Orientierungswoche: Graphen

Eberhard Bänsch, Andreas Knauf *

Wintersemester 2018/2019

Zusammenfassung

Am Beispiel der *Graphentheorie* wird gezeigt, wie man Mathematik studiert.

Inhaltsverzeichnis

*Department Mathematik, Universität Erlangen-Nürnberg, Cauerstr. 11, D–91058 Erlangen. e-mail: {baensch,knauf}@math.fau.de, web: www.math.fau.de/{baensch,knauf}

1 Einleitung

Das elementarste Konzept der Mathematik ist das der *Menge*. Ist eine Menge V nicht zu groß (zum Beispiel endlich), dann können wir ihre Elemente $v_i \in V$ als Punkte in der Ebene oder im Raum darstellen:

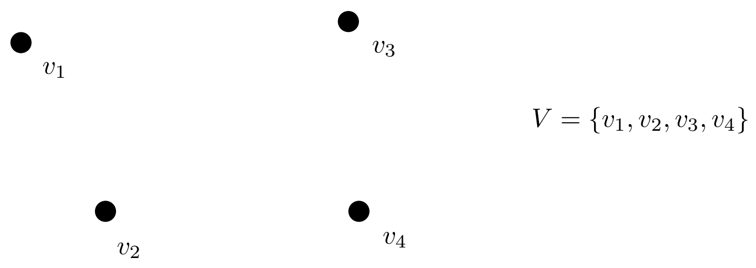


Abbildung 1: Punktmenge $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

Nun wollen wir gewisse Paare von Punkten miteinander verbinden. Es entsteht das Bild eines sogenannten *Graphen*:

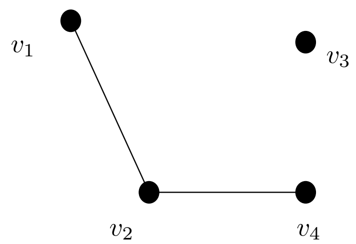


Abbildung 2: Graph mit Knotenmenge V

So simpel dieses Konzept ist, so vielfältig sind seine Anwendungen. Wir werden z.B. eine Anwendung in der Wasserversorgung kennen lernen. Gleichzeitig werden wir Ihnen anhand des Beispiels zeigen, wie mathematische Begriffs- und Theoriebildung vonstatten geht.

2 Mengen

Die Objekte x, aus denen eine Menge M besteht, werden ihre *Elemente* genannt. Man schreibt $x \in M$ falls x Element von M, andernfalls $x \notin M$. Sind $x_1, x_2, \ldots, x_n$ Elemente von M, so schreibt man auch kurz $x_1, \ldots, x_n \in M$.

Es gibt eine ausgezeichnete Menge ohne Elemente, die *leere Menge* $\emptyset$. Manchmal gibt man Mengen durch Aufzählung ihrer Elemente in geschweiften Klammern an: $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Beispiele 2.1 (Mengen)

1. Die Menge der Wochentage, an denen diese Vorlesung stattfindet, ist

$$\{\text{Dienstag, Mittwoch, Donnerstag}\}.$$

2. $\mathbb{N}$ bezeichnet die Menge der *natürlichen Zahlen*, also $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Will man die Null mit hinzunehmen, dann schreibt man[1] $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \ldots\}$.

In dieser Orientierungswoche werden wir aber nur endliche Mengen benutzen.

Bei der Klammerschreibweise kommt es auf Reihenfolge und eventuelle Wiederholung nicht an:

Beispiel 2.2 $\{\text{Montag, Donnerstag}\} = \{\text{Donnerstag, Montag, Donnerstag}\}$.

Gilt für alle Elemente $x \in M_1$, dass x auch Element einer zweiten Menge M_2 ist, dann schreibt man $M_1 \subseteq M_2$ (stilisiertes Kleinergleichzeichen), $M_1 \subset M_2$ oder $M_2 \supseteq M_1$, und nennt M_1 *Teilmenge von* M_2.

M_1 heißt *echte Teilmenge von* M_2, wenn $M_1 \subseteq M_2$ und ein $x \in M_2$ mit $x \notin M_1$ existiert. Man schreibt dann $M_1 \subsetneq M_2$.

Beispiel 2.3 (Teilmengen) $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$, denn z.B. $0 \in \mathbb{Z}$ aber $0 \notin \mathbb{N}$.

Die Elemente von Mengen dürfen selbst Mengen sein.

Beispiel 2.4 (Mengensysteme) $\{\emptyset, \{\text{Montag}\}, \{\text{Montag, Donnerstag}\}\}$.

Ist S ein solches (nicht leeres) *Mengensystem*, dann kann man den *Durchschnitt* dieses Mengensystems als die Menge aller x einführen, die in allen Mengen von S enthalten sind. Diese Menge bezeichnet man mit

$$\bigcap_{M \in S} M.$$

Für $S = \{M_1, \ldots, M_n\}$ schreibt man auch $M_1 \cap \ldots \cap M_n$ statt $\bigcap_{M \in S} M$.

Beispiele 2.5 (Durchschnitt)

1. Für $S := \{\mathbb{N}, \mathbb{N}_0\}$ ist $\bigcap_{M \in S} M = \mathbb{N} \cap \mathbb{N}_0 = \mathbb{N}$.

[1] Das Symbol $:=$ wird benutzt, um die linke Seite durch die rechte zu definieren.

