Vorlesung „Diophantische Geometrie“ (Sommersemester 2019)

Übungsblatt 5 (24.5.2019)

Aufgabe 21: Durch $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ wird für $a, b \in \mathbb{R}$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$ ein Kreis in der Ebene definiert, den man als über $\mathbb{R}$ definierte affine algebraische Kurve $K_{a,b,r}$ betrachten kann. Zeige:

(1) Der projektive Abschluss von $K_{a,b,r}$ geht durch die Punkte $(0:1:i)$ und $(0:1:-i)$.

(2) Hat die durch $f = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 \in \mathbb{R}[x,y] \setminus \mathbb{R}$ definierte ebene algebraische Kurve C mindestens zwei $\mathbb{R}$-rationale Punkte und geht der projektive Abschluss durch die Punkte $(0:1:i)$ und $(0:1:-i)$, so ist C ein Kreis.

Aufgabe 22: $X = \{(t, t^2, t^3) : t \in \overline{K}\}$ ist eine affine algebraische Menge in $\mathbb{A}^3$, die sich (beispielsweise) durch die Gleichungen $f = x_2 - x_1^2$, $g = x_3 - x_1^3$ beschreiben lässt. Seien $f^*, g^* \in \overline{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ die Homogenisierungen von f und g, $\overline{X}$ der projektive Abschluss von X in $\mathbb{P}^3$ und $Y = \{f^* = g^* = 0\} \subseteq \mathbb{P}^3$.

(1) Zeige, dass $\overline{X} \subseteq Y$ gilt.

(2) Bestimme $Y \cap H_0$. (Dabei ist $H_0 = \{x_0 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^3$.)

(3) Zeige: Ist $h \in I(\overline{X}) \subseteq \overline{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ ein homogenes Polynom, so gilt $h(0,0,0,1) = 0$.

(4) Zeige, dass $(0:0:0:1) \in \overline{X}$ gilt.

(5) Beschreibe $\overline{X}$ durch Gleichungen.

(6) Zeige, dass $\overline{X} \subsetneq Y$ gilt. Was ist $\overline{X} \cap H_0$?

(Der projektive Abschluss von $\{f = g = 0\}$ ist also nicht $\{f^* = g^* = 0\}$.)

Aufgabe 23: (Wie schaut eine projektive Transformation affin aus?) Sei $\varphi : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{P}^2$ mit $\varphi((x,y)) = (1:x:y)$ die „Einbettung“ von $\mathbb{A}^2$ in $\mathbb{P}^2$. Durch

$$\tau : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2, \quad (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0 + 2x_1 - x_2 : 2x_0 - 3x_1 + 2x_2 : 3x_0 - 2x_1 + 5x_2)$$

wird eine projektive Transformation definiert. Die Abbildung $\varphi^{-1} \circ \tau \circ \varphi$ ist nicht auf ganz $\mathbb{A}^2$ definiert.

(1) Es gibt eine algebraische Teilmenge $S \subseteq \mathbb{A}^2$, sodass $\mathbb{A}^2 \setminus S$ die maximale Definitionsmenge der Abbildung $\varphi^{-1} \circ \tau \circ \varphi$ ist. Bestimme S.

(2) Beschreibe $\varphi^{-1} \circ \tau \circ \varphi$ explizit.

(3) Bestimme das Bild der Abbildung $\varphi^{-1} \circ \tau \circ \varphi : \mathbb{A}^2 \setminus S \to \mathbb{A}^2$.

Aufgabe 24: Durch $x_0^2 x_1 - x_1^3 + x_2^3 = 0$ wird eine ebene projektive Kubik C über $\mathbb{R}$ definiert.

(1) Zeige, dass C nichtsingulär ist.

(2) Bestimme die Hessesche Kurve H_C zu C.

(3) Bestimme $H_C(\mathbb{R})$, die Menge der $\mathbb{R}$-rationalen Punkte von H_C.

(4) Bestimme alle reellen Wendepunkte von C.

(5) Skizziere $C(\mathbb{R})$ (und die reellen Wendepunkte) in den affinen Teilen U_0, U_1, U_2.

Aufgabe 25: Gib eine ebene affine Kurve C an, die reduzibel, aber nichtsingulär ist. Bestimme dann die Singularitäten des projektiven Abschlusses $\overline{C}$.