Vorlesung „Diophantische Geometrie“ (Sommersemester 2019)

Übungsblatt 10 (28.6.2019)

Erinnerung: Die **Qualität** $Q(a,b)$ zweier teilerfremder natürlicher Zahlen a,b wird definiert als

$$Q(a,b) = \frac{\log(a+b)}{\log \operatorname{rad}(ab(a+b))}.$$

Aufgabe 46: Die durch $x_0^{17} + 2x_1^{17} + 3x_2^{17} = 0$ über $\mathbb{Q}$ definierte ebene projektive Kurve C enthält offensichtlich den $\mathbb{Q}$-rationalen Punkt $(1:1:-1)$. Zeige unter Annahme der abc-Vermutung für $\varepsilon = 1$ mit $K(1) = 1$, dass dies der einzige $\mathbb{Q}$-rationale Punkt von C ist, d.h. dass gilt

$$C(\mathbb{Q}) = \{(1:1:-1)\}.$$

Aufgabe 47: Zeige:

(1) Es gilt $Q(1, 9^n - 1) > 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(2) Die Zahlen $Q(1, 9^n - 1)$ sind alle verschieden, d.h. für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \neq n$ gilt $Q(1, 9^m - 1) \neq Q(1, 9^n - 1)$.
(3) Gilt die abc-Vermutung, so konvergiert die Folge $(Q(1, 9^n - 1))_{n \geq 1}$ gegen 1.

Aufgabe 48: Sei $b \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Zeige:

(1) Es gilt die Äquivalenz

$$q(1, b^n - 1) > 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{rad}(b-1)\operatorname{rad}(b) < b.$$

(2) Sind für die Primfaktorzerlegungen von b und $b-1$

$$b = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r} \text{ (mit } \alpha_i \geq 1) \quad \text{und} \quad b - 1 = q_1^{\beta_1} \dots q_s^{\beta_s} \text{ (mit } \beta_j \geq 1)$$

die Bedingungen

$$\alpha_i \geq 2 \text{ für } i = 1, \dots, r \quad \text{und} \quad \beta_j \geq 2 \text{ für } j = 1, \dots, s$$

erfüllt, so gilt

$$\operatorname{rad}(b-1)\operatorname{rad}(b) < b.$$

(3) Gilt für $u, v \in \mathbb{N}$ die Gleichung $u^2 - 8v^2 = 1$, so erfüllt $b = u^2$ die Bedingung $\operatorname{rad}(b-1)\operatorname{rad}(b) < b$.

Aufgabe 49: Zeige:

(1) Für $a, b \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{ggT}(a,b) = 1$ gilt

$$Q(a,b) > \frac{1}{3}.$$

(2) Für $a, b \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{ggT}(a,b) = 1$ gilt die Implikation

$$Q(a,b) \in \mathbb{Q} \quad \Longrightarrow \quad a = b = 1 \text{ (und } Q(1,1) = 1).$$

Aufgabe 50: Für $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{ggT}(a_1, b_1) = \operatorname{ggT}(a_2, b_2) = 1$ soll untersucht werden, wann $Q(a_1, b_1) = Q(a_2, b_2)$ gilt. Natürlich ist $Q(a_1, b_1) = Q(b_1, a_1)$, es gibt aber auch andere Möglichkeiten, beispielsweise

$$Q(1, 6) = Q(3, 4) \quad \text{oder} \quad Q(2, 75) = Q(5, 72) = Q(27, 50) = Q(32, 45).$$

Eventuell unter Annahme der *Four Exponentials Conjecture* soll folgende Implikation gezeigt werden:

$$Q(a_1, b_1) = Q(a_2, b_2) \quad \Longrightarrow \quad a_1 + b_1 = a_2 + b_2.$$

(Hinweis: Was passiert, wenn man in der *Four Exponentials Conjecture*

$$x_1 = 1, \quad x_2 = Q(a_1, b_1) = Q(a_2, b_2), \quad y_1 = \log \operatorname{rad}(a_1 b_1 (a_1 + b_1)), \quad y_2 = \log \operatorname{rad}(a_2 b_2 (a_2 + b_2))$$

wählt?)

Vermutung (Four Exponentials Conjecture). *Sind $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{C}$ und x_1, x_2 linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ und y_1, y_2 linear unabhängig über $\mathbb{Q}$, so ist mindestens eine der folgenden vier Zahlen eine transzendente Zahl:*

$$e^{x_1 y_1}, \quad e^{x_1 y_2}, \quad e^{x_2 y_1}, \quad e^{x_2 y_2}.$$