2. Sei $S := \{$ Geraden G durch den Nullpunkt der Ebene $E\}$.
   Dann ist $\bigcap_{G\in S} G = \{0\}$, der Durchschnitt besteht also aus dem Nullpunkt.

Gilt für zwei Mengen M_1 und M_2, dass ihr Durchschnitt die leere Menge ist, $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, dann heißen M_1 und M_2 *disjunkt*.

Beispiel 2.6 (Disjunktheit) $\mathbb{N} \cap \{$Montag, Donnerstag$\} = \emptyset$.

Die *Vereinigung* $\bigcup_{M\in S} M$ der Mengen eines Mengensystems ist die Menge aller derjenigen Elemente, die zumindest zu einer Menge aus S gehören.

Beispiel 2.7 (Vereinigung) Wie im Beispiel 2.5.2. bezeichne S die Menge der Geraden in der Ebene E. Es gilt dann

$$\bigcup_{G\in S} G = E.$$

Oft werden Mengen M über Aussagen eingeführt, nach dem Schema

$$M := \{x \mid A(x)\},$$

also M besteht aus den Elementen x, für die die Aussage $A(x)$ wahr ist[2].

Beispiel 2.8 (Prädikat) $\{2\} = \{x \mid x$ ist Primzahl und x ist gerade$\}$.

Wie aus diesem Beispiel klar wird, können wir Vereinigung und Schnitt von Mengen über Aussagen formulieren:

$$\begin{aligned} M_1 \cap M_2 &= \{x \mid x \in M_1 \quad \text{und} \quad x \in M_2\}, \\ M_1 \cup M_2 &= \{x \mid x \in M_1 \quad \text{oder} \quad x \in M_2\}. \end{aligned}$$

Mengentheoretische Identitäten wie die *De Morgan-Regeln*

$$\begin{aligned} M \cap (N_1 \cup N_2) &= (M \cap N_1) \cup (M \cap N_2) \\ M \cup (N_1 \cap N_2) &= (M \cup N_1) \cap (M \cup N_2) \end{aligned}$$

lassen sich damit über Wahrheitstabellen verifizieren.

Soweit Mengen als Teilmengen definiert werden, ist es im Allgemeinen besser, die Obermenge auch direkt anzugeben.

Beispiel 2.9 Die Menge $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$ der *Primzahlen*:

$$\mathbb{P} := \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ besitzt genau zwei Teiler } k \in \mathbb{N}\}.$$

Weitere Mengenoperationen. Sind M, N Mengen, dann

[2] A heißt *Prädikat*. Gleichbedeutend wird häufig auch die Schreibweise $\{x : A(x)\}$ benutzt.

1. $M\backslash N := \{x \in M \mid x \notin N\}$ (*Differenzmenge*)

2. Speziell im Fall $N \subseteq M$ schreibt man dafür auch $M - N$.

3. $M \Delta N := (M\backslash N) \cup (N\backslash M)$ (*Symmetrische Differenz*). Jedes Element $x \in M\Delta N$ ist entweder nur in M oder nur in N.

4. Die *Potenzmenge* 2^M (auch $\mathcal{P}(M)$ geschrieben) einer Menge M ist durch

$$2^M := \{N \mid N \subseteq M\}$$

definiert, also die Menge aller Teilmengen von M.

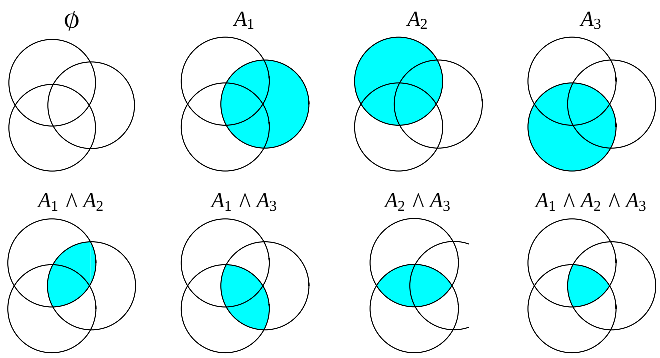
Beispiel 2.10 (Potenzmenge) $2^{\{1,2\}} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$.

5. Das *kartesische Produkt* $M_1 \times M_2$ zweier Mengen ist die Menge aller geordneten Paare (m_1, m_2) mit $m_1 \in M_1$, $m_2 \in M_2$.

Analog zu diesem zweifachen kartesischen Produkt kann man auch das n–fache kartesische Produkt $M_1 \times \ldots \times M_n$ definieren. Die Elemente $(x_1, \ldots, x_n)$ dieser Menge heißen dann *geordnete* n*–Tupel*, und man schreibt M^n für das n-fache kartesische Produkt von M.

