Vorlesung „Diophantische Geometrie“ (Sommersemester 2019)

Übungsblatt 12 (12.7.2019)

Aufgabe 56: Sei K ein beliebiger Körper und $a, b \in K$. Durch $y^2 = x^3 + ax + b$ wird eine projektive ebene Kubik C definiert.

(1) Zeige, dass C absolut irreduzibel ist.
(2) Zeige, dass C genau einen Punkt im Unendlichen besitzt, nämlich $O = (0 : 0 : 1)$.
(3) Beschreibe C in $U_2 = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 : x_2 \neq 0\}$ mit den affinen Koordinaten r, s, d.h. $(r, s) \simeq (r : s : 1) \in U_2$.
(4) Zeige, dass O ein Wendepunkt von C, also insbesondere nichtsingulär ist.

Aufgabe 57: Sei K ein Körper der Charakteristik 2 und $a, b \in K$. Durch $y^2 = x^3 + ax + b$ wird eine absolut irreduzible projektive ebene Kubik C definiert, die im Unendlichen nur den Punkt $O = (0 : 0 : 1)$ besitzt, der ein Wendepunkt ist. Für die geometrische Addition $\oplus$ werde O als neutrales Element gewählt.

(1) Zeige, dass die Gleichung $x^2 = a$ genau eine Lösung in $\overline{K}$ besitzt; die Lösung wird mit $\sqrt{a}$ bezeichnet.
(2) Zeige, dass $\sqrt{a} \in K$ gilt, wenn K vollkommen ist.
(3) Wie findet man $\sqrt{a}$ im Fall $K = \mathbb{F}_{2^d}$?
(4) Zeige, dass C genau eine Singularität hat, nämlich den Punkt

$$S = (\sqrt{a}, \sqrt{b}).$$

(5) Zeige, dass alle Tangenten in nichtsingulären Punkten durch den Punkt $O = (0 : 0 : 1)$ gehen. Was bedeutet dies für $\oplus$?
(6) Zeige, dass durch

$$\psi(t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{t^2} + \sqrt{a}, \frac{1}{t^3} + \frac{\sqrt[4]{a}}{t^2} + \sqrt{b}\right) & \text{für } t \neq 0, \\ (0 : 0 : 1) & \text{für } t = 0 \end{cases}$$

eine Abbildung

$$\psi : \overline{K} \to C_{\mathrm{ns}}(\overline{K})$$

definiert wird. (Dabei ist $\sqrt[4]{a}$ *die* Lösung der Gleichung $x^4 = a$ in $\overline{K}$.) Man kann zeigen, dass ψ sogar einen Gruppenisomorphismus $(\overline{K}, +) \to (C_{\mathrm{ns}}(\overline{K}), \oplus)$ definiert.

Aufgabe 58: Sei K ein Körper der Charakteristik 3 und $a, b \in K$. Durch $y^2 = x^3 + ax + b$ wird eine absolut irreduzible projektive ebene Kubik C definiert. Einziger Punkt im Unendlichen ist $O = (0 : 0 : 1)$, der ein Wendepunkt ist und als neutrales Element für die geometrische Addition $\oplus$ gewählt werden soll.

(1) Zeige, dass C genau dann singulär ist, wenn $a = 0$ gilt. Im Fall $a = 0$ ist

$$S = (-\sqrt[3]{b}, 0)$$

die (einzige) Singularität von C. (Dabei ist $\sqrt[3]{b}$ *die* Lösung der Gleichung $x^3 - b = 0$ in $\overline{K}$.)

(2) Bestimme im Fall $a = 0$ für $P = (x_0, y_0) \in C(\overline{K}) \setminus \{O, S\}$ die Tangente in P an C und zeige, dass P ein Wendepunkt ist. Was bedeutet dies für $\oplus$?

(3) Zeige, dass im Fall $a = 0$ durch

$$\psi(t) = \begin{cases} (\frac{1}{t^2} - \sqrt[3]{b}, \frac{1}{t^3}) & \text{für } t \neq 0, \\ O & \text{für } t = 0 \end{cases}$$

eine bijektive Abbildung

$$\psi : \overline{K} \to C_{\mathrm{ns}}(\overline{K})$$

definiert wird mit Umkehrabbildung

$$\psi^{-1}(P) = \begin{cases} \frac{x + \sqrt[3]{b}}{y} & \text{für } P = (x, y), \\ 0 & \text{für } P = O. \end{cases}$$

(4) Zeige, dass im Fall $a = 0$ für paarweise verschiedene $t_1, t_2, t_3 \in \overline{K} \setminus \{0\}$ mit $t_1 + t_2 + t_3 = 0$ die Punkte $\psi(t_1)$, $\psi(t_2)$, $\psi(t_3)$ auf einer Geraden liegen.

(5) Zeige, dass im Fall $a = 0$ die Abbildung ψ einen Gruppenisomorphismus $(\overline{K}, +) \to (C_{\mathrm{ns}}(\overline{K}), \oplus)$ liefert.

Aufgabe 59: Über $\mathbb{Q}$ werde eine ebene Kubik C durch die Gleichung $x_0^3 + 2x_1^3 + 3x_2^3 = 0$ definiert.

(1) Bestimme die Hessesche zu C.

(2) Bestimme die Wendepunkte von C.

(3) Warum ist C über $\mathbb{Q}$ nicht projektiv äquivalent zu einer Kubik in Weierstraßscher Normalform?

Aufgabe 60: Für $d \in \mathbb{N}$ definiert $f = x_0^3 + x_1^3 + dx_2^3$ eine nichtsinguläre ebene Kubik C über $\mathbb{Q}$. Zeige, dass C über $\mathbb{Q}$ zu der durch

$$y^2 = x^3 - 432d^2$$

definierten elliptischen Kurve über $\mathbb{Q}$ projektiv äquivalent ist. (Hinweis: $(1 : -1 : 0)$ ist Wendepunkt von C.)