = \Omega$.

Maße über Ω. Die Umkehrung dieser Bijektion ist gerade die Einschränkung $\lambda \mapsto \left(\Omega, \mathscr{M}_\lambda, \lambda|_{\mathscr{M}_\lambda}\right)$.

Als abschließende Folgerung dieses Kapitels halten wir noch fest:

Korollar & Definition 1.38 (Äußeres Lebesgue-Maß). *Die äußeren Maße $(\eta^n)^*$, $(\beta^n)^*$ und $(\mathscr{L}^n)^*$ stimmen überein. Dieses äußere Maß heißt das (n-dimensionale) äußere Lebesgue-Maß und wir mit ℓ^n bezeichnet. Die σ-Algebra seiner messbaren Mengen ist die σ-Algebra $\mathscr{M}^n$ aus Definition 1.25.*

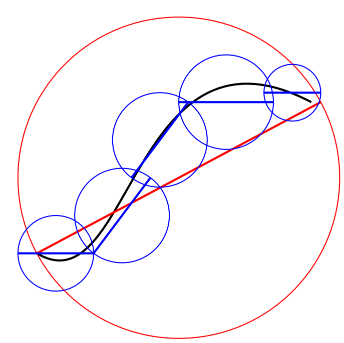
Beweis. Die Gleichheit $(\eta^n)^* = (\beta^n)^*$ ergibt sich durch Anwendung von Lemma 1.35 auf η^n und β^n. Mit Satz 1.36 für β^n erhalten wir außerdem $\mathscr{M}^n = \mathscr{M}_{(\beta^n)^*}$. In Anbetracht dieser Gleichheit können wir Lemma 1.35 auch für β^n und $\mathscr{L}^n$ verwenden und bekommen noch $(\beta^n)^* = (\mathscr{L}^n)^*$. □

1.7 Hausdorff-Maße und metrische äußere Maße

Wir kehren zurück zum Problem des k-dimensionalen Inhalts von Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Für $k = 0$ und $k = n$ können wir den solche Inhalte mit dem Zählmaß und den verschiedenen Varianten des Lebesgueschen Maßes schon messen. Nun wollen wir aber beliebige $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ betrachten.

Die Hausdorffsche Idee hierzu ist eine Variante der Carathéodory-Konstruktion: Man überdeckt $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ mit n-dimensionalen Kugeln, summiert die Inhalte der ***k*-dimensionalen Äquatorebenen** und bringt derart den k-dimensionalen Inhalt von $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ in Verbindung mit dem Ausdruck

$$\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \omega_k r_i^k \,:\, A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B^n_{r_i}(x_i)\right\},$$



Gute und schlechte Näherungen an die Kurvenlänge

wobei $B^n_{r_i}(x_i)$ die offene Kugel[25] um x_i mit Radius r_i in $\mathbb{R}^n$ bezeichnet und die positive Konstante ω_k das Volumen der k-dimensionalen Einheitskugel, also $\omega_k := \beta^k(B^k_1(y))$ für[26] $y \in \mathbb{R}^k$. Dabei gilt natürlich $\omega_1 = 2$ und am Ende von Abschnitt 2.4 werden wir $\omega_2 = \pi$ und $\omega_3 = \frac{4}{3}\pi$ sehen (passend zu den elementargeometrischen Formeln für Kreisfläche und Kugelvolumen), und allgemeiner die Formel $\omega_k = \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2}+1)}$ mit der Gammafunktion Γ.

Bei Verwendung großer Kugeln liefert dieser Ansatz allerdings einen zu kleinen Flächeninhalt gekrümmter Flächen (rote Linie im Bild). Erzwingt man jedoch, wie in der folgenden Definition, Kleinheit der Radien, so kann man das Konzept auf metrischen Räumen Ω und auch für nichtganzzahlige Werte s anstelle von k verwenden. Motiviert durch obige Formel für

[25] $r_i = 0$ und damit $B^n_{r_i}(x_i) = \emptyset$ ist hier erlaubt.

[26] Die Definition von ω_k hängt wegen der Translationsinvarianz von β^k nicht von $y \in \mathbb{R}^k$ ab.

ω_k verwendet man dabei auch für beliebiges $s \in [0,\infty[$ den positiven Vorfaktor

$$\omega_s := \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)}\,.$$

Satz & Definition 1.39 (Hausdorff-Maße). *Sei Ω ein metrischer Raum mit Metrik d, $s \in [0,\infty[$ eine beliebige nicht-negative Zahl und $\delta > 0$. Für $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ setzen wir*

$$h^s_\delta(A) := \inf\left\{ \sum_{i=1}^\infty \omega_s r_i^s \,:\, 0 \le r_i < \delta \text{ und } A \subset \bigcup_{i=1}^\infty B^\Omega_{r_i}(x_i) \right\}$$

mit offenen Kugeln $B^\Omega_r(x) := \{y \in \Omega \,:\, d(x,y) < r\}$ und

$$h^s(A) := \lim_{\delta \searrow 0} h^s_\delta(A)\,.$$

Dann sind h^s_δ und h^s äußere Maße über Ω und h^s heißt das s-dimensionale (sphärische) äußere Hausdorff-Maß auf Ω. Nach Satz 1.32 ist $h^s\big|_{\mathscr{M}_{h^s}}$ ein vollständiges Maß auf $(\Omega, \mathscr{M}_{h^s})$, welches wir das s-dimensionale (sphärische) Hausdorff-Maß $\mathscr{H}^s$ auf Ω nennen.

Bemerkungen.

- *$\mathscr{H}^s(A)$ interpretiert man als s-dimensionalen Inhalt von $A \in \mathscr{M}_{\mathscr{H}^s}$. Für ganzzahliges k werden wir später sehen, das man $\mathscr{H}^k(A)$ (mit Hilfe von Integralen) ausrechnen kann und dabei sinnvolle Werte erhält; siehe 2.7.*

- *Die Definition von h^s_δ ist ein Spezialfall der Carathéodory-Konstruktion: Definiert man eine Mengenfunktion k^s_δ auf dem System aller Kugeln in Ω durch $k^s_\delta(B^\Omega_r(x)) := w_s r^s$, so ist $h^s_\delta = (k^s_\delta)^*$.*

- *Offensichtlich hängt $h^s_\delta(A)$ nichtwachsend von $\delta>0$ ab und deshalb ist $h^s(A) = \sup_{\delta>0} h^s_\delta(A)$.*

- *Im Falle $\Omega = \mathbb{R}^n$ liest man aus der Definition Bewegungsinvarianz[27] $h^s(b + TA) = h^s(A)$ für $T \in \mathcal{O}(n)$ und Skalierungsverhalten $h^s(rA) = r^s h^s(A)$ der Hausdorff-Maße ab.*

- *In der Literatur sind auch verschiedene Varianten der Definition gebräuchlich. Beispielsweise kann man auch mit beliebigen Mengen statt nur mit Kugeln überdecken und ersetzt in den Näherungssummen dann r_i durch den (halben) Durchmesser der überdeckenden Mengen. Solche Varianten führen auf "gutartigen" Mengen zum gleichen Wert des Maßes, aber auf "exotischen" Mengen kann es Unterschiede geben. Eine tiefergehende Diskussion der Hausdorff-Maße und solcher Effekte findet man in [4, 6].*

[27] Anders als bei unserer Definition des Lebesgue-Maßes folgt Rotationsinvarianz hier problemlos. Dies liegt daran, dass wir jetzt vom rotationsinvarianten Mengensystem aller Kugeln statt dem System aller Quader ausgegangen sind.

Beweis des Satzes. Es ist nur zu begründen, dass h^s_δ und h^s äußere Maße sind. Für h^s_δ folgt dies unmittelbar aus Satz 1.33 und für h^s zeigen wir es jetzt: Für $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathscr{P}(\Omega)$ ist

$$h^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{\delta\searrow 0} h^s_\delta\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \lim_{\delta\searrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} h^s_\delta(A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} h^s(A_i)\,.$$

Somit ist h^s σ-subadditiv. Monotonie von h^s zeigt man analog und damit ist h^s ein äußeres Maß □

Satz 1.40. *In Spezialfällen ergeben sich uns bereits bekannte Maße:*

- *Für jeden metrischen Raum Ω ist $h^0 = \mathscr{H}^0$ gleich dem Zählmaß ξ auf Ω,*
- *im Falle $\Omega = \mathbb{R}^n$ ist $h^s = \mathscr{H}^s$ für $s > n$ das Nullmaß, h^n ist das äußere n-dimensionale Lebesgue-Maß und $\mathscr{H}^n$ ist das Lebesgue-Maß*[28].

Beweis. Ist $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ endlich und $d_A := \min\{d(x,y) : x \neq y \text{ in } A\}$, so folgt $h^0_\delta(A) = \xi(A)$ für $\delta \leq \frac{1}{2}d_A$. Mit Monotonie ergibt sich daraus die Behauptung $h^0 = \xi$. Insbesondere sind alle Mengen h^0-messbar und $\mathscr{H}^0 = h^0$.

Im Falle $\Omega = \mathbb{R}^n$ überdecken wir für $M \in \mathbb{N}$ den Einheitsquader $[0,1[^n$ durch die M^n Kugeln $B^n_{\sqrt{n}/M}(x/M)$ mit $x \in \{0,1,2,\ldots,M-1\}^n$. Es folgt

$$h^s([0,1[^n) = \lim_{M\to\infty} h^s_{\sqrt{n}/M}([0,1[^n) \leq \lim_{M\to\infty} M^n \omega_s(\sqrt{n}/M)^s = 0$$

für $s > n$. Wegen der Translationsinvariant von h^s folgt $h^s = \mathscr{H}^s \equiv 0$ für $s > n$.

Etwas aufwendiger ist der Nachweis von $h^n = \ell^n$ und $\mathscr{H}^n = \mathscr{L}^n$: Wir erinnern uns dazu an $\omega_n = \beta^n(B^n_1(y))$ und erhalten mit dem Skalierungsverhalten von β^n schon $\omega_n r_i^n = \beta^n(B^n_{r_i}(x_i))$. Verwendet man diese Gleichheit in der Definition von h^n_δ, so liest man sofort $h^n_\delta \geq (\beta^n)^*$ ab. Für den Fall von Kugeln sieht man außerdem (durch Überdeckung mit der Kugel selbst und abzählbar vielen leeren Mengen) $h^n_\delta(B^n_r(x)) \leq \beta^n(B^n_r(x))$. Es folgt $h^n_\delta(B^n_r(x)) = \beta^n(B^n_r(x))$ und daher auch $h^n(B^n_r(x)) = \beta^n(B^n_r(x))$. Durch Betrachtung der ein- und der umbeschriebenen Kugel überlegen wir uns, dass $N := h^n([0,1[^n)$ positiv und endlich ist. Jetzt verwenden wir schon die Inklusion $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{M}_{h^n}$, die wir erst in Korollar 1.45 zeigen werden. Gemäß dieser Aussage ist $\frac{1}{N}h^n|_{\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)}$ ein translationsinvariantes Maß auf $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$ mit $\frac{1}{N}h^n([0,1[^n) = 1$, nach dem Eindeutigkeitssatz 1.19 also $\frac{1}{N}h^n|_{\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)} = \beta^n$. Wegen des obigen Verhaltens auf Kugeln ist aber $N = 1$. Da wir außerdem $h^n \geq h^n_\delta \geq (\beta^n)^*$ wissen, ist h^n_δ auf $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ unabhängig von δ und stimmt mit h^n überein. Mit der ersten Bemerkung zur Carathéodory-Konstruktion folgt:

$$(\beta^n)^* = (h^n|_{\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)})^* = (h^n_\delta|_{\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)})^* = ((k^n_\delta)^*|_{\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)})^* = (k^n_\delta)^* = h^n_\delta\,.$$

Folglich ist $h^n = h^n_\delta = \ell^n$ und $\mathscr{H}^n = \mathscr{L}^n$. □

[28] Die Gleichheit $\mathscr{L}^n = \mathscr{H}^n$ zeigt, dass man bei der Definition des Lebesgue-Maßes auch von Kugeln statt — wie wir — von Quadern ausgehen kann. Der Zugang über Kugeln hat sowohl Vor- als auch Nachteile: Einerseits sind Rotationsinvarianz und Zusammenhänge mit den Hausdorff-Maßen viel leichter einzusehen. Andererseits ist das System aller Kugeln kein Halbring, man kann den Fortsetzungssatz nicht verwenden und der Beweis des Eindeutigkeitssatzes wird erschwert.

Korollar 1.41 (über **Bewegungsinvarianz des Lebesgueschen Maßes**). *Das Lebesgue-Borelsche Maß β^n, die σ-Algebra $\mathscr{M}^n$ der Lebesgue-messbaren Mengen, das Lebesguesche Maß $\mathscr{L}^n$ und das äußere Lebesgue-Maß ℓ^n sind alle bewegungsinvariant.*

Bemerkungen. *Zwei grundlegende Eigenschaften der Hausdorff-Maße sind:*

- *Die Einschränkung von h^k auf einen k-dimensionalen Unterraum V von $\mathbb{R}^n$ gibt das äußere Lebesgue-Maß ℓ^k in folgendem Sinne: Ist $T\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Isometrie*[29] *mit $V = T(\mathbb{R}^k)$, so gilt*[30] $h^k(T(A)) = \ell^k(A)$ *für alle $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^k)$.*

- *Sei $A \in \mathscr{P}(\Omega)$. Für das Maß des Bildes $f(A)$ unter einer Lipschitz-Abbildung $f\colon A \to X$ in einen weiteren metrischen Raum X gilt die fundamentale Schranke*[31]

$$h^s(f(A)) \leq (\operatorname{Lip} f)^s h^s(A)\,.$$

Außerdem führen Hausdorff-Maße zu einem sehr allgemeinen Dimensionsbegriff. Wir werden dieses Konzept nicht weiter verwenden, wollen aber zumindest die Definition kurz festhalten:

Definition & Bemerkung 1.42 (**Hausdorff-Dimension**). *Sei Ω ein metrischer Raum. Aus der Definition von h^s folgt, dass es zu jedem $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ eine eindeutig bestimmte Zahl $d \in [0,\infty[$ gibt mit $h^s(A) = \infty$ für alle $s \in [0,d[$ und $h^s(A) = 0$ für alle $s \in]d,\infty[$. Diese Zahl d nennt man die Hausdorff-Dimension von A. Nach einem Satz von F. Hausdorff (∼1919) gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ und zu jedem — auch zu nicht-ganzzahligem*[32] *— $s \in [0,n]$ eine Menge in $\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ mit Hausdorff-Dimension s.*

Wünschenswert ist natürlich, dass die σ-Algebren $\mathscr{M}_{h^s} = \mathscr{M}_{\mathscr{H}^s}$ der $\mathscr{H}^s$-messbaren Mengen möglichst groß sind und alle "vernünftigen" Mengen enthalten. Dies lässt sich mit Hilfe des Begriffs des metrischen äußeren Maßes sicherstellen:

Definition 1.43 (**Metrische äußere Maße**). *Sei Ω ein metrischer Raum mit Metrik d. Ein äußeres Maß λ über Ω heißt ein metrisches äußeres Maß, wenn für alle $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$ mit $A \neq \emptyset \neq B$ gilt:*

$$\operatorname{dist}(A,B) > 0 \implies \lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B)\,.$$

[29] Eine lineare Isometrie ist eine lineare Abbildung, die Skalarprodukte (und somit Längen und Winkel) invariant läßt. Jede Isometrie ist injektiv.

[30] Zum Beweis dieser Aussage überlegt man sich zuerst, dass man sich in der Definition von $h^k(TA)$ auf Kugeln mit Äquatorebenen in V beschränken kann. Solche Äquatorebenen sind T-Bilder gleichgroßer Kugeln in $\mathbb{R}^k$, daher gilt $h^k(TA) = h^k(A)$ und die Behauptung folgt aus dem vorigen Satz.

[31] Die behauptete Abschätzung folgt direkt aus der Definition von h^s, indem man zu (Überdeckungen mit) Kugeln $B^{\Omega}_{r_i}(x_i)$ in Ω die Kugeln $B^X_{(\operatorname{Lip} f)r_i}(f(x_i))$ in X betrachtet.

[32] Das bekannteste Beispiel einer Menge von nicht-ganzzahliger Hausdorff-Dimension ist die Cantor-Menge der mittleren Drittel in $\mathbb{R}$. Sie hat Hausdorff-Dimension $\frac{\log 2}{\log 3} \in]0,1[$.

Satz 1.44 (Carathéodory-Kriterium). *Sei λ ein äußeres Maß über einem metrisches Raum Ω. Genau dann gilt $\mathscr{B}(\Omega) \subset \mathscr{M}_\lambda$, wenn λ ein metrisches äußeres Maß ist.*

Korollar 1.45. *Sei Ω ein metrischer Raum und $s \in [0, \infty[$. Dann sind alle Borel-Mengen h^s-messbar, also $\mathscr{B}(\Omega) \subset \mathscr{M}_{h^s}$. Außerdem ist h^s ein Borel-reguläres äußeres Maß.*

Beweis des Korollars. Sind $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$ mit $A \neq \emptyset \neq B$ und $\operatorname{dist}(A, B) > 0$, so bei einer Überdeckung von $A \cup B$ durch Kugeln vom Radius $< \operatorname{dist}(A, B)$ jede Kugel nur eine der beiden Mengen A und B. Daher lässt sich jede solche Überdeckung auf naheliegende Weise in gleich geartete Überdeckungen von A und B zerlegen. Durch Verwendung dieser Zerlegung folgt erst $h^s_\delta(A \cup B) \geq h^s_\delta(A) + h^s_\delta(B)$ für $\delta \leq \operatorname{dist}(A, B)$ und dann $h^s(A \cup B) \geq h^s(A) + h^s(B)$. Wegen der Subadditivität von h^s ist h^s ein metrisches äußeres Maß, nach dem Satz ist also $\mathscr{B}(\Omega) \subset \mathscr{M}_{h^s}$.

Es bleibt zu begründen, dass h^s Borel-regulär ist. Dazu überlegen wir uns zuerst, dass es wegen $h^s_\delta = (k^s_\delta)^* = ((k^s_\delta)^*|_{\mathscr{B}(\Omega)})^* = (h^s_\delta|_{\mathscr{B}(\Omega)})^*$ zu jedem $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ ein $B \in \mathscr{B}(\Omega)$ gibt mit $A \subset B$ und $h^s_\delta(A) = h^s_\delta(B)$. Es folgt $h^s(A) = h^s(B)$ und h^s ist Borel-regulär. □

Beweis des Satzes. Seien $B(\Omega) \subset \mathscr{M}_\lambda$ und $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$ mit $A \neq \emptyset \neq B$ und $\delta := \operatorname{dist}(A, B) > 0$. Dann betrachten wir die offene Menge $U_\delta(A) := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, A) < \delta\}$. Nach Voraussetzung ist $U_\delta(A)$ messbar und mit Carathéodory's Messbarkeitsdefinition folgt:

$$\lambda(A \cup B) = \lambda((A \cup B) \cap U_\delta(A)) + \lambda((A \cup B) \setminus U_\delta(A)) = \lambda(A) + \lambda(B)\,.$$

Daher ist λ ein metrisches äußeres Maß.

Sei umgekehrt λ ein metrisches äußeres Maß und A eine abgeschlossene Teilmenge von Ω und $T \in \mathscr{P}(\Omega)$ mit $\lambda(T) < \infty$, dann erhalten wir aus der Voraussetzung

$$\eta(T) \geq \eta(T \cap A) + \eta(T \setminus U_{1/n}(A))\,.$$

Wir setzen nun $H_n := \big[T \cap U_{1/n}(A)\big] \setminus U_{1/(n+1)}(A)$ und benutzen, dass H_{2i} und H_{2j} — falls beide nicht-leer sind — stets positiven Abstand haben. Daraus erhalten wir mit der definierenden Eigenschaft des metrischen äußeren Maßes induktiv $\sum_{i=1}^n \lambda(H_{2i}) = \lambda(\bigcup_{i=1}^n H_{2i}) \leq \eta(T) < \infty$, und analog sehen wir $\sum_{i=1}^n \lambda(H_{2i+1}) = \lambda(\bigcup_{i=1}^n H_{2i+1}) \leq \eta(T) < \infty$. Folglich ist $\sum_{i=1}^\infty \lambda(H_i)$ konvergent. Da A abgeschlossen ist, ist $T \setminus A = T \setminus U_{1/n}(A) \cup \bigcup_{i=n}^\infty H_i$ und daher gibt σ-Subadditivität

$$\lambda(T \setminus A) \leq \lambda(T \setminus U_{1/n}(A)) + \sum_{i=n}^\infty \lambda(H_i)\,.$$

Insgesamt haben wir damit gezeigt, dass

$$\lambda(T) + \sum_{i=n}^\infty \lambda(H_i) \geq \lambda(T \cap A) + \lambda(T \setminus A)$$

gilt, wobei der Reihenrest links für $n \to \infty$ verschwindet. Die resultierende Ungleichung bleibt auch im Falle $\lambda(T) = \infty$ richtig und zusammen mit σ-Subadditivität folgt

$$\lambda(T) = \lambda(T \cap A) + \lambda(T \setminus A)$$

für alle $T \in \mathscr{P}(\Omega)$. Also ist jede abgeschlossene Menge A in $\mathscr{M}_\lambda$ und wir haben $\mathscr{B}(\Omega) \subset \mathscr{M}_\lambda$ gezeigt. □

1.8 Radon-Maße und Regularität von Maßen

Betrachtet man einen Grundraum Ω, der mehr Struktur als nur die einer Menge aufweist, so interessiert man sich oft für Maße, die sich mit dieser Struktur besonders gut vertragen. Oder mit etwas anderen Worten: Man studiert durch eine Verträglichkeitsbedingung besonders ausgezeichnete Maße. Typischerweise handelt es sich bei solchen Verträglichkeitsbedingungen übrigens um Kombinationen aus Bedingungen an das Maß selbst und an die zugrundegelegte σ-Algebra.

Als konkreteres Beispiel denken wir zuerst an einen (endlich-dimensionalen) Vektorraum Ω. Die Struktur ist dann die lineare Struktur von Ω und man kann Bewegungsinvarianz (sowohl des Maßes als auch der σ-Algebra) als eine Verträglichkeitsbedingung und bewegungsinvariante Maße als in gewisser Weise ausgezeichnet ansehen. Allerdings sind Translationsinvarianz und Rotationsinvarianz auch einzeln sinnvolle Bedingungen und insofern kann es durchaus mehrere verschiedene Klassen ausgezeichneter Maße geben.

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit Maßen auf topologischen Räumen Ω beschäftigen, die in gewisser Weise mit der Topologie von Ω verträglich sind. Die wichtigste Klasse solcher Maße sind die Radon-Maße, die durch ihr gutartiges Verhalten auf Kompakta bestimmt sind. Damit solch ein Konzept aber Sinn macht, müssen wir folgende Zusatzbedingungen an Ω stellen:

Definition 1.46 (Lokal- und σ-kompakte Hausdorff-Räume). *Sei Ω ein topologischer Raum.*

- *Ω heißt ein Hausdorff-Raum, wenn man zwei Punkte in Ω durch offene Mengen trennen kann, wenn es also zu $x \neq y$ in Ω stets offene Teilmengen U und V von Ω gibt mit $x \in U$, $y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$.*

- *Ω heißt lokal-kompakt, wenn jedes Element von Ω im Innern einer kompakten Teilmenge von Ω liegt.*

- *Ω heißt σ-kompakt[33], wenn Ω abzählbare Vereinigung von kompakten Teilmengen ist.*

Bemerkungen.

- *Jeder metrische Raum ist ein Hausdorff-Raum.*

[33] Gelegentlich spricht man in diesem Kontext auch von abzählbar kompakten Räumen.

- *Jede offene und jede abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist ein lokal- und σ-kompakter Hausdorff-Raum — ebenso jeder Schnitt einer offenen mit einer abgeschlossenen Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.*

- *Allerdings sind recht einfache Mengen wie $\mathbb{Q}$ und $((0,\infty)\times\mathbb{R})\cup\{(0,0)\}$, nicht lokal-kompakt, und $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ist weder lokal- noch σ-kompakt.*

- *Die Bedeutung der Hausdorff-Eigenschaft liegt darin, dass alle Kompakta in einem Hausdorff-Raum abgeschlossen sind.*[34] *Lokal- und σ-Kompaktheit dagegen sind nützlich, um die Existenz ausreichend vieler Kompakta sicherzustellen. Insbesondere ist Lokal-Kompaktheit äquivalent damit, dass jedes Kompaktum im Innern eines weiteren Kompaktums liegt.*

- *Jede lokal-kompakte Teilmenge in einem σ-kompakten metrischen Grundraum wie $\mathbb{R}^n$ ist σ-kompakt.*

Nach diesen Vorbereitungen führen wir jetzt reguläre Maße und Radon-Maße ein. Der Leser sei aber gewarnt, dass es in der Literatur etliche, uneinheitlich verwendete Varianten dieser Begriffsbildungen gibt.

Definition 1.47 (Reguläre Maße). *Sei μ ein Maß auf $(\Omega,\mathscr{A})$ und $\mathscr{R}\subset\mathscr{A}$. Dann heißt μ von außen $\mathscr{R}$-regulär, wenn die Gleichheit*

$$\mu(A)=\inf\{\mu(R)\,:\,R\in\mathscr{R}\text{ und }A\subset R\}$$

für alle $A\in\mathscr{A}$ vorliegt. Und wir nenen μ von innen $\mathscr{R}$-regulär, wenn für $A\in\mathscr{A}$ gilt:

$$\mu(A)=\sup\{\mu(R)\,:\,R\in\mathscr{R}\text{ und }R\subset A\}\,.$$

Definition 1.48 (Radon-Maße). *Sei $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ ein Maßraum. Wir nennen μ ein Radon-Maß auf $(\Omega,\mathscr{A})$, wenn gelten:*

- *Ω ist ein lokal- und σ-kompakter Hausdorff-Raum,*

- *$\mathscr{B}(\Omega)\subset\mathscr{A}$ und μ ist von außen offen-regulär (das heißt von außen $\mathcal{T}$-regulär mit der Topologie $\mathcal{T}$ von Ω),*

- *μ ist lokal endlich, das heißt jedes $x\in\Omega$ liegt in einer offenen Teilmenge O von Ω mit $\mu(O)<\infty$.*

Bemerkungen.

- *Die lokale Endlichkeit von μ in der Definition ist damit äquivalent, dass $\mu(K)<\infty$ für jedes Kompaktum K in Ω gilt (wegen lokaler Kompaktheit).*

- *Radon-Maße sind stets σ-endlich (wegen σ-Kompaktheit).*

- *Mit μ ist auch $\mathbb{1}_A\cdot\mu$ (für beliebiges $A\in\mathscr{A}$) ein Radon-Maß auf $(\Omega,\mathscr{A})$.*

[34] Beweis: Sei K kompakt in einem Hausdorff-Raum Ω und $y\in\Omega\setminus K$. Dann gibt es zu jedem $x\in K$ offene Teilmengen U_x und V_x mit $x\in U_x$, $y\in V_x$ und $U_x\cap V_x=\emptyset$. Da K kompakt ist, ist K überdeckt durch endlich viele $U_{x_1},U_{x_2},\ldots,U_{x_k}$. Nun ist $W_y:=\bigcap_{i=1}^k V_{x_i}$ offen mit $y\in W_y\subset\bigcap_{i=1}^k(\Omega\setminus U_{x_i})\subset\Omega\setminus K$ und deshalb ist $\Omega\setminus K=\bigcup_{y\in\Omega\setminus K}W_y$ offen.

- *Sei Ω ein metrischer Raum und μ ein Radon-Maß auf $(\Omega, \mathscr{A})$. Dann ist die Einschränkung $\mu|_{\mathscr{A}|X}$ auf eine lokal-kompakte Teilmenge X von Ω ein Radon-Maß auf $(X, \mathscr{A}|X)$; man vergleiche dazu die letzte Bemerkung zu Lokal- und σ-Kompaktheit.*

Beispiele.

- *Die Lebesgue-(Borel-)(Stieltjes-)Maße β^n, $\mathscr{L}^n$, β^1_F, $\mathscr{L}^1_F$ (und die mit den vorigen Bemerkungen gebildeten Varianten) sind Radon-Maße; dies verifiziert man mit dem späteren Satz 1.53.*
- *Dirac-Maße sind stets Radon-Maße.*
- *Das Zählmaß und die Hausdorff-Maße $\mathscr{H}^s$ mit $s < n$ dagegen sind nicht σ-endlich und keine Radon-Maße auf $\mathbb{R}^n$. Ist aber A eine $\mathscr{H}^s$-endliche[35] Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, so ist $\mathbb{1}_A \cdot \mathscr{H}^s$ doch ein Radon-Maß; auch dies erhält man aus Satz 1.53.*

Die Bedeutung von Radon-Maßen liegt in der folgenden Charakterisierung der Messbarkeit und der Möglichkeit zur gutartigen Approximation messbarer Mengen:

Satz 1.49 (Charakterisierung der messbaren Mengen). *Sei μ ein Radon-Maß auf $(\Omega, \mathscr{A})$ und $A \in \mathscr{P}(\Omega)$. Dann ist μ-Messbarkeit von A (also $A \in \mathscr{M}_\mu$)* äquivalent *zu jeder der folgenden Aussagen:*

(I) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein offenes $O \supset A$ mit $\mu^*(O \setminus A) < \varepsilon$.

(II) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein abgeschlossenes $C \subset A$ mit $\mu^*(A \setminus C) < \varepsilon$.

(III) $A = G \setminus N$ für eine G_δ-Menge G und eine $\overline{\mu}$-Nullmenge N.

(IV) $A = F \cup N$ für eine F_σ-Menge F und eine $\overline{\mu}$-Nullmenge N.

Und ist $\mu^*(A) < \infty$, so sind außerdem noch äquivalent*:*

(V) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein kompaktes $K \subset A$ mit $\mu^*(A \setminus K) < \varepsilon$.

(VI) Es gilt

$$\inf\{\mu(O) : O \textit{ offen mit } A \subset O\} = \sup\{\mu(K) : K \textit{ kompakt mit } K \subset A\}.$$

Beweis. Wir benutzen in diesem Beweis ohne weiteren Hinweis, dass $\mu^*(A) = \overline{\mu}(A)$ für $A \in \mathscr{M}_\mu$ und $\mu^*(A) = \overline{\mu}(A) = \mu(A)$ für $A \in \mathscr{A}$ gelten. Außerdem verwenden wir eine aufsteigende Folge $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \ldots$ von Kompakta mit $\Omega = \bigcup_{i=1}^\infty K_i$, deren Existenz aus der σ-Kompaktheit von Ω folgt.

Wir zeigen zuerst, dass μ-Messbarkeit von A die Bedingung (I) impliziert: Dazu schreiben wir $A = B \setminus N$ mit $B \in \mathscr{A}$ und $\overline{\mu}(N) = 0$, wir benutzen,

[35] Allgemeiner ist $\mathbb{1}_A \cdot \mathscr{H}^s$ immer dann ein Radon-Maß, wenn es lokal endlich ist. Dafür reicht $\mathscr{H}^s$-σ-Endlichkeit von A allerdings noch nicht, wie für $s = 1$ und $n = 2$ das Beispiel $A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, \frac{y}{x} \in \mathbb{Q}\big\}$ zeigt.

dass $\mu(B \cap K_i) < \infty$ ist, und finden mit der Offen-Regularität von μ offene $O_i \supset B \cap K_i$ mit $\mu(O_i \setminus (B \cap K_i)) < \frac{\varepsilon}{2^i}$. Es folgt, dass $O := \bigcup_{i=1}^{\infty} O_i$ offen ist mit $A \subset B \subset O$ und

$$\mu(O \setminus A) = \mu(O \setminus B) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(O_i \setminus (B \cap K_i)) < \varepsilon\,.$$

Dass (III) aus (I) folgt sieht man durch Scheiden der offenen Mengen zu $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ leicht ein. Und, dass aus (III) Messbarheit folgt, ist trivial.

Somit ist die Äquivalenz von Messbarkeit mit (I) und (III) gezeigt. Die Äquivalenz zu (II) und (IV) folgt daraus durch Übergang zu Komplementen.

