Vorlesung „Diophantische Geometrie“ (Sommersemester 2019)

Übungsblatt 7 (7.6.2019)

Aufgabe 31: Sei $f \in \mathbb{F}_p[x_0, x_1, \dots, x_n] \setminus \mathbb{F}_p$ ein homogenes Polynom vom Grad $d \leq n$ und X die dadurch definierte algebraische Menge in $\mathbb{P}^n$ (über $\mathbb{F}_p$). Zeige mit dem Satz von Chevalley-Warning, dass dann für

$$X(\mathbb{F}_p) = \{(a_0 : a_1 : \cdots : a_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{F}_p) : f(a_0, a_1, \dots, a_n) = 0\}$$

gilt

$$\#X(\mathbb{F}_p) \equiv 1 \bmod p.$$

Aufgabe 32: Zeige:

(1) Ist p eine Primzahl, sind $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{F}_p$, so existiert eine nichtleere Teilmenge $I \subseteq \{1, 2, \dots, p\}$ mit

$$\sum_{i \in I} a_i = 0.$$

(Man kann diese Aussage mit Hilfe des Polynoms

$$f(x_1, \dots, x_p) = \sum_{i=1}^{p} a_i x_i^{p-1}$$

durch Anwendung des Satzes von Chevalley-Warning beweisen.)

(2) Ist $n \in \mathbb{N}$, sind $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$, so existiert eine nichtleere Teilmenge $I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ mit

$$\sum_{i \in I} a_i \equiv 0 \bmod n.$$

Beweise die Aussage mit Hilfe einer der folgenden Ideen:
- Induktionsbeweis unter Verwendung von (1).
- Betrachte $a_1, a_1 + a_2, \dots, a_1 + \cdots + a_n$. (Die Aufgabe mit diesem Hinweis findet sich auch im Algebra-Staatsexamen vom Frühjahr 2019.)

Aufgabe 33: Sei p eine Primzahl und $\alpha \in \mathbb{F}_{p^3} \setminus \mathbb{F}_p$. In $\mathbb{P}^2$ über $\mathbb{F}_p$ betrachten wir die Punkte

$$P_0 = (1 : \alpha : \alpha^2), \quad P_1 = (1 : \alpha^p : \alpha^{2p}), \quad P_2 = (1 : \alpha^{p^2} : \alpha^{2p^2})$$

und in $\mathbb{F}_{p^3}[x_0, x_1, x_2]$ die Linearformen

$$g_{01} = \det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^p & \alpha^{2p} \end{pmatrix}, \quad g_{12} = \det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & \alpha^p & \alpha^{2p} \\ 1 & \alpha^{p^2} & \alpha^{2p^2} \end{pmatrix}, \quad g_{20} = \det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & \alpha^{p^2} & \alpha^{2p^2} \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{pmatrix}.$$

(1) Zeige, dass P_0, P_1, P_2 nicht auf einer Geraden liegen.
(2) Zeige, dass die Geraden $\{g_{01} = 0\}$, $\{g_{12} = 0\}$ und $\{g_{20} = 0\}$ nicht durch einen Punkt gehen.
(3) Zeige, dass $f = g_{01}g_{12}g_{20} \in \mathbb{F}_p[x_0, x_1, x_2]$ gilt, d.h. f hat Koeffizienten in $\mathbb{F}_p$.
(4) Zeige, dass die durch $f = 0$ über $\mathbb{F}_p$ definierte ebene projektive Kubik C keine $\mathbb{F}_p$-rationalen Punkte besitzt, d.h. $C(\mathbb{F}_p) = \emptyset$.
(5) Bestimme das Polynom $f \in \mathbb{F}_2[x_0, x_1, x_2]$ für $\alpha \in \mathbb{F}_{2^3}$ mit $\alpha^3 + \alpha + 1 = 0$.

Aufgabe 34: Durch $x^2 + 2y^2 = 5$ wird eine ebene affine Kurve C über $\mathbb{F}_p$ definiert.

(1) Bestimme $\#C(\mathbb{F}_p)$ für alle Primzahlen $p \leq 100$.
(2) Stelle eine Vermutung auf, wie $\#C(\mathbb{F}_p)$ von p abhängt.
(3) Beweise die Vermutung aus (2).

(Hinweis: Betrachte den projektiven Abschluss $\overline{C}$ von C.)

Aufgabe 35: Bestimme für folgende über $\mathbb{Q}$-definierte Quadriken eine Legendre-Normalform und eine zugehörige Transformationsmatrix:

(1) $f = 18x_0^2 - 20x_1^2 + 21x_2^2$.
(2) $f = 2x_0x_1 + 3x_0x_2 + 5x_1x_2$.
(3) $f = 15x_0^2 - 21x_1^2 + 35x_2^2$.
(4) $f = x_0^2 - 2x_0x_1 + 3x_0x_2 - 4x_1^2 + 5x_1x_2 - 6x_2^2$.