Beispiel 2.11 (kartesisches Produkt)
$\{1,2\} \times \{2,3\} = \{(1,2), (2,2), (1,3), (2,3)\}$

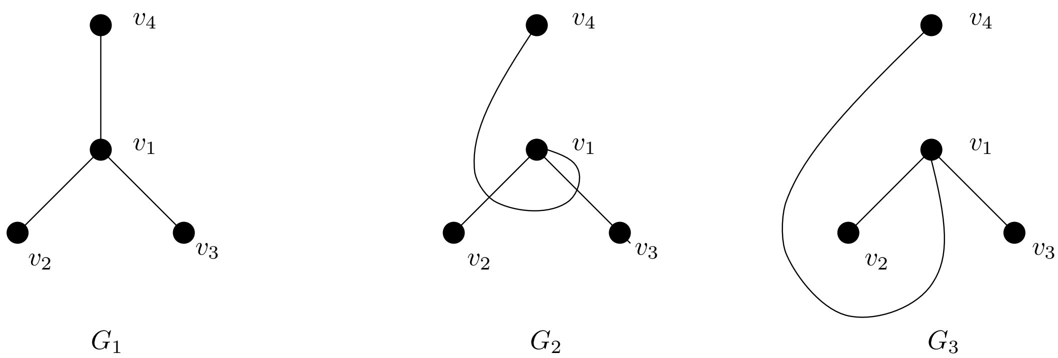
Es ist nützlich, Mengenoperationen und Beziehungen zwischen Mengen bildlich darzustellen. Dies geschieht in Form von *Venn-Diagrammen*. Dabei wird eine Menge M durch eine Teilmenge der Ebene repräsentiert, abgegrenzt durch eine einfache geschlossene Kurve.



3 Der Begriff des Graphen

Wir haben in der Einleitung einen anschaulichen Begriff von Graphen gesehen. Das reicht uns aber nicht aus, denn die Anschauung ist noch zu unscharf.

Beispiel 3.1 Sind die folgenden drei Graphen G_1, G_2 und G_3 einander "im Wesentlichen" gleich oder nicht?



Im Fall von G_1 und G_3 treffen sich Verbindungskurven nur in Punkten der Menge V, bei G_2 auch an anderen Punkten der Ebene.

Von v_1 aus gesehen, folgen für G_1 und G_2 die Verbindungskurven zu den Punkten v_2, v_3 und v_4 aufeinander im Gegenuhrzeigersinn (das ist der "mathematisch positive"), bei G_3 im Uhrzeigersinn.

Offensichtlich gibt es verschiedene Präzisierungsmöglichkeiten und entsprechend verschiedene mögliche Definitionen des Begriffs eines Graphen.

Tatsächlich werden Sie auch, wenn Sie verschiedene Bücher über Graphen aufschlagen, unterschiedliche Definitionen des Graphenbegriffes finden. Wir benutzen die folgende:

Definition 3.2

- Ein **Graph** G ist ein Zwei-Tupel $G = (V, E)$, wobei V eine Menge und E eine Teilmenge von $\{\{v_1, v_2\} \subset V \mid v_1 \neq v_2\}$ ist.
- G heißt **endlich**, wenn $|V| < \infty$ ist.[3]
- V heißt **Knotenmenge** (englisch: vertex-set), $v \in V$ heißt **Knoten** oder **Ecke**.
- E heißt **Kantenmenge** (englisch: edge-set), $e \in E$ heißt **Kante**.

[3] dabei bezeichnet die *Mächtigkeit* $|M|$ von M die Zahl der Elemente der Menge M, mit $|\emptyset| = 0$.

Dies ist nun recht abstrakt; wir finden aber einen Zusammenhang zu unserer anschaulichen Definition, wenn wir für jedes verbundene Paar $\{v, w\}$ von Knoten $v \neq w$, $v, w \in V$ die Kante $e := \{v, w\}$ zur Kantenmenge E schlagen.

Beispiel 3.3 $G_1 = G_2 = G_3 = (V, E)$ mit $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}\}$.

Wir brauchen nun keineswegs auf eine graphische Darstellung von Graphen zu verzichten. Wir haben mit der Definition aber vereinbart, wie wir diese Bilder interpretieren wollen.

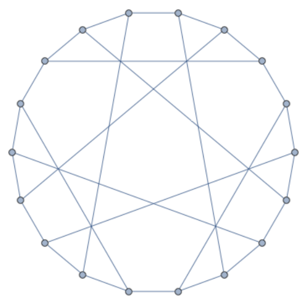
Im folgenden werden wir nur endliche Graphen betrachten. Diese besitzen auch nur endlich viele Kanten (wie viele höchtens bei n Knoten?).

4 Einfache Eigenschaften von Graphen

Wir haben bis jetzt als Struktur nur eine Menge V und eine Menge E zweielementiger Teilmengen von V. Mit diesem Pfund wollen wir wuchern und schauen, welche Begrifflichkeiten aus dieser Struktur folgen.

Definition 4.1

- Die Knoten v_1 und v_2 aus V heißen **benachbart**, wenn $\{v_1, v_2\} \in E$.
- $N(v) := \{w \in V \mid \{v, w\} \in E\}$ heißt die **Nachbarschaft** von v.
- $|N(v)|$ heißt der **Grad** von v.



Alle Knoten des abgebildeten Graphen haben Grad 3.

Nun kommt unsere erste kleine Erkenntnis über Graphen:

Satz 4.2 *Für einen endlichen Graphen* (V, E) *gilt*

$$\sum_{v \in V} |N(v)| = 2|E|.$$

Beweis: Die Menge $\tilde{N}(v) := \{(v,w) \mid \{v,w\} \in E\}$ lässt sich als die Menge der von v ausgehenden und zu den Nachbarn w von v hinlaufenden *orientierten* Kanten auffassen. Es gilt $|\tilde{N}(v)| = |N(v)|$, aber $\tilde{N}(v_1) \cap \tilde{N}(v_2) = \emptyset$, falls $v_1 \neq v_2$. Denn zwar sind die *Mengen* $\{v_2, v_1\} = \{v_1, v_2\}$, aber die *geordneten Paare* (v_2, v_1) und (v_1, v_2) sind voneinander verschieden.