Weiter zeigen wir, dass für μ-messbares A mit $\overline{\mu}(A) < \infty$ die Bedingung (V) gilt: Nach (II) gibt es dann nämlich ein abgeschlossens $C \supset A$ mit $\mu(C) > \overline{\mu}(A) - \varepsilon$ und wegen

$$\mu(C) = \lim_{i \to \infty} \mu(C \cap K_i)$$

auch ein $i \in \mathbb{N}$ mit $\mu(C \cap K_i) > \mu(A) - \varepsilon$. Da $C \cap K_i$ als abgeschlossene Teilmenge eines Kompaktums wieder kompakt ist, erhalten wir (V).

Andererseits folgt (II) aus (V) und deshalb ist die auch Äquivalenz von (V) mit Messbarkeit gezeigt. Um die Äquivalenz zu (VI) zu zeigen, überlegt man sich, dass bei Eintreten der Gleichheit in (VI) das Infimum auch mit $\mu^*(A)$ übereinstimmt und dann — wegen $\mu^*(A) < \infty$ — (I) folgt. Schließlich ist die Implikation (I)+(V) $\Longrightarrow$ (VI) klar und der Beweis somit vollständig. □

Korollar 1.50. *Jedes Radon-Maß ist von innen kompakt-regulär.*

Beweis. Sei μ ein Radon-Maß auf $(\Omega, \mathscr{A})$. Aus der Charakterisierung (V) des Satzes ergibt sich für jedes $A \in \mathscr{A}$ mit $\mu(A) < \infty$ schon

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) \,:\, K \text{ kompakt mit } K \subset A\}\,.$$

Wir zeigen nun, dass die letzte Gleichheit auch für $A \in \mathscr{A}$ mit $\mu(A) = \infty$ richtig bleibt, also dass dann das Supremum rechts unendlich ist: Dazu benutzen wir die σ-Kompaktheit und betrachten Kompakta $X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \ldots$ mit $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$. Es ist $\mu(X_i) < \infty$ und $\infty = \mu(A) = \lim_{i \to \infty} \mu(A \cap X_i)$, daher gibt es zu jedem $M \in \mathbb{R}$ ein $i \in \mathbb{N}$ mit $M < \mu(A \cap X_i) < \infty$. Nach dem bereits Bewiesenen gibt es dann auch ein Kompaktum $K_i \subset A \cap X_i$ mit $\mu(K_i) > M$. Also ist das Supremum unendlich und μ ist von innen kompakt-regulär. □

Korollar 1.51 (über die **Eindeutigkeit von $\mathscr{L}^n$**). *$\mathscr{L}^n$ ist das einzige translationsinvariante und vollständige Radon-Maß auf $\mathbb{R}^n$ mit $\mathscr{L}^n([0,1[^n) = 1$.*

Beweis. Aus dem Eindeutigkeitssatz für β^n wissen wir, dass für jedes weitere solche Maß μ schon $\mu|_{\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)} = \beta^n$ ist. Wegen der Minimalität der Vervollständigung folgen $\mathscr{M}^n \subset \mathscr{M}_\mu$ und $\mu|_{\mathscr{M}^n} = \mathscr{L}^n$. Daher brauchen wir nur noch $\mathscr{M}_\mu \subset \mathscr{M}^n$ zu zeigen: Zu $A \in \mathscr{M}_\mu$ gibt es nach dem Satz ein $G \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ und eine μ-Nullmenge N mit $A = G \setminus N$. Und dann gibt es auch ein $\widetilde{G} \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ und eine μ-Nullmenge $\widetilde{N}$ mit $N = \widetilde{G} \setminus \widetilde{N}$. Es folgt $\mathscr{L}^n(\widetilde{G}) = \mu(\widetilde{G}) \leq \mu(N) + \mu(\widetilde{N}) = 0$, also $N \in \mathscr{M}^n$ und folglich $G \in \mathscr{M}^n$. □

Korollar 1.52 (**Klassifikation der Radon-Maße auf Intervallen**). *Sei I ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$. Zu jedem vollständigen Radon-Maß μ auf $(I, \mathscr{M}_\mu)$ gibt es ein nichtfallendes $F\colon I \to \mathbb{R}$, so dass $\mu = \mathscr{L}^1_F$ (und $\mathscr{M}_\mu = \mathscr{M}^1_F$) gilt.*

Beweis. Wir fixieren $x_0 \in I$ und setzen $F(x) := \mu([x_0, x[)$ für $x \geq x_0$ und $F(x) := -\mu([x, x_0[)$ für $x \leq x_0$. Dann ist $F\colon I \to \mathbb{R}$ nichtfallend und für $b \geq a \geq x_0$ in I gilt

$$\beta^1_F([a,b[) = F(b-) - F(a-) = \mu([x_0, b[) - \mu([x_0, a[) = \mu([a,b[)\,.$$

Die resultierende Gleichheit bleibt für $[a,b[\subset I$ stets richtig und μ stimmt auf $\mathscr{I}_1 \cap \mathscr{P}(I)$ mit η^1_F überein. Nach dem Maßfortsetungssatz ist dann $\mu|_{\mathscr{B}(I)} = \beta^1_F$ und nun kann man genau wie beim vorigen Korollar argumentieren. □

Bemerkungen.

- *Nicht-vollständige Radon-Maße haben wir damit auch schon klassifiziert; solche sind Einschränkungen von Lebesgue-Stieltjes-Maßen $\mathscr{L}^1_F$ auf Teil-σ-Algebren von $\mathscr{M}^1_F$.*

- *Ist Ω gleich (einem Quader in) $\mathbb{R}^n$, so lassen sich Lebesgue-Stieltjes-Maße auf Ω einführen und die obige Klassifikation kann auf diesen mehrdimensionalen Fall verallgemeinert werden.*

- *Sei $x_0 \in I$ beliebig fixiert. Der Beweis zeigt dann, dass F stets linksseitig stetig mit $F(x_0) = 0$ gewählt werden kann. Stellt man diese beiden Zusatzbedingungen, so ist F eindeutig durch $\mu = \mathscr{L}^1_F$ (und sogar durch η^1_F) bestimmt. Folglich ist $F \mapsto \mathscr{L}^1_F$ eine Bijektion zwischen den linksseitig stetigen, nichtfallenden Funktionen $F\colon I \to \mathbb{R}$ mit $F(x_0) = 0$ und den vollständigen Radon-Maßen auf I.*

- *In der Wahrscheinlichkeitstheorie gibt man für $I = \mathbb{R}$ anstelle eines Wertes $F(x_0)$ das Verhalten von F im Unendlichen vor (das geht aber nur für endliche Maße) und betrachtet die Einschränkungen β^1_F auf die Borelsche σ-Algebra. Man erhält dann eine Bijektion $F \mapsto \beta^1_F$ zwischen den linksseitig stetigen, nichtfallenden $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit*

  $$\lim_{x\to\infty} F(x) = 0\,, \qquad \lim_{x\to\infty} F(x) = 1$$

  und den Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ gegeben, so nennt man die derart zugehörige Funktion F die **Verteilungsfunktion** *von μ. Sie erfüllt $\mu = \beta^1_F$ und ist gegeben durch*

  $$F(x) = \mu\big(]-\infty, x[\big) \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}\,.$$

- *Alles geht analog mit rechtsseitiger Stetigkeit, wenn man linksoffene statt rechtsoffener Intervalle verwendet.*

Der Nachweis der Radon-Maß-Eigenschaft wird oft beträchtlich erleichtert durch den folgenden Satz, gemäß dem man in der metrischen Situation nur Borel-Regularität zu zeigen braucht. Für Lebesgue- und Hausdorff-Maße haben wir oben schon von dieser Tatsache Gebrauch gemacht.

Satz 1.53. *Wird die Topologie auf Ω durch eine Metrik induziert, so ist es äquivalent in der Definition des Radon-Maßes nur äußere $\mathscr{B}(\Omega)$-Regularität statt äußerer Offen-Regularität zu fordern.*

Beweisskizze. Sei μ ein Maß auf $(\Omega, \mathscr{A})$, das von außen $\mathscr{B}(\Omega)$-regulär ist und außer Offen-Regularität alle Bedinungen aus der Definition des Radon-Maßes erfüllt. Dann prüft man mit dem $\frac{\varepsilon}{2^i}$-Trick nach, dass das System $\mathscr{G}$ aller Mengen $A \in \mathscr{A}$, die die Gleichheiten

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \inf\{\mu(O) \,:\, O \text{ offen mit } A \subset O\}\\ &= \sup\{\mu(C) \,:\, C \text{ abgeschlossen mit } C \subset A\}\end{aligned}$$

erfüllen, abgeschlossen unter abzählbarer Vereinigung ist. Aus der Definition ist klar, dass $\mathscr{G}$ unter Komplementbildung abgeschlossen und folglich eine σ-Algebra ist. Zeigen wir nun, dass $\mathscr{G}$ alle abgeschlossenen und somit auch alle offenen Mengen enthält, so folgt $\mathscr{B}(\Omega) \subset \mathscr{G}$ und $\mu(A) = \inf\{\dots\}$ gilt für alle $A \in \mathscr{B}(\Omega)$. Mit der Borel-Regularität folgt diese Gleichheit auch für alle $A \in \mathscr{A}$ und μ ist von außen offen-regulär.

Zum Beweis des Satzes müssen wir also nur noch verifizieren, dass die Gleichheit $\mu(A) = \inf\{\dots\}$ für jede abgeschlossene Menge A richtig ist (denn $\mu(A) = \sup\{\dots\}$ gilt für abgeschlossenes A natürlich trivial). Dazu argumentieren wir wie folgt: Wegen σ-Kompaktheit gibt es Kompakta $K_1, K_2, K_3, \dots$ mit $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$. Nach der Bemerkung zur lokalen Kompaktheitliegen die Kompakta $A \cap K_i$ im Innern weiterer Kompakta. Es folgt mit der metrischen Struktur, dass für $k \gg 1$ die offenen Mengen

$$U_{1/k}(A \cap K_i) := \{x \in \Omega \,:\, \operatorname{dist}(x, A \cap K_i) < 1/k\}$$

endliches Maß haben und daher

$$\mu(A \cap K_i) = \lim_{k \to \infty} \mu\big(U_{1/k}(A \cap K_i)\big)$$

gilt. Damit gibt es zu $\varepsilon > 0$ und $i \in \mathbb{N}$ stets eine offene Obermenge O_i von $A \cap K_i$ mit $\mu(O_i \setminus (A \cap K_i)) < \frac{\varepsilon}{2^i}$ und $O := \bigcup_{i=1}^{\infty} O_i$ ist offene Obermenge von A mit $\mu(O \setminus A) < \varepsilon$. Es folgt $\mu(A) = \inf\{\dots\}$ und dies war noch zu zeigen. □

Trägt ein topologischer Raum Ω eine Gruppenstruktur, die mit der Topologie verträglich[36] ist, so spricht man von einer topologischen Gruppe. In dieser Situation gilt folgender Satz, den wir hier nicht beweisen:

Satz 1.54 (über die **Existenz und Eindeutigkeit des Haarschen Maßes**). *Sei Ω ein topologischer Raum, der gleichzeitig eine topologische Gruppe und ein lokal- und σ-kompakter Hausdorff-Raum ist. Dann gibt es, abgesehen vom Nullmaß, ein bis auf einen positiven Faktor eindeutig bestimmtes, linksinvariantes und vollständiges Radon-Maß μ auf $(\Omega, \mathscr{M}_\mu)$. Solch ein Maß heißt ein linkes Haar-Maß auf Ω.*

[36] Verträglichkeit heißt hier, dass die Gruppenmultiplikation $\Omega \times \Omega \to \Omega$ und die Inversenabbildung $\Omega \to \Omega$ stetig sind.

Bemerkungen.

- *Dabei bedeutet Linksinvarianz, dass für jedes* $A \in \mathscr{M}_\mu$ *und* $g \in \Omega$ *auch* $g \cdot A \in \mathscr{M}_\mu$ *und* $\mu(g \cdot A) = \mu(A)$ *gelten.*

- *Wendet man den Satz auf die zu* Ω *entgegengesetze Gruppe* Ω° *(das ist die Gruppe mit der Gruppenoperation* $g \circ h := h \cdot g$*) an, so erhält man einen Existenz- und Eindeutigkeitssatz für rechtsinvariante Radon-Maße, genannt die rechten Haar-Maße. Linke und rechte Haar-Maße müssen (bei nicht-kommutativen Gruppen) nicht übereinstimmen.*

- *Wendet man den Satz auf* $\Omega = \mathbb{R}^n$ *mit der Addition als Gruppenoperation an, so erhält man die Existenz und Eindeutigkeit des Lebesgue-Maßes* $\mathscr{L}^n$*; vergleiche Korollar 1.51.*

- *Motiviert durch die vorausgehende Bemerkung betrachtet man die Haarschen Maße als natürliche Volumenbegriffe auf topologischen Gruppen und damit insbesondere auf (differenzierbaren) Mannigfaltigkeiten mit Gruppenstruktur, den sogenannten Lie-Gruppen. Dies kann man beispielsweise auf Gruppen von Matrizen wie* $\mathcal{GL}(n)$, $\mathcal{O}(n)$ *und* $\mathcal{SO}(n)$ *anwenden.*

- *Wendet man den Satz auf* $\Omega =]0, \infty[$ *mit der Multiplikation als Gruppenoperation an, so sind die Haar-Maße auf* Ω *gerade die Lebesgue-Stieltjes-Maße* $\mathscr{L}^1_F$ *zu* $F(x) := \log_a x$ *mit Konstanten* $a \in (1, \infty)$.

Kapitel 2

Maße und Integrale

In diesem Kapitel werden wir oft Funktionen von (der Grundmenge in) einem Maßraum in die **erweiterten reellen Zahlen** $[-\infty, \infty] = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ betrachten. Legen wir in Ergänzung unserer früheren Konvention $0 \cdot (-\infty) := 0 =: (-\infty) \cdot 0$ fest, so sind Summe, Differenz und Produkt von Elementen aus $[-\infty, \infty]$ solange sinnvoll erklärt wie man nicht auf den Ausdruck $\infty - \infty$ stößt. Wir fassen $[-\infty, \infty]$ außerdem als topologischen Raum mit zugehöriger Borel-σ-Algebra $\mathscr{B}([-\infty, \infty])$ auf, die wir im Folgenden oft, meist implizit, verwenden werden.

2.1 Messbare Funktionen

Definition 2.1 (**Messbare Funktionen**)**.** *Seien $(\Omega, \mathscr{A})$ und $(X, \mathscr{S})$ Messräume. Eine Funktion $f\colon \Omega \to X$ heißt $(\mathscr{A}, \mathscr{S})$-messbar, wenn $f^{-1}(\mathscr{S}) \subset \mathscr{A}$ (das heißt ausgeschrieben $f^{-1}(S) \in \mathscr{A}$ für alle $S \in \mathscr{S}$) gilt*[1]*. Um $(\mathscr{A}, \mathscr{S})$-Messbarkeit auszudrücken, wird manchmal die Notation $f\colon (\Omega, \mathscr{A}) \to (X, \mathscr{S})$ verwendet.*

Bezeichnungen. *Ist X ein topologischer Raum, so benutzen wir die folgenden Abkürzungen:*

- *Anstelle von $(\mathscr{A}, \mathscr{B}(X))$-messbar schreiben wir kurz $\mathscr{A}$-messbar. Und ist μ ein Maß auf $(\Omega, \mathscr{A})$, so sagen wir auch μ-messbar*[2] *statt $\mathscr{M}_\mu$-messbar.*
- *Für $A \in \mathscr{M}^n$ heißen die $(\mathscr{M}^n | A, \mathscr{B}(X))$-messbaren $f\colon A \to X$ auch* **$\mathscr{L}^n$-messbar** *oder* **Lebesgue-messbar**.
- *Und ist Ω ebenfalls ein topologischer Raum, so heißen die $(\mathscr{B}(\Omega), \mathscr{B}(X))$-messbaren Funktionen auch Borel-messbare Funktionen, Borelsche Funktionen oder kurz* **Borel-Funktionen**.

[1] Dass man hier Urbilder $f^{-1}(S)$ und nicht Bilder $f(A)$ verwendet liegt daran, dass mengentheoretische Operationen sich mit Urbildern besser vertragen: Beispielsweise ist stets $f^{-1}(S_1 \cap S_2) = f^{-1}(S_1) \cap f^{-1}(S_2)$, während im Allgemeinen $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$ gilt. Tatsächlich ist $f^{-1}(\mathscr{S})$ im Gegensatz zu $f(\mathscr{A})$ stets eine σ-Algebra.

[2] Man beachte, dass μ-Messbarkeit per Definition dasselbe ist wie $\overline{\mu}$-Messbarkeit bezüglich der Vervollständigung $\overline{\mu}$ von μ.

Bemerkungen.

- *Konstante Funktionen* $f\colon \Omega \to X$ *sind stets* $(\mathscr{A},\mathscr{S})$*-messbar.*
- *Eine charakteristische Funktion* $\mathbb{1}_A\colon \Omega \to [-\infty,\infty]$ *mit* $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ *ist genau dann* $\mathscr{A}$*-messbar, wenn* $A \in \mathscr{A}$ *gilt, wenn also* A *selbst* $\mathscr{A}$*-messbar ist.*
- *Den Nachweis der* $(\mathscr{A},\mathscr{S})$*-Messbarkeit von* f *kann man sich oft beträchtlich erleichtern, wenn man einen Erzeuger* $\mathscr{E}$ *mit* $\sigma(\mathscr{E}) = \mathscr{S}$ *kennt. Zeigt man dann nämlich nur* $f^{-1}(\mathscr{E}) \subset \mathscr{A}$*, so folgt schon* $(\mathscr{A},\mathscr{S})$*-Messbarkeit von* f*.*
- *Insbesondere lässt sich der vorige Punkt auf Erzeuger der Borel-*σ*-Algebra anwenden und liefert beispielsweise folgende Aussage: Wenn* $f^{-1}]b,\infty] \in \mathscr{A}$ *für alle* $b \in \mathbb{Q}$ *gilt, so ist* $f\colon \Omega \to [-\infty,\infty]$ *schon* $\mathscr{A}$*-messbar.*
- *Kompositionsregel: Für* $(\mathscr{A},\mathscr{S})$*-messbares* $f\colon \Omega \to X$ *und* $(\mathscr{S},\mathscr{H})$*-messbares* $g\colon X \to Y$ *ist die Komposition* $g \circ f\colon \Omega \to Y$ *stets* $(\mathscr{A},\mathscr{H})$*-messbar.*

Modellbeispiel (Teil V). *In unserem* **Modellbeispiel** *ist* $f\colon \Omega \to [-\infty,\infty]$ *genau dann* $\mathscr{A}$*-messbar, wenn* $f(2) = f(3)$ *und* $f(4) = f(5)$ *gelten, wenn also* f *auf* $\{2,3\}$ *und* $\{4,5\}$ *konstant ist. Und die* μ*-messbaren* $f\colon \Omega \to [-\infty,\infty]$ *sind genau die mit* $f(2) = f(3)$*.*

Bemerkungen. *Für topologische Räume* Ω*,* X *und* Y *erhalten wir aus den vorausgehenden Bemerkungen:*

- *Ist* $f\colon \Omega \to X$ *stetig, so ist für jede offene Menge* O *in* X *das Urbild* $f^{-1}(O)$ *offen in* Ω*. Daraus folgt:* **Jede stetige Funktion** $\boldsymbol{f\colon \Omega \to X}$ **ist Borelsch***.*
- *Für Borel-Funktionen* $f\colon \Omega \to X$ *und* $g\colon X \to Y$ *ist auch* $g \circ f\colon \Omega \to Y$ *stets Borelsch.*

Und für jedes Maß μ *auf* Ω *mit* $\mathscr{B}(\Omega) \subset \mathscr{M}_\mu$ *(insbesondere für* $\mathscr{L}^n$*, jedes Radon-Maß und jede Einschränkung eines solchen auf eine seiner messbaren Mengen) gilt außerdem:*

- **Jede Borel-Funktion** $\boldsymbol{f\colon \Omega \to X}$ **ist** $\boldsymbol{\mu}$**-messbar***.*
- *Für* μ*-messbares* $f\colon \Omega \to X$ *und Borelsches* $g\colon X \to Y$ *ist* $g \circ f\colon \Omega \to Y$ *stets* μ*-messbar.*
- *Dagegen ist für stetiges* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *und* $\mathscr{L}^n$*-messbares* $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *die Komposition* $g \circ f$ *im Allgemeinen nicht*[3] $\mathscr{L}^n$*-messbar.*

[3] Für $n \geq 2$ sieht man das, indem man $g := \mathbb{1}_{A\times\{0\}^{n-1}}$ mit der Vitali-Menge A in $\mathbb{R}$ und $f(x) := (x_1, 0, 0, \ldots, 0)$ wählt. Dann ist $(g \circ f)^{-1}\{1\} = A \times \mathbb{R}^{n-1} \notin \mathscr{M}^n$. Die Konstruktion eines entsprechenden Beispiels für den Fall $n = 1$ ist aufwendiger.

Tatsächlich sind auch stückweise stetige Funktionen sowie alle "vernünftigen" und praktisch relevanten Funktionen Borelsch und somit μ-messbar. Außerdem zeigen die Kompositionsregeln, dass Summen, Linearkombinationen, Produkte, Quotienten, Maximum, Minimum, etc.[4] von endlich vielen Borelschen beziehungsweise μ-messbaren Funktionen, soweit definiert, wieder Borelsch beziehnugsweise μ-messbar sind. Dass Messbarkeit auch bei Grenzübergängen erhalten bleibt, werden wir in diesem Abschnitt noch sehen.

Definition 2.2 (**Fast-überall bestehende Eigenschaften**). *Sei* $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ *ein Maßraum und für jedes* $x \in \Omega$ *sei eine (von* x*-abhängige) Aussage* $A(x)$ *gegeben. Dann sprechen wir davon, dass* $A(x)$ *für* μ*-fast-alle* $x \in \Omega$ *gilt, wenn* $\{x \in \Omega \,:\, A(x) \text{ gilt nicht.}\}$ *eine* $\overline{\mu}$*-Nullmenge ist. In gleicher Bedeutung sagen wir auch, dass die Eigenschaft* A μ*-fast-überall auf* Ω *gilt.*

Modellbeispiel (**Teil VI**). *In unserem* **Modellbeispiel** *ist* μ*-fast-jedes Element von* Ω *das Produkt all seiner Teiler. Das einzige Element von* Ω*, das diese Eigenschaft nicht hat, ist nämlich* $4 \neq 1 \cdot 2 \cdot 4$ *und es ist* $\overline{\mu}(\{4\}) = 0$*.*

Bemerkung. *Die Definition wird häufig auf Aussagen des Typs* $f(x) \bowtie g(x)$ *mit* $\bowtie \in \{=, <, >, \leq, \geq, \neq\}$ *und zwei Funktionen* $f, g \colon \Omega \to [-\infty, \infty]$ *angewandt. Insbesondere bedeutet* $f = g$ μ*-fast-überall auf* Ω*, dass* $\{x \in \Omega \,:\, f(x) \neq g(x)\}$ *eine* $\overline{\mu}$*-Nullmenge ist.*

Ein weiterer wichtiger Spezialfall ist die **Konvergenz** $f_k \to f$ $\boldsymbol{\mu}$**-fast-überall** *von Funktionen* $f_k \colon \Omega \to X$ *gegen eine Grenzfunktion* $f \colon \Omega \to X$ *bei* $k \to \infty$*.*

Proposition 2.3. *Sei* $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ *ein Maßraum und* $f, g, f_k \colon \Omega \to X$ *seien Funktionen in einen topologischen Raum* X*.*

- *Ist* f μ*-messbar und* $f = g$ μ*-fast-überall auf* Ω*, so ist auch* g μ*-messbar.*
- *Ist* X *metrischer Raum und sind die* f_k μ*-messbar mit* $f_k \to f$ μ*-fast-überall auf* Ω *bei* $k \to \infty$*, so ist* f μ*-messbar.*

Beweis. Der Beweis der ersten Aussage ist einfacher als der der zweiten, und wir zeigen nur letztere: Für

$$D := \{x \in \Omega \,:\, f_k(x) \text{ konvergiert bei } k \to \infty \text{ gegen } f(x)\}$$

ist nach Voraussetzung $\Omega \setminus D$ eine $\overline{\mu}$-Nullmenge. Sei nun O offen in X. Dann gilt für $x \in D$

$$f(x) \in O \iff \exists\, k, i \in \mathbb{N} \,:\, \forall\, l \geq k \,:\, \operatorname{dist}(f_l(x), X \setminus O) > \tfrac{1}{i}\,.$$

[4] Es geht es bei all diesen Operationen um Kompositionen des Typs $g \circ (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, bei denen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ mittels einer Borel-Funktion $g \colon [-\infty, \infty]^n \to [-\infty, \infty]$ zusammegesetzt werden. Um auf $\mathscr{A}$-Messbarkeit der Komposition zu schließen, überlegt man sich zuerst mit Hilfe eines geeigneten Erzeugers von $\mathscr{B}([-\infty, \infty]^n)$ (wie $\{O_1 \times O_2 \times \ldots \times O_n \,:\, O_i \text{ offen}\}$), dass aus $\mathscr{A}$-Messbarkeit der einzelnen f_i die $\mathscr{A}$-Messbarkeit von $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ folgt, und wendet dann die obige Kompositionsregel an.

Dies können wir umschreiben in die Gleichheit

$$D \cap f^{-1}(O) = D \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcap_{l=k}^{\infty} f_l^{-1} \underbrace{\left\{y \in X \,:\, \operatorname{dist}(y, X \setminus O) > \tfrac{1}{i}\right\}}_{\text{offen in } X},$$

aus der wir $D \cap f^{-1}(O) \in \mathscr{M}_\mu$ erhalten. Als Teilmenge einer μ-Nullmenge ist auch $f^{-1}(O) \setminus D \in \mathscr{M}_\mu$ messbar, daher haben wir $f^{-1}(O) \in \mathscr{M}_\mu$ für jede offene Menge O in X gezeigt. Da die offenen Mengen $\mathscr{B}(X)$ erzeugen, folgt die behauptete $(\mathscr{M}_\mu, \mathscr{B}(X))$-Messbarkeit von f. □

Bemerkung. *Allgemeine Aussagen über μ-messbare Funktionen gelten analog für $\mathscr{A}$-messbare Funktionen bezüglich beliebiger σ-Algebren $\mathscr{A}$, wenn man μ-fast-überall bestehende durch überall bestehende Eigenschaften ersetzt. Formal sieht man dies durch Anwendung auf ein Maß μ mit $\mathscr{M}_\mu = \mathscr{A}$ und ohne nicht-triviale Nullmengen, wie beispielsweise die Einschränkung $\xi|_{\mathscr{A}}$ des Zählmaßes ξ. Insbesondere ergibt sich daher aus der Proposition, dass puntkweise Limites von Borel-Funktionen (mit Werten in einem metrischen Raum) wieder Borelsch sind.*

Aus Proposition 2.3 folgt, dass alle praktisch relevanten Operationen mit Folgen Borelscher beziehungsweise μ-messbarer Funktionen wieder Borelsche beziehungsweise μ-messbare Funktionen ergeben. Beispielsweise sieht man das für die Operationen sup und lim sup ein, indem man sie folgendermaßen in punktweise Limites umschreibt:

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} f_k = \lim_{k \to \infty} \max\{f_1, f_2, \ldots, f_k\} \qquad \text{und} \qquad \limsup_{k \to \infty} f_k = \lim_{n \to \infty} \left(\sup_{k \geq n} f_k \right).$$

Analog begründet man die Erhaltung von Messbarkeit bei inf und lim inf sowie bei Reihen.

Als Nächstes kommen wir auf die Approximation messbarer Funktionen durch (eine montone Folge von) Treppenfunktionen.

Definition 2.4 (Treppenfunktionen). *Sei $(\Omega, \mathscr{A})$ ein Messraum. Eine $\mathscr{A}$-messbare Funktion $h\colon \Omega \to [-\infty, \infty]$ heißt eine ($\mathscr{A}$-)Treppenfunktion, wenn sie höchstens abzählbar viele Werte annimmt, und sie heißt eine ($\mathscr{A}$-)Treppenfunktion mit endlich vielen Stufen, wenn sie nur endlich viele Werte annimmt, also endliche Linearkombination charakteristischer Funktionen ist.*

Lemma 2.5. *Sei $(\Omega, \mathscr{A})$ ein Messraum und $f\colon \Omega \to [0, \infty]$ eine nichtnegative $\mathscr{A}$-messbare Funktion. Dann gibt es eine Folge von $\mathscr{A}$-Treppenfunktionen h_k mit endliche vielen Stufen, so dass $0 \leq h_1 \leq h_2 \leq h_3 \leq \ldots$ gilt und $h_k \to f$ auf Ω konvergiert bei $k \to \infty$.*

Beweisidee. Man wählt die h_k konstant auf gewissen Zwischenniveaumengen von f. Im Einzelnen gibt es etliche Vorgehensweisen; eine solche ist, $h_1 \equiv 0$ zu setzen und für $k \in \mathbb{N}$ rekursiv

$$h_{k+1} := h_k + \frac{1}{k} \mathbb{1}_{\{x \in \Omega \,:\, h_k(x) + \frac{1}{k} \leq f(x)\}}$$

zu wählen. Aus der Divergenz $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = \infty$ der harmonischen Reihe ergibt sich dann die behauptete Konvergenz. Ist man mit abzählbar vielen Stufen zufrieden, so kann man die h_k alternativ als die Hilfsfunktionen h_b aus dem späteren Beweis von Satz 2.11 (I) wählen mit der Parameterwahl $b = 2^{2^{-k}}$. $\square$

Das Lemma ist nützlich zur Verallgemeinerung von Sachverhalten von Treppenfunktionen auf allgemeine Funktion, auch im Zusammenhang mit der **Standard-Ausdehnungsprozedur der Integrationstheorie**: Man beweist eine Behauptung über messbare Funktionen (oft im Zusammenhang mit Integrierbarkeit und Integralen und bei linearem Auftreten der Funktion), indem man sie schrittweise verifiziert,

- erst für charakteristische Funktionen,
- dann für Treppenfunktionen (mit endlich vielen Stufen),
- dann für nichtnegative Funktionen
- und schließlich für allgemeine messbare Funktionen.

Wir werden oft in dieser oder ähnlicher Weise vorgehen.

Zum Abschluß dieses Abschnitts halten wir noch eine Folgerung über den Zusammenhang zwischen $\mathscr{L}^n$- und Borel-Messbarkeit fest. Da $\mathscr{M}^n$ die Vervollständigung von $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ ist, unterscheiden sich dieses Konzepte tatsächlich nur um Nullmengen:

Korollar 2.6. *Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum. Genau dann ist $f\colon \Omega \to [-\infty, \infty]$ μ-messbar, wenn es ein $\mathscr{A}$-messbares $g\colon \Omega \to [-\infty, \infty]$ gibt mit $f = g$ μ-fast-überall auf Ω.*

Insbesondere ist $f\colon A \to [-\infty, \infty]$ mit $A \in \mathscr{M}^n$ genau dann $\mathscr{L}^n$-messbar, wenn es ein Borelsches $g\colon A \to [-\infty, \infty]$ gibt mit $f = g$ $\mathscr{L}^n$-fast-überall auf A.

Beweis. '$\Longleftarrow$' ist nach Proposition 2.3 klar. Für '$\Longrightarrow$' erinnern wir uns, dass jede $\mathscr{M}_\mu$-messbare Menge sich nur um eine $\overline{\mu}$-Nullmenge von einer $\mathscr{A}$-messbaren Menge unterscheidet; daraus ergibt sich die Behauptung für Treppenfunktionen (man vergleiche auch Fußnote 7 im nächsten Abschnitt). Für nichtnegatives f wenden wir nun das vorige Lemma (mit $\mathscr{M}_\mu$ statt $\mathscr{A}$) an und machen die so erhaltenen $\mathscr{M}_\mu$-Treppenfunktionen h_k durch Modifikation auf $\overline{\mu}$-Nullmengen zu $\mathscr{A}$-messbaren $\widetilde{h}_k$ mit $0 \le \widetilde{h}_1 \le \widetilde{h}_2 \le \widetilde{h}_3 \le \dots$ auf Ω. Wegen Monotonie konvergieren die $\widetilde{h}_k$ punktweise gegen eine $[0, \infty]$-wertige Funktion g mit $g = f$ μ-fast-überall auf Ω, und g ist nach Proposition 2.3 $\mathscr{A}$-messbar. Damit ist die Behauptung für nichtnegatives f gezeigt. Der allgemeine Fall folgt durch Zerlegung $f = f_+ - f_-$. $\square$

Korollar 2.6 wird wesentlich verschärft durch den folgenden Satz, der eine auf den ersten Blick **veblüffende Beziehung zwischen Messbarkeit und Stetigkeit** herstellt:

Satz 2.7 (von Lusin, $\sim$1912**).** *Sei Ω ein lokal- und σ-kompakter Hausdorff-Raum, μ ein Radon-Maß auf Ω und X ein separabler metrischer Raum. Ist*

$\mu(\Omega) < \infty$, so gibt es zu jeder μ-messbaren Funktion $f\colon \Omega \to X$ und zu jedem $\delta > 0$ eine kompakte Teilmenge A_δ von Ω mit $\mu(\Omega \backslash A_\delta) < \delta$, so dass $f|_{A_\delta}$ stetig ist.

