

Vorlesung Analysis II

Andreas Knauf*

Sommersemester 2019

Zusammenfassung

Vorlesungsbegleitendes Skript. Anregungen und Kritik sind willkommen!

Inhaltsverzeichnis

Zur Notation	iv
1 Uneigentliche Integrale	1
1.1 Definition	1
1.2 Absolute Integrierbarkeit	3
1.3 Die Gammafunktion	5
2 Integration rationaler Funktionen	7
2.1 Reelle und komplexe Polynome	7
2.2 Rationale Funktionen	10
2.3 Integration reeller rationaler Funktionen	12
2.4 Weitere berechenbare Integrale	13
3 Taylor–Approximation reeller Funktionen	15
3.1 Die Landau–Symbole	16
3.2 Die Taylor-Formel	18
3.3 Taylor-Reihen	21
4 Kurven in der Ebene und im Raum	25
4.1 Reguläre und nicht reguläre Kurven	25
4.2 Wechsel der Parametrisierung	28
4.3 Krümmung einer Kurve	30

*Department Mathematik, Universität Erlangen-Nürnberg, Cauerstr. 11, 91058 Erlangen, Raum 02.321. e-mail: knauf@math.fau.de, web: <http://math.fau.de/knauf>

5	Ableitung einer Abbildung vom \mathbb{R}^m in den \mathbb{R}^n	35
5.1	Definition der totalen Ableitung	37
5.2	Partielle Ableitungen	38
5.3	Der Gradient	41
6	Mehrdimensionale Differentialrechnung	43
6.1	Differentiationsregeln	43
6.2	Höhere Ableitungen	46
6.3	Vektoranalysis	49
6.4	Anwendungen der Kettenregel	53
7	Mehrdimensionale Taylor-Approximation	56
7.1	Die Taylor-Formel in m Dimensionen	56
7.2	Die Hesse-Matrix einer reellen Funktion	59
7.3	Extremalstellen	60
8	Implizite Funktionen	65
8.1	Der Banachsche Fixpunktsatz	67
8.2	Das Newton-Verfahren	71
8.3	Das vereinfachte Newton-Verfahren	74
8.4	Konstruktion der impliziten Funktionen	77
9	Extrema mit Nebenbedingungen	84
9.1	1. Methode: Parametrisierung der Nebenbedingungen	84
9.2	2. Methode: Lagrange-Multiplikatoren	86
10	Fourier-Reihen	89
10.1	Die schwingende Saite	89
10.2	Fourier-Analyse	91
10.3	Die Fourier-Transformation als lineare Abbildung	94
	Literatur	98

Danksagung: Ich danke Frau I. Moch für ihre hervorragende Arbeit beim Schreiben des Manuskriptes. Erlangen, im Juli 2019, A. K.

Vorbemerkung: Dieses Skript kann kein Lehrbuch ersetzen. Einige Lehrbücher zur Analysis sind im Literaturverzeichnis erwähnt.

Zur Notation

Teilmengen: Sind A und B Mengen, dann heißt A *Teilmenge* von B (in Zeichen $A \subseteq B$), wenn gilt: $x \in A \Rightarrow x \in B$. Insbesondere gilt $B \subseteq B$. Die *echte Inklusion* $A \subsetneq B$ bedeutet, dass $A \subseteq B$, aber $A \neq B$ gilt. (in der mathematischen Literatur findet man davon abweichend auch das Teilmengenzeichen $A \subset B$.)

Potenzmengen: Ist A eine Menge, dann ist

$$2^A := \{B \mid B \subseteq A\}$$

die *Potenzmenge* von A . Synonym findet man auch die Notationen $\mathfrak{P}(A)$ und $\mathcal{P}(A)$.

Zahlen: Menge $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ der natürlichen Zahlen, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, Ring $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ der ganzen Zahlen.

Körper $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ der rationalen, reellen bzw. komplexen Zahlen.

Für einen Körper \mathbb{K} bedeutet \mathbb{K}^* die multiplikative Gruppe $\mathbb{K}^* := \mathbb{K} \setminus \{0\}$, und

$$\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} = (0, \infty).$$

Intervalle: Für $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ ist

$$\begin{aligned} (a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a, x < b\}, \\ (a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a, x \leq b\} \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

(Synonym findet man auch die Notation $]a, b[= (a, b)$, $]a, b] = (a, b]$ etc.)

Matrizen: $\text{Mat}(m \times n, \mathbb{K})$ bezeichnet den \mathbb{K} -Vektorraum der $m \times n$ -Matrizen mit Einträgen aus dem Körper \mathbb{K} , und $\text{Mat}(n, \mathbb{K})$ den Ring $\text{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$.

Das griechische Alphabet: a) Kleinbuchstaben

α	Alpha	ζ	Zeta	λ	Lambda	π	Pi	ϕ, φ	Phi
β	Beta	η	Eta	μ	My	ρ, ϱ	Rho	χ	Chi
γ	Gamma	θ, ϑ	Theta	ν	Ny	σ, ς	Sigma	ψ	Psi
δ	Delta	ι	Jota	ξ	Xi	τ	Tau	ω	Omega
ϵ, ε	Epsilon	κ	Kappa	\omicron	Omikron	υ	Ypsilon		

b) Großbuchstaben

Γ	Gamma	Θ	Theta	Ξ	Xi	Σ	Sigma	Φ	Phi	Ω	Omega
Δ	Delta	Λ	Lambda	Π	Pi	Υ	Ypsilon	Ψ	Psi		

1 Uneigentliche Integrale

1.1 Definition

In der *Analysis I* [An1] haben wir das Riemann-Integral

$$\int_I f dx = \int_a^b f dx$$

einer Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem kompakten Intervall $I := [a, b]$ untersucht. Die auf I Riemann-integrierbaren Funktionen bilden (nach Satz 12.6 von [An1]) einen \mathbb{R} -Vektorraum $\mathcal{I}(I)$. Jetzt werden wir geeignete Funktionen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf beliebigen, nicht notwendig kompakten Intervallen $I \subseteq \mathbb{R}$ integrieren. Diese müssen auch nicht mehr beschränkt sein.

1.1 Definition Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

- Falls f lokal integrierbar ist und für jede Folge kompakter Intervalle $I_n = [a_n, b_n] \subseteq I$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a := \inf(I)$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b := \sup(I)$ der Limes

$$\int_a^b f dx := \int_I f dx := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{I_n} f dx \in \mathbb{R}$$

existiert, nennt man $\int_I f dx$ das **(uneigentliche) Integral** von f und f **integrierbar** (in Zeichen: $f \in \mathcal{I}(I)$).

- Falls f lokal integrierbar ist und $|f|$ integrierbar ist, nennt man f **absolut integrierbar**.

1.2 Beispiele 1. Für $I := (0, 1]$ und $c \in \mathbb{R}$ ist mit $[a, b] \subset I$

$$\int_a^b x^{-c} dx = \begin{cases} \frac{b^{1-c} - a^{1-c}}{1-c} & , c \neq 1 \\ \ln(b/a) & , c = 1 \end{cases} .$$

Damit ist die Funktion $f(x) = x^{-c}$ auf I genau dann integrierbar, wenn $c < 1$ ist, und in diesem Fall ist

$$\int_0^1 x^{-c} dx = \int_I x^{-c} dx = \frac{1}{1-c} .$$

Da $f = |f|$ ist, ist f unter der gleichen Bedingung absolut integrierbar.

Man sieht aber an diesem Beispiel, dass für dieses nicht kompakte Intervall I der Vektorraum $\mathcal{I}(I)$ keine Algebra mehr ist, also für $f, g \in \mathcal{I}(I)$ das punktweise Produkt $fg : I \rightarrow \mathbb{R}$ im Allgemeinen nicht mehr in $\mathcal{I}(I)$ liegt.

2. Für $I := [1, \infty)$ existiert analog das uneigentliche Integral von x^{-c} genau dann, wenn $c > 1$ ist, und dann ist $\int_1^\infty x^{-c} dx = \frac{1}{c-1}$.

Die Situation ist hier vergleichbar mit der Konvergenz der Reihen $\sum_{n=1}^\infty n^{-c}$, nach Beispiel 8.10 der *Analysis I* ebenfalls genau für $c > 1$. \diamond

Die oben stehenden Integrale können oft zur Abschätzung anderer uneigentlicher Integrale dienen. Ist etwa $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, und gibt es ein $c > 1$ und ein k mit $|f(x)| \leq kx^{-c}$ ($x \in [1, \infty)$), dann ist f absolut integrierbar und

$$\left| \int_1^\infty f dx \right| \leq \int_1^\infty |f| dx \leq \int_1^\infty kx^{-c} dx \leq \frac{k}{c-1}.$$

1.3 Bemerkungen (Uneigentliches Integral)

1. Zwar wurde $\int_I f dx$ in Definition 1.1 mithilfe einer Folge von I ausschöpfenden kompakten Intervallen $I_n = [a_n, b_n]$ definiert, aber der Wert des Integrals hängt nicht von der Wahl der Folge ab. Denn wäre für eine zweite Folge $I'_n = [a'_n, b'_n]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{I'_n} f dx \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{I_n} f dx,$$

dann würde für die Folge von Intervallen J_n mit $J_{2m+1} := I_n$, $J_{2m} := I'_n$ der Limes der Integrale $\int_{J_n} f dx$ gar nicht existieren.

2. Andererseits reicht es auch nicht aus, zu überprüfen, ob für *eine* das Intervall I ausschöpfende Folge von Intervallen I_n der Limes der Folge $\int_{I_n} f dx$ reeller Zahlen existiert.

Beispielsweise ist der Cosinus, aufgefasst als Funktion auf dem Intervall $I := \mathbb{R}$, nicht integrierbar, obwohl für die Intervalle $I_n := [-\pi n, \pi n]$ die Integrale $\int_{I_n} \cos dx$ gleich Null sind.

Denn etwa für die Folge der Intervalle $I'_n := [-\pi n/2, \pi n/2]$ ist $\int_{I'_n} \cos dx = 2 \sin(\pi n/2)$, also die Folge der Integrale nicht konvergent.

3. Praktisch reicht es für die Überprüfung der Integrierbarkeit von $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ aus, für einen beliebigen Punkt $p \in I$ zu zeigen, dass die Funktion

$$F : I \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad F(y) := \int_p^y f dx \tag{1.1}$$

die Grenzwerte $\lim_{y \nearrow \sup(I)} F(y)$ und $\lim_{y \searrow \inf(I)} F(y)$ besitzt. Denn nach Satz 12.10 der *Analysis I* ist für $p \in [a, b]$ die Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann integrierbar, wenn $f|_{[a,p]}$ und $f|_{[p,b]}$ integrierbar sind, und dann gilt

$$\int_a^b f dx = \int_a^p f dx + \int_p^b f dx.$$

4. Ist das Intervall I selbst schon kompakt, dann stimmt der neue Begriff der Integrierbarkeit von $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit dem aus dem letzten Semester überein, und auch das Integral $\int_I f dx$ ergibt nach beiden Definitionen denselben Wert.
5. Wie auch schon im Fall des bestimmten Integrals bilden die auf dem Intervall I uneigentlich integrierbaren Funktionen einen \mathbb{R} -Vektorraum $\mathcal{I}(I)$, und die Abbildung

$$\mathcal{I}(I) \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f \mapsto \int_I f(x) dx$$

ist linear (d.h. $\int_I (f + g) dx = \int_I f dx + \int_I g dx$ und $\int_I cf dx = c \int_I f dx$) und monoton. \diamond

1.2 Absolute Integrierbarkeit

1.4 Satz Ist $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ absolut integrierbar, dann ist f integrierbar.

Beweis: Ist f absolut integrierbar, sodass für $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf(I)$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \sup(I)$ die Folgen der $A_n := \int_p^{a_n} |f| dx$ und $B_n := \int_p^{b_n} |f| dx$ Cauchy-Folgen sind, dann konvergieren wegen

$$\left| \int_p^{a_m} f dx - \int_p^{a_n} f dx \right| = \left| \int_{a_n}^{a_m} f dx \right| \leq \left| \int_{a_n}^{a_m} |f| dx \right| = |A_m - A_n|$$

und analog für $\int_{b_m}^p f dx$ auch die Folgen der $F(a_n)$ und der $F(b_n)$ aus (1.1). \square

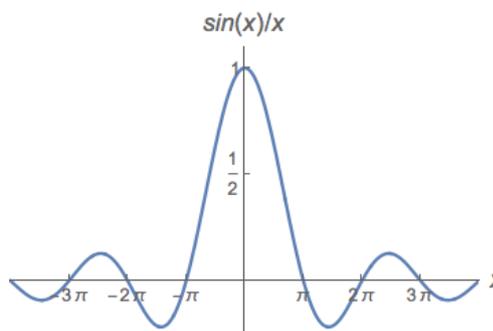
Aus der Integrierbarkeit von f folgt aber nicht die absolute Integrierbarkeit, wie das folgende Beispiel zeigt.

1.5 Beispiel (Integralsinus) Auf $I := \mathbb{R}$ sei

$$f : I \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f(x) := \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

definiert. Der Wert bei $x = 0$ ist so gewählt, dass f stetig ist, denn nach der ersten Regel von de l'Hospital ist

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1.$$



- Da f eine gerade Funktion ist, genügt es zum Beweis der Integrabilität, zu zeigen, dass der Grenzwert von

$$F(y) := \int_0^y f(x) dx$$

für $y \rightarrow \infty$ existiert. Wir betrachten zunächst einmal die Folge der

$$a_n := F(2\pi n) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Dies ist eine Cauchy-Folge, denn für $n > m$ ist

$$|a_n - a_m| = \left| \int_{2\pi m}^{2\pi n} \frac{\sin(x)}{x} dx \right| \leq \sum_{k=m}^{n-1} G_k$$

mit $G_k := \left| \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} \frac{\sin(x)}{x} dx \right| = \int_{2\pi k}^{\pi(2k+1)} \sin(x) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+\pi} \right) dx$, denn $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$. Nun ist für $x \geq 2\pi k$ und $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+\pi} = \frac{\pi}{x(x+\pi)} \leq \frac{\pi}{2\pi k \pi(2k+1)} \leq \frac{1}{2k(k+1)},$$

also $G_k \leq \frac{1}{2k(k+1)} \int_{2\pi k}^{\pi(2k+1)} \sin(x) dx = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ und

$$\sum_{k=m}^{n-1} G_k \leq \sum_{k=m}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{m} - \frac{1}{n}.$$

Dies beweist, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

Außerdem ist für beliebige $y \geq 2\pi$ die Differenz zwischen $F(y)$ und a_n mit $n := \lfloor \frac{y}{2\pi} \rfloor \in \mathbb{N}$ klein:

$$|F(y) - a_n| = \left| \int_{2\pi n}^y \frac{\sin(x)}{x} dx \right| \leq \left| \int_{2\pi n}^y \frac{1}{x} dx \right| \leq \frac{1}{n}.$$

Dies beweist die Existenz des Limes $\lim_{y \rightarrow \infty} F(y)$. Da f gerade ist, gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2 \lim_{y \rightarrow \infty} F(y).$$

Man kann mit Methoden, die uns noch nicht zur Verfügung stehen, beweisen, dass $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \pi$ ist.

• Andererseits ist f nicht absolut integabel, denn $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ divergiert: Für $k \in \mathbb{N}$ ist nämlich

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^{k\pi} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx &= \sum_{\ell=1}^{k-1} \int_{\ell\pi}^{(\ell+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x} dx = \sum_{\ell=1}^{k-1} \int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x + \ell\pi} dx \\ &\geq \int_0^{\pi} \sin(x) dx \cdot \sum_{\ell=2}^k \frac{1}{\ell\pi} = \frac{2}{\pi} \sum_{\ell=2}^k \frac{1}{\ell}. \end{aligned}$$

Da die harmonische Reihe divergiert, divergiert auch $\int_{\pi}^{k\pi} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx$ für $k \rightarrow \infty$. Damit ist f nicht absolut integabel. \diamond

Für die Integrierbarkeit einer Funktion $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ist es weder hinreichend noch notwendig, dass $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ist. Wie das folgende Beispiel zeigt, kann sogar $\limsup_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ mit der Integrierbarkeit vereinbar sein.

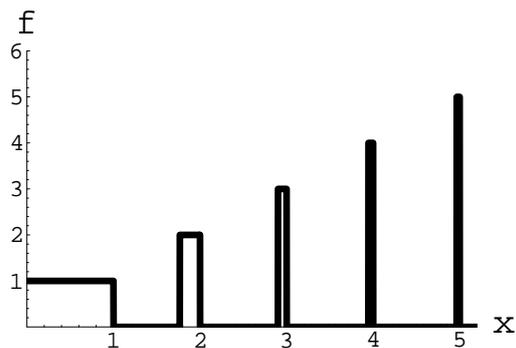
1.6 Beispiel

$$f(x) := \begin{cases} [x] & , \quad [x] - x \leq [x]^{-c} \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases} .$$

Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\int_0^n f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k f(x) dx = \sum_{k=1}^n k^{1-c}, \text{ und das Integral } \int_0^b f dx \text{ wächst monoton in } b.$$

Daher existiert das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f dx$ falls der Parameter $c > 2$ ist. \diamond



1.3 Die Gammafunktion

Diese mit dem griechischen Buchstaben Γ bezeichnete Funktion setzt die Fakultät für nicht ganzzahlige Argumente fort. Sie taucht z.B. im Ausdruck für das Volumen der d -dimensionalen Kugel (siehe *Vorkurs 2004*) und insbesondere in der Zahlentheorie auf und ist die wichtigste nichtelementare Funktion.

Wir wollen sie von vornherein für komplexe Argumente definieren, und zwar als uneigentliches Integral einer komplexwertigen Funktion:

1.7 Definition *Real- und Imaginärteil einer auf dem Intervall I definierten Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ seien integrierbar. Dann heißt auch f integrierbar, und*

$$\int_I f dx := \int_I \operatorname{Re}(f) dx + i \int_I \operatorname{Im}(f) dx.$$

Bei der Integration einer komplexwertigen Funktion betrachtet man also Real- und Imaginärteil getrennt. Analog definiert man die Ableitung

$$f' : I \rightarrow \mathbb{C} \quad , \quad f'(x) := \operatorname{Re}(f)'(x) + i \operatorname{Im}(f)'(x),$$

wenn $\operatorname{Re}(f)$ und $\operatorname{Im}(f)$ differenzierbar sind.

1.8 Definition *Auf der komplexen Halbebene $D := \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > 0\}$ ist die **Gammafunktion** gleich*

$$\Gamma : D \rightarrow \mathbb{C} \quad , \quad \Gamma(s) := \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt. \tag{1.2}$$

Wir betrachten also ein uneigentliches Integral mit einem komplexwertigen Integranden. Dessen Real- und Imaginärteil ist stetig. Wegen

$$|t^{s-1}e^{-t}| = \exp((\operatorname{Re}(s) - 1) \ln t - t) = t^{\operatorname{Re}(s)-1}e^{-t}$$

und $\operatorname{Re}(s) > 0$ existiert das uneigentliche Integral (1.2).

1.9 Satz (Funktionalgleichung) Es ist

$$\Gamma(1) = 1 \quad \text{und} \quad \Gamma(s + 1) = s\Gamma(s) \quad (s \in D).$$

Beweis:

- $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_\varepsilon^{1/\varepsilon} e^{-t} dt = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{-t} \Big|_\varepsilon^{1/\varepsilon} = 1.$
- Durch partielle Integration schließen wir

$$\int_a^b t^s e^{-t} dt = -t^s e^{-t} \Big|_a^b + s \int_a^b t^{s-1} e^{-t} dt.$$

Da wegen $\operatorname{Re}(s) > 0$ sowohl gilt: $\lim_{a \rightarrow 0} a^s e^{-a} = \lim_{a \rightarrow 0} a^s = 0$ als auch $\lim_{b \rightarrow \infty} b^s e^{-b} = 0$, folgt die Funktionalgleichung. \square

1.10 Korollar Es ist $\Gamma(n) = (n - 1)!$ ($n \in \mathbb{N}$).

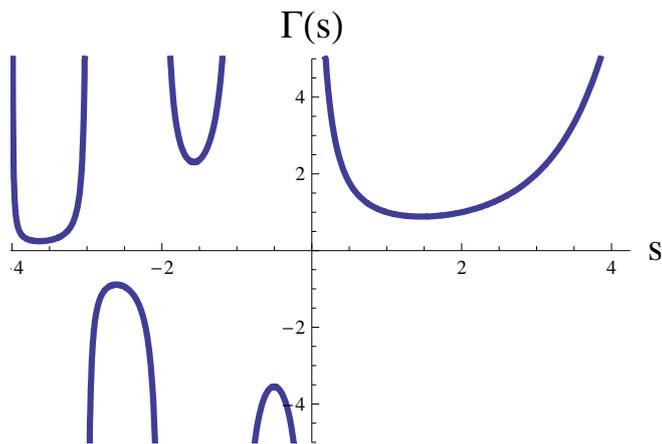
Beweis: Der Induktionsanfang ergibt sich aus $\Gamma(1) = 1 = 0!$, der Induktionsschritt aus $\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n) = n \cdot (n - 1)! = n!$. \square

Der Definitionsbereich der Gammafunktion kann von der Halbebene D auf \mathbb{C} erweitert (*analytisch fortgesetzt*) werden. Dabei divergiert die Funktion genau bei den negativen ganzen Zahlen, siehe nebenstehende Abbildung.

Wie wir bei der Berechnung der Volumina $\frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2+1)}$ der d -dimensionalen Einheitskugeln sehen (siehe *Vorkurs*), sind die Werte von Γ bei halbzahligem Argumenten wichtig.

Diese gewinnt man unter Benutzung der Variablensubstitution $u = \sqrt{t}$, ausgehend von

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t} dt = 2 \int_0^\infty e^{-u^2} du = \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}.$$



Gammafunktion für reelle Argumente

Das uneigentliche Integral $\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du$ berechnet man typischerweise im Rahmen der mehrdimensionalen Integration. Alternativ kann man es auch umgekehrt aus der Produktentwicklung der Gammafunktion erschließen (siehe [Fo], Bd. 1, §20). Damit ist

$$\Gamma(n + \frac{1}{2}) = (n - \frac{1}{2})\Gamma(n - \frac{1}{2}) = \dots = \frac{(2n - 1)!!}{2^n} \sqrt{\pi} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

wobei die *Doppelfakultät* durch

$$n!! := \prod_{i=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (n - 2i) \quad (n \in \mathbb{N})$$

definiert ist (also etwa $7!! = 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 = 105$).

2 Integration rationaler Funktionen

Im Gegensatz zur Differentiation führt die Integration elementarer Funktionen¹ nicht immer auf elementare Funktionen, und es gibt auch keinen Algorithmus für die analytische Integration. Ein solcher existiert aber immerhin für die große Klasse der rationalen Funktionen.

Wir beginnen mit einigen algebraischen Betrachtungen, die die Partialbruchzerlegung einer beliebigen rationalen Funktion in eine Summe einfacherer rationaler Funktionen vorbereiten.

2.1 Reelle und komplexe Polynome

2.1 Definition

- Für den Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} heißt eine Funktion $p : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ der Form

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \quad \text{mit} \quad a_k \in \mathbb{K} \quad (2.1)$$

reelles bzw. komplexes Polynom.

- Ist dabei $a_n \neq 0$, dann ist p ein Polynom vom **Grad**

$$\deg(p) := \text{grad}(p) := n.$$

- Das Polynom $0 : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, $0(x) = 0$ heißt **Nullpolynom** und $\deg(0) := -\infty$.
- Der Ring aller Polynome mit Koeffizienten aus \mathbb{K} wird mit $\mathbb{K}[x]$ bezeichnet.

¹ also die Polynome, die Exponentialfunktion, der Logarithmus, die (invers) trigonometrischen Funktionen, und aus diesen durch endlich viele Anwendungen der Grundrechenarten und Kompositionen gewonnene Funktionen.

Die Festlegung des Grades des Nullpolynoms erscheint willkürlich, ist aber dadurch gerechtfertigt, dass die folgenden Regeln für den Grad gelten:

Summe und Produkt zweier Polynome $f, g \in \mathbb{K}[x]$ sind Polynome mit

$$\deg(f + g) \leq \max(\deg(f), \deg(g))$$

und

$$\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g),$$

wobei wir $k + (-\infty) := -\infty$ setzen.²

Die Koeffizienten a_k in (2.1) sind durch p eindeutig bestimmt (denn andernfalls gäbe es eine Darstellung $0(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ des Nullpolynoms mit $a_n \neq 0$, was der Identität $0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{0(x)}{x^n} = a_n + \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{k-n}$ widerspräche).

Lassen wir als Argumente x in (2.1) beliebige komplexe Zahlen zu, dann lässt sich ein reelles Polynom als komplexes Polynom auffassen. In diesem Sinn gilt

$$\mathbb{R}[x] \subset \mathbb{C}[x].$$

Reelle Polynome vom Grad $\deg(p) > 0$ brauchen keine Nullstellen zu besitzen, wohl aber komplexe Polynome (**Bsp.:** $p(x) = x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$). Letzteres ist der Inhalt des so genannten *Fundamental- oder Hauptsatzes der Algebra* (Satz 7.22 der *Analysis I*, Beweis: z.B. in HILDEBRANDT [Hi], Bd. 1).

Der Fundamentalsatz der Algebra ermöglicht es, ein Polynom $p \in \mathbb{C}[x]$ n -ten Grades in ein Produkt von *Linearfaktoren*, d.h. Polynomen vom Grad Eins zu zerlegen. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass p *normiert* ist, d.h. dass der so genannte *Leitkoeffizient* a_n gleich Eins ist.

2.2 Satz *Ist $p \in \mathbb{C}[x]$ ein normiertes Polynom mit $n := \deg(p) \in \mathbb{N}_0$, dann gibt es (bis auf ihre Nummerierung eindeutig bestimmte) Zahlen*

$$x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad p(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i).$$

Beweis: • Im Fall $n = 0$ gilt $p(x) = 1$. Ist dagegen $n > 0$, dann existiert nach dem Fundamentalsatz der Algebra ein $x_1 \in \mathbb{C}$ mit $p(x_1) = 0$. Wir führen nun Polynomdivision mit Rest und Divisor $p_1(x) = x - x_1$ durch und erhalten eindeutig bestimmte $q, r \in \mathbb{C}[x]$ mit $\deg(r) < \deg(p_1) = 1$ und $p = p_1 q + r$. Da nun $r(x) = p(x_1) - p_1(x_1)q(x_1)$ gilt, ist $r = 0$, also $p = p_1 q$.

q ist ein normiertes Polynom mit $\deg(q) = n - 1$. Weiter durch Induktion.

• Ist gleichzeitig $p(x) = \prod_{i=1}^n (x - x'_i)$, dann müssen die *Mengen* $\{x_1, \dots, x_n\}$ und $\{x'_1, \dots, x'_n\}$ der Nullstellen gleich sein, also $x'_i = x_{\pi(i)}$ für ein $\pi \in \{1, \dots, n\}$.

²Für $g \neq 0$ gilt $\deg(f \circ g) = \deg(f) \deg(g)$.

Daher muss auch $\prod_{i=2}^n (x - x_i) = \prod_{i=2}^n (x - x'_i)$ gelten, sodass wir induktiv eine Permutation π der Indizes mit $x'_i = x_{\pi(i)}$, $i = 1, \dots, n$ erhalten. \square

Die x_i in der Linearfaktorzerlegung brauchen nicht voneinander verschieden zu sein. Tritt ein Faktor k -mal auf, spricht man von einer k -fachen Nullstelle.

Eine ähnliche Zerlegung in Linearfaktoren können wir für reelle Polynome nicht erwarten. Immerhin gilt der *Faktorisierungssatz für reelle Polynome*:

2.3 Satz 1. Ist $x_1 \in \mathbb{C}$ k -fache Nullstelle des reellen Polynoms $p \in \mathbb{R}[x] \subset \mathbb{C}[x]$, dann ist auch \bar{x}_1 k -fache Nullstelle von p .

2. Ist $p \in \mathbb{R}[x]$ normiert, dann gibt es $a_1, \dots, a_l, b_1, \dots, b_l, c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ mit $2l + m = \deg(p)$, $a_i^2 - b_i < 0$ und

$$p(x) = \prod_{i=1}^l (x^2 - 2a_i x + b_i) \cdot \prod_{j=1}^m (x - c_j).$$

Beweis:

Für $p \in \mathbb{C}[x]$ der Form $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ sei $\bar{p} \in \mathbb{C}[x]$ gleich $\bar{p}(x) := \sum_{k=0}^n \bar{a}_k x^k$.

1. Wäre $p \in \mathbb{C}[x]$ ein beliebiges komplexes Polynom mit k -facher Nullstelle x_1 , also $p(x) = (x - x_1)^k q(x)$, dann wäre \bar{x}_1 k -fache Nullstelle von \bar{p} , denn $\bar{p}(x) = (x - \bar{x}_1)^m \bar{q}(x)$. Nun ist aber $p \in \mathbb{R}[x]$, also $\bar{p} = p$.

2. Nach Satz 2.2 schreiben wir p in der Form

$$p(x) = \prod_{i=1}^m (x - x_i) \cdot \prod_{i=m+1}^n (x - x_i)$$

mit $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$ und $x_{m+1}, \dots, x_n \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Nach Teil 1. des Satzes ist $l := \frac{n-m}{2} \in \mathbb{N}_0$, und nach Ummummerierung gilt

$$\prod_{i=m+1}^n (x - x_i) = \prod_{i=m+1}^{m+l} (x - x_i)(x - \bar{x}_i).$$

Wir setzen $c_i := x_i$ ($i = 1, \dots, m$), $a_i := \operatorname{Re}(x_{i+m})$ und $b_i := x_{i+m} \bar{x}_{i+m}$ ($i = 1, \dots, l$). \square

Wir können also reelle Polynome im Wesentlichen eindeutig in reelle Linearfaktoren und quadratische Polynome zerlegen.

2.2 Rationale Funktionen

Die (reellen wie auch komplexen) Polynome bilden bezüglich punktweiser Addition und Multiplikation einen Ring, jedoch keinen Körper, denn nicht konstante Polynome besitzen kein multiplikativ inverses Element. Gehen wir aber zu den *rationalen Funktionen* über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} über, d.h. Funktionen, die sich in der Form p/q mit $p, q \in \mathbb{K}[x]$ schreiben lassen, dann existiert für alle $p/q \neq 0$ der Kehrwert q/p . Wir müssen nur darauf achten, dass der Definitionsbereich von p/q die Menge $\{x \in \mathbb{K} \mid q(x) \neq 0\}$ ist.

Nun besitzt eine rationale Funktion keine eindeutige Darstellung p/q , denn wir können ja Zähler und Nenner mit einem beliebigen Polynom $r \neq 0$ erweitern.

Wir nehmen aber an, dass p und q schon teilerfremd sind, was für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ nach Satz 2.2 bedeutet, dass sie keine gemeinsamen Nullstellen besitzen.

Bezeichnet man den Körper der rationalen Funktionen mit $\mathbb{K}(x)$, dann gilt $\mathbb{K}[x] \subset \mathbb{K}(x)$, und wir bezeichnen die Polynome manchmal auch als die *ganzrationalen Funktionen*.

Eine rationale Funktion $p/q \in \mathbb{K}(x)$ können wir eindeutig in der Form

$$\frac{p}{q} = t + \frac{\tilde{p}}{q} \quad \text{mit} \quad t, \tilde{p} \in \mathbb{K}[x] \quad \text{und} \quad \deg(\tilde{p}) < \deg(q) \quad (2.2)$$

schreiben, wobei wir t und \tilde{p} mit dem **Euklidischen Algorithmus** berechnen.

2.4 Beispiel $\frac{x^4}{x^3+2x^2-1} = x - 2 + \frac{4x^2+x-2}{x^3+2x^2-1}$, denn

$$(x^3 + 2x^2 - 1)(x - 2) = x^4 - 4x^2 - x + 2. \quad \diamond$$

Die Polynome $t \in \mathbb{K}[x]$ in (2.2) können wir integrieren. Wir müssen uns also nur noch um die Bestimmung des unbestimmten Integrals rationaler Funktionen p/q kümmern, deren Nenner-Grad $\deg(q)$ größer als der Zähler-Grad $\deg(p)$ ist.

Die Technik der **Partialbruchzerlegung** ermöglicht es, rationale Funktionen aus $\mathbb{C}(x)$ in eine Summe rationaler Funktionen zu zerlegen, deren Nennerpolynom höchstens eine Nullstelle besitzt. Der folgende Satz gilt aber für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

2.5 Satz (Partialbruchzerlegung)

Es seien $p, q \in \mathbb{K}[x]$, $x_1 \in \mathbb{K}$ und $k \in \mathbb{N}$. Ist $\deg(p) < \deg(q) + k$, dann gibt es eindeutig bestimmte $\tilde{p} \in \mathbb{K}[x]$ und $A_1, \dots, A_k \in \mathbb{K}$ mit

$$\frac{p(x)}{q(x)(x-x_1)^k} = \frac{\tilde{p}(x)}{q(x)} + \sum_{j=1}^k \frac{A_j}{(x-x_1)^j},$$

wobei $\deg(\tilde{p}) < \deg(q)$ gilt.

Beweis: Einfachheit halber nehmen wir an, dass x_1 eine k -fache Nullstelle des Nennerpolynoms ist, d.h. $q(x_1) \neq 0$ gilt. Wir reduzieren nun schrittweise deren Vielfachheit, indem wir zeigen, dass

$$\frac{p(x)}{q(x)(x-x_1)^k} = \frac{p_k(x)}{q(x)(x-x_1)^{k-1}} + \frac{A_k}{(x-x_1)^k} \quad (2.3)$$

mit eindeutigem Polynom $p_k \in \mathbb{K}[x]$ vom Grad $\deg(p_k) < \deg(q) + k - 1$ und $A_k \in \mathbb{K}$ ist.

