

# Vorlesung „Diophantische Geometrie“ (Sommersemester 2019)

## Übungsblatt 3 (10.5.2019)

**Aufgabe 11:** Zerlege  $X = \{x - xy = 0, y - yz = 0\} \subseteq \mathbb{A}^3$  in irreduzible Komponenten.

**Aufgabe 12:** Durch  $P_1 = (26, 211)$ ,  $P_2 = (175, 14)$ ,  $P_3 = (271, 293)$  werden drei Punkte in der affinen Ebene  $\mathbb{A}^2$  über  $\mathbb{F}_p$  definiert. Bestimme in Abhängigkeit von  $p$ , wann zwei der drei Punkte gleich sind und wann alle drei Punkte auf einer Geraden liegen.

**Aufgabe 13:** Sei  $K$  ein algebraisch abgeschlossener Körper mit einer von 2 verschiedenen Charakteristik.

- (1) Zeige, dass die Kurven  $y = x^2$  und  $xy = 1$  nicht affin äquivalent sind.
- (2) Die Kurve  $x^2 + y^2 = 1$  ist zu einer der Kurven aus (1) affin äquivalent. Zu welcher?

**Aufgabe 14:** Durch die folgenden Gleichungen werden ebene Kurven über  $\mathbb{R}$  definiert, die in  $(0, 0)$  eine Singularität haben. Bestimme die Tangenten in  $(0, 0)$  und skizziere die Kurven.

- (1)  $y^2 = x^4 + y^4$ ,
- (2)  $y^2 - x^2 = (x^2 + y^2)^2$ ,
- (3)  $y^2 - x^3 = (x^2 + y^2)^2$ ,
- (4)  $y^3 - 3x^2y = (x^2 + y^2)^2$ ,
- (5)  $4x^2y^2 = (x^2 + y^2)^3$ .

**Aufgabe 15:** Das Polynom  $f = 4 - 6xy + x^3 + 2y^3$  definiert eine Kurve  $C$  über  $\mathbb{Q}$ .

- (1) Bestimme die Singularitäten von  $C$ .
- (2) Zeige, dass  $C$  über  $\overline{\mathbb{Q}}$  in drei Geraden zerfällt.
- (3) Zeige, dass  $C$  über  $\mathbb{Q}$  irreduzibel ist.
- (4) Bestimme  $C(\mathbb{Q})$ .
- (5) Wie sieht  $C(\mathbb{R})$  aus?