Bemerkungen.

- *Im Falle $\mu(\Omega) = \infty$ ist μ als Radon-Maß noch σ-endlich und der Satz gilt mit abgeschlossenem statt kompaktem A_δ.*
- *Es lassen sich sogar stetige $g_\delta\colon \Omega \to X$ mit $g_\delta = f$ auf A_δ konstruieren.*
- *Der Satz von Lusin kann als Analogon der Approximationseigenschaften des Satzes 1.49 mit messbaren Funktionen anstelle messbarer Mengen verstanden werden; man vergleich ihn außerdem mit Satz 2.19.*

Beweis. Wegen der Separabilitätsvoraussetzung können wir für jedes $i \in \mathbb{N}$ den Zielraum X durch abzählbar viele Kugeln vom Radius $\frac{1}{2i}$ überdecken. Daraus erhalten wir eine Zerlegung von X in disjunkte Mengen $B_i^1, B_i^2, B_i^3, \ldots$ vom Durchmesser $\leq \frac{1}{i}$. Die Urbilder $D_i^j := f^{-1}(B_i^j) \in \mathscr{M}_\mu$ bilden eine disjunkte Zerlegung von Ω und wir finden mit Satz 1.49 kompakte Teilmengen $A_i^j \subset D_i^j$ mit $\overline{\mu}(D_i^j \setminus A_i^j) < 2^{-i-j}\delta$. Unter Verwendung der Endlichkeitsvoraussetzung $\mu(\Omega) < \infty$ folgt

$$\lim_{k\to\infty} \mu\Big(\Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{k} A_i^j\Big) = \mu\Big(\Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A_i^j\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\mu}(D_i^j \setminus A_i^j) < 2^{-i}\delta$$

und daher gibt es auch ein $k_i \in \mathbb{N}$ mit

$$\mu\Big(\Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{k_i} A_i^j\Big) < 2^{-i}\delta\,.$$

Jetzt bilden wir eine Funktion f_i auf $\bigcup_{j=1}^{k_i} A_i^j$, die auf jeder Menge A_i^j konstant einen Wert in B_i^j annimmt. Nach Konstruktion sind die f_i stetig und konvergieren gleichmäßig auf der kompakten Menge

$$A_\delta := \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{k_i} A_i^j$$

gegen f. Deshalb ist $f|_{A_\delta}$ stetig und außerdem gilt

$$\mu(\Omega \backslash A_\delta) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu\Big(\Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{k_i} A_i^j\Big) < \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}\delta = \delta\,. \qquad \square$$

2.2 Das Maßintegral

Als Nächstes beschäftigen wir uns mit der Integration messbarer Funktionen bezüglich beliebigen Maßen. Dieser Integralbegriff enthält Integrale bezüglich $\mathscr{L}^n$ als Spezialfall und wird deshalb auch als Lebegue-Integral bezeichnet.

Definition 2.8 (**Integrale von Treppenfunktionen**)**.** *Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum. Das (elementare μ-)Integral einer $\mathscr{A}$-Treppenfunktion $h\colon \Omega \to [-\infty, \infty]$ über Ω ist definiert als*

$$\int_\Omega h \,\mathrm{d}\mu := \sum_{t \in [-\infty,\infty]} t\, \mu\big(h^{-1}\{t\}\big)\,.$$

Bemerkungen (zur Summe $\sum_{t\in[-\infty,\infty]} t\,\mu(h^{-1}\{t\})$ in der vorigen Definition)**.**

- *Höchstens abzählbar viele Summanden sind von Null verschieden.*
- *Wir definieren die Summe durch Addition von $\sum_{t\in[0,\infty]} t\,\mu(h^{-1}\{t\}) \in [0,\infty]$ und $\sum_{t\in[-\infty,0]} t\,\mu(h^{-1}\{t\}) \in [-\infty, 0]$ und betrachten sie nur dann als definiert, wenn bei dieser Addition nicht der Ausdruck $\infty - \infty$ auftritt.*
- *Definitionsgemäß nimmt also die Summe entweder einen Wert in $[-\infty,\infty]$ an oder ist vom Typ $\infty - \infty$. In letzterem Fall betrachten wir das Integral $\int_A h\,\mathrm{d}\mu$, ebenso wie den Summationswert, als undefiniert.*

Definition 2.9 (**Integrale, Integrierbarkeit, Summierbarkeit**)**.** *Es sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f\colon \Omega \to [-\infty,\infty]$ eine beliebige Funktion. Dann heißt eine $\mathscr{A}$-Treppenfunktion $h\colon \Omega \to [-\infty, \infty]$ eine (μ-)Oberfunktion zu f, wenn $h \geq f$ auf Ω gilt und das elementare μ-Integral $\int_\Omega h\,\mathrm{d}\mu$ definiert ist. Analog heißt h eine (μ-)Unterfunktion zu f, wenn $h \leq f$ auf Ω gilt und $\int_\Omega h\,\mathrm{d}\mu$ definiert ist. Wir bezeichnen*

$$\int^*_\Omega f\,\mathrm{d}\mu := \inf\left\{ \int_\Omega h\,\mathrm{d}\mu \;:\; h \textit{ ist } \mu\textit{-Oberfunktion zu } f \right\} \in [-\infty,\infty]$$

als das (μ-)Oberintegral von f (über Ω) und

$${}_*\!\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu := \sup\left\{ \int_\Omega h\,\mathrm{d}\mu \;:\; h \textit{ ist } \mu\textit{-Unterfunktion zu } f \right\} \in [-\infty,\infty]$$

als das (μ-)Unterintegral von f (über Ω). Die Funktion f heißt (μ-)integrierbar (über Ω), wenn sie μ-messbar[5] ist und $\int^*_\Omega f\,\mathrm{d}\mu$ mit ${}_*\!\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu$ übereinstimmt. Wir nennen dann den gemeinsamen Wert

$$\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu := \int^*_\Omega f\,\mathrm{d}\mu = {}_*\!\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu \in [-\infty,\infty]$$

das (μ-)Integral von f (über Ω). Schließlich heißt ein (μ-)integrierbares f mit endlichem Wert des Integrals auch (μ-)summierbar.[6]

[5] In vielen Lehrbüchern wird an dieser Stelle $\mathscr{A}$-Messbarkeit von f vorausgesetzt, was für nicht-vollständige Maße wegen $\mathscr{A} \subsetneqq \mathscr{M}_\mu$ eine stärkere Forderung ist und zu einem weniger allgemeinen Integralbegriff führt. Meist ist dieser Unterschied aber unwesentlich, da man zur Vervollständigung oder dem $\mathscr{A}$-messbaren Repräsentanten des Korollars 2.6 übergehen kann.

[6] Der Begriff der Integrierbarkeit wird in Teilen der Literatur nur für solche Funktionen verwendet, die zu einem endlichen Integralwert führen. Wir nennen derartige Funktionen summierbar, während wir bei integrierbaren Funktionen unendliche Werte des Integrals zulassen.

Bemerkungen.

- *Das Ober- und das Unterintegral existieren stets und es gilt*
$$\sideset{^*}{}\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu \geq \sideset{_*}{}\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu\,.$$
Um die Integrierbarkeit einer messbaren Funktion zu zeigen, reicht es also, die umgekehrte Ungleichung nachzuweisen.

- *Treppenfunktionen (mit definiertem elementaren Integral) sind Ober- und Unterfunktionen zu sich selbst. Deshalb stimmt ihr Integral mit ihrem elementaren Integral überein — was unsere Notation erst rechtfertigt.*

- **Charakteristische Funktionen** $\mathbb{1}_A$ *mit* $A \in \mathscr{M}_\mu$ *sind* μ*-integrierbar mit*
$$\int_\Omega \mathbb{1}_A\,\mathrm{d}\mu = \overline{\mu}(A)\,.$$
Allgemeiner gilt $\sideset{^*}{}\int_\Omega \mathbb{1}_A\,\mathrm{d}\mu = \mu^*(A)$ *für alle* $A \in \mathscr{P}(\Omega)$.

- μ*-Integrierbarkeit und* μ*-(Ober-/Unter-)Integrale stimmen mit den entsprechenden Konzepten für die Vervollständigung* $\overline{\mu}$ *überein*[7]*; daher kann man sich stets auf die Behandlung von Integralen bezüglich vollständigen Maßen beschränken.*

Notation. *Ist* $X \in \mathscr{A}$ *eine messbare Teilmenge von* Ω *und ist* f *auf einer Obermenge von* X *definiert, so schreiben wir kurz* $\int_X f\,\mathrm{d}\mu$ *für* $\int_X f|_X\,\mathrm{d}\mu|_{\mathscr{A}|X}$ *und sprechen von* μ*-Integrier-/Summierbarkeit über* X*. Gleichbedeutend mit* $\int_X f\,\mathrm{d}\mu$ *verwenden wir auch die Notation* $\int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$*. In der Literatur wird statt '*$\mathrm{d}\mu(x)$*' gelegentlich nur '*$\mathrm{d}\mu\,x$*' und statt '*$\mathrm{d}\mathscr{L}^n(x)$*' oft nur '*$\mathrm{d}x$*' notiert.*

Proposition 2.10 (**Erste Rechenregeln für Maßintegrale**)**.** *Seien* μ, μ_i *Maße auf* $(\Omega, \mathscr{A})$*,* $\omega_i \in [0,\infty]$ *und* $a, b \in [-\infty,\infty]$ *Parameter sowie* $f, g\colon \Omega \to [-\infty,\infty]$ *Funktionen.*

[7] *Beweis.* Sei $f\colon \Omega \to [-\infty,\infty]$ beliebig. Da μ-Oberfunktionen stets auch $\overline{\mu}$-Oberfunktionen sind mit gleichem Wert des elementaren Integrals, ist $\sideset{^*}{}\int_\Omega f\,\mathrm{d}\overline{\mu} \leq \sideset{^*}{}\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu$. Um die umgekehrte Ungleichung herzuleiten, betrachten wir eine beliebige $\overline{\mu}$-Oberfunktionen h zu f. Seien $t_1, t_2, t_3, \ldots \in [-\infty,\infty]$ die abzählbar vielen Werte, die h annimmt, und $M_i := h^{-1}\{t_i\} \in \mathscr{M}_\mu$ die zugehörigen Niveaumengen. Dann gibt es $\mathscr{A}$-messbare Teilmengen $A_i \subset M_i$ mit $\mu(A_i) = \overline{\mu}(M_i)$ und $N := \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^\infty A_i \in \mathscr{A}$ ist eine μ-Nullmenge. Folglich ist $g := \infty \cdot \mathbb{1}_N + \sum_{i=1}^\infty t_i \mathbb{1}_{A_i}$ eine μ-Oberfunktion zu f mit
$$\int_\Omega g\,\mathrm{d}\mu = \infty \cdot \mu(N) + \sum_{i=1}^\infty t_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^\infty t_i \overline{\mu}(M_i) = \int_\Omega h\,\mathrm{d}\overline{\mu}\,.$$
Deshalb gilt auch $\sideset{^*}{}\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu \leq \sideset{^*}{}\int_\Omega f\,\mathrm{d}\overline{\mu}$ und μ-Oberintegrale sind dasselbe wie $\overline{\mu}$-Oberintegrale. Analog oder durch Übergang zu $-f$ verifiziert man die Gleichheit von Unterintegralen. Und erinnern wir uns, dass μ-Messbarkeit und $\overline{\mu}$-Messbarkeit von f per Definition gleichbedeutend sind, so folgt die Gleichheit der Integrale und der Integrierbarkeitsbegriffe. □

(I) **Identität:** *Ist g μ-integrierbar mit $f = g$ μ-fast-überall auf Ω, so ist auch f μ-integrierbar mit*

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega g \, \mathrm{d}\mu \,.$$

(II) **Monotonie:** *Sind f und g μ-integrierbar mit $f \leq g$ μ-fast-überall auf Ω, so gilt*

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega g \, \mathrm{d}\mu \,.$$

(III) *Sind f und g μ-*summierbar *mit $f \leq g$ μ-fast-überall auf Ω, so gilt*

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega g \, \mathrm{d}\mu \iff f = g \;\; \mu\text{-fast-überall auf } \Omega \,.$$

(IV) **Linearität im Integranden:** *Für μ-integrierbare f und g ist*[8] *$af+bg$ auch μ-integrierbar mit*

$$\int_\Omega (af + bg) \, \mathrm{d}\mu = a \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu + b \int_\Omega g \, \mathrm{d}\mu \,,$$

vorausgesetzt die Summe auf der rechten Seite ist nicht vom Typ $\infty - \infty$.

(V) **Linearität im Maß:** *Ist f μ_i-integrierbar für alle $i \in I$, so ist f auch $\sum_{i \in I} \omega_i \mu_i$-integrierbar mit*

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\Big(\sum_{i \in I} \omega_i \mu_i \Big) = \sum_{i \in I} \omega_i \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu_i \,,$$

vorausgesetzt die Summe auf der rechten Seite ist nicht vom Typ $\infty - \infty$.

(VI) **σ-Additivität im Integrationsbereich:** *Ist f μ-integrierbar über* disjunkte *Mengen $X_1, X_2, X_3, \ldots \in \mathscr{A}$, so ist f auch μ-integrierbar über $\bigcup_{i=1}^\infty X_i$ mit*

$$\int_{\bigcup_{i=1}^\infty X_i} f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i \in \mathbb{N}} \int_{X_i} f \, \mathrm{d}\mu \,,$$

vorausgesetzt die Summe auf der rechten Seite ist nicht vom Typ $\infty - \infty$.

Bemerkung. *Als Spezialfall von (VI) ergibt sich die einfache Regel*

$$\int_\Omega \mathbb{1}_A f \, \mathrm{d}\mu = \int_A f \, \mathrm{d}\mu \qquad \text{für } A \in \mathscr{A} \,.$$

[8] Da $a \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu + b \int_\Omega g \, \mathrm{d}\mu$ nach Voraussetzung nicht vom Typ $\infty - \infty$ ist, wird einer der beiden Werte ∞ und $-\infty$ sowohl von af als auch von bg nur auf einer $\overline{\mu}$-Nullmenge angenommen, insbesondere bilden die $x \in \Omega$, für die $af(x) + bg(x)$ undefiniert vom Typ $\infty - \infty$ ist, eine $\overline{\mu}$-Nullmenge. Die behauptete Aussage ist gültig, wenn man für diese x die Werte $af(x) + bg(x)$ in beliebiger Weise festlegt.

Beweis(skizze). Wir nehmen an, dass $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ vollständig ist.

Wir beginnen mit dem Nachweis der Regel (IV), wobei wir die einfache Multiplikationsregel, die sich für $b = 0$ ergibt als bereits bewiesen betrachten. Somit können wir uns auf den Fall $a = b = 1$ beschränken. Wir zeigen nun zuerst, dass (IV) für elementare Integrale von Treppenfunktionen f und g gültig ist. Dazu rechnen wir mit der σ-Additivität von μ (beachte, dass stets alle bis auf abzählbar viele Summanden verschwinden)

$$\begin{aligned}\int_\Omega (f+g)\,\mathrm{d}\mu &= \sum_{t\in[-\infty,\infty]} t\mu((f+g)^{-1}\{t\}) \\ &= \sum_{t\in[-\infty,\infty]} \sum_{\substack{r,s\in[-\infty,\infty]\\ r+s=t}} (r+s)\mu(f^{-1}\{r\}\cap g^{-1}\{s\}) \\ &= \sum_{r\in[-\infty,\infty]} r\mu(f^{-1}\{r\}) + \sum_{s\in[-\infty,\infty]} s\mu(g^{-1}\{s\}) \\ &= \int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega g\,\mathrm{d}\mu\,.\end{aligned}$$

Aus dieser Gleichheit für elementare Integrale folgt mit der Definition des Oberintegrals

$$\int^*_\Omega (f+g)\,\mathrm{d}\mu \le \int^*_\Omega f\,\mathrm{d}\mu + \int^*_\Omega g\,\mathrm{d}\mu$$

für beliebige Funktionen f und g — solange die recht Seite nicht vom Typ $\infty-\infty$ ist. In Kombination mit der entsprechenden Ungleichung für Unterintegrale ergibt sich die behauptete Linearität des Integrals.

Zum Beweis von (II) sei $N := \{x \in \Omega \,:\, f(x) > g(x)\} \in \mathscr{A}$. Wegen $f \le g$ μ-fast-überall auf Ω ist dann N eine μ-Nullmenge. Zu jeder Oberfunktion h zu g betrachten wir jetzt die Treppenfunktion $\widetilde{h}$ mit $\widetilde{h} = h$ auf $\Omega \setminus N$ und $\widetilde{h} \equiv \infty$ auf N. Dann ist $\widetilde{h}$ eine Oberfunktion zu f mit $\int_\Omega \widetilde{h}\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega h\,\mathrm{d}\mu$. Insgesamt folgt aus dieser Überlegung $\int^*_\Omega f\,\mathrm{d}\mu \le \int^*_\Omega g\,\mathrm{d}\mu$ und wegen der Integrierbarkeit von f und g können wir die Oberintegrale in der letzten Ungleichung durch Integrale ersetzen. Wir erhalten die Behauptung von (II).

In der Situation von (I) beobachtet man zuerst, dass f gemäß Proposition 2.3 μ-messbar ist. Die Regel (I) ergibt sich dann aus der für (II) verwendeten Ungleichung für Oberintegrale und der analogen Ungleichung für Unterintegrale.

Schließlich kommen wir zu (III): ‘ $\Longleftarrow$ ’ ist mit (I) bereits bewiesen. Für ‘ $\Longrightarrow$ ’ betrachten wir die Mengen $N_k := \{x \in \Omega \,:\, f(x) + \frac{1}{k} \le g(x)\} \in \mathscr{A}$ zu $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt μ-fast-überall $g \ge f + \frac{1}{k}\mathbb{1}_{N_k}$ auf Ω und gemäß den schon bekannten Regeln (II) und (IV) ist

$$\int_\Omega g\,\mathrm{d}\mu \ge \int_\Omega \left(f + \tfrac{1}{k}\mathbb{1}_{N_k}\right)\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu + \tfrac{1}{k}\mu(N_k)\,.$$

Gilt jetzt $\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega g\,\mathrm{d}\mu$ mit endlichem Wert (Summierbarkeit!), so muss folglich $\mu(N_k) = 0$ sein. Dann ist aber auch $\bigcup_{k=1}^\infty N_k = \{x \in \Omega \,:\, f(x) < g(x)\}$ eine μ-Nullmenge und daher $f \ge g$ μ-fast-überall auf Ω. Da wir $f \le g$ μ-fast-überall auf Ω vorausgesetzt haben, erhalten wir $f = g$ μ-fast-überall auf Ω und somit ist (III) gezeigt.

Zum Beweis von (V) und (VI) verifiziert man die Behauptungen zuerst für Treppenfunktionen und argumentiert dann wie für (IV). Auf Details dazu sei hier verzichtet. □

Wir werden nun zeigen, dass nichtnegative (oder nichtpositive) μ-messbare Funktionen immer μ-integrierbar sind. Nimmt ein μ-messbares f sowohl positive als auch negative Werte an, so können wir $f = f_+ - f_-$ in seinen Positivteil $f_+ := \max\{f, 0\}$ und seinen Negativteil $f_- := -\min\{f, 0\}$ zerlegen. Nach Rechenregel (IV) berechnet sich dann das Integral von f als

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f_+ \,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega f_- \,\mathrm{d}\mu\,, \tag{2.1}$$

aber nur solange rechts nicht der Ausdruck $\infty - \infty$ auftritt. Dass der **Fall $\infty - \infty$ tatsächlich der einzige Nichtexistenzfall für Integrale messbarer Funktionen** ist, garantiert der folgende Satz:

Satz 2.11 (über **Integrierbarkeitskriterien für messbare Funktionen**). *Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f\colon \Omega \to [-\infty, \infty]$ sei μ-messbar.*

(I) Gilt $f \geq 0$ (oder $f \leq 0$) auf Ω, so ist f stets μ-integrierbar mit Integralwert $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$ in $[0, \infty]$ (oder in $[-\infty, 0]$).

(II) Genau dann ist f μ-integrierbar, wenn eines der beiden (gemäß (I) stets definierten) Integrale $\int_\Omega f_+ \,\mathrm{d}\mu$ und $\int_\Omega f_- \,\mathrm{d}\mu$ endlich ist.

(III) Genau dann ist f μ-summierbar, wenn das Integral $\int_\Omega |f| \,\mathrm{d}\mu$ endlich ist.

Beweis. Ohne Einschränkung sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ vollständig. Für (I) betrachten wir zu beliebigem $b \in]1, \infty[$ die nichtnegative $\mathscr{A}$-Treppenfunktion h_b zu

$$h_b(x) := \begin{cases} b^{z-1} & \text{falls } b^{z-1} \leq f(x) < b^z \text{ für } z \in \mathbb{Z} \\ f(x) & \text{falls } f(x) \in \{0, \infty\} \end{cases}.$$

Dann ist h_b eine Unterfunktion zu f, bh_b ist eine Oberfunktion zu f und es folgt

$$\int_\Omega^* f \,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega b h_b \,\mathrm{d}\mu = b \int_\Omega h_b \,\mathrm{d}\mu \leq b \,{}_*\!\!\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu\,.$$

Durch Grenzübergang $b \searrow 1$ erhalten wir

$$\int_\Omega^* f \,\mathrm{d}\mu \leq {}_*\!\!\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$$

und somit die μ-Integrierbarkeit von f.

Zum Nachweis von (II) zeigen wir die beiden Implikationen der behaupteten Äquivalenz: Ist einerseits eines der Integrale $\int_\Omega f_+ \,\mathrm{d}\mu$ und $\int_\Omega f_- \,\mathrm{d}\mu$ endlich, so ist f nach der Vorüberlegung (2.1) mit Rechenregel (IV) μ-integrierbar. Ist andererseits f μ-integrierbar, so können wir $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu < \infty$ annehmen (andernfalls gehe zu $-f$ über). Es gibt daher eine Oberfunktion h zu f mit $\int_\Omega h \,\mathrm{d}\mu < \infty$. Mit der Definition des elementaren Integrals folgt $\int_\Omega h_+ \,\mathrm{d}\mu < \infty$ und h_+ ist eine Oberfunktion zu f_+. Daher erhalten wir $\int_\Omega f_+ \,\mathrm{d}\mu < \infty$.

Nach Rechenregel (IV) gilt

$$\int_\Omega |f| \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f_+ \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega f_- \,\mathrm{d}\mu \,, \tag{2.2}$$

wobei alle drei Integrale in dieser Formel nach (I) stets in $[0, \infty]$ existieren. In Anbetracht von (II) und der Vorüberlegung (2.1) erhalten wir die Äquivalenz (III). □

Aus den Gleichungen (2.1) und (2.2) erhalten wir außerdem:

Bemerkung. *Für μ-integrierbare f auf Ω gilt die* **Dreiecksungleichung**

$$\left| \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \right| \le \int_\Omega |f| \,\mathrm{d}\mu \,.$$

Modellbeispiel (Teil VII). *Für unser* **Modellbeispiel** *haben wir schon gesehen, dass $f \colon \Omega \to [-\infty, \infty]$ genau dann μ-messbar ist, wenn $f(2) = f(3)$ gilt. Sind außerdem die beiden Werte $f(1)$ und $f(2) = f(3)$ nicht entgegengesetzt unendlich, so ist f μ-integrierbar mit*

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = f(1) + 13 \cdot f(2) = f(1) + 13 \cdot f(3) \,.$$

Im vorausgehenden Beispiel sind messbare Funktionen stets Treppenfunktionen und Integrale stets elementare Integrale. Tatsächlich ist dies bei abzählbaren Grundraum Ω stets so und bleibt auch bei beliebigem Ω noch für alle diskreten Maße richtig:

Beispiele. *Sind Ω und $f \colon \Omega \to [-\infty, \infty]$ beliebig, so gelten:*

- *f ist δ_x-integrierbar bezüglich Dirac-Maßen δ_x zu $x \in \Omega$ mit*

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\delta_x = f(x) \,.$$

- *f ist ξ-integrierbar bezüglich dem Zählmaß ξ auf Ω mit*

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\xi = \sum_{x \in \Omega} f(x) \,,$$

  vorausgesetzt die Summe rechts ist nicht vom Typ $\infty - \infty$.

- *f ist ω-integrierbar bezüglich einem diskreten Maß $\omega := \sum_{x \in \Omega} \omega_x \delta_x$ mit Punktmassen $\omega_x \in [0, \infty]$ und*

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\omega = \sum_{x \in \Omega} \omega_x f(x) \,,$$

  vorausgesetzt die Summe rechts ist nicht vom Typ $\infty - \infty$.

Die wichtigsten Maßintegrale sind solche bezüglich $\mathscr{L}^n$, also die eigentlichen Lebesgue-Integrale. Insbesondere ist das Lebesgue-Integral bezüglich $\mathscr{L}^1$ eine Verallgemeinerung des Riemannschen Integralbegriffs. Genauer gelten folgende Aussagen (die wir hier nicht beweisen):

Bemerkungen (zu **Riemann- und Lebesgue-$\mathscr{L}^1$-Integralen**).

- *Für $a \le b$ in $[-\infty, \infty]$ führen wir die von Riemann-Integralen vertraute Schreibweise ein durch $\int_a^b f \,\mathrm{d}\mathscr{L}^1 := \int_{]a,b[} f \,\mathrm{d}\mathscr{L}^1$. Da einzelne Punkte $\mathscr{L}^1$-Nullmengen sind, kann man auch über $[a,b[$, $]a,b]$ oder $[a,b]$ (sofern $\subset \mathbb{R}$) integrieren, ohne den Integralwert zu verändern.*

- *Ist eine beschränkte Funktion über ein beschränktes Intervall I Riemann-integrierbar, so ist sie auch $\mathscr{L}^1$-integrierbar über I mit gleichem Integralwert.*

- *Es gibt viele $\mathscr{L}^1$-integrierbare Funktionen, die nicht Riemann-integrierbar sind, beispielsweise existieren $\int_0^1 \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \,\mathrm{d}\mathscr{L}^1 = 0$ und $\int_0^1 \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} \,\mathrm{d}\mathscr{L}^1 = 1$, aber $\mathbb{1}_Q$ und $\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$ sind nicht Riemann-integrierbar über $[0,1]$.*

- *Folgendermaßen lässt sich Riemann-Integrierbarkeit im Rahmen der Lebesgueschen Theorie verstehen: Eine beschränkte Funktion auf einem beschränkten Intervall I ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn sie $\mathscr{L}^1$-fast-überall auf I stetig ist.*

- *Existieren das "normale" $\mathscr{L}^1$-Integral und das uneigentliche Riemann-Integral (über ein unbeschränktes Intervall oder von einer unbeschränkten Funktionen), so stimmen sie ebenfalls überein. Kürzungseffekte können aber dazu führen[9], dass das uneigentliche Riemann-Integral noch einen endlichen Wert annimmt, während das $\mathscr{L}^1$-Integral nicht existiert (also der Typ $\infty - \infty$ vorliegt).*

- *In ähnlicher Weise sind $\mathscr{L}^1_F$-Integrale eine Verallgemeinerung von Riemann-Stieltjes-Integralen und $\mathscr{L}^n$-Integrale eine Verallgemeinerung von iterierten Riemann-Integralen.*

Insbesondere gelingen konkrete Berechnungen von $\mathscr{L}^1$-Integralen mit denselben Techniken und Rechenregeln wie bei Riemann-Integralen. Wir werden noch sehen, dass sich die Berechnung weiterer, mehrdimensionaler Maßintegrale in vielen Situation auf $\mathscr{L}^1$-Integrale zurückzuführen lässt; ein erstes Beispiel hierfür liefert die nächste Proposition, in der wir die Notationen des Abschnitts 1.7 für Kugeln und ihr Volumen verwenden.

Proposition 2.12 (**Integrale radialer Funktionen**). *Für jede $\mathscr{L}^1$-messbare Funktion $\varphi\colon\,]r,R[\to [-\infty,\infty]$ mit $0 \le r \le R \le \infty$ gilt*

$$\int_{B^n_R(0)\setminus B^n_r(0)} \varphi(|x|) \,\mathrm{d}\mathscr{L}^n(x) = n\omega_n \int_r^R \varphi(\varrho)\varrho^{n-1} \,\mathrm{d}\mathscr{L}^1(\varrho)\,.$$

Insbesondere existieren beide Integrale oder keines.

[9] Ein konkretes Beispiel hierfür ist $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

Beweis (mit der Standard-Ausdehnungsprozedur). Wir verifizieren die Behauptung zuerst für $\varphi = \mathbb{1}_{[a,b[}$ mit $r < a \le b \le R$ durch Berechnung beider Seiten der behaupteten Gleichheit: Es ist $\varphi(|x|) = \mathbb{1}_{B_b^n(0)\setminus B_a^n(0)}(x)$ und deshalb reduziert sich die linke Seite zu $\mathscr{L}^n(B_b^n(0) \setminus B_a^n(0)) = \omega_n(b^n - a^n)$. Die rechte Seite ergibt ebenfalls $\omega_n \int_a^b n\varrho^{n-1}\,\mathrm{d}\mathscr{L}^1(\varrho) = \omega_n(b^n - a^n)$ und die Behauptung ist für $\varphi = \mathbb{1}_{[a,b[}$ gezeigt.

Betrachtet man allgemeiner $\varphi = \mathbb{1}_A$ mit $A \in \mathscr{B}(]r,R[)$, so kann man die beiden Seiten der Behauptung als Maße (in A) verstehen, die gemäß dem schon Gezeigten auf $\mathscr{I}_1 \cap \mathscr{P}(]r,R[)$ übereinstimmen. Nach dem Maßfortsetzungssatz gilt die Behauptung daher stets für $\varphi = \mathbb{1}_A$ und mit Rechenregel (IV) folgt sie für alle Borel-Treppenfunktionen φ mit endlich vielen Stufen.

Ist schließlich φ eine nichtnegative $\mathscr{L}^1$-messbare Funktion, so können wir φ nach Korollar 2.6 und Lemma 2.5 von unten durch eine $\mathscr{L}^1$-fast-überall konvergente Folge von $\mathscr{B}(]r,R[)$-Treppenfunktionen h_k mit endlich vielen Stufen approximieren. Es folgen die Konvergenzen $h_k(\varrho)\varrho^{n-1} \to \varphi(\varrho)\varrho^{n-1}$ für $\mathscr{L}^1$-fast-alle $\varrho \in]r,R[$ und $h_k(|x|) \to \varphi(|x|)$ für $\mathscr{L}^n$-fast-alle[10] $x \in B_R^n(0) \setminus B_r^n(0)$. Der bald folgende Satz 2.15 (I) wird Konvergenz der zugehörigen Integrale sicherstellen und erlaubt die Übertragung der Behauptung von den h_k auf φ.

