Vorlesung „Diophantische Geometrie“ (Sommersemester 2019)

Übungsblatt 2 (3.5.2019)

Aufgabe 6:

(1) Bestimme den Flächeninhalt F eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlängen a.

(2) Zeige, dass es kein gleichseitiges Dreieck mit ganzzahligem Flächeninhalt und rationaler Seitenlänge gibt.

Aufgabe 7: Zeige:

(1) Sind $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $x^3 + 2y^3 \equiv 0 \bmod 7$, so gilt $x \equiv 0 \bmod 7$ und $y \equiv 0 \bmod 7$.

(2) Sind $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$ mit

$$x_1^3 + 2x_2^3 + 7x_3^3 + 14x_4^3 = 0,$$

so gilt $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0)$.

Aufgabe 8: Zeige für $N \in \mathbb{N}$:

(1) Gibt es $x, y, z \in \mathbb{Q}_{>0}$ mit

$$x^2 - N = y^2 \quad \text{und} \quad x^2 + N = z^2,$$

definiert man

$$a = z - y, \quad b = z + y, \quad c = 2x,$$

so gilt

$$a, b, c \in \mathbb{Q}_{>0}, \quad a^2 + b^2 = c^2, \quad N = \frac{1}{2}ab,$$

d.h. N ist Kongruenzzahl.

(2) Gibt es $a, b, c \in \mathbb{Q}_{>0}$ mit $a^2 + b^2 = c^2$, $a < b$ und $N = \frac{1}{2}ab$, definiert man

$$x = \frac{1}{2}c, \quad y = \frac{1}{2}(b - a), \quad z = \frac{1}{2}(b + a),$$

so gilt

$$x, y, z \in \mathbb{Q}_{>0}, \quad x^2 - N = y^2, \quad x^2 + N = z^2.$$

(3) N ist genau dann eine Kongruenzzahl, wenn für die über $\mathbb{Q}$ definierte algebraische Menge

$$X_N = \{(x, y, z) \in \mathbb{A}^3 : x^2 - N = y^2, x^2 + N = z^2\}$$

die Menge $X_N(\mathbb{Q})$ der $\mathbb{Q}$-rationalen Punkte nicht leer ist.

Aufgabe 9: Suche ein Polynom $f(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$, sodass für die über $\mathbb{R}$ definierte algebraische Menge $X = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 : f(x, y) = 0\}$ gilt

$$X(\mathbb{R}) = \{(0, 0)\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Aufgabe 10: Zeige:

(1) $S = \{(t, t^2, t^3) : t \in \mathbb{R}\}$ ist die Menge der $\mathbb{R}$-rationalen Punkte einer über $\mathbb{R}$ definierten algebraischen Menge in $\mathbb{A}^3$.

(2) $T = \{(t, \sin(t)) : t \in \mathbb{R}\}$ ist nicht die Menge der $\mathbb{R}$-rationalen Punkte einer über $\mathbb{R}$ definierten algebraischen Menge in $\mathbb{A}^2$.