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V} |N(v)| &= \sum_{v \in V} |\tilde{N}(v)| = \left| \bigcup_{v \in V} \tilde{N}(v) \right| \\ &= |\{(v,w) \in V \times V \mid \{v,w\} \in E\}| = 2|E|. \end{aligned}$$

Der griechische Buchstabe Σ (Sigma) ist in der Mathematik das Summenzeichen. $\square$

Nun, das ist ein wahrer Satz, aber ist er auch nützlich? Letztlich steckt in ihm ja nur die Erkenntnis: "Jedes Ding hat einmal ein End', nur die Wurst (und die Kante) hat zwei."

So etwas nennt man in der Mathematik etwas pikiert "trivial". Andererseits kommt man oft durch Kombination einiger Trivialitäten zu etwas Unerwartetem:

Satz 4.3 *Die Zahl der Knoten $v \in V$ mit ungeradem Grad $|N(v)|$ ist gerade.*

Beweis: Es ist $V = G \cup U$ mit

$G := \{v \in V \mid |N(v)| \text{ ist gerade}\}$ und $U := \{v \in V \mid |N(v)| \text{ ist ungerade}\}$,

also $G \cap U = \emptyset$. Damit ist nach Satz 4.2

$$\sum_{v \in U} |N(v)| + \sum_{v \in G} |N(v)| = \sum_{v \in V} |N(v)| = 2|E|,$$

also ist $\sum_{v \in U} |N(v)|$ gerade. Das kann aber nur sein, wenn die Menge U eine gerade Zahl von Elementen besitzt. $\square$

Aufgabe 4.4

1. Zeigen Sie: Falls $|V| > 1$, besitzt der endliche Graph (V, E) (mindestens) zwei Knoten gleichen Grades (aus [Ai, Kapitel 5]).
   Tipp: Für alle $v \in V$ gilt $|N(v)| < |V|$.
2. Gibt es Graphen, deren Knoten die folgenden Grade besitzen?
   a) $2, 2, 2, 3$
   b) $1, 2, 2, 3, 4$
   c) $2, 2, 4, 4, 4$
   d) $1, 2, 3, 4$

   Wenn ja, bitte ein Beispiel, wenn nein, möglichst Angabe eines Kriteriums, gegen das die Grad-Tabelle verstößt.

3. Doreen und Max veranstalten eine Party und laden vier andere Paare ein. Manche schütteln sich die Hand, die Paare aber nicht. Max fragt nachher die anderen, wieviel Hände sie geschüttelt haben und erhält neun verschiedene Antworten. Wieviele Hände hat Doreen geschüttelt?[4]
   Tipp: Versuchen Sie zunächst, die analoge Aufgabe zu lösen, bei der nur ein Paar eingeladen wird und Max drei verschiedene Antworten erhält.

So einfach das Konzept des Graphen ist, so vielfältig sind die Fragen, die man zur Struktur von Graphen stellen kann, und so schwierig sind oft die Antworten.

Beispiel 4.5 Eine **Färbung** eines Graphen (V, E) ist eine Zuordnung $f : V \to F$ in eine Menge F (von Farben), sodaß allen benachbarten Knoten $v, w \in V$ verschiedene Farben $f(v) \neq f(w)$ zugeordnet werden.

Ein Graph heißt **planar** wenn man ihn "ohne Überschneidungen von Kanten in der Ebene zeichnen kann".

Nimmt man beispielsweise an, dass die Länder der Erde alle zusammenhängend sind (es gibt allerdings Länder, für die das nicht zutrifft), zeichnet man einen Punkt pro Land und verbindet Länder, die eine gemeinsame Grenze haben, durch eine Kante, so erhält man einen planaren Graphen.

Die im 19ten Jahrhundert aufgestellte und erst 1976 bewiesene Vierfarbenvermutung besagt nun, daß sich jeder planare Graph mit nur vier Farben färben lässt, dass es also eine entsprechende Abbildung $f : V \to F$ gibt, wobei $|F| = 4$, siehe Abbildung 3.

Der Beweis war nur durch Computereinsatz möglich. Bis jetzt existiert noch kein in allen Details lesbarer Beweis.[5]

Wir werden aus dem Gestrüpp von Fragen einige auswählen.

5 Bäume

Definition 5.1 Es sei $G = (V, E)$ ein Graph.

- Für $n \geq 1$ ist ein **Weg** p_n in G eine endliche Folge $v_1, \dots, v_n \in V$ voneinander verschiedener Ecken mit $\{v_i, v_{i+1}\} \in E \quad (i = 1, \dots, n-1)$.
  Die Zahl $n - 1$ seiner Kanten heißt die **Länge** des Weges.