Die oben angegebene Version der Proposition ergibt sich schließlich durch Zerlegung $\varphi = \varphi_+ - \varphi_-$. □

Anwendung (Integrale von Potenzfunktionen). *Für $s \in \mathbb{R}$ gelten*

$$\int_{B_1^n(0)} |x|^s\,\mathrm{d}\mathscr{L}^n(x) = n\omega_n \int_0^1 \varrho^{s+n-1}\,\mathrm{d}\mathscr{L}^1(\varrho) = \begin{cases} \frac{n\omega_n}{s+n} & \text{für } s > -n \\ \infty & \text{für } s \le -n \end{cases},$$

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_1^n(0)} |x|^s\,\mathrm{d}\mathscr{L}^n(x) = n\omega_n \int_1^\infty \varrho^{s+n-1}\,\mathrm{d}\mathscr{L}^1(\varrho) = \begin{cases} \infty & \text{für } s \ge -n \\ \frac{n\omega_n}{-s-n} & \text{für } s < -n \end{cases}.$$

Insbesondere ist $\int_{\mathbb{R}^n} |x|^s\,\mathrm{d}\mathscr{L}^n(x)$ für alle $s \in \mathbb{R}$ unendlich. Da $\int_{B_1^n(0)} x_i^2\,\mathrm{d}\mathscr{L}^n$ für alle $i \in \{1,2,\dots,n\}$ den gleichen Wert hat (vergleiche die Bemerkung zur Isometrie-Invarianz in Abschnitt 2.7), sehen wir außerdem

$$\int_{B_1^n(0)} x_i^2\,\mathrm{d}\mathscr{L}^n(x) = \frac{1}{n}\int_{B_1(0)} |x|^2\,\mathrm{d}\mathscr{L}^n(x) = \frac{\omega_n}{n+2}\,.$$

Statt $[-\infty,\infty]$-wertigen Funktionen (wie wir sie bisher betrachtet haben) kann man auch komplexwertige und vektorwertige Funktionen integrieren:

Definition 2.13 (Integrale $\mathbb{C}$-wertiger und vektorwertiger Funktionen). *Sei $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ ein Maßraum. Wir erklären das (μ-)Integral für eine μ-messbare $\mathbb{C}$-wertige Funktion $f = \Re(f) + \mathrm{i}\,\Im(f)\colon \Omega \to \mathbb{C}$ durch*

$$\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu := \int_\Omega \Re(f)\,\mathrm{d}\mu + \mathrm{i}\int_\Omega \Im(f)\,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{C}$$

[10] An dieser Stelle benutzen wir implizit, dass für jede $\mathscr{L}^1$-Nullmenge N die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \in N\}$ eine $\mathscr{L}^n$-Nullmenge ist; dies folgt aus dem vorigen Beweisschritt, zunächst für Borelsches N und dann auch allgemein.

und für eine μ-messbare $\mathbb{R}^m$-wertige Funktion $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ durch

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu := \left(\int_\Omega f_1 \,\mathrm{d}\mu \,,\, \int_\Omega f_2 \,\mathrm{d}\mu \,,\, \ldots \,,\, \int_\Omega f_m \,\mathrm{d}\mu \right) \in \mathbb{R}^m .$$

Ist schließlich V ein abstrakter endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, so wählen wir eine Basis $e_1, e_2, \ldots, e_m$ von V und definieren das (μ-)Integral einer μ-messbaren V-wertigen Funktionen $f = \sum_{i=1}^m f_i e_i \colon \Omega \to V$ durch

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu := \sum_{i=1}^m \left(\int_\Omega f_i \,\mathrm{d}\mu \right) e_i \in V$$

Jeweils heißt f μ-summierbar, wenn alle Integrale auf den rechten Seiten der Definitionen definiert und endlich sind, und das Integral auf der linken Seite wird **nur für $\boldsymbol{\mu}$-summierbare $\boldsymbol{f}$ erklärt**.

Bemerkungen.

- *Die Konzepte der Integration von $\mathbb{C}$- und $\mathbb{R}^2$-wertigen Funktionen stimmen bei Identifikation $a + \mathrm{i}\, b = (a, b)$ überein und die Integration $\mathbb{R}^m$-wertiger Funktionen ist als Spezialfall im V-wertigen Fall enthalten.*

- *Für V-wertige Funktionen definiert man μ-Messbarkeit mit Hilfe der Borel-σ-Algebra $\mathscr{B}(V)$ zu einer von einer Norm induzierten Topologie auf V. Da auf dem endlich-dimensionalen Vektorraum V alle Normen äquivalent sind, hängt diese Topologie nicht von der Wahl der Norm ab.*

- *Das Integral V-wertiger Funktionen hängt nicht von der Basiswahl in V ab und ist somit wohldefiniert.*

- *Integrale $\mathbb{C}$-wertiger Funktionen hängen $\mathbb{C}$-linear vom Integranden ab, das heißt die Rechenregel (IV) gilt in diesem Fall für Faktoren $a, b \in \mathbb{C}$. Allgemeiner liegt im vektorwertigen Fall* **Linearität bezüglich Multiplikationen mit Skalaren und Vektoren** *vor und noch allgemeiner gilt für jede lineare Abbildung $T\colon V \to W$ in einen endlich-dimensionalen Vektorraum W*

$$\int_\Omega (T \circ f) \,\mathrm{d}\mu = T\left(\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \right) \in W .$$

- *Für jede Norm $|\cdot|$ auf V (insbesondere für die Euklidische Norm auf $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^m$) gilt in Verallgemeinerung von Proposition 2.11 (III): Ein μ-messbares V-wertiges f ist genau dann μ-summierbar, wenn $\int_\Omega |f| \,\mathrm{d}\mu$ endlich ist. Analog gilt auch die* **Dreiecksungleichung für beliebige Normen**.

- *Viele der bisher behandelten und der folgenden Sachverhalte über Integrale gelten bei Werten in endlich-dimensionalen Vektorräumen V analog. Unterschiede zum $[-\infty, \infty]$-wertigen Fall gibt es üblicherweise nur im Zusammenhang mit unendlichen Werten oder Ungleichungen. Wir werden auf eine explizite Diskussion des V-wertigen Falls meist verzichten.*

- *Die Integration von Funktionen mit Werten in unendlich-dimensionalen Vektorräumen ist prinzipiell sinnvoll, aber schwieriger; es gibt für solche Funktionen mehrere verschiedene Integralbegriffe, die im Allgemeinen nicht zusammenfallen.*

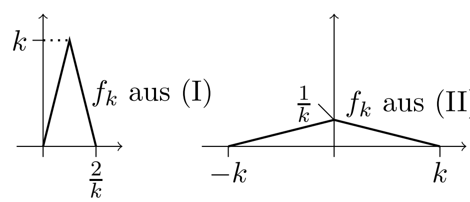
2.3 Konvergenzsätze für Integrale

Eine für viele Anwendungen wichtige Fragestellung ist, ob man aus einer Konvergenz von Integranden schon auf Konvergenz der zugehörigen Integrale schließen kann. Mit anderen Worten handelt es sich dabei um die Frage, ob Vertauschungen von Limes und Integral gerechtfertig sind und Maßintegrale stetig vom Integranden abhängen. Dass man Stetigkeit im Allgemeinen nicht erwarten kann, zeigen die folgenden beiden Gegenbeispiel mit Zackenfunktionen.

Beispiel. $f_k \colon \mathbb{R} \to [0,\infty]$ *sei definiert durch*

(I) $f_k(x) := \big(k - k^2\big|x - \frac{1}{k}\big|\big)_+$ *oder*

(II) $f_k(x) := \big(\frac{1}{k} - \frac{|x|}{k^2}\big)_+$.



In beiden Fällen konvergiert f_k *punktweise auf* $\mathbb{R}$ *gegen* 0 *bei* $k \to \infty$, *aber* $\int_\Omega f_k \,\mathrm{d}\mathscr{L}^1 = 1$ *konvergiert nicht gegen* 0. *Bei (I) sind außerdem die Träger der* f_k *gleichmäßig beschränkt, während bei (II) die Konvergenz gleichmäßig ist.*

Wenn auch nicht stetig, so hängen Integrale nichtnegativer Funktionen aber zumindest **unterhalbstetig** vom Integranden ab:

Lemma 2.14 (von Fatou). *Sei* $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ *ein Maßraum und die Funktionen* $f_k \colon \Omega \to [0,\infty]$ *seien nichtnegativ und* μ*-messbar. Dann gilt*

$$\int_\Omega \big(\liminf_{k\to\infty} f_k\big)\,\mathrm{d}\mu \le \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega f_k \,\mathrm{d}\mu\,.$$

Beweis. Sei $f := \liminf_{k\to\infty} f_k \ge 0$, $h \colon \Omega \to [0,\infty[$ sei eine μ-Unterfunktion zu f und $\varepsilon > 0$ sei fixiert. Wir können $h = \sum_{i=1}^\infty t_i \mathbb{1}_{A^i}$ mit $t_i \in [0,\infty[$ und disjunkten $A^i \in \mathscr{A}$ schreiben und setzen

$$A^i_k := \bigcap_{n=k}^\infty \{x \in A^i \,:\, f_n(x) \ge (1{-}\varepsilon)t_i\} \in \mathscr{M}_\mu\,.$$

Es ist $A^i_1 \subset A^i_2 \subset A^i_3 \subset \ldots$ und nach Wahl von f und h gilt außerdem $\bigcup_{k=1}^\infty A^i_k = A^i$. Daher folgt

$$\begin{aligned}\liminf_{k\to\infty} \int_\Omega f_k \,\mathrm{d}\mu &\ge \liminf_{k\to\infty} \sum_{i=1}^M \int_{A^i_k} f_k \,\mathrm{d}\overline{\mu}\\ &\ge (1{-}\varepsilon) \liminf_{k\to\infty} \sum_{i=1}^M t_i \overline{\mu}(A^i_k) = (1{-}\varepsilon) \sum_{i=1}^M t_i \mu(A^i)\end{aligned}$$

für alle $M \in \mathbb{N}$. Mit den Grenzübergängen $\varepsilon \searrow 0$ und $M \to \infty$ erhalten wir

$$\liminf_{k\to\infty} \int_\Omega f_k \,\mathrm{d}\mu \geq \int_\Omega h \,\mathrm{d}\mu \,.$$

Die letzte Ungleichung folgt nun auch für alle Unterfunktionen h zu f (nicht nur für die $[0,\infty[$-wertigen) und deshalb ergibt sich durch Supremumsbildung

$$\liminf_{k\to\infty} \int_\Omega f_k \,\mathrm{d}\mu \geq {}_*\!\!\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \,. \qquad \square$$

Die wichtige Erkenntnis dieses Abschnitts ist aber, dass Stetigkeit unter gewissen Zusatzvoraussetzungen doch vorliegt:

Satz 2.15 (**Konvergenzsätze für Integrale**)**.** *Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum, die Funktionen $f_k \colon \Omega \to [-\infty, \infty]$ seien μ-messbar und es konvergiere $f_k \to f$ μ-fast-überall bei $k \to \infty$. Dann folgt Konvergenz der Integrale*

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \,, \tag{2.3}$$

vorausgesetzt eine der folgenden Zusatzbedingungen liegt vor*:*

- **Satz von Beppo Levi über monotone Konvergenz***: Es gelte*

$$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \dots \qquad \mu\text{-fast-überall auf } \Omega$$

- **Satz von Lebesgue über dominierte/majorisierte Konvergenz***: Es gelte*

$$|f_k| \leq g \qquad \mu\text{-fast-überall auf } \Omega$$

  für alle $k \in \mathbb{N}$ und eine μ-summierbare Majorante g (das heißt μ-messbar mit $\int_\Omega g \,\mathrm{d}\mu < \infty$).

- **Konvergenzsatz von Vitali***: Es sei $\mu(\Omega) < \infty$, die f_k und f seien $\mathbb{R}$-wertig, und die f_k seien gleichgradig μ-integrierbar über Ω, dass heißt zu jedem $\varepsilon > 0$ gebe es ein $\delta > 0$, so dass für alle $A \in \mathscr{A}$ gilt:*

$$\mu(A) < \delta \implies \sup_{k\in\mathbb{N}} \int_A |f_k| \,\mathrm{d}\mu < \varepsilon \,.$$

Bemerkungen (Varianten der Konvergenzssätze)**.**

- *Ein weiterer (trivialer) Konvergenzsatz besagt, dass Konvergenz der Integrale im Falle $\mu(\Omega) < \infty$ (und bei $\mathbb{R}$-wertigen Integranden) aus gleichmäßiger Konvergenz $f_k \to f$ folgt. Ist aber $\mu(\Omega) = \infty$, so haben wir im einleitenden Beispiel bereits gesehen, dass gleichmäßige Konvergenz für diesen Schluß nicht ausreicht.*

- *Das Lemma von Fatou und der Satz über monotone Konvergenz gelten noch, wenn man statt Nichtnegativität nur voraussetzt, dass $f_k \geq g$ μ-fast-überall für alle $k \in \mathbb{N}$ und ein μ-messbares g mit $\int_\Omega g_- \,\mathrm{d}\mu < \infty$ gilt.*

- *Der Satz über dominierte Konvergenz gilt noch, wenn man von k abhängige Majoranten g_k zulässt, für die $g_k \to g$ μ-fast-überall bei $k \to \infty$ konvergiert und man Konvergenz $\int_\Omega g_k \, \mathrm{d}\mu \to \int_\Omega g \, \mathrm{d}\mu$ der zugehörigen Integrale bereits weiß.*

Korollar 2.16 (über Funktionenreihen)**.** *Für nichtnegative μ-messbare $f_k \colon \Omega \to [0,\infty]$ gilt stets*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_\Omega f_k \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \Big(\sum_{k=1}^{\infty} f_k \Big) \, \mathrm{d}\mu \,.$$

Korollar 2.17. *Ist f μ-summierbar, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ stets ein $\delta > 0$, so dass für alle $A \in \mathscr{A}$ gilt:*

$$\mu(A) < \delta \implies \int_A |f| \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon \,.$$

Diese Eigenschaft heißt **Absolutstetigkeit des Integrals**.

Beweis. Sei $f_k := \min\{|f|, k\}$. Nach dem Satz über dominierte Konvergenz (mit Majorante $|f|$) gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$\int_\Omega (|f| - f_k) \, \mathrm{d}\mu < \frac{\varepsilon}{2} \,.$$

Wählen wir jetzt $\delta := \frac{\varepsilon}{2k}$, so gilt im Falle $\mu(A) < \delta$ stets

$$\int_A |f| \, \mathrm{d}\mu = \int_A f_k \, \mathrm{d}\mu + \int_A (|f| - f_k) \, \mathrm{d}\mu \le k\mu(A) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \,. \qquad \square$$

In Anbetracht des vorigen Korollars stellt sich übrigens der Satz über dominierte Konvergenz als Spezialfall des Konvergenzsatzes von Vitali heraus.

Korollar 2.18 (über **stetige Abhängigkeit von Parametern**)**.** *Für ein $f \colon \Omega \times P \to [-\infty, \infty]$ mit metrischem Parameterraum P gelte:*

- *$f(x, \cdot\,) \colon P \to [-\infty, \infty]$ ist für μ-fast-alle $x \in \Omega$ eine stetige Funktion,*
- *$f(\,\cdot\,, p) \colon \Omega \to [-\infty, \infty]$ ist für alle $p \in \Omega$ eine μ-summierbare Funktion mit einer von p unabhängigen μ-summierbaren Majoranten.*

Dann ist

$$P \to \mathbb{R},\ p \mapsto \int_\Omega f(x,p) \, \mathrm{d}\mu(x)$$

eine stetige Funktion.

Beweis. Nach dem Satz über dominierte Konvergenz gilt für $p_k \to p$ in P stets

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega f(x, p_k) \, \mathrm{d}\mu(x) = \int_\Omega f(x,p) \, \mathrm{d}\mu(x) \,. \qquad \square$$

Hängen Integranden differenzierbar von einem Parameter ab mit einer Majorante für die Ableitung, so gilt eine ähnliche Aussage über **differenzierbare Abhängigkeit von Parametern**, die wir hier nicht explizit ausformulieren.

Beweis von Satz 2.15. Unter der Zusatzvoraussetzung (I) ist $f_k \le f$ μ-fast-überall auf Ω und deshalb gilt '$\le$' in (2.3). Andererseits folgt '$\ge$' gemäß dem Lemma von Fatou.

In der Situation (II) gelten $|f| \le g$ und

$$2g - |f_k - f| \ge 2g - |f_k| - |f| \ge 0$$

μ-fast-überall auf Ω. Daher folgt mit Fatou

$$\int_\Omega 2g \,\mathrm{d}\mu \le \varliminf_{k\to\infty} \int_\Omega (2g - |f_k - f|)\,\mathrm{d}\mu \le \int_\Omega 2g\,\mathrm{d}\mu\,,$$

und mit der Dreiecksungleichung ergibt sich

$$\varlimsup_{k\to\infty} \left| \int_\Omega f_k \,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu \right| \le \varlimsup_{k\to\infty} \int_\Omega |f_k - f|\,\mathrm{d}\mu = 0\,.$$

Damit ist (2.3) auch unter (II) bewiesen.

Im Falle der Voraussetzung (III) sei zunächst $k \in \mathbb{N}$ fixiert. Da f_k nur endliche Werte hat, gilt $\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in \Omega : |f_k(x)| > n\}) = 0$ gemäß Satz 1.6, und mit der gleichgradigen Integrierbarkeit erhält man $\int_{\{x\in\Omega : |f_k(x)|>n_k\}} |f_k|\,\mathrm{d}\mu < 1$ für ein ausreichend großes $n_k \in \mathbb{N}$. Es folgt $\int_\Omega |f_k|\,\mathrm{d}\mu < n_k\mu(\Omega) + 1 < \infty$, und somit ist $\int_\Omega f_k\,\mathrm{d}\mu$ überhaupt wohldefiniert. Ein ähnliches Argument, bei dem außerdem das Lemma von Fatou eingeht, zeigt die Wohldefiniertheit von $\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu$. Die eigentliche Konvergenzaussage schließlich ergibt sich aus dem folgenden Satz 2.19. □

Satz 2.19 (von Jegorow[11]). *Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum, X ein metrischer Raum, die Funktionen $f_k\colon \Omega \to X$ seien μ-messbar und es konvergiere $f_k \to f$ μ-fast-überall bei $k \to \infty$. Ist $\mu(\Omega) < \infty$, so gibt es zu jedem $\delta > 0$ ein $A \in \mathscr{A}$ mit*

$$\mu(A) < \delta \qquad \textit{und} \qquad f_k \to f \text{ gleichmäßig } \textit{auf } \Omega \setminus A \textit{ bei } k \to \infty\,.$$

Beweis. Wir erinnern uns, dass f nach Proposition 2.3 μ-messbar ist, und nehmen ohne Einschränkung an, dass $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ vollständig ist. Wir setzen

$$A_k^i := \bigcup_{n=k}^\infty \{x \in \Omega \,:\, d(f_n(x), f(x)) > \tfrac{1}{i}\} \in \mathscr{A} \qquad \text{für } i, k \in \mathbb{N}$$

mit der Metrik d von X. Dann ist $A_1^i \supset A_2^i \supset A_3^i \supset \ldots$ und nach Voraussetzung ist $\bigcap_{k=1}^\infty A_k^i$ eine μ-Nullmenge. Wegen $\mu(\Omega) < \infty$ folgt $\lim_{k\to\infty} \mu(A_k^i) = 0$ und es gibt zu jedem $i \in \mathbb{N}$ ein $k_i \in \mathbb{N}$ mit $\mu(A_{k_i}^i) < 2^{-i}\delta$. Wählen wir schließlich

$$A := \bigcup_{i=1}^\infty A_{k_i}^i \in \mathscr{A}\,,$$

so ist $\mu(A) < \delta$ und für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt

$$d(f_n(x), f(x)) \le \frac{1}{i} \qquad \text{für alle } x \in \Omega \setminus A \text{ und } k_i \le n \in \mathbb{N}\,.$$

Somit liegt gleichmäßige Konvergenz $f_k \to f$ auf $\Omega \setminus A$ vor. □

[11] Auch alternative Transkriptionen dieses russischen Namens sind gebräuchlich, beispielsweise wird in englischsprachiger Literatur oft 'Egoroff' geschrieben.

2.4 Produktmaße und der Satz von Fubini

In diesem Abschnitt wollen wir das Produkt zweier Maßräume $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ und $(X, \mathscr{S}, \nu)$ erklären und fixieren deshalb zusätzlich zu Ω eine weitere beliebige Menge X als Grundraum. Wir können bereits sagen, dass der Grundraum des Produkts das cartesische Produkt $\Omega \times X$ sein wird, während wir Produkte von σ-Algebren und Maßen erst noch definieren müssen. Als ersten Schritt dorthin beginnen wir mit den naheliegenden Produktbildungen für Halbringe und Prämaße:

Satz & Definition 2.20 (Produkte von Halbringen und Prämaßen)**.** *Für zwei Mengensysteme $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ und $\mathscr{S} \subset \mathscr{P}(X)$ setzen wir*

$$\mathscr{A} \times \mathscr{S} := \{A \times S \,:\, A \in \mathscr{A} \text{ und } S \in \mathscr{S}\} \subset \mathscr{P}(\Omega \times X)\,.$$

Sind $\mathscr{A}$ und $\mathscr{S}$ Halbringe, so ist auch $\mathscr{A} \times \mathscr{S}$ ein Halbring, und sind außerdem $\mu\colon \mathscr{A} \to [0,\infty]$ und $\nu\colon \mathscr{S} \to [0,\infty]$ Prämaße, so definiert die Festlegung

$$(\mu \times \nu)(A \times S) := \mu(A) \cdot \nu(S) \qquad \text{für alle } A \in \mathscr{A} \text{ und } S \in \mathscr{S}$$

ein Prämaß $\mu \times \nu\colon \mathscr{A} \times \mathscr{S} \to [0,\infty]$, das Produktprämaß von μ und ν.

Notation (für **Schnitte**)**.** *Für $P \subset \Omega \times X$, $\omega \in \Omega$ und $x \in X$ vereinbaren wir die Schreibweisen*

$$\begin{aligned} {}_\omega P &:= \{x \in X \,:\, (\omega, x) \in P\} \subset X\,, \\ P_x &:= \{\omega \in \Omega \,:\, (\omega, x) \in P\} \subset \Omega\,. \end{aligned}$$

Speziell für $A{\times}S \in \mathscr{A}{\times}\mathscr{S} \subset \mathscr{P}(\Omega{\times}X)$ ergeben sich daraus

$$\nu({}_\omega(A \times S)) = \mathbb{1}_A(\omega) \cdot \nu(S) \qquad \text{und} \qquad \mu((A \times S)_x) = \mu(A) \cdot \mathbb{1}_S(x)\,.$$

Beweis des Satzes. Wir führen den Beweis der Halbringeigenschaft von $\mathscr{A} \times \mathscr{S}$ nicht aus, denn dieser ist eine einfache, abstrakte Variante des Nachweises, dass $\mathscr{I}_2$ ein Halbring ist. Um die σ-Additivität von $\mu \times \nu$ zu verifizieren, betrachten wir $A, A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathscr{A}$ und $S, S_1, S_2, S_3, \ldots \in \mathscr{S}$ mit disjunkten $A_i \times S_i$ und

$$A \times S = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \times S_i)\,.$$

Dann ergibt sich mit Korollar 2.16 (wobei $\widehat{\mu}$ irgendeine Fortsetzung von μ zu einem Maß bezeichnet)

$$\begin{aligned} (\mu \times \nu)(A \times S) = \mu(A) \cdot \nu(S) &= \int_\Omega \mathbb{1}_A \cdot \nu(S) \,\mathrm{d}\widehat{\mu} = \int_\Omega \nu({}_\omega(A \times S)) \,\mathrm{d}\widehat{\mu}(\omega) \\ &= \int_\Omega \nu\bigg(\bigcup_{i=1}^{\infty} {}_\omega(A_i \times S_i)\bigg) \,\mathrm{d}\widehat{\mu}(\omega) = \int_\Omega \sum_{i=1}^{\infty} \nu({}_\omega(A_i \times S_i)) \,\mathrm{d}\widehat{\mu}(\omega) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_\Omega \nu({}_\omega(A_i \times S_i)) \,\mathrm{d}\widehat{\mu}(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_\Omega \mathbb{1}_{A_i} \cdot \nu(S_i) \,\mathrm{d}\widehat{\mu} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \cdot \nu(S_i) = \sum_{i=1}^{\infty} (\mu \times \nu)(A_i \times S_i)\,. \end{aligned}$$

□

Wichtiger als Produkte von Halbringen und Prämaßen sind Produkte von σ-Algebren und Maßen. Allerdings ist für zwei σ-Algebren $\mathscr{A}$ und $\mathscr{S}$ das einfache Produkt $\mathscr{A} \times \mathscr{S}$ nicht notwendig wieder eine σ-Algebra[12], wehalb wir zur davon erzeugten σ-Algebra übergehen:

Definition 2.21 (**Produkt-σ-Algebren und Produktmaße**)**.** *Sind* $(\Omega, \mathscr{A})$ *und* $(X, \mathscr{S})$ *zwei Messräume, so heißt die* σ*-Algebra*

$$\mathscr{A} \otimes \mathscr{S} := \sigma(\mathscr{A} \times \mathscr{S}) \subset \mathscr{P}(\Omega \times X)$$

über $\Omega \times X$ *die Produkt-*σ*-Algebra von* $\mathscr{A}$ *und* $\mathscr{S}$*. Ist außerdem* μ *ein Maß auf* $(\Omega, \mathscr{A})$ *und ist* ν *ein Maß auf* $(X, \mathscr{S})$*, so nennen wir das Maß*

$$(\mu \otimes \nu) := (\mu \times \nu)^*|_{\mathscr{A} \otimes \mathscr{S}}$$

auf $(\Omega \times X, \mathscr{A} \otimes \mathscr{S})$ *das Produktmaß von* μ *und* ν*.*

Bemerkungen (zu Produkt-σ-Algebren)**.**

- *Sind* $\mathscr{E}$ *ein Erzeuger von* $\mathscr{A}$ *und* $\mathscr{F}$ *ein Erzeuger von* $\mathscr{S}$*, so ist* $\mathscr{E} \times \mathscr{F}$ *ein Erzeuger von* $\mathscr{A} \otimes \mathscr{S}$*.*

- *Schnitte messbarer Mengen sind messbar, genauer gelten*[13] *für* $P \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{S}$, $\omega \in \Omega$ *und* $x \in X$ *stets* ${}_{\omega}P \in \mathscr{S}$ *und* $P_x \in \mathscr{A}$*.*

- *Ist* $(Y, \mathscr{H})$ *ein weiterer Messraum und* $f\colon \Omega \times X \to Y$ *eine* $(\mathscr{A} \otimes \mathscr{S}, \mathscr{H})$*-messbare Funktion, so ist*[14] $f(\omega, \cdot)\colon X \to Y$ *(mit* $\omega \in \Omega$*) stets* $(\mathscr{S}, \mathscr{H})$*-messbar und* $f(\cdot, x)\colon \Omega \to Y$ *(mit* $x \in X$*) ist* $(\mathscr{A}, \mathscr{H})$*-messbar.*

Bemerkungen (zu Produktmaßen)**.**

- $(\,\cdot\,)^*$ *bezeichnet wieder die Carathéodory-Konstruktion aus Satz 1.33 in Abschnitt 1.6 und somit gilt*

  $$(\mu \otimes \nu)(A \times S) = (\mu \times \nu)(A \times S) = \mu(A) \cdot \nu(S) \qquad \text{für } A \in \mathscr{A} \text{ und } S \in \mathscr{S}.$$

  Aus Satz 1.33 wissen wir außerdem, dass die Mengen aus $\mathscr{A} \times \mathscr{S}$ *und folglich auch die aus* $\mathscr{A} \otimes \mathscr{S}$ *stets* $(\mu \times \nu)^*$*-messbar sind. Nach Satz 1.32 ist daher* $\mu \otimes \nu$ *tatsächlich ein(e Fortsetzung von* $\mu \times \nu$ *zu einem) Maß auf* $\mathscr{A} \otimes \mathscr{S}$*.*

- *Sind* μ *und* ν *(und dann auch* $\mu \times \nu$*)* σ*-endlich, so ist diese Fortsetzung nach dem Maßfortsetzungssatz* eindeutig bestimmt*. Ohne* σ*-Endlichkeit und die sich daraus ergebende Eindeutigkeit ist die Verwendung von Produktmaßen meist nicht sinnvoll.*

[12] Tatsächlich ist $\mathscr{A} \times \mathscr{S}$ nur dann wieder eine σ-Algebra, wenn $\mathscr{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ oder $\mathscr{S} = \{\emptyset, X\}$ gilt. Andernfalls ist $\mathscr{A} \times \mathscr{S}$ nicht abgeschlossen unter Komplementbildung, da Komplemente von (nichttrivialen) cartesischen Produkten sich nicht wieder als cartesische Produkte schreiben lassen.

[13] *Beweis.* Man verifiziert, dass $\{P \in \mathscr{P}(\Omega \times X) \,:\, {}_{\omega}P \in \mathscr{S} \text{ für alle } \omega \in \Omega, P_x \in \mathscr{A} \text{ für alle } x \in X\}$ eine σ-Algebra ist, die $\mathscr{A} \times \mathscr{S}$ und folglich auch $\mathscr{A} \otimes \mathscr{S}$ enthält. □

[14] *Beweis.* Für $H \in \mathscr{H}$ erhält man $f(\omega, \cdot)^{-1}(H) = {}_{\omega}(f^{-1}(H)) \in \mathscr{S}$. □

Die wichtigsten konkrete Produktmaße sind solche von Lebesgue-Maßen:

Satz 2.22 (Produkte von Lebesgue-(Borel-)Maßen). *Seien $k, l \in \mathbb{N}$*

(I) Für die Lebesgue-Borelschen Maßräume gilt[15]

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}^k) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}^l) = \mathscr{B}(\mathbb{R}^{k+l}) \qquad \textit{und} \qquad \beta^k \otimes \beta^l = \beta^{k+l}\,.$$

(II) Für die Lebesgueschen Maßräume dagegen ist $\mathscr{M}^k \otimes \mathscr{M}^l$ eine echte Teilmenge von $\mathscr{M}^{k+l}$. Nach Vervollständigung gilt aber dennoch

$$\overline{\mathscr{L}^k \otimes \mathscr{L}^l} = \mathscr{L}^{k+l}\,,$$

insofern unterscheiden sich $\mathscr{M}^k \otimes \mathscr{M}^l$ und $\mathscr{M}^{k+l}$ nur um Nullmengen.

Beweis. (I) Die Gleichheit $\mathscr{B}(\mathbb{R}^k) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}^l) = \mathscr{B}(\mathbb{R}^{k+l})$ erhält man aus der vorausgehenden Bemerkung zu Erzeugern von $\mathscr{A} \otimes \mathscr{S}$ und der elementaren Gleichhheit $\mathscr{I}_k \times \mathscr{I}_l = \mathscr{I}_{k+l}$. Zusammen mit dem Eindeutigkeitsteil der Maßfortsetzungssatzes ergibt sich auch die Produktformel $\beta^k \otimes \beta^l = \beta^{k+l}$.

(II) Wir zeigen zuerst, dass $\mathscr{M}^k \times \mathscr{M}^l \subset \mathscr{M}^{k+l}$ und als Konsequenz auch $\mathscr{M}^k \otimes \mathscr{M}^l \subset \mathscr{M}^{k+l}$ gilt: Sind nämlich $A^k \in \mathscr{M}^k$ und $A^l \in \mathscr{M}^l$ gegeben, so gibt es Borel-Mengen B^k, B^l, eine $\mathscr{L}^k$-Nullmenge T^k und eine $\mathscr{L}^l$-Nullmenge T^l mit $A^k = B^k \cup T^k$ und $A^l = B^l \cup T^l$. Es folgt

$$A^k \times A^l = \underbrace{(B^k \times B^l)}_{\text{Borelsch}} \cup \underbrace{(B^k \times T^l) \cup (T^k \times B^l) \cup (T^k \times T^l)}_{\mathscr{L}^{k+l}\text{-Nullmenge}} \in \mathscr{M}^{k+l}\,.$$

Als Nächstes begründen wir, dass $\mathscr{M}^k \times \mathscr{M}^l$ tatsächlich eine echte (!) Teilmenge von $\mathscr{M}^{k+l}$ ist: Ist nämlich A die Vitali-Menge in $\mathbb{R}^k$, so ist $A \times \{0\}^l$ als $\mathscr{L}^{k+l}$-Nullmenge in $\mathscr{M}^{k+l}$, aber nach einer obigen Bemerkung zur Messbarkeit von Schnitten kann $A \times \{0\}^l$ nicht in $\mathscr{M}^k \times \mathscr{M}^l$ sein.

