

Vorlesung Analysis III

Andreas Knauf*

Wintersemester 2019/20

Zusammenfassung

Vorlesungsbegleitendes Skript. Anregungen und Kritik sind willkommen!
Dieses Skript behandelt mengentheoretische Topologie, Maß- und Integrationstheorie, Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten und Integralsätze.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
1.1	Mengentheoretische Topologie	3
1.2	Maß- und Integrationstheorie	3
1.3	Differentialformen und Integralsätze	4
1.4	Zur Literatur	5
2	Mengentheoretische Topologie	6
2.1	Topologische Räume	6
2.2	Stetigkeit	11
2.3	Kompaktheit	14
3	Mengensysteme	21
3.1	Sigma-Algebren und Maße	21
3.2	Ringe, Algebren und Halbringe	22
3.3	Inhalte, Prämaße und Maße	29
3.4	Stieltjes-Inhalte auf \mathbb{R}	35

*Department Mathematik, Universität Erlangen-Nürnberg, Cauerstr. 11, 91058 Erlangen, Germany. web: <http://math.fau.de/mathematische-physik/andreas-knauf>, e-mail: knauf@math.fau.de

4	Vom Prämaß zum Maß	38
4.1	Die Carathéodory–Konstruktion	38
4.2	Hausdorff–Maße	44
4.3	Das Lebesgue–Maß λ^d und seine Translationsinvarianz	45
4.4	Messbare Abbildungen und Bildmaße	49
4.5	Eindeutigkeitssätze	51
4.6	Transformation des Lebesgue–Maßes mit Affinitäten	53
4.7	Die Unlösbarkeit des Maßproblems	55
5	Das Lebesgue–Integral	57
5.1	Numerische Funktionen	58
5.2	Einfache Funktionen und ihre Integrale	61
5.3	Integration messbarer Funktionen	63
5.4	Konvergenzsätze	69
6	Produktmaße und Mehrfachintegrale	72
6.1	Produkt–sigma-Algebren und Produktmaße	73
6.2	Der Satz von Fubini	76
6.3	Die Transformationsformel	78
7	Konvergenzbegriffe der Maß- und Integrationstheorie	80
7.1	Ungleichungen in \mathcal{L}^p –Räumen	80
7.2	Die Banach–Räume $L^p(M, \mu)$	87
8	Differentialformen und Mannigfaltigkeiten	91
8.1	Multilinearformen	91
8.2	Differentialformen	97
8.3	Vektoranalysis	99
8.4	Integration von Differentialformen	103
	Anhang	115
A	Das Banach-Tarski-Paradox	115
	Literatur	119
	Index	120

1 Einleitung

1.1 Mengentheoretische Topologie

Die *Topologie* ist das Teilgebiet der Mathematik, das sich mit Begriffen wie Offenheit, Abgeschlossenheit, Zusammenhang und Kompaktheit von Mengen, Konvergenz von Folgen und Stetigkeit von Funktionen befasst. Wir werden hier nur die mengentheoretische Topologie behandeln, während in meinem *Topologie-Skript* auch erste Schritte in der *algebraischen Topologie* gemacht werden.

1.2 Maß- und Integrationstheorie

Ein *Maß* μ auf einer Menge M ist eine spezielle *Mengenfunktion*, sie ordnet also gewissen Teilmengen $A \subseteq M$ Zahlen $\mu(A) \in [0, \infty] := [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ zu.

