Vorlesung „Diophantische Geometrie“ (Sommersemester 2019)

Übungsblatt 4 (17.5.2019)

Aufgabe 16: $y = x^2$ definiert eine ebene affine Kurve C über $\mathbb{R}$, $y = t(x+1) - 1$ für $t \in \mathbb{R}$ eine Gerade G_t über $\mathbb{R}$.

(1) Bestimme die Schnittpunkte von C und G_t.
(2) Berechne die zugehörigen Schnittmultiplizitäten.
(3) Wann sind die Schnittpunkte reell?

Aufgabe 17: Sei C die über $\mathbb{F}_3$ durch das Polynom $f = 1 + x^4 + y^4$ definierte ebene affine Kurve und $i \in \overline{\mathbb{F}}_3$ mit $i^2 = -1$. Zeige:

(1) C ist absolut irreduzibel.
(2) C ist nichtsingulär.
(3) Die Tangente T_P in einem Punkt $P = (x_0, y_0) \in C(\overline{\mathbb{F}}_3)$ lässt sich durch
$$x = x_0 + y_0^3 t, \quad y = y_0 - x_0^3 t$$
parametrisieren.
(4) Jeder Punkt $P \in C(\overline{\mathbb{F}}_3)$ ist ein Wendepunkt ist, d.h. es gilt $(C \cdot T_P)_P \geq 3$ für alle $P \in C(\overline{\mathbb{F}}_3)$.
(5) Bestimme alle Punkte $P \in C(\overline{\mathbb{F}}_3)$ mit $(C \cdot T_P)_P \geq 4$.

Aufgabe 18: Ein Polynom $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ ist homogen vom Grad d, wenn es sich in der Form
$$f = \sum_{i_1 + \cdots + i_n = d} a_{i_1,\ldots,i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}$$
schreiben lässt. Jedes Polynom $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ hat eine eindeutige Zerlegung
$$f = \sum_{\ell \geq 0} f_\ell, \qquad \text{wobei } f_\ell \text{ homogen vom Grad } \ell \text{ ist.}$$
Zeige:

(1) Sind $f, g \in K[x_1, \ldots, x_n]$ homogene Polynome, so ist auch fg ein homogenes Polynom.
(2) Ist das Produkt fg zweier von 0 verschiedener Polynome $f, g \in K[x_1, \ldots, x_n]$ homogen, so sind f und g homogen.
(3) Ist $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ homogen vom Grad d, so gilt die Eulersche Relation
$$d \cdot f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i.$$

Aufgabe 19: Sei p eine Primzahl und $\mathbb{P}^2$ die projektive Ebene über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_p$.

(1) Wieviele $\mathbb{F}_p$-rationale Punkte enthält $\mathbb{P}^2$?
(2) Wieviele über $\mathbb{F}_p$ definierte Geraden gibt es in $\mathbb{P}^2$?
(3) Wieviele $\mathbb{F}_p$-rationale Punkte liegen auf einer über $\mathbb{F}_p$ definierten Geraden?
(4) Wieviele über $\mathbb{F}_p$ definierte Geraden gehen durch einen $\mathbb{F}_p$-rationalen Punkt?
(5) Versuche, die Konfiguration der $\mathbb{F}_2$-rationalen Punkte und der über $\mathbb{F}_2$ definierten Geraden von $\mathbb{P}^2$ (über $\mathbb{F}_2$) zu skizzieren.

Aufgabe 20:

(1) Sind P_1, P_2, P_3 Punkte in $\mathbb{P}^2$, die nicht auf einer Geraden liegen, so gibt es homogene Polynome $f, g \in K[x_0, x_1, x_2]$ vom Grad 2 mit
$$\{P_1, P_2, P_3\} = \{f = g = 0\}.$$

(2) Bestimme homogene Polynome $f, g \in K[x_0, x_1, x_2]$ vom Grad 2, sodass gilt
$$\{(1:0:0), (0:1:0), (0:0:1)\} = \{f = g = 0\}.$$

(3) Sind P_1, P_2, P_3, P_4 Punkte in $\mathbb{P}^2$, von denen keine drei auf einer Geraden liegen, so gibt es homogene Polynome $f, g \in K[x_0, x_1, x_2]$ vom Grad 2 mit
$$\{P_1, P_2, P_3, P_4\} = \{f = g = 0\}.$$

(4) Bestimme homogene Polynome $f, g \in K[x_0, x_1, x_2]$ vom Grad 2, sodass gilt
$$\{(1:0:0), (0:1:0), (0:0:1), (1:1:1)\} = \{f = g = 0\}.$$

(Hinweis: Man kann f und g als Produkt von Linearformen wählen.)