Zum Beweis der Produktformel für Lebesgue-Maße überlegt man sich, dass nach der Formel für Lebesgue-Borel-Maße, der Definition der Vervollständigung und den vorausgehenden Argumenten

$$\mathscr{L}^k \otimes \mathscr{L}^l = \mathscr{L}^{k+l}|_{\mathscr{M}^k \otimes \mathscr{M}^l}$$

gilt. Wendet man nun die Minimalitätseigenschaft der Vervollständigung auf die vollständige Fortsetzung $\mathscr{L}^{k+l}$ von $\mathscr{L}^k \otimes \mathscr{L}^l$ an, so folgt, dass $\mathscr{L}^{k+l}$ eine Fortsetzung von $\overline{\mathscr{L}^k \otimes \mathscr{L}^l}$ ist. Benutzt man die Minimalitätseigenschaft ein weiteres Mal für die vollständige Fortsetzung $\overline{\mathscr{L}^k \otimes \mathscr{L}^l}$ von β^{k+l}, so ergibt sich, dass $\overline{\mathscr{L}^k \otimes \mathscr{L}^l}$ aber auch eine Fortsetzung von $\mathscr{L}^{k+l} = \overline{\beta^{k+l}}$ ist, insgesamt also $\overline{\mathscr{L}^k \otimes \mathscr{L}^l} = \mathscr{L}^{k+l}$. □

Der wohl wichtigste und nützlichste Satz über Produktmaße ist:

[15] Allgemeiner bleibt $\mathscr{B}(X) \otimes \mathscr{B}(Y) = \mathscr{B}(X \times Y)$ für alle Teilmengen $X \subset \mathbb{R}^k$ und $Y \subset \mathbb{R}^l$ richtig, wenn X, Y und $X \times Y$ jeweils mit der Spurtopologie versehen werden, und noch allgemeiner für alle separablen metrischen Räume, wenn man $X \times Y$ mit der sogenannten Produkttopologie versieht. Für topologische Räume gilt aber im Allgemeinen nur die Inklusion $\mathscr{B}(X) \otimes \mathscr{B}(Y) \subset \mathscr{B}(X \times Y)$; siehe [3, Kapitel III.5] für Weiteres.

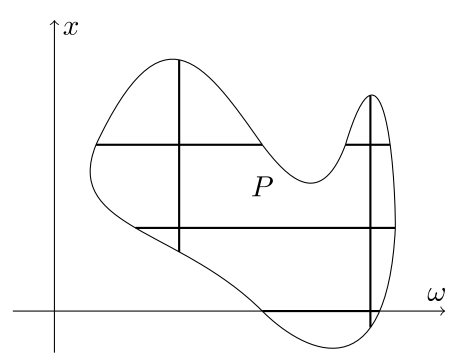
Satz 2.23 (**von Fubini**(-Tonelli), ∼1907)**.** *Für zwei Maßräume* $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ *und* $(X, \mathscr{S}, \nu)$ *mit* σ*-endlichen Maßen* μ *und* ν *und eine* $\mu\otimes\nu$*-integrierbare Funktion* $f\colon \Omega \times X \to [-\infty, \infty]$ *gelten:*

- *Für* μ*-fast-alle* $\omega \in \Omega$ *ist* $f(\omega, \cdot)\colon X \to [-\infty, \infty]$ *eine* ν*-integrierbare Funktion, und*
$$\Omega \to [-\infty, \infty], \omega \mapsto \int_X f(\omega, x)\,\mathrm{d}\nu(x)$$
ist[16] μ*-integrierbar.*

- *Für* ν*-fast-alle* $x \in X$ *ist* $f(\cdot, x)\colon \Omega \to [-\infty, \infty]$ *eine* μ*-integrierbare Funktion, und*
$$X \to [-\infty, \infty], x \mapsto \int_\Omega f(\omega, x)\,\mathrm{d}\mu(\omega)$$
ist[17] ν*-integrierbar.*

- *Es gilt — und dies ist die* **eigentliche Aussage des Satzes** —
$$\begin{aligned}\int_{\Omega\times X} f\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) &= \int_\Omega \int_X f(\omega, x)\,\mathrm{d}\nu(x)\,\mathrm{d}\mu(\omega)\\ &= \int_X \int_\Omega f(\omega, x)\,\mathrm{d}\mu(\omega)\,\mathrm{d}\nu(x)\end{aligned}$$

Der Satz besagt also, dass Integrale bezüglich eines Produktmaßes sich als "geschachtelte" Integrale bezüglich den beiden Faktoren schreiben lassen. Dabei führen bei den geschachtelten Integralen die beiden möglichen Reihenfolgen der Integration zum selben Ergebnis und insofern sind Vertauschungen der Integrationsreihenfolge erlaubt. In der Praxis wird der Satz oft angewandt, um durch Berechnung geschachtelter Integrale das Produktmaß messbarer Teilmengen P — die selbst nicht notwendig Produktgestalt haben müssen — von $\Omega \times X$ zu bestimmen oder Integrale über solche Teilmengen bezüglich Produktmaßen auszurechnen. Dabei kommen Schnitte ${}_\omega P$ bzw. P_x ins Spiel:



Zwei vertikale Schnitte ${}_\omega P$ und drei horizontale Schnitte P_x zu $P \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^2) = \mathscr{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R})$

Korollar 2.24 (Satz von Fubini auf Teilmengen)**.** *Unter den Voraussetzungen des Satzes gelten für* $\mu\otimes\nu$*-messbare Mengen* P *die Formeln*
$$\big(\overline{\mu\otimes\nu}\big)(P) = \int_\Omega \overline{\nu}({}_\omega P)\,\mathrm{d}\mu(\omega) = \int_X \overline{\mu}(P_x)\,\mathrm{d}\nu(x)\,,$$
$$\int_P f\,\mathrm{d}\big(\overline{\mu\otimes\nu}\big) = \int_\Omega \int_{{}_\omega P} f(\omega, x)\,\mathrm{d}\overline{\nu}(x)\,\mathrm{d}\mu(\omega) = \int_X \int_{P_x} f(\omega, x)\,\mathrm{d}\overline{\mu}(\omega)\,\mathrm{d}\nu(x)\,.$$
Im Falle $P \in \mathscr{A}\otimes\mathscr{S}$ *können dabei die* $\overline{(\cdot)}$*s auch weggelassen werden.*

[16] Die Aussage gilt bei beliebiger Festlegung des Wertes $\int_X f(\omega, x)\,\mathrm{d}\nu(x)$ auf der $\overline{\mu}$-Nullmenge der ω, für die $f(\omega, \cdot)$ nicht ν-integrierbar ist.

[17] Die Aussage ist analog zur vorigen zu interpretieren.

Beweis. Man wende den Satz mit $\mathbb{1}_P$ bzw. $\mathbb{1}_P f$ anstelle von f an. □

Korollar 2.25 (**Satz von Fubini für Lebesgue-Maße**). *Für Lebesgue-Maße auf $\mathbb{R}^{k+l} = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$ gelten die Formeln*

$$\mathscr{L}^{k+l}(P) = \int_{\mathbb{R}^k} \mathscr{L}^l({}_\omega P) \,\mathrm{d}\mathscr{L}^k(\omega) = \int_{\mathbb{R}^l} \mathscr{L}^k(P_x) \,\mathrm{d}\mathscr{L}^l(x)\,,$$

$$\int_P f \,\mathrm{d}\mathscr{L}^{k+l} = \int_{\mathbb{R}^k} \int_{{}_\omega P} f(\omega,x) \,\mathrm{d}\mathscr{L}^l(x) \,\mathrm{d}\mathscr{L}^k(\omega) = \int_X \int_{P_x} f(\omega,x) \,\mathrm{d}\mathscr{L}^k(\omega) \,\mathrm{d}\mathscr{L}^l(x)$$

für $k,l \in \mathbb{N}$, $\mathscr{L}^{k+l}$-messbare Teilmengen $P \subset \mathbb{R}^{k+l}$ und $\mathscr{L}^{k+l}$-integrierbare f.

Beweis. Man kombiniere das vorige Korollar mit Satz 2.22. □

Wir diskutieren nun die Voraussetzungen des Satzes: Die σ-Endlichkeit von μ und ν sollte man im Wesentlichen als technische Voraussetzung verstehen, die in Anwendungen meist[18] erfüllt ist. Entscheidend ist dagegen die Integrierbarkeitsvoraussetzung an f:

Bemerkungen (zur **Integrierbarkeitsvorraussetzung** bei Fubini)**.**

- *Da (Produkt-)Messbarkeit von f fast immer erfüllt ist (siehe die nächste Serie von Bemerkungen),* **schließt die Voraussetzung der $\boldsymbol{\mu \otimes \nu}$-Integrierbarkeit von $\boldsymbol{f}$** *im Wesentlichen nur* **den Nichtexistenzfall $\boldsymbol{\infty - \infty}$ aus**. *Diese Voraussetzung ist aber* **wesentlich für die Gültigkeit des Satzes von von Fubini** *(sowie seiner Korollare), denn es gibt (bereits für $\mu = \nu = \mathscr{L}^1$) Beispielintegranden, für die alle iterierten Integrale existieren und einen endlichen Wert ergeben, aber das $\mu \otimes \nu$-Integral undefiniert vom Typ $\infty - \infty$ ist; mehr dazu in den Übungen.*

- **Für das praktische Rechnen** *bedeutet dies, dass nichtnegative (oder nichtpositive) messbare Integranden unproblematisch sind und man den Satz auf solche stets anwenden darf. Nimmt ein Integrand f aber positive und negetive Werte an, so* **ist zuerst sicherzustellen, dass eines der Integrale $\boldsymbol{\int_\Omega f_+ \,\mathrm{d}(\overline{\mu \otimes \nu})}$, $\boldsymbol{\int_\Omega f_- \,\mathrm{d}(\overline{\mu \otimes \nu})}$ oder auch** *— und dies wird in der Praxis zumeist verwandt —* **$\boldsymbol{\int_\Omega |f| \,\mathrm{d}(\overline{\mu \otimes \nu})}$ endlich ist**. *Die Endlichkeit (eines) dieser Integrale verifiziert man dabei, indem man den Satz für die nichtnegativen Integranden f_+, f_- oder $|f|$ verwendet, und erst danach darf man ihn gegebenenfalls für f selbst benutzen.*

Als Nächstes kommen wir — wie schon angekündigt — kurz zur Produktmessbarkeit, die Teil der Voraussetzungen des Satzes von Fubini ist. Wir formulieren die folgenden Bemerkungen dabei für $\mathscr{A} \otimes \mathscr{S}$-Messbarkeit mit beliebigen σ-Algebren $\mathscr{A}$ und $\mathscr{S}$ auf Ω und X und behandeln den Spezialfall der $\mathscr{M}_\mu \otimes \mathscr{M}_\nu$-Messbarkeit nicht separat. Wegen[19] $\mathscr{M}_\mu \otimes \mathscr{M}_\nu \subset \mathscr{M}_{\mu\otimes\nu}$ erhalten wir insbesondere Kriterien für die im Satz vorausgesetzte $\mu \otimes \nu$-Messbarkeit.

[18] Eine gewisse Vorsicht ist aber bei Hausdorff-Maßen geboten, denn für diese ist die Anwendung des Satzes nur erlaubt, wenn man sich auf σ-endliche Mengen zurückziehen kann.

[19] Diese Inklusion folgt genau wie $\mathscr{M}^k \otimes \mathscr{M}^l \subset \mathscr{M}^{k+l}$ im Beweis von Satz 2.22.

Bemerkungen (zu Produkten von Abbildungen und Produkmessbarkeit)**.**

- *Das Produkt*[20] *zweier Abbildungen* $f\colon \Omega \to Y$ *und* $g\colon X \to Z$ *ist die Abbildung* $f \times g\colon \Omega \times X \to Y \times Z$ *zu*

$$(f \times g)(\omega, x) := (f(x), g(y)) \in Y \times Z \qquad \textit{für } \omega \in \Omega \textit{ und } x \in X\,.$$

- *Für eine* $(\mathscr{A}, \mathscr{H})$*-messbare Abbildung* $f\colon \Omega \to Y$ *und eine* $(\mathscr{S}, \mathscr{J})$*-messbare Abbildung* $g\colon X \to Z$ *ist*[21] *das Produkt* $f \times g\colon \Omega \times X \to Y \times Z$ *stets* $(\mathscr{A} \otimes \mathscr{S}, \mathscr{H} \otimes \mathscr{J})$*-messbar.*

- *Ist für* $\mathscr{A}$*-messbares* $f\colon \Omega \to [-\infty, \infty]$ *und* $\mathscr{S}$*-messbares* $g\colon X \to [-\infty, \infty]$ *durch*

$$h(x,y) := f(x){+}g(y),\ h(x,y) := \frac{f(x)}{g(y)} \textit{ oder } h(x,y) := \max\{f(x), g(y)\}$$

(mit einer Konvention bei undefinierten Ausdrücken) oder allgemeiner

$$h(x,y) := b(f(x), g(y)) \qquad \textit{mit Borelschem } b\colon [-\infty,\infty]^2 \to [-\infty,\infty]$$

eine Funktion $h\colon \Omega \times X \to [-\infty, \infty]$ *gegeben, so ist* h *stets* $\mathscr{A} \otimes \mathscr{S}$*-messbar; schreibt man* $h = b \circ (f \times g)$*, so folgt dies aus der vorigen Regel, Satz 2.22 (I) und der Kompositionsregel für messbare Funktionen und liefert* **Produktmessbarkeit aller praktisch relevanten Funktionen***.*

- *Für* $\mathscr{A}$*-messbare* $f_1, f_2, \ldots f_n\colon \Omega \to [-\infty, \infty]$ *ist auch* $(f_1, f_2, \ldots, f_n)\colon \Omega \to [-\infty, \infty]^n$ *stets* $\mathscr{A}$*-messbar; dies haben wir schon früher bemerkt (vergleiche Fußnote 4), aber nun können wir es systematisch begründen, indem wir* $(f_1, f_2, \ldots, f_n) = (f_1{\times}f_2{\times}\ldots{\times}f_n){\circ}\Delta_\Omega^n$ *mit der* $(\mathscr{A}, \mathscr{A}{\otimes}\mathscr{A}{\otimes}\ldots{\otimes}\mathscr{A})$*-messbaren Diagonalenabbildung* $\Delta_\Omega^n\colon \Omega \to \Omega^n$ *zu* $\Delta_\Omega^n(x) := (x, x, \ldots, x)$ *schreiben.*

Beweisskizze zum Satz 2.23 von Fubini. Wir haben bereits gesehen, dass für $P \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{S}$ und $\omega \in \Omega$ stets ${}_\omega P \in \mathscr{S}$ gilt und $\nu({}_\omega P)$ somit definiert ist. Nun werden wir durch Argumentation in mehreren Schritten zeigen, dass darüber hinaus stets gilt:

$$\omega \mapsto \nu({}_\omega P) \text{ ist } \mu\text{-messbar} \qquad \text{mit} \qquad (\mu \otimes \nu)(P) = \int_\Omega \nu({}_\omega P)\,\mathrm{d}\mu(\omega)\,. \tag{2.4}$$

Schritt 1: Nach den ersten Überlegungen zu Schnitten gilt (2.4) für $P \in \mathscr{A}{\times}\mathscr{S}$.

Schritt 2: Sei

$$(\mathscr{A}{\times}\mathscr{S})_\sigma := \left\{ \bigcup_{i=1}^\infty P_i \ :\ P_i \in \mathscr{A}{\times}\mathscr{S} \text{ disjunkt} \right\} \subset \mathscr{A}{\otimes}\mathscr{S}\,.$$

Wegen $\nu\big({}_\omega(\bigcup_{i=1}^\infty P_i)\big) = \sum_{i=1}^\infty \nu({}_\omega P_i)$ liefern Proposition 2.3 und Korollar 2.16 dann (2.4) auch für alle $P \in (\mathscr{A}{\times}\mathscr{S})_\sigma$.

[20] Für diese Art der Produktbildung ist neben $\times$ auch das Symbol $\bowtie$ gebräuchlich.

[21] *Beweis.* Offensichtlich gilt $(f{\times}g)^{-1}(\mathscr{H}{\times}\mathscr{J}) \subset \mathscr{A}{\times}\mathscr{S} \subset \mathscr{A}{\otimes}\mathscr{S}$. Da $\mathscr{H}{\times}\mathscr{J}$ ein Erzeuger von $\mathscr{H} \otimes \mathscr{J}$ ist, folgt die Behauptung mit einer Bemerkung zur Messbarkeitsdefinition. $\square$

Schritt 3: Sei

$$(\mathscr{A}\times\mathscr{S})_{\sigma\delta} := \left\{ \bigcap_{i=1}^{\infty} P_i \,:\, P_1 \supset P_2 \supset \ldots \text{ sind } \mu\otimes\nu\text{-endlich in } (\mathscr{A}\times\mathscr{S})_\sigma \right\} \subset \mathscr{A}\otimes\mathscr{S}\,.$$

Für μ-fast-alle $\omega \in \Omega$ folgt aus $(\mu\otimes\nu)(P_1) < \infty$ und Schritt 2 schon $\nu({}_\omega P_1) < \infty$ und daraus erhält man $\nu\big({}_\omega(\bigcap_{i=1}^{\infty} P_i)\big) = \lim_{i\to\infty} \nu({}_\omega P_i)$. Mit Proposition 2.3 und dominierter (oder auch monotoner) Konvergenz schließt man auf die Gültigkeit von (2.4) für alle $P \in (\mathscr{A}\times\mathscr{S})_{\sigma\delta}$.

Schritt 4: Zu jdem $P \in \mathscr{A}\otimes\mathscr{S}$ existiert nun eine $\mu\otimes\nu$-maßgleiche Obermenge $\widetilde{P} \in (\mathscr{A}\times\mathscr{S})_{\sigma\delta}$ (vergleiche die Bemerkungen zur Carathéodory-Konstruktion). Deshalb folgt (2.4) erst für alle $\mu\otimes\nu$-Nullmengen P und dann für alle $\mu\otimes\nu$-endlichen P (denn für letztere ist $\widetilde{P} \setminus P$ ja Nullmenge).

Schritt 5: Unter Verwendung der σ-Endlichkeit von $\mu\otimes\nu$ ergibt sich letzlich (2.4) für alle $P \in \mathscr{A}\otimes\mathscr{S}$; dazu schreibt man P als abzählbare disjunkte Vereinigung endlicher Mengen und argumentiert dann wie in Schritt 2. Aus Symmetriergründen gelten analoge Aussagen für die umgekehrte Integrationsreihenfolge und damit ist die erste Formel in Korollar 2.24 und der Satz 2.23 von Fubini für $f = \mathbb{1}_P$ und $P \in \mathscr{A}\otimes\mathscr{S}$ gezeigt.

Schritt 6: Die Verallgemeinerung auf beliebige Integranden bewerkstelligt man mit der Standard-Ausdehnungsprozedur und verwendet dabei Lemma 2.5 und wieder einmal den Satz über monotone Konvergenz. □

Durch iterierte Anwendung des Satzes gelangt man auch zur nächsten Folgerung, die die Berechnung von $\mathscr{L}^n$-Maßen und $\mathscr{L}^n$-Integralen auf n geschachtelte $\mathscr{L}^1$-Integrale zurückführt und viele explizite Integralberechnungen erlaubt.

Korollar 2.26 (Iterierter Satz von Fubini). *Die Produktmaßoperation $\otimes$ ist assoziativ, es ist*

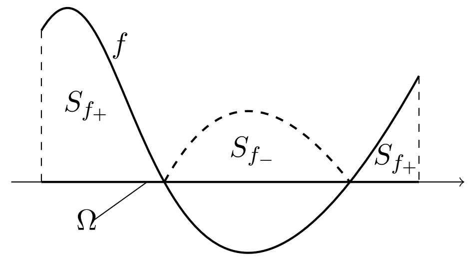
$$\underbrace{\overline{\mathscr{L}^1 \otimes \mathscr{L}^1 \otimes \ldots \otimes \mathscr{L}^1}}_{n-mal} = \mathscr{L}^n$$

und für $\mathscr{L}^n$-integrierbare f gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \,\mathrm{d}\mathscr{L}^n = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \ldots \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}}}_{n \text{ Integrale}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\mathrm{d}\mathscr{L}^1(x_1) \,\mathrm{d}\mathscr{L}^1(x_2) \ldots \,\mathrm{d}\mathscr{L}^1(x_n)\,.$$

Wir verzichten an dieser Stelle auf eine ausführlichere Diskussion iterierter Produktmaße und des iterierten Satzes von Fubini. Stattdessen gehen wir noch auf zwei Anwendungen ein:

Eine Grundidee der Integrationstheorie ist, dass eindimensionale Integrale den Flächeninhalt unter dem Graphen und allgemeiner n-dimensionale Integrale den $(n+1)$-dimensionalen Inhalt unter dem Graphen messen. Für allgemeinere Maßräume lässt sich die Vorstellung des Inhalts unter dem Graphen



präzisieren durch ein Produktmaß des Subgraphen

$$S_f := \{(\omega, x) \in \Omega \times \mathbb{R} \,:\, 0 \le x < f(\omega)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

zu einer nichnegativen Funktion f auf Ω und die obige Grundidee lässt sich damit wie folgt ausdrücken:

Proposition 2.27 (**Integral als Maß des Subgraphen**). *Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum. Für μ-integrierbares $f\colon \Omega \to [-\infty, \infty]$ sind S_{f_+} und S_{f_-} stets in $\mathscr{M}_\mu \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R})$ und es gilt*

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = (\overline{\mu} \otimes \mathscr{L}^1)(S_{f_+}) - (\overline{\mu} \otimes \mathscr{L}^1)(S_{f_-})\,.$$

Speziell für $\mathscr{L}^n$-integrierbares $f\colon A \to [-\infty, \infty]$ mit $A \in \mathscr{M}^n$ erhalten wir

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mathscr{L}^n = \mathscr{L}^{n+1}(S_{f_+}) - \mathscr{L}^{n+1}(S_{f_-})\,.$$

Beweis. Ohne Einschränkung sei f nichtnegativ. Wir entnehmen aus $\mathbb{1}_{S_f} = \mathbb{1}_{\{(x,y)\in\Omega\times\mathbb{R}\,:\,0\le y<x\}} \circ (f \times \mathrm{id}_\mathbb{R})$, dass $S_f \in \mathscr{M}_\mu \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R})$ gilt. Der Satz von Fubini liefert daher

$$\begin{aligned}(\overline{\mu} \otimes \mathscr{L}^1)(S_f) &= \int_\Omega \mathscr{L}^1\big({}_\omega(S_f)\big)\,\mathrm{d}\mu(\omega) \\ &= \int_\Omega \mathscr{L}^1([0, f(\omega)[)\,\mathrm{d}\mu(\omega) = \int_\Omega f(\omega)\,\mathrm{d}\mu(\omega)\,.\end{aligned}$$ □

Anwendung (**Berechnung des Kugelvolumens $\boldsymbol{\omega_n}$**). *Wir verifizieren jetzt die Formel für das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel $\omega_n = \mathscr{L}^n(B_1^n(0))$ mit $n \in \mathbb{N}$. Dabei notieren wir kurz B_r^n statt $B_r^n(0)$.*

- *Für $n{=}1$ ist $B_1^1 =]-1, 1[$ und daher $\omega_1 = 2$.*
- *Für $n{=}2$ ergibt der Satz von Fubini*

$$\begin{aligned}\omega_2 = \mathscr{L}^2(B_1^2) &= \int_\mathbb{R} \mathscr{L}^1((B_1^2)_x)\,\mathrm{d}\mathscr{L}^1(x) \\ &= \int_{-1}^1 \mathscr{L}^1\Big(\Big]{-\sqrt{1{-}x^2}}, \sqrt{1{-}x^2}\Big[\Big)\,\mathrm{d}\mathscr{L}^1(x) \\ &= 2\int_{-1}^1 \sqrt{1{-}x^2}\,\mathrm{d}\mathscr{L}^1(x) \overset{x=\sin\varphi}{=} \pi\,.\end{aligned}$$

- *Für $n \ge 3$ erhält man mit Fubini folgende Rekursionsformel in 2er-Schritten:*

$$\begin{aligned}\omega_n = \mathscr{L}^n(B_1^n) &= \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \mathscr{L}^2((B_1^n)_x)\,\mathrm{d}\mathscr{L}^{n-2}(x) \\ &= \int_{B_1^{n-2}} \mathscr{L}^2(B^2_{\sqrt{1-|x|^2}})\,\mathrm{d}\mathscr{L}^{n-2}(x) \\ &= \pi\int_{B_1^{n-2}} (1-|x|^2)\,\mathrm{d}\mathscr{L}^{n-2}(x) \\ &= \pi(n{-}2)\omega_{n-2}\int_0^1 (1-\varrho^2)\varrho^{n-3}\,\mathrm{d}\mathscr{L}^1(\varrho) = \frac{2\pi}{n}\omega_{n-2}\,.\end{aligned}$$

- *Durch Auflösung der Rekursion ergibt sich*

$$\omega_n = \frac{1}{k!}\pi^k \text{ für } n = 2k \qquad \text{und} \qquad \omega_n = \frac{2^n k!}{n!}\pi^k \text{ für } n = 2k{+}1$$

mit $k \in \mathbb{N}_0$, *was sich zusammenfassend schreiben lässt als*

$$\omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$$

mit der Gammafunktion Γ *zu*

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1}\exp(-t)\,\mathrm{d}\mathscr{L}^1(t) \qquad \text{für } z \in \mathbb{C} \text{ mit } \Re(z) > 0\,.$$

Diese Funktion erfüllt $\Gamma(k{+}1) = k!$ *und kann insofern als eine Verallgemeinerung der Fakultäten natürlicher Zahlen verstanden werden. Allgemeiner gilt die Funktionalgleichung* $\Gamma(z{+}1) = z\Gamma(z)$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $\Re(z) > 0$ *und es ist* $\Gamma(\frac{1}{2}) \overset{s=\sqrt{t}}{=} 2\int_0^\infty \exp(-s^2)\,\mathrm{d}\mathscr{L}^1(s) = \sqrt{\pi}$.

2.5 L^p-Räume und Integralungleichungen

Definition 2.28 (**Wesentliche Suprema und Infima**). *Sei* $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ *ein Maßraum und* $f\colon \Omega \to [-\infty,\infty]$ *sei* μ*-messbar. Das* (μ*-*)*wesentliche Supremum* $\mu\text{-}\operatorname{ess\,sup}_\Omega f$ *und das* (μ*-*)*wesentliche Infimum* $\mu\text{-}\operatorname{ess\,inf}_\Omega f$ *von* f *auf* Ω *sind definiert durch*

$$\mu\text{-}\operatorname*{ess\,sup}_\Omega f := \min\{K \in [-\infty,\infty] \,:\, f \le K \ \mu\text{-fast-überall auf } \Omega\} \in [-\infty,\infty]\,,$$
$$\mu\text{-}\operatorname*{ess\,inf}_\Omega f := \max\{K \in [-\infty,\infty] \,:\, f \ge K \ \mu\text{-fast-überall auf } \Omega\} \in [-\infty,\infty]\,.$$

Für das Folgende über $\mathcal{L}^p$- und L^p-Räume sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ stets ein Maßraum und $\mathbb{K}$ **einer der beiden vollständigen Körper** $\mathbb{R}$ **oder** $\mathbb{C}$. Außerdem sei $\boldsymbol{V}$ **ein endlich-dimensionaler normierter** $\mathbb{K}$**-Vektorraum** mit Norm $|\cdot|$. Sprechen wir von V als einem Skalarproduktraum, so setzen wir zusätzlich voraus, dass die Norm von V von einem Skalarprodukt $\boldsymbol{\cdot}$ auf V induziert wird.

Definition 2.29 (**Lebesgue-$\boldsymbol{\mathcal{L}}$-Räume**). *Sei* $p \in [1,\infty]$.

- *Die* L^p*-Norm* $\|f\|_{\mathrm{L}^p(\Omega,\mathscr{A},\mu;V)} \in [0,\infty]$ *einer* $\mathscr{A}$*-messbaren Funktion* $f\colon \Omega \to V$ *ist definiert als*

$$\|f\|_{\mathrm{L}^p(\Omega,\mathscr{A},\mu;V)} := \begin{cases} \left(\displaystyle\int_\Omega |f|^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} & \text{für } p < \infty \\ \mu\text{-}\operatorname*{ess\,sup}_\Omega |f| & \text{für } p = \infty \end{cases}$$

- *Der Lebesgue-*($\mathcal{L}$*-*)*Raum* $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu; V)$ *besteht aus allen* $\mathscr{A}$*-messbaren* $f\colon \Omega \to V$ *mit* $\|f\|_{\mathrm{L}^p(\Omega,\mathscr{A},\mu;V)} < \infty$.

Notation. *Zur Vereinfachung werden Ω, $\mathscr{A}$, μ und V des Öfteren nicht notiert, wenn die entsprechende Belegung aus dem Kontext klar ist. Und statt $\|f\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)}$ ist auch $\|f\|_{p;\Omega}$ oder nur $\|f\|_p$ gebräuchlich.*

Bemerkung. *Sei μ vollständig. Die Funktionen in $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathscr{A}, \mu; V)$ sind gerade die μ-summierbaren Funktionen und die Funktionen in $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathscr{A}, \mu; V)$ nennt man (μ-)wesentlich beschränkte Funktionen.*

Satz 2.30 (über die **Höldersche Ungleichung**). *Es sei V ein Skalarproduktraum und $p, q \in [1, \infty]$ seien* **konjugierte Exponenten**, *d. h. solche mit*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,.$$

Für $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu; V)$ und $g \in \mathcal{L}^q(\Omega, \mathscr{A}, \mu; V)$ ist $f \bullet g$ dann stets μ-summierbar mit

$$\left| \int_\Omega (f \bullet g)\, \mathrm{d}\mu \right| \leq \|f\|_p \, \|g\|_q\,,$$

wobei die Normen bezüglich $(\Omega, \mathscr{A}, \mu; V)$ zu bilden sind.

Beweis. Für p=1 erhält man mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung des Skalarprodukts $\bullet$

$$\left| \int_\Omega (f \bullet g)\, \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_\Omega |f \bullet g| \, \mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega |f|\,|g| \, \mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega |f| \, \|g\|_\infty \, \mathrm{d}\mu = \|f\|_1 \, \|g\|_\infty$$

und der Fall $p = \infty$ ergibt sich daraus durch Vertauschung von f und g.

Im Folgenden sei nun $p \in]1, \infty[$. Ist die rechte Seite Null, so gilt entweder $f \equiv 0$ μ-fast-überall auf Ω oder $g \equiv 0$ μ-fast-überall auf Ω und die Behauptung gilt trivial. Andernfalls kann man nach Übergang zu $\frac{f}{\|f\|_p}$ und $\frac{g}{\|g\|_q}$ annehmen, dass $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$ gilt und erhält dann mit der Youngschen Ungleichung

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega (f \bullet g)\, \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_\Omega |f|\,|g| \, \mathrm{d}\mu &\leq \int_\Omega \left(\tfrac{1}{p}|f|^p + \tfrac{1}{q}|g|^q\right) \mathrm{d}\mu \\ &= \tfrac{1}{p}\|f\|_p^p + \tfrac{1}{q}\|g\|_q^q = \tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q} = 1\,. \end{aligned}$$

□

Bemerkung. *Ist $\mu(\Omega) < \infty$, wie zum Beispiel für das Lebesgue-Maß auf einer beschränkten Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, und*

$$1 \leq p < q \leq \infty\,,$$

so zeigt die Höldersche Ungleichung mit dem zu $\frac{q}{p}$ konjugierten Exponenten $s := (1 - \frac{p}{q})^{-1} \in [1, \infty[$, dass

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega \mathbb{1}_\Omega \cdot |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\|\mathbb{1}_\Omega\|_s \, \big\| |f|^p \big\|_{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{p}} = \mu(\Omega)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_q$$

und deshalb die Inklusion

$$\mathcal{L}^q \subset \mathcal{L}^p$$

gilt.

Satz 2.31 (über die **Minkowski-Ungleichung**). *Für $p \in [1,\infty]$ und zwei Funktionen $f,g \in \mathcal{L}^p(\Omega,\mathscr{A},\mu;V)$ ist auch $f+g \in \mathcal{L}^p(\Omega,\mathscr{A},\mu;V)$ mit*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p\,,$$

wobei die Normen bezüglich $(\Omega,\mathscr{A},\mu;V)$ zu bilden sind.

