Vorlesung „Diophantische Geometrie“ (Sommersemester 2019)

Übungsblatt 8 (14.6.2019)

Aufgabe 36: Durch die Polynome

$$f_1 = x_0^2 + 2x_1^2 + 3x_2^2, \quad f_2 = x_0x_1, \quad f_3 = x_1^2 + x_2^2, \quad f_4 = x_2^2$$

werden projektive ebene Kurven C_1, C_2, C_3, C_4 über $\mathbb{F}_{127}$ definiert. Bestimme

$$\#C_i(\mathbb{F}_{127}) \text{ für } i = 1, 2, 3, 4.$$

Aufgabe 37: Durch folgende Polynome werden über $\mathbb{Q}$ projektive ebene Quadriken in Legendre-Normalform definiert. Untersuche, ob sie einen $\mathbb{Q}$-rationalen Punkt besitzen.

(1) $f = 3x_0^2 + 5x_1^2 - 7x_2^2$.
(2) $f = 5x_0^2 + 7x_1^2 - 13x_2^2$.
(3) $f = 33x_0^2 + 34x_1^2 - 35x_2^2$.
(4) $f = 22x_0^2 + 23x_1^2 - 15x_2^2$.

Aufgabe 38: Sei p eine Primzahl ≥ 7. Zeige (mit Hilfe des Satzes von Legendre), dass es genau dann $x, y \in \mathbb{Q}$ gibt mit $p = x^2 - 5y^2$, wenn p in der Dezimaldarstellung auf 1 oder 9 endet.

Aufgabe 39: Sei $b \in \mathbb{N}$. Zeige:

(1) Sind $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $x^2 + y^2 = b$, so gibt es $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \mathbb{Z}$ mit $\widetilde{x}^2 + \widetilde{y}^2 = 2b$.
(2) Sind $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $x^2 + y^2 = 2b$, so gibt es $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \mathbb{Z}$ mit $\widetilde{x}^2 + \widetilde{y}^2 = b$.
(3) Gilt $3 \nmid b$, so besitzt die Gleichung $x^2 + y^2 = 3b$ keine Lösungen $x, y \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 40: Das Polynom $f = a_0x_0^2 + a_1x_0x_1 + a_2x_0x_2 + a_3x_1^2 + a_4x_1x_2 + a_5x_2^2 \in \mathbb{R}[x_0, x_1, x_2] \setminus \{0\}$ definiert eine ebene projektive Quadrik C über $\mathbb{R}$.

(1) Das Polynom f definiert auch eine quadratische Form $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Zeige:

$$C(\mathbb{R}) = \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ ist positiv definit oder negativ definit.}$$

(2) Zeige:

$$C(\mathbb{R}) \neq \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad 4a_0a_3 - a_1^2 \leq 0 \quad \text{oder} \quad a_0(4a_0a_3a_5 + a_1a_2a_4 - a_0a_4^2 - a_3a_2^2 - a_5a_1^2) \leq 0.$$

(CAESAR-13-verschlüsselter Hinweis: `UNHCGZVABERAXEVGREVHZSHREQRSVAVGURVG`)