Vorlesung „Diophantische Geometrie“ (Sommersemester 2019)

Übungsblatt 11 (5.7.2019)

Aufgabe 51:

(1) Sei K ein Körper der Charakteristik 0. Zeige mit Hilfe des *abc*-Satzes für Polynome: Sind $x, y, z \in K[t]$ und $p, q, r \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ mit

$$x^p + y^q = z^r, \quad \operatorname{ggT}(x, y, z) = 1 \quad \text{und} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq 1,$$

so sind x, y, z konstant.

(2) Seien $p, q, r \in \mathbb{N}$ und $x, y, z \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{ggT}(x, y, z) = 1$ und

$$x^p + y^q = z^r.$$

Zeige die Qualitätsabschätzung

$$Q(x^p, y^q) > \frac{1}{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}}.$$

Aufgabe 52: Durch $f = x_0^3 + x_1^3 + x_2^3$ wird in Charakteristik $\neq 3$ eine nichtsinguläre ebene projektive Kubik C definiert, die die Punkte $P_0 = (0 : 1 : -1)$, $P_1 = (1 : 0 : -1)$ und $P_2 = (1 : -1 : 0)$ enthält. Zeige, dass $\{P_0, P_1, P_2\}$ unter der geometrischen Verknüpfung φ abgeschlossen ist, und stelle eine Verknüpfungstabelle auf.

Aufgabe 53: Sei C eine über einem Körper K durch ein Polynom $f \in K[x_0, x_1, x_2]$ definierte nichtsinguläre ebene projektive Kubik und $G \subseteq C(K)$ eine Teilmenge, sodass die geometrisch definierte Verknüpfung φ auf G eine Gruppenstruktur definiert. Sei $O \in G$ das neutrale Element der Gruppe. Zeige:

(1) O ist ein Wendepunkt. Nach Koordinatenwechsel kann man annehmen, dass $O = (0 : 0 : 1)$ mit Wendetangente $x_0 = 0$ gilt. Dann hat das Polynom f die Gestalt

$$f = a_0 x_0^3 + a_1 x_0^2 x_1 + a_2 x_0^2 x_2 + a_3 x_0 x_1^2 + a_4 x_0 x_1 x_2 + a_5 x_0 x_2^2 + a_6 x_1^3.$$

(2) Für $P \in G$ gilt $\varphi(P, P) = O$ und $\frac{\partial f}{\partial x_2}(P) = 0$.

(3) Für $P \in G$, $P \neq O$ gilt die Gleichung

$$(a_2 x_0 + a_4 x_1 + 2a_5 x_2)(P) = 0.$$

(4) In Charakteristik 2 ist $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ oder $G = \{O\}$. (Ein Beispiel liefert $f = x_0^2 x_1 + x_0 x_1 x_2 + x_0 x_2^2 + x_1^3$.)

(5) In Charakteristik $\neq 2$ ist $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ oder $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ oder $G = \{O\}$. (Ein Beispiel liefert $y^2 = x^3 - x$.)

Aufgabe 54: Sei M eine nichtleere Menge und $\circ : M \times M \to M$ eine Verknüpfung auf M mit folgenden Eigenschaften: Für alle $P, Q \in M$ gilt

$$P \circ Q = Q \circ P \quad \text{und} \quad (P \circ Q) \circ Q = P.$$

In Abhängigkeit von einem festgewählten Element $O \in M$ wird nun eine weitere Verknüpfung $+$ auf M wie folgt definiert:

$$P + Q = (P \circ Q) \circ O.$$

Zeige:

(1) $(M, +)$ ist kommutativ und O neutrales Element, d.h. $P + Q = Q + P$ und $P + O = O + P = P$ für alle $P, Q \in M$.
(2) Zu $P, Q \in M$ gibt es genau ein Element $X \in M$ gibt mit $P + X = Q$, nämlich $X = P \circ (Q \circ O)$.
(3) Genau dann ist $(M, +)$ assoziativ (und damit eine Gruppe), wenn

$$P \circ ((Q \circ R) \circ O) = Q \circ ((P \circ R) \circ O) \quad \text{für alle } P, Q, R \in M \text{ gilt.}$$

Aufgabe 55: Sei C eine über einem Körper K definierte nichtsinguläre projektive ebene Kubik.

(1) Zeige: Sind P_1, P_2 zwei verschiedene Wendepunkte aus $C(K)$, so ist $\varphi(P_1, P_2)$ ein von P_1 und P_2 verschiedener Wendepunkt in $C(K)$.
(2) $C(K)$ enthalte einen Wendepunkt O. Durch $P \oplus Q = \varphi(\varphi(P, Q), O)$ wird dann $(C(K), \oplus)$ zu einer abelschen Gruppe mit neutralem Element O. Zeige: Die in $C(K)$ enthaltenen Wendepunkte bilden eine Untergruppe von $C(K)$.
(3) Wieviele Verbindungsgeraden von Wendepunkten gibt es, wenn $C(K)$ neun Wendepunkte enthält? Versuche, die Konfiguration aus Wendepunkten und Verbindungsgeraden zu skizzieren.

(Hinweis: `ORTVAARZVGCHAXGMJRV`)