Beweis. Die Fälle $p=1$ und $p=\infty$ sind wieder einfach. Für $p \in]1,\infty[$ beobachten wir zuerst, dass wegen $|f+g|^p \leq (2\max\{|f|,|g|\})^p \leq 2^p(|f|^p+|g|^p)$

$$\|f+g\|_p \leq 2(\|f\|_p + \|g\|_p) < \infty$$

und somit $f+g \in \mathcal{L}^p$ gilt. Um die Ungleichung auch ohne den Vorfaktor 2 zu bekommen, verwenden wir die Höldersche Ungleichung mit dem zu p konjugierten Exponenten $q := \frac{p}{p-1} \in]1,\infty[$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &= \int_\Omega |f+g|\,|f+g|^{p-1}\,\mathrm{d}\mu \\
&\leq \int_\Omega |f|\,|f+g|^{p-1}\,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega |g|\,|f+g|^{p-1}\,\mathrm{d}\mu \\
&\leq \|f\|_p \big\||f+g|^{p-1}\big\|_q + \|g\|_p \big\||f+g|^{p-1}\big\|_q = (\|f\|_p + \|g\|_p)\|f+g\|_p^{p-1}\,.
\end{aligned}$$

Da wir bereits $\|f+g\|_p < \infty$ wissen, können wir auf beiden Seiten durch $\|f+g\|_p^{p-1}$ teilen und erhalten die behauptete Ungleichung. □

Zusammen mit der einfachen Regel $\|sf\|_p = |s|\,\|f\|_p$ für $s \in \mathbb{K}$ folgt aus dem vorigen Satz, dass $\mathcal{L}^p$ ein Vektorraum ist. Wir möchten nun, dass die L^p-Normen auf $\mathcal{L}^p$ die Axiome einer Norm (Positivität, Homogenität, Dreiecksungleichung) erfüllen, denn dann können wir all das darauf anwenden, was wir über normierte Räume wissen: Dabei ist $\|\cdot\|_p$ per Definition nichtnegativ und homogen und die Minkowski-Ungleichung ist die Dreiecksungleichung für die L^p-Normen. Mit der Positivität gibt es aber Probleme und deshalb können wir vorerst nur festhalten:

> Für jedes $p \in [1,\infty]$ ist $\mathcal{L}^p(\Omega,\mathscr{A},\mu;V)$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\|\cdot\|_p$ eine Seminorm darauf.

Genauer liegt das Problem mit der Positivität darin, dass für $\mathscr{A}$-messbare $f\colon \Omega \to V$ gilt:

$$\|f\|_p = 0 \iff f = 0 \ \ \mu\text{-fast-überall auf } \Omega\,.$$

Bei einer Norm dürfte hier rechts nur das Nullelement (also die Nullfunktion) stehen, aber meist[22] enthält

$$\mathcal{N}_\mu := \{f\colon \Omega \to V \,:\, f \text{ ist } \mathscr{A}\text{-messbar mit } f=0 \ \ \mu\text{-fast-überall auf } \Omega\}$$

überabzählbar viele Elemente. Man behilft sich folgendermaßen:

[22]Beispielsweise ist dies richtig, wenn μ die Einschränkung von $\mathscr{L}^n$ auf eine nicht-leere, messbare Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist und V nicht gerade der Nullvektorraum.

Definition 2.32 ($\mathbf{L}^p$-Räume und Fastfunktionen). *Für $p \in [1,\infty]$ wird der Lebesgue-(L-)Raum $\mathrm{L}^p(\Omega,\mathscr{A},\mu;V)$ definiert als der Faktorraum*

$$\mathcal{L}^p(\Omega,\mathscr{A},\mu;V)/\mathcal{N}_\mu = \{f+\mathcal{N}_\mu \,:\, f \in \mathcal{L}^p(\Omega,\mathscr{A},\mu;V)\}\,.$$

Dabei nennt man Restklassen des Typs $f+\mathcal{N}_\mu$ auch **Lebesgue-(L-)Klassen** *oder* **μ-Fastfunktionen***.*

Die Faktorbildung nach dem Unterraum $\mathcal{N}_\mu$ kann auch verstanden werden als Faktorbildung bezüglich der Äquivalenzrelation "Gleichheit μ-fast-überall", also einfach als **Identifikation μ-fast-überall gleicher Funktionen**.

Bemerkungen (zu (Operationen mit) **Fastfunktionen).**

- *Per Definition ist $\mathrm{L}^p(\Omega,\mathscr{A},\mu;V)$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und die Summe zweier Fastfunktionen sowie die Multiplikation einer Fastfunktion mit einem Skalar sind erklärt.*

- *Für zwei Repräsentanten ein-und-derselben Fastfunktion, also für $f,g \in \mathcal{L}^p(\Omega,\mathscr{A},\mu;V)$ mit $f+\mathcal{N}_\mu = g+\mathcal{N}_\mu$, gilt $\|f\|_p = \|g\|_p$. Daher ist die Festlegung $\|f+\mathcal{N}_\mu\|_p := \|f\|_p$ sinnvoll und* **macht $\mathbf{L}^p(\Omega,\mathscr{A},\mu;V)$ zu einem normierten Raum***.*

- **Etliche weitere Operationen** *mit $\mathcal{L}^p$-Funktionen f, wie beispielsweise Integrale $\int_\Omega (b\circ f)\,\mathrm{d}\mu$ mit einer Borel-Funktion b,* **sind unabhängig von der Repräsentantenwahl und können somit auch für Fastfunktionen erklärt werden***. Wir benutzen im Folgenden alle Notationen für derartige Operationen auch bei Fastfunktionen und* **unterscheiden im Rahmen der Integrationstheorie meist nicht mehr explizit zwischen Fastfunktionen und Funktionen***.*

- **Auswertungen in einzelnen Punkten** *$x \in \Omega$ (zumindest in solchen mit $\mu(\{x\}) = 0$) oder Einschränkungen auf μ-Nullmengen* **machen aber für Fastfunktionen keinen Sinn***.*

Bemerkungen (zum **$\mathbf{L}^2$-Skalarprodukt).** *Sei V ein Skalarproduktraum.*

- *Gemäß der Hölderschen Ungleichung ist $f\cdot g$ für $f,g \in \mathcal{L}^2(\Omega,\mathscr{A},\mu;V)$ stets μ-summierbar. Deshalb können wir*

  $$\langle f,g\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega,\mathscr{A},\mu;V)} := \int_\Omega f\cdot g\,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{K}$$

  setzen und erhalten eine positiv semidefinite, symmetrische bzw. hermitesche Bi- bzw. Sesquilinearform[23] auf $\mathcal{L}^2(\Omega,\mathscr{A},\mu;V)$. Wir schreiben auch kurz $\langle f,g\rangle_{\mathrm{L}^2}$ statt $\langle f,g\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega,\mathscr{A},\mu;V)}$.

- *Das Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{L}^2}$ ist auch für Fastfunktionen aus $\mathrm{L}^2(\Omega,\mathscr{A},\mu;V)$ sinnvoll. Es ist auf $\mathrm{L}^2(\Omega,\mathscr{A},\mu;V)$ positiv definit und definiert ein Skalarprodukt, genannt das L^2-Skalarprodukt.*

[23] Es sei daran erinnert, dass das komplexe Standard-Skalarprodukt auf $V{=}\mathbb{C}^n$ gegeben ist durch $f\cdot g = \sum_{i=1}^n f_i\overline{g_i}$ mit der komplexen Konjugation $\overline{(\cdot)}$.

- *Es gilt* $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f,f\rangle_{\mathrm{L}^2}}$*, also induziert das* L^2*-Skalarprodukt die* L^2*-Norm und die Höldersche Ungleichung ist für p=q=2 gerade die Cauchy-Schwarz-Ungleichung des* L^2*-Skalarprodukts.*

Bemerkungen (zu Varianten von $\mathcal{L}^p$- und L^p-Räumen)**.**

- *Analog zu den vorigen Definitionen werden* $\mathcal{L}^p$*- und* L^p*-Räume zum Zielraum* $[-\infty,\infty]$ *definiert. Für* $f \in \mathcal{L}^p(\Omega,\mathscr{A},\mu;[-\infty,\infty])$ *gilt dann* μ*-fast-überall* $f \in \mathbb{R}$*. Folglich hat jedes* $f \in \mathrm{L}^p(\Omega,\mathscr{A},\mu;[-\infty,\infty])$ *einen* $\mathbb{R}$*-wertigen Repräsentanten, es ist* $\mathrm{L}^p(\Omega,\mathscr{A},\mu;[-\infty,\infty]) = \mathrm{L}^p(\Omega,\mathscr{A},\mu;\mathbb{R})$ *und deshalb bringt* $[-\infty,\infty]$*-Wertigkeit keinen echten Gewinn an Allgemeinheit.*

- *Ist* Ω *ein topologischer Raum mit* $\mathscr{B}(\Omega) \subset \mathscr{A}$*, so definiert man den lokalisierten Raum* $\mathcal{L}^p_{\mathrm{lok}}(\Omega,\mathscr{A},\mu;V)$ *als die Menge der* $\mathscr{A}$*-messbaren* $f\colon \Omega \to V$*, so dass jedes* $x \in \Omega$ *in einem offenen* O *mit* $f|_O \in \mathcal{L}^p(O,\mathscr{A}|O,\mu|_{\mathscr{A}|O};V)$ *liegt. Bei gutartigem (lokal-kompakt mit Hausdorff-Eigenschaft)* Ω*, ist es äquivalent* $f|_K \in \mathcal{L}^p(K,\mathscr{A}|K,\mu|_{\mathscr{A}|K};V)$ *für jedes Kompaktum* K *in* Ω *zu fordern. Den entsprechenden Raum von Fastfunktionen nennt man* $\mathrm{L}^p_{\mathrm{lok}}$*.*

Eine der wichtigsten Eigenschaften der L^p-Räume ist, dass sie viele konvergente Folgen besitzen. Dies garantiert der folgende berühmte Satz:

Satz 2.33 (**von Riesz-Fischer**, ~1907)**.** *Für alle* $p \in [1,\infty]$ *ist* $\mathrm{L}^p(\Omega,\mathscr{A},\mu;V)$ *vollständig, d. h. in* $\mathrm{L}^p(\Omega,\mathscr{A},\mu;V)$ *konvergiert jede Cauchy-Folge.*

Beweis. Gleichmäßige Cauchy-Folgen konvergieren gleichmäßig und Anwendung dieses Sachverhalts fast-überall erledigt den Fall $p = \infty$. Sei nun $p < \infty$ und f_m eine Cauchy-Folge in L^p. Dann gibt es eine Teilfolge f_{m_i} mit $\|f_{m_{i+1}} - f_{m_i}\|_p \le 2^{-i}$. Mit dem Lemma von Fatou und der Minkowski-Ungleichung folgt

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} |f_{m_{i+1}} - f_{m_i}| \right\|_p \le \sum_{i=1}^{\infty} \|f_{m_{i+1}} - f_{m_i}\|_p \le 1$$

und deshalb liegt μ-fast-überall auf Ω Konvergenz $\sum_{i=1}^{\infty} |f_{m_{i+1}} - f_{m_i}| < \infty$ vor. Wegen der Vollständigkeit von V existiert dann auch

$$f := f_{m_1} + \sum_{i=1}^{\infty} (f_{m_{i+1}} - f_{m_i}) = f_{m_1} + \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k-1} (f_{m_{i+1}} - f_{m_i}) = \lim_{k\to\infty} f_{m_k}$$

μ-fast-überall auf Ω. Ist nun $\varepsilon > 0$ beliebig, so erhalten wir mit dem Lemma von Fatou und der Cauchy-Eigenschaft der f_n

$$\int_\Omega |f_n - f|^p \,\mathrm{d}\mu \le \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega |f_n - f_{m_k}|^p \,\mathrm{d}\mu \le \varepsilon$$

für $n \ge n_0(\varepsilon)$, also Konvergenz $f_n \to f$ in L^p bei $n \to \infty$. □

Bemerkungen.

- $\mathbf{L}^{\boldsymbol{p}}$ **ist also ein Banachraum***, d. h. ein vollständiger normierter Raum, und* $\mathbf{L}^{\mathbf{2}}$ **ist** *(wenn* V *Skalarproduktraum)* **sogar ein Hilbertraum***, d. h. ein vollständiger Skalarproduktraum.*

- *Die* L^p*-Räume sind* **fundamentale Funktionenräume der Analysis** *und sie sind wichtig für alle Bereiche der Mathematik, in denen Integrale vorkommen.*

- *Weiterführende, mit* L^p*-Räumen eng verbundene Themengebiete in der Maßtheorie sind Fourier-Reihen, Fourier-Transformation, Faltung, Kapazität, ...*

Es folgt eine weitere wichtige und nützliche Integralungleichung, die Jensensche Ungleichung für Erwartungswerte:

Satz 2.34 (über die **Jensensche Ungleichung**). *Sei* $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ *ein* Wahrscheinlichkeits*raum und* V *ein endlich-dimensionaler* $\mathbb{R}$*-Vektorraum,* $\Phi\colon V \to [-\infty, \infty]$ *sei eine* konvexe[24] (!) *Borel-Funktion und* $f\colon \Omega \to V$ *sei* μ*-summierbar. Dann ist* $\Phi \circ f$ *stets* μ*-integrierbar mit*

$$\Phi\bigg(\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu\bigg) \leq \int_\Omega (\Phi \circ f)\,\mathrm{d}\mu\,.$$

Bemerkungen.

- *Für beliebige endliche Maße* $\mu \neq 0$ *ist* $\frac{1}{\mu(\Omega)}\mu$ *ein Wahrscheinlichkeitsmaß und deshalb gilt die Jensensche Ungleichung in der Form*

$$\Phi\bigg(\frac{1}{\mu(\Omega)}\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu\bigg) \leq \frac{1}{\mu(\Omega)}\int_\Omega (\Phi \circ f)\,\mathrm{d}\mu\,.$$

- *Ist eine konvexe Funktion* Φ *auf einer konvexen Teilmenge* K *von* V *definiert, so lässt sich die Jensensche Ungleichung auf die konvexe Fortsetzung* $\Phi \cdot \mathbb{1}_K + \infty \cdot \mathbb{1}_{V\setminus K}$ *anwenden.*

- *Die Dreiecksungleichung für Normen (vergleiche dazu Abschnitt 2.2) ist ein Spezialfall der Jensenschen Ungleichung mit der Norm als konvexer Funktion. Und auch die Ungleichung aus der Bemerkung zu* $\mathcal{L}^q \subset \mathcal{L}^p$ *(direkt nach der Hölderschen Ungleichung) stellt sich als Spezialfall der Jensenschen Ungleichung mit der konvexen Funktion* $(\,\cdot\,)^{\frac{q}{p}}$ *heraus.*

- *Ist* Φ *reellwertig, so ist* Φ *als konvexe Funktion automatisch stetig und Borelsch. Im* $[-\infty, \infty]$*-wertigen Fall dagegen muss in Randpunkten von* $\Phi^{-1}\{\infty\}$ *nicht notwendig Stetigkeit vorliegen und man benötigt zur Behandlung dieser Punkte oftmals leichte Zusatzvoraussetzungen, beispielsweise Unterhalbstetigkeit oder — wie im Satz — Borel-Messbarkeit.*

Der Beweis der Jensenschen Ungleichung benutzt etwas konvexe Analysis:

Lemma 2.35. *Sei* K *eine konvexe Menge in einem endlich-dimensionalen Vektorraum mit Skalarprodukt* $\bullet$*. Zu jedem* $a \in \overline{V\setminus K}$ *gibt es einen Einheitsvektor* $v \in V$ *mit* $(x-a)\bullet v \geq 0$ *(sogar* > 0 *bei* $a \notin \overline{K}$*) für alle* $x \in K$*.*

[24] Dabei heißt eine $[-\infty, \infty]$-wertige Funktion konvex, wenn sie höchstens einen der Werte ∞ und $-\infty$ annimmt und die Konvexitätsungleichung $\Phi(\lambda v + (1-\lambda)w) \leq \lambda\Phi(v) + (1-\lambda)\Phi(w)$ für alle $v, w \in V$ und $\lambda \in [0,1]$ gilt.

Beweis. Wir unterscheiden die beiden Alternativen $a \notin \overline{K}$ und $a \in \partial K$:

Ist $a \notin \overline{K}$, so sei a_* der nächste Punkt zu a in $\overline{K}$. Dafür gilt

$$0 \leq \frac{1}{\lambda}\Big[|\lambda x+(1-\lambda)a_*-a|^2 - |a_*-a|^2\Big] = 2(x-a_*)\cdot(a_*-a) + \lambda|x-a_*|^2$$

für alle $x \in K$ und $\lambda \in]0,1]$. Grenübergang $\lambda \searrow 0$ gibt $(x-a_*)\cdot(a_*-a) \geq 0$ und $(x-a)\cdot(a_*-a) = (x-a_*)\cdot(a_*-a) + |a_*-a|^2 > 0$, also die Behauptung für $v := \frac{a_*-a}{|a_*-a|}$.

Randpunkte $a \in \partial K$ approximieren wir durch $a_k \in V\backslash\overline{K}$ mit zugehörigen Einheitsvektoren v_k. Nach Teilfolgenübergang können wir Konvergenz $v_k \to v$ annehmen und die Behauptung folgt problemlos. □

Lemma 2.36. *Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, K sei eine konvexe Menge in einem endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V und $f\colon \Omega \to V$ sei μ-summierbar. Gilt μ-fast-überall $f \in K$ auf Ω, so ist auch $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \in K$.*

Bemerkung. *Insbesondere besagt das Lemma für $\Omega = K \subset V = \mathbb{R}^n$ mit $0 < \mathscr{L}^n(K) < \infty$, dass der* **Schwerpunkt** $\frac{1}{\mathscr{L}^n(K)}\int_K x \,\mathrm{d}\mathscr{L}^n(x)$ *einer konvexen Menge K stets selbst in K liegt.*

Beweis des Lemmas. Wir beweisen das Lemma durch Induktion nach der Dimension von V. Ist V eindimensional, so ist K ein Intervall und die Behauptung gilt gemäß den Regeln (II) und (III) in Proposition 2.10. Somit ist der Induktionsanfang gemacht und wir kommen zum Induktionsschluß: Sei als Induktionsannahme die Behauptung richtig für alle $\mathbb{R}$-Vektorräume mit echt kleinerer Dimension als V. Ist $a := \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$ in K, so ist nichts zu zeigen. Andernfalls ist $a \in V\backslash K$ und (für ein beliebige gewähltes Skalarprodukt $\cdot$ auf V) gilt μ-fast-überall $(f-a)\cdot v \geq 0$ mit dem Einheitsvektor v des vorigen Lemmas. Außerdem ist

$$\int_\Omega (f-a)\cdot v \,\mathrm{d}\mu = \left(\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu - a\right)\cdot v = 0$$

und deshalb μ-fast-überall schon $(f-a)\cdot v = 0$. Somit nimmt f μ-fast-überall auf Ω nur Werte in der Hyperebene $H := \{x \in V \,:\, (x-a)\cdot v = 0\}$ an und wir können die Induktionsannahme auf die konvexe Menge $K \cap H$ im affinen Untervektorraum H anwenden. Es folgt $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \in K \cap H$ und damit die Behauptung. □

Beweis von Satz 2.34. Wir beweisen zunächst:

Behauptung 1. Satz 2.34 gilt, falls $\Phi \circ f$ μ-summierbar ist.

Zum Beweis der Behauptung 1 können wir $\Phi \circ f$ nach Abänderung von f auf einer Nullmenge als $\mathbb{R}$-wertig annehmen. Für die konvexe Menge

$$K_\Phi := \{(x,y) \in V \times \mathbb{R} \,:\, \Phi(x) \leq y\} \subset V \times \mathbb{R}$$

gilt $(f, \Phi \circ f) \in K_\Phi$ μ-fast-überall auf Ω und mit dem vorigen Lemma erhalten wir

$$\left(\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu, \int_\Omega (\Phi \circ f) \,\mathrm{d}\mu\right) \in K_\Phi\,,$$

also die in Satz 2.34 behauptete Ungleichung.

Behauptung 2. $(\Phi \circ f)_-$ ist μ-summierbar oder $\Phi \equiv -\infty$ gilt auf V.

Zum Beweis von Behauptung 2 nehmen wir μ als vollständig an. Nimmt Φ den Wert $-\infty$ irgendwo an, so muss schon $\Phi \equiv -\infty$ gelten. Nimmt Φ den Wert $-\infty$ nicht an, so zeigen wir jetzt μ-Summierbarkeit von $(\Phi\circ f)_-$: Diese liegt natürlich vor, wenn $\Omega_- := \{x \in \Omega : \Phi(f(x)) \leq 0\}$ eine μ-Nullmenge ist. Hat andererseits Ω_- positives μ-Maß, so sind die Funktionen $\Phi_k := \max\{\Phi, -k\}$ μ-summierbar über Ω_- und Behauptung 1 gibt

$$\frac{1}{\mu(\Omega_-)} \int_{\Omega_-} (\Phi_k \circ f)\,\mathrm{d}\mu \geq \Phi_k\left(\frac{1}{\mu(\Omega_-)} \int_{\Omega_-} f\,\mathrm{d}\mu\right) \geq \Phi\left(\frac{1}{\mu(\Omega_-)} \int_{\Omega_-} f\,\mathrm{d}\mu\right) > -\infty\,.$$

Somit ist $\sup_{k\in\mathbb{N}} \int_\Omega (\Phi_k \circ f)_-\,\mathrm{d}\mu < \infty$ und mit dem Lemma von Fatou folgt μ-Summierbarkeit von $(\Phi \circ f)_-$.

Nach Behauptung 2 verbleiben nur die folgenden drei Möglichkeiten: Entweder ist $\Phi\circ f$ μ-summierbar oder $\Phi\circ f$ ist μ-integrierbar mit $\int_\Omega (\Phi\circ f)\,\mathrm{d}\mu = \infty$ oder es ist $\Phi \equiv -\infty$. Im ersten Fall gilt der Satz nach Behauptung 1 und in den beiden anderen Fällen gilt er trivial. □

2.6 Gewichtete Maße, signierte Maße, Vektormaße

Bisher haben wir die grundlegende Forderung gestellt, dass das Maß $\mu(A)$ einer Menge A stets nichtnegativ sei. In vielen Kontexten, beispielsweise beim Messen der elektrischen Ladung, sind aber negative oder gar (Vektor-)Werte $\mu(A)$ sinnvoll. Deshalb geben wir die Grundannahme der Nichtnegativität jetzt auf und definieren allgemein:

Definition 2.37 (Signierte Maße, Vektormaße). *Sei $(\Omega, \mathscr{A})$ ein Messraum. Als signierte Maße auf $(\Omega, \mathscr{A})$ bezeichnet man σ-additive Abbildungen*

$$\mu\colon \mathscr{A} \to [-\infty, \infty]$$

mit $\mu(\emptyset) = 0$, die höchstens einen der Werte ∞ und $-\infty$ annehmen. Als Vektormaße oder V-wertige Maße auf $(\Omega, \mathscr{A})$ bezeichnet man σ-additive Abbildungen

$$\mu\colon \mathscr{A} \to V$$

in einen endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V mit $\mu(\emptyset) = 0$ in V.

Bemerkungen.

- *Sprechen wir im Folgenden ohne Attribut von einem Maß, so meinen wir nach wie vor ein $[0, \infty]$-wertiges Maß.*

- *Da wir die Summe $\infty+(-\infty)$ nicht bilden können, haben wir signierte Maße μ so definiert, dass sie höchstens einen der Werte ∞ und $-\infty$ annehmen, also stets einseitig endlich sind. Ist $|\mu(\Omega)| < \infty$, so folgt schon, dass μ keinen dieser Werte annimmt, also endlich ist.*

- *Im V-wertigen Fall betrachten wir keine unendlichen Werte und deshalb sind unsere* **Vektormaße per Definition stets endlich**. *In gewissen Situationen lassen sich auch nicht-endliche Vektormaße definieren, aber darauf gehen wir nicht weiter ein.*

- *Eine Abbildung $\mu\colon \mathscr{A} \to V$ ist genau dann ein V-wertiges Maß, wenn alle ihre* **Komponentenfunktionen** *(bezüglich einer fixierten Basis von V)* **endliche signierte Maße** *sind. Deshalb folgen Aussagen über Vektormaße oft aus solchen über signierte Maße.*

- *Bei signierten und V-wertigen Maßen liegt* **keine (Mengen-)Monotonie** *vor. Dies ist der wohl wichtigste Unterschied zu Maßen.*

- *Die wichtigsten Vektormaße sind natürlich $\mathbb{C}$- und $\mathbb{R}^n$-wertige Maße.*

Definition 2.38 (**Positive Mengen, negative Mengen, Nullmengen**). *Sei μ ein signiertes Maß auf dem Messraum $(\Omega, \mathscr{A})$. Eine Menge $M \in \mathscr{A}$ heißt*

$$\left\{ \begin{array}{c} (\mu\text{-})\textit{positiv} \\ (\mu\text{-})\textit{negativ} \\ (\mu\text{-})\textit{Nullmenge} \end{array} \right\}, \textit{ wenn } \left\{ \begin{array}{c} \mu(A) \geq 0 \\ \mu(A) \leq 0 \\ \mu(A) = 0 \end{array} \right\} \textit{ für alle } A \in \mathscr{A}|M \textit{ gilt. Genauso}$$

erklärt man Nullmengen für vektorwertige Maße.

Mit dem folgenden Satz lässt sich die Behandlung signierter und vektorwertiger Maße im Wesentlichen auf die von Maßen zurückführen.

Satz 2.39 (über die **Hahnsche Zerlegung**). *Sei μ ein signiertes Maß auf dem Messraum $(\Omega, \mathscr{A})$. Dann gibt es eine disjunkte Zerlegung $\Omega = P \cup N$ in eine positive Menge P und eine negative Menge N.*

Zur Vorbereitung des Beweis beginnen wir erst einmal mit zwei Lemmata:

Lemma 2.40. *Sei μ ein signiertes Maß auf dem Messraum $(\Omega, \mathscr{A})$ mit $\mu(\Omega) > -\infty$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $P_\varepsilon \in \mathscr{A}$ mit $\mu(P_\varepsilon) \geq \mu(\Omega)$ und $\mu(A) > -\varepsilon$ für alle $A \in \mathscr{A}|P_\varepsilon$.*

Beweis. Wäre das Lemma falsch, so enthielte jede Menge aus $\mathscr{A}$ mit Maß $\geq \mu(\Omega)$ eine Teilmenge $A \in \mathscr{A}$ mit $\mu(A) \leq -\varepsilon$. Wir könnten dann induktiv $\mathscr{A}$-messbare $A_1 \subset \Omega$, $A_2 \subset \Omega \setminus A_1$, $A_3 \subset \Omega \setminus (A_1 \cup A_2)$, ... finden mit $\mu(A_i) \leq -\varepsilon$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Mit der σ-Additivität folgte erst $\mu(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) = -\infty$ und dann $\mu(\Omega) = -\infty$ im Widerspruch zur Annahme. □

Lemma 2.41. *Sei μ ein signiertes Maß auf dem Messraum $(\Omega, \mathscr{A})$. Zu jedem $X \in \mathscr{A}$ mit $|\mu(X)| < \infty$ gibt es eine positive Menge $P \subset X$ mit $\mu(P) \geq \mu(X)$.*

Beweis. Durch induktive Anwendung des vorigen Lemmas mit $\varepsilon = \frac{1}{i}$ finden wir Mengen $X \supset P_1 \supset P_{1/2} \supset P_{1/3} \supset \ldots$ mit $\mu(X) \leq \mu(P_1) \leq \mu(P_{1/2}) \leq \mu(P_{1/3}) \leq \ldots$ und $\mu(A) > -\frac{1}{i}$ für $A \in \mathscr{A}|P_{1/i}$. Folglich ist $P := \bigcap_{i=1}^\infty P_{1/i}$ positiv und wegen $|\mu(X)| < \infty$ können wir wie in Satz 1.6 auf $\mu(P) = \lim_{i\to\infty} \mu(P_{1/i}) \geq \mu(X)$ schließen. □

Beweis des Satzes. Ohne Einschränkung nehme μ den Wert ∞ nicht an. Sei $M := \sup\{\mu(X) : X \in \mathscr{A}\} \in [0,\infty]$, dann liefert das Lemma positive Mengen $P_n \in \mathscr{A}$ mit $\mu(P_n) \to M$ bei $n \to \infty$. Auch $P := \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ ist positiv mit $\mu(P) \geq \mu(P_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und daher $\mu(P) = M$. Ist $A \in \mathscr{A}$ disjunkt zu P, so folgt

$$\mu(A) = \mu(P \cup A) - \mu(P) \leq 0$$

und deshalb ist $N := \Omega \setminus P$ negativ. □

Definition 2.42 (**Absolutstetige und singuläre Maße**). *Seien μ und ν zwei Maße, möglicherweise signiert oder vektorwertig, auf einem Messraum $(\Omega, \mathscr{A})$. Dann heißt ν absolutstetig bezüglich μ, notiert $\nu \ll \mu$, wenn jede μ-Nullmenge auch ν-Nullmenge ist. Und ν heißt (vollständig) singulär zu μ, notiert $\nu \perp \mu$, wenn es eine μ-Nullmenge A gibt, so dass $\Omega\backslash A$ eine ν-Nullmenge ist.*

Beispiele. *Je zwei Dirac-Maße δ_x und δ_y mit $x \neq y$ in Ω sind zueinander singulär. Außerdem ist jedes Dirac-Maß δ_x zu $x \in \mathbb{R}^n$ (oder genauer seine Einschränkung auf $\mathscr{M}^n$) singulär zu $\mathscr{L}^n$. Als typische Beispiele absolutstetiger Maße werden wir unten gewichtete Maße kennenlernen.*

Korollar 2.43 (über die **Jordansche Zerlegung**). *Zu jedem signierten Maß μ auf einem Messraum $(\Omega, \mathscr{A})$ gibt es eine Zerlegung $\mu = \mu_+ - \mu_-$ von μ in zwei Maße μ_+ und μ_- auf $(\Omega, \mathscr{A})$, mindestens eines davon endlich, mit $\mu_+ \perp \mu_-$.*

Beweis. Die Wahlen $\mu_+ = \mathbb{1}_P \cdot \mu$ und $\mu_- = -\mathbb{1}_N \cdot \mu$ leisten das Gewünschte. □

Bemerkung. *Die Mengen P und N in der Hahnschen-Zerlegung sind eindeutig bis auf μ-Nullmengen und die beiden Maße μ_+ und μ_- in der Jordanschen Zerlegung sind eindeutig bestimmt.*

Definition 2.44 (**Gewichtete Maße**). *Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum. Für μ-integrierbares $f\colon \Omega \to [-\infty, \infty]$ wird die* **Gewichtung** *$f \cdot \mu\colon \mathscr{A} \to [-\infty,\infty]$ von μ mit f erklärt durch*

$$(f \cdot \mu)(A) := \int_A f \,\mathrm{d}\mu \qquad \text{für } A \in \mathscr{A}\,.$$

In diesem Kontext nennen wir μ auch das **Grundmaß** *und f die* **Gewichts- oder Dichtefunktion**.

Will man das Grundmaß explizit angeben, so bezeichnet man Dichtefunktionen als μ-Dichten. Speziell für $\mu = \mathscr{L}^n$ spricht man auch von Lebesgue-Dichten und für das Zählmaß $\mu = \xi$ von Zähldichten.

Bemerkungen.

- *Dabei ist $f \cdot \mu$ nach Rechenregel (VI) in Proposition 2.10 ein signiertes Maß auf $(\Omega, \mathscr{A})$.*

- *Gilt μ-fast-überall $f \geq 0$, so ist $f \cdot \mu$ ein Maß, und die Gewichtung verallgemeinert die Einschränkungsoperation $\mathbb{1}_X \cdot \mu$ aus Abschnitt 1.1.*

- *Integrale und Gewichtungen zu signierten Grundmaßen μ definiert man durch*
$$(f\cdot\mu)(A) := \int_A f\,\mathrm{d}\mu := \int_A f\,\mathrm{d}\mu_+ - \int_A f\,\mathrm{d}\mu_-\,,$$
sofern die rechte Seite wohldefiniert ist.

