Vorlesung „Diophantische Geometrie“ (Sommersemester 2019)

Übungsblatt 6 (31.5.2019)

Aufgabe 26: Durch $f = x_0^2 + 2x_0x_1 + 3x_0x_2 - 3x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2$ wird eine projektive ebene Quadrik C über $\mathbb{R}$ definiert.

(1) Bestimme die Tangenten an C, die durch den Punkt $P = (4 : -7 : 16)$ gehen.
(2) Skizziere die Kurve und die Tangenten in den affinen Teilen U_0, U_1, U_2.

Aufgabe 27: Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik $\neq 2$. Durch ein homogenes Polynom $f \in K[x_0, x_1, x_2]$ vom Grad 2 werde eine nichtsinguläre ebene projektive Quadrik C definiert. Sei $P = (p_0 : p_1 : p_2) \in \mathbb{P}^2 \setminus C(K)$ und dazu

$$g = \left(x_0 \frac{\partial f}{\partial x_0}(p_0, p_1, p_2) + x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0, p_1, p_2) + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(p_0, p_1, p_2) \right)^2 - 4f(p_0, p_1, p_2) f(x_0, x_1, x_2) \in K[x_0, x_1, x_2].$$

Zeige, dass $g = 0$ aus den zwei durch P gehenden Tangenten an C besteht.

Aufgabe 28: Durch $f = x_0x_1 - 2x_1^2 - 3x_1x_2 - 5x_2^2$ wird eine nichtsinguläre ebene projektive Quadrik C über $\mathbb{C}$ definiert.

(1) Bestimme eine Parametrisierung von C, d.h. homogene Polynome $c_0(u, v), c_1(u, v), c_2(u, v) \in \mathbb{C}[u, v]$ (gleichen Grades) mit
$$C(\mathbb{C}) = \{(c_0(u, v) : c_1(u, v) : c_2(u, v)) : (u : v) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})\}.$$
(2) Die Menge
$$T = \{(z_0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{P}^2 : z_0x_0 + z_1x_1 + z_2x_2 = 0 \text{ ist Tangente an } C\}$$
parametrisiert die Tangenten an C. Zeige, dass es genau eine projektive ebene Quadrik $\widetilde{C}$ im $\mathbb{P}^2$ gibt mit $T \subseteq \widetilde{C}(\mathbb{C})$. (Man kann zeigen, dass sogar $T = \widetilde{C}(\mathbb{C})$ gilt.)

Aufgabe 29: Durch
$$f_{(u,v)} = u(3x_0 + 4x_1 + x_2)(4x_0 - x_2) + v(x_0x_2 - x_1^2)$$
wird ein (sogenanntes) Büschel ebener projektiver Quadriken über $\mathbb{R}$ definiert.

(1) Bestimme die Punkte in $\mathbb{P}^2$, durch die alle Kurven des Büschels gehen.
(2) Bestimme die Parameter $(u : v) \in \mathbb{P}^1$, für die die Kurve singulär ist. Skizziere die zugehörigen Kurven.

Aufgabe 30: Sei Q eine über einem Körper K definierte ebene projektive Quadrik mit genau einem K-rationalen Punkt P, d.h. $Q(K) = \{P\}$.

(1) Zeige, dass Q singulär.
(2) Warum ist P eine Singularität von Q?
(3) Ist (nach eventuellem Koordinatenwechsel über K) o.E. $P = (1 : 0 : 0)$, so wird Q durch eine affine Gleichung

$$f = (y - \alpha x)(y - \beta x) \quad \text{mit} \quad \alpha, \beta \in \overline{K} \setminus K, \quad \alpha + \beta \in K, \quad \alpha\beta \in K$$

beschrieben.
(4) Gib Beispiele einer solchen Quadrik für die Körper $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_3$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ an.

Zusatzaufgabe: Man rechnet nach, dass folgende Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned}
1^3 + 5^3 + 3^3 &= 1\,5\,3 \\
16^3 + 50^3 + 33^3 &= 16\,50\,33 \\
166^3 + 500^3 + 333^3 &= 166\,500\,333 \\
1666^3 + 5000^3 + 3333^3 &= 1666\,5000\,3333 \\
16666^3 + 50000^3 + 33333^3 &= 16666\,50000\,33333 \\
166666^3 + 500000^3 + 333333^3 &= 166666\,500000\,333333 \\
1666666^3 + 5000000^3 + 3333333^3 &= 1666666\,5000000\,3333333
\end{aligned}$$

Geht das so weiter?