Erweitern wir (2.3) mit $(x - x_1)^k$ und setzen wir $x = x_1$ ein, so ergibt sich

$$A_k = \frac{p(x_1)}{q(x_1)} \in \mathbb{K}.$$

Auflösen nach p_k ergibt

$$p_k(x) = \frac{p(x) - A_k q(x)}{x - x_1}.$$

Dies ist aber ein Polynom aus $\mathbb{K}[x]$, denn der Zähler der rechten Seite verschwindet bei Einsetzen von x_1 .

Da nach Voraussetzung $\deg(p) < \deg(q) + k$ galt, ist $\deg(p - A_k q) < \deg(q) + k$, also $\deg(p_k) < \deg(q) + k - 1$. \square

Ist das Nennerpolynom von der Form

$$q(x) = \prod_{l=1}^m (x - x_l)^{d_l}$$

und sind die Nullstellen x_l der Vielfachheit d_l voneinander verschieden, dann führt mehrfache Anwendung des Satzes zu der Formel

$$\boxed{\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^{d_l} \frac{A_j^{(l)}}{(x-x_l)^j}}. \quad (2.4)$$

Die Anzahl der zu bestimmenden Koeffizienten $A_j^{(l)}$ ist $\sum_{l=1}^m d_l = \deg(q)$. Nach Multiplikation von (2.4) mit q werden diese durch Koeffizientenvergleich der beiden Polynome berechnet. Das läuft auf die Lösung eines linearen Gleichungssystems hinaus.

2.6 Beispiel $\frac{2x^3+4x}{(x+1)^2(x-1)^2} = \frac{A_1^{(1)}}{x+1} + \frac{A_2^{(1)}}{(x+1)^2} + \frac{A_1^{(2)}}{x-1} + \frac{A_2^{(2)}}{(x-1)^2}$

ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} 2x^3 + 4x &= A_1^{(1)}(x+1)(x-1)^2 + A_2^{(1)}(x-1)^2 + A_1^{(2)}(x+1)^2(x-1) \\ &\quad + A_2^{(2)}(x+1)^2 \\ &= \left(A_1^{(1)} + A_1^{(2)}\right)x^3 + \left(-A_1^{(1)} + A_2^{(1)} + A_1^{(2)} + A_2^{(2)}\right)x^2 \\ &\quad + \left(-A_1^{(1)} - 2A_2^{(1)} - A_1^{(2)} + 2A_2^{(2)}\right)x \\ &\quad + A_1^{(1)} + A_2^{(1)} - A_1^{(2)} + A_2^{(2)}. \end{aligned}$$

Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1^{(1)} \\ A_2^{(1)} \\ A_1^{(2)} \\ A_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

besitzt die Lösung $A_1^{(1)} = 1$, $A_2^{(1)} = \frac{-3}{2}$, $A_1^{(2)} = 1$, $A_2^{(2)} = \frac{3}{2}$. \diamond

Analog zu Satz 2.5 zeigt man

2.7 Satz *Es seien $p, q \in \mathbb{R}[x]$, $a, b \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$. Ist $\deg(p) < \deg(q) + k$, dann gibt es eindeutig bestimmte $\tilde{p} \in \mathbb{R}[x]$ und $A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_k \in \mathbb{R}$ mit*

$$\frac{p(x)}{q(x)(x^2-2ax+b)^k} = \frac{\tilde{p}(x)}{q(x)} + \sum_{j=1}^k \frac{A_j x + B_j}{(x^2-2ax+b)^j},$$

wobei $\deg(\tilde{p}) < \deg(q)$ gilt.

2.3 Integration reeller rationaler Funktionen

Wir können also reelle rationale Funktionen in Summen von Termen der Form $\frac{Ax+B}{(x^2-2ax+b)^j}$ bzw. $\frac{A}{(x-a)^j}$ zerlegen, wobei die Koeffizienten reell sind.

Damit gestattet uns der folgende Satz die Integration rationaler Funktionen:³

2.8 Satz *Für $j \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ ist*

$$\int \frac{dx}{(x-a)^j} = \begin{cases} \ln|x-a| & , j = 1 \\ \frac{-1}{(j-1)(x-a)^{j-1}} & , j > 1. \end{cases}$$

Ist $a^2 < b$, dann gilt

$$I_j := \int \frac{dx}{(x^2-2ax+b)^j} = \begin{cases} \frac{\arctan\left(\frac{x-a}{\sqrt{b-a^2}}\right)}{\sqrt{b-a^2}} & , j = 1 \\ \frac{x-a}{2(b-a^2)(j-1)(x^2-2ax+b)^{j-1}} + \frac{2j-3}{2(b-a^2)(j-1)} I_{j-1} & , j > 1 \end{cases}$$

und

$$\int \frac{x-a}{(x^2-2ax+b)^j} dx = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2ax + b) & , j = 1 \\ \frac{-1}{2(j-1)(x^2-2ax+b)^{j-1}} & , j > 1. \end{cases}$$

³Wir lassen im Folgenden die Integrationskonstanten weg. Ohnehin ist der Definitionsbereich einer reellen rationalen Funktion die disjunkte Vereinigung endlich vieler offener Intervalle, und für jedes Intervall können wir eine beliebige Konstante zur Stammfunktion addieren.

Beweis: Durch Differentiation. □

2.9 Beispiel

$$\begin{aligned}\int \frac{x+2}{x^2-4x+7} dx &= \int \frac{x-2}{x^2-4x+7} dx + 4 \int \frac{1}{x^2-4x+7} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 - 4x + 7) + \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{x-2}{\sqrt{3}}\right).\end{aligned}$$

2.4 Weitere berechenbare Integrale

Man kann viele weitere Integrale durch Substitution auf Integrale rationaler Funktionen zurückführen:

2.10 Beispiel Mit $u(x) := e^x$, also $x = \ln(u)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x+1}{e^x+e^{-x}} dx &= \int \frac{u+1}{u+1/u} \underbrace{\frac{dx}{du}}_{1/u} du = \int \frac{u+1}{u^2+1} du \\ &= \frac{1}{2} \ln(u^2 + 1) + \arctan(u) + c \\ &= \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) + \arctan(e^x) + c\end{aligned}$$

2.11 Satz

Die folgenden unbestimmten Integrale stellen elementare Funktionen dar:

- a) $\int R(e^{ax}) dx$
- b) $\int R(\sinh(ax), \cosh(ax)) dx$
- c) $\int R(\sin(ax), \cos(ax)) dx$
- d) $\int R(x, \sqrt[k]{ax+b}) dx \quad (k \in \mathbb{N})$
- e) $\int R\left(x, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx \quad (k \in \mathbb{N})$
- f) $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx.$

Dabei bezeichnet $R(x, y)$ eine **rationale Funktion von x und y** , d.h.

$$R(x, y) = \frac{\sum_{i,j=0}^n a_{ij} x^i y^j}{\sum_{i,j=0}^n b_{ij} x^i y^j}.$$

Beweis: Man muss jeweils nur die Substitution $x = x(u)$ angeben, die auf ein Integral einer rationalen Funktion von u führt:

a) Aus $u(x) := e^{ax}$ (wie in Beispiel 2.10) ergibt sich

$$x = \frac{1}{a} \ln(u) \quad \text{und} \quad \frac{dx}{du} = \frac{1}{au}, \quad \text{also}$$

$$\int R(e^{ax}) dx = \int \frac{R(u)}{au} du.$$

b) lässt sich auf a) zurückführen, denn

$$\sinh(ax) = \frac{1}{2}(e^{ax} - e^{-ax}) \quad \text{und} \quad \cosh(ax) = \frac{1}{2}(e^{ax} + e^{-ax}).$$

c) O.B.d.A. $a = 1$ (lineare Substitution).

Setze $u(x) := \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, also $x(u) = 2 \arctan(u)$ und $\frac{dx}{du} = \frac{2}{1+u^2}$. Wegen

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{1+u^2}$$

und

$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{u^2}{1+u^2}$$

ist

$$\cos(x) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

und

$$\sin(x) = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2u}{1+u^2}.$$

$$\Rightarrow \int R(\sin x, \cos x) dx = \int \underbrace{R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)}_{\text{Rationale Funktion von } u} \cdot \frac{2}{1+u^2} du.$$

d) Mit $u(x) := \sqrt[k]{ax+b}$ ist $x = (u^k - b)/a$, also

$$\int R(x, \sqrt[k]{ax+b}) dx = \frac{k}{a} \int R\left(\frac{u^k-b}{a}, u\right) u^{k-1} du$$

e) Setze $u(x) := \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

f) Durch lineare Substitution

$$t(x) := \frac{2ax+b}{\sqrt{|4ac-b^2|}}$$

Rückführung auf einen der Spezialfälle

- $\int R(t, \underbrace{\sqrt{t^2 + 1}}_{\cosh u}) dt \quad t := \sinh u$
- $\int R(t, \underbrace{\sqrt{t^2 - 1}}_{\sinh u}) dt \quad t := \cosh u$
- $\int R(t, \underbrace{\sqrt{1 - t^2}}_{\cos u}) dt \quad t := \sin u$

Weiter mit b) bzw. c). □

2.12 Beispiel Mit der Substitution $u(x) := \tan \frac{x}{2}$ ist

$$\begin{aligned} \int \frac{\cot x}{1 + \cos x} dx &= \int \frac{\cos x}{\sin x \cdot (1 + \cos x)} dx = \int \frac{1 - u^2}{2u \cdot \left(1 + \frac{1 - u^2}{1 + u^2}\right)} \cdot \frac{2}{1 + u^2} du \\ &= \int \frac{1 - u^2}{2u} du = \frac{1}{2} \ln |u| - \frac{u^2}{4} + c \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} \right) \right| - \frac{1}{4} \tan^2 \left(\frac{x}{2} \right) + c. \end{aligned}$$

In der Praxis benutzt man Computeralgebrasysteme für die Integration rationaler (und vieler anderer) Funktionen.

3 Taylor–Approximation reeller Funktionen

Mit Polynomen und – verallgemeinert – mit Potenzreihen lässt es sich einfacher rechnen als mit allgemeineren reellen Funktionen. Sie lassen sich durch Angabe ihrer (abzählbar vielen) Koeffizienten charakterisieren. Addition, Multiplikation und auch Komposition von Potenzreihen führt auf algebraische Verknüpfungen ihrer Koeffizienten.

Daher liegt die Frage nahe, ob wir eine beliebige reelle Funktion durch Polynome bzw. Potenzreihen approximieren, d.h. annähern oder sie sogar als Potenzreihe schreiben können. Letzteres kann höchstens dann möglich sein, wenn die Funktion beliebig oft differenzierbar ist, denn Potenzreihen besitzen auf ihrem Konvergenzintervall diese Eigenschaft.

Auch eine glatte Funktion $f \in C_{\mathbb{R}}^{\infty}(\mathbb{R})$ werden wir im Allgemeinen nicht gleichmäßig durch Polynome annähern können. Wie schon das Beispiel der Potenzreihe $f := \exp$ zeigt (siehe Satz 10.2 der *Analysis I*), muss davon ausgegangen werden, dass für *alle* Polynome p gilt:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - p(x)| = \infty.$$

Bei der Taylor–Approximation begnügt man sich daher damit, f in der Nähe eines Punktes $a \in \mathbb{R}$ zu approximieren.

Um die Approximationsgüte zu beschreiben, benutzen wir die Landauschen Symbole \mathcal{O} und o .

3.1 Die Landau-Symbole

In vielen Fällen genügt eine ungefähre Kenntnis einer Funktion. Ist etwa α ein betragsmäßig kleiner Winkel, dann können wir in guter Näherung $\sin(\alpha)$ durch α ersetzen. Um nun ein Maß für Güte der die Näherung zu erhalten, sei allgemein $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf einer Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^m$ definiert und $a \in \bar{D}$.

3.1 Definition Es sei $g : D \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Falls für ein geeignetes $\varepsilon > 0$ ein $C = C(\varepsilon) > 0$ existiert mit

$$\|f(x)\| \leq C|g(x)| \quad (x \in D \text{ mit } \|x - a\| < \varepsilon),$$

heißt f bei a **von der Ordnung groß \mathcal{O} von g** , und man schreibt⁴

$$f(x) = \mathcal{O}(g(x)) \quad \text{oder} \quad f = \mathcal{O}(g) \quad (x \rightarrow a).$$

2. Falls man dabei sogar $C(\varepsilon) > 0$ so wählen kann, dass $\lim_{\varepsilon \searrow 0} C(\varepsilon) = 0$ gilt, also (unter der Voraussetzung $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$ mit $\|x - a\| < \varepsilon$)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|f(x)\|}{|g(x)|} = 0$$

ist, heißt f bei a **von der Ordnung klein o von g** , und man schreibt

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{oder} \quad f = o(g) \quad (x \rightarrow a).$$

Analog verfährt man für $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ und die Punkte $a = \pm\infty$, die man als Punkte der erweiterten Zahlengerade $\bar{\mathbb{R}}$ auffasst, und bei denen man die Umgebungen $[R, \infty)$ bzw. $(-\infty, -R]$ verwendet.

3.2 Beispiele 1. Für $a = 0$ ist $\sin(x) - x = o(x) \quad (x \rightarrow 0)$, denn wir haben in der *Analysis I* bewiesen, dass $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, also $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x} = 0$ ist.

⁴Da in der Landau-Notation $f = \mathcal{O}(g)$ der Punkt a nicht auftaucht, darf man nicht vergessen, ihn zu nennen, z.B. in der Form des nachgestellten $(x \rightarrow a)$. Ohne diese Angabe ergibt die Formel $f = \mathcal{O}(g)$ keinen Sinn!

2. Genauer gilt sogar

$$\sin(x) - x = \mathcal{O}(x^3) \quad (x \rightarrow 0),$$

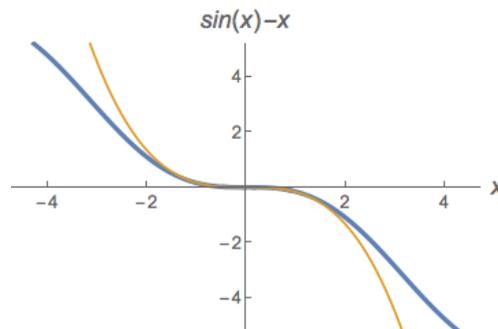
denn

$$|\sin(x) - x| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| = |x^3| \cdot \left| \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2(k-1)}}{(2k+1)!} \right|.$$

Letztere Potenzreihe konvergiert auf ganz \mathbb{R} und ist damit stetig, also auf jedem kompakten Intervall $[-\varepsilon, \varepsilon]$ beschränkt. In der nebenstehenden Abbildung wird der Graph der Funktion

$$x \mapsto \sin(x) - x$$

(fett gezeichnet) mit dem Graph von $x \mapsto \frac{-x^3}{3!}$ verglichen.

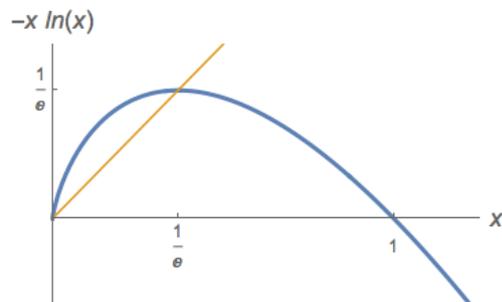


3. Bei $a = \infty$ ist $\sin(x) = \mathcal{O}(1)$, denn der Sinus ist sogar auf ganz \mathbb{R} beschränkt. Dagegen gilt **nicht** $\sin(x) = o(1)$, denn $|\sin((n + \frac{1}{2})\pi)| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

4. Für die (in der Informationstheorie wichtige) Funktion

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := -x \ln(x)$$

gilt $f(x) = o(1)$ ($x \rightarrow 0$), aber **nicht** $f(x) = \mathcal{O}(x)$ ($x \rightarrow 0$). Dies sieht man auch in der nebenstehenden Abbildung, wo die Diagonale mit eingezeichnet wurde. \diamond



Als Vergleichsfunktionen $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ bieten sich die Beträge $g(x) := \|x - a\|^n$ an. Im Eindimensionalen ($D \subseteq \mathbb{R}$) kann man einfach $g(x) := (x - a)^n$ nehmen.

Man kann die Schreibweise $f = \mathcal{O}(g)$ ($x \rightarrow a$) so interpretieren, dass f zur Menge $\mathcal{O}(g)$ der Funktionen gehört, die sich bei a in der beschriebenen Art und Weise verhalten. Dies ist ein \mathbb{R} -Vektorraum. In diesem Sinn können wir aus

$$f_1 = \mathcal{O}(g_1) \quad \text{und} \quad f_2 = \mathcal{O}(g_2) \quad (x \rightarrow a)$$

schließen, dass

$$f_1 + f_2 = \mathcal{O}(g_1) + \mathcal{O}(g_2) = \mathcal{O}(|g_1| + |g_2|) \quad (x \rightarrow a)$$

und

$$f_1 \cdot f_2 = \mathcal{O}(g_1) \cdot \mathcal{O}(g_2) = \mathcal{O}(g_1 \cdot g_2) \quad (x \rightarrow a)$$

ist, und analog für das Klein- o -Symbol. Ist andererseits $g_2 = \mathcal{O}(g_1) \quad (x \rightarrow a)$, dann können wir $\mathcal{O}(g_1) + \mathcal{O}(g_2) = \mathcal{O}(g_1) \quad (x \rightarrow a)$ schreiben.

Ebenso folgt mit der mengentheoretischen Interpretation des \mathcal{O} -Symbols aus $f_1 - f_2 = \mathcal{O}(g)$

$$f_1 = f_2 + \mathcal{O}(g) \quad (x \rightarrow a).$$

Beispielsweise kann man mit Beispiel 3.2.2 schreiben:

$$\sin(x) = x + \mathcal{O}(x^3) \quad (x \rightarrow 0).$$

Analog schreibt man $f_1 = f_2 + o(g)$ statt $f_1 - f_2 = o(g)$.

3.2 Die Taylor-Formel

In der Taylor-Formel wird eine reelle Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ bei $a \in D \subseteq \mathbb{R}$ durch ein geeignetes Polynom p approximiert und die Differenz $f - p$ abgeschätzt.

Als Vorübung betrachten wir den Fall, dass f selbst ein reelles Polynom, also Element des Vektorraumes $\mathbb{R}[x]$ ist. Dieser besitzt die Basis $(b_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ mit $b_k(x) := x^k$. Wir können also $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ mit dem Koeffizienten $a_k \in \mathbb{R}$ in der Form $f = \sum_{k=0}^n a_k b_k$ schreiben.

Stattdessen wollen wir für $a \in \mathbb{R}$ die neue Basis $(b_{a,k})_{k \in \mathbb{N}_0}$ von $\mathbb{R}[x]$ mit $b_{a,k}(x) := (x - a)^k$ verwenden, also f in der Form

$$f = \sum_{k=0}^m c_k b_{a,k} \quad \text{mit Koeffizienten } c_k \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$

schreiben. Wie bestimmen wir diese? Dazu stellen wir fest, dass die ℓ -te Ableitung des Polynoms $b_{a,k}$ die Form $b_{a,k}^{(\ell)}(x) = \prod_{i=0}^{\ell-1} (k - i) (x - a)^{k-\ell}$ besitzt, also insbesondere $b_{a,k}^{(\ell)} = 0$ ist für $\ell > k$. Außerdem ist $b_{a,k}^{(\ell)}(a) = \delta_{k,\ell} k!$ mit der Kroneckerschen Deltafunktion δ . Bilden wir also die ℓ -te Ableitung von (3.1), dann ergibt sich

$$f^{(\ell)}(a) = \ell! c_\ell.$$

Daraus folgt für die Koeffizienten in (3.1)

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \quad (k \in \mathbb{N}_0).$$

Dies verallgemeinert sich folgendermaßen:

3.3 Satz (Taylor-Formel) *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $n \in \mathbb{N}_0$ und $a \in I$.*

1. Dann gilt für alle $f \in C^n(I)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n) \quad (x \rightarrow a). \quad (3.2)$$

2. Für alle $f \in C^{n+1}(I)$ ist das Restglied

$$R_{n+1} : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad R_{n+1}(x) := f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

von der Form $R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-y)^n f^{(n+1)}(y) dy$.

3. In diesem Fall gibt es für alle $x \in I$ ein $\xi = \xi(x)$ zwischen a und x mit der sog. **Lagrange-Form** des Restgliedes

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}. \quad (3.3)$$

Beweis:

- Wir beweisen zunächst für $\ell \in \mathbb{N}$ und $f \in C^\ell(I)$ die Restgliedformel

$$R_\ell(x) = \frac{1}{(\ell-1)!} \int_a^x (x-y)^{\ell-1} f^{(\ell)}(y) dy, \quad (3.4)$$

aus der für $\ell := n+1$ sofort Teil 2. des Satzes folgt.

(3.4) reduziert sich für $\ell = 1$ auf die Aussage

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(y) dy,$$

also den Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung.

Für $m \in \{1, \dots, \ell-1\}$ ist $f \in C^m(I) \subset C^\ell(I)$. Also gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$R_m(x) = \frac{1}{(m-1)!} \int_a^x (x-y)^{m-1} f^{(m)}(y) dy.$$

Mit partieller Integration ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} R_m(x) &= -\frac{1}{m!} (x-y)^m f^{(m)}(y) \Big|_a^x + \frac{1}{m!} \int_a^x (x-y)^m f^{(m+1)}(y) dy \\ &= \frac{f^{(m)}(a)}{m!} (x-a)^m + \frac{1}{m!} \int_a^x (x-y)^m f^{(m+1)}(y) dy. \end{aligned}$$

Also ist $R_{m+1}(x) = \frac{1}{m!} \int_a^x (x-y)^m f^{(m+1)}(y) dy$, woraus sich durch Induktion nach m (3.4) ergibt.

- Für $x \geq a$ und

$$f_{\min}^{(n+1)} := \inf\{f^{(n+1)}(y) \mid y \in [a, x]\}, \quad f_{\max}^{(n+1)} := \sup\{f^{(n+1)}(y) \mid y \in [a, x]\}$$

gilt

$$\frac{1}{n!} \int_a^x (x-y)^n f_{\min}^{(n+1)} dy \leq R_{n+1}(x) \leq \frac{1}{n!} \int_a^x (x-y)^n f_{\max}^{(n+1)} dy,$$

oder nach Auswertung der Integrale

$$\frac{f_{\min}^{(n+1)}}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \leq R_{n+1}(x) \leq \frac{f_{\max}^{(n+1)}}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}.$$

Da $f^{(n+1)}$ stetig ist, gibt es ein $\xi \in [a, x]$, das (3.3) erfüllt. Der Fall $x \leq a$ lässt sich analog behandeln. Damit ist Teil 3. des Satzes bewiesen.

- Unter der Voraussetzung $f \in C^n(I)$ von 1. ist damit

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi(x))}{n!} (x-a)^n.$$

Wegen der Stetigkeit von $f^{(n)} : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $\lim_{x \rightarrow a} \xi(x) = a$ ist aber

$$f^{(n)}(\xi(x)) = f^{(n)}(a) + o(1) \quad (x \rightarrow a),$$

also $R_n(x) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + o((x-a)^n)$. Daher ist $R_{n+1}(x) = o((x-a)^n)$, was Teil 1. des Satzes beweist. \square

3.4 Bemerkungen (Taylor-Formel)

1. Manchmal nennt man Teil 1. des Satzes 3.3 die **qualitative**, Teil 2. die **quantitative** Taylor-Formel.
2. Aus Letzterer folgt die Aussage

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \mathcal{O}((x-a)^{n+1}).$$

Diese ist präziser als (3.2), denn

$$(x-a)^{n+1} = o((x-a)^n) \quad (x \rightarrow a),$$

aber nicht umgekehrt. Man muss allerdings bedenken, dass in Teil 2. von Satz 3.3 die $(n+1)$ -malige stetige Differenzierbarkeit von f verlangt wird, während Teil 1. nur n -fache stetige Differenzierbarkeit voraussetzt. \diamond

Setzen wir für $f \in C^n(I)$ und $a \in I$

$$T_{a,n}f \in \mathbb{R}[x] \quad , \quad T_{a,n}f(x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k,$$

dann ist dieses *Taylor-Polynom n -ter Ordnung von f* ein Polynom vom Grad

$$\deg(T_{a,n}f) \leq n.$$

Wir erhalten so eine lineare Abbildung

$$T_{a,n} : C^n(I) \rightarrow \mathbb{R}[x].$$

3.3 Taylor-Reihen

Was können wir nun über die einem glatten $f \in C^\infty(I)$ zugeordnete *Taylor-Reihe* mit *Entwicklungspunkt a*

$$T_a f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k,$$

einer Potenzreihe in der Variablen $z = x - a$ aussagen? Zunächst muss für $z \neq 0$, d.h. $x \neq a$ diese Potenzreihe nicht einmal konvergieren. Die Zahlenreihe $T_a f(x)$ konvergiert genau dann, wenn die Folge $(R_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ der Restglieder eine Nullfolge ist.

Selbst wenn die Potenzreihe $T_a f$ konvergiert, braucht sie in keinem Sinn gegen f zu konvergieren.

3.5 Beispiele (Taylor-Reihen) 1. Für $f(x) := \ln(x)$, also $f \in C^\infty((0, \infty), \mathbb{R})$ und den Entwicklungspunkt $a := 1$ ist $T_a f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x-1)^k$, also

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$$

Diese Potenzreihe in z hat den Konvergenzradius 1, sodass gilt:

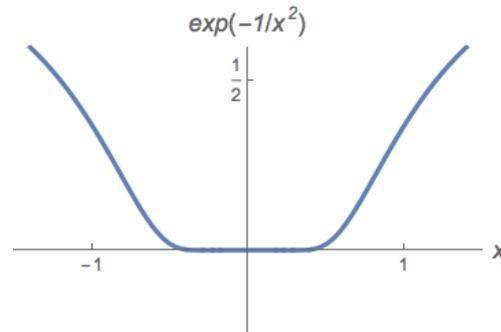
$$(T_a \ln)(x) = \ln(x) \quad (x \in (0, 2)).$$

2. Wie in FORSTER [Fo], (22.2) gezeigt,

besitzt die Funktion $f \in C_{\mathbb{R}}^{\infty}(\mathbb{R})$,

$$f(x) := \begin{cases} \exp(-1/x^2) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

im Entwicklungspunkt $a = 0$ die Taylor-Reihe $T_0 f = 0$. Damit ist für alle $x \neq 0$ der Wert $T_0 f(x) = 0$ ungleich $f(x)$.



Dieses auf Cauchy zurückgehende Beispiel zeigt also, dass nicht jede glatte Funktion mit ihrer Taylor-Reihe übereinstimmt. \diamond

In welchem Verhältnis stehen nun glatte Funktionen und ihre Taylor-Reihen?

3.6 Definition Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f \in C_{\mathbb{R}}^{\infty}(I)$.

f heißt **reell-analytisch**, wenn für alle $a \in I$ die Taylor-Reihe $T_a f$ auf einer Umgebung $(a - \delta, a + \delta)$ von a konvergiert und dort mit f übereinstimmt.

Die in Beispiel 3.5.2 diskutierte Funktion ist nicht reell-analytisch, da bei $a = 0$ ihre Taylor-Reihe $T_0 f = 0$ in keiner Umgebung von a mit f übereinstimmt. Denn f erfüllt das folgende Kriterium nicht (siehe auch [Hi], Band 1, Kap. 3.13):

3.7 Satz

$f \in C_{\mathbb{R}}^{\infty}(I)$ ist reell-analytisch, falls für alle $a \in I$ Konstanten $C > 0$ und $r > 0$ existieren mit

$$|f^{(n)}(a)| \leq C r^n n! \quad (n \in \mathbb{N}_0), \quad (3.5)$$

und $C = C(a)$ wie auch $r = r(a)$ stetig in a gewählt werden können.⁵

Beweis:

Für $\delta > 0$ und $x \in I \cap (a - \delta, a + \delta)$ schätzen wir die Differenz zwischen $f(x)$ und den Partialsummen der Taylor-Reihe $T_a f$ an der Stelle x ab. Es sei dabei $\delta > 0$ so klein gewählt, dass $k := \delta \cdot \sup\{r(x) \mid |x - a| < \delta\} < 1$ ist (das ist wegen der Stetigkeit von r möglich). Nach (3.5) gilt dann unter Benutzung von (3.3)

$$|f(x) - T_{a,n} f(x)| = |f^{(n+1)}(\xi)| \cdot \frac{|x - a|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \tilde{C} k^{n+1} \quad (|x - a| < \delta) \quad (3.6)$$

mit $\tilde{C} := \sup\{C(x) \mid |x - a| < \delta\}$. Die rechte Seite von (3.6) geht für $n \rightarrow \infty$ gegen Null, da $k \in [0, 1)$ ist. \square

⁵Eigentlich kommt es darauf an, dass sie lokal beschränkt gewählt werden können; das folgt aus ihrer Stetigkeit.

3.8 Bemerkungen 1. Man beachte, dass (abhängig davon, ob $r > 1$ ist) die Ableitungen $f^{(n)}(a)$ nach (3.5) betragsmäßig eventuell noch schneller als die Fakultät von n anwachsen dürfen, ohne die Analytizität von f zu verletzen. Im Fall von $f(x) = \ln(x)$ aus Beispiel 3.5.1 ist immerhin

$$f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}(n-1)! \quad (n \in \mathbb{N}).$$

2. Die Funktionen $a \mapsto C(a)$ und $a \mapsto r(a)$ können schon im Fall von Polynomen f nicht beschränkt gewählt werden. Für $f(x) := x$ muss $C(x) \geq |x|$ sein, um (3.5) zu erfüllen.

3. In Beispiel 3.5.2 sind die Ableitungen von der Form

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} p_n(1/x)f(x) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

wobei die p_n Polynome vom Grad $3n$ sind. Deren Wachstum für $x \rightarrow 0$ sorgt dafür, dass das Analytizitätskriterium des Satzes 3.7 für $a = 0$ verletzt ist. \diamond

3.9 Satz

Der Konvergenzradius R der reellen Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ sei positiv. Dann ist f auf dem Konvergenzintervall $(-R, R)$ reell-analytisch, und es gilt

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{k!} a_{k+n} x^k \quad (|x| < R, \quad n \in \mathbb{N}_0). \quad (3.7)$$

Man kann Potenzreihen also gliedweise differenzieren.

Beweis: • Um die Identität (3.7) zu beweisen, genügt es, die erste Ableitung von f zu berechnen, also (3.7) für $n = 1$ zu zeigen. Dazu müssen wir den Konvergenzradius der Potenzreihe $g(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_{k+1}x^k$ bestimmen. Nach der Hadamard-Formel (Satz 8.27 der *Analysis I*) ist dieser der Kehrwert von

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_{n+1}|} = 1/R,$$

denn $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$. Der Konvergenzradius ändert sich bei gliedweiser Ableitung also nicht.

Für jedes $\tilde{R} \in (0, R)$ konvergieren die Partialsummen

$$g_n(x) := \sum_{k=0}^n (k+1)a_{k+1}x^k \quad \text{von} \quad g(x)$$

auf dem kompakten Intervall $\tilde{I} := [-\tilde{R}, \tilde{R}]$ gleichmäßig gegen g . Als konvergente Potenzreihe ist g stetig, und damit auf \tilde{I} gleichmäßig stetig. Damit gilt für den Differenzenquotienten von $f|_{\tilde{I}}$

$$\begin{aligned} \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x+\varepsilon) - f_n(x))}{\varepsilon} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \int_x^{x+\varepsilon} g_n(y) dy}{\varepsilon} \\ &= \frac{\int_x^{x+\varepsilon} (\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(y)) dy}{\varepsilon} = \frac{\int_x^{x+\varepsilon} g(y) dy}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Integration und Limesbildung können dabei wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $(g_n|_{\tilde{I}})_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $g|_{\tilde{I}}$ vertauscht werden. Damit ist

$$f'(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_x^{x+\varepsilon} g(y) dy = g(x),$$

denn g ist ja stetig. Also haben wir (3.7) gezeigt.

• Nun untersuchen wir die Taylor-Reihe $T_a f$ von f im Entwicklungspunkt $a \in I := (-R, R)$ darauf, ob wir wie in der Voraussetzung des Satzes 3.7 in a stetige $C(a)$ und $r(a) > 0$ finden können.

Um diese komplizierte Abschätzung etwas zu vereinfachen, stellen wir fest, dass es ein $q \in (0, 1)$ und ein $\tilde{C} > 0$ gibt, mit denen wir die Summanden der Potenzreihe f durch die geometrische Reihe dominieren können:

$$|a_n x^n| \leq \tilde{C} q^n \quad (x \in \tilde{I}, n \in \mathbb{N}_0). \quad (3.8)$$

Wäre dem nicht so, dann gäbe es ein $x \in \tilde{I}$, $x \neq 0$ mit

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n| \left| \frac{x}{q} \right|^n = \infty \quad (q \in (0, 1)).$$

Die Potenzreihe $f(y)$ würde für kein $y \in I \setminus \tilde{I}$ konvergieren, denn es gäbe ein $q \in (0, 1)$ mit $|y| = \frac{x}{q}$.

• (3.8) ist für uns nützlich, denn mit der geometrischen Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ lässt sich einfach rechnen. Nach dem oben bewiesenen können wir sie ℓ -fach gliedweise differenzieren: Für alle $\ell \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+\ell)!}{n!} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^\ell}{dq^\ell} q^n = \frac{d^\ell}{dq^\ell} \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{d^\ell}{dq^\ell} \frac{1}{1-q} = \frac{\ell!}{(1-q)^{\ell+1}}. \quad (3.9)$$

• Nun ist für $a \in \tilde{I} = [-\tilde{R}, \tilde{R}]$ mit (3.8) und (3.9)

$$\begin{aligned} |f^{(\ell)}(a)| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+\ell)!}{n!} a_{n+\ell} a^n \right| \leq \frac{1}{\tilde{R}^\ell} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+\ell)!}{n!} |a_{n+\ell} \tilde{R}^{n+\ell}| \\ &\leq \frac{\tilde{C}}{\tilde{R}^\ell} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+\ell)!}{n!} q^{n+\ell} = \frac{\tilde{C} q^\ell}{\tilde{R}^\ell} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+\ell)!}{n!} q^n = \frac{\tilde{C} q^\ell \ell!}{\tilde{R}^\ell (1-q)^{\ell+1}}. \end{aligned}$$

Die Taylor-Reihe f erfüllt damit das Analytizitätskriterium (3.5), mit $C := \frac{\tilde{C}}{1-q}$ und $r := \frac{q}{R(1-q)}$. \square

Wir haben also bewiesen, dass für Taylor-Reihen f und einen beliebigen Entwicklungspunkt a im Konvergenzintervall gilt: $f(x) = T_a f(x)$.