- *Eine Funktion $g\colon \Omega\to[-\infty,\infty]$ ist genau dann $f\cdot\mu$-integrierbar, wenn gf μ-integrierbar ist. Und dann gelten*[25]
$$\int_\Omega g\,\mathrm{d}(f\cdot\mu) = \int_\Omega gf\,\mathrm{d}\mu \qquad \text{und} \qquad g\cdot(f\cdot\mu) = (gf)\cdot\mu\,.$$

- *Die Gewichtung $f\cdot\mu$ macht auch für vektorwertige μ-summierbare Abbildungen $f\colon\Omega\to V$ Sinn und ist dann ein V-wertiges Maß.*

- *Auch bezüglich Vektormaßen kann man integrieren: Sind ganz allgemein V, W, X endlich-dimensionale Vektorräume, $f=\sum_{i=1}^m f_i v_i$, $v_i\in V$, eine V-wertige Funktion, $\mu=\sum_{j=1}^n \mu_j w_j$, $w_j\in W$, ein W-wertiges Maß und $\odot\colon V\times W\to X$ eine bilineare Abbildung, so ist das Integral*
$$(f\odot\mu)(A) := \int_A f\odot\,\mathrm{d}\mu := \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n\Big(\int_\Omega f_i\,\mathrm{d}\mu_j\Big)v_i\odot w_j\in X$$
linear in f und μ.

Es gilt stets $f\cdot\mu\ll\mu$, also sind Gewichtungen von μ immer absolutstetig bezüglich μ. Der nächste Satz zeigt, dass bei σ-endlichem μ auch die (viel tiefere) Umkehrung gilt, dass also absolutstetige Maße bezüglich μ immer als Gewichtungen von μ geschrieben werden können:

Satz 2.45 (von **Radon-Nikodým**,∼1930)**.** *Seien μ ein σ-endliches Maß und ν ein signiertes Maß auf einem Messraum $(\Omega,\mathscr{A})$. Gilt $\nu\ll\mu$, so gibt es eine μ-integrierbare Dichtefunktion $f\colon\Omega\to[-\infty,\infty]$ mit $\nu=f\cdot\mu$.*

Bemerkungen.

- *Für V-wertige Maße ν gilt der Satz ganz analog mit einer μ-summierbaren Dichtefunktion $f\colon\Omega\to V$; dies sieht man durch separate Betrachtung der Komponentenfunktion von V.*

- *Die Dichtefunktion f kann $\mathscr{A}$-messbar gewählt werden und ist μ-fast-überall eindeutig durch μ und ν bestimmt. Oft wird f daher als eindeutig bestimmte Fastfunktion betrachtet und als sogenannte* **Radon-Nikodým-Ableitung**
$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$$

[25] *Beweis.* Für $A\in\mathscr{A}$ gilt
$$\int_\Omega \mathbb{1}_A\,\mathrm{d}(f\cdot\mu) = (f\cdot\mu)(A) = \int_A f\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \mathbb{1}_A f\,\mathrm{d}\mu\,.$$
Mit der Standard-Ausdehnugsprozedur (und Messbarkeitsüberlegungen) folgt, dass man $\mathbb{1}_A$ in der resultierenden Gleichung sowohl durch g als auch durch $\mathbb{1}_A g$ ersetzen kann und damit sind die Behauptungen gezeigt. □

notiert.

- *In dieser Notation gelten die einprägsamen "Kürzungsregeln"*[26]

$$\nu = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} \cdot \mu \qquad \text{und} \qquad \int_\Omega g \,\mathrm{d}\nu = \int_\Omega g \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} \,\mathrm{d}\mu$$

sowie die Äquivalenzen[27]

$$\nu \text{ ist endlich} \iff \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} \text{ ist } \mu\text{-summierbar,}$$
$$\nu \text{ ist } \sigma\text{-endlich} \iff \left|\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}\right| < \infty \text{ gilt } \mu\text{-fast-überall.}$$

Beweisskizze zum Satz 2.45 von Radon-Nikodým. Wegen der Jordan-Zerlegung reicht es, den Satz nur im $[0, \infty]$-wertigen Fall, also für Maße ν zu beweisen. Dazu argumentieren wir so:

Schritt 1: Der Satz gilt für endliche Maße μ und ν.
Sei $\mathcal{G}$ die Menge aller μ-messbaren Abbildungen $g \colon \Omega \to [0, \infty]$, für die $g \cdot \mu \leq \nu$ gilt. Wir beobachten, dass $\mathcal{G}$ nicht-leer und mit g_1 und g_2 stets auch $\max\{g_1, g_2\}$ in $\mathcal{G}$ ist. Sei jetzt $M := \sup_{g \in \mathcal{G}} (g \cdot \mu)(\Omega) \leq \nu(\Omega) < \infty$. Dann gibt es $g_k \in \mathcal{G}$ mit $\lim_{k\to\infty} (g_k \cdot \mu)(\Omega) = M$. Folglich ist $f_k := \max\{g_1, g_2, \ldots, g_k\}$ eine punktweise nichtfallende Folge von Funktionen aus $\mathcal{G}$ mit $(f_k \cdot \mu)(\Omega) \geq (g_k \cdot \mu)(\Omega)$ und gemäß monotoner Konvergenz gelten $f := \lim_{k\to\infty} f_k \in \mathcal{G}$ und $(f \cdot \mu)(\Omega) = M$. Nun gilt $f \cdot \mu \leq \nu$ nach Konstruktion und, um Gleichheit und somit die Behauptung herzuleiten, zeigen wir $(f \cdot \mu)(\Omega) = \nu(\Omega)$: Wäre nämlich $(f \cdot \mu)(\Omega) < \nu(\Omega)$, so könnten wir ein $\varepsilon > 0$ finden, so dass für das signierte Maß $\varrho := \nu - (f{+}\varepsilon) \cdot \mu$ noch $\varrho(\Omega) > 0$ gilt. Nach der Hahn-Zerlegung gäbe es eine ϱ-positive Menge $P \in \mathscr{A}$ mit $\varrho(P) \geq \varrho(\Omega) > 0$ und für $\widetilde{f} := f + \varepsilon \mathbb{1}_P$ wüssten wir

$$(\widetilde{f} \cdot \mu)(A) = (f \cdot \mu)(A \setminus P) + ((f{+}\varepsilon) \cdot \mu)(A \cap P) \leq \nu(A \setminus P) + \nu(A \cap P) \leq \nu(A)$$

für alle $A \in \mathscr{A}$, also $\widetilde{f} \in \mathcal{G}$. Daraus ergäbe sich

$$M \geq \int_\Omega \widetilde{f} \,\mathrm{d}\mu = M + \varepsilon \mu(P) \,,$$

also $\mu(P) = 0$, und wegen $\nu \ll \mu$ folgte mit $\nu(P) = 0$ und $\varrho(P) = 0$ ein Widerspruch. Insgesamt erhalten wir deshalb $(f \cdot \mu)(\Omega) = \nu(\Omega)$ und $f \cdot \mu = \nu$.

Schritt 2: Der Satz gilt für endliche Maße μ und beliebige Maße ν.
Sei $M := \sup\{\mu(A) \,:\, A \text{ ist } \nu\text{-endlich}\} \leq \mu(\Omega) < \infty$. Dann gibt es ν-endliche

[26] Die erste Regel ist dabei eine Umformulierung des Satzes und die zweite Regel folgt daraus nach einer obigen Bemerkung.

[27] Die erste Äquivalenz ist klar, und die zweite beweist man so: '$\Longrightarrow$': Sei $\Omega = \bigcup_{i=1}^\infty E_i$ mit ν-endlichen E_i. Dann ist $\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$ μ-summierbar über E_i und deshalb μ-fast-überall auf E_i endlich. '$\Longleftarrow$': Sei $\Omega = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$ mit μ-endlichen A_i. Dann erfüllen für einen endlichen $\mathscr{A}$-messbaren Repräsentanten f von $\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$ die Mengen $E_{i,k} := A_i \cap f^{-1}]-k, k[$ stets $|\nu(E_{i,k})| \leq k\mu(A_i) < \infty$, es gilt $\Omega = \bigcup_{i,k=1}^\infty E_{i,k}$ und ν ist σ-endlich.

Mengen E_k mit $\lim_{k\to\infty}\mu(E_k) = M$. Wir können die E_k als wachsend annehmen und erhalten, dass $\mu(E) = M$ für $E := \bigcup_{k=1}^\infty E_k$ gilt. Für ν-endliches $A \subset \Omega\backslash E$ ist auch $E_k \cup A$ stets ν-endlich, deshalb folgt

$$M + \mu(A) = \lim_{k\to\infty} \mu(E_k \cup A) \le M\,,$$

also $\mu(A) = 0$ und wegen Absolutstetigkeit auch $\nu(A) = 0$. Somit bleiben für $A \subset \Omega\backslash E$ nur die beiden Alternativen $\mu(A){=}\nu(A){=}0$ und $0{<}\mu(A){<}\nu(A){=}\infty$, d. h. es gilt $\mathbb{1}_{\Omega\backslash E}\cdot\nu = \infty\mathbb{1}_{\Omega\backslash E}\cdot\mu$. Auf die endlichen Maße $\nu_k := \mathbb{1}_{E_{k+1}\backslash E_k}\cdot\nu$ können wir wegen $\nu_k \ll \mu$ Schritt 1 anwenden und wir erhalten μ-messbare Dichten $f_k\colon\Omega\to[0,\infty]$ mit $\nu_k = f_k\cdot\mu$. Insgesamt ergibt sich mit monotoner Konvergenz

$$\nu = \mathbb{1}_{\Omega\backslash E}\cdot\nu + \sum_{k=1}^\infty \nu_k = \infty\mathbb{1}_{\Omega\backslash E}\cdot\mu + \sum_{k=1}^\infty f_k\cdot\mu = \left(\infty\mathbb{1}_{\Omega\backslash E} + \sum_{k=1}^\infty f_k\right)\cdot\mu\,.$$

Schritt 3: Der Satz gilt für σ-endliche Maße μ und beliebige Maße ν.
Wir können $\Omega = \bigcup_{i=1}^\infty E_i$ schreiben mit μ-endliche disjunkten E_i. Dann sind $\mu_i = \mathbb{1}_{E_i}\cdot\mu$ und $\nu_i := \mathbb{1}_{E_i}\cdot\nu$ Maße mit $\nu_i \ll \mu_i$, die μ_i sind endlich und nach Schritt 2 gibt es μ_i-messbare Dichten $f_i\colon\Omega\to[0,\infty]$ mit $\nu_i = f_i\cdot\mu_i$. Wir schließen

$$\nu = \sum_{i=1}^\infty \nu_i = \sum_{i=1}^\infty (f_i\mathbb{1}_{E_i}\cdot\mu) = \left(\sum_{i=1}^\infty f_i\mathbb{1}_{E_i}\right)\cdot\mu$$

mit dem Satz über monotone Konvergenz. □

Der nächste Satz beschreibt die Situation allgemeiner für nicht-absolutstetige Maße:

Satz 2.46 (**Lebesguescher Zerlegungssatz**). *Seien μ ein σ-endliches Maß und ν ein σ-endliches signiertes oder Vektormaß auf einem Messraum $(\Omega,\mathscr{A})$. Dann gibt es eine eindeutige Zerlegung*

$$\nu = \nu_\mathrm{a} + \nu_\mathrm{s}$$

in einen **absolutstetigen Anteil** ν_a *mit* $\nu_\mathrm{a} \ll \mu$ *und einen* **singulären Anteil** ν_s *mit* $\nu_\mathrm{s} \perp \mu$.

Bemerkung. *Auf den absolutstetigen Anteil kann man natürlich den Satz von Radon-Nikodým anwenden und erhält dann insgesamt*

$$\nu = \frac{\mathrm{d}\nu_\mathrm{a}}{\mathrm{d}\mu}\cdot\mu + \nu_\mathrm{s}\,.$$

Beweis von Satz 2.46. Nach (Übergang zu den Komponenten und) Jordan-Zerlegung können wir annehmen, dass ν ein Maß ist. Gemäß Radon-Nikodým gibt es ein $\mathscr{A}$-messbares $f\colon\Omega\to[0,\infty]$ mit $\mu = f\cdot(\mu{+}\nu)$. Folglich ist $N := f^{-1}\{0\}$ eine μ-Nullmenge und $\nu_\mathrm{s} := \mathbb{1}_N\cdot\nu$ ist singulär zu μ. Wir zeigen jetzt, dass

$\nu_{\mathrm{a}} := \mathbb{1}_{\Omega\setminus N} \cdot \nu$ absolutstetig bezüglich μ ist: Für jede μ-Nullmenge A ist nach Konstruktion $\mathbb{1}_A f = 0$ $(\mu+\nu)$-fast-überall auf Ω, also

$$\nu_{\mathrm{s}}(A) = \nu(A \setminus N) \leq (\mu+\nu)(A \setminus N) = 0\,.$$

Schließlich ist die Eindeutigkeit der Zerlegung zu begründen: Ist $\nu = \widetilde{\nu}_{\mathrm{a}} + \widetilde{\nu}_{\mathrm{s}}$ eine zweite Zerlegung mit denselben Eigenschaften, so gibt es μ-Nullmengen N und $\widetilde{N}$, so dass $\Omega\setminus N$ eine ν_{s}- und $\Omega\setminus\widetilde{N}$ eine $\widetilde{\nu}_{\mathrm{s}}$-Nullmenge ist. Es folgt

$$\nu_{\mathrm{a}}(A) = \nu(A \setminus (N \cup \widetilde{N})) = \widetilde{\nu}_{\mathrm{a}}(A)$$

für alle $A \in \mathscr{A}$ und somit die Eindeutigkeit der Zerlegung. □

Die folgende Bildung ist im Zusammenhang mit Vektormaßen oft hilfreich:

Definition 2.47 (**Variation**). *Sei μ ein Vektormaß auf dem Messraum $(\Omega, \mathscr{A})$ mit Werten in einem endlich-dimensionalen normierten Raum V. Das* **Variationsmaß** $|\mu|\colon \mathscr{A} \to [0,\infty]$ *von μ ist definiert durch*

$$|\mu|(A) := \sup\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(A_i)| \;:\; A_i \in \mathscr{A} \text{ disjunkt mit } A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\}$$

und $|\mu|(\Omega)$ heißt die **Totalvariation** *von μ über Ω.*

Proposition 2.48. *Unter den Voraussetzungen der Definition ist $|\mu|$ ein Maß und zwar das kleinste Maß auf $(\Omega, \mathscr{A})$ mit $|\mu(A)| \leq |\mu|(A)$ für alle $A \in \mathscr{A}$.*

Beweis. Wir zeigen nur σ-Additivität von $|\mu|$, denn die weiteren Behauptungen folgen sofort daraus: Gilt einerseits $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ mit disjunkten $A_i \in \mathscr{A}$ und disjunkten $B_j \in \mathscr{A}$, so folgt

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\mu(B_j)| = \sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_j \cap A_i) \right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\mu(B_j \cap A_i)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\mu|(A_i)\,,$$

also auch

$$|\mu|(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\mu|(A_i)\,.$$

Andererseits gibt es bei disjunkter Zerlegung $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ in $\mathscr{A}$ zu jedem $\varepsilon > 0$ und A_i abzählbar viele disjunkte $B_i^j \in \mathscr{A}$ mit $A_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_i^j$ und

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\mu(B_i^j)| > |\mu|(A_i) - \frac{\varepsilon}{2^i}\,.$$

Dann ist $A = \bigcup_{i,j=1}^{\infty} B_i^j$ und wegen

$$|\mu|(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\mu(B_i^j)| > \sum_{i=1}^{\infty} |\mu|(A_i) - \varepsilon$$

folgt durch Grenzübergang $\varepsilon \searrow 0$ insgesamt die Gleichheit

$$|\mu|(A) = \sum_{i=1}^{\infty} |\mu|(A_i)\,.$$ □

Bemerkungen.

- *Für signierte Maße μ lässt sich das Variationsmaß analog definieren und aus den Hahn-Jordanschen Zerlegungen erhält man die plausiblen Formeln*

$$|\mu|(A) = \mu_+(A) + \mu_-(A) = \mu(A \cap P) - \mu(A \cap N) \qquad \text{für } A \in \mathscr{A}\,.$$

Daraus liest man insbesondere ab, dass μ genau dann endlich ist, wenn $|\mu|$ endlich ist.

- *Für V-wertige Maße μ und ν auf $(\Omega, \mathscr{A})$ gilt die* **Dreiecksungleichung**

$$|\mu+\nu| \leq |\mu| + |\nu|\,.$$

Für endliche signierte Maße μ_i und $v_i \in V$ ergibt sich $\left|\sum_{i=1}^n \mu_i v_i\right| \leq \sum_{i=1}^n |\mu_i||v_i|$. Deshalb folgt für jedes V-wertige Maß μ aus der Endlichkeit seiner Komponentenfunktionen **immer Endlichkeit von $|\mu|$** *und* **die Totalvariation ist eine Norm auf dem Raum der V-wertigen Maße**.

- *Die μ-Nullmengen zu einem Vektormaß μ sind genau die $|\mu|$-Nullmengen. Folglich hängen auch Konzepte wie Absolutstetigkeit und Singularität nur vom Variationsmaß ab.*

Zur praktischen Berechnung der Variation benutzt man oft:

Proposition 2.49. *Für ein Maß μ und μ-summierbare $f\colon \Omega \to V$ gilt*

$$|f \cdot \mu| = |f| \cdot \mu\,.$$

Beweis. Die Dreiecksungleichung des Abschnitts 2.2 besagt $|(f \cdot \mu)(A)| \leq (|f| \cdot \mu)(A)$ für alle messbaren Mengen A. Angewandt auf die Mengen in der Definition des Variationsmaßes ergibt dies $|f \cdot \mu|(A) \leq (|f| \cdot \mu)(A)$ für solche A und wir müssen nur noch $|f \cdot \mu|(\Omega) \geq (|f| \cdot \mu)(\Omega)$ zeigen: Dazu sei $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ eine abzählbare dichte Teilmenge der Einheitssphäre von V und $\varepsilon > 0$. Wir setzen

$$H_i := \left\{x \in \Omega \,:\, \big|f(x) - |f(x)|x_i\big| \leq \varepsilon |f(x)|\right\}$$

und gehen zu disjunkt gemachten messbaren Teilmengen $A_i \subset H_i$ über, so dass noch $\Omega = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$ gilt. Wir erhalten erst

$$\begin{aligned} |(f \cdot \mu)(A_i)| = \left|\int_{A_i} f \,\mathrm{d}\mu\right| &\geq \left|\int_{A_i} |f| x_i \,\mathrm{d}\mu\right| - \int_{A_i} \big|f - |f|x_i\big| \,\mathrm{d}\mu \\ &\geq (1-\varepsilon) \int_{A_i} |f| \,\mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

und dann durch Aufsummieren $|f \cdot \mu|(\Omega) \geq (1-\varepsilon)(|f| \cdot \mu)(\Omega)$. Grenzübergang $\varepsilon \searrow 0$ vervollständigt den Beweis. ☐

Korollar 2.50 (über die Existenz der **Polarzerlegung**). *Jedes Vektormaß μ kann als Gewichtung eines Maßes geschrieben werden, nämlich*

$$\mu = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}|\mu|} \cdot |\mu| \,,$$

wobei für die Dichte $|\mu|$-fast-überall $\left|\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}|\mu|}\right| = 1$ gilt.

Beweis. Aus Proposition 2.48 folgt, dass μ absolutstetig bezüglich $|\mu|$ ist und nach dem Satz von Radon-Nikodým gilt $\mu = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}|\mu|} \cdot |\mu|$. Mit Proposition 2.49 ergibt sich $|\mu| = \left|\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}|\mu|} \cdot |\mu|\right| = \left|\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}|\mu|}\right| \cdot |\mu|$ und wegen der Eindeutigkeit von Dichten erhalten wir $\left|\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}|\mu|}\right| = 1$ $|\mu|$-fast-überall. □

Korollar 2.51. *Für ein Vektormaß μ und $|\mu|$-summierbare $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ gilt*

$$|f \cdot \mu| = |f| \cdot |\mu| \,.$$

Beweis. Mit Proposition 2.49 und der Polarzerlegung erhalten wir

$$|f \cdot \mu| = \left|f \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}|\mu|} \cdot |\mu|\right| = \left|f \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}|\mu|}\right| \cdot |\mu| = |f| \cdot |\mu| \,.$$ □

Bemerkungen (zu **verallgemeinerten Dreiecksungleichungen**).

- *Aus Korollar 2.51 ergibt sich $|(f \cdot \mu)(\Omega)| \leq |f \cdot \mu|(\Omega) \leq (|f| \cdot |\mu|)(\Omega)$ und Ausschreiben der Gewichtungen liefert die Dreiecksungleichung für Vektormaße*
$$\left| \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \right| \leq \int_\Omega |f| \,\mathrm{d}|\mu| \,.$$
- *Noch allgemeinere Varianten der Dreiecksungleichung erlauben vektorwertige Funktionen* und *vektorwertige Maße mit einer bilinearen Abbildung anstelle der Multiplikation.*

2.7 Bildmaße, Transformations- und Flächenformel

Wir werden nun sehen, dass man ein Maß μ über einem Grundraum Ω mit Hilfe einer (messbaren) Abbildung $F\colon \Omega \to X$ transportieren und so ein neues Maß μ^F über dem Grundraum X erhalten kann.

Definition 2.52 (**Bildmaße**). *Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum und $F\colon \Omega \to X$ sei eine Abbildung. Dann ist $\mathscr{A}^F := \{B \in \mathscr{P}(X) : F^{-1}(B) \in \mathscr{A}\}$ eine σ-Algebra über X und durch*

$$\mu^F(B) := \mu(F^{-1}(B)) \qquad \text{für } B \in \mathscr{A}^F$$

wird ein Maß auf $(X, \mathscr{A}^F)$ definiert. Man nennt $\mathscr{A}^F$ die Bild-σ-Algebra von $\mathscr{A}$ unter F und μ^F das Bildmaß von μ unter F.

Bemerkung. *$\mathscr{A}^F$ ist die größte σ-Algebra $\mathscr{S}$ auf X, so dass F noch $(\mathscr{A},\mathscr{S})$-messbar ist. Geht man also von einer $(\mathscr{A},\mathscr{S})$-messbaren Abbildung F aus, so gilt $\mathscr{S} \subset \mathscr{A}^F$ und $\mu^F(S)$ ist (mindestens) für Mengen $S \in \mathscr{S}$ definiert.*

Für Transformationenen zwischen μ-Integralen in μ^F-Integralen gilt folgende allgemeine Regel:

Proposition 2.53 (**Transformationsformel** für Maßintegrale)**.** *Sei $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ ein Maßraum und $F\colon \Omega \to X$ eine Abbildung. Für μ^F-messbares $f\colon X \to [-\infty,\infty]$ ist $f \circ F$ stets μ-messbar mit*

$$\int_B f \,\mathrm{d}\mu^F = \int_{F^{-1}(B)} (f \circ F) \,\mathrm{d}\mu \qquad \text{für alle } B \in \mathscr{A}^F .$$

Dabei existieren beide Integrale oder keines.

Beweis. Für charakteristische Funktionen handelt es sich um die Definition des Bildmaßes. Daraus folgt die behauptete Transformationsformel mit der Standard-Ausdehungsprozedur. □

Bemerkungen.

- *Die Proposition kann man als Transformationsformel*

$$f \cdot \mu^F = \big[(f \circ F) \cdot \mu\big]^F$$

für gewichtete Maße verstehen.

- *In der Wahrscheinlichkeitstheorie modelliert man beobachtbare Größen oft durch $\mathscr{A}$-messbare Abbildungen $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathscr{A},P)$, genannt* **Zufallsvariablen**. *Die Wahrscheinlichkeit, dass man für die Größe den Wert $x \in \mathbb{R}$ beziehungsweise einen Wert in $[a,b[\subset \mathbb{R}$ beobachtet ist dann $P^X(\{x\}) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\})$ beziehungsweise $P^X([a,b[) = P(\{\omega \in \Omega : a \le X(\omega) < b\})$. In diesem Kontext nennt man das Bildmaß P^X auch die (Wahrscheinlichkeits-)***Verteilung von $\boldsymbol{X}$**.

- *Für Erwartungswerte von Zufallsvariablen $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ besagt die Proposition*

$$\mathrm{E}_P[X] := \int_{\mathbb{R}} x \,\mathrm{d}P^X(x) = \int_\Omega X \,\mathrm{d}P .$$

Speziell für Lebesgue- und Hausdorff-Maße und gewisse Bijektionen F gibt es explizite Formeln für Bildmaße und die zugehörige Integraltransformation. Diese Formeln übernehmen bei Integration in mehreren Veränderlichen die Rolle der Substitutionsregel und sind für praktische Maß- und Integralberechnungen sehr nützlich:

Satz 2.54 (Jacobische **Transformationsformel für $\boldsymbol{\mathscr{L}^n}$**)**.** *Seien Ω und X offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, $T\colon \Omega \to X$ sei ein C^1-Diffeomorphismus und $A \in \mathscr{M}^n|\Omega$. Dann ist das Bild $T(A) \in \mathscr{M}^n|X$ mit*

$$\mathscr{L}^n(T(A)) = \int_A \mathrm{J}T \,\mathrm{d}\mathscr{L}^n$$

und für $\mathscr{L}^n$-messbares $f\colon X \to [-\infty,\infty]$ ist $f \circ T$ auch $\mathscr{L}^n$-messbar mit

$$\int_{T(A)} f \,\mathrm{d}\mathscr{L}^n = \int_A (f \circ T)\,\mathrm{J}T \,\mathrm{d}\mathscr{L}^n \,.$$

Dabei existieren beide Integrale oder keines und $\mathrm{J}T(x) := |\det T'(x)|$ heißt **Jacobi-Determinante** *oder* **Jacobische***.*

Bemerkungen.

- *Man kann sich $\mathrm{J}T(x)\,\mathrm{d}\mathscr{L}^n(x)$ als durch T abgebildetes infinitesimales Volumenelement vorstellen. Insofern berücksichtigt die Jacobische beim Übergang zum T-Bild auftretende Streckungen und Stauchungen und mißt resultierende Volumenänderungen.*

- *Ein C^1-Diffeomorphismus $T\colon \Omega \to X$ ist eine bijektive, stetig differenzierbare Abbildung, deren Umkehrabbildung $T^{-1}\colon X \to \Omega$ stetig differenzierbar ist. Nach dem Umkehrsatz ist dann die Ableitung $T'(x)$ für jedes $x \in \Omega$ eine invertierbare Matrix $(n{\times}n)$-Matrix mit $(T'(x))^{-1} = (T^{-1})'(T(x))$.*

- *Ein C^1-Diffeomorphismus überführt Borel-Mengen A in Borel-Mengen $T(A)$. Nach dem Satz überführt er außerdem Lebesgue-Nullmengen in Lebesgue-Nullmengen und damit bilden sowohl T als auch T^{-1} Lebesgue-messbare Mengen in Lebesgue-messbare Mengen ab. Also gilt $(\mathscr{M}^n|\Omega)^T = (\mathscr{M}^n|X)$ und T ist $(\mathscr{M}^n|\Omega, \mathscr{M}^n|X)$-messbar.*

- *Die erste Aussage des Satzes kann mit Hilfe von Bildmaßen als*

  $$\left(\mathscr{L}^n\big|_{\mathscr{M}^n|X}\right)^{T^{-1}} = \mathrm{J}T \cdot \mathscr{L}^n\big|_{\mathscr{M}^n|\Omega} \quad \text{oder} \quad \left(\mathrm{J}T \cdot \mathscr{L}^n\big|_{\mathscr{M}^n|\Omega}\right)^T = \mathscr{L}^n\big|_{\mathscr{M}^n|X}$$

  zusammengefasst werden und die zweite Aussage ist die gemäß Proposition 2.53 zugehörige Integraltransformation.

- *In vielen einfachen Anwendungen ist T eine Translation, Rotation, Spiegelung, Koordinatenpermutation oder irgendeine andere Isometrie (d. h. $T' \in \mathcal{O}(n)$). Dann ist $\mathrm{J}T \equiv 1$ auf Ω und bei symmetrischem A (d. h. $T(A) = A$) gilt die Isometrie-Invarianz*

  $$\int_A f \,\mathrm{d}\mathscr{L}^n = \int_A f \circ T \,\mathrm{d}\mathscr{L}^n \,.$$

- *Ist A symmetrisch und f ungerade (also $f \circ T = -f$) bezüglich einer Spiegelung T, so folgt*

  $$\int_A f \,\mathrm{d}\mathscr{L}^n = 0 \,,$$

  sofern das Integral überhaupt existiert[28]*. Das kann in der Praxis sehr aufwendige Rechnungen ersparen und ergibt beispielsweise (ohne Rechnung!)*

  $$\int_{B_1^n(0)} x_i x_j \,\mathrm{d}\mathscr{L}^n(x) = 0 \qquad \text{und} \qquad \int_{B_1^n(0)} \frac{\partial}{\partial x_i}|x|^s \,\mathrm{d}\mathscr{L}^n(x) = 0$$

  für alle $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mit $i \neq j$.

[28] Typischerweise stellt man die Existenz des Integrals dabei sicher durch Angabe einer über A μ-summierbaren Majorante g mit $|f| \le g$.

Bei der praktischen Berechnung von $\mathscr{L}^n$-Integralen verwendet man die Transformationsformel oft, um in für die jeweilige Rechnung günstiges Koordinatensystem zu wechseln:

Anwendungen (der Transformationsformel zur **Integralberechnung).**

- *Liegt ein $\mathscr{L}^2$-Integral über ein Ringsegment $S_{r,R}^{\alpha,\beta} := \{(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi) : r{<}\varrho{<}R, \alpha{<}\varphi{<}\beta\}$ vor (mit $0{\leq}r{<}R{\leq}\infty$, $-\pi{\leq}\alpha{<}\beta{\leq}\pi$), so ist es oft günstig* **ebene Polarkoordinaten**

$$T(\varrho,\varphi) := (\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi) \qquad \textit{auf}\ \Omega :=]0,\infty[\times]-\pi,\pi[$$

mit $T'(\varrho,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\varrho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \varrho\cos\varphi \end{pmatrix}$ *und* $\mathrm{J}T(\varrho,\varphi) = \varrho$ *zu verwenden. Man erhält dann durch* **Kombination von Trafo und Fubini**

$$\int_{S_{r,R}^{\alpha,\beta}} f\,\mathrm{d}\mathscr{L}^2 = \int_r^R \int_\alpha^\beta f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\varrho\,\mathrm{d}\mathscr{L}^1(\varphi)\,\mathrm{d}\mathscr{L}^1(\varrho)\,,$$

wobei sich die iterierten Integrale auf der rechten Seite unter Umständen (und hoffentlich leicht) berechnen lsssen. Ein konkretes Beispiel für diese Vorgehensweise ist

$$\int_{S_{1,2}^{0,\pi}} x_2\,\mathrm{d}\mathscr{L}^2(x) = \int_1^2 \int_0^\pi \varrho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\mathscr{L}^1(\varphi)\,\mathrm{d}\mathscr{L}^1(\varrho) = \frac{14}{3}\,.$$

- *Weitere gebräuchliche Koordinatensysteme sind* **Zylinderkoordinaten**

$$T(\varrho,\varphi,h) := (\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi, h) \qquad \textit{auf}\ \Omega :=]0,\infty[\times]-\pi,\pi[\times\mathbb{R}$$

mit $\mathrm{J}T(\varrho,\varphi,h) = \varrho$ *und* **Kugelkoordinaten/räumliche Polarkoordinaten**

$$T(\varrho,\varphi,\vartheta) := (\varrho\cos\varphi\sin\vartheta, \varrho\sin\varphi\sin\vartheta, \varrho\cos\vartheta) \qquad \textit{auf}\ \Omega :=]0,\infty[\times]-\pi,\pi[\times]0,\pi[$$

mit $\mathrm{J}T(\varrho,\varphi,\vartheta) = \varrho^2\sin\vartheta$.

- *In beliebiger Dimension $n \geq 2$ lassen sich Polarkoordinaten beispielsweise als*

$$T(\varrho,y) := \varrho\Phi(y) \qquad \textit{auf}\ \Omega :=]0,\infty[\times\mathbb{R}^{n-1}$$

mit einer stereographischen Parametrisierung $\Phi\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathrm{S}^{n-1}$ der Einheitssphäre $\mathrm{S}^{n-1} := \{x{\in}\mathbb{R}^n : |x|{=}1\}$ einführen. Dabei ist Φ bijektiv von $\mathbb{R}^{n-1}$ auf S^{n-1} ohne einen Fußpunkt und es gilt $\mathrm{J}T(\varrho,y) = \varrho^{n-1}\sigma(y)$ für die Funktion $\sigma := JT(1,\cdot)$. Die zugehörige Integraltransformation enthält als wichtigsten Spezialfall unsere frühere Formel für radiale Funktionen und Vergleich der Vorfaktoren zeigt $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \sigma\,\mathrm{d}\mathscr{L}^{n-1} = n\omega_n$.