1.1 Beispiele (Maße)

1. Das *Lebesgue-Maß* $\mu = \lambda^d$ auf $M := \mathbb{R}^d$, mit Würfel-Maß $\mu([0, 1]^d) := 1$ und $\mu(A+a) = \mu(A)$ ($a \in \mathbb{R}^d$). Dies entspricht für $d = 1$ einer Gesamtlänge, für $d = 2$ einem Flächeninhalt und für $d = 3$ einem Volumen. Es ist $\mu(\mathbb{R}^d) = \infty$.
2. Auf einer Menge M existieren noch weitere interessante Maße. Sei etwa $a \in M$. Dann ist $\mu := \delta_a$ mit $\delta_a(A) := \begin{cases} 1 & , a \in A \\ 0 & , a \in M \setminus A \end{cases}$ ein Maß, das *Dirac-Maß*. Aber auch für Punktfolgen $(x_n)_n$ in M und positive Zahlen c_n ist $\mu := \sum_{n=1}^{\infty} c_n \delta_{x_n}$ ein Maß (mit $\mu(A) := \sum_{n=1}^{\infty} c_n \delta_{x_n}(A)$). Es ist $\mu(M) = \sum_n c_n$.
3. Betrachten wir eine symmetrische *Irrfahrt* auf \mathbb{Z} , den ganzen Zahlen. Zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{N}_0$ befinde sich das Teilchen am Punkt $x_t \in \mathbb{Z}$. Dann soll es sich zum Zeitpunkt $t + 1$ mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ bei $x_t - 1$ bzw. bei $x_t + 1$ befinden. Das Teilchen soll bei $x_0 = 0$ starten, siehe Abb. 1.1. Setzen wir $y_t := x_t - x_{t-1} \in \{-1, +1\}$ und betrachten wir das Teilchen bis zur Zeit $T \in \mathbb{N}$, dann wird dessen Bahn durch $y \in M_T := \{-1, 1\}^T$ gesteuert. Wir erhalten ein Maß $\mu_T : \mathcal{P}(M_T) \rightarrow [0, 1]$ mit¹

$$\mu_T(\{y\}) := 2^{-T} \quad (y = (y_1, \dots, y_T) \in M_T).$$

Betrachten wir das Teilchen für alle Zukunft, dann wollen wir es durch ein Maß auf der Menge $M_\infty := \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ der $\{-1, 1\}$ -wertigen Folgen beschreiben. \diamond

Nimmt man den Maßbegriff von der praktischen Seite, dann besteht die Aufgabe darin, Maße konkreter Mengen $A \subseteq M$ zu *berechnen*, etwa das Volumen $\lambda^d(B_d)$ einer d -dimensionalen *Vollkugel*.

¹Bei Annahme der Unabhängigkeit der y_1, \dots, y_T

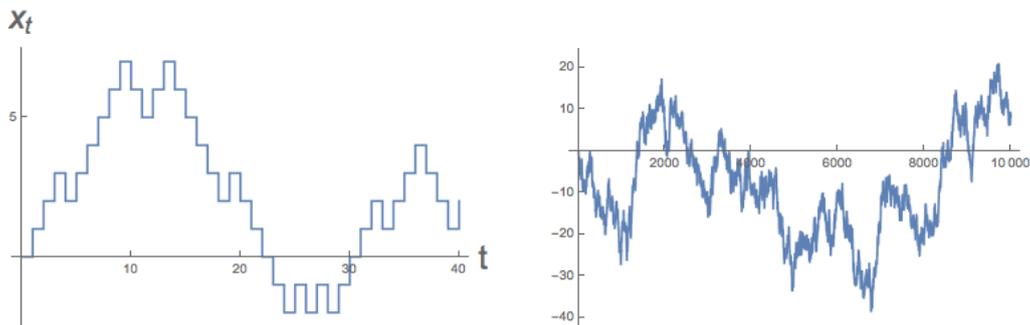


Abbildung 1.1: Symmetrische Irrfahrt (links) und Brownsche Bewegung (rechts)

So wurde die Maßtheorie bis ins 19. Jahrhundert aufgefasst. Bei komplizierteren Mengen wie dem unter 3. betrachteten Raum der Folgen geht es aber offensichtlich auch um die *Konstruktion* des Maßes.

Eine weitere Frage ist die nach Konvergenz einer Folge von Maßen:

1.2 Beispiel (Brownsche Bewegung)

4. Für die symmetrische Irrfahrt aus Beispiel 3. gilt, dass die Varianz von $x_t = \sum_{k=1}^t y_k$ gleich t ist, also die Streuung gleich \sqrt{t} . Falls wir für $m \in \mathbb{N}$ die Zeit mittels $t = ms$, also $s \in \mathbb{N}_0/m$ und den Ort mit $Y_s := \frac{1}{\sqrt{m}} X_{ms}$ reskalieren, dann ist die Varianz von Y_s gleich s , unabhängig von m .

