Vorlesung „Diophantische Geometrie“ (Sommersemester 2019)

Übungsblatt 9 (21.6.2019)

Aufgabe 41: Zeige:

(1) Sind $f, g \in \mathbb{C}[t] \setminus \mathbb{C}$ teilerfremde Polynome, so gilt

$$\mathrm{grad}(f^3 - g^2) \geq \frac{1}{2}\mathrm{grad}(f) + 1.$$

(Hinweis: *abc*-Satz für Polynome)

(2) Es gibt teilerfremde Polynome $f, g \in \mathbb{C}[t] \setminus \mathbb{C}$, sodass in der Abschätzung aus (1) die Gleichheit gilt. (Hinweis: Es gibt Beispiele mit $\mathrm{grad}(f) = 2$ und $\mathrm{grad}(g) = 3$.)

Aufgabe 42: Zeige: Es gibt keine nichtkonstanten Polynome in $\mathbb{C}[t]$, die die Gleichung

$$x^m - y^n = 1$$

für natürliche Zahlen $m, n \geq 2$ lösen. (Hinweis: *abc*-Satz für Polynome)
Anmerkung: Catalan formulierte 1844 die Vermutung, dass die Gleichung

$$x^m - y^n = 1$$

für $x, y, m, n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ nur die sich aus $3^2 - 2^3 = 1$ ergebende Lösung besitzt. Diese sogenannte Catalan-Vermutung wurde 2002 von Mihăilescu bewiesen.

Aufgabe 43: Betrachtet werden polynomiale Lösungen der Gleichung

$$x^2 + y^5 = z^7.$$

Zeige:

(1) Es gibt keine Lösung der Gleichung mit paarweise teilerfremden Polynomen $x, y, z \in \mathbb{C}[t]$, die nicht alle konstant sind. (Hinweis: *abc*-Satz für Polynome)

(2) Es gibt Lösungen der Gleichung mit Polynomen $x, y, z \in \mathbb{C}[t]$, die nicht alle konstant sind. (Hinweis: Multipliziert man eine Gleichung $f + g = h$ mit $f^{35u}g^{14v}h^{10w}$, so erhält man eine Lösung von $x^2 + y^5 = z^7$, wenn man $u, v, w \in \mathbb{N}$ geeignet wählt.)

Aufgabe 44: Zeige, dass die Gleichung $x^3 - ty^2 = 1$ nur die Lösung $(x, y) = (1, 0)$ im Polynomring $\mathbb{R}[t]$ hat. (Hinweis: *abc*-Satz für Polynome)

Aufgabe 45:

(1) Bestimme mindestens drei Lösungen der Gleichung $m! + 1 = n^2$ mit $m, n \in \mathbb{N}$.

(2) Zeige: Gilt die *abc*-Vermutung, so hat die Gleichung $m! + 1 = n^2$ nur endlich viele Lösungen mit $m, n \in \mathbb{N}$. (Die Abschätzungen

$$(\frac{m}{e})^m < m! \quad \text{und} \quad \prod_{p \leq m} p < 4^m$$

dürfen benutzt werden.)

(3) Zeige (ohne Verwendung der *abc*-Vermutung): Die Gleichung $m! + 2 = n^2$ hat genau eine Lösung mit $m, n \in \mathbb{N}$.