Schließlich kommen wir zur schon angekündigten Variante der Transformationsformel, die die Berechnung von Hausdorff-Maßen und -Integralen ermöglicht:

Satz 2.55 (**Flächenformel**, Transformationsformel für $\mathscr{H}^k$)**.** *Sei $n \geq k$, Ω eine offene Teilmengen von $\mathbb{R}^k$, $T\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ eine injektive C^1-Abbildung und $A \in \mathscr{M}^k|\Omega$. Dann ist das Bild $T(A)$ stets $\mathscr{H}^k$-messbar mit*

$$\mathscr{H}^k(T(A)) = \int_A \mathrm{J}T \,\mathrm{d}\mathscr{L}^k$$

und für $\mathscr{H}^k$-messbares $f\colon \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ ist $f \circ T$ stets $\mathscr{L}^k$-messbar mit

$$\int_{T(A)} f \,\mathrm{d}\mathscr{H}^k = \int_A (f \circ T)\, \mathrm{J}T \,\mathrm{d}\mathscr{L}^k \,.$$

Dabei existieren beide Integrale oder keines und die Jacobische $\mathrm{J}T$ ist jetzt allgemeiner definiert durch $\mathrm{J}T(x) := \sqrt{\det(T'(x)^* T'(x))}$ mit der zu $T'(x)$ transponierten Matrix $T'(x)^*$.

Bemerkung. *Die Flächenformel enthält die Jacobische Transformationsformel als Spezialfall, ist aber selbst für $k=n$ etwas allgemeiner, da Nullstellen von $\mathrm{J}T$ und somit Nichtdifferenzierbarkeitsstellen von T^{-1} erlaubt werden.*

In Anwendungen der Flächenformel hat man meist (ein $\mathscr{H}^k$-Integral über) eine k-dimensionale Teilmenge M von $\mathbb{R}^n$ gegeben und parametrisiert dann (ein Stück von) M durch eine C^1-Abbildung T:

Anwendungen (**Flächeninhalt von Sphären**)**.**

- *Parametrisieren wir die Einheitssphäre S^{n-1} durch die stereographische Projektion Φ aus der letzten Bemerkung, so gilt*[29] $\mathrm{J}\Phi = \sigma$ *und wir können mit der Flächenformel*

  $$\mathscr{H}^{n-1}(\mathrm{S}^{n-1}) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathrm{J}\Phi \,\mathrm{d}\mathscr{L}^{n-1} = n\omega_n$$

  durch das Einheitskugelvolumen ω_n ausdrücken. Für beliebige Sphären folgt mit Translationsinvarianz und Skalierungsverhalten von $\mathscr{H}^{n-1}$:

  $$\mathscr{H}^{n-1}(\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |x-y| = r\}) = n\omega_n r^{n-1}$$

  und für $n = 2, 3$ erhalten wir mit $2\pi r$ und $4\pi r^2$ die elementargeometrischen Ausdrücke für Kreisumfang und Kugeloberfläche.

[29] Um diese naheliegende Formel formal zu rechtfertigen, berechnet man für $T(\varrho, y) = \varrho\Phi(y)$ erst $T'(\varrho, y) = \big(\Phi(y) \big| \varrho\Phi'(y)\big)$ und dann

$$T'(1,\cdot)^* T'(1,\cdot) = \left(\begin{array}{c|c} \Phi^*\Phi & \Phi^*\Phi' \\ \hline \Phi'^*\Phi & \Phi'^*\Phi' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \Phi'^*\Phi' \end{array}\right).$$

Dabei haben wir benutzt, dass wegen $|\Phi| \equiv 1$ einerseits $\Phi^*\Phi = |\Phi|^2 \equiv 1$ und andererseits $\partial_i\Phi^*\Phi = \Phi^*\partial_i\Phi = \frac{1}{2}\partial_i|\Phi|^2 = 0$ gelten. Insgesamt folgt

$$\sigma = (\mathrm{J}T)(1,\cdot) = \det T'(1,\cdot) = \sqrt{\det(T'(1,\cdot)^* T'(1,\cdot))} = \sqrt{\det(\Phi'^*\Phi')} = \mathrm{J}\Phi \,.$$

- *Eine alternative Herangehensweise ist, die obere Hälfte von* S^{n-1} *durch die Graphenabbildung* $G\colon B_1^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ *zu* $G(x) := (x, \sqrt{1-|x|^2})$ *zu parametrisieren. Dann hat* $G'(x)^*G'(x) = \mathrm{I}_{n-1} + \frac{x\otimes x}{1-|x|^2}$ *den einfachen Eigenwert* $\frac{1}{1-|x|^2}$ *und den* $(n-1)$*-fachen Eigenwert* 1*. Deshalb gilt* $\mathrm{J}G(x) = \frac{1}{\sqrt{1-|x|^2}}$ *und mit Flächenformel und radialer Integration folgen*

$$\begin{aligned}\mathscr{H}^{n-1}(\mathrm{S}^{n-1}) &= 2\int_{B_1^{n-1}} \mathrm{J}G \,\mathrm{d}\mathscr{L}^{n-1} \\ &= 2(n-1)\omega_{n-1}\int_0^1 \frac{\varrho^{n-2}}{\sqrt{1-\varrho^2}}\,\mathrm{d}\mathscr{L}^1(\varrho) \\ &= n\omega_{n-1}\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}\sqrt{\pi} = n\omega_n\,,\end{aligned}$$

  wobei wir auf die Berechnung des letzten Integrals nicht näher eingehen.

Zum *Beweis* der Jacobischen Transformationsformel und der Flächenformel sei gesagt, dass man die Formeln zuerst für affine Transformationen T verifiziert und allgemeine Transformationen dann lokal durch solche approximiert. Ein Beweis der Jacobischen Transformationsformel gehört in eine Vorlesung über mehrdimensionale Integration, ein detaillierter Beweis der Flächenformel eher in eine Analysis-Spezialvorlesung. □

Auf viele weitere Verallgemeinerungen, Varianten und den Transformationsformeln verwandte Sätze (nicht-injektive Lipschitz-Transformationen, orientierte Integrale, Satz von Sard, Koflächenformel, ...) können wir hier nicht eingehen. Mehr dazu findet man in [3, 5, 1, 4].

2.8 Der Lebesguesche Differentiationssatz

Definition 2.56 (Maßableitung). *Seien* Ω *ein metrischer Raum,* μ *ein Radon-Maß und* ν *ein signiertes Radon-Maß*[30] *auf* $(\Omega, \mathscr{A})$*. Dann heißt*

$$\mathrm{D}_\mu\nu(x) := \lim_{r\searrow 0}\frac{\nu(B_r^\Omega(x))}{\mu(B_r^\Omega(x))}$$

(falls der Nenner für kleine r *positiv ist und der Limes in* $\mathbb{R}$ *existiert) die (symmetrische) Maßableitung von* ν *nach* μ *im Punkt* $x \in \Omega$*.*

Satz 2.57 (Lebesguescher Differentiationssatz für Maße). *Seien* Ω *eine lokal- und* σ*-kompakte Teilmenge von* $\mathbb{R}^n$*,* μ *ein Radon-Maß und* ν *ein signiertes Radon-Maß auf* $(\Omega, \mathscr{A})$*. Dann ist* $N := \big\{x \in \Omega : \mathrm{D}_\mu\nu(x) \text{ existiert nicht}\big\}$ *eine* μ*-Nullmenge,* $\mathrm{D}_\mu\nu$ *definiert eine* μ*-integrierbare Fastfunktion in* $\mathrm{L}^1_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathscr{A}, \mu; \mathbb{R})$ *und für die Maße* ν_{a} *und* ν_{s} *in der Lebesgue-Zerlegung von* ν *bezüglich* μ *gilt*

$$\nu_{\mathrm{a}} = \mathrm{D}_\mu\nu\cdot\mu \qquad \text{und} \qquad \nu_{\mathrm{s}} = \mathbb{1}_N\cdot\nu\,.$$

Beweis. Siehe beispielsweise [6, Chapter 2], [5, Volume I, Theorem 1.5.3]. □

[30] Ein signiertes oder V-wertiges Maß ν heißt ein Radon-Maß, wenn $|\nu|$ ein Radon-Maß ist.

Bemerkungen.

- *Für V-wertige ν definiert man die Maßableitung durch den gleichen Grenzwert (sofern dieser in V existiert). Der Satz und das Folgende gelten dann analog mit der Fastfunktion $\mathrm{D}_\mu\nu \in L^1(\Omega, \mathscr{A}, \mu; V)$.*
- *Der Satz gilt allgemeiner für Radon-Maße auf gewissen metrischen Räumen Ω und nicht nur auf Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.*

Im Falle $\nu \ll \mu$ besagt der Satz

$$\nu = \mathrm{D}_\mu\nu \cdot \mu\,. \tag{2.5}$$

Wegen der Eindeutigkeit von Dichten folgt $\mathrm{D}_\mu\nu = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$ und daher wird für die Maßableitung oft dieselbe Notation wie für die Radon-Nikodým-Ableitung verwendet. Speziell für ein gewichtetes Maß $\nu = f \cdot \mu$ mit μ-integrierbarem $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathscr{A}, \mu; \mathbb{R})$ ergibt sich

$$\mathrm{D}_\mu(f \cdot \mu) = f \qquad \mu\text{-fast-überall}\,. \tag{2.6}$$

Man kann daher den Lebesgueschen Differentiationssatz **als einen Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung verstehen**, denn die Gleichungen (2.5) und (2.6) besagen doch gerade, dass Integration (in Form der Gewichtung) und Differentiation (in Form der Maßableitung) Umkehroperationen zueinander sind.

Ausschreiben der Definitionen in (2.6) gibt

$$\lim_{r \searrow 0} \frac{1}{\mu(B_r^\Omega(x))} \int_{B_r^\Omega(x)} f \,\mathrm{d}\mu = f(x) \qquad \text{für } \mu\text{-fast-alle } x \in \Omega \tag{2.7}$$

für alle[31] $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathscr{A}, \mu; \mathbb{R})$. Eine Verschärfung von (2.7) besagt:

Korollar 2.58 (**Fast-alle Punkte sind Lebesgue-Punkte**). *Für $p \in [1, \infty[$ und $f \in \mathrm{L}^p_{\mathrm{lok}}(\Omega, \mathscr{A}, \mu; \mathbb{R})$ gilt*

$$\lim_{r \searrow 0} \frac{1}{\mu(B_r^\Omega(x))} \int_{B_r^\Omega(x)} |f - f(x)|^p \,\mathrm{d}\mu = 0 \qquad \textit{für } \mu\textit{-fast-alle } x \in \Omega\,.$$

Die Idee des Korollars ist, (2.7) auf die Funktionen $|f - f(x)|^p$ mit $x \in \mathbb{R}$ anstelle von f anzuwenden. Dies ist aber nicht direkt möglich, da zu diesen überabzählbar vielen Funktionen überabzählbar viele Ausnahmemengen gehören, deren Vereinigung nicht unbedingt eine Nullmenge ist. Man benötigt deshalb noch ein einfaches Approximationsargument:

Beweis. Wir identifizieren die Fastfunktion f mit einem fixierten Repräsentanten. Nach dem Satz und (2.7) gibt es zu jedem $q \in \mathbb{Q}$ eine μ-Nullmenge N_q mit

$$\lim_{r \searrow 0} \frac{1}{\mu(B_r^\Omega(x))} \int_{B_r^\Omega(x)} |f - q|^p \,\mathrm{d}\mu = |f(x) - q|^p \qquad \text{für alle } x \in \Omega \setminus N_q\,.$$

[31] Die linke Seite von (2.6) ist bei fehlender μ-Integrierbarkeit von f nicht definiert, aber (2.7) gilt dann trotzdem noch; das sieht man durch Lokalisieren oder Zerlegung $f = f_+ - f_-$.

Sei jetzt $x \in \Omega \setminus \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} N_q$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $q \in Q$ mit $|f(x) - q| < \varepsilon$ und wir erhalten mit der Minkowski-Ungleichung

$$\begin{aligned}\lim_{r\searrow 0}&\left(\frac{1}{\mu(B_r^\Omega(x))}\int_{B_r^\Omega(x)} |f - f(x)|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\le \lim_{r\searrow 0}\left(\frac{1}{\mu(B_r^\Omega(x))}\int_{B_r^\Omega(x)} |f - q|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} + |f(x) - q|\\ &= 2|f(x) - q| < 2\varepsilon\,.\end{aligned}$$

Weil $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $\lim_{r\searrow 0} \frac{1}{\mu(B_r^\Omega(x))}\int_{B_r^\Omega(x)} |f - f(x)|^p \,\mathrm{d}\mu = 0$, und weil $\bigcup_{q\in\mathbb{Q}} N_q$ eine μ-Nullmenge ist, ist die Behauptung gezeigt. □

Bemerkung. *Unter gewissen Voraussetzungen gilt der Lebesguesche Differentiationssatz auch für nicht-symmetrische Maßableitungen. Ist beispielsweise*[32] *ν ein signiertes Radon-Maß auf $(I, \mathscr{B}(I))$ mit einem offenen Intervall I, so existieren die einseitgen Maßableitungen*

$$\mathrm{D}^+_{\beta^1}\nu(x) := \lim_{r\searrow 0}\frac{\nu(]x, x{+}r[)}{\beta^1(]x, x{+}r[)} \qquad \textit{und} \qquad \mathrm{D}^-_{\beta^1}\nu(x) := \lim_{r\searrow 0}\frac{\nu(]x{-}r, x[)}{\beta^1(]x{-}r, x[)}$$

für β^1-fast-alle $x \in I$, sie definieren β^1-integrierbare $\mathrm{L}^1_{\mathrm{lok}}$-Fastfunktionen und es gilt

$$\nu_{\mathrm{a}} = \mathrm{D}^{\pm}_{\beta^1}\nu \cdot \beta^1\,.$$

Korollar 2.59 (Differenzierbarkeit monotoner Funktionen). *Jede nichtfallende Funktion $F\colon I \to \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall I ist $\mathscr{L}^1$-fast-überall auf I (im klassischen Sinne) differenzierbar.*

Beweis. Zunächst gilt $F(x{+}){=}F(x{-}){=}F(x)$ für $\mathscr{L}^1$-fast-alle — und tatsächlich sogar für alle bis auf abzählbar viele — $x \in I$, denn ansonsten würden sich

[32] Die hier angegebene Version des Satzes lässt sich wie folgt mit dem Obigen *beweisen*, wobei wir nur den Fall der rechtsseitigen Maßableitung $\mathrm{D}^+_{\beta^1}$ behandeln: Nach dem Lebesgueschen Zerlegungssatz und dem Satz von Radon-Nikodým können wir

$$\nu = f \cdot \beta^1 + \nu_{\mathrm{s}}$$

schreiben mit einer β^1-integrierbaren $\mathrm{L}^1_{\mathrm{lok}}$-Funktion f und $\nu_{\mathrm{s}} \perp \beta^1$. Nach Korollar 2.58 gilt

$$\lim_{r\searrow 0}\left|\frac{1}{\beta^1(]x, x{+}r[)}\int_x^{x+r} f \,\mathrm{d}\beta^1 - f(x)\right| \le \lim_{r\searrow 0}\frac{2}{\beta^1(]x{-}r, x{+}r[)}\int_{x-r}^{x+r} |f - f(x)| \,\mathrm{d}\beta^1 = 0$$

und damit insbesondere $\mathrm{D}^+_{\beta^1}(f \cdot \beta^1)(x) = f(x)$ für β^1-fast-alle $x \in \Omega$. Wegen $|\nu_{\mathrm{s}}| \perp \beta^1$ liefert Satz 2.57 außerdem

$$\lim_{r\searrow 0}\frac{\nu_{\mathrm{s}}(]x, x{+}r[)}{\beta^1(]x, x{+}r[)} \le 2\lim_{r\searrow 0}\frac{|\nu_{\mathrm{s}}|(]x{-}r, x{+}r[)}{\beta^1(]x{-}r, x{+}r[)} = 2\mathrm{D}_{\beta^1}|\nu_{\mathrm{s}}|(x) = 0$$

und $\mathrm{D}^+_{\beta^1}\nu_{\mathrm{s}}(x) = 0$ für β^1-fast-alle $x \in \Omega$. Insgesamt erhalten wir β^1-fast-überall

$$\mathrm{D}^+_{\beta^1}\nu = \mathrm{D}^+_{\beta^1}(f \cdot \beta^1) + \mathrm{D}^+_{\beta^1}\nu_{\mathrm{s}} = f\,,$$

also $\nu_{\mathrm{a}} = \mathrm{D}^+_{\beta^1}\nu \cdot \beta^1$. □

die Sprunghöhen schon auf einem kompakten Teilintervall zu ∞ aufsummieren. Nach der Version des Lebesgueschen Differentiationssatzes aus der vorigen Bemerkung existiert dann die rechtsseitige Ableitung

$$\lim_{r\searrow 0}\frac{F(x+r)-F(x)}{r}=\lim_{r\searrow 0}\frac{\beta^1_F(]x,x+r[)}{\beta^1(]x,x+r[)}=\mathrm{D}^+_{\beta^1}\beta^1_F(x)$$

für β^1-fast-alle $x\in I$. Analoges gilt für die linksseitige Ableitung. Da die beiden einseitigen Ableitungen außerdem Repräsentanten der Dichte $\frac{\mathrm{d}(\beta^1_F)_{\mathrm{a}}}{\mathrm{d}\beta^1}$ sind, stimmen sie β^1-fast-überall überein und die Behauptung ist gezeigt. $\square$

Bemerkung. *Allgemeiner sind auch Funktionen $F\colon I\to\mathbb{R}$ von lokal* **beschränkter**[33] **Variation**, *das sind solche mit*

$$\mathrm{Var}_{[a,b]}F:=\sup\left\{\sum_{i=1}^k|F(x_i)-F(x_{i-1})|\;:\;k\in\mathbb{N},a{=}x_0{\le}x_1{\le}\ldots{\le}x_k{=}b\right\}<\infty$$

für $a\le b$ in I, stets $\mathscr{L}^1$-fast-überall differenzierbar, denn sie können als Differenz zweier nichtfallender Funktionen geschrieben werden; dazu vergleiche man den Beweis des folgenden Satzes 2.60.

Der letzte Beweis zeigt, dass die klassische Ableitung F' einer nichtfallenden Funktion F die Maßableitung $\mathrm{D}_{\beta^1}\beta^1_F$ ergibt. Nach dem Satz gilt daher $F'\cdot\beta^1=(\beta^1_F)_{\mathrm{a}}\le\beta^1_F$, also

$$\int_a^b F'\,\mathrm{d}\mathscr{L}^1\le F(b-)-F(a+)\,. \tag{2.8}$$

Dass hierbei aber selbst für stetiges F keine Gleichheit eintreten muss und F' nicht immer eine sinnvolle Ableitungsinformation enthält, zeigt das Beispiel der Cantor-Funktion F mit $F(0)=0$, $F(1)=1$ und $F'\equiv 0$ $\mathscr{L}^1$-fast-überall auf $]0,1[$. Der nächste Satz charakterisiert diejenige Klasse von Funktionen, für die in (2.8) Gleichheit eintritt, also die **größte Klasse von Funktionen** einer Variablen, **für die der Haupsatz der Differential- und Integralrechnung gilt**.

Satz & Definition 2.60 (Absolutstetige Funktionen). *Für eine Funktion $F\colon I\to\mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall I sind* äquivalent*:*

(I) F ist $\mathscr{L}^1$-fast-überall auf I differenzierbar mit $\int_a^b F'\,\mathrm{d}\mathscr{L}^1=F(b){-}F(a)$ für $a\le b$ in I.

(II) $F=F_1-F_2$ mit nichtfallenden Funktionen F_1 und F_2, so dass $\beta^1_{F_1}\ll\beta^1$ und $\beta^1_{F_2}\ll\beta^1$ gelten.

(III) Zu $a\le b$ in I und $\varepsilon>0$ gibt es ein $\delta>0$, so dass für $k\in\mathbb{N}$ und $a\le s_1\le t_1\le s_2\le t_2\le\ldots\le s_k\le t_k\le b$ stets gilt:

$$\sum_{i=1}^k(t_i{-}s_i)<\delta\implies\sum_{i=1}^k|F(t_i){-}F(s_i)|<\varepsilon\,.$$

[33] Es wäre präziser, ist aber nicht üblich, von (lokal) endlicher Variation zu sprechen.

Die Funktionen F mit einer dieser Eigenschaften nennt man absolutstetig.

Oft wird in der Literatur die Charakterisierung (III) zur Definition erhoben. Der Vorteil bei dieser Herangehensweise liegt darin, dass man Relationen zu anderen Stetigkeitseigenschaften direkt ablesen kann:

Korollar 2.61. *Sei F eine $\mathbb{R}$-wertige Funktion auf einem offenen Intervall I. Ist F lokal Lipschitz-stetig, so ist F auch absolutstetig. Und ist F absolutstetig, so ist F stets stetig und von lokal beschränkter Variation.*

Beweis des Satzes. Wir zeigen zuerst, dass (II) schon (I) impliziert: Unter Annahme von (II) sind nach den dem Satz vorausgehenden Überlegungen F_1 und F_2 jeweils $\mathscr{L}^1$-fast-überall auf I differenzierbar mit $F_i' \cdot \beta^1 = (\beta^1_{F_i})_{\mathrm{a}} = \beta^1_{F_i}$ für $i = 1, 2$. Dies bedeutet insbesondere $F_i(a+) = F_i(a-) = F_i(a)$ für $a \in I$ und

$$\int_a^b F_i' \,\mathrm{d}\mathscr{L}^1 = F_i(b) - F_i(a)$$

für $a \leq b$ in I. Wegen $F = F_1 - F_2$ folgt (I).

Als Nächstes nehmen wir (I) an und folgern (III): Wegen der Absolutstetigkeit des Integrals gibt es zu $a \leq b$ in I und $\varepsilon > 0$ immer ein $\delta > 0$, so dass für $A \in \mathscr{M}^1|[a, b]$ gilt

$$\mathscr{L}^1(A) < \delta \implies \int_A |F'| \,\mathrm{d}\mathscr{L}^1 < \varepsilon\,.$$

Für die s_i und t_i aus (III) bedeutet $\sum_{i=1}^k (t_i - s_i) < \delta$ gerade $\mathscr{L}^1\big(\bigcup_{i=1}^k]s_i, t_i[\big) < \delta$ und dann folgt

$$\sum_{i=1}^k |F(t_i) - F(s_i)| = \sum_{i=1}^k \left| \int_{s_i}^{t_i} F' \,\mathrm{d}\mathscr{L}^1 \right| \leq \int_{\bigcup_{i=1}^k]s_i, t_i[} |F'| \,\mathrm{d}\mathscr{L}^1 < \varepsilon$$

und somit (III).

Schließlich zeigen wir, dass (II) aus (III) folgt: Wir führen für $a \leq b$ in I die positive und die negative Variation durch

$$\mathrm{Var}^{\pm}_{[a,b]} F := \sup\left\{ \sum_{i=1}^k [F(x_i) - F(x_{i-1})]_{\pm} \;:\; k \in \mathbb{N}, a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_k = b \right\}$$

ein. Man sieht dann leicht ein, dass $\mathrm{Var}^+_{[a,b]} F - \mathrm{Var}^-_{[a,b]} F = F(b) - F(a)$ gilt. Fixieren wir ein $x_0 \in I$, so sind

$$F_1(x) := \begin{cases} F(x_0) + \mathrm{Var}^+_{[x_0,x]} F & \text{für } x \geq x_0 \\ F(x_0) - \mathrm{Var}^+_{[x,x_0]} F & \text{für } x \leq x_0 \end{cases}.$$

und

$$F_2(x) := \begin{cases} \mathrm{Var}^-_{[x_0,x]} F & \text{für } x \geq x_0 \\ -\mathrm{Var}^-_{[x,x_0]} F & \text{für } x \leq x_0 \end{cases}$$

folglich nichtfallend mit $F_1 - F_2 = F$. Wir zeigen jetzt $\beta^1_{F_1} \ll \beta^1$: Zu einer β^1-Nullmenge A in I, beliebigem $\varepsilon > 0$ und $a \leq b$ in I gibt es eine offene Obermenge

O von A in I mit $\beta^1(O) < \delta$ für das zugehörige δ aus (III). Wir schreiben $O \cap [a, b[$ als disjunkte Vereinigung abzählbar vieler halboffener Intervalle $[a_i, b_i[$ mit $i \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) < \delta$ und mit (III) lässt sich auf $\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{Var}_{[a_i,b_i]} F < \varepsilon$ schließen. Insgesamt folgt (da F und damit auch F_1 stetig sind)

$$\beta^1_{F_1}(A \cap [a, b[) \le \sum_{i=1}^{\infty} \beta^1_{F_1}([a_i, b_i[) = \sum_{i=1}^{\infty}[F_1(b_i) - F_1(a_i)] = \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{Var}^+_{[a_i,b_i]} F < \varepsilon\,.$$

Da a, b und ε beliebig waren, erhalten wir $\beta^1_{F_1}(A) = 0$ und somit $\beta^1_{F_1} \ll \beta^1$. Analog zeigt man $\beta^1_{F_2} \ll \beta^1$ und vervollständigt so den Nachweis von (II). $\square$

2.9 Die Darstellungssätze von Riesz

Sei $\mathbb{K}$ **wieder einer der beiden vollständigen Körper** $\mathbb{R}$ **oder** $\mathbb{C}$.

Definition 2.62 (**Dualräume und Operatornormen**). *Sei X ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann wird der (stetige) Dualraum*

$$X^* := \{T : \Omega \to \mathbb{K} \,:\, T \text{ ist stetige Linearform}\}$$

durch die Operatornorm

$$\|T\|_{X^*} := \sup_{0 \ne x \in X} \frac{|Tx|}{\|x\|_X}$$

ebenfalls zu einem normierten $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Bemerkungen. *Dabei ist Stetigkeit für Linearformen T äquivalent mit Lipschitz-Stetigkeit. Auf endlich-dimensionalen X ist jede Linearform stetig und dann — und auch nur dann — stimmt der stetige Dualraum X^* mit dem algebraischen Dualraum, dem Raum* aller *Linearformen, überein.*

Die Rieszschen Darstellungssätze beschreiben die Dualräume von Hilberträumen und speziellen Funktionenräumen durch explizite isometrische Isomorphismen:

Satz 2.63 (**Rieszscher Darstellungssatz für Hilberträume**). *Für jeden Hilbertraum $\mathcal{H}$ über $\mathbb{K}$ mit Skalarprodukt $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ ist*

$$\mathcal{H} \overset{\sim}{=} \mathcal{H}^*$$

isometrisch isomorph durch $x \mapsto L_x$ mit $L_x(y) := \langle y, x\rangle$.

Bemerkung. *Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist der angegebene Isomorphismus $\mathbb{C}$-antilinear. Durch Komposition mit der komplexen Konjugation kann man zum $\mathbb{C}$-linearen Isomorphismus $x \mapsto L_{\overline{x}}$ übergehen. Analoges gilt für die beiden folgenden Sätze.*

Satz 2.64 (**Rieszscher Darstellungssatz für $(\mathbf{L}^p)^*$**). *Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum und V ein endlich-dimensionaler Skalarproduktraum über $\mathbb{K}$. Für konjugierte Exponenten $p, q \in]1, \infty[$ ist*

$$\mathrm{L}^q(\Omega, \mathscr{A}, \mu; V) \overset{\sim}{=} (\mathrm{L}^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu; V))^*$$

isometrisch isomorph durch $g \mapsto L_g$ mit $L_g(f) := \int_\Omega f \cdot g \, \mathrm{d}\mu$.

Bemerkungen.

- *Der Fall des Hilbert-Raumes* L^2 *ist gemeinsamer Spezialfall der letzten beiden Sätze.*

- *Zweifache Anwendung des Satzes ergibt Isomorphie* $\mathrm{L}^p \stackrel{\sim}{=} (\mathrm{L}^p)^{**}$ *durch die Auswertungsabbildung, die sogenannte Reflexivität von* L^p.

- *Bei* σ*-endlichem* μ *gilt auch* $\mathrm{L}^\infty \stackrel{\sim}{=} (\mathrm{L}^1)^*$, *also der Grenzfall* $p = 1$, $q = \infty$ *von Satz 2.64. Dagegen hat* $(\mathrm{L}^\infty)^*$ *keine derartige einfache Darstellung.*

- *Im vorigen wie auch im nächsten Satz kann man auch ohne Skalarprodukt auf* V *auskommen, wenn man links oder rechts* V *durch* V^* *ersetzt und* V*- und* V^**-wertige Funktionen mit der natürlichen Paarung multipliziert.*

Satz 2.65 (**Rieszscher Darstellungssatz für** $(\mathbf{C}^0_0)^*$). *Sei* Ω *ein lokal- und* σ*-kompakter Hausdorff-Raum und* V *ein endlich-dimensionaler Skalarproduktraum über* $\mathbb{K}$. *Dann ist*

$$\mathrm{RM}(\Omega, V) \stackrel{\sim}{=} (\mathrm{C}^0_0(\Omega, V))^*$$

isometrisch isomorph durch $\mu \mapsto L_\mu$ *mit* $L_\mu(f) := \int_\Omega f \cdot \mathrm{d}\mu$.

Bemerkungen.

- *Dabei steht* $\mathrm{RM}(\Omega, V)$ *für den Raum*[34] *der* V*-wertigen Radon-Maße auf* Ω *mit der Totalvariation als Norm und* $\mathrm{C}^0_0(\Omega, V)$ *ist der Raum der stetigen Funktionen* $\Omega \to V$ *mit Nullrandwerten, d. h. der Abschluß des Raums* $\mathrm{C}^0_{\mathrm{kpt}}(\Omega, V)$ *der stetigen Funktionen* $\Omega \to V$ *mit kompaktem Träger in der Norm der gleichmäßigen Konvergenz.*

- *Eine Variante von Satz 2.65 besagt, dass man jede positive*[35] *Linearform* $L\colon \mathrm{C}^0_{\mathrm{kpt}}(\Omega, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *darstellen kann als* $L = L_\mu$ *mit einem eindeutig bestimmten vollständigen (*$[0, \infty]$*-wertigen) Radon-Maß* μ *auf* Ω. *Man beachte, dass dabei keine Stetigkeitsvoraussetzung an* L *benötigt wird.*

- *Die Aussage des Satzes 2.65 und seiner Varianten kann man so interpretieren, dass* **Maße nichts anderes sind als Integrationsvorschriften** *für stetige Funktionen.*

Bei allen drei Darstellungssätzen ist vergleichsweise einfach einzusehen, dass die angegebenen Zuordnungen isometrische Injektionen sind, und der Kern der *Beweise* liegt darin, ihre Surjektivität nachzuweisen; für Näheres siehe beispielsweise [3, Kapitel VIII.2]. □

[34] Bei der Bildung dieses Raumes identifiziert man äquivalente Radon-Maße, d. h. solche, die auf $\mathscr{B}(\Omega)$ übereinstimmen oder — das gibt dasselbe Konzept — die gleiche Vervollständigung besitzen. Alternativ kann man gleich nur ausgezeichnete Repräsentanten der Äquivalenzklassen betrachten wie nur auf $\mathscr{B}(\Omega)$ definierte oder nur vollständige Radon-Maße.

[35] Das heißt, es ist $L(\varphi) \geq 0$ wann immer $\varphi \geq 0$ auf Ω gilt.

Literaturverzeichnis

[1] L. Ambrosio, N. Fusco, D. Pallara: *Functions of bounded variation and free discontinuity problems.* Oxford University Press, New York (2000).

[2] H. Bauer: *Maß- und Integrationstheorie.* De Gruyter, Berlin (1990).

[3] J. Elstrodt: *Maß- und Integrationstheorie.* Springer, Berlin (1996).

[4] H. Federer: *Geometric measure theory.* Springer, New York (1969).

[5] M. Giaquinta, G. Modica, J. Souček: *Cartesian Currents in the Calculus of Variations. Part I: Cartesian Currents. Part II: Variational Integrals.* Springer, Berlin (1998).

[6] P. Mattila: *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces. Fractals and rectifiability.* Cambridge University Press, Cambridge (1995).

Die für dieses Skript wichtigste Quelle ist dabei das Buch [3].