4 Kurven in der Ebene und im Raum

Wir beginnen mit der mehrdimensionalen Differentialrechnung, indem wir den einfachsten Fall herausgreifen, den der Kurven im \mathbb{R}^n .

4.1 Reguläre und nicht reguläre Kurven

4.1 Definition

- *Stetige Abbildungen* $c = (c_1, \dots, c_n)^t : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, deren Definitionsbereich I ein Intervall (mit $I \neq \{a\}$) ist, heißen **Kurven im \mathbb{R}^n** .
- $t \in I$ heißt der **Parameter** von c , ihr Bild $c(I) \subseteq \mathbb{R}^n$ auch die **Spur von c** .
- c heißt **k -mal (stetig) differenzierbar**, wenn alle Komponenten c_1, \dots, c_n **k -mal (stetig) differenzierbar** sind.
- Die Menge der k -mal stetig differenzierbaren Kurven $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ wird mit $C^k(I, \mathbb{R}^n)$ bezeichnet und man setzt $C(I, \mathbb{R}^n) := C^0(I, \mathbb{R}^n)$.
- Eine stetig differenzierbare Kurve heißt **regulär**, wenn ihre **Ableitung oder Geschwindigkeit**

$$c' : I \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad c'(t) := \begin{pmatrix} c'_1(t) \\ \vdots \\ c'_n(t) \end{pmatrix} \quad (t \in I)$$

für alle $t \in I$ ungleich Null ist.

Nach Satz 7.32 der *Analysis 1* ist die Existenz der Ableitung der Kurve bei t

$$c'(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{c(t+\delta) - c(t)}{\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \frac{c_1(t+\delta) - c_1(t)}{\delta} \\ \vdots \\ \frac{c_n(t+\delta) - c_n(t)}{\delta} \end{pmatrix}$$

gleichbedeutend mit der Existenz der Ableitungen $c'_k(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{c_k(t+\delta) - c_k(t)}{\delta}$ aller Komponenten c_k von c .

In physikalischem Zusammenhang ist oft die Zeit Parameter der Kurve.

4.2 Beispiel (Kurven) 1. Die Kurve $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $c(t) := x + vt$ für $x, v \in \mathbb{R}^2$ ist eine Gerade durch x mit der Richtung v , siehe Abbildung 4.1.

Ihre Spur unterscheidet sich nicht von der Spur der Kurve

$$d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad , \quad d(t) := x + vt^3.$$

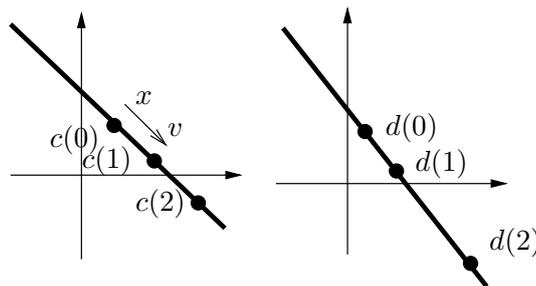
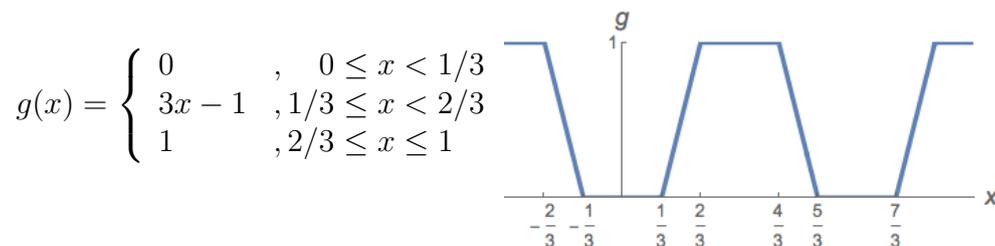


Abbildung 4.1: Zwei Kurven mit gleicher Spur

2. Der Graph einer C^k -Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ist Bild der C^k -Kurve

$$c : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad , \quad c(t) := \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

3. Es sei $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ die gerade 2-periodische Funktion mit



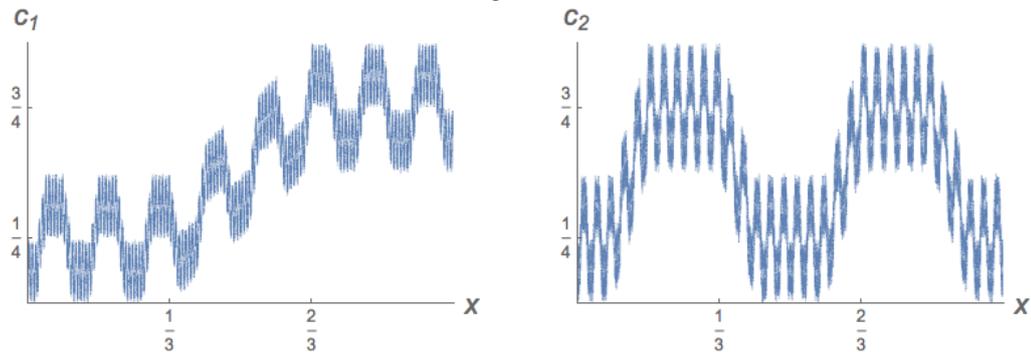
(siehe nebenstehende Abbildung) und $c : [0, 4/3] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$c(x) := \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{g(4^{2k}x)}{2^{k+1}}, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g(4^{2k+1}x)}{2^{k+1}} \right)^t.$$

Dann sind die Komponenten c_i ($i = 1, 2$) von c als gleichmäßige Limiten der Folgen 2-periodischer stetiger Funktionen $c_{i,n} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$c_{1,n}(x) := \sum_{k=0}^n \frac{g(4^{2k}x)}{2^{k+1}} \quad , \quad c_{2,n}(x) := \sum_{k=0}^n \frac{g(4^{2k+1}x)}{2^{k+1}} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

nach dem Weierstraß-Kriterium⁶ stetig.

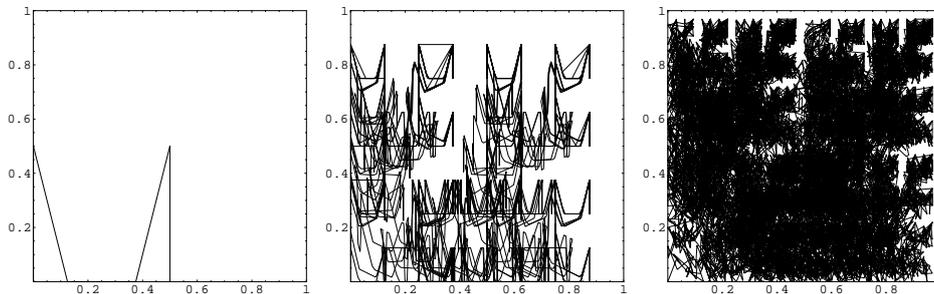


Das Bild (= die Spur) der Kurve c ist aber $c([0, 4/3]) = [0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$, denn der Punkt $(y, z) \in [0, 1] \times [0, 1]$ ist Bild von $x := \sum_{k=0}^{\infty} a_k 4^{-k} \in [0, 4/3]$, falls

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} 2^{-k-1} \quad , \quad z = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} 2^{-k-1}$$

Binärdarstellungen von y und z sind, mit $a_k \in \{0, 1\}$. Versuchen Sie, dies selbst zu beweisen. **Tip:** Für $x = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell} 4^{-\ell}$ ist $x \in [0, 4/3]$ und

$$g(4^r x) = g\left(\sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell} 4^{r-\ell}\right) = g\left(a_r + \sum_{\ell=r+1}^{\infty} a_{\ell} 4^{r-\ell}\right) = g(a_r) = a_r.$$



Die Spuren der Kurven $(c_{1,n}, c_{2,n})$ für $n = 0$ (links), $n = 2$ (Mitte) und $n = 4$ (rechts)

Die Existenz solcher das Quadrat ausfüllender *Peano-Kurven* war ein Schock für die Mathematiker, da das Bild eine größere Dimension als das Urbild hat. Ein ähnliches Phänomen ist bei der *Koch-* oder *Schneeflockenkurve*, siehe Abb. 4.2 zu beobachten.

Versucht man, derartigen Kurven eine Länge zuzuordnen, indem man sie durch Polygonzüge approximiert und den Limes der Länge dieser Polygonzüge bildet, so ergibt sich eine unendliche Länge. c heißt dann *nicht rektifizierbar*.

Im Gegensatz dazu ist für "vernünftige" Kurven die Länge zwischen zwei Punkten endlich. \diamond

⁶**Satz (Weierstraß):** Der Limes einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen ist stetig. Beweis: Siehe z.B.: FORSTER [Fo], §21.

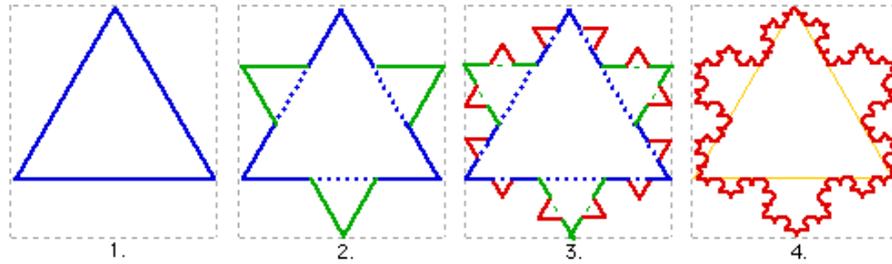


Abbildung 4.2: Konstruktion der Koch-Kurve (rechts)

4.3 Definition Eine C^1 -Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ hat die **Länge**

$$L(c) := \int_I \|c'(t)\| dt = \int_I \sqrt{c_1'(t)^2 + \dots + c_n'(t)^2} dt.$$

Diese Längendefinition entspricht in der physikalischen Analogie der Länge als Zeitintegral über den Geschwindigkeitsbetrag.

Wie Beispiel 4.2.1. zeigt, kann $L(c) = \infty$ vorkommen, aber

4.4 Satz Die Länge $L(c)$ einer C^1 -Kurve $c : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist endlich.

Beweis:

Die Abbildung $[t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \|c'(t)\|$ ist stetig, besitzt also ein endliches Supremum v auf dem Kompaktum $[t_0, t_1]$. Daher ist $L(c) \leq (t_1 - t_0)v$. \square .

Die Spur einer C^1 -Kurve muss nicht glatt aussehen, wenn c nicht regulär ist.

4.5 Beispiel Die *Zykloiden* mit Parametern $a, b > 0$

$$c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad c(t) := \begin{pmatrix} bt - a \sin t \\ b - a \cos t \end{pmatrix}$$

bilden eine Kurvenfamilie, die zwischen Kreislinien ($b = 0$) und Geraden ($a = 0$) interpoliert.

Genau im Fall $a = b$ ist die Kurve nicht regulär, denn dann ist $c'(2\pi n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Die Spur von c ist dort nicht glatt, denn $c'(t) = a \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ besitzt den Betrag $\|c'(t)\| = a\sqrt{2(1 - \cos t)}$, sodass $\lim_{\delta \searrow 0} \frac{c'(2\pi n \pm \delta)}{\|c'(2\pi n \pm \delta)\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mp 1 \end{pmatrix}$ ist.

Der Fall $a < b$ entspricht der Bahn eines an den Fahrradspeichen angebrachten Reflektors. \diamond

4.2 Wechsel der Parametrisierung

Die Länge einer (injektiven) C^1 -Kurve sollte nur von ihrem Bild, nicht von ihrer Parametrisierung abhängen. Um dies nachzuprüfen, betrachten wir Parametertransformationen:

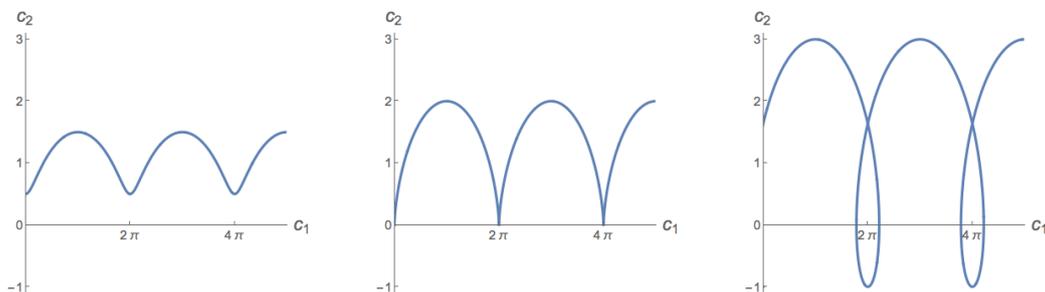


Abbildung 4.3: Zykloiden für Parameter $b = 1$ und $a = 0.5$ (links), $a = 1$ (Mitte) und $a = 2$ (rechts)

4.6 Definition Es seien $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\tilde{c} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei C^1 -Kurven, und $\varphi : \tilde{I} \rightarrow I$ ein **Diffeomorphismus** (d.h. eine bijektive C^1 -Abbildung, deren Umkehrung auch eine C^1 -Abbildung ist).

\tilde{c} geht aus c durch die **Parametertransformation** φ hervor, wenn $\tilde{c} = c \circ \varphi$.

Nun muss auf \tilde{I} das Vorzeichen von φ' konstant sein, denn sonst würde die stetige Funktion $\varphi' : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}$ nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle $t \in \tilde{I}$ besitzen und die Umkehrfunktion φ^{-1} könnte nicht differenzierbar sein.

Ist $\text{sign}(\varphi') = 1$, dann heißt φ **orientierungserhaltend**, für $\text{sign}(\varphi') = -1$ **orientierungsumkehrend**.

4.7 Satz Für c, \tilde{c} und φ wie oben und $\tilde{I} = [t_0, t_1]$ ist $L(c) = L(\tilde{c})$.

Beweis:

$$\begin{aligned} L(\tilde{c}) &= \int_{t_0}^{t_1} \|\tilde{c}'(t)\| dt = \int_{t_0}^{t_1} \left\| \frac{d}{dt} c(\varphi(t)) \right\| dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \|c'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\| dt = \int_{t_0}^{t_1} \|c'(\varphi(t))\| \left| \frac{d\varphi}{dt}(t) \right| dt \\ &= \text{sign}(\varphi') \int_{\varphi(t_0)}^{\varphi(t_1)} \|c'(s)\| ds = L(c). \end{aligned}$$

□

4.8 Definition Gilt $\|c'(t)\| = 1$ für alle $t \in I$, dann ist die C^1 -Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch die **Bogenlänge parametrisiert**.

Der Vorteil dieser Parametrisierung liegt in ihrer geometrischen Natürlichkeit, die zu einfacheren Formeln führt.

4.9 Satz Jede reguläre Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ kann durch die Bogenlänge parametrisiert werden, d.h. es gibt eine Parametertransformation $\varphi : \tilde{I} \rightarrow I$, sodass die Kurve $c \circ \varphi$ durch die Bogenlänge parametrisiert ist.

Beweis: Es sei für ein beliebig gewähltes $t_0 \in I$

$$\psi(t) := \int_{t_0}^t \|c'(\tau)\| d\tau \quad (t \in I) \quad \text{und} \quad \tilde{I} := \psi(I).$$

Wegen der Stetigkeit des Integranden ist $\psi \in C^1(I, \tilde{I})$, und es gilt $\psi'(t) = \|c'(t)\| > 0$, also für $\varphi := \psi^{-1}$

$$\varphi'(\psi(t)) = \frac{1}{\psi'(t)} = \frac{1}{\|c'(t)\|} \quad (t \in I).$$

Damit gilt für alle $s \in \tilde{I}$ nach der Kettenregel

$$\left\| \frac{d}{ds}(c \circ \varphi)(s) \right\| = \|c'(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s)\| = 1,$$

$\tilde{c} := c \circ \varphi : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist also durch die Bogenlänge parametrisiert. □

4.3 Krümmung einer Kurve

Zwei reguläre Kurven $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\tilde{c} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ können sich an einem Punkt $c(t_0) = \tilde{c}(\tilde{t}_0)$ schneiden. Ihr *Schnittwinkel* ist dann als der Winkel $\varphi \in [0, \pi]$ mit

$$\cos \varphi = \frac{\langle c'(t_0), \tilde{c}'(\tilde{t}_0) \rangle}{\|c'(t_0)\| \cdot \|\tilde{c}'(\tilde{t}_0)\|}$$

gegeben, entspricht also dem Winkel zwischen den Geschwindigkeitsvektoren, siehe Abbildung 4.4.

Eine reguläre C^2 -Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ besitzt die *Richtung* $\frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}$ bei $t \in I$, und diese ändert sich mit t . Die Geschwindigkeit dieser Richtungsänderung muss etwas mit der *Beschleunigung* $c''(t)$ zu tun haben.

Wir betrachten zunächst Kurven in der Ebene.

4.10 Satz Ist $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine reguläre C^2 -Kurve und $\varphi(t)$ der Winkel zwischen $c'(t)$ und der 1-Richtung, dann ist

$$\varphi'(t) = \frac{c_2''(t)c_1'(t) - c_1''(t)c_2'(t)}{\|c'(t)\|^2} \quad (t \in I).$$

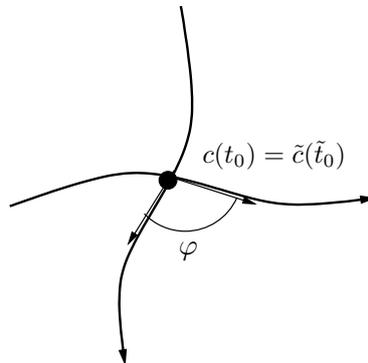


Abbildung 4.4: Winkel zwischen den Geschwindigkeitsvektoren

Beweis: Es ist für $c'_1(t) \neq 0$

$$\tan(\varphi(t)) = \frac{c'_2(t)}{c'_1(t)}, \text{ also } \frac{d}{dt} \tan \varphi(t) = \frac{c''_2(t)c'_1(t) - c'_1(t)c''_2(t)}{(c'_1(t))^2}$$

und

$$\frac{d}{d\varphi} \tan(\varphi) = 1 + \tan^2(\varphi) = \frac{(c'_1)^2 + (c'_2)^2}{(c'_1(t))^2},$$

woraus die Formel wegen

$$\varphi'(t) = \frac{\frac{d}{dt} \tan \varphi(t)}{\frac{d}{d\varphi} \tan \varphi(t)}$$

folgt. Für $c'_1(t) = 0$ ist $c'_2(t) \neq 0$, und man benutzt den Cotangens. □

Wir definieren nun die Krümmung als die *Richtungsänderung* pro Bogenlänge:

4.11 Definition

Die **Krümmung** der regulären C^2 -Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ bei $t \in I$ ist

$$k(t) := \frac{\varphi'(t)}{\|c'(t)\|}.$$

Damit ergibt sich aus Satz 4.10

$$k(t) = \frac{c''_2(t)c'_1(t) - c'_1(t)c''_2(t)}{\|c'(t)\|^3}.$$

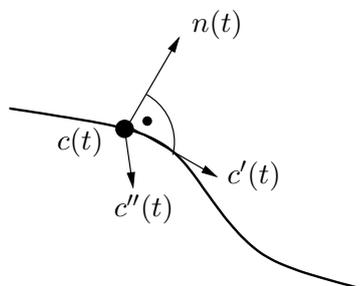
$J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist die Matrix einer Drehung um $\pi/2$. Der Normalenvektor

$$n(t) := J \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}$$

steht damit senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor $c'(t)$ und hat die Länge 1.

Damit ist die Krümmung proportional zur Beschleunigung in Normalenrichtung:

$$k(t) = \frac{\langle c''(t), n(t) \rangle}{\|c'(t)\|^2}.$$



4.12 Bemerkungen

1. Bei nach Bogenlänge parametrisierten Kurven ist der Nenner gleich Eins, also $k(t) = \langle c''(t), n(t) \rangle$. Zusätzlich ist die tangentielle Beschleunigungskomponente

$$\langle c''(t), c'(t) \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle c'(t), c'(t) \rangle = \frac{d}{dt} 1 = 0,$$

also die Krümmung betragsmäßig gleich der Beschleunigung:

$$|k(t)| = \|c''(t)\|.$$

2. Bei Änderung der regulären Parametrisierung von $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, d.h. für $\tilde{c} := c \circ \psi : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^2$ für $\psi : \tilde{I} \rightarrow I$, gilt für die Krümmung von \tilde{c}

$$k_{\tilde{c}}(s) = \text{sign}(\psi') k_c(\psi(s)) \quad (s \in \tilde{I}).$$

Es wird also die Krümmung von c nur mit dem (konstanten) Vorzeichen der Ableitung ψ' der Parametertransformation multipliziert, denn so transformiert sich der Normalenvektor n . Der Betrag der Krümmung ändert sich aber nicht.

◇

Geschlossenen regulären Kurven in der Ebene kann man mit der Windungszahl eine *topologische Invariante* zuordnen, d.h. eine Zahl, die sich bei kleinen Deformationen der Kurve nicht ändert:

4.13 Satz Es sei $c \in C^2([a, b], \mathbb{R}^2)$ eine nach Bogenlänge parametrisierte **geschlossene** Kurve, d.h.

$$c(b) = c(a) \quad , \quad c'(b) = c'(a) \quad \text{und} \quad c''(b) = c''(a).$$

Dann ist die *Windungszahl* (auch **Rotationsindex** genannt)

$$I(c) := (2\pi)^{-1} \int_a^b k(t) dt$$

eine ganze Zahl.

Beweis: Nach Definition ist $\int_a^b k(t) dt = \int_a^b \varphi'(t) dt = \varphi(b) - \varphi(a)$. Da $(\text{mod } 2\pi)$ diese Winkel übereinstimmen (man setzt hier φ stetig fort!), ist $I(c) \in \mathbb{Z}$. \square

Für beliebig regulär parametrisierte geschlossene Kurven setzt man $I(c) := \frac{1}{2\pi} \int_a^b k(t) \|c'(t)\| dt$, was die Definition nach Bemerkung 4.12.2 invariant bezüglich orientierungserhaltender Transformationen macht.

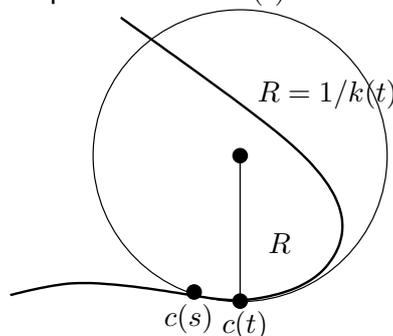
4.14 Beispiel 1. Für den im mathematisch positiven bzw negativen Sinn $n \in \mathbb{N}$ -mal durchlaufenen Kreis $c_{\pm}(t) := \begin{pmatrix} R \cos t \\ \pm R \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi n]$ vom Radius $R > 0$ ist $c'_{\pm}(t) = \begin{pmatrix} -R \sin t \\ \pm R \cos t \end{pmatrix}$ und $c''_{\pm}(t) = -c(t)$, also die Krümmung gleich $k_{\pm}(t) = \frac{\pm R^2}{R^3} = \frac{\pm 1}{R}$. Damit ist die Windungszahl

$$I(c_{\pm}) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi n} k_{\pm}(t) \|c'_{\pm}(t)\| dt = \pm n.$$

2. Ist die Spur $c(I)$ der (bis auf Anfangs- und Endpunkt) injektiven Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ von der Form ∞ , dann ist der Rotationsindex $I(c) = 0$.

Beispiel 4.14.1. legt eine weitere geometrische Interpretation von $k(t)$ nahe.

Sei nämlich $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ irgendeine reguläre C^2 -Kurve, deren Krümmung bei $t \in I$ nicht verschwindet. Dann ist $|k(t)|$ gleich dem inversen Radius des *Schmiegekreises* bei t , also des eindeutig bestimmten Kreises, der die Kurve bei $c(t)$ tangential berührt, und dessen Abstand von $c(s)$ von der Ordnung $\mathcal{O}(|s - t|^3)$ ist. \diamond



Die Verallgemeinerung des Krümmungsbegriffes auf Kurven im \mathbb{R}^n ist möglich:

4.15 Definition Eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $c \in C^2([a, b], \mathbb{R}^n)$ besitzt die (betragsmäßige) **Krümmung** $\|c''(t)\|$.

Nach Bemerkung 4.12.1. stimmt $\|c''(t)\|$ für $n = 2$ mit $|k(t)|$ überein.

Ist eine reguläre C^2 -Kurve c selbst nicht nach Bogenlänge parametrisiert, so definiert man ihre Krümmung durch die einer nach Bogenlänge umparametrisierten Kurve (Die Wahl von Anfangspunkt und Orientierung spielen dabei keine Rolle!).

4.16 Beispiel Für Parameter $R, b > 0$ besitzt die Kurve

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad c(t) = \begin{pmatrix} R \cos t \\ R \sin t \\ bt \end{pmatrix}$$

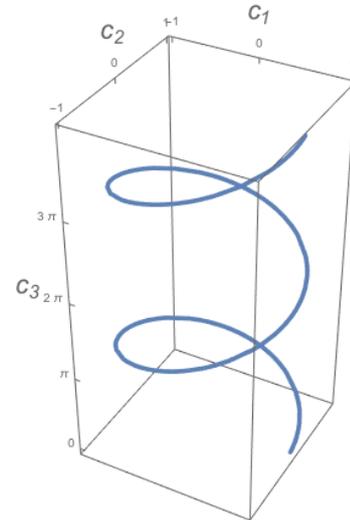
die Ableitungen $c'(t) = \begin{pmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \\ b \end{pmatrix}$, sodass der Betrag der Geschwindigkeit konstant wird:
 $\|c'(t)\| = \sqrt{R^2 + b^2}$.

Die Beschleunigung ist $c''(t) = \begin{pmatrix} -R \cos t \\ -R \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$, also $\|c''(t)\| = R$ und $\langle c''(t), c'(t) \rangle = 0$. Damit ist die Krümmung

$$k(t) = \frac{\|c''(t)\|}{\|c'(t)\|^2} = \frac{R}{R^2 + b^2} > 0.$$

Die Krümmung der *Helix* (Spirale) c ist also kleiner als die Krümmung $1/R$ des Kreises mit gleichem Radius R . \diamond

Die *Differentialgeometrie* befaßt sich mit der Krümmung von Kurven und analogen Fragen für höherdimensionale Objekte wie Flächen im \mathbb{R}^3 . Ein einführendes Buch ist das von DO CARMO [Ca].



5 Ableitung einer Abbildung vom \mathbb{R}^m in den \mathbb{R}^n

Im letzten Semester wurde die Differential- und Integralrechnung reeller Funktionen $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ (mit $U \subset \mathbb{R}$ offen) entwickelt. Die Differentialrechnung soll nun auf Funktionen $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $U \subset \mathbb{R}^m$ offen ausgeweitet werden.

Wir haben schon solche Abbildungen kennen gelernt:

- 5.1 Beispiel 1.** $U \subset \mathbb{R}$ Intervall, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Dies waren die parametrisierten *Kurven* im Raum.
2. $m = 2$, $n = 1$. Der Graph $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mid x \in U\}$ von f lässt sich als *Fläche über der Ebene* auffassen, siehe Abb. 5.1.

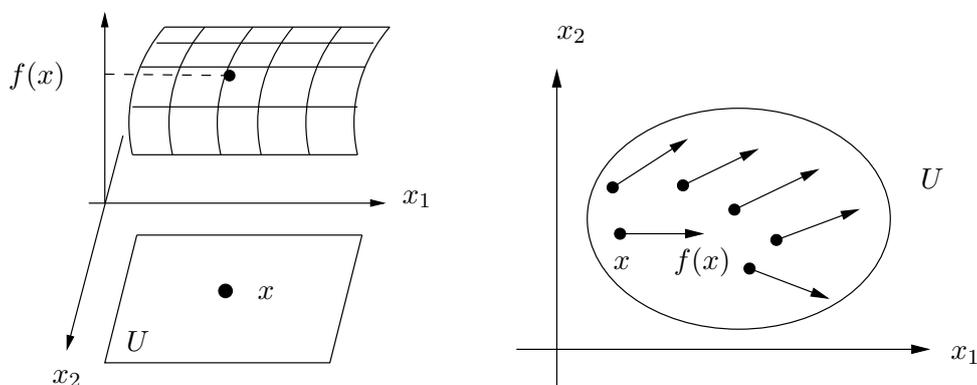


Abbildung 5.1: Links: Graph einer Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ für $U \subset \mathbb{R}^2$. Rechts: Ein Vektorfeld f auf $U \subset \mathbb{R}^2$

3. $m = n$. Hier nennt man f auch *Vektorfeld*, siehe Abb. 5.1 für $m = n = 2$.
4. $m, n \in \mathbb{N}$ beliebig, $n \times m$ -Matrix $A \in \text{Mat}(n \times m, \mathbb{R})$
Lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(x) := Ax$. ◇

5.2 Bemerkungen (Notationen in der mehrdimensionalen Analysis)

- Wenn keine Missverständnisse drohen, lässt man oft die Vektorpfeile weg. Diese Konvention werde ich verwenden. In der Literatur findet man stattdessen auch die Schreibweisen \vec{f} und \underline{f} .
- Allgemein lässt sich bezüglich der kanonischen Koordinaten des \mathbb{R}^n eine Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ als ein n -Tupel

$$f = (f_1, \dots, f_n)^t \quad \text{von Funktionen} \quad f_i : U \rightarrow \mathbb{R} \quad (5.1)$$

schreiben. Bequemlichkeitshalber lasse ich, wo dies nicht zu Missverständnissen führt, das Transpositionszeichen t weg, identifiziere also Zeilen- und Spaltenvektoren. \diamond

Wir sind insbesondere an *stetigen* Abbildungen interessiert.

5.3 Satz $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist genau dann stetig, wenn alle Koordinatenfunktionen $f_k : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sind.

Beweis: Nach Satz 9.4 der *Analysis I* ist f genau dann stetig in $x \in U$, wenn f folgenstetig in $x \in U$ ist, und analog sind die Komponenten f_k von f genau dann stetig in $x \in U$, wenn sie dort folgenstetig sind.

Es sei also $(a_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ eine gegen x konvergente Folge von $a_\ell = \begin{pmatrix} a_{\ell,1} \\ \vdots \\ a_{\ell,m} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$, und $b_\ell = \begin{pmatrix} b_{\ell,1} \\ \vdots \\ b_{\ell,n} \end{pmatrix} := f(a_\ell) \in \mathbb{R}^n$ das ℓ -te Glied der Bildfolge. Nach Satz 7.32 konvergiert $(b_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ genau dann gegen $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := f(x)$, wenn die reellen Folgen $(b_{\ell,k})_{\ell \in \mathbb{N}}$ gegen $y_k = f_k(x)$ konvergieren ($k = 1, \dots, n$). Nun ist aber $b_{\ell,k} = f_k(a_\ell)$, letzteres Kriterium also das der Folgenstetigkeit der f_k . \square

Sind also in (5.1) die Koordinatenfunktionen f_1, \dots, f_n stetig, dann auch $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Das folgende Beispiel zeigt dagegen, dass eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ unstetig sein kann, obgleich alle *partiellen Funktionen* (bei denen man $m - 1$ der Koordinaten einen festen Wert gibt) stetig sind.

5.4 Beispiel Für die reelle Funktion zweier Variablen

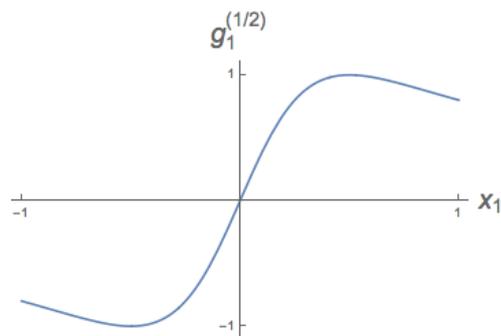
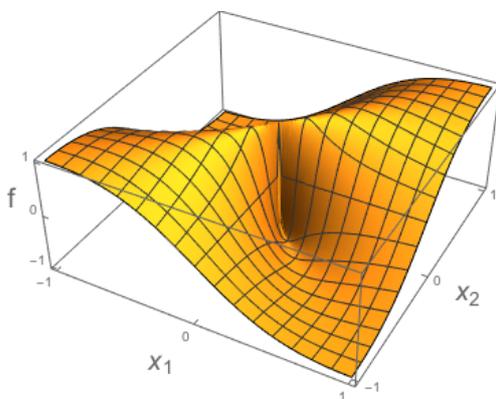
$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) := \begin{cases} \frac{2x_1x_2}{x_1^2+x_2^2} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

und alle $c \in \mathbb{R}$ sind die Funktionen

$$g_1^{(c)}(x) := f(x, c) \quad \text{und} \quad g_2^{(c)}(x) := f(c, x) = g_1^{(c)}(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

einer Variablen stetig. Denn für $c \neq 0$ ist

$$g_l^{(c)}(x) = \frac{2xc}{x^2 + c^2} \quad , \text{ und} \quad g_l^{(0)}(x) = 0 \quad (l = 1, 2).$$

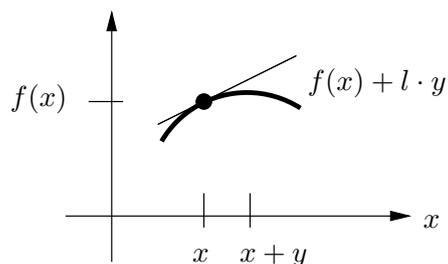


Dagegen ist $1 = \lim_{t \rightarrow 0} f(t, t) \neq \lim_{t \rightarrow 0} f(t, -t) = -1$, während $f(0) = 0 = \lim_{t \rightarrow 0} f(t, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(0, t)$ ist. Also ist f unstetig bei $x = 0$. \diamond

5.1 Definition der totalen Ableitung

Nun wollen wir den Begriff der Ableitung verallgemeinern und lassen uns von der ein-dimensionalen Situation leiten. Dort war ja für eine bei $x \in U \subset \mathbb{R}$ differenzierbare Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ die Ableitung $f'(x)$ die Zahl $l \in \mathbb{R}$, für die

$$f(x+y) = f(x) + l \cdot y + o(y) \quad (y \rightarrow 0).$$



Wenn l existiert, dann ist die Steigung der Tangentialgeraden (und darum handelt es sich ja bei l) eindeutig bestimmt.

Im \mathbb{R}^m hat man nun mehr Möglichkeiten $x \in U$ zu variieren, y wird ein (betragsmäßig kleiner) Vektor des \mathbb{R}^m sein.

5.5 Definition $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $U \subset \mathbb{R}^m$ offen heißt bei $x \in U$ **(total) differenzierbar**, wenn es eine Matrix $L \in \text{Mat}(n \times m, \mathbb{R})$ mit

$$f(x+y) = f(x) + Ly + o(\|y\|) \quad (y \rightarrow 0) \quad (5.2)$$

gibt. Dann heißt L **Ableitung von f bei x** .

Wieder gibt es höchstens eine solche Matrix, denn für L_1, L_2 , die die Bedingung erfüllen, muss

$$L_1 y = L_2 y + o(\|y\|)$$

sein. Für $M := L_1 - L_2$ gilt damit $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{My}{\|y\|} = 0$, also $M = 0$.

5.6 Bemerkung Insbesondere folgt aus der Differenzierbarkeit bei x die Stetigkeit bei x , denn da $\lim_{y \rightarrow 0} Ly = 0$ und $\lim_{y \rightarrow 0} o(\|y\|) = 0$, ist

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(x + y) = f(x). \quad \diamond$$

5.7 Notation

1. Man schreibt dann $Df(x)$ oder Df_x statt L und nennt diese (x -abhängige) Matrix *Jacobi-Matrix von f im Punkt x* .
2. Ist f für alle $x \in U$ bei $x \in U$ differenzierbar, dann heißt f (*total*) *differenzierbar*, und $Df : U \rightarrow \text{Mat}(n \times m, \mathbb{R})$ die *Ableitung von f* . \diamond

5.2 Partielle Ableitungen

Wie rechnet man die Jacobi-Matrix aus?

Wir können uns die einzelnen Komponenten von f getrennt vornehmen, also $Df(x)$ zeilenweise berechnen.

5.8 Definition Eine Funktion $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ (mit $U \subset \mathbb{R}^m$ offen) besitzt bei $x \in U$ die **partielle Ableitung** nach der k -ten Variablen

$$D_k g(x) = \frac{\partial g}{\partial x_k}(x) \quad (k = 1, \dots, m),$$

wenn für den kanonischen Basisvektor $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^t \in \mathbb{R}^m$

$$\frac{\partial g}{\partial x_k}(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x + h \cdot e_k) - g(x)}{h}$$

existiert.

5.9 Satz Ist $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ bei $x \in U$ differenzierbar, dann existieren die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x)$, und

$$Df(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(x) \end{pmatrix}.$$

Beweis: Für $y = he_k$ mit $h \in \mathbb{R}$ ist

$$f(x + he_k) = f(x) + h \underbrace{Df(x)}_L \cdot e_k + o(h) \quad (k = 1, \dots, m),$$

sodass

$$f_i(x + he_k) = f_i(x) + hL_{ik} + o(h) \quad (i = 1, \dots, n)$$

ist. Damit existiert $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_i(x + he_k) - f_i(x)}{h} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x)$ und ist gleich L_{ik} . \square

5.10 Beispiel $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^3 - 3x_1x_2^2 \\ 3x_1^2x_2 - x_2^3 \end{pmatrix}$. Damit ist $Df(x) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 - 3x_2^2 & -6x_1x_2 \\ 6x_1x_2 & 3(x_1^2 - x_2^2) \end{pmatrix}$, und die Ableitung am Punkt $x := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ist

$$Df\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}. \quad \diamond$$

Wir können aber nicht umgekehrt von der Existenz aller partiellen Ableitungen bei x auf die Differenzierbarkeit bei x schließen.

5.11 Beispiel $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x_1x_2}{\|x\|} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$.

Diese Funktion ist auch stetig am Punkt $0 \in \mathbb{R}^2$, denn $|f(x)| \leq \|x\|$, also $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. Auch ihre partiellen Ableitungen existieren überall:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \begin{cases} \frac{x_2^3}{\|x\|^3} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

und analog für $\frac{\partial f}{\partial x_2}$. Allerdings existiert die totale Ableitung bei Null nicht. Nach Satz 5.9 käme ja nur $Df(0) = (0, 0)$ in Frage, aber für $y := \begin{pmatrix} h \\ h \end{pmatrix}$ ist

$$f(y) - f(0) = f(y) = |h|/\sqrt{2}$$

nicht von der Ordnung $o(\|y\|) = o(h)$. \diamond

Verlangen wir allerdings zusätzlich, dass die partiellen Ableitungen stetig sind, dann gilt die Umkehrung von Satz 5.9:

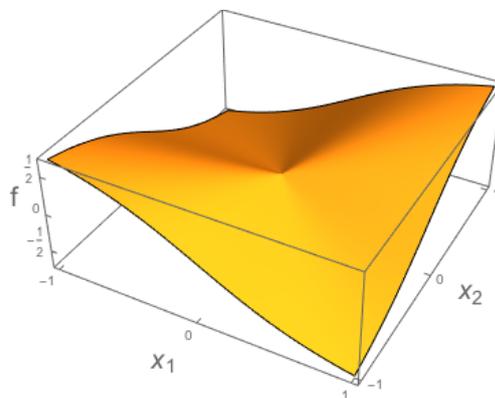
5.12 Satz Eine auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^m$ definierte Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ besitze die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial x_k} : U \rightarrow \mathbb{R}$. Falls diese bei $x \in U$ stetig sind, ist f bei x total differenzierbar.

Beweis:

- f ist genau dann total differenzierbar, wenn die Komponenten f_1, \dots, f_n total differenzierbar sind. Dies folgt (wie schon Satz 5.3) aus Satz 7.32 der *Analysis I*, wenn man bedenkt, dass das Kriterium (5.2) gleichbedeutend ist mit

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x+y) - f(x) - Ly}{\|y\|} = 0,$$

und analog $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f_k(x+y) - f_k(x) - l_k y}{\|y\|} = 0$ äquivalent zur totalen Differenzierbarkeit von f_k bei x , mit Ableitung $Df_k(x) = l_k \in \mathbb{R}^m$.



Also nehmen wir $n = 1$ an; f ist dann eine reelle Funktion von m Variablen.

- Wir führen einen Induktionsbeweis in der Zahl m der Variablen. Ist $m = 1$, dann ist das Kriterium

$$f(x + y) = f(x) + \sum_{k=1}^m l_k y_k + o(\|y\|) \quad (y \rightarrow 0) \quad (5.3)$$

gleichbedeutend mit der Existenz der partiellen Ableitung.

- Wir nehmen an, dass die Aussage für Funktionen von $m-1$ Variablen richtig ist und zeigen ihre Richtigkeit für m Variablen. Dazu schreiben wir $x = (x', x_m) \in \mathbb{R}^m$ mit $x' \in \mathbb{R}^{m-1}$ und analog $y = (y', y_m)$. Die zu beweisende Abschätzung

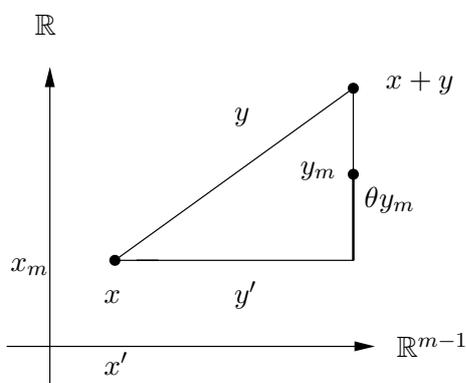


Abbildung 5.2: Aufspaltung von $x + y \in U$

(5.3), aufgelöst nach dem $o(\|y\|)$ -Term ist damit

$$\begin{aligned} A &:= \left| f(x' + y', x_m + y_m) - f(x', x_m) - \sum_{k=1}^m l_k y_k \right| \\ &\leq |f(x' + y', x_m + y_m) - f(x' + y', x_m) - l_m y_m| \\ &\quad + \left| f(x' + y', x_m) - f(x', x_m) - \sum_{k=1}^{m-1} l_k y_k \right| \\ &= \left| \frac{\partial f}{\partial x_m}(x' + y', x_m + \theta y_m) - l_m \right| \cdot |y_m| \\ &\quad + \left| f(x' + y', x_m) - f(x', x_m) - \sum_{k=1}^{m-1} l_k y_k \right| \end{aligned}$$

mit $\theta \in (0, 1)$ nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Wir setzen $l_m := \frac{\partial f}{\partial x_m}(x)$. Wegen der Stetigkeit von $\frac{\partial f}{\partial x_m}$ bei x und nach Induktionsvoraussetzung existiert für $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

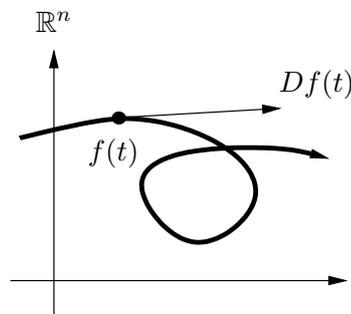
$$\triangleright \left| \frac{\partial f}{\partial x_m}(x + y) - l_m \right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für } \|y\| < \delta \text{ und}$$

$$\triangleright \left| f(x' + y', x_m) - f(x', x_m) - \sum_{k=1}^{m-1} l_k y'_k \right| < \frac{\varepsilon}{2} \|y'\| \text{ für } \|y'\| < \delta.$$

Daher ist $A \leq \frac{\varepsilon}{2} \|y_m\| + \frac{\varepsilon}{2} \|y'\| \leq \varepsilon \|y\|$ ($\|y\| < \delta$),
sodass $A = o(\|y\|)$ bewiesen ist. □

Damit haben wir ein handliches Kriterium für die totale Differenzierbarkeit.

- Die Ableitung einer C^1 -Kurve $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf dem offenen Intervall $U \subset \mathbb{R}$ haben wir schon im letzten Kapitel besprochen: Der Tangentialvektor am Punkt $f(t)$ der Kurve ist der Geschwindigkeitsvektor $Df(t) = \begin{pmatrix} f'_1(t) \\ \vdots \\ f'_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.



- Auch der Fall $n = 1$ ist geometrisch wichtig. Hier haben wir eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $U \subset \mathbb{R}^m$, die wir durch ihren Graphen oder auch durch ihre Höhenlinien darstellen können. Der Wert c von f wird hier als Höhe interpretiert und $f^{-1}(c)$ als *Höhenlinie* bezeichnet.⁷

5.13 Beispiel $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x_1^2 - x_2^2$.

Der Graph von f besitzt die Form einer Sattelfläche, siehe Abbildung 5.3. ◇

5.3 Der Gradient

In Beispiel 5.13 ist die Ableitung am Punkt x gleich $Df(x) = (2x_1, -2x_2)$.

Interpretieren wir diese durch Transposition als Tangentialvektor an x , so ergibt sich, dass dieser senkrecht auf der Höhenlinie durch x steht und in Richtung des stärksten Anstieges von f weist.

Dies gilt ganz allgemein:

5.14 Definition Der **Gradient** bei $x \in U$ einer total differenzierbaren Funktion

⁷Die Darstellung einer reellen Funktion durch mehrere Höhenlinien wird auch *Contour-Diagramm* genannt.

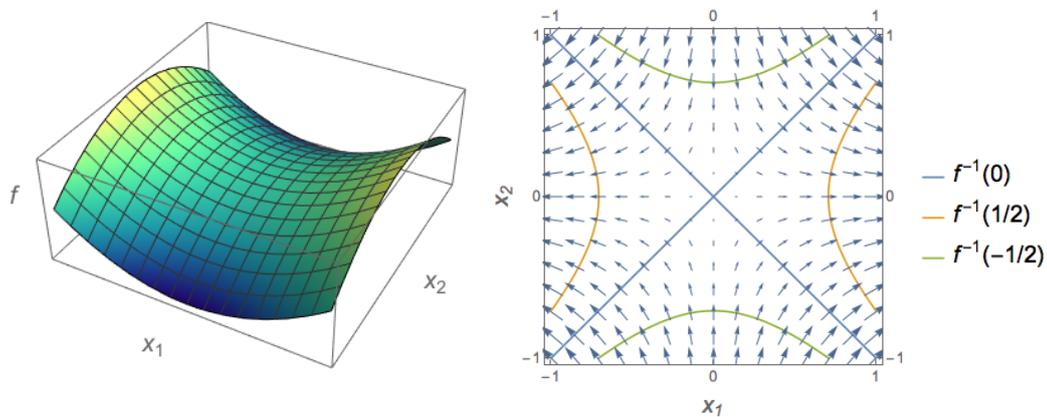


Abbildung 5.3: Graph (links) und Gradientenvektorfeld mit Höhenlinien (rechts) für $f(x) = x_1^2 - x_2^2$

$f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^m$ ist der Tangentialvektor

$$\text{grad}f(x) := (Df(x))^t = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m}(x) \end{pmatrix} \quad \text{an } x.$$

5.15 Bemerkungen (Gradient)

1. Ist f total differenzierbar (d.h. für alle $x \in U$ total differenzierbar), dann ist $\text{grad}f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ein Vektorfeld.
2. Statt $\text{grad}f$ schreibt man auch ∇f (gesprochen: "Nabla f "). ◇

5.16 Beispiel Der Graph von

$$f(x) = \cos(x_1) \cdot \cos(x_2) \quad (x \in \mathbb{R}^2)$$

ähneln einem Eierkarton (siehe Abb. 5.4), und das Gradientenvektorfeld von f ist

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} -\sin(x_1) \cos(x_2) \\ -\cos(x_1) \sin(x_2) \end{pmatrix}. \quad \diamond$$

5.17 Definition Die **Richtungsableitung** der auf der offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^m$ total differenzierbaren Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ in Richtung $v \in \mathbb{R}^m$ ist durch

$$\partial_v f(x) := Df(x)(v)$$

gegeben.

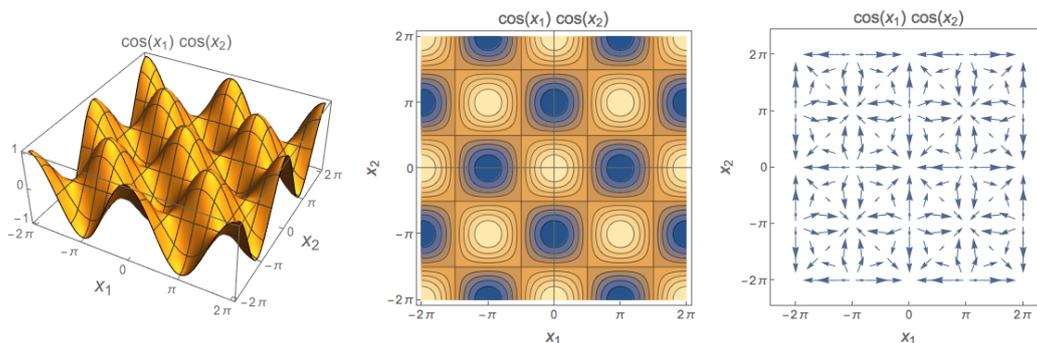


Abbildung 5.4: Graph (links), Contour-Plot (Mitte) und Gradientenvektorfeld (rechts) von $x \mapsto \cos(x_1) \cdot \cos(x_2)$

Damit ist $\partial_v f(x) = \langle \nabla f(x), v \rangle$.

Da die Richtungsableitung der differentielle Anstieg in Richtung v ist, ergibt sich:

5.18 Satz Ist $\nabla f(x) \neq 0$, dann zeigt der Gradient in Richtung des stärksten Anstieges von f .

Beweis: Es sei $\|v\| = 1$. Dann ist $\partial_v f(x) = \|\text{grad} f(x)\| \cos \varphi$, wobei φ der Winkel zwischen $\nabla f(x)$ und v ist. Das Maximum wird für $\varphi = 0$, also $v = \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$ angenommen. \square

6 Mehrdimensionale Differentialrechnung

6.1 Differentiationsregeln

Aus der eindimensionalen Differentialrechnung (Kapitel 11.1 der *Analysis I*) sind uns Differentiationsregeln bekannt:

- Summenregel: $(f + g)' = f' + g'$
- Produktregel: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
- Kettenregel: $(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$
- Quotientenregel: $(f/g)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$;
diese ist eine Folge von Produktregel und Kettenregel.

Wir wollen nun sehen, wie sich diese Regeln in höheren Dimensionen verallgemeinern. Für die Verallgemeinerung der Produktregel überlegen wir uns zunächst,

welche Funktionen wir sinnvoll miteinander multiplizieren können. Es sei dabei und im Folgenden $U \subset \mathbb{R}^m$ offen.

1. Funktionen $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ besitzen Werte $f(x), g(x) \in \mathbb{R}^n$. Unter Verwendung des kanonischen Skalarproduktes $\langle v, w \rangle := \sum_{k=1}^n v_k w_k$ von Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit $\langle f, g \rangle$ die reelle Funktion

$$\langle f, g \rangle : U \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad \langle f, g \rangle (x) := \langle f(x), g(x) \rangle .$$

2. Die vektorwertige Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ können wir mit einer reellen Funktion $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ punktweise multiplizieren und erhalten die vektorwertige Funktion

$$h \cdot f : U \rightarrow \mathbb{R}^n \quad , \quad (h \cdot f)(x) := h(x) \cdot f(x) .$$

6.1 Satz

- Sind $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ bei $x \in U \subset \mathbb{R}^m$ differenzierbar, dann gelten die **Summenregel**

$$D(f + g)(x) = Df(x) + Dg(x) ,$$

sowie die **Produktregeln**

$$D \langle f, g \rangle (x) = \sum_{k=1}^n (f_k(x) Dg_k(x) + g_k(x) Df_k(x)) \quad (6.1)$$

und

$$D(h \cdot f)(x) = f(x) Dh(x) + h(x) Df(x) .$$

- Ist $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ bei $x \in U \subset \mathbb{R}^m$ differenzierbar, und $g : V \rightarrow \mathbb{R}^l$ bei $y := f(x) \in V \subset \mathbb{R}^n$ differenzierbar (und $V \supset f(U)$ offen), dann gilt die **Kettenregel**

$$D(g \circ f)(x) = Dg(y) Df(x) .$$

6.2 Bemerkungen

1. Insbesondere existieren die Ableitungen der verknüpften Funktionen!
2. Die Dimensionen der Ableitungs-Matrizen ergeben sich wie folgt:

$$\underbrace{D(h \cdot f)(x)}_{n \times m\text{-Matrix}} = \underbrace{f(x)}_{\substack{\text{Spaltenvektor} \\ \text{Länge } n}} \cdot \underbrace{Dh(x)}_{\substack{\text{Zeilenvektor} \\ \text{Länge } m}} + \underbrace{h(x)}_{\text{Zahl}} \cdot \underbrace{Df(x)}_{n \times m\text{-Matrix}}$$

und

$$\underbrace{D(g \circ f)(x)}_{l \times m\text{-Matrix}} = \underbrace{Dg(y)}_{l \times n\text{-Matrix}} \underbrace{Df(x)}_{n \times m\text{-Matrix}} .$$

3. Für total differenzierbare Funktionen $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $k \in \mathbb{R}$ ergibt sich damit

$$D(f + g) = Df + Dg \quad , \quad D(kf) = kDf,$$

die Ableitung ist also eine lineare Operation!

4. Die erste Produktregel (6.1) soll als Hausaufgabe bewiesen werden. \diamond

Beweis: Wir setzen die Differenzierbarkeit bei x voraus, also

$$f(x + y) - f(x) = Df(x)y + o(\|y\|) \quad \text{und} \quad g(x + y) - g(x) = Dg(x)y + o(\|y\|) \quad (6.2)$$

mit $Df(x), Dg(x) \in \text{Mat}(n \times m, \mathbb{R})$.

- Die *Summenregel* der Differentiation ergibt sich wie in der Analysis reeller Funktionen: Wegen (6.2) ist

$$\begin{aligned} (f + g)(x + y) - (f + g)(x) &= (f(x + y) - f(x)) + (g(x + y) - g(x)) \\ &= (Df(x)y + o(\|y\|)) + (Dg(x)y + o(\|y\|)) \\ &= (Df(x) + Dg(x))y + o(\|y\|). \end{aligned}$$

- Die *Produktregel* folgt aus (6.2) und der dazu analogen definierenden Relation $h(x + y) - h(x) = Dh(x)(y) + o(\|y\|)$ von $Dh(x)$. Mit der Abkürzung $k := hf : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist nämlich

$$\begin{aligned} k(x + y) - k(x) &= h(x + y)f(x + y) - h(x)f(x) \\ &= f(x + y)(h(x + y) - h(x)) + h(x)(f(x + y) - f(x)) \\ &= (f(x) + \mathcal{O}(\|y\|))(Dh(x)(y) + o(\|y\|)) + h(x)(Df(x)(y) + o(\|y\|)) \\ &= f(x)Dh(x)(y) + h(x)Df(x)(y) + o(\|y\|) \\ &= [f(x)Dh(x) + h(x)Df(x)](y) + o(\|y\|). \end{aligned}$$

- *Kettenregel:* Mit den Abkürzungen $L := Df(x)$, $M := Dg(y)$ und $h := g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^l$ ergibt sich $g(y + Y) - g(y) = MY + o(\|Y\|)$.

Wir setzen hier $Y := f(x + X) - f(x)$, also $Y = LX + o(\|X\|)$. Damit ist

$$\begin{aligned} h(x + X) - h(x) &= g(y + f(x + X) - f(x)) - g(y) = g(y + Y) - g(y) \\ &= M(LX + o(\|X\|)) + o(\|f(x + X) - f(x)\|) \\ &= MLX + o(\|X\|), \end{aligned}$$

sodass $Dh(x) = ML$ ist. \square

6.3 Beispiele (Kettenregel)

1. Die Höhe eines Gebirges am Punkt (x, y) sei gleich $z(x, y)$. Zum Zeitpunkt t seien die Horizontalkoordinaten eines Wanderers $c(t) := (x(t), y(t))$, er befindet sich also in der Höhe $z(x(t), y(t))$, und er bewegt sich mit der Geschwindigkeit

$$\frac{d}{dt} z \circ c(t) = Dz(c(t)) Dc(t) = \left\langle \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}, \nabla z(x(t), y(t)) \right\rangle$$

nach oben.

2. Eine Funktion $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ hat in Polarkoordinaten (r, φ) (mit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \tilde{x}(r, \varphi) := \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$) die Form $G(r, \varphi) := g(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$.

Es ist nach der Kettenregel $DG(r, \varphi) = Dg(x) D\tilde{x}(r, \varphi)$ mit $Dg = (g_{x_1}, g_{x_2})$ und $D\tilde{x}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$, also

$$G_r := \frac{\partial}{\partial r} G = g_{x_1} \cos \varphi + g_{x_2} \sin \varphi$$

$$G_\varphi := \frac{\partial}{\partial \varphi} G = g_{x_1} (-r \sin \varphi) + g_{x_2} r \cos \varphi.$$

Damit ergibt sich (durch Auflösen nach den partiellen Ableitungen von g) für $r \neq 0$

$$\nabla g(\tilde{x}(r, \varphi)) = \begin{pmatrix} G_r \cos \varphi - \frac{1}{r} G_\varphi \sin \varphi \\ G_r \sin \varphi + \frac{1}{r} G_\varphi \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad \diamond$$

6.2 Höhere Ableitungen

Ist $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ total differenzierbar, dann ist $g := Df$ eine Abbildung $g : U \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ mit $\ell := mn$, denn der \mathbb{R} -Vektorraum $\text{Mat}(n \times m, \mathbb{R})$ hat die Dimension ℓ , ist also zum \mathbb{R}^ℓ isomorph.

Wir können damit die totale Ableitung von g , also die zweite *totale* Ableitung DDf von f untersuchen. Einfacher erscheint es zunächst, zweite und höhere *partielle* Ableitungen zu betrachten.

6.4 Definition Es sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^m$ offen. Existieren für $k \in \mathbb{N}$, $l \leq k$, beliebige $i_1, \dots, i_l \in \{1, \dots, m\}$ und $j = 1, \dots, n$ die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_l}} f_j$ der **Ordnung** l und sind diese stetig, dann heißt f **k -mal stetig differenzierbar**.

$$C^k(U, \mathbb{R}^n) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R}^n \mid f \text{ ist } k\text{-mal stetig differenzierbar}\}$$

$$C(U, \mathbb{R}^n) := C^0(U, \mathbb{R}^n) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R}^n \mid f \text{ ist stetig}\}$$

$$C^\infty(U, \mathbb{R}^n) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(U, \mathbb{R}^n)$$

$$C^k(U) := C^k(U, \mathbb{R}).$$

6.5 Notation

Man schreibt auch

$$D_{i_1} \dots D_{i_k} f \quad \text{oder} \quad f_{x_{i_1} \dots x_{i_k}} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^r}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} f \quad \text{für} \quad \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} f.$$

Die erste Schreibweise ist die beste, denn hier wird nicht die Koordinate benannt, nach der partiell differenziert wird, sondern nur ihr Index.

Wenn wir partielle Ableitungen in der Form $f_{x_1 \dots x_k}$ notieren, ist es sinnvoll, die Komponenten einer vektorwertigen Funktion durch einen oben stehenden Index zu bezeichnen (also $f = (f^{(1)}, \dots, f^{(n)})^t$), um Verwechslungen zu vermeiden.

Die Funktionenräume $C^k(U, \mathbb{R}^n)$ sind \mathbb{R} -Vektorräume, und es gilt

$$C^{k+1}(U, \mathbb{R}^n) \subset C^k(U, \mathbb{R}^n).$$

Einfache Beispiele zeigen, dass nicht immer die Vertauschungsregel $\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2)$ gilt. Allerdings ist dies für $f \in C^2(U, \mathbb{R}^n)$ der Fall. Allgemeiner gilt:

6.6 Satz Ist $f \in C^k(U, \mathbb{R}^n)$, dann gilt für jede Permutation $\pi \in S_k$:

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_{\pi(1)}}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{i_{\pi(k)}}} f = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} f.$$

Beweis: Jede Permutation $\pi \in S_k$ läßt sich als Produkt von Transpositionen darstellen. Es genügt also die Vertauschung zweier partieller Ableitungen zu betrachten. Höhere Ableitungen erhält man durch Induktion. Wir betrachten den Fall $f \in C^2(U)$, $U \subset \mathbb{R}^2$. In höheren Dimensionen bleiben die anderen Koordinaten unberücksichtigt.

Für kleine $\varepsilon > 0$ ist das Quadrat Q mit den Eckpunkten $x, x + \varepsilon e_1, x + \varepsilon e_2$ und $x + \varepsilon(e_1 + e_2)$ ganz in U enthalten.

Wir ordnen Q die Zahl

$$\square f := f(x) - f(x + \varepsilon e_1) - f(x + \varepsilon e_2) + f(x + \varepsilon(e_1 + e_2))$$

zu. In diesem Quadrat liegt ein Punkt y mit

$$\square f = \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} f(y),$$

denn

- $\square f = g(x_2 + \varepsilon) - g(x_2)$ für $g(z) := f(x_1 + \varepsilon, z) - f(x_1, z)$.

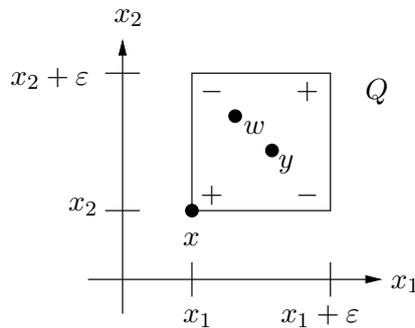


Abbildung 6.1: Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen

2. Nach dem eindimensionalen Mittelwertsatz gibt es ein $y_2 \in [x_2, x_2 + \varepsilon]$ mit

$$g(x_2 + \varepsilon) - g(x_2) = \varepsilon g'(y_2),$$

also

$$\square f = \varepsilon g'(y_2) = \varepsilon \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1 + \varepsilon, y_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, y_2) \right) = \varepsilon (h(x_1 + \varepsilon) - h(x_1))$$

für $h(z) := \frac{\partial f}{\partial x_2}(z, y_2)$.

3. Nochmalige Anwendung des Mittelwertsatzes liefert ein $y_1 \in [x_1, x_1 + \varepsilon]$ mit $h(x_1 + \varepsilon) - h(x_1) = \varepsilon h'(y_1)$, also $\square f = \varepsilon^2 h'(y_1) = \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} f(y_1, y_2)$.

Aus Symmetriegründen gibt es aber auch ein $w \in Q$ mit $\square f = \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} f(w)$, also

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} f(w) = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} f(y).$$

Für $\varepsilon \searrow 0$ gilt $y \rightarrow x$ und $w \rightarrow x$, also wegen Stetigkeit der partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} f(x) = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} f(x).$$

□

Die von einer $n \times m$ -Matrix A erzeugte lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Ax$ hat die (x -unabhängige) Jacobi-Matrix $Df(x) = A$.

Ist $n = m$, so können wir $\det A$ bilden. Geometrisch entspricht dem Betrag dieser Größe der Faktor, um den das Volumen eines Parallelepipeds P vergrößert wird:

Entsprechend können wir die (punktweise definierte) *Funktionaldeterminante* $\det(Df)$ einer Abbildung $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^m$ interpretieren.

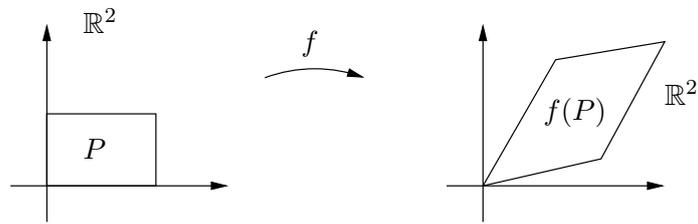


Abbildung 6.2: Geometrische Interpretation der Determinante

6.7 Beispiel Wechsel von Polar- auf Euklidische Koordinaten

Der Koordinatenwechsel entspricht der Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad , \quad f(r, \varphi) := \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} .$$

Diese besitzt Jacobi-Matrix und -Determinante

$$Df(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} \quad , \quad \det(Df)(r, \varphi) = r .$$

Die geometrische Interpretation des Faktors r wird in Abb. 6.3 dargestellt. \diamond

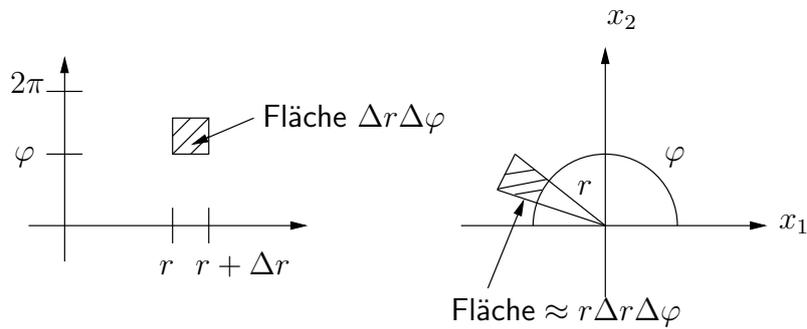


Abbildung 6.3: Funktionaldeterminante für Polarkoordinaten

6.3 Vektoranalysis

In Kapitel 5.3 haben wir mit dem *Gradienten* einen Differentialoperator kennen gelernt, und zwar die lineare Abbildung

$$\text{grad} : C^\infty(U, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(U, \mathbb{R}^m),$$

die einer glatten reellen Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ auf der offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^m$ das Vektorfeld $\text{grad} f$ auf U zuordnete.

Jetzt werden wir weitere *Differentialoperatoren* untersuchen, also Linearkombinationen partieller Ableitungen. Wichtig sind für uns besonders diejenigen, die sich koordinatenunabhängig definieren lassen und damit einen geometrischen Gehalt besitzen.

Die Divergenz

Wir beginnen mit der Definition der *Divergenz* eines Vektorfeldes $v : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ auf der offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^m$. Wir nehmen dabei an, dass dessen totale Ableitung $U \ni x \mapsto Dv(x) \in \text{Mat}(m, \mathbb{R})$ existiert und stetig ist, und setzen

$$\text{div}(v) := \text{tr}(Dv) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial v_i}{\partial x_i},$$

wobei $\text{tr}(M)$ die Spur der quadratischen Matrix M bezeichnet. Damit ist $\text{div}(v)$ eine stetige Funktion auf U .

Um ein Gefühl für diese Funktion zu bekommen, betrachten wir *lineare* Vektorfelder $v : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, d.h. Vektorfelder, die gleichzeitig lineare Abbildungen sind, für die damit eine eindeutig bestimmte Matrix $M \in \text{Mat}(m, \mathbb{R})$ existiert mit $v(x) = Mx$.

Es ist $\text{div}(v)(x) = \sum_{i=1}^m (M)_{ii} = \text{tr}(M)$, die Spur der Matrix, also unabhängig von $x \in \mathbb{R}^m$. Gleichzeitig ist aber, wie aus der *Linearen Algebra* bekannt, $\text{tr}(M)$ gleich der Summe der Eigenwerte der (komplexifizierten) Matrix M , siehe Abb. 6.4.

Die *lineare Differentialgleichung*

$$\dot{x} = v(x) = Mx$$

besitzt für den Anfangswert $x_0 \in \mathbb{R}^m$ die Lösung

$$x(t) = \exp(Mt)x_0 \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Der von den Basisvektoren e_1, \dots, e_m aufgespannte Würfel $[0, 1]^m$ wird unter der Abbildung $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x \mapsto \exp(Mt)x$ auf das von den Vektoren $e_1(t) := \exp(Mt)e_1, \dots, e_m(t) := \exp(Mt)e_m$ aufgespannte Parallelotop vom Volumen

$$\det(e_1(t), \dots, e_m(t)) = \det(\exp(Mt))$$

transformiert. Nun gilt aber für eine Matrix $A \in \text{Mat}(m, \mathbb{R})$ immer

$$\det(\exp(A)) = \exp(\text{tr}(A)).$$

Das Volumen des Parallelotops beträgt damit

$$\exp(\text{tr}(M)t) = \exp(\text{div}(v)t).$$

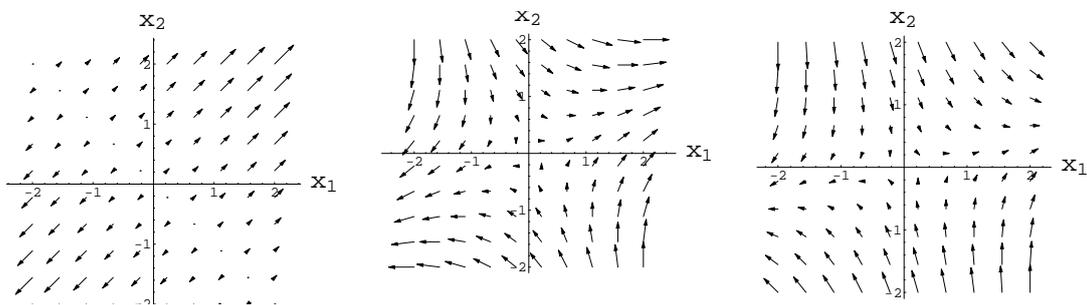


Abbildung 6.4: Lineare Vektorfelder $v(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & d-1 \end{pmatrix}x$ mit Divergenz d . Links: $d = 2$; Mitte: $d = 0$; Rechts: $d = -2$

Damit kann die Divergenz als Volumenvergrößerungsfaktor oder *Quellstärke* interpretiert werden.

Der Laplace-Operator

Der Gradient $\text{grad} f$ einer (differenzierbaren) Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ist ein Vektorfeld auf U . Einem Vektorfeld $v : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ können wir umgekehrt die Funktion $\text{div}(v) : U \rightarrow \mathbb{R}$ zuordnen. Zusammensetzung der beiden Operationen ergibt den *Laplace-Operator*

$$\Delta := \text{div grad} : C_{\mathbb{R}}^2(U) \rightarrow C_{\mathbb{R}}(U).$$

In cartesianischen Koordinaten gilt $\text{grad}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m} \end{pmatrix}$, also

$$\Delta f = \text{div grad}(f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Um ein Gefühl für die Bedeutung des Laplace-Operators zu bekommen, betrachten wir diesmal Funktionen $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, die *quadratische Formen* auf \mathbb{R}^m sind, für die also eine Matrix $M \in \text{Mat}(m, \mathbb{R})$ existiert mit

$$f(x) = \frac{1}{2} \langle x, Mx \rangle \quad (x \in \mathbb{R}^m).$$

Der Faktor $\frac{1}{2}$ dient der Vereinfachung der Formeln. Die Matrix M ist durch f nicht eindeutig festgelegt, wohl aber, wenn wir sie als symmetrisch voraussetzen. Dann ist das Vektorfeld

$$\text{grad} f(x) = Mx \quad (x \in \mathbb{R}^m),$$

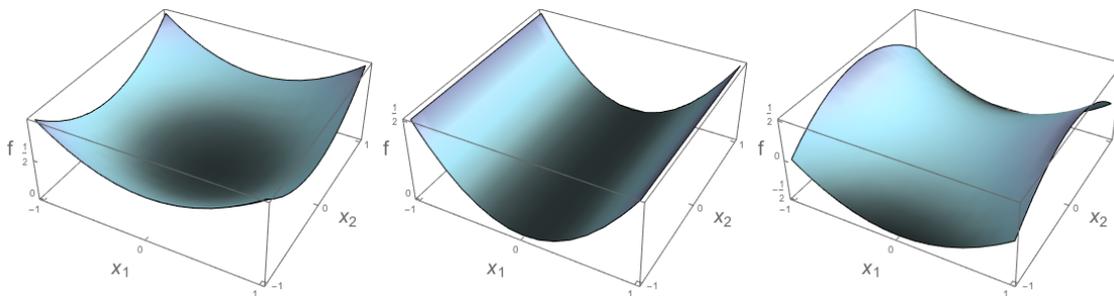


Abbildung 6.5: Graphen quadratischer Funktionen $f(x) = \frac{1}{2} \langle x, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \ell \end{pmatrix} x \rangle$ mit $\Delta f = \ell + 1$. Links: $\ell = 1$; Mitte: $\ell = 0$; Rechts: $\ell = -1$

und $\Delta f(x) = \operatorname{div}(Mx) = \operatorname{tr}(M)$, siehe Abb. 6.5.

Wegen unseres Ansatzes ist Δf konstant. Dies ist ebenso der Fall, wenn wir stattdessen für ein $b \in \mathbb{R}^m$ und $c \in \mathbb{R}$

$$f(x) := \frac{1}{2} \langle x, Mx \rangle + \langle b, x \rangle + c \quad (x \in \mathbb{R}^m)$$

ansetzen.

Betrachten wir speziell die Familie

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \text{ dann ist } \Delta f(x) = m_1 + m_2.$$

Wir können m_i als die Krümmung der Kurve $t \mapsto (t, f(e_i t))$ bei $t = 0$ interpretieren. Ist etwa $m_1 > 0$ und $m_2 < 0$, dann besitzt der Graph von f die Form eines Sattels. Ist dessen Krümmung nach oben (in der 1-Richtung) betragsmäßig größer als die Krümmung nach unten (also in der 2-Richtung), dann ist $\Delta f > 0$.

Die Rotation

Wir haben durch Bildung des Gradienten aus einer Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ein Vektorfeld auf $U \subseteq \mathbb{R}^m$ erzeugt. Können wir jedes Vektorfeld so darstellen?

1. Für $m = 1$ ist das der Fall, denn dann ist $\operatorname{grad}(f) = f'$ und mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung können wir (zumindest wenn $U \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall ist) f bis auf eine additive Konstante aus $\operatorname{grad}(f)$ rekonstruieren.
2. Schon für $m = 2$ ist aber nicht jedes Vektorfeld Gradientenvektorfeld. Dies stellen wir mit der *Rotation*, dem Differentialoperator

$$\operatorname{rot} : C^1(U, \mathbb{R}^2) \rightarrow C_{\mathbb{R}}(U) \quad , \quad \operatorname{rot}(v) := \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$$

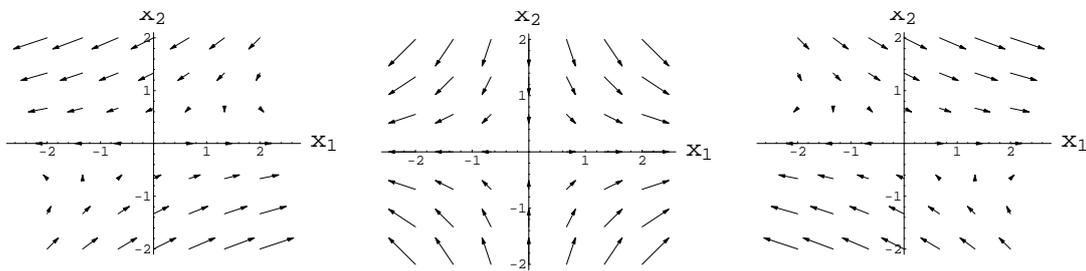


Abbildung 6.6: Divergenzfreie Vektorfelder $v(x) = \begin{pmatrix} 1 & -r \\ 0 & -1 \end{pmatrix}x$ mit $\text{rot}(v) = r$. Links: $r = 2$; Mitte: $r = 0$; Rechts: $r = -2$

fest. Denn

$$\text{rot grad} f = \text{rot} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 0,$$

falls f zweimal stetig differenzierbar ist.

Dagegen ist für die Matrix $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$ die Rotation des linearen Vektorfeldes $v(x) = Mx$ gleich

$$\text{rot} v = m_{21} - m_{12}.$$

Betrachtet man die Tangentialkomponente eines solchen linearen Vektorfeldes entlang einer Kreislinie mit beliebigem Mittelpunkt und Radius, dann ist diese, gemittelt über den Kreis, für $\text{rot}(v) > 0$ im Gegenuhrzeigersinn, für $\text{rot}(v) < 0$ im Uhrzeigersinn orientiert, siehe Abb. 6.6.

3. In $m = 3$ Dimensionen lässt sich ein Differentialoperator definieren, der ebenfalls *Rotation* genannt wird, diesmal aber Vektorfelder auf Vektorfelder abbildet:

$$\text{rot} : C^1(U, \mathbb{R}^3) \rightarrow C^0(U, \mathbb{R}^3) \quad , \quad \text{rot}(v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

Wieder gilt $\text{rot grad} = 0$.

6.4 Anwendungen der Kettenregel

Im folgenden Satz betrachten wir ein bestimmtes Integral, bei dem sowohl der Integrand als auch die Integrationsgrenzen von einem Parameter λ abhängen.

6.8 Satz (Differentiation unter dem Integralzeichen) *Es sei*

$f : \mathbb{R} \times (\lambda_1, \lambda_2) \rightarrow \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion mit stetiger partieller Ableitung $D_2 f$.
 $A, B : (\lambda_1, \lambda_2) \rightarrow \mathbb{R}$ seien C^1 -Funktionen. Dann ist*

$$F : (\lambda_1, \lambda_2) \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad F(\lambda) := \int_{A(\lambda)}^{B(\lambda)} f(x, \lambda) dx$$

stetig differenzierbar, und

$$F'(\lambda) = f(B(\lambda), \lambda) B'(\lambda) - f(A(\lambda), \lambda) A'(\lambda) + \int_{A(\lambda)}^{B(\lambda)} D_2 f(x, \lambda) dx. \quad (6.3)$$

Beweis:

Es sei $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (\lambda_1, \lambda_2) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $\Phi(a, b, \lambda) := \int_a^b f(x, \lambda) dx$.

Wir schreiben $F = \Phi \circ \Psi$ mit

$$\Psi : (\lambda_1, \lambda_2) \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (\lambda_1, \lambda_2) \quad , \quad \Psi(\lambda) := (A(\lambda), B(\lambda), \lambda)$$

und wenden die Kettenregel an.

- Es ergibt sich unter Voraussetzung der totalen Differenzierbarkeit von Φ

$$F'(\lambda) = D\Phi(\Psi(\lambda)) D\Psi(\lambda) = \quad (6.4)$$

$$D_1\Phi(A(\lambda), B(\lambda), \lambda) A'(\lambda) + D_2\Phi(A(\lambda), B(\lambda), \lambda) B'(\lambda) + D_3\Phi(A(\lambda), B(\lambda), \lambda).$$

- Die ersten beiden Summanden ergeben sich nach dem Hauptsatz der Integralrechnung: Die partiellen Ableitungen

$$D_1\Phi(a, b, \lambda) = -f(a, \lambda) \quad \text{und} \quad D_2\Phi(a, b, \lambda) = f(b, \lambda)$$

sind nach Voraussetzung stetig.

- Beim dritten Summanden betrachten wir für vorgegebene Grenzen $a, b \in \mathbb{R}$ die Hilfsfunktion $\tilde{\Phi} : [\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2] \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{\Phi}(\lambda) := \Phi(a, b, \lambda)$, wir konzentrieren uns also auf den hier einzig wesentlichen Parameter λ . Dabei setzen wir (um ein kompaktes Intervall $[\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2]$ zu bekommen) $\tilde{\lambda}_1 := \lambda_1 + \Delta\lambda$, $\tilde{\lambda}_2 := \lambda_2 - \Delta\lambda$ mit einem kleinen $\Delta\lambda > 0$. O.B.d.A. setzen wir $b > a$ voraus. Die Einschränkung der stetigen Funktion $D_2 f = \frac{\partial f}{\partial \lambda}$ auf das kompakte Rechteck $R := [a, b] \times [\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2]$ ist (nach Satz 9.21 von [An1]) gleichmäßig stetig, d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|D_2 f(x, \lambda) - D_2 f(x', \lambda')| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad ((x, \lambda), (x', \lambda') \in R, \|(x, \lambda) - (x', \lambda')\| < \delta). \quad (6.5)$$

Wir wollen zeigen, dass für $D\tilde{\Phi}(\lambda) = D \int_a^b f(x, \lambda) dx$ gilt:

$$D \int_a^b f(x, \lambda) dx = \int_a^b D_2 f(x, \lambda) dx, \quad (6.6)$$

wir also die Differentiation nach dem Parameter λ unter das Integralzeichen ziehen können. Wir wissen aber noch nicht, ob $\tilde{\Phi}$ überhaupt differenzierbar ist (also ob die linke Seite von (6.6) existiert). Betrachten wir also den Differenzenquotienten, vermindert um die rechte Seite von (6.6):

$$\begin{aligned} & \frac{\tilde{\Phi}(\lambda) - \tilde{\Phi}(\lambda')}{\lambda - \lambda'} - \int_a^b D_2 f(x, \lambda) dx \\ &= \int_a^b \left[\frac{f(x, \lambda) - f(x, \lambda')}{\lambda - \lambda'} - D_2 f(x, \lambda) \right] dx \\ &= \int_a^b \left[D_2 f(x, \tilde{\lambda}(x)) - D_2 f(x, \lambda) \right] dx \end{aligned} \quad (6.7)$$

für ein $\tilde{\lambda}(x)$ zwischen λ und λ' , nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Ist nun $|\lambda - \lambda'| < \delta$, dann ist nach (6.5) der Betrag von (6.7) kleiner als $\int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, haben wir damit (6.6) gezeigt.

Gleichzeitig haben wir auch die Stetigkeit aller partiellen Ableitungen von Φ bewiesen, was nach Satz 5.12 die totale Differenzierbarkeit von Φ impliziert und damit die Formel (6.4) rechtfertigt.

- Die Stetigkeit von F' folgt aus der stetigen Abhängigkeit aller Summanden in (6.3) von λ . \square

In BLATTER [Bl, Kapitel 20] findet man eine etwas allgemeinere Version des Satzes.

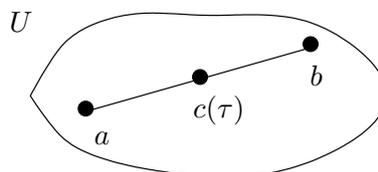
6.9 Satz (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

Es sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^m$ differenzierbar, und U enthalte die Strecke S mit den Endpunkten a und b . Dann gibt es $\xi \in S$ mit

$$f(b) - f(a) = \text{grad} f(\xi) \cdot (b - a). \quad (6.8)$$

Beweis:

Betrachte $h := f \circ c$ mit Kurve $c : [0, 1] \rightarrow U$, $t \mapsto (1-t)a + tb$ von a nach b ,



also $S = c([0, 1])$. Es ist $c'(t) = b - a$ und damit nach der Kettenregel

$$h'(t) = \text{grad} f(c(t)) \cdot (b - a).$$

Anwendung des (eindimensionalen) Mittelwertsatzes ergibt andererseits die Existenz eines $\tau \in [0, 1]$ mit $h(1) - h(0) = h'(\tau)$. Setze $\xi := c(\tau)$. \square

Die Gleichung (6.8) läßt sich als mehrdimensionale Taylor-Formel nullter Ordnung auffassen, was deutlich wird, wenn man sie in der Form $f(b) = f(a) + \text{grad}f(\xi) \cdot (b - a)$ schreibt und den zweiten Summanden als Restglied auffasst.

Das folgende Beispiel zeigt dagegen, dass der Mittelwertsatz nicht auf Abbildungen $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $n > 1$ verallgemeinert werden kann.

6.10 Beispiel Für $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) := \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix}$ ist $f(2\pi) = f(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, aber $Df = \begin{pmatrix} -\sin \\ \cos \end{pmatrix}$. Es gibt also kein $\xi \in [0, 2\pi]$ mit

$$0 = f(2\pi) - f(0) = 2\pi Df(\xi). \quad \diamond$$

7 Mehrdimensionale Taylor-Approximation

Es soll eine Funktion $f \in C_{\mathbb{R}}^{k+1}(U)$, $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, in der Nähe eines Punktes $a \in U$ durch ein Polynom in den m Variablen x_1, \dots, x_m approximiert werden.

Erinnerung: Für $m = 1$, also eine Funktion f einer reellen Veränderlichen, galt

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k + R_{k+1}$$

mit Restglied

$$R_{k+1} = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x - a)^{k+1}$$

für ein (im Allgemeinen unbekanntes) ξ zwischen a und x , siehe Satz 3.3.

7.1 Die Taylor-Formel in m Dimensionen

Wir führen die mehrdimensionale Situation auf die eindimensionale zurück, indem wir für $x \in U$ die Funktion auf der Strecke zwischen a und x untersuchen, d.h.

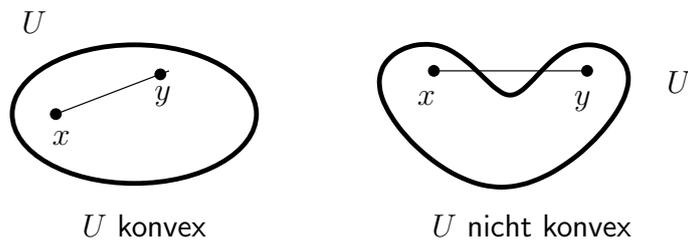
$$h(t) := f(a + t(x - a)) \quad (t \in [0, 1]).$$

Dazu muss der Definitionsbereich U von f natürlich das Bild $h([0, 1])$ dieser Kurve enthalten.

7.1 Definition Eine Teilmenge $U \subseteq V$ eines \mathbb{K} -Vektorraums heißt **konvex**, wenn für alle $x, y \in U$ auch die Strecke

$$\{(1 - t)x + ty \in V \mid t \in [0, 1]\}$$

zwischen x und y in U enthalten ist.



7.2 Satz (Taylor)

Für $f \in C^{k+1}(U)$, $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und konvex, $a, x \in U$ und $v := x - a$ gilt

$$f(x) = f(a) + \partial_v f(a) + \frac{\partial_v^{(2)} f(a)}{2!} + \dots + \frac{\partial_v^{(k)} f(a)}{k!} + R_{k+1}$$

mit $\partial_v^{(l)} := \underbrace{\partial_v \dots \partial_v}_{l\text{-mal}}$ und dem **Lagrange-Restglied**

$$R_{k+1} := \frac{\partial_v^{(k+1)} f(a + \theta v)}{(k+1)!}, \quad \theta \in [0, 1] \text{ geeignet}.$$

Beweis: Für $l = 1, \dots, k+1$ ist

$$\frac{d^l}{dt^l} h(t) = \frac{d^l}{dt^l} f(a + tv) = \partial_v^{(l)} f(a + tv).$$

Daher folgt die Formel aus der (eindimensionalen) Taylor-Formel für h :

$$h(1) = \sum_{l=0}^k \frac{h^{(l)}(0)}{l!} 1^l + R_{k+1}. \quad \square$$

In dieser Form des Satzes, der die Richtungsableitung ∂_v in Richtung v benutzt, sieht man nicht direkt, dass f durch ein Polynom vom Grad $\leq k$ in x_1, \dots, x_m angenähert wird. Um dies zu sehen, muss man die *Binomische Formel* verallgemeinern:

7.3 Definition (Multiindices)

- Ein Element $p = (p_1, \dots, p_m) \in \mathbb{N}_0^m$ heißt **Multiindex der Ordnung**

$$|p| := p_1 + \dots + p_m.$$

- Die **Fakultät** des Multiindex ist $p! := p_1! p_2! \dots p_m!$.
- Für $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ schreibt man abkürzend die Monome in der Form

$$x^p := x_1^{p_1} \cdot \dots \cdot x_m^{p_m}.$$

7.4 Beispiel (Multiindex)

Für $p := (2, 0, 1, 4)$ ist $|p| = 7$, $p! = 2!0!1!4! = 48$ und $x^p = x_1^2 x_3 x_4^4$. \diamond

Die Ordnung $|p|$ des Multiindex ergibt den *Grad* des *Monoms* x^p . Unter einem reellen Polynom q in m Variablen versteht man eine Funktion

$$q(x) = \sum_{p \in \mathbb{N}_0^m} c_p x^p$$

mit *Koeffizienten* $c_p \in \mathbb{R}$, die bis auf endlich viele gleich Null sind. Der *Grad* des Polynoms q ist der höchste Grad $|p|$ seiner Monome x^p mit $c_p \neq 0$. Dem *Nullpolynom* in m Variablen ordnet man Grad $-\infty$ zu.

7.5 Satz (Polynomial-Formel) Für $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ und $k \in \mathbb{N}$ ist

$$(x_1 + \dots + x_m)^k = k! \sum_{|p|=k} \frac{x^p}{p!}.$$

Beweis: Durch Induktion in der Zahl m der Variablen.

- $m = 1$: trivial
- $m = 2$: Binomische Formel:

$$(x_1 + x_2)^k = \sum_{p_1=0}^k \frac{k!}{p_1!(k-p_1)!} x_1^{p_1} x_2^{k-p_1} = k! \sum_{p_1, p_2, p_1+p_2=k} \frac{x_1^{p_1} x_2^{p_2}}{p_1! p_2!}.$$

- $m \mapsto m + 1$: $x := (x_1, \dots, x_m)$, $y := (x_1, \dots, x_m, x_{m+1})$

$$\begin{aligned} & \underbrace{(x_1 + \dots + x_m)}_s + x_{m+1} \Big)^k = (s + x_{m+1})^k \\ &= \sum_{l=0}^k \frac{k!}{l!(k-l)!} s^l x_{m+1}^{k-l} \\ &= k! \sum_{l=0}^k \frac{1}{l!(k-l)!} \left(l! \sum_{|p|=l} \frac{x^p}{p!} \right) x_{m+1}^{k-l} \\ &= k! \sum_{l=0}^k \sum_{|p|=l} \frac{x^p x_{m+1}^{k-l}}{p!(k-l)!} = k! \sum_{|q|=k} \frac{y^q}{q!} \end{aligned}$$

mit dem Multiindex $q := (p_1, \dots, p_m, l)$ der Länge $m + 1$. \square

Mit der Schreibweise $D_l = \frac{\partial}{\partial x_l}$, $l = 1, \dots, m$ für die l -te partielle Ableitung und $D^p := \frac{\partial^{|p|}}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_m^{p_m}}$ für den Multiindex $p = (p_1, \dots, p_m)$ ist die Richtungsableitung in Richtung $v \in \mathbb{R}^m$ gleich $\partial_v = v_1 D_1 + \dots + v_m D_m$ und nach Satz⁸ 7.5

$$\partial_v^{(l)} = (v_1 D_1 + \dots + v_m D_m)^l = l! \sum_{|p|=l} \frac{v^p D^p}{p!}.$$

Damit ergibt sich die Gestalt

$$f(a + v) = \sum_{|p| \leq k} \frac{D^p f(a)}{p!} v^p + R_{k+1}$$

der Taylor-Formel, mit $R_{k+1} = \sum_{|p|=k+1} \frac{D^p f(a+\theta v)}{p!} v^p$ für ein $0 \leq \theta \leq 1$.

Wie im Eindimensionalen bezeichnet man mit $T_{a,k} f(a + v) = \sum_{|p| \leq k} \frac{D^p f(a)}{p!} v^p$ das *Taylor-Polynom k -ter Ordnung am Entwicklungspunkt a* .

7.6 Beispiel Für $m = 2$ Variablen und $k = 3$ Ableitungen ergibt sich

$$\begin{aligned} f(a + v) = & f(a) + \\ & f_{x_1}(a)v_1 + f_{x_2}(a)v_2 + \\ & \frac{1}{2}f_{x_1x_1}(a)v_1^2 + f_{x_1x_2}(a)v_1v_2 + \frac{1}{2}f_{x_2x_2}(a)v_2^2 + \\ & \frac{1}{6}f_{x_1x_1x_1}(a)v_1^3 + \frac{1}{2}f_{x_1x_1x_2}(a)v_1^2v_2 + \frac{1}{2}f_{x_1x_2x_2}(a)v_1v_2^2 + \frac{1}{6}f_{x_2x_2x_2}(a)v_2^3 \\ & + R_4. \end{aligned}$$

7.2 Die Hesse-Matrix einer reellen Funktion

Das Skalarprodukt des \mathbb{R}^m bezeichnen wir mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

7.7 Definition

Für $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f \in C_{\mathbb{R}}^2(U)$ und $x \in U$ heißt die *symmetrische Matrix*

$$H_f(x) := \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(x) & \dots & f_{x_1x_m}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_mx_1}(x) & \dots & f_{x_mx_m}(x) \end{pmatrix}$$

die **Hesse-Matrix** von f am Punkt x . Man schreibt auch $\text{Hess}(f) := H_f$.

Damit ist für $f \in C_{\mathbb{R}}^2(U)$ nach der qualitativen Taylor-Formel

$$f(a + v) = f(a) + \langle v, \nabla f(a) \rangle + \frac{1}{2} \langle v, H_f(a) v \rangle + R_3(v)$$

⁸**Vorsicht:** Ist dagegen v nicht ein Vektor aus \mathbb{R}^m , sondern ein *Vektorfeld*, d.h. $v : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, dann gilt diese Formel nicht, weil dann i.A. $D_k(v_l f) = v_l D_k f + f D_k v_l \neq v_l D_k f$ ist!

mit $R_3(v) = o(\|v\|^2)$, denn

$$f(a + v) = f(a) + \langle v, \nabla f(a) \rangle + \frac{1}{2} \langle v, H_f(a + \theta v) v \rangle$$

und $H_f(a + \theta v) = H_f(a) + o(\|v\|)$.

7.8 Beispiel Für $f(x) := \cos(x_1) \cos(x_2)$ (siehe Beispiel 5.16) ist

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} -\sin(x_1) \cos(x_2) \\ -\cos(x_1) \sin(x_2) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad H_f(x) = \begin{pmatrix} -\cos(x_1) \cos(x_2) & \sin(x_1) \sin(x_2) \\ \sin(x_1) \sin(x_2) & -\cos(x_1) \cos(x_2) \end{pmatrix}.$$

Für den Entwicklungspunkt $a := \begin{pmatrix} \pi/2 \\ -\pi/2 \end{pmatrix}$, also $\nabla f(a) = 0$, ergibt sich als Taylor-Polynom zweiter Ordnung von f bei a

$$T_{a,2}(v) = -v_1 v_2 = -(x_1 - \pi/2) \cdot (x_2 + \pi/2).$$

An diesem Punkt besitzt der Graph von f die Form eines Sattels. ◇

Allgemein wird der Graph von f bei a durch die Fläche zweiter Ordnung

$$\left\{ (x, f(a) + \langle x - a, \nabla f(a) \rangle + \frac{1}{2} \langle x - a, H_f(a)(x - a) \rangle) \mid x \in \mathbb{R}^m \right\}$$

genauer als durch die Tangentialebene

$$\{(x, f(a) + \langle x - a, \nabla f(a) \rangle) \mid x \in \mathbb{R}^m\},$$

approximiert. Dies ist besonders wichtig, um festzustellen, ob ein Extremwert der Funktion vorliegt.

7.3 Extremalstellen

Wir erweitern die Definitionen aus Kapitel 9.4 der *Analysis I* auf reelle Funktionen mehrerer Variablen:

7.9 Definition

Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^m$ (nicht notwendig offen), besitzt

- ein **lokales Maximum** bzw. ein **lokales Minimum** $x \in U$, wenn eine Umgebung $V \subset U$ von x in U existiert, für die

$$f(x) \geq f(y) \quad \text{bzw.} \quad f(x) \leq f(y) \quad (y \in V).$$

- Ein **lokales Extremum** ist ein lokales Maximum oder Minimum.

- ein **(globales) Maximum** bzw. **(globales) Minimum** $x \in U$, wenn

$$f(x) \geq f(y) \quad \text{bzw.} \quad f(x) \leq f(y) \quad (y \in U).$$

- Ist sogar $f(y) < f(x)$ für alle $y \in V \setminus \{x\}$, dann heißt x **isoliertes lokales Maximum**, etc.

Genauer spricht man statt von Minima bzw. Maxima x von Minimal- bzw. Maximalstellen, um sie von den den Minimal- bzw. Maximalwerten $f(x)$ zu unterscheiden.

Wir erinnern uns, dass schon in einer Dimension das Verschwinden der ersten Ableitung weder notwendig noch hinreichend für das Vorliegen eines lokalen Extremums ist:

7.10 Beispiel (Extrema, für $m = 1$)

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ besitzt bei 0 ein lokales Minimum und $f'(0) = 0$.
2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ besitzt bei 0 kein lokales Extremum, aber $f'(0) = 0$.
3. $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, besitzt bei $x = 1$ ein lokales Maximum, aber $f'(1) \neq 0$. ◇

Aus der reellen Kurvendiskussion wissen wir aus der Schule, dass eine auf einem offenen Intervall U definierte Funktion f in $x \in U$ sicher eine Extremalstelle hat, wenn $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$ gilt. Dabei ist das Verschwinden der 1. Ableitung notwendig für das Vorliegen eines Extremums.

Dies werden wir nun auf Funktionen von m Variablen verallgemeinern. Ganz allgemein, also für vektorwertige Funktionen ist der folgende Begriff die geeignete Verallgemeinerung der Bedingung (nicht) verschwindender Ableitung:

7.11 Definition Für $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ mit $n \leq m$ heißt $x \in U$ **regulärer Punkt**, wenn der Rang der Jacobi-Matrix von f maximal ist, d.h. wenn

$$\text{Rang}(Df(x)) = n.$$

Sonst heißt x **kritischer** (oder **singulärer**) **Punkt**.

7.12 Satz Ist $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und hat $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ bei $x \in U$ eine lokale Extremalstelle, dann ist $\text{grad}f(x) = 0$.

Beweis: Sei statt dessen $v := \text{grad}f(x) \neq 0$. Dann ist nach der Taylor-Formel

$$f(x + \lambda v) = f(x) + \lambda Df(x)(v) + o(\|\lambda v\|) = f(x) + \lambda \langle v, v \rangle + o(\lambda),$$

also wegen $\langle v, v \rangle > 0$ für $\varepsilon > 0$ geeignet:

$$\begin{aligned} f(x + \lambda v) &> f(x) && (0 < \lambda < \varepsilon) \\ f(x + \lambda v) &< f(x) && (-\varepsilon < \lambda < 0). \end{aligned}$$

Widerspruch! □

Satz 7.12 besagt also, dass $x \in U$ nur dann eine lokale Extremalstelle sein kann, wenn x kritischer Punkt ist (also $\nabla f(x) = 0$ ist).

Wie das Beispiel 7.10.3 zeigt, wird Satz 7.12 falsch, wenn man nicht die Offenheit des Definitionsbereiches U verlangt.

Wie Beispiel 7.10.2 zeigt, ist die Aussage des Satzes 7.12 auch nicht umkehrbar. Allerdings können wir mit Hilfe der Hesse-Matrix ein genaueres notwendiges Kriterium und auch hinreichende Kriterien für das Vorliegen eines lokalen Extremums formulieren.

7.13 Definition Eine symmetrische Matrix $A = A^T \in \text{Mat}(m, \mathbb{R})$ heißt

- **positiv definit** ($A > 0$), wenn $\langle x, Ax \rangle > 0 \quad (x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\})$,
- **negativ definit** ($A < 0$), wenn $\langle x, Ax \rangle < 0 \quad (x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\})$,
- **definit**, wenn A positiv definit oder negativ definit ist,
- **indefinit**, wenn es $x, y \in \mathbb{R}^m$ gibt mit $\langle x, Ax \rangle > 0$ und $\langle y, Ay \rangle < 0$,
- **positiv semidefinit** ($A \geq 0$), wenn $\langle x, Ax \rangle \geq 0 \quad (x \in \mathbb{R}^m)$,
- **negativ semidefinit** ($A \leq 0$), wenn $\langle x, Ax \rangle \leq 0 \quad (x \in \mathbb{R}^m)$,
- **semidefinit**, wenn A positiv semidefinit oder negativ semidefinit ist.

Der Gegensatz zu *indefinit* ist also *semidefinit*.

Für eine indefinite 2×2 -Matrix A ist der Graph der quadratischen Form $x \mapsto \langle x, Ax \rangle$ von der Form eines *Sattels*, siehe Abb. 5.3.

7.14 Beispiel 1. Die Diagonalmatrix $A = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_m \end{pmatrix}$ ist genau dann positiv (negativ) definit, wenn alle Eigenwerte $a_i > 0$ ($a_i < 0$) sind, und indefinit, wenn es Eigenwerte $a_i > 0 > a_j$ unterschiedlichen Vorzeichens gibt. A ist genau dann positiv (bzw. negativ) semidefinit, wenn für alle i gilt: $a_i \geq 0$ bzw. ($a_i \leq 0$).

2. Eine symmetrische Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \text{Mat}(2, \mathbb{R})$ ist genau dann positiv definit, wenn $a > 0$ und $\det A = ac - b^2 > 0$ sind. **Beweis:** Für $x := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist $\langle x, Ax \rangle = a$, sodass $a > 0$ eine notwendige Bedingung ist.

Ist $a > 0$, brauchen wir nur noch $x \in \mathbb{R}^2$ mit $x_2 \neq 0$ zu betrachten. Mit $y := x_1/x_2$ ist dann

$$\langle x, Ax \rangle = \underbrace{x_2^2}_{>0} \underbrace{(ay^2 + 2by + c)}_{>0 \text{ für } |y| \text{ groß.}}$$

Der Klammerausdruck hat genau dann reelle Nullstellen $y_{1/2} = -\frac{b}{a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - \frac{c}{a}}$, wenn $ac - b^2 \leq 0$. \square

So ist $A := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ positiv definit, denn $a = 2$ und $\det A = 3$.

Dagegen ist $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ indefinit, denn für $x := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $y := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist $\langle x, Ax \rangle = 6$ und $\langle y, Ay \rangle = -2$. \diamond

Wie im Beispiel 7.14.1 kommt es auch bei beliebigen symmetrischen Matrizen nur auf das Vorzeichen der Eigenwerte an. Zwar ist die exakte Berechnung der Eigenwerte für große Matrixdimension aufwendig oder unmöglich. Wie in Beispiel 7.14.2 kann man aber ihre Vorzeichen bestimmen, ohne sie zu berechnen. Allgemein gilt nämlich der

7.15 Satz (Sylvester) Eine symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} \in \text{Mat}(m, \mathbb{R})$$

ist genau dann positiv definit, wenn für ihre Hauptminoren gilt:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix} > 0 \quad (k = 1, \dots, m).$$

Beweis: Wie aus der Linearen Algebra bekannt, lässt sich A auf Diagonalform $D := O^{-1}AO$ (mit O orthogonal) bringen. Man zeigt nun, dass die Diagonalmatrix $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_m)$ genau dann nur positive d_i besitzt, wenn obige Bedingung an A erfüllt ist. Genauer in Lehrbüchern der Linearen Algebra, z.B. FISCHER [Fi], Kapitel 5.7. \square

Hinreichend ist nun folgender Extremstellentest:

7.16 Satz

Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f \in C^2(U)$ und ein $x \in U$ kritischer Punkt. Dann ist für

- $H_f(x)$ positiv definit x eine isolierte Minimalstelle,
- $H_f(x)$ negativ definit x eine isolierte Maximalstelle,
- $H_f(x)$ indefinit x keine Extremalstelle.

Beweis:

- Es sei $H_f(x)$ positiv definit, und

$$c := \frac{1}{2} \min_{\substack{v \in \mathbb{R}^m \\ \|v\|=1}} \langle v, H_f(x)v \rangle \quad , \text{ also } c > 0.$$

Dann ist $\frac{1}{2} \langle y, H_f(x)y \rangle \geq c \langle y, y \rangle = c\|y\|^2$.

Nach der Taylor-Formel ist wegen $\text{grad}f(x) = 0$

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + \frac{1}{2} \langle y, H_f(x)y \rangle + o(\|y\|^2) \\ &\geq f(x) + c\|y\|^2 + o(\|y\|^2) \\ &\geq f(x) + \frac{c}{2}\|y\|^2 \quad (\|y\| < \varepsilon) \end{aligned}$$

für ein geeignetes $\varepsilon > 0$. Also ist x eine isolierte Minimalstelle.

- Ist $H_f(x)$ negativ definit, dann ist $H_g(x)$ für $g := -f$ positiv definit. Beweis analog.
- Ist $H_f(x)$ indefinit, dann existieren $c > 0$ und Richtungen $v, w \in \mathbb{R}^m$, $\|v\| = \|w\| = 1$ mit $\langle v, H_f(x)v \rangle \geq c$ und $\langle w, H_f(x)w \rangle \leq -c$, also

$$f(x + \lambda v) \geq f(x) + \frac{c}{2}|\lambda|^2 \quad \text{bzw.} \quad f(x + \lambda w) \leq f(x) - \frac{c}{2}|\lambda|^2$$

falls $|\lambda| < \varepsilon$. Damit ist x weder Minimum noch Maximum. \square

7.17 Beispiel Es sollen die kritischen Punkte und Extrema von $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x_1) \cos(x_2)$ aus Beispiel 5.16 bestimmt werden.

Dazu kann die Periodizität von f ausgenutzt werden. Da der Cosinus 2π -periodisch ist, besitzt f in beiden Variablen diese Periode. $(2\pi\mathbb{Z})^2$ ist aber nicht das feinste Periodengitter. Es gilt nämlich, dass $f(x + \ell) = f(x)$ für $\ell \in G$ mit

$$G := \left\{ n_1 \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \end{pmatrix} + n_2 \begin{pmatrix} \pi \\ -\pi \end{pmatrix} \mid n_i \in \mathbb{Z} \right\} \supseteq (2\pi\mathbb{Z})^2,$$

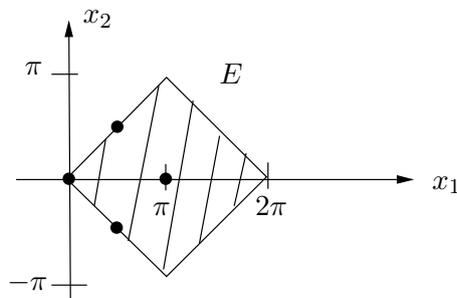
denn $\cos(x \pm \pi) = -\cos(x)$.

Wir müssen also nur die kritischen Punkte im von den Basisvektoren $\begin{pmatrix} \pi \\ \pi \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \pi \\ -\pi/2 \end{pmatrix}$ des Gitters G aufgespannten Elementarbereich

$$E := \left\{ c_1 \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \pi \\ -\pi \end{pmatrix} \mid 0 \leq c_1, c_2 < 1 \right\}$$

untersuchen. Die Bedingung $\nabla f(x) = 0$ ist gleichbedeutend mit

$$\sin(x_1) \cos(x_2) = \cos(x_1) \sin(x_2) = 0.$$



In E finden wir genau vier kritische Punkte:

1. Für $a := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in E$ ist $\nabla f(a) = 0$ und $H_f(a) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ negativ definit, a ist also isoliertes Maximum, mit $f(a) = 1$.
2. $a := \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix} \in E : \nabla f(a) = 0$, $H_f(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ positiv definit, a ist also isoliertes Minimum, mit $f(a) = -1$.
3. $a_{\pm} = \begin{pmatrix} \pi/2 \\ \pm\pi/2 \end{pmatrix}$, $\nabla f(a_{\pm}) = 0$, $H_f(a) = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}$ indefinit, a_{\pm} ist also kein Extremum, sondern ein Sattel.

Die isolierten Maximalstellen von f bilden also das Gitter G , die isolierten Minimalstellen das verschobene Gitter $G + \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$. Sattelpunkte finden wir in $G + \begin{pmatrix} \pi/2 \\ \pi/2 \end{pmatrix}$ und in $G + \begin{pmatrix} \pi/2 \\ -\pi/2 \end{pmatrix}$. \diamond

8 Implizite Funktionen

Man kann Kurven und Flächen⁹ im Raum *implizit* als Nullstellenmenge einer Funktion oder *explizit* durch Parametrisierung angeben.

- 8.1 Beispiel** • Die p -Sphäre $S^p \subset \mathbb{R}^m$ mit $p := m - 1$ ist implizit durch $S^p = f^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid f(x) = 0\}$ mit $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|^2 - 1$ gegeben.
- Für $S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ ist eine explizite Parametrisierung durch

$$g : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad , \quad g(\theta, \varphi) := \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

⁹Allgemeiner: sogenannte *Untermannigfaltigkeiten* des \mathbb{R}^m , siehe Seite 82

gegeben. Wir können aber auch die "Nordhalbkugel" $\{x \in S^2 \mid x_3 > 0\}$ durch

$$g : U \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x_1, x_2) \mapsto \left(x_1, x_2, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}\right)$$

mit $U := \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ parametrisieren, also die ersten beiden Koordinaten des Punktes $x \in S^2$ benutzen.

- Beide Darstellungen haben ihre Vor- und Nachteile. Will man beispielsweise die Kugel von einem Computer zeichnen lassen, bietet sich die explizite Parameterdarstellung an. Andererseits ist der geometrische Gehalt (Menge der Punkte, die Abstand 1 zum Ursprung haben) in der impliziten Form offensichtlicher. \diamond

Wie gehen wir nun vor, wenn wir eine implizit gegebene Kurve oder Fläche parametrisch darstellen wollen? Es sei z.B. $f = (f_1, \dots, f_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $n \leq m$, und wir wollen die Nullstellenmenge

$$f^{-1}(0) \subseteq U$$

parametrisieren. Heuristisch wird man erwarten, dass dazu $m - n$ Parameter nötig sind, denn die Nullstellenmenge erfüllt ja die n Gleichungen

$$f_1(x) = 0, \dots, f_n(x) = 0.$$

Dies stimmt schon im Fall einer linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ nur, wenn die Komponenten $f_1, \dots, f_n : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ linear unabhängig sind.

8.2 Beispiel (Affine Abbildung)

$f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(x) = Ax - b$ mit $A \in \text{Mat}(n \times m, \mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$. Die Nullstellenmenge $f^{-1}(0)$ ist hier gleich der Lösungsmenge des inhomogenen linearen Gleichungssystems

$$Ax = b. \tag{8.1}$$

Nun ist das Bild $f(\mathbb{R}^m)$ der affine Unterraum von \mathbb{R}^n , der den Punkt $-b$ enthält und von den Spaltenvektoren von A aufgespannt wird. Die affine Dimension von $f(\mathbb{R}^m)$ ist also gleich $\text{rang}(A) \leq \min(m, n)$.

- Ist nun $n > \text{rang}(A)$ (was insbesondere für $n > m$ gilt), dann besitzt (8.1) für typische $b \in \mathbb{R}^n$ gar keine Lösung, f also keine Nullstelle.
- Ist dagegen $n \leq m$ und $\text{rang}(A)$ maximal (also gleich n), dann ist die Lösungsmenge von (8.1) ein affiner Unterraum des \mathbb{R}^m von der Dimension $p := m - n$. Wir benötigen also p Parameter zur Parametrisierung von $f^{-1}(0)$. \diamond

Beispiel 8.1 bestärkt uns in der Vermutung, dass auch für allgemeine C^1 -Abbildungen f unter der Voraussetzung maximalen Ranges von $Df(x)$ (also der Linearisierung von f bei x) eine solche Parametrisierung durch $m - n$ der Koordinaten x_i lokal, d.h. in einer Umgebung von $x \in f^{-1}(0)$ schon möglich ist. Man muss nur die richtigen x_i wählen. Z.B. wäre es ungeschickt, in der Nähe des "Ostpols" $x := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in S^2$ zu versuchen, durch x_1 und x_2 zu parametrisieren, denn dort wird das Argument von $x_3 = \pm\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$ Null, und die Ableitung divergiert.

Wir gehen schrittweise vor und betrachten zunächst die Nullstellenmenge $f^{-1}(0)$ von Vektorfeldern, also stetigen Abbildungen $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen. Aus Dimensionsgründen erwarten wir, dass diese isoliert sind.

8.3 Definition *Es sei M eine Menge. Dann heißt $x \in M$ **Fixpunkt** der Abbildung $g : M \rightarrow M$, wenn $g(x) = x$ gilt.*

Auf Vektorräumen M sind Nullstellen- und Fixpunktprobleme äquivalent, denn die Nullstellenmenge $f^{-1}(0) \subseteq M$ der Abbildung $f : M \rightarrow M$ ist gleich der Fixpunktmenge

$$\{x \in M \mid g(x) = x\} \quad \text{von} \quad g : M \rightarrow M \quad \text{mit} \quad g(x) := f(x) + x.$$

Zwei Näherungsverfahren werden in den verschiedensten Situationen verwendet:

- Die Iteration einer kontrahierenden Abbildung g . Damit soll ihr Fixpunkt gefunden werden.
- Das Newton-Verfahren. Dabei wird die Nullstelle der Tangente von f bei x als Näherung für die Nullstelle von f benutzt.

8.1 Der Banachsche Fixpunktsatz

8.4 Definition

- Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y) heißt **Lipschitz-stetig**, wenn ein $L > 0$ (genannt **Lipschitz-Konstante**) existiert mit

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq L d_X(x_1, x_2) \quad (x_1, x_2 \in X).$$

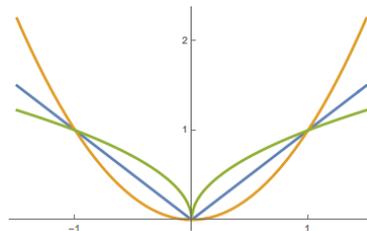
- Eine Lipschitz-stetige Abbildung $f : X \rightarrow X$ auf einem metrischen Raum (X, d) heißt **kontrahierend**, wenn sie eine Lipschitz-Konstante $L < 1$ besitzt.

8.5 Satz Lipschitz-stetige Abbildungen sind stetig.

Beweis: Sei $x \in X$ und V Umgebung von $f(x)$. Dann gibt es $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(f(x)) \subseteq V$. Setze $\delta := \varepsilon/L$. Dann ist $f(U_\delta(x)) \subseteq U_\varepsilon(f(x))$. \square

8.6 Bemerkung Die Umkehrung gilt nicht, wie die folgenden stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zeigen (mit Metrik $d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$ und $x_1 := 0, x_2 = x$):

- $f(x) := x^2$. Dann ist $d(f(x_1), f(x_2)) = x^2 \leq Ld(x_1, x_2) = L|x|$ nur für $|x| \leq L$. Da f stetig differenzierbar ist, ist die Funktion zwar wie man sagt *lokal*, d.h. eingeschränkt auf eine geeignete Umgebung eines beliebigen Punktes, aber nicht *global* Lipschitz-stetig.



$|x|$, und nicht lokal bzw. nicht global Lipschitz-stetige Funktionen $x \mapsto \sqrt{|x|}$ bzw. $x \mapsto x^2$

- $f(x) := \sqrt{|x|}$. Dann ist $\sqrt{|x|} \leq L|x|$ nur für $|x| \geq L^{-2}$. f ist also bei 0 noch nicht einmal lokal Lipschitz-stetig. Andererseits ist f sogar gleichmäßig stetig, also insbesondere stetig. \diamond

8.7 Satz (Banachscher Fixpunktsatz) Eine kontrahierende Abbildung $f : X \rightarrow X$ auf einem vollständigen metrischen Raum (X, d) mit Lipschitz-Konstante $\theta < 1$ besitzt genau einen Fixpunkt x^* , und für die m -te Iterierte $x_m := f(x_{m-1})$ von $x_0 \in X$ gilt

$$\boxed{d(x_m, x^*) \leq d(x_1, x_0) \frac{\theta^m}{1-\theta} \quad (m \in \mathbb{N}).} \quad (8.2)$$

Beweis:

- Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $d(x_{n+1}, x_n) \leq \theta d(x_n, x_{n-1}) \leq \dots \leq \theta^n d(x_1, x_0)$, also für $n > m$

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{j=m}^{n-1} d(x_{j+1}, x_j) \leq \left(\sum_{j=m}^{n-1} \theta^j \right) d(x_1, x_0) \leq \frac{\theta^m}{1-\theta} d(x_1, x_0),$$

sodass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bildet. Wegen der Vollständigkeit von (X, d) existiert

$$x^* := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

- Damit ist $d(x^*, x_m) = \lim_{n \rightarrow \infty} (d(x^*, x_n) + d(x_n, x_m)) \leq \frac{\theta^m}{1-\theta} d(x_1, x_0)$.
- Wegen der Stetigkeit von f gilt $f(x^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x^*$.

x^* ist also ein Fixpunkt von f .

- Gilt für $x \in X$ ebenfalls $f(x) = x$, dann ist $d(x, x^*) = d(f(x), f(x^*)) \leq \theta d(x, x^*)$, also $x = x^*$. Damit ist x^* der einzige Fixpunkt. \square

Wir können hier also mit (8.2) die Zahl der Iterationen, die zum Erreichen einer gewünschten Genauigkeit hinreichend sind, aus $d(x_1, x_0)$ und θ bestimmen.

8.8 Bemerkungen (Kontraktionseigenschaft)

1. Ist $X \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und $f : X \rightarrow X$ stetig differenzierbar mit $|f'(x)| \leq \theta < 1$ für alle $x \in X$, dann ist f kontrahierend mit Konstante θ , denn

$$|f(y) - f(x)| = \left| \int_x^y f'(z) dz \right| \leq \left| \int_x^y |f'(z)| dz \right| \leq \left| \int_x^y \theta dz \right| = \theta |y - x|.$$

2. **(Satz von Picard-Lindelöf)** Oft muss man ein Problem etwas umformulieren, um die Kontraktionseigenschaft zu bekommen. Beispielsweise kann man den Definitionsbereich verkleinern oder die Gleichung umformen.

So kann man für ein offenes Intervall $U \in \mathbb{R}$, $g \in C^1(U, \mathbb{R})$ und ein Intervall $I := [-\varepsilon, \varepsilon]$ die eindeutige Existenz einer Lösung $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ der gewöhnlichen *Differentialgleichung*

$$\frac{d}{dt}x(t) = g(x(t)) \quad , \quad x(0) = X_0 \in U$$

mit Anfangswert $X_0 \in \mathbb{R}$ beweisen. Dabei charakterisiert man diese Lösung als Fixpunkt eines für kleine $\varepsilon > 0$ kontrahierenden *Integraloperators*

$$f : X \rightarrow X \quad , \quad f(y)(t) := X_0 + \int_0^t g(y(s)) ds \quad (y \in X)$$

auf dem vollständigen metrischen Raum $X := C(I, \mathbb{R})$ stetiger Funktionen mit Supremumsmetrik

$$d(x, y) := \sup\{|x(t) - y(t)| \mid t \in I\}.$$

Ist z.B. einfachheitshalber $g(x) := x$ und $x_0(t) := X_0$ für alle $t \in I$, dann ist induktiv

$$x_n(t) = f(x_{n-1})(t) = X_0 + \int_0^t x_{n-1}(s) ds = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} X_0 \quad (n \in \mathbb{N}, t \in I).$$

Also ist der Fixpunkt die Funktion $t \mapsto x^*(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = \exp(t)X_0$.
 In der Tat ist $\frac{d}{dt}x^*(t) = x^*(t)$ und $x^*(0) = X_0$.
 Außerdem ist f für alle $\varepsilon \in (0, 1/2)$ kontrahierend, denn

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= \sup\{|f(x)(t) - f(y)(t)| \mid t \in I\} \\ &= \sup\left\{\left|\int_0^t [g(x(s)) - g(y(s))] ds\right| \mid t \in I\right\} \\ &\leq \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |x(s) - y(s)| ds \leq 2\varepsilon d(x, y). \end{aligned} \quad \diamond$$

8.9 Beispiel (Berechnung von $\sqrt{2}$)

- Wir suchen also eine Nullstelle von $f(x) := x^2 - 2$, wissen aber schon, dass zwei Nullstellen existieren, also zwei Fixpunkte von $g(x) := x^2 - 2 + x$. Damit können wir den Banachschen Fixpunktsatz nicht direkt auf $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ anwenden.
- Restringieren wir g auf $[1, 2]$, dann ist auf diesem Intervall ist $g' \geq 3$, g also nicht kontrahierend.

Es wäre nun sinnvoll, statt f die Funktion cf benutzen, die für $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die gleichen Nullstellen wie f besitzt, aber für $c \in (-\frac{1}{2}, 0)$ eine kontrahierende Abbildung $g_c(x) := cf(x) + x$ mit Fixpunkt $\sqrt{2}$ liefert. Wir gehen aber einen anderen Weg, um die Flexibilität des Fixpunktverfahrens zu zeigen.

- Nach der vietaschen Wurzelformel ist die Umkehrfunktion von $g|_{[1, \infty)}$ gleich

$$h : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty) \quad , \quad h(y) = -\frac{1}{2} + \sqrt{y + 9/4},$$

und $h'(y) = \frac{1}{\sqrt{4y+9}}$, sodass $|h'(y)| \leq \frac{1}{3}$ ist für $y \geq 0$. Damit ist h eine kontra-

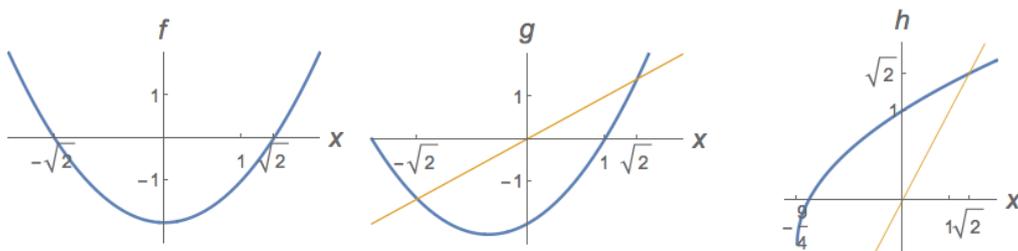


Abbildung 8.1: $\sqrt{2}$ als: Nullstelle von $f(x) = x^2 - 2$ (links), Fixpunkt von $g(x) = f(x) + x$ (Mitte) bzw. Fixpunkt von $h(y) = -\frac{1}{2} + \sqrt{y + 9/4}$ (rechts)

hiere Abbildung auf dem vollständigen metrischen Raum $[0, \infty)$. Außerdem besitzt sie als Umkehrfunktion von $g|_{[1, \infty)}$ den Fixpunkt $\sqrt{2}$.

Mit $y_0 := 0$ ist $y_1 = h(y_0) = 1$, also gemäß (8.2) die Fehlerschranke

$$|y_m - \sqrt{2}| \leq \frac{3}{2} \cdot 3^{-m}.$$

Numerisch ergibt sich gerundet:

m	y_m	Fehler	Fehlerschranke
0	0	1.41421	1.5
1	<u>1</u>	0.41421	0.5
2	<u>1.3027</u>	0.11151	0.16666
3	<u>1.3848</u>	0.02941	0.05555
4	<u>1.4065</u>	0.00771	0.01851
5	<u>1.4122</u>	0.00201	0.00617

Da der Abstand (8.2) vom Fixpunkt exponentiell in der Zahl m der Iterationen schrumpft, wächst die Zahl der (unterstrichenen) richtigen Ziffern ungefähr linear mit m . \diamond

Diese *lineare Konvergenzgeschwindigkeit* ist typisch für kontrahierende Abbildungen und für viele Zwecke ausreichend.

8.2 Das Newton-Verfahren

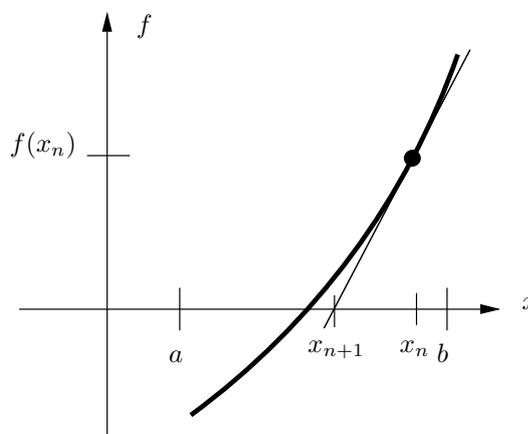
Manchmal kann man bei der Nullstellensuche aber die *Newton-Iteration* benutzen, die dann in m *quadratische Konvergenzgeschwindigkeit* liefert:

Es sei $f \in C^2([a, b], \mathbb{R})$, also eine zweimal stetig differenzierbare Funktion auf dem Intervall $[a, b]$, und

$$f'(x) \neq 0 \quad (x \in [a, b]).$$

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

mit $x_0 \in [a, b]$ ist der Schnittpunkt der Tangente an den Graphen von f bei $(x_n, f(x_n))$ mit der x -Achse, siehe nebenstehende Abbildung.



8.10 Satz (Newton-Iteration) Ist $f(x^*) = 0$ für $x^* \in [a, b]$, dann gilt

$$|x_{n+1} - x^*| \leq |x_n - x^*|^2 \cdot M \quad \text{mit} \quad M := \frac{\max_{x \in [a, b]} |f''(x)|}{\min_{x \in [a, b]} |f'(x)|} \quad (n \in \mathbb{N}_0), \quad (8.3)$$

wenn $x_m \in [a, b]$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$.

Beweis: Für ein ξ im Intervall zwischen x_n und x^* gilt

$$\begin{aligned}
 |x_{n+1} - x^*| &= \left| x_n - \frac{f(x_n) - \overbrace{f(x^*)}^0}{f'(x_n)} - x^* \right| \\
 &= \left| (x_n - x^*) \cdot \left(1 - \underbrace{\frac{f(x_n) - f(x^*)}{x_n - x^*}}_{=f'(\xi) \text{ (Mittelwertsatz)}} \cdot \frac{1}{f'(x_n)} \right) \right| \\
 &= |x_n - x^*| \cdot \left| \frac{f'(x_n) - f'(\xi)}{f'(x_n)} \right| \\
 &\leq |x_n - x^*|^2 \cdot \left| \frac{f'(x_n) - f'(\xi)}{x_n - \xi} \cdot \frac{1}{f'(x_n)} \right| \\
 &= |x_n - x^*|^2 \cdot \frac{|f''(\eta)|}{|f'(x_n)|},
 \end{aligned}$$

wobei nach dem Mittelwertsatz η geeignet zwischen x_n und ξ gewählt wird. \square

8.11 Bemerkung (Newton-Iteration: Hinreichende Voraussetzung)

Die Voraussetzungen des Satzes sind z.B. erfüllt, wenn gilt: $f(a) < 0 < f(b)$, $f''(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$ und $f(x_0) \geq 0$. Denn dann muss wegen des Zwischenwertsatzes f eine Nullstelle x^* besitzen, und $x^* \leq x_{n+1} \leq x_n$. \diamond

8.12 Beispiel Für $f(x) := x^2 - 2$ konvergiert das Newton-Verfahren $x_{n+1} := \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$ viel schneller gegen die Nullstelle $\sqrt{2}$ als das Fixpunktverfahren von Beispiel 8.9. Da f stetig und $f(1) < 0 < f(2)$ ist, befindet sich im Intervall $[a, b] := [1, 2]$ eine Nullstelle. Dort ist die Konstante M aus Satz 8.10 gleich 1.

In der folgenden gerundeten Tabelle ist als Fehlerschranke für x_{n+1} der Wert $(x_n - x^*)^2$ mit $x^* = \sqrt{2}$ eingetragen. In numerischen Anwendungen kann dagegen die Fehlerschranke (8.3) des Newton-Verfahrens nicht so einfach gewonnen werden wie beim Fixpunktverfahren, da die Nullstelle x^* nicht bekannt ist.

n	x_n	Fehler	Fehlerschranke
0	2	0.585786	
1	<u>1.5000000000</u>	0.085786	0.343145
2	<u>1.4166666666</u>	0.002453	0.007359
3	<u>1.4142156863</u>	0.000002	0.000006
4	<u>1.4142135624</u>	0.000000	0.000000

\diamond

Ist der Startwert x_0 allerdings zu weit von der gesuchten Nullstelle x^* entfernt, braucht das Newton-Verfahren nicht zu konvergieren. Insbesondere ist Vorsicht geboten, wenn zwischen x_0 und x^* ein Extremum von f liegt.

8.13 Beispiel (Divergenz des Newton-Verfahrens)

Das Polynom $f(x) := (x^2 - 1)(x^2 + (0.4)^2)$ besitzt die reellen Nullstellen ± 1 und die imaginären Nullstellen $\pm \frac{2}{5}i$. Es besitzt Minima bei $\pm\sqrt{0.42}$ und ein lokales Maximum bei 0. Newton-Iteration:

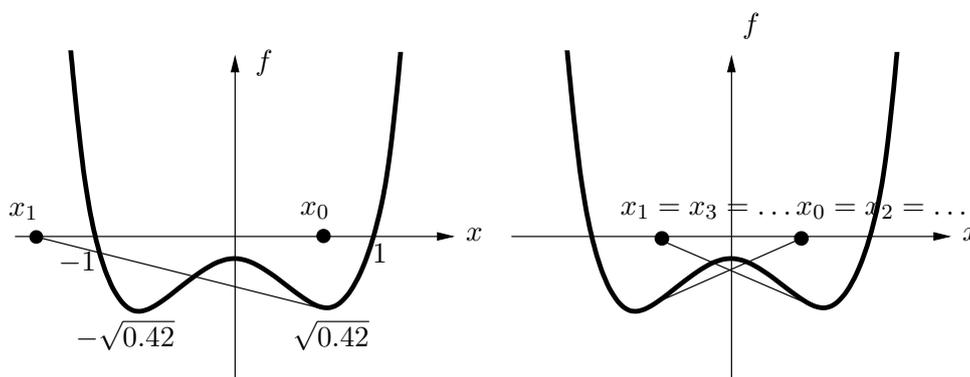
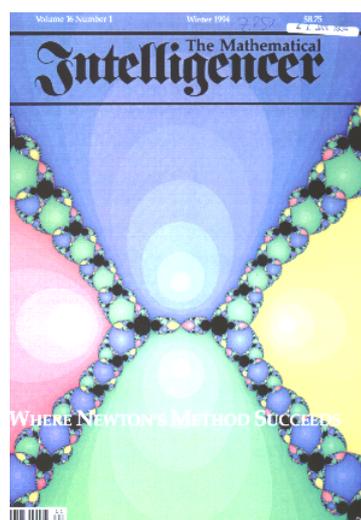


Abbildung 8.2: Newton-Iteration eines Polynoms 4. Grades

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^4 - 0.84x_n^2 - 0.16}{4x_n^3 - 1.68x_n}$$

- Für $x_0 \lesssim \sqrt{0.42}$ ist $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -1$, siehe Abbildung 8.2 (links).
- Für $x_0 > \sqrt{0.42}$ ist $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.
- Aber auch der Wechsel zwischen zwei Werten ist möglich, siehe Abb. 8.2 (rechts).
- In der komplexen Ebene besitzen die vier Nullstellen ihre *Bassins*, Bereiche des Anfangswertes, die zur Konvergenz führen. Diese sind in der nebenstehenden Abbildung mit verschiedenen Farben dargestellt. In den schwarzen Bereichen besitzt die Newton-Iteration keinen Limes [aus: *Mathematical Intelligencer*, Vol. 16, No. 1].
◇



8.3 Das vereinfachte Newton-Verfahren

Wir nähern uns der Eingangsfrage nach den Nullstellen einer Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf der offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^m$, indem wir zunächst den Spezialfall $n = m$ untersuchen. $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist dann ein *Vektorfeld*. Dessen Nullstellen sind typischerweise isoliert, entsprechend $m - n = 0$ Parametern. Für deren Berechnung setzen wir das *Newton-Verfahren* ein, das wir in Kapitel 8.2 für den eindimensionalen Fall benutzt haben.

Dort haben wir die Abbildung $x \mapsto F(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ iteriert; geometrisch entspricht $F(x)$ dem Schnittpunkt der Tangente von f am Punkt $(x, f(x))$ mit der x -Achse.

Wir könnten dieses Verfahren nun direkt auf m Dimensionen verallgemeinern, indem wir $\frac{1}{f'(x)}$ durch die $m \times m$ -Matrix $(Df(x))^{-1}$ ersetzen. Dies ist zwar numerisch hervorragend, führt aber zu beweistechnischen Komplikationen, weswegen wir das *vereinfachte Newton-Verfahren* mit

$$x_{n+1} := F(x_n) \quad \text{für} \quad F(x) := x - A^{-1}f(x)$$

und x -unabhängig gewählter $m \times m$ -Matrix $A \approx Df(x)$ verwenden.

In einer Dimension liegt es nahe, dass für vernünftige A unser Verfahren immer noch zum Ziel führt, wenn auch nicht so schnell¹⁰, siehe Abb. 8.3. Wir

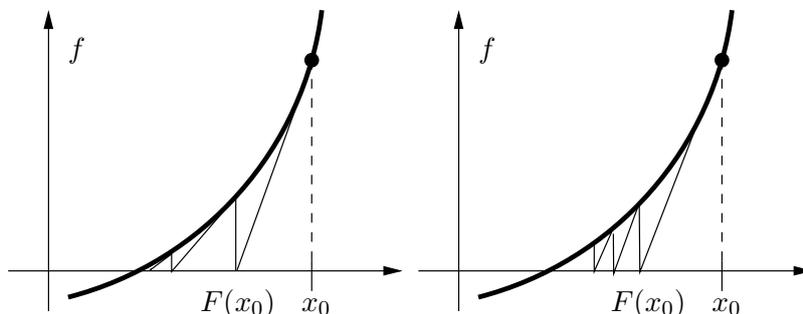


Abbildung 8.3: Newton-Verfahren (links) und vereinfachtes Newton-Verfahren (rechts), mit $A := f'(x_0)$

zeigen dies, indem wir F als kontrahierende Abbildung entlarven, also ein $\theta < 1$ finden mit $\|F(y) - F(x)\| \leq \theta \|y - x\|$.

Im eindimensionalen Fall können wir als Lipschitz-Konstante θ das Supremum des Betrags der Ableitung wählen. Nach dem folgenden Satz ist dies auch in m Dimensionen möglich.

¹⁰Wenden wir das Fixpunktverfahren aus Kapitel 8.1 auf die Nullstellensuche für f an, dann wird $g(x) = f(x) + x$ iteriert, es ist also $A = -\mathbb{1}$.

8.14 Bemerkung Für $A \in \text{Mat}(n \times m, \mathbb{R})$, die euklidischen Normen $\|\cdot\|_k : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ und die Sphären $S^{k-1} = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\|_k = 1\}$ ist die *Matrixnorm* durch

$$\|A\| := \sup_{v \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}} \frac{\|Av\|_n}{\|v\|_m} = \max_{v \in S^{m-1}} \|Av\|_n \quad (8.4)$$

definiert. Sie ist also der maximale Streckungsfaktor der durch A gegebenen linearen Abbildung, und Letztere bekommt die gleiche Norm zugewiesen.

(8.4) ist eine Norm auf diesem $n \times m$ -dimensionalen Vektorraum, d.h. für $A, B \in \text{Mat}(n \times m, \mathbb{R})$ und $k \in \mathbb{R}$ gilt $\|A\| > 0$ für $A \neq 0$, $\|kA\| = |k|\|A\|$ und $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

Die Matrixnorm ist verträglich mit den Vektornormen, d.h. $\|Av\|_n \leq \|A\| \|v\|_m$. Außerdem ist sie für $m = n$ *submultiplikativ*, d.h. $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$. \diamond

8.15 Satz (Schranksatz) Ist $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und konvex, $F \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ und $L := \sup_{x \in U} \|DF(x)\| < \infty$, dann ist L eine Lipschitz-Konstante:

$$\|F(y) - F(x)\| \leq L \|y - x\| \quad (x, y \in U).$$

Beweis: Es sei $v := F(y) - F(x) \neq 0$ (sonst ist nichts zu zeigen), und

$$V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad V(z) := v \cdot z$$

der zu v duale Vektor. Die Abbildung $g := V \circ F : U \rightarrow \mathbb{R}$ hat nach dem Mittelwertsatz (Satz 6.9) die Eigenschaft

$$g(y) - g(x) = Dg_\xi(y - x)$$

für eine geeignete Konvexkombination $\xi = (1 - t)x + ty \in U$ mit $t \in [0, 1]$, sodass

$$|g(y) - g(x)| \leq \|Dg(\xi)\| \|y - x\|. \quad (8.5)$$

Nun ist $g(y) - g(x) = \|v\|^2$, andererseits $Dg(\xi) = v \cdot DF(\xi)$, also $\|Dg(\xi)\| \leq \|v\| \|DF(\xi)\|$. Eingesetzt in (8.5) ergibt dies $\|v\|^2 \leq \|v\| \|DF(\xi)\| \|y - x\|$. Daraus folgt nach Division durch $\|v\| > 0$ die Aussage. \square

Es bezeichnet

$$\text{GL}(n, \mathbb{K}) := \{M \in \text{Mat}(n, \mathbb{K}) \mid \det(M) \neq 0\}$$

die Gruppe der *invertierbaren* $n \times n$ -Matrizen über dem Körper \mathbb{K} . Damit können wir die Konvergenz des vereinfachten Newton-Verfahrens beweisen:

8.16 Satz Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$, und die abgeschlossene r -Umgebung von x_0 in U enthalten, d.h. $\overline{U_r(x_0)} \subseteq U$.

Ferner gebe es ein $A \in \text{GL}(m, \mathbb{R})$, so dass gleichzeitig gilt:

$$\|A^{-1}Df(x) - \mathbb{1}\| \leq \frac{1}{2} \quad (x \in \overline{U_r(x_0)}) \quad \text{und} \quad \|A^{-1}f(x_0)\| \leq \frac{r}{2}. \quad (8.6)$$

Dann konvergiert das vereinfachte Newton-Verfahren

$$x_{k+1} := F(x_k) \quad \text{mit} \quad F(x) := x - A^{-1}f(x)$$

gegen die einzige Nullstelle ξ des Vektorfeldes f in $U_r(x_0)$.

Beweis: • Aus (8.6) folgt nach Satz 8.15 für das konvexe $\tilde{U} := \overline{U_r(x_0)} \subseteq U$

$$\|F(y) - F(x)\| \leq \sup_{z \in \tilde{U}} \|DF(z)\| \cdot \|y - x\| \leq \frac{1}{2} \|y - x\| \quad (x, y \in \tilde{U}),$$

denn $DF(z) = \mathbb{1} - A^{-1}Df(z)$. F ist also auf \tilde{U} kontrahierend, und

$$\|F(x_0) - x_0\| = \|A^{-1}f(x_0)\| \leq \frac{r}{2}.$$

• Daher ist für $x \in \tilde{U}$

$$\|F(x) - x_0\| \leq \|F(x) - F(x_0)\| + \|F(x_0) - x_0\| \leq \frac{1}{2} \|x - x_0\| + \frac{r}{2} \leq r,$$

sodass $F(\tilde{U}) \subseteq \tilde{U}$.

• Die Aussage folgt damit aus dem Banachschen Fixpunktsatz (Satz 8.7), denn \tilde{U} ist abgeschlossen, also ein vollständiger metrischer Raum. \square

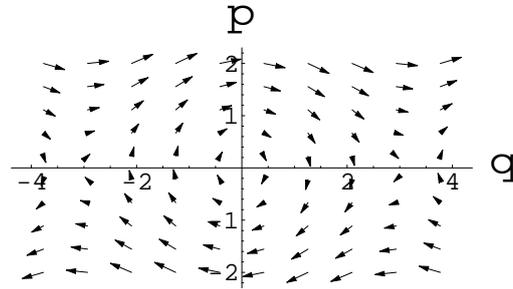
8.17 Bemerkungen (Vereinfachtes Newton-Verfahren)

1. Setzt man z.B. $A := Df(x_0)$, und ist $A \in \text{GL}(m, \mathbb{R})$, dann ist die erste Bedingung in (8.6) für genügend kleines r erfüllt. Andererseits sollte r nicht zu klein sein, damit die zweite Bedingung $\|A^{-1}f(x_0)\| \leq \frac{r}{2}$ des Satzes 8.16 erfüllt ist.

Beide Bedingungen zusammen lassen sich nur erfüllen, wenn der Startpunkt x_0 der Iteration schon nahe an einer isolierten Nullstelle von f liegt.

2. Andererseits wird für ein affines Vektorfeld der Form $f(x) = Ax + b$ (mit $A \in \text{GL}(m, \mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}^m$) an einem beliebigen Anfangspunkt $x_0 \in \mathbb{R}^m$ die Ableitungsmatrix $Df(x_0)$ gleich A , sodass schon die erste Iterierte $x_1 = -A^{-1}b$ die Nullstelle von f ist. \diamond

8.18 Beispiel Wir betrachten das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} p \\ -\sin q \end{pmatrix}$, in der $r := 1$ -Umgebung von $x_0 = \begin{pmatrix} q_0 \\ p_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.



f ist das Vektorfeld der Pendel-Differentialgleichung

$$\dot{q} = p \quad , \quad \dot{p} = -\sin q$$

in der durch Ort q und Impuls p parametrisierten Ebene, siehe Abbildung.

Offensichtlich ist $\xi := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_1(x_0)$ die einzige Nullstelle von f in $U_1(x_0)$.

Wir finden $Df(q, p) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos q & 0 \end{pmatrix}$ und setzen $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, also $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Damit ist

$$\|A^{-1}f(x_0)\| = \left\| \begin{pmatrix} \sin q_0 \\ p_0 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2}$$

und für $x \in \overline{U_1(x_0)}$

$$\begin{aligned} \|A^{-1}Df(x) - \mathbb{1}\| &= \left\| \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos q & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \cos(q)-1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\| \\ &= 1 - \cos q \leq 1 - \left(1 - \frac{1}{2}q^2\right) = \frac{1}{2}q^2 \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Die Bedingungen des Satzes 8.16 sind also erfüllt. Wir iterieren:

$$x_0 = \begin{pmatrix} q_0 \\ p_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad , \quad x_1 = \begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \end{pmatrix} = x_0 - \begin{pmatrix} \sin q_0 \\ p_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und landen mit Glück schon nach der ersten Iteration im kritischen Punkt.

Für allgemeine Anfangsbedingungen x_0 in der Nähe des Nullpunktes ist

$$x_1 = \begin{pmatrix} q_0 \\ p_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sin q_0 \\ p_0 \end{pmatrix} = \mathcal{O}(|q_0|^3). \quad \diamond$$

8.4 Konstruktion der impliziten Funktionen

Wir kommen jetzt zum allgemeinen Fall der Nullstellenmenge einer Funktion $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $n \leq m$.

Wir nehmen an, dass wir schon eine Nullstelle kennen und wollen die Nullstellenmenge in der Nähe dieser Nullstelle parametrisieren. Wir benötigen dazu $p := m - n$ Parameter und wählen dazu p der Koordinaten. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei also $x \in U$ in der Form

$$x = (y, z) \quad \text{mit} \quad y = (y_1, \dots, y_p) \quad \text{und} \quad z = (z_1, \dots, z_n)$$

mit $p := m - n$ geschrieben, und wir schreiben Df als $Df = (D_y f, D_z f)$ mit

$$D_y f := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y_p} \end{pmatrix}, \quad D_z f := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial z_n} \end{pmatrix}.$$

Die zweite Matrix ist also quadratisch.

Unser Ziel ist es *lokal*, d.h. in der Nähe eines Punktes X der Nullstellenmenge von f , die implizit durch die Gleichungen

$$f_1(y_1, \dots, y_p, z_1, \dots, z_n) = 0, \dots, f_n(y_1, \dots, y_p, z_1, \dots, z_n) = 0$$

gegebenen z_1, \dots, z_n als Funktionen von y_1, \dots, y_p darzustellen.

8.19 Satz (Satz über implizite Funktionen) *Es gelte $f(X) = 0$ für $X = (Y, Z) = (Y_1, \dots, Y_p, Z_1, \dots, Z_n) \in U$ und $D_z f(X) \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$.*

• *Dann gibt es offene Umgebungen $V := U_{r_y}(Y) \subset \mathbb{R}^p$, $W := U_{r_z}(Z) \subset \mathbb{R}^n$, $r_y, r_z > 0$ und eine Funktion $g \in C^1(V, W)$ mit*

$$\text{graph}(g) = f^{-1}(0) \cap (V \times W).$$

• *Ist $f \in C^k(U, \mathbb{R}^n)$ mit $1 \leq k \leq \infty$, dann ist $g \in C^k(V, W)$.*

8.20 Bemerkung g ist die gesuchte implizit definierte Funktion, die die Nullstellenmenge lokal parametrisiert, d.h.

$$f(y, g(y)) = 0 \quad (y \in V).$$

Ist z.B. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|^2 - 1$, und $X = (Y, Z) = (0, 1)$, dann ist für ein $r_y \in (0, 1)$, also $V = (-r_y, r_y)$ die implizite Funktion von der Form

$$g: V \rightarrow W, \quad y \mapsto \sqrt{1 - y^2}$$

mit dem Intervall $W = (1 - r_z, 1 + r_z)$, siehe Abbildung 8.4. ◇

Beweis: • Im vereinfachten Newton-Verfahren setzen wir

$$A := D_z f(X) \in \text{GL}(n, \mathbb{R}) \quad \text{und} \quad F_y(z) := z - A^{-1} f(y, z).$$

Wegen der stetigen Differenzierbarkeit von f ist für ein geeignetes $r > 0$

$$\|D_z F_y(z)\| \leq \frac{1}{2} \quad \text{für alle} \quad (y, z) \in \bar{U}_r(Y) \times \bar{U}_r(Z) \subset U,$$

denn im Mittelpunkt X dieses Gebietes ist ja

$$D_z F_y(z) = \mathbb{1} - A^{-1} D_z f(y, z)$$

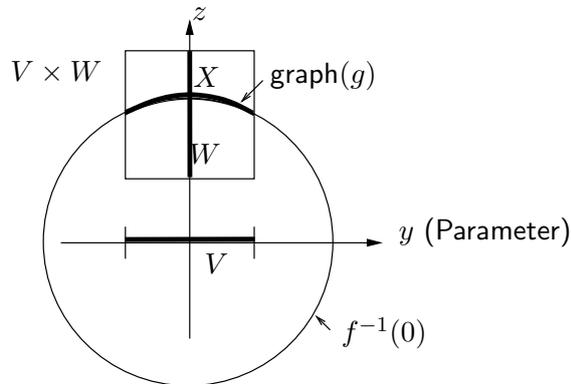


Abbildung 8.4: Lokale Parametrisierung des Kreises $S^1 = f^{-1}(0)$ durch g

gleich Null.

Ebenso gilt für kleine $r_y \in (0, r)$ und $V := U_{r_y}(Y)$

$$\|A^{-1}f(y, Z)\| \leq \frac{r}{2} \quad (y \in V),$$

denn es ist ja $f(Y, Z) = 0$. Damit sind beide Voraussetzungen von Satz 8.16 für alle Parameterwerte y in dieser Umgebung erfüllt, sodass das vereinfachte Newton-Verfahren für $y \in V$ Nullstellen $g(y) \in W := U_r(Z)$ liefert, die sogar eindeutig sind.

• Nun braucht $g : V \rightarrow W$ a priori noch nicht einmal stetig zu sein. Um dies zu zeigen, betrachten wir eine Nullstelle $x = (y, z)$ in der Nähe von $X = (Y, Z)$ und schreiben

$$\begin{aligned} 0 &= f(x) - f(X) = (f(y, z) - f(Y, z)) + (f(Y, z) - f(Y, Z)) \\ &= B_y(y - Y) + A_y(z - Z) \end{aligned}$$

mit

$$B_y := \begin{pmatrix} D_y f_1(\xi_1, z) \\ \vdots \\ D_y f_n(\xi_n, z) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_y := \begin{pmatrix} D_z f_1(Y, \eta_1) \\ \vdots \\ D_z f_n(Y, \eta_n) \end{pmatrix},$$

nach dem Mittelwertsatz für reelle Funktionen. Dabei liegen die ξ_i auf der Strecke zwischen y und Y , und die η_i auf der zwischen z und Z .

• Invertierbarkeit ist gleichbedeutend mit nichtverschwindender Determinante:

$$GL(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*) \quad \text{für} \quad \det : \text{Mat}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Wegen der Invertierbarkeit von A und der Stetigkeit der Abbildung \det liegt damit eine geeignete ε -Umgebung von $A \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$ in $GL(n, \mathbb{R})$. Für kleine

Werte von r ist A_y eine $n \times n$ -Matrix, die in dieser ε -Umgebung von A liegt, denn $\eta_i \in \overline{U}_r(Z)$, und $D_z f$ ist stetig.

- Auflösung nach $z - Z = g(y) - g(Y)$ ergibt

$$g(y) - g(Y) = M(y)(y - Y) \quad \text{mit} \quad M(y) := -A_y^{-1}B_y.$$

Da $\|M(y)\| \leq c$ für $y \in V$, ist zunächst $\lim_{y \rightarrow Y} g(y) = g(Y)$, g also stetig bei Y .

- Weiter ist in diesem Limes $M(y) = M(Y) + o(1)$, denn

$$M(y) - M(Y) = A_y^{-1}(B_Y - B_y) + (A_Y^{-1} - A_y^{-1})B_Y,$$

und wegen der Minorenformel für die Inverse ist die Abbildung

$$\text{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R}) \quad , \quad A \mapsto A^{-1}$$

sogar stetig differenzierbar (FISCHER, [Fi], Abschnitt 3.3.4).

Damit ist g bei Y differenzierbar. Das gleiche Argument kann aber für alle $y \in V$ angewandt werden, sodass g in V differenzierbar ist.

- Stetig differenzierbar ist g , da aus $f(y, g(y)) = 0$, also $D_y f(y, g(y)) = 0$ und der Kettenregel $D_y f(y, g(y)) = D_1 f(y, g(y)) + D_2 f(y, g(y)) Dg(y)$ folgt:

$$Dg(y) = -\left(D_2 f(y, g(y))\right)^{-1} D_1 f(y, g(y))$$

und die rechte Seite in y stetig ist.¹¹

- Iteration des Argumentes für $f \in C^k(U, \mathbb{R}^n)$ liefert $g \in C^k(V, W)$. □

Das war nun ein langer Beweis und zur Abwechslung wenden wir ihn auf ein einfaches Beispiel an.

8.21 Beispiel (Die Kreislinie als implizite Funktion)

Die Kreislinie $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ ist die Nullstellenmenge von $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$. Wir wählen $X = (Y, Z) := (0, 1) \in S^1$ und sehen für $x = (y, z)$, dass $D_y f(x) = 2y$ und $D_z f(x) = 2z$, sodass $D_z f(X) = 2 \neq 0$. Wir können also den Satz über die implizite Funktion anwenden und eine lokal definierte Funktion g mit $f(y, g(y)) = 0$, $g(0) = 1$ aufsuchen.

Mit $A := D_z f(X) = 2$ ist

$$F_y(z) = z - \frac{1}{2}(y^2 + z^2) + \frac{1}{2}.$$

Wir starten mit der konstanten Funktion $g_0(y) := 1$, und erhalten

¹¹Diese Formel ist nützlich, denn sie erlaubt die Berechnung von Dg ohne explizite Berechnung von g .

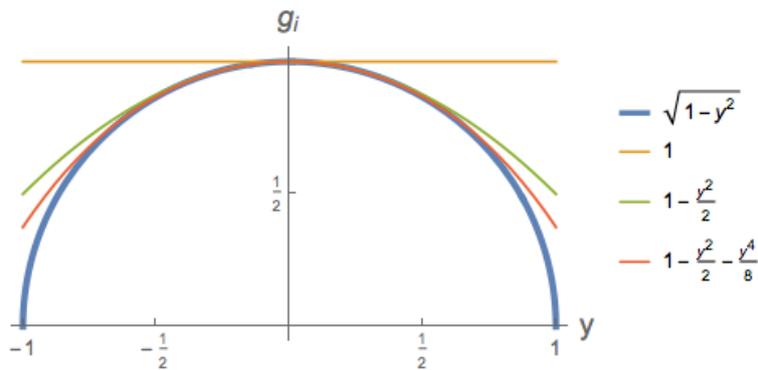


Abbildung 8.5: Newton-Approximation der Kreislinie

$$g_1(y) := F_y(g_0(y)) \quad , \quad \text{also} \quad g_1(y) = 1 - y^2/2.$$

Die nächste Iteration $g_2(y) := F_y(g_1(y))$ liefert

$$g_2(y) = 1 - \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2}(y^2 + (1 - \frac{y^2}{2})^2 - 1) = 1 - \frac{y^2}{2} - \frac{1}{8}y^4,$$

und wir approximieren mit den g_i die Funktion

$$g(y) = \sqrt{1 - y^2} = 1 - \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2 \cdot 4}y^4 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}y^6 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}y^8 \dots \quad \diamond$$

Es ist im Allgemeinen nicht möglich, aber auch nicht notwendig, wie in Satz 8.19 die ersten p Koordinaten als Parameter zu benutzen:

8.22 Satz *Es sei $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $n \leq m$. Ist $X \in f^{-1}(0)$ regulärer Punkt von f , also $\text{Rang}(Df(X)) = n$, dann lassen sich Koordinatenindizes $1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m$ auswählen, sodass*

$$\begin{pmatrix} D_{i_1} f_1(X) & \dots & D_{i_n} f_1(X) \\ \vdots & & \vdots \\ D_{i_1} f_n(X) & \dots & D_{i_n} f_n(X) \end{pmatrix} \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$$

gilt, diese Matrix also invertierbar ist.

8.23 Bemerkung Dies ist zunächst eine rein algebraische Aussage über die Matrix $Df(X)$. Setzt man aber $z_k := x_{i_k}$, $k = 1, \dots, n$ und nennt die restlichen $p = m - n$ Koordinaten y_1, \dots, y_p , dann lässt sich nach Satz 8.19 die Nullstellenmenge in der Nähe von X durch die Parameter y_k parametrisieren. \diamond

Beweis von Satz 8.22: Der Rang einer Matrix ist die Maximalzahl unabhängiger Spaltenvektoren (oder auch Zeilenvektoren). Wir können also durch Auswahl der Spalten i_1, \dots, i_n eine quadratische Untermatrix der Größe n von $Df(X) \in \text{Mat}(n \times m, \mathbb{R})$ erzeugen, die invertierbar ist. \square

8.24 Beispiel (Wahl der lokalen Koordinaten)

$f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|^2 - 1$ hat die $p := m - 1$ -dimensionale Sphäre als Nullstellenmenge: $f^{-1}(0) = S^p$. Da $Df(X) = 2X \neq 0$ für alle $X \in f^{-1}(0)$, ist $\text{Rang}(Df(X)) = 1$, und wir können nach Satz 8.22 in der Nähe jedes Punktes X der Sphäre S^p genau p der m Komponenten (x_1, \dots, x_m) von $x \in S^p$ als lokale Koordinaten auswählen.

Allerdings ist die Wahl abhängig von X : Genau wenn nämlich $X_i \in \{-1, +1\}$ ist, darf x_i nicht als lokale Koordinate gewählt werden. \diamond

Die folgenden Begriffe ergänzen die Definition 7.11 regulärer bzw. kritischer Punkte.

8.25 Definition Für $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ mit $n \leq m$ heißt $y \in \mathbb{R}^n$ **regulärer Wert** von f , wenn alle $x \in f^{-1}(y)$ reguläre Punkte von f sind, sonst **kritischer** (oder **singulärer**) **Wert**.

8.26 Beispiel Im Beispiel 8.24 sind alle $y \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ reguläre Werte von f , während -1 kritischer Wert ist. Da die Zahlen $y < -1$ gar nicht im Bild von f enthalten sind, sind sie trivialerweise reguläre Werte. All die Urbilder $f^{-1}(y)$ regulärer Werte $y > -1$ sind Sphären um den Ursprung (mit Radius $\sqrt{y+1}$). \diamond

8.27 Definition Für $p \in \{0, \dots, m\}$ heißt eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^m$ **p -dimensionale Untermannigfaltigkeit** des \mathbb{R}^m , wenn jeder Punkt $x \in M$ eine Umgebung $V_x \subseteq \mathbb{R}^m$ besitzt, so dass für eine geeignete Abbildung $f \in C^1(V_x, \mathbb{R}^{m-p})$ mit regulärem Wert 0 gilt:

$$M \cap V_x = f^{-1}(0).$$

Im einfachsten Fall ist $M = f^{-1}(0)$, aber man möchte auch Mengen wie im folgenden Beispiel als Mannigfaltigkeiten bezeichnen.

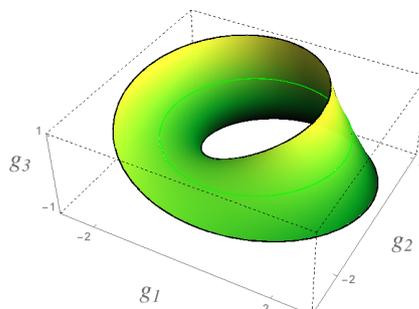
8.28 Beispiel (Möbius-Band) Für $U := \mathbb{R} \times (-1, 1)$ und $F \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$,

$$F(x, y) := \begin{pmatrix} (2-y \sin \frac{x}{2}) \sin x \\ (2-y \sin \frac{x}{2}) \cos x \\ y \cos \frac{x}{2} \end{pmatrix}$$

ist $M := F(U) \subset \mathbb{R}^3$ das so genannte **Möbius-Band**.

Für die Parametrisierung würde der Winkelbereich $x \in [0, 2\pi)$ ausreichen, denn zwar kommen Winkel $x/2$ in F vor, aber $F(x + 2\pi, y) = F(x, -y)$. $F(\mathbb{R} \times \{0\})$ ist eine Kreislinie vom Radius 2.

Da die Fläche M nur *eine* Seite besitzt, kann sie nicht Niveaumenge $f^{-1}(0)$ für



einen regulären Wert 0 sein, denn sonst würde $\nabla f(x) \neq 0$ am Punkt $x \in M$ senkrecht auf der Fläche stehen und damit eine von zwei Seiten auszeichnen. \diamond

8.29 Definition Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$.

- f heißt **Diffeomorphismus auf das Bild** $V := f(U) \subseteq \mathbb{R}^n$, wenn V offen, $f : U \rightarrow V$ bijektiv und $f^{-1} : V \rightarrow U$ stetig differenzierbar ist.
- f heißt **lokaler Diffeomorphismus**, wenn jeder Punkt $x \in U$ eine offene Umgebung $U_x \subseteq U$ besitzt, für die $f|_{U_x}$ ein Diffeomorphismus auf das Bild ist.

Man kann Diffeomorphismen als Koordinatenwechsel ansehen, und da man gerne dem jeweiligen Problem angepasste Koordinaten verwendet, sind Diffeomorphismen eine häufig verwendete Klasse von Abbildungen.

8.30 Beispiel (Diffeomorphismen) Eine affine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ besitzt die Form $f(x) = Ax + b$ mit $A \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Sie ist genau dann ein Diffeomorphismus, wenn sie bijektiv ist, d.h. wenn $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ ist. \diamond

Aus diesem Beispiel liest man ab, dass die Regularität der Jacobi-Matrix Df Einfluss auf die Invertierbarkeit der Abbildung f hat, denn hier ist $Df = A$.

8.31 Satz Für $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ist $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ genau dann ein lokaler Diffeomorphismus, wenn für alle $x \in U$ gilt: $Df(x) \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$.

Beweis:

- Es sei f ein lokaler Diffeomorphismus und $g : V_x \rightarrow U_x$ die Umkehrfunktion von $f|_{U_x} : U_x \rightarrow V_x$. Dann gilt nach der Kettenregel

$$(Dg)(f(x))Df(x) = D(g \circ f)(x) = D\text{Id}_{U_x}(x) = \mathbb{1},$$

also $Df(x) \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$.

- Es gelte umgekehrt $Df(z) \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$. Um die lokale Inverse von f bei $z \in U$ zu finden, wenden wir den Satz über die implizite Funktion auf

$$F : \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n \quad , \quad (y, z) \mapsto -y + f(z)$$

an. Nach Voraussetzung ist für $X := (f(z), z)$

$$D_z F(X) = Df(z) \in \text{GL}(n, \mathbb{R}),$$

und $F(X) = 0$. Anwendung von Satz 8.19 ergibt die Existenz einer auf der Umgebung $V_z := U_{r_y}(f(z))$ des Bildpunktes definierten Abbildung $g \in C^1(V_z, W)$

mit $W = U_{r_z}(z)$, für die $F(y, g(y)) = f(g(y)) - y = 0$ ist. Wir setzen $U_z := g(V_z) \subseteq W$. Sowohl g als auch $f|_{U_z}$ sind injektiv, denn sonst könnte nicht $f \circ g = \text{Id}_{V_z}$ gelten. Damit ist auch $g \circ f|_{U_z} = \text{Id}_{U_z}$ und nach der Kettenregel $Dg(y) \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ für alle $y \in V_z$. Damit ist U_z nach dem folgenden Satz eine offene Umgebung von z . \square

8.32 Satz *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$. Ist f **regulär**, d.h. gilt $Df(x) \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ für alle $x \in U$, dann ist $f(U)$ offen, falls $V \subseteq U$ offen ist.*

Beweis: Siehe z.B. HILDEBRANDT [Hi, Band 2, Kapitel 1.9]. \square

9 Extrema mit Nebenbedingungen

Selbst unstetige reelle Funktionen können Extremalstellen besitzen. Aber auch bei glatten Funktionen sind die Extremalstellen nicht notwendig kritische Punkte.

9.1 Beispiel Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x_1$ auf der Kreisscheibe

$$D := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$$

besitzt eine Maximalstelle bei $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \partial D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$. Ihr Gradient $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist bei a senkrecht auf dem Rand $\partial D = S^1$ von D .

Allgemein können am Rand ∂D des Definitionsbereiches D lokale Extrema auftreten, ohne dass dort der Gradient verschwindet. \diamond

9.2 Beispiel (Polygon im Kreis)

Es sind $n \geq 3$ Punkte p_1, \dots, p_n so im positiven Umlaufsinn auf eine Kreislinie zu legen, dass das Polygon mit diesen Ecken maximale Fläche f hat. Für Radius 1 des Kreises ist $f = \sum_{i=1}^n f_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \sin(x_i)$, wenn x_i der Zentriwinkel des i -ten Dreiecks ist, und f_i dessen Fläche, siehe Abbildung 9.1.

Es ist also die Funktion $f(x_1, \dots, x_n) := \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \sin(x_i)$ unter den Nebenbedingungen $0 \leq x_i < 2\pi$, $x_1 + \dots + x_n = 2\pi$ zu maximieren (diese Formel ist auch dann richtig, wenn ein Winkel größer als π ist). Jede Anordnung der Punkte p_i mit diesen Relativwinkeln führt dann zu einem Polygon maximaler Fläche. \diamond

9.1 1. Methode: Parametrisierung der Nebenbedingungen

Beispiel 9.1 Die Randpunkte $x \in \partial D$ lassen sich durch $x(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi)$ parametrisieren; es ist $f(x(t)) = \cos t$, also maximal für $t = 0$, d.h. $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Beispiel 9.2 Wir betrachten die Winkel x_1, \dots, x_{n-1} als unabhängige Variable

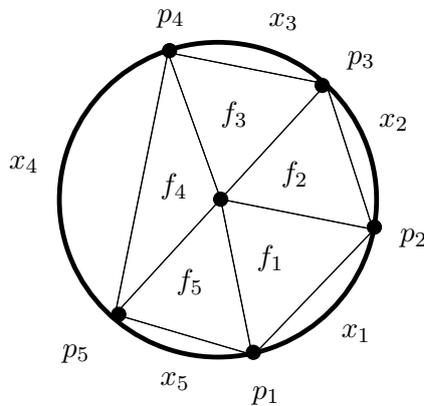


Abbildung 9.1: Fläche $f = f_1 + \dots + f_n$ eines einem Kreis eingeschriebenen Polygons mit n Ecken

und setzen $x_n := 2\pi - (x_1 + \dots + x_{n-1})$. Dann ist

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n(x_1, \dots, x_{n-1})) = \tilde{f}(x_1, \dots, x_{n-1}) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \sin x_i + \frac{1}{2} \sin(2\pi - (x_1 + \dots + x_{n-1})).$$

Damit ist $\nabla \tilde{f}(x_1, \dots, x_{n-1}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos(x_1) - \cos(x_1 + \dots + x_{n-1}) \\ \vdots \\ \cos(x_{n-1}) - \cos(x_1 + \dots + x_{n-1}) \end{pmatrix}$.

Genau für $\cos(x_1) = \dots = \cos(x_{n-1}) = \cos(x_n)$ ist $\nabla \tilde{f}(x_1, \dots, x_{n-1}) = 0$. Nun kann $\cos(x_i) = \cos(x_j)$ nur gelten, wenn die Winkel $x_i = x_j$ sind, oder wenn $x_i + x_j = 2\pi$. Letzteres würde aber wegen unserer Nebenbedingung $x_1 + \dots + x_n = 2\pi$ bedeuten, dass alle Winkel außer einem gleich Null sind, entsprechend der Fläche $f = 0$. Also ist das Maximum nur für die Winkel

$$x_1 = \dots = x_n = \frac{2\pi}{n}, \text{ das heißt Fläche } f = \frac{n}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

realisiert, nur das gleichseitige Polygon besitzt also die maximale Fläche.

In den Beispielen traten als Nebenbedingungen

- Ungleichungen $(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 1)$ und
- Gleichungen $(x_1 + \dots + x_n = 2\pi)$ auf.

Wir gehen also folgendermaßen vor:

- Im Fall von *Ungleichungen* $g(x) \leq 0$ (und in diese Form können wir jede Ungleichung $\tilde{g}(x) \leq c$ durch Übergang zu $g := \tilde{g} - c$ bringen) können wir zunächst untersuchen, ob im Gebiet $\{x \mid g(x) < 0\}$ kritische Punkte auftreten, denn dieses Gebiet ist für stetige g ja offen, sodass nach Satz 7.12 Extrema kritische Punkte sein müssen.
- Danach betrachten wir die Extrema von f auf der Nullstellenmenge $g^{-1}(0)$, d.h. auf dem Rand des Gebietes.

Problem: Gesucht sind die Extrema der Funktion $f \in C^1(U, \mathbb{R})$, $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen unter den Nebenbedingungen $g_1(x) = \dots = g_n(x) = 0$ für $g_i \in C^1(U, \mathbb{R})$, $n < m$.

Lösung: Wir fassen die Nebenbedingungen zu einer vektorwertigen Funktion $G := \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ zusammen. Wenn 0 regulärer Wert von G ist, also für alle $\xi \in G^{-1}(0)$ gilt: $\text{Rang}(DG(\xi)) = n$, können wir nach Satz 8.22 eine lokale Parametrisierung $h : V \rightarrow W$ der Nullstellenmenge $G^{-1}(0)$ mit $G(y, h(y)) = 0$ finden, und f auf dieser Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^m als Funktion $y \mapsto f(y, h(y))$ diskutieren.

Dieses Verfahren ist aber oft zu mühsam.

9.3 Beispiel Gesucht sind kritische Punkte und Extrema der quadratischen Form

$$f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f(x) := \langle x, Ax \rangle$$

für eine Matrix $A \in \text{Mat}(m, \mathbb{R})$ unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$ für $g(x) := 1 - \|x\|^2$, also auf der Sphäre $S^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$.

Eine Parametrisierung der Nebenbedingung bedeutet hier die Einführung von Koordinaten auf S^{m-1} . Dies ist vor allem für hohe Dimensionen m umständlich und unübersichtlich. Oft ist in vergleichbaren Fällen die Methode der Lagrange-Multiplikatoren vorzuziehen, siehe Beispiel 9.6. \diamond

9.2 2. Methode: Lagrange-Multiplikatoren

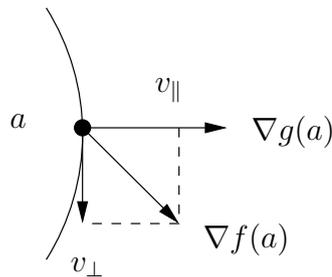
9.4 Satz Zu jeder Lösung a des Extremalproblems für $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$, $g \in C^1(U, \mathbb{R})$ mit $\nabla g(a) \neq 0$ gibt es ein $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ mit

$$\nabla f(a) + \lambda_0 \nabla g(a) = 0.$$

Die beiden Gradienten sind also parallel.

Beweis: $\nabla g(a)$ steht senkrecht auf der Nullstellenmenge $g^{-1}(0)$ durch a .

Wir spalten $\nabla f(a) = v_{\parallel} + v_{\perp}$ eindeutig in die zu $\nabla g(a)$ parallele bzw. senkrechte Komponente v_{\parallel} bzw. v_{\perp} auf.



Ist nun $v_{\perp} \neq 0$, dann ist die Richtungsableitung $\partial_{v_{\perp}} f(a) = \langle v_{\perp}, \nabla f(a) \rangle = \langle v_{\perp}, v_{\perp} \rangle > 0$, d.h. wir können f vergrößern, indem wir auf der Fläche $g^{-1}(0)$ in Richtung v_{\perp} gehen und in umgekehrter Richtung verkleinern. Widerspruch zur Extremalität! \square

Frage: Wie können wir den Satz benutzen, um die Extrema unter Nebenbedingungen zu finden?

Antwort: Mit dem folgenden *Trick*: Betrachten wir

$$F : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad F(x, \lambda) := f(x) + \lambda \cdot g(x).$$

Dann ist $\nabla F(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \nabla f(x) + \lambda \nabla g(x) \\ g(x) \end{pmatrix}$, ist also $\nabla F(a, \lambda_0) = 0$, dann ist $g(a) = 0$ und $\nabla f(a) + \lambda_0 \nabla g(a) = 0$, wir haben also einen kritischen Punkt unter der Nebenbedingung gefunden!

9.5 Bemerkung Bei mehreren Nebenbedingungen

$$g_1(x) = \dots = g_n(x) = 0$$

betrachtet man analog die Funktion mit den *Lagrange-Multiplikatoren* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

$$F : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad F(x, \lambda_1, \dots, \lambda_n) := f(x) + \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x). \quad \diamond$$

9.6 Beispiel (Lagrange-Multiplikatoren)

Für die in Beispiel 9.3 betrachtete quadratische Form

$$f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = \langle x, Ax \rangle$$

mit¹² $A = A^T \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$ und die Nebenbedingung $g(x) = 1 - \|x\|^2 \stackrel{!}{=} 0$ ist

$$F : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x, \lambda) = \langle x, Ax \rangle - \lambda(\langle x, x \rangle - 1) = \langle x, (A - \lambda \mathbb{1})x \rangle + \lambda,$$

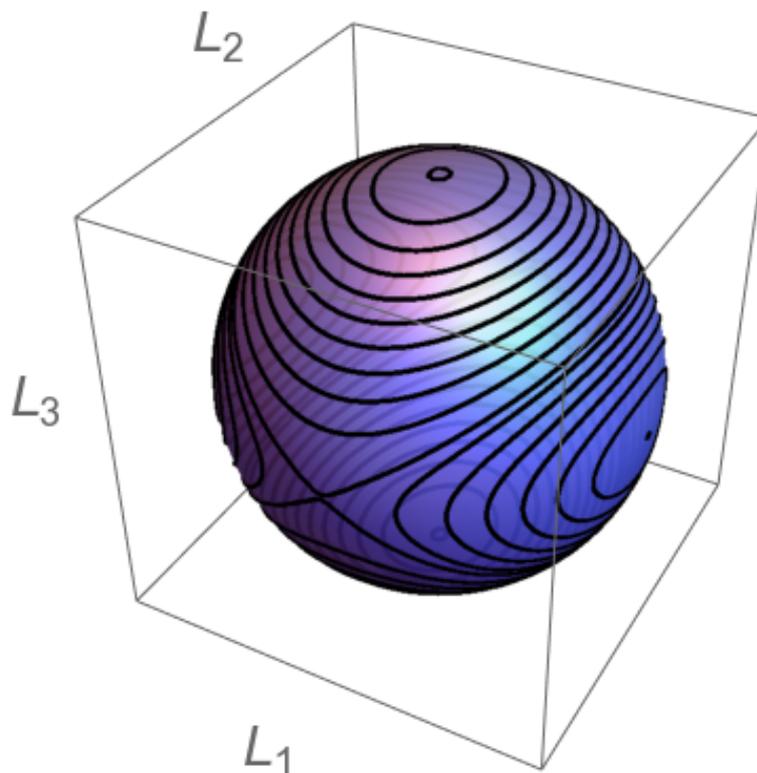
also $\nabla F(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 2(A - \lambda \mathbb{1})x \\ 1 - \|x\|^2 \end{pmatrix}. \quad \diamond$

¹²Falls dagegen A nicht symmetrisch ist, geht man zur symmetrischen Matrix $\tilde{A} := \frac{A+A^T}{2}$ über, denn es gilt ja $\langle x, Ax \rangle = \langle x, \tilde{A}x \rangle$.

Wir müssen also die Eigenwerte $\lambda_i \in \mathbb{R}$ von A und die zugehörigen normierten Eigenvektoren $x_i \in S^{m-1}$, $(A - \lambda_i \mathbb{1})x_i = 0$ finden, denn (genau) für diese gilt $\nabla F(x_i, \lambda_i) = 0$.

Sind die Eigenwerte voneinander verschieden, dann ist mit x_i nur $-x_i \in S^{m-1}$ normierter Eigenvektor zu λ_i .

Für $m = 3$ und $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$, $a_1 < a_2 < a_3$, ergibt sich folgendes Bild: Die Eigenvektoren $\pm e_1$ zum Eigenwert a_1 sind Minima der auf S^2 restringierten Funktion f , die Eigenvektoren $\pm e_3$ zum Eigenwert a_3 Maxima. Bei den Eigenvektoren $\pm e_2 \in S^2$ besitzt $f|_{S^2}$ eine indefinite Hesse-Matrix (Sattel), siehe Abbildung.



In beliebigen Dimensionen m gilt $f(-x) = f(x)$, die kritischen Punkte treten also paarweise an Antipoden von S^{m-1} auf. \diamond

Die Methode der Lagrange-Multiplikatoren hat den Vorteil, dass alle Variablen gleichbehandelt werden. Dadurch wird die Rechnung oft übersichtlicher.

9.7 Beispiel (Polygon im Kreis)

Wie in Beispiel 9.2 ist die unter einer Nebenbedingung zu maximierende Funktion:

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sin(x_i) \quad (\text{Fläche})$$

$$g(x) := -2\pi + \sum_{i=1}^n x_i \quad (\text{Nebenbedingung})$$

Für $F(x, \lambda) := f(x) + \lambda g(x)$ ist $\nabla F(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cos(x_1) + \lambda \\ \vdots \\ \frac{1}{2} \cos(x_n) + \lambda \\ g(x) \end{pmatrix}$.

Aus der Bedingung $\nabla F(a, \lambda_0) = 0$ liest man ab:

- $\cos(a_1) = \dots = \cos(a_n) \quad (= -2\lambda_0)$.
- Unter der Bedingung $0 \leq x_i \leq \pi$ folgt $a_1 = \dots = a_n$. Falls ein Winkel $a_i \in [\pi, 2\pi)$ ist, kann die Bedingung $\cos(a_1) = \dots = \cos(a_n)$ nicht erfüllt sein.
- Wegen $g(a_1, \dots, a_n) = 0$ folgt $a_1 = \dots = a_n = \frac{2\pi}{n}$. ◇

10 Fourier-Reihen

Wir beginnen mit einem die Fourier-Theorie motivierenden Beispiel.

10.1 Die schwingende Saite

Bei einem Saiteninstrument wird ein Ton erzeugt, indem eine auf beiden Seiten eingespannte Saite zum Schwingen gebracht wird. Wird die Auslenkung der Saite aus ihrer Ruhelage an der Stelle x mit $f(x) \in \mathbb{R}$ bezeichnet, dann ist ihre Form zu jedem Zeitpunkt eine Funktion $f \in C_{\mathbb{R}}([0, L])$. Dabei bezeichnet $L > 0$ ihre Länge. Die *Wellengleichung*

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t),$$

eine so genannte *partielle Differentialgleichung*, beschreibt die Auslenkung der Saite als Funktion des Ortes x und der Zeit $t \in \mathbb{R}$. Der Parameter $c > 0$ ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle.

- Im einfachsten Fall einer *Grundschiwingung* haben wir die Anfangsbedingungen

$$u_1(x, 0) = a_1 \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial t} u_1(x, t)|_{t=0} = 0 \quad (x \in [0, L]).$$

Dann ist offensichtlich eine (und sogar die eindeutige) Lösung der Wellengleichung

$$u_1(x, t) = a_1 \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{\pi}{L}ct\right),$$

mit $u_1(x, t + T_1) = u_1(x, t)$ für die zeitliche Periode $T_1 = 2L/c$, also die Frequenz $\omega_1 = 1/T_1$.

- Analog hat für $k \in \mathbb{N}$ die k -te *Oberschwingung* die Form

$$u_k(x, t) = a_k \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right) \cos\left(\frac{\pi k}{L}ct\right),$$

mit Periode $T_k = T_1/k$, also die k -fache Frequenz $\omega_k = k\omega_1$.

- Wird nun die Saite gezupft, gestrichen, angeschlagen oder angeblasen, dann ergibt sich eine Anfangsbedingung der Form $u(x, 0) = f(x)$ mit $f \in C_{\mathbb{R}}([0, L])$ und (als vereinfachende Annahme) $\frac{\partial}{\partial t}u(x, t)|_{t=0} = 0$. Wegen der Linearität der Wellengleichung besitzt diese die Lösung

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right) \cos\left(\frac{\pi k}{L}ct\right),$$

falls die Saite anfänglich die Form

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right) \quad (x \in [0, L]) \quad (10.1)$$

hatte. Es ergibt sich die Frage, wie man bei Kenntnis von f auf die reellen Koeffizienten a_k , die *Fourier-Koeffizienten* von f , schließen kann.

In Abschnitt 10.2 werden wir diese Frage beantworten. Wir benutzen die Formel aber schon im folgenden Beispiel.

10.1 Beispiel (gezupfte Saite)

Für eine in der Mitte gezupfte Saite der Länge π ist $f(x)$ proportional zu $\min(x, \pi - x)$. Damit ergibt sich (mit Proportionalitätsfaktor $p := (2/\pi)^2 f(\pi/2)$)

$$a_k = \frac{2p \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{k^2} \quad (k \in \mathbb{N}) \quad , \text{ also } a_{2\ell} = 0 \quad \text{und} \quad a_{2\ell+1} = \frac{(-1)^\ell 2p}{(2\ell+1)^2}.$$

f ist der gleichmäßige Limes der Partialsummen $x \mapsto s_n(x) := \sum_{k=1}^n a_k \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right)$, siehe Abbildung 10.1, oben. Die Bewegung der Saite als Funktion der Zeit t ist in Abbildung 10.1, unten dargestellt. \diamond

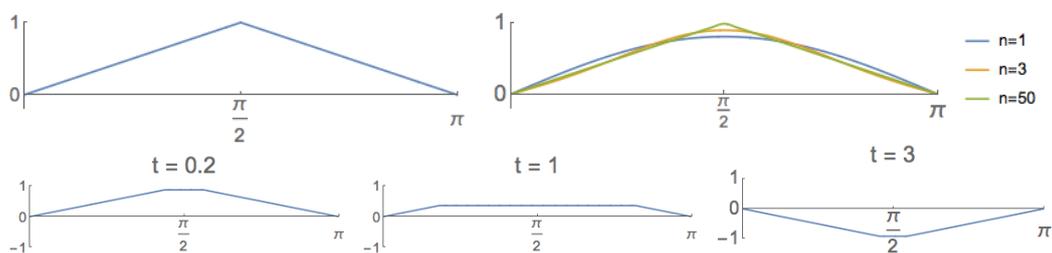


Abbildung 10.1: Oben: Anfangsbedingung f (links) und Partialsummen s_n für $n = 1$, $n = 3$ und $n = 50$ (rechts). Unten: Bewegung der schwingenden Seite.

10.2 Fourier-Analyse

Wir betrachten nun eine lokal Riemann-integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit (der Einfachheit halber) Periode 2π , also $f(x + 2\pi) = f(x)$ ($x \in \mathbb{R}$).

Dann sind ihre *Fourier-Koeffizienten*

$$a_k \in \mathbb{C} \quad , \quad a_k := \int_{x_0}^{x_0+2\pi} f(x) \exp(-ikx) \frac{dx}{2\pi} \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (10.2)$$

wohldefiniert und unabhängig von der Wahl von $x_0 \in \mathbb{R}$. Denn der Integrand ist 2π -periodisch.

Wie kann man nun (10.2) etwas struktureller verstehen?

- Die Menge der Funktionen f mit den beschriebenen Eigenschaften bildet einen \mathbb{C} -Vektorraum V .
- Dieser bildet sogar eine Algebra, d.h. für $f, g \in V$ ist auch das punktweise Produkt $fg : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ein Element von V . Das folgt aus Satz 12.9.2 der *Analysis I*.

- Das Integral

$$I : V \rightarrow \mathbb{C} \quad , \quad I(f) := \int_0^{2\pi} f(x) \frac{dx}{2\pi}.$$

ist eine lineare Abbildung.

- Die Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C} \quad , \quad \langle f, g \rangle := I(f \bar{g}) \quad (10.3)$$

ist sesquilinear¹³ und hermitesch¹⁴. Sie ist positiv semidefinit ($\langle f, f \rangle \geq 0$), aber nicht positiv definit (weil etwa die Indikatorfunktion $f := \mathbb{1}_{2\pi\mathbb{Z}}$ Element von

¹³ $\langle f_1 + kf_2, g \rangle = \langle f_1, g \rangle + k\langle f_2, g \rangle$ und $\langle g, f_1 + kf_2 \rangle = \langle g, f_1 \rangle + \bar{k}\langle g, f_2 \rangle$ für alle $f_i, g \in V$ und $k \in \mathbb{C}$

¹⁴ $\langle g, f \rangle = \overline{\langle f, g \rangle}$ für alle $f, g \in V$

$V \setminus \{0\}$ ist, aber $\langle f, f \rangle = 0$ gilt). Daher ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ kein Skalarprodukt auf V , aber die Einschränkung von (10.3) auf den Untervektorraum $\tilde{V} := V \cap C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist ein solches.

- Bezüglich (10.3) sind die *trigonometrische Monome* genannten Funktionen

$$e_k \in \tilde{V} \quad , \quad e_k(x) = \exp(ikx) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(wegen $\langle e_k, e_\ell \rangle = \int_0^{2\pi} \exp(i(k - \ell)x) \frac{dx}{2\pi} = \frac{\exp(2\pi i(k - \ell)) - 1}{i(k - \ell)}$ für $k \neq \ell$) ein *Orthonormalsystem* auf V , d.h.

$$\langle e_k, e_\ell \rangle = \delta_{k,\ell} := \begin{cases} 1 & , k = \ell \\ 0 & , k \neq \ell \end{cases} \quad (k, \ell \in \mathbb{Z}).$$

- Die Fourier-Koeffizienten (10.2) sind die Entwicklungskoeffizienten nach diesem Orthonormalsystem, denn

$$a_k = \langle f, e_k \rangle \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Betrachten wir nun die *Fourier-Reihe*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e_k$$

von f und deren (symmetrisierte) Partialsummen, die *trigonometrischen Polynome*

$$f_N := \sum_{k=-N}^N a_k e_k \quad (N \in \mathbb{N}), \quad (10.4)$$

dann stellt sich die Frage nach der Konvergenz der f_N gegen f im Limes $N \rightarrow \infty$. Zunächst ist für $f^{(y)} \in V$, $f^{(y)}(z) := f(z + y)$

$$\begin{aligned} f_N(y) &= \int_0^{2\pi} f(x) \sum_{k=-N}^N \bar{e}_k(x - y) \frac{dx}{2\pi} \\ &= \int_0^{2\pi} f(z + y) \sum_{k=-N}^N \bar{e}_k(z) \frac{dz}{2\pi} \\ &= I(f^{(y)} D_N), \end{aligned}$$

wobei $D_N := \sum_{k=-N}^N e_k \in V$ den *Dirichlet-Kern* bezeichnet. $D_N \in V$ ist eine ge-

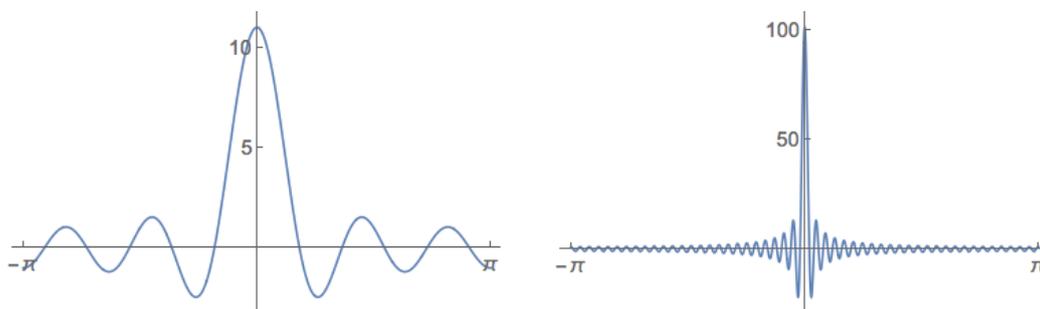


Abbildung 10.2: Dirichlet-Kerne D_5 (links) und D_{50} (rechts)

rade, reelle Funktion, denn nach der Euler-Formel ist $e_k(x) + e_{-k}(x) = 2 \cos(kx)$. Weiter gilt $D_N(0) = 2N + 1$, und für $x \in (0, 2\pi)$ ist

$$\begin{aligned} D_N(x) &= \sum_{k=-N}^N \exp(ix)^k = \exp(ix)^{-N} \sum_{k=0}^{2N} \exp(ix)^k \\ &= \exp(ix)^{-N} \frac{\exp(ix)^{2N+1} - 1}{\exp(ix) - 1} \\ &= \frac{\exp(i(N + 1/2)x) - \exp(-i(N + 1/2)x)}{\exp(ix/2) - \exp(-ix/2)} = \frac{\sin((N + 1/2)x)}{\sin(x/2)}. \end{aligned}$$

Abbildung 10.2 legt eine Idee nahe, warum $\lim_{N \rightarrow \infty} I(f^{(y)} D_N) = f(y) = f^{(y)}(0)$ gelten sollte, man also die periodische Funktion f aus ihren Fourier-Koeffizienten a_k rekonstruieren kann. Bis auf eine Umgebung der Null oszilliert D_N für Argumente $0 < |z| \leq \pi$ schnell, der entsprechende Integral-Anteil mit der stetigen Funktion $f^{(y)}$ sollte sich fast wegmitteln. Um diese Idee zu präzisieren, betrachten wir zunächst stetig differenzierbare f :

10.2 Satz Für ein $m \in \mathbb{N}_0$ sei $f \in V \cap C^m(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

1. Dann gilt für die Fourier-Koeffizienten (10.2) von f : $a_k = \mathcal{O}(|k|^{-m})$.
2. Für $m \geq 1$ konvergieren die Partialsummen (10.4) gleichmäßig: $\lim_{N \rightarrow \infty} f_N = f$ im Sinn von

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - f_N\|_\infty = 0 \quad \text{für} \quad \|g\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)|.$$

Beweis:

1) Aus Definition (10.2) folgt mit partieller Integration für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} a_k &= (2\pi ik)^{-1} \int_0^{2\pi} f'(x) \exp(-2\pi ikx) \frac{dx}{2\pi} = \dots \\ &= (2\pi ik)^{-m} \int_0^{2\pi} f^{(m)}(x) \exp(-2\pi ikx) \frac{dx}{2\pi}, \end{aligned}$$

also $|a_k| \leq (2\pi|k|)^{-m} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(m)}(x)|$.

2) Wir benutzen jetzt, dass f stetig differenzierbar ist, also $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| < \infty$ gilt. Wegen $I(D_N) = I(e_0) = 1$ ist

$$|f_N(y) - f(y)| = \left| \int_0^{2\pi} (f^{(y)}(x) - f^{(y)}(0)) D_N(x) \frac{dx}{2\pi} \right| \leq A_N^{(\varepsilon)} + B_N^{(\varepsilon)}$$

mit, für $\varepsilon \in (0, \pi)$

$$\begin{aligned} A_N^{(\varepsilon)} &:= \left| \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (f^{(y)}(x) - f^{(y)}(0)) D_N(x) \frac{dx}{2\pi} \right|, \\ B_N^{(\varepsilon)} &:= \left| \int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} (f^{(y)}(x) - f^{(y)}(0)) D_N(x) \frac{dx}{2\pi} \right|. \end{aligned}$$

Wegen $|\sin((N+1/2)x)| \leq 1$ und $|\sin(x/2)| \geq \frac{|x|/2}{\pi/2}$ ($|x| < \pi$) ist

$$A_N^{(\varepsilon)} \leq \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left| \frac{f^{(y)}(x) - f^{(y)}(0)}{\sin(x/2)} \right| \frac{dx}{2\pi} \leq \pi \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left| \frac{f^{(y)}(x) - f^{(y)}(0)}{x} \right| \frac{dx}{2\pi} \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| \varepsilon.$$

Durch partielle Integration folgt mit $G_y(x) := \frac{f^{(y)}(x) - f^{(y)}(0)}{\sin(x/2)}$ für den zweiten Term

$$\begin{aligned} B_N^{(\varepsilon)} &= \left| \int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} G_y(x) \sin((N+1/2)x) \frac{dx}{2\pi} \right| \\ &= (N + \frac{1}{2})^{-1} \left| \int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} G'_y(x) \cos((N + \frac{1}{2})x) \frac{dx}{2\pi} - G_y(x) \cos((N + \frac{1}{2})x) \Big|_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \right|. \end{aligned}$$

Da also unabhängig von y gilt: $\lim_{N \rightarrow \infty} B_N^{(\varepsilon)} = 0$ und $\lim_{\varepsilon \searrow 0} A_N^{(\varepsilon)} = 0$, folgt die gleichmäßige Konvergenz $\lim_{N \rightarrow \infty} f_N = f$. \square

10.3 Die Fourier-Transformation als lineare Abbildung

Wir betrachten die Fourier-Koeffizienten $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ von $f \in V$. Diese bilden eine Funktion in $\text{Abb}(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$, die wir mit $\mathfrak{F}(f)$ bezeichnen. Da für die lokal integrierbare

Funktion f gilt: $\|f\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| < \infty$, ist $\|\mathfrak{F}(f)\|_\infty := \sup_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|$ beschränkt: $\|\mathfrak{F}(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty < \infty$. Mit dem Untervektorraum

$$\ell_\infty(\mathbb{Z}) := \{a \in \text{Abb}(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \mid \|a\|_\infty < \infty\}$$

der beschränkten Folgen ist die Abbildung

$$\mathfrak{F} : V \rightarrow \ell_\infty(\mathbb{Z}) \quad , \quad (\mathfrak{F}(f))(k) := \int_0^{2\pi} f(x) \exp(-ikx) \frac{dx}{2\pi} \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (10.5)$$

linear. Tatsächlich fallen die Fourier-Koeffizienten aber ab: $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} a_k = 0$ und wir werden gleich sehen, dass \mathfrak{F} sogar in den Untervektorraum

$$\ell_2(\mathbb{Z}) := \{a \in \ell_\infty(\mathbb{Z}) \mid \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|^2 < \infty\}$$

von $\ell_\infty(\mathbb{Z})$ abbildet. Dieser ist ein unitärer Vektorraum mit Skalarprodukt

$$\langle a, b \rangle := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \bar{b}_k \quad (a, b \in \ell_2(\mathbb{Z})).$$

10.3 Satz

1. Für die Fourier-Transformation (10.5) ist $\text{im}(\mathfrak{F}) \subseteq \ell_2(\mathbb{Z})$.

2. $\mathfrak{F} : V \rightarrow \ell_2(\mathbb{Z})$ ist eine Isometrie, das heißt

$$\langle \mathfrak{F}(f), \mathfrak{F}(g) \rangle = \langle f, g \rangle \quad (f, g \in V). \quad (10.6)$$

3. Für die Halbnorm $\|g\|_2 := \sqrt{\langle g, g \rangle}$ auf V , siehe (10.3) und die Partialsummen (10.4) ist

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - f_N\|_2 = 0 \quad (f \in V). \quad (10.7)$$

Beweis: Wir beginnen mit (10.7) und benutzen die Beweismethode aus FORSTER [Fo, Band I, Kapitel 23].

• Wegen $\langle f, f_N \rangle = \sum_{k=-N}^N \bar{a}_k \langle f, e_k \rangle = \sum_{k=-N}^N \bar{a}_k a_k$ ist

$$\begin{aligned} \|f - f_N\|_2^2 &= \langle f - f_N, f - f_N \rangle = \langle f, f \rangle - \langle f, f_N \rangle - \langle f_N, f \rangle + \langle f_N, f_N \rangle \\ &= \langle f, f \rangle - \sum_{k=-N}^N |a_k|^2 - \sum_{k=-N}^N |a_k|^2 + \sum_{k=-N}^N |a_k|^2 \\ &= \langle f, f \rangle - \sum_{k=-N}^N |a_k|^2. \end{aligned} \quad (10.8)$$

Also gilt die *Besselsche Ungleichung*

$$\|f_N\|_2^2 = \sum_{k=-N}^N |a_k|^2 \leq \langle f, f \rangle \quad (f \in V, N \in \mathbb{N}),$$

und es folgt Teil 1.

- Wir beweisen (10.7) zunächst für die Familie von 2π -periodischen Funktionen

$$f^{(t)} \in V \quad , \quad f^{(t)}(x) = \begin{cases} 1, & (x \bmod 2\pi) \in [0, t] \\ 0, & (x \bmod 2\pi) \in (t, 2\pi) \end{cases} \quad (t \in [0, 2\pi]).$$

Deren Fourier-Koeffizienten können wir ausrechnen:

$$\mathfrak{F}(f^{(t)})_k = \int_0^{2\pi} f^{(t)}(x) \exp(-ikx) \frac{dx}{2\pi} = \int_0^t e^{-ikx} \frac{dx}{2\pi} = \begin{cases} \frac{t}{2\pi}, & k = 0 \\ \frac{e^{-ikt} - 1}{-2\pi ik}, & k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Wegen $|e^{-ikt} - 1|^2 = |1 - \cos(kt)|^2 + (\sin(kt))^2 = 2(1 - \cos(kt))$ ist

$$(2\pi)^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\mathfrak{F}(f^{(t)})_k|^2 = t^2 + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(kt)}{k^2} = 2\pi t,$$

siehe FORSTER [Fo, Band I, Hilfssatz 2].¹⁵ Andererseits ist offensichtlich

$$(2\pi)^2 \|f^{(t)}\|_2^2 = (2\pi)^2 \int_0^t 1 \frac{dx}{2\pi} = 2\pi t \quad (t \in [0, 2\pi]),$$

was nach (10.8) impliziert, dass $\lim_{N \rightarrow \infty} \|f^{(t)} - f_N^{(t)}\|_2 = 0$, also Behauptung (10.7) für die Funktionen $f^{(t)}$.

- (10.7) gilt damit auch für endliche Linearkombinationen der $f^{(t)}$, also auch für alle Treppenfunktionen, bis auf die Wahl der Werte bei den Sprungstellen.

Ist nun $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -periodisch und $f|_{[0, 2\pi]}$ Riemann-integrierbar, dann können wir (durch Zerlegung von f in Real- und Imaginärteil) zunächst annehmen, dass f reellwertig ist. f ist beschränkt ($|f| \leq R$), und für alle $\varepsilon > 0$ gibt es 2π -periodische Treppenfunktionen $f^O, f^U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, mit $f^U \leq f \leq f^O$, $|f^U|, |f^O| \leq R$ und $\int_0^{2\pi} g dx < \delta$ für $g := f^O - f^U$. Wegen $0 \leq g \leq 2R$ ist

$$(f - f^U)^2 \leq g^2 \leq 2Rg.$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für die Partialsummen f_n^U der Fourier-Reihe der Treppenfunktion f^U gilt:

$$\|f^U - f_n^U\|_2 \leq \varepsilon \quad (n \geq N).$$

Also ist für diese n mit der Dreiecksungleichung

$$\|f - f_n\|_2 \leq \|f - f^U\|_2 + \|f^U - f_n^U\|_2 \leq \sqrt{\delta R/\pi} + \varepsilon/2.$$

¹⁵Bitte im Buch von Forster nachlesen!

Wählen wir $\delta := \frac{\pi\varepsilon^2}{4R}$, dann ist die rechte Seite gleich ε . Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt werden kann, konvergiert also f_n im quadratischen Mittel gegen f .

Wegen der schon in (10.7) bewiesenen Beziehung

$$\|f - f_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{|k| \leq n} |a_k|^2$$

gilt auch für f die **Vollständigkeitsrelation** $\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2$.

Damit haben wir (10.7) allgemein gezeigt.

- (10.6) folgt aus (10.7) mittels der *Polarisationsidentität*

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 i^k \langle f + i^k g, f + i^k g \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 i^k \|f + i^k g\|_2^2. \quad \square$$

Es ist wichtig zu verstehen, dass die in (10.7) angesprochene Konvergenz der Partialsummen f_N gegen f im *quadratischen Mittel* von ganz anderer Natur ist als etwa die gleichmäßige oder auch nur punktweise Konvergenz. Auch die Voraussetzung $f \in V$ in Satz 10.3 ist schwächer als die Voraussetzung $f \in V \cap C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ in Satz 10.2.

10.4 Bemerkung (Sinus-Kosinus-Form)

Im Beispiel der schwingenden Saite haben wir deren Anfangsbedingung als unendliche Linearkombination (10.1) von Sinusfunktionen dargestellt. Damit gewährleisten wir, dass sie an ihren Enden nicht ausgelenkt ist.

Wegen der Euler-Formel $e_k(x) = \cos(kx) + i \sin(kx)$ können wir jede Fourierreihe $x \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e_k(x)$ mit Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$ auch in der *Sinus-Kosinus-Form*

$$x \mapsto \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (b_k \cos(kx) + c_k \sin(kx)) \quad (10.9)$$

schreiben. Dann ist $b_k = a_k + a_{-k}$ und $c_k = i(a_k - a_{-k})$, und umgekehrt $a_{\pm k} = (b_k \mp i c_k)/2$ ($k \in \mathbb{N}_0$).¹⁶ Man kann diese Koeffizienten auch direkt aus den Integralen

$$b_k = 2 \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) \frac{dx}{2\pi}, \quad c_k = 2 \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) \frac{dx}{2\pi}$$

bestimmen. Offensichtlich sind die Koeffizienten in (10.9) reellwertig, wenn f nur reelle Werte annimmt.

Ist f gerade, dann gilt $c_k = 0$, während für ungerade f die b_k Null sind. \diamond

¹⁶Hier wurde $c_0 := 0$ gesetzt.

Literatur

- [An1] Knauf, A.: Vorlesung *Analysis I*. Skript, Erlangen 2019
- [Bl] Blatter, Ch.: *Analysis I-III*. Springer, 1974
- [Br] Bröcker, T.: *Analysis, Band 1 und 2*. Spektrum der Wissenschaft, 1995
- [Ca] do Carmo, M.P.: *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen*. Vieweg, 1998
- [DH] Deuffhard, P.; Hohmann, A. *Numerische Mathematik I. Eine algorithmisch orientierte Einführung*. de Gruyter, 2002
- [Fi] Fischer, G.: *Lineare Algebra*. Vieweg 2000
- [Fo] Forster, O.: *Analysis, Bd. 1-3*. Vieweg, 1999
- [Hi] Hildebrandt, S.: *Analysis 1*. Springer, 2002
- [MV] Meyberg, K., Vachenauer, P.: *Höhere Mathematik, Bd 1 und 2*. Springer, 1999

Index

- Abbildung
 - Iterierte 68
 - kontrahierende 67
 - reguläre 84
- Ableitung 37
 - partielle 38
- Banachscher Fixpunktsatz 68
- Beschleunigung 30
- Besselsche Ungleichung 95
- Bogenlänge 29
- Contour-Diagramm 41
- definit 62
- Diffeomorphismus 29, 83
- Differentialoperator 50
- Differentiationsregeln 43
- differenzierbar
 - gliedweise 23
 - stetig 46
 - total 37
- Dirichlet-Kern 93
- Divergenz 50
- Doppelfakultät 7
- Extremum 60
- Faktorisierungssatz 9
- Fakultät 57
- Fixpunktmenge 67
- Fundamentalsatz der Algebra 8
- Funktion
 - elementare 7
 - ganzrationale 10
 - rationale 10, 13
 - reell-analytische 22
- Funktionaldeterminante 48
- Gammafunktion 5
- Geschwindigkeit 25
- Gewöhnliche Differentialgleichung 69
- Grad 7, 58
- Gradient 41
- Helix 34
- Hesse-Matrix 59
- Höhenlinie 41
- Integral 1
 - komplexwertige Funktion 5
 - uneigentliches 1
- Integration
 - rationaler Funktionen 12
- Jacobi-Matrix 38
- konvex 56
- Krümmung 31, 33
- Kurve 25
 - geschlossene 32
 - Länge einer 28
 - Peano– 27
- Lagrange-Multiplikatoren 86
- Lagrange-Restglied 57
- Landau-Symbole 16
- Laplace-Operator 51
- Leitkoeffizient 8
- Linearfaktor 8
- Lipschitz-stetig
 - global 67
 - lokal 68
- Maximum
 - isoliertes 61
 - lokales 60
- Minimum 60
- Möbius-Band 82
- Multiindex 57
- Nebenbedingung 86
- Newton-Verfahren 71
 - vereinfachtes 74
- Nullstelle 9
- Nullstellenmenge 66
- Ordnung einer Funktion (Landau) 16
- orientierungserhaltend 29
- Parametertransformation 29

Partialbruchzerlegung 10
Pendel 77
Polarisationsidentität 97
Polarkoordinaten 46, 49
Polynom 7, 58
Punkt
 kritischer 61
 regulärer 61
quadratische Form 87
regulär 25
Richtung 30
Richtungsableitung 42
Rotation 52
Sattel 41, 62
Satz
 Banachscher Fixpunktsatz 68
 Faktorisierung reeller Polynome 9
 Mittelwertsatz 55
 Newton-Iteration 71
 Partialbruchzerlegung 10
 Picard–Lindelöf 69
 Schrankensatz 75
 Sylvester 63
 Taylor 18, 57
 über implizite Funktionen 78
 Weierstraß 27
Schnittwinkel 30
Sphäre 86
Spur
 einer Kurve 25
 der Jacobi-Matrix 50
Taylor-Formel 18, 56
Taylor-Polynom 21
Taylor-Reihe 21
trigonometrisches Polynom 92
Untermannigfaltigkeit 82
Vektorfeld 35
Wert
 kritischer 82
 regulärer 82
Windungszahl 33
Zykloide 28