Vorlesung „Diophantische Geometrie“ (Sommersemester 2019)

Übungsblatt 1 (26.4.2019)

Vorbemerkung: Sei
$$P = \{(a,b,c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a^2 + b^2 = c^2, \mathrm{ggT}(a,b,c) = 1\}$$
die Menge der primitiven pythagoräischen Tripel. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Abbildung
$$\alpha : P \to \mathbb{Q}_{>1}, \quad (a,b,c) \mapsto \frac{a+c}{b}$$
bijektiv ist und die Umkehrabbildung
$$\beta : \mathbb{Q}_{>1} \to P, \quad \frac{m}{n} \mapsto \left(\frac{m^2 - n^2}{\mathrm{ggT}(2, m-n)}, \frac{2mn}{\mathrm{ggT}(2, m-n)}, \frac{m^2 + n^2}{\mathrm{ggT}(2, m-n)} \right) \quad (m, n \in \mathbb{N}, \mathrm{ggT}(m,n) = 1)$$
hat.

Aufgabe 1: In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Abbildung
$$\psi : \mathbb{Q} \to \{(x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : x^2 + y^2 = 1\} \setminus \{(-1,0)\} \text{ mit } \psi(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$$
bijektiv ist. Erfüllt $(x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ die Bedingung $x^2 + y^2 = 1$, so gilt dies offensichtlich auch für die Punkte $(-x,y)$, $(x,-y)$, $(-x,-y)$, (y,x), $(-y,x)$, $(y,-x)$, $(-y,-x)$. Sei $(x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \setminus \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$ und $(x,y) = \psi(t)$. Bestimme in Abhängigkeit von t Zahlen $t_2, \ldots, t_8$ mit
$$\psi(t_2) = (-x,y), \quad \psi(t_3) = (x,-y), \quad \psi(t_4) = (-x,-y),$$
$$\psi(t_5) = (y,x), \quad \psi(t_6) = (-y,x), \quad \psi(t_7) = (y,-x), \quad \psi(t_8) = (-y,-x).$$

Aufgabe 2:

(1) Suche $x_0, y_0 \in \mathbb{Q}$ mit $4x_0^2 + 5y_0^2 = 6$.

(2) Sei G die Gerade durch (x_0, y_0) mit Steigung t. Bestimme den zweiten Schnittpunkt (x_t, y_t) von G mit der Kurve $4x^2 + 5y^2 = 6$.

(3) Bestimme mindestens 5 Lösungen $(x,y) \in \mathbb{Q}_{>0} \times \mathbb{Q}_{>0}$ der Gleichung $4x^2 + 5y^2 = 6$.

Aufgabe 3:

(1) Zeige: Ist (a,p,c) ein (primitives) pythagoräisches Tripel mit einer Primzahl p, so gilt
$$\alpha((a,p,c)) = p \quad \text{und} \quad a = \frac{p^2-1}{2}, \quad c = \frac{p^2+1}{2}.$$
(Die Definition von $\alpha : P \to \mathbb{Q}_{>1}$ steht in der Vorbemerkung.)

(2) Gibt es pythagoräische Tripel (a,b,c), bei denen alle drei Zahlen a,b,c Primzahlen sind?

(3*) Gibt es unendlich viele pythagoräische Tripel (a,b,c), bei denen zwei der Zahlen a,b,c Primzahlen sind?

Aufgabe 4: Mit (a, b, c) ist auch (b, a, c) ein primitives pythagoräisches Tripel. Ist nun $q = \alpha((a, b, c))$, so gibt es genau eine Zahl $\tau(q) \in \mathbb{Q}_{>1}$ mit $\tau(q) = \alpha((b, a, c))$. Beschreibe

$$\tau : \mathbb{Q}_{>1} \to \mathbb{Q}_{>1}$$

explizit. (Die Definition von $\alpha : P \to \mathbb{Q}_{>1}$ steht in der Vorbemerkung.)

Aufgabe 5: Zeige für eine natürliche Zahl N die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(1) N ist Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks mit rationalen Seitenlängen.

(2) $2N$ ist Flächeninhalt eines gleichschenkligen Dreiecks mit rationalen Seitenlängen.