[4] Aus: Norman Biggs: Discrete Mathematics. Oxford Science Publications 1987

[5] Allerdings wird weiter daran gearbeitet, siehe: Martin Aigner: Die Ideen von Penrose zum 4-Farbenproblem. In: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 102. Band, pp. 43–68 (2000)

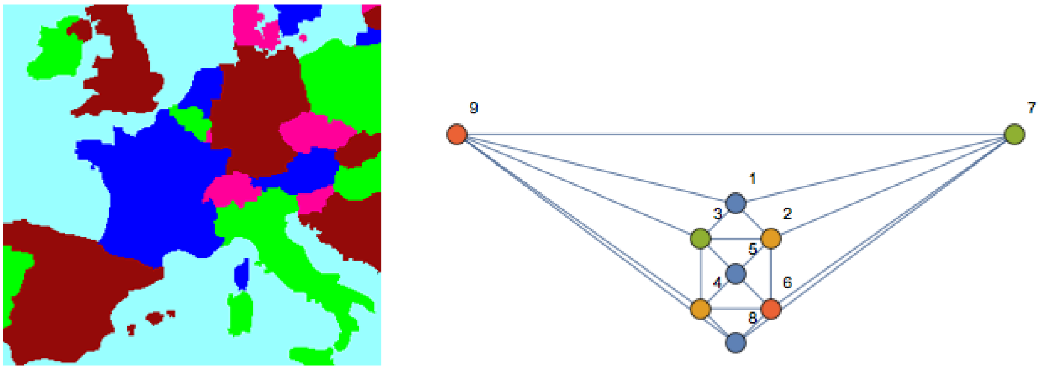
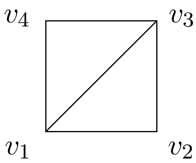


Abbildung 3: Links: Färbung der Landkarte Europas. Rechts: Färbung der Ecken eines Graphen; jeweils mit vier Farben

- Für $n \geq 3$ ist ein **Kreis** c_n in G eine Folge $v_1, \ldots, v_n \in V$ voneinander verschiedener Ecken mit $\{v_i, v_{i+1}\} \in E \quad (i = 1, \ldots, n-1)$ und $\{v_n, v_1\} \in E$. Die Anzahl n seiner Kanten heißt die **Länge** des Kreises.

Beispiel 5.2 $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ und

$$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_1\}, \{v_1, v_3\}\}.$$



a) v_1 ist ein Weg der Länge 0.

b) v_1, v_2, v_3 ist ein Weg der Länge 2 und ein Kreis der Länge 3.

c) v_1, v_2, v_4 und v_1, v_2, v_1 sind keine Wege.

Aufgabe 5.3
Gibt es für den Graph aus Beispiel 5.2 einen Kreis, der alle vier Ecken trifft? Gibt es für den Graph einen Kreis, der alle Kanten trifft?

Definition 5.4 Die Ecke $w \in V$ heißt von $v \in V$ aus **erreichbar**, wenn es einen Weg $v_1, \ldots, v_n$ mit $v_1 = v$ und $v_n = w$ gibt.

Erreichbarkeit von Ecken ist eine sog. **Äquivalenzrelation**. Schreiben wir nämlich $v \sim w$, falls w von v aus erreichbar ist, dann gilt[6]

[6] $A \Longrightarrow B$ bedeutet: aus A folgt B. $v \sim w \Longrightarrow w \sim v$ bedeutet also: Wenn w von v aus erreichbar ist, dann ist auch v von w aus erreichbar.

1. $v \sim v$, denn v ist ein Weg der Länge Null

2. $v \sim w \Longrightarrow w \sim v$, mit dem Weg $v = v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n = w$
   und dem rückwärts durchlaufene Weg $w = v_n, v_{n-1}, \ldots, v_2, v_1 = v$

3. $v \sim w$ und $w \sim u \Longrightarrow v \sim u$, mit dem Weg $u_1 = w, u_2, \ldots, u_{k-1}, u_k = u$
   und dem verketteten Weg $v = v_1, v_2, \ldots, v_n = w = u_1, u_2, \ldots, u_k = u$.

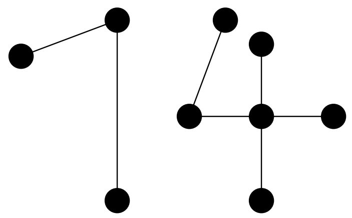
Damit wird die Knotenmenge V in **Komponenten**, d.h. Teilmengen V_i zerlegt, deren Punkte untereinander zusammenhängen, aber nicht mit Knoten aus $V \backslash V_i$.

Definition 5.5

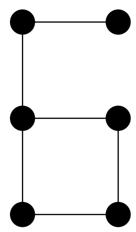
- Ein aus einer Komponente bestehender Graph heißt **zusammenhängend**.
- Ein zusammenhängender Graph heißt **Baum**, wenn er keinen Kreis enthält.

Beispiel 5.6

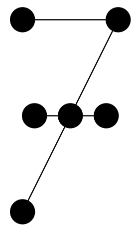
1. Ein nicht zusammenhängender Graph mit zwei Komponenten:



2. Ein zusammenhängender Graph, der kein Baum ist:



3. Ein Baum:



Satz 5.7 *Für einen Baum $G = (V, E)$ gilt $|E| = |V| - 1$.*

Beweis: Wir wählen einen Knoten $v \in V$, den wir die *Wurzel* nennen. Von jedem $w \in V$ gibt es genau einen Weg zu v hin:

- mindestens einen, weil G zusammenhängend,
- höchstens einen, weil man bei Existenz zweier verschiedener solcher Wege einen Kreis in G konstruieren könnte, siehe Aufgabe 5.8.

Man ordnet jedem von der Wurzel v verschiedenen Knoten $w \in V$ die erste Kante des Weges zur Wurzel hin zu. Dies ist eine Bijektion $b : V \backslash \{v\} \to E$, also eine Abbildung, die verschiedenen Knoten verschiedene Kanten zuordnet und die alle Kanten als Bild hat, siehe Abbildung 4. □

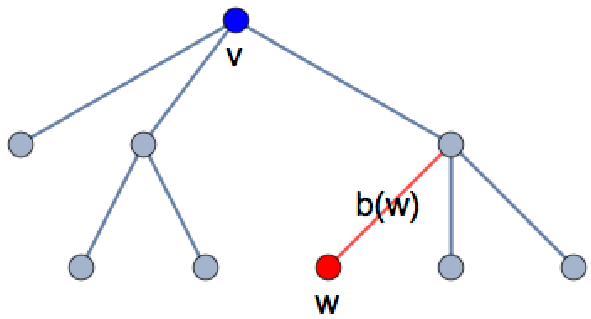


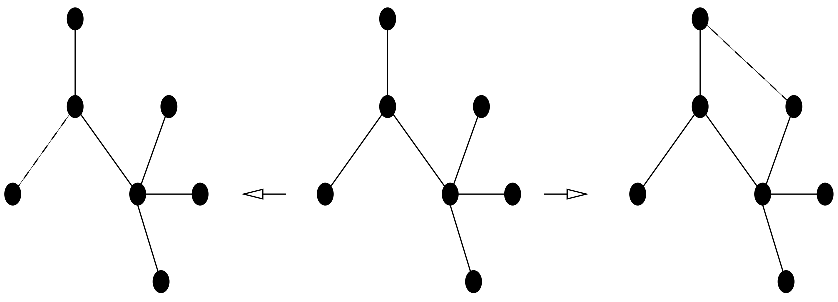
Abbildung 4: Die Bijektion $b : V \backslash \{v\} \to E$ für einen Baum (V, E) mit Wurzel v

Aufgabe 5.8 Warum kann man aus zwei verschiedenen Wegen von w nach v einen Kreis konstruieren?

Warum interessiert man sich für Bäume? Zunächst einmal sind es einfache Graphen, deren Eigenschaften sich gut berechnen lassen. Außerdem tauchen sie in vielen Anwendungsproblemen auf, oft als sogenannte aufspannende Bäume (siehe unten).

Bäume sind durch Zusammenhang und Kreislosigkeit definiert. Entfernt man eine beliebige Kante eines Baumes, dann ist er nicht mehr zusammenhängend. Fügt man eine neue Kante zwischen zwei Knoten eines Baumes hinzu, dann besitzt der so konstruierte Graph einen Kreis:

Baum

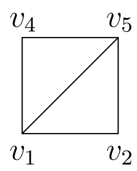


Definition 5.9

- Der Graph $G_2 := (V_2, E_2)$ heißt **Teilgraph** des Graphen $G_1 := (V_1, E_1)$, wenn $V_2 \subset V_1$ und $E_2 \subset E_1$.

- Ist der Teilgraph G_2 ein Baum und $V_2 = V_1$, dann heißt G_2 **aufspannender Baum**.

Beispiel 5.10 Der folgende Graph G_1 besitzt die sechs in Abbildung 5 dargestellten aufspannenden Bäume. Welche aufspannenden Bäume fehlen noch?

$G_1 =$ 

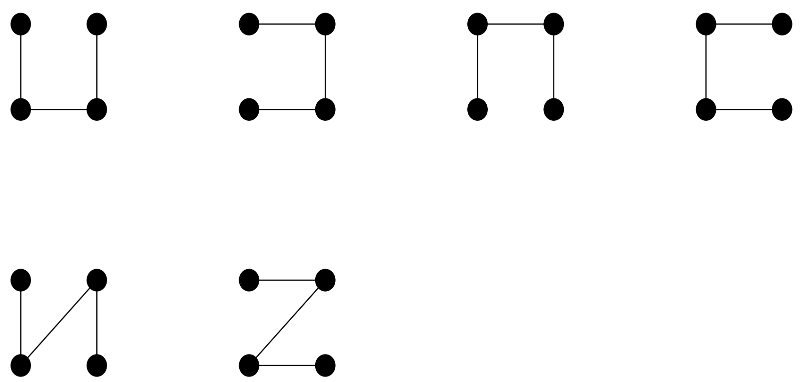


Abbildung 5: Aufspannende Bäume von G_1

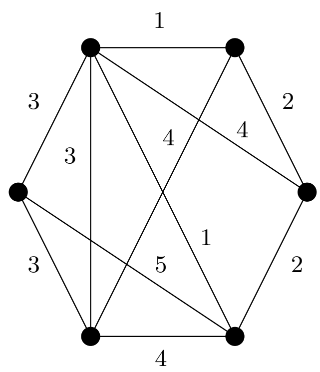
6 Algorithmen

Manchmal besitzen in Anwendungen der Graphentheorie die Kanten **Gewichte**, d.h. auf der Kantenmenge des Graphen (V, E) ist eine Funktion

$$f : E \to (0, \infty)$$

definiert.

Beispiel 6.1 Die Knoten $v \in V$ des folgenden Graphen entsprechen Ortschaften, die Kanten $e \in E$, $e = \{v_1, v_2\}$ der Möglichkeit, zwischen v_1 und v_2 eine Wasserleitung zu legen. $f(e)$ entspricht den Kosten der Wasserleitung.



Wir können nun für einen aufspannenden Baum $T = (V, E')$ in $G = (V, E)$ die Gewichte addieren, d.h.

$$F(T) := \sum_{e' \in E'} f(e')$$

definieren.

Frage:
Für welche aufspannenden Bäume T^* nimmt F das Minimum an, d.h. gilt

$$F(T^*) = \min_{T \text{ aufsp. Baum}} F(T)?$$

Beispiel 6.2
Im obigen Beispiel 6.1 entspricht dies einem kostengünstigsten Anschluss aller Ortschaften an die Wasserversorgung[7]. Es gibt genau sechs Lösungen dieses Problems.

[7] siehe Béla Bollobás: Modern Graph Theory. Springer 1998

Falls der zusammenhängende Graph G viele Kanten besitzt, besitzt er auch viele aufspannende Bäume und die Suche nach dem kostengünstigsten aufspannenden Baum könnte daher langwierig werden.

Aufgabe 6.3

1. Wieviele Kanten besitzt ein Graph mit n Knoten höchstens?
2. Es sei K_n der vollständige Graph mit n Knoten, d.h. der Graph, dessen Knoten paarweise durch Kanten verbunden sind. Zählen Sie für $n = 2, 3$ und 4 die Zahl t_n der aufspannenden Bäume.

   Welche allgemeine Formel vermuten Sie?

Tatsächlich gibt es aber einen einfachen und schnellen Algorithmus zum Auffinden von T^*:

- Am Anfang seien alle Kanten $e \in E$ unmarkiert.
- Im k–ten Schritt des Verfahrens wählt man unter den noch unmarkierten Kanten von E eine Kante e_k mit minimalem Gewicht $f(e_k)$ und markiert e_k. Dabei darf man e_k aber nur dann wählen, wenn ihre Markierung keinen Kreis markierter Kanten erzeugt.
- Kann man keine neue Kante markieren, bedeutet das, dass durch Markieren einer beliebigen Kante ein Kreis enstehen würde, d.h. die markierten Kanten bilden einen Baum T^*.

Nimmt die Gewichtsfunktion Werte mehrmals an, dann ist das Verfahren nicht eindeutig, aber alle nach dem Verfahren konstruierten, aufspannenden Bäume haben das gleiche Gewicht.

Aufgabe 6.4 Konstruieren Sie alle minimalen, d.h. kostengünstigen, aufspannenden Bäume für Beispiel 6.2.

Satz 6.5
Die beschriebene Methode führt zu einem minimalen aufspannenden Baum T^*.

Beweis: Es sei $\tilde{T} = (V, \tilde{E})$ ein minimaler aufspannender Baum von G, der, falls es mehrere davon gibt, möglichst viele Kanten mit $T^* = (V, E^*)$ gemeinsam hat. Wir nehmen an, dass trotzdem $\tilde{E} \neq E^* = \{e_1, \dots, e_n\}$. Es sei e_r die erste Kante von E^*, die nicht zu $\tilde{E}$ gehört, $e_r = \{x, y\}$. Auch in $\tilde{T}$ sind x und y über einen Weg p verbunden, der aber eben e_r nicht enthält. Andererseits muss p eine Kante $\tilde{e} := \{u, v\}$ enthalten, die nicht zu E^* gehört, sonst gäbe es nämlich einen Kreis in E^*.

Da bei der Suche nach e_r die Wahl auf $\{x, y\}$ und nicht auf $\{u, v\}$ fiel, gilt

$$f(e_r) \leq f(\tilde{e}).$$

Damit ist der Baum $T' := (V, E')$ mit $E' := \tilde{E} \cup \{e_r\}/\{\tilde{e}\}$ aufspannend und $F(T') \leq F(\tilde{T})$. T' hat aber eine Kante mehr mit T^* gemeinsam als T, nämlich e_r. Widerspruch! □

Ein zweites algorithmisches Problem ist das der **kürzesten Wege** in einem zusammenhängenden Graphen (V, E) mit Gewichtsfunktion $f : E \to (0, \infty)$.
Hier geht es darum, zwischen den Knoten v und w einen Weg $v_1, \ldots, v_n$ (mit $v_1 = v$ und $v_n = w$) zu finden, für den die Summe

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(\{v_i, v_{i+1}\})$$

minimal wird.

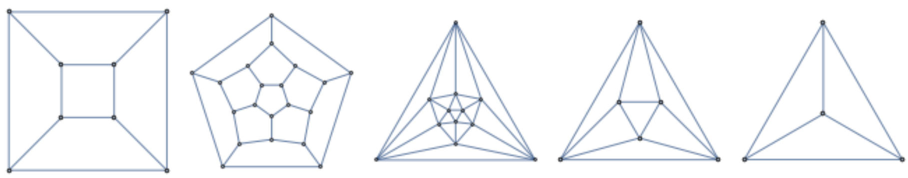
Beispiel 6.6 Die Knoten sind Städte, die Kanten e Direktverbindungen mit der Bahn, und $f(e)$ ist der Fahrpreis. Hier geht es also um die kostengünstigste Verbindung zwischen den Städten v und w.

Auch dieses Problem besitzt eine schnelle Löung, den sog. Dijkstra-Algorithmus, siehe [Ai, Kapitel 6].

Viele Algorithmen in der Graphentheorie beruhen auf Methoden der Linearen Algebra, die Sie in den kommenden beiden Semestern kennen lernen werden.

Aufgabe 6.7

1. Bestimmen Sie für die abgebildeten *platonischen* Graphen

   die Minimalzahlen von für eine Färbung der Ecken notwendigen Farben.

2. Zwei Graphen (V, E) und (W, F) heißen *isomorph*, wenn es eine bijektive[8] Abbildung $f : V \to W$ der Eckenmengen gibt, so dass

   $$F = \{\{f(v_1), f(v_2)\} \mid \{v_1, v_2\} \in E\}.$$

   Auf wie viele Weisen (d.h. für wie viele Abbildungen f) ist der Würfel (oben links) zu sich selbst isomorph; auf wie viele Weisen der Tetraeder (oben rechts)?

3. Zeigen Sie, dass zwei zusammenhängende Graphen mit je n Ecken und konstantem Grad 2 zueinander isomorph sind.

[8] für jede Ecke $w \in W$ gibt es also genau eine Ecke $v \in V$ mit $f(v) = w$

4. Bestimmen Sie (bis auf Umbenennung der Ecken) die Graphen mit $n \geq 2$ Ecken, die $n-1$ verschiedene Grade besitzen.

7 G. Polya: Wie sucht man die Lösung?

- **Verstehen der Aufgabe**
  - *Was ist unbekannt? Was ist gegeben? Wie lautet die Bedingung?*
  - Ist es möglich, die Bedingung zu befriedigen? Ist die Bedingung ausreichend, um die Unbekannte zu bestimmen? Oder ist sie unzureichend? Oder überbestimmt? Oder kontradiktorisch?
  - Zeichne eine Figur! Führe eine passende Bezeichnung ein!
  - Trenne die verschiedenen Teile der Bedingung! Kannst Du sie hinschreiben?
- **Ausdenken eines Plans**
  - Hast Du die Aufgabe schon früher gesehen? Oder hast Du dieselbe Aufgabe in einer wenig verschiedenen Form gesehen?
  - *Kennst Du eine verwandte Aufgabe?* Kennst Du einen Lehrsatz, der förderlich sein könnte?
  - *Betrachte die Unbekannte!* Und versuche, Dich auf eine Dir bekannte Aufgabe zu besinnen, die dieselbe oder eine ähnliche Unbekannte hat.
  - *Hier ist eine Aufgabe, die der Deinen verwandt und schon gelöst ist. Kannst Du sie gebrauchen?* Kannst Du ihr Resultat verwenden? Kannst Du ihre Methode verwenden? Würdest Du irgendein Hilfselement einführen, damit Du sie verwenden kannst?
  - Kannst Du die Aufgabe anders ausdrücken? Kannst Du sie auf noch verschiedene Weise ausdrücken? Geh auf die Definition zurück!
  - Wenn Du die vorliegende Aufgabe nicht lösen kannst, so versuche, zuerst eine verwandte Aufgabe zu lösen. Kannst Du Dir eine zugänglichere verwandte Aufgabe denken? Eine allgemeinere Aufgabe? Eine speziellere Aufgabe? Eine analoge Aufgabe? Kannst Du einen Teil der Aufgabe lösen? Behalte nur einen Teil der Bedingung bei und lasse den anderen fort; wie weit ist die Unbekannte dann bestimmt, wie kann ich sie verändern? Kannst Du etwas Förderliches aus den Daten ableiten? Kannst Du Dir andere Daten denken, die geeignet sind, die Unbekannte zu bestimmen? Kannst Du die Unbekannte ändern oder

die Daten oder, wenn nötig, beide, so dass die neue Unbekannte und die neuen Daten einander näher sind?
  - Hast Du alle Daten benutzt? Hast Du die ganze Bedingung benutzt? Hast Du alle wesentlichen Begriffe in Rechnung gezogen, die in der Aufgabe enthalten sind?

- **Ausführen des Plans**
  - Wenn Du Deinen Plan der Lösung durchführst, so *kontrolliere jeden Schritt*. Kannst Du deutlich sehen, dass der Schritt richtig ist? Kannst Du beweisen, dass er richtig ist?

- **Rückschau**
  - Kannst Du das *Resultat kontrollieren?* Kannst Du den Beweis kontrollieren?
  - Kannst Du das Resultat auf verschiedene Weise ableiten? Kannst Du es auf den ersten Blick sehen?
  - Kannst Du das Resultat oder die Methode für irgend eine andere Aufgabe gebrauchen?

Zitiert nach [Pol].

Literatur

[Ai] Martin Aigner: Diskrete Mathematik. Vieweg 1999, als pdf über OPAC erhältlich.

[CR] Richard Courant, Herbert Robbins: Was ist Mathematik? Springer 1997, als pdf über OPAC erhältlich.

[Pol] György Polya: Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme. Francke Verlag, Tübingen, 1995

[Sc] Winfried Scharlau: Schulwissen Mathematik: Ein Überblick. Vieweg 1995, in Bibliothek 18MI; Inhaltsverzeichnis als pdf über OPAC erhältlich.

[SchSt] Hermann Schichl, Roland Steinbauer: Einführung in das mathematische Arbeiten, Springer, Berlin, 2009, als pdf über OPAC erhältlich.

[Ze] Eberhard Zeidler (Herausgeber): Teubner-Taschenbuch der Mathematik. Teubner. Teil I und II, in Bibliothek 18MI