Für den so genannten Diffusionslimes $m \rightarrow \infty$ erhalten wir in natürlicher Weise die so genannte brownsche Bewegung auf \mathbb{R} , mit einem Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem Raum der stetigen bei Null beginnenden Wege. \diamond

Wir werden uns allerdings zunächst länger mit der Frage beschäftigen, welchen Teilmengen $A \subseteq M$ überhaupt sinnvoll ein Maß $\mu(A)$ zugeordnet werden kann. Dabei ist eine Mindestforderung, dass die Vereinigung $A_1 \cup \dots \cup A_n \subseteq M$ disjunkter messbarer Teilmengen $A_k \subseteq M$ ebenfalls messbar ist, und dass gilt:

$$\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n).$$

Diese unschuldig erscheinende Forderung führt, wie [BANACH](#) und [TARSKI](#) im Jahr 1924 in [\[BT\]](#) gezeigt haben, dazu, dass ein unter Bewegungen invariantes Maß über dem \mathbb{R}^3 , das wie das Lebesgue-Maß einem Einheitswürfel Maß Eins zuordnet, nicht auf der gesamten Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ definiert sein kann.

1.3 Differentialformen und Integralsätze

Für Funktionen einer Variablen verknüpft der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung Ableitung und Integral. In Kapitel 8 werden wir den Satz von

Stokes, die Verallgemeinerung des *Hauptsatzes* auf beliebige Dimensionen, herleiten. Dazu verwenden wir Differentialformen, die auch für andere Zwecke, etwa die Vektoranalysis, nützlich sind.

Untermannigfaltigkeiten der \mathbb{R}^n treten in der Analysis zum Beispiel als Niveaumengen $F^{-1}(f)$ regulärer Werte f von Abbildungen $F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ auf. Differentialformen und der Satz von Stokes können auch für Mannigfaltigkeiten genutzt werden.

1.4 Zur Literatur

Dieses Skript kann nicht die Lektüre von Lehrbüchern ersetzen, sondern soll sie ergänzen. Hier einige Anregungen:

- Ein empfehlenswertes Buch zur in Kapitel 2 behandelten Topologie ist der *Grundkurs Topologie* [LS] von GERD LAURES und MARKUS SZYMIK.
- Die Darstellung der Kapitel 3 bis 7 lehnt sich inhaltlich vor Allem an das Buch *Maß- und Integrationstheorie* [El] von JÜRGEN ELSTRODT an. Allen Hörerinnen und Hörern der Vorlesung wird die viel ausführlichere Darstellung in diesem Buch empfohlen. Alternativen sind [Ba] von HEINZ BAUER und [Ha] von PAUL HALMOS.
- Für den Kalkül der Differentialformen (Kapitel 8) empfehle ich [AF] von ILKA AGRICOLA und THOMAS FRIEDRICH.
- Weitere, spezialisiertere Literatur finden Sie auf Seite 119.

Da dieses *pdf* [intern](#) und [extern](#) verlinkt ist, kann es sinnvoll sein, es *online* zu benutzen statt es auszudrucken.

Danksagung:

Frau Nora Doll und Herrn Nico Wittrock danke ich für ihre Korrekturhinweise und Anregungen.

2 Mengentheoretische Topologie

Sie haben in der *Analysis II* schon eine Einführung in die Topologie metrischer Räume bekommen. Die dort erlernten Begriffe reichen für die Zwecke dieser Vorlesung aus. Sie werden aber hier wiederholt und vertieft.

2.1 Topologische Räume

2.1 Definition Ein **topologischer Raum** ist ein Paar (M, \mathcal{O}) , bestehend aus einer Menge M und einem Mengensystem $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(M)$ von Teilmengen von M (genannt "offene Mengen"), sodass gilt:

1. Beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen.
2. Der Durchschnitt von je zwei offenen Mengen ist offen.
3. \emptyset und M sind offen.

Man nennt \mathcal{O} auch die **Topologie** von (M, \mathcal{O}) .

Die für uns wichtigsten Beispiele topologischer Räume sind die **metrischen Räume**:

2.2 Definition Für einen metrischen Raum (M, d) , mit den **offenen Kugeln**

$$U_\varepsilon(x) := \{y \in M \mid d(y, x) < \varepsilon\} \quad (x \in M, \varepsilon > 0)$$

um x mit Radius ε , ist die (metrische) **Topologie von (M, d)** gegeben durch

$$\mathcal{O} := \mathcal{O}(d) := \{V \subseteq M \mid \forall x \in V \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subseteq V\}. \quad (2.1)$$

2.3 Satz $(M, \mathcal{O}(d))$ ist ein topologischer Raum, und die $U_\varepsilon(x)$ sind offen.

Beweis:

- $(M, \mathcal{O}(d))$ ist ein topologischer Raum:
 - (a) Es seien $V_i \in \mathcal{O}$ für alle $i \in I$. Zunächst nehmen wir $\bigcup_{i \in I} V_i \neq \emptyset$ an, es gibt also ein $x \in \bigcup_{i \in I} V_i$. Dann ist $x \in V_j$ für ein $j \in I$. Nach (2.1) gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subseteq V_j \subseteq \bigcup_{i \in I} V_i$. Also ist $\bigcup_{i \in I} V_i \in \mathcal{O}$.
 - (b) Ist $x \in V_1 \cap V_2$ mit $V_1, V_2 \in \mathcal{O}$, dann gibt es $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ mit $U_{\varepsilon_j}(x) \subseteq V_j$, $j = 1, 2$. Daher ist $U_\varepsilon(x) \subseteq V_1 \cap V_2$ für $\varepsilon := \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0$. Es folgt $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{O}$.
 - (c) $\emptyset \in \mathcal{O}$, denn dann ist die Bedingung in (2.1) leer. Ebenso gilt $M \in \mathcal{O}$, denn dann ist die Bedingung in (2.1) für alle $\varepsilon > 0$ erfüllt.

- Die $U_\varepsilon(x)$ sind offen: Für $y \in U_\varepsilon(x)$ ist $\varepsilon' := d(x, y) < \varepsilon$. Wählen wir $\delta := \varepsilon - \varepsilon' > 0$, dann ist wegen der Dreiecksungleichung $U_\delta(y) \subseteq U_\varepsilon(x)$. \square

Oft erzeugen verschiedene Metriken die gleiche Topologie. Insbesondere gilt dies für Metriken auf Vektorräumen, die von äquivalenten Normen abstammen, siehe Definition 2.43.

Auf jeder Menge M lassen sich Topologien finden:

2.4 Beispiele

1. Die *diskrete Topologie* $\mathcal{O} := 2^M$ aller Teilmengen.

2. Die *indiskrete Topologie* $\mathcal{O} := \{M, \emptyset\}$. \diamond

Beispielsweise erzeugt die in der Informatik beliebte Hamming-Metrik auf $M := B^n$, mit dem Bit $B := \{0, 1\}$

$$d : B^n \times B^n \rightarrow \mathbb{N}_0, d((b_1, \dots, b_n), (c_1, \dots, c_n)) := |\{i \in \{1, \dots, n\} \mid b_i \neq c_i\}|$$

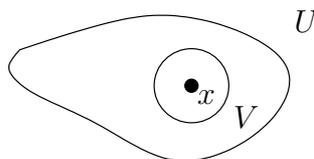
gemäß Definition 2.2 die diskrete Topologie.

Die indiskrete Topologie taucht fast nur in Gegenbeispielen auf.

Wir erweitern unseren topologischen Sprachschatz, indem wir die uns vom Raum \mathbb{R} bekannten Begriffsbildungen verallgemeinern:

2.5 Definition Es sei (M, \mathcal{O}) ein topologischer Raum.

- $A \subseteq M$ heißt **abgeschlossen**, wenn $M \setminus A \in \mathcal{O}$.
- $U \subseteq M$ heißt **Umgebung** von $x \in M$, wenn es eine offene Menge V mit $x \in V \subseteq U$ gibt.



- Für $A \subseteq M$ und $x \in M$ heißt x **innerer** bzw. **äußerer** bzw. **Randpunkt** von A , je nachdem, ob A oder $M \setminus A$ oder keines von beiden Umgebung von x ist.
 - $\mathring{A} := \{x \in M \mid x \text{ ist innerer Punkt von } A\}$ heißt das **Innere** von A .
 - $\bar{A} := \{x \in M \mid x \text{ nicht äußerer Punkt von } A\}$ heißt **abgeschlossene Hülle** von A .
 - $\partial A := \{x \in M \mid x \text{ Randpunkt von } A\}$ heißt **Rand** von A .

- $x \in M$ heißt **Häufungspunkt** der Teilmenge $A \subseteq M$, wenn für keine Umgebung U von x die Menge $U \cap (A \setminus \{x\})$ leer ist.

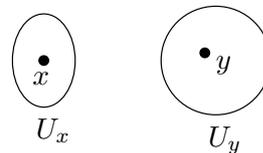
2.6 Beispiel Für $A := (0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ ist $\mathring{A} = (0, 1)$, $\bar{A} = [0, 1]$ und $\partial A = \{0, 1\}$. \mathbb{Z} besitzt keine Häufungspunkte. \diamond

2.7 Bemerkungen 1. $\mathring{A} \subseteq A \subseteq \bar{A} = \mathring{A} \cup \partial A$.

2. Eine Menge ist genau dann offen, wenn sie mit ihrem Inneren übereinstimmt.
3. Für alle $A \subseteq M$ ist \mathring{A} offen und \bar{A} sowie ∂A abgeschlossen.
4. Die Menge der Häufungspunkte von A ist eine Teilmenge von \bar{A} . \diamond

2.8 Definition

Ein topologischer Raum heißt **Hausdorff-Raum**, wenn je zwei verschiedene Punkte x, y disjunkte Umgebungen U_x bzw. U_y besitzen.



2.9 Bemerkungen 1. Metrische Räume sind hausdorffsch, denn für $x \neq y$ ist $\varepsilon := d(x, y)/2 > 0$, also $U_\varepsilon(z)$ Umgebung von z , und $U_\varepsilon(x) \cap U_\varepsilon(y) = \emptyset$.

Daher werden die meisten uns begehrenden Räume die Hausdorff-Eigenschaft besitzen.

2. Ein aus mehr als einem Punkt bestehender Raum mit indiskreter Topologie ist nicht hausdorffsch. \diamond

2.10 Definition In einem topologischen Raum (X, \mathcal{O}) heißt $x \in M$

- **Häufungspunkt einer Folge** $a : \mathbb{N} \rightarrow M$, wenn für jede Umgebung U von x und jedes $N \in \mathbb{N}$ ein Folgenglied $a_n \equiv a(n) \in U$ mit $n \geq N$ existiert.
- **Grenzwert oder Limes** einer Folge $a : \mathbb{N} \rightarrow M$, wenn für jede Umgebung U von x ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \in U$ für alle $n \geq N$ existiert. Dann heißt a gegen x **konvergent**.

2.11 Bemerkungen

1. Man muss zwischen den Häufungspunkten einer Folge $a : \mathbb{N} \rightarrow M$ und den Häufungspunkten der Menge $a(\mathbb{N}) \subseteq M$ unterscheiden. So besitzt die konstante Folge mit Wert $a_n = x$ den Häufungspunkt x , nicht aber die Menge $\{x\}$.
2. In einem Hausdorff-Raum besitzt jede Folge höchstens einen Grenzwert. \diamond

Oft beschreibt man eine Topologie \mathcal{O} , indem man eine so genannte Basis von \mathcal{O} angibt.

2.12 Definition

Im topologischen Raum (M, \mathcal{O}) heißt eine Teilmenge $B \subseteq \mathcal{O}$ offener Mengen **Basis der Topologie**, wenn jedes $V \in \mathcal{O}$ Vereinigung von Mengen aus B ist.

2.13 Beispiele (Basen von Topologien)

1. Die Menge $B := \{(a, b) \mid a < b\}$ der offenen beschränkten Intervalle bildet eine Basis der (metrischen) Topologie von \mathbb{R} .
2. Allgemeiner bilden nach Definition 2.2 die ε -Umgebungen eine Basis $B := \{U_\varepsilon(x) \mid x \in M, \varepsilon > 0\}$ der Topologie $\mathcal{O}(d)$ des metrischen Raums (M, d) . \diamond

Aus topologischen Räumen kann man auf verschiedene Weise neue topologische Räume konstruieren, z.B. durch Produktbildung oder Restriktion auf Teilmengen.

2.14 Definition

$(X^{(i)}, \mathcal{O}^{(i)})$, $i = 1, \dots, n$ seien topologische Räume. Dann ist auf ihrem kartesischen Produkt $X := X^{(1)} \times \dots \times X^{(n)}$ die **Produkttopologie** \mathcal{O} gegeben durch

$$\mathcal{O} := \left\{ W \subseteq X \mid \forall (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in W \exists U^{(i)} \in \mathcal{O}^{(i)} \right. \\ \left. \text{mit } x^{(i)} \in U^{(i)} \text{ und } U^{(1)} \times \dots \times U^{(n)} \subseteq W \right\}.$$

2.15 Satz Die Produkttopologie ist eine Topologie auf X .

Beweis: Hausaufgabe. □

Die in X offenen Mengen W müssen also "offene Kästchen" um jeden ihrer Punkte enthalten.

2.16 Bemerkungen (Produkttopologie)

1. Die Bildung der Produkttopologie ist eine assoziative Operation, es genügt also, je zwei Faktoren zu betrachten. Produkte von Basen bilden eine Basis der Produkttopologie.

Beispielsweise bilden die offenen Quader

$$(a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n) \subseteq \mathbb{R}^n$$

eine Basis der Produkttopologie des \mathbb{R}^n .

2. Für metrische Räume (X, d_X) und (Y, d_Y) sind auf dem kartesischen Produkt $Z := X \times Y$

$$d_i : Z \times Z \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{für} \quad z_j = (x_j, y_j)$$

$$d_1(z_1, z_2) := d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2),$$

$$d_2(z_1, z_2) := \sqrt{d_X(x_1, x_2)^2 + d_Y(y_1, y_2)^2}$$

und

$$d_\infty(z_1, z_2) := \max(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2))$$

Metriken. Sie erzeugen aber alle die gleiche Topologie $\mathcal{O}(d_i)$, die Produkttopologie. \diamond

2.17 Definition Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$. Dann heißt (Y, \mathcal{O}_Y) mit $\mathcal{O}_Y := \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{O}\}$ **Teilraum von (X, \mathcal{O})** und \mathcal{O}_Y die **induzierte Topologie** oder **Spurtopologie**.

Im Allgemeinen enthält \mathcal{O}_Y also mehr Mengen als die schon in X offenen Mengen $U \subseteq Y, U \in \mathcal{O}$.

2.18 Beispiel $X := \mathbb{R}$ mit der von den offenen Intervallen erzeugten Topologie \mathcal{O} , $Y := (0, 1]$. Dann ist $(\frac{1}{2}, 1] \subseteq Y$ offen und entsprechend $(0, \frac{1}{2}] \subseteq Y$ abgeschlossen in Y (!). \diamond

Analog definiert man auf Teilmengen $Y \subseteq X$ metrischer Räume (X, d) eine Metrik $d_Y : Y \times Y \rightarrow [0, \infty)$ durch Restriktion von d , und $\mathcal{O}(d)_Y = \mathcal{O}(d_Y)$.

Oft sind solche Teilräume *Niveaumengen* von Funktionen $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

2.19 Beispiele 1. Die n -Sphäre $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$.



Abbildung 2.1: 2-Sphäre S^2 (links), 2-Torus \mathbb{T}^2 (Mitte) und Fläche mit 2 Henkeln (rechts)

2. Auch der 2-Torus $\mathbb{T}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$, eine Fläche mit einem Henkel (siehe Abbildung 2.1, Mitte) lässt sich als Niveaumenge darstellen:

$$\mathbb{T}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid F(x) = 1\} \quad \text{mit} \quad F(x) = (\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 2)^2 + x_3^2.$$

3. Die Fläche mit 2 Henkeln in Abbildung 2.1 (rechts) ist die Niveaumenge

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \mid F(x) = 1/4\} \text{ von } F(x) = (4x_1^2(1 - x_1^2) - x_2^2)^2 + x_3^2. \quad \diamond$$

Etwas vornehmer heißt die Henkelzahl der Flächen ihr *Geschlecht*. Sie erlaubt diese topologischen Räume voneinander zu unterscheiden. Die *algebraische Topologie* befaßt sich mit solchen den topologischen Räumen zugeordneten so genannten *topologischen Invarianten*.

2.2 Stetigkeit

Eine reelle Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wurde *stetig bei* $x \in \mathbb{R}$ genannt, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$f(U_\delta(x)) \subseteq U_\varepsilon(f(x))$$

existiert, und *stetig*, wenn dies für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Ganz analog wurde die $\varepsilon - \delta$ -Stetigkeit einer Abbildung zwischen metrischen Räumen definiert. Diesen Stetigkeitsbegriff verallgemeinert man folgendermaßen:

2.20 Definition

- Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen heißt **stetig bei** $x \in X$, wenn es zu jeder Umgebung V von $f(x)$ eine Umgebung U von x mit $f(U) \subseteq V$ gibt.
- f heißt **stetig**, wenn sie bei jedem Punkt $x \in X$ stetig ist.
- Eine bijektive stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **Homöomorphismus**, wenn auch $f^{-1} : Y \rightarrow X$ stetig ist.
- X und Y heißen **homöomorph**, wenn ein Homöomorphismus $f : X \rightarrow Y$ existiert.

2.21 Bemerkung Analog zum Englischen (*homeomorphism*) benutzt man auch das Wort Homeomorphismus := Homöomorphismus \neq Homomorphismus! \diamond

2.22 Satz Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen metrischen Räumen ist genau dann stetig im Sinn von Definition 2.20, wenn sie $\varepsilon - \delta$ -stetig ist.

Beweis: Hausaufgabe. □

2.23 Satz

Es sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen. Dann ist f genau dann stetig, wenn die Urbilder $f^{-1}(V)$ offener Mengen immer offen sind.

Beweis:

- Es sei $f : X \rightarrow Y$ stetig und $V \subseteq Y$ offen. Nach Definition existiert für jedes $x \in U := f^{-1}(V)$ eine in U liegende offene Umgebung U_x von x . Deren Vereinigung $\cup_{x \in U} U_x$ ist offen und gleich U .
- Falls aus der Offenheit von $\tilde{V} \subseteq Y$ die Offenheit von $f^{-1}(\tilde{V}) \subseteq X$ folgt, gibt es für alle $x \in X$ und Umgebungen V von $f(x)$ eine offene Umgebung $\tilde{V} \subseteq V$ von $f(x)$, und für $\tilde{U} := f^{-1}(\tilde{V})$ gilt: \tilde{U} ist eine offene Umgebung von x mit $f(\tilde{U}) \subseteq V$. \square

Damit bildet ein Homöomorphismus $f : X \rightarrow Y$ durch

$$\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_Y \quad , \quad U \mapsto f(U)$$

die Topologie \mathcal{O}_X bijektiv auf \mathcal{O}_Y ab. Homöomorphismen sind daher die Isomorphismen der Topologie!

Es gibt noch einen zweiten Stetigkeitsbegriff:

2.24 Definition

- Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen heißt **folgenstetig bei** $x \in X$, wenn für jede gegen x konvergente Folge $a : \mathbb{N} \rightarrow X$ die Bildfolge $f \circ a : \mathbb{N} \rightarrow Y$ gegen $f(x)$ konvergiert.
- f heißt **folgenstetig**, wenn sie bei jedem Punkt $x \in X$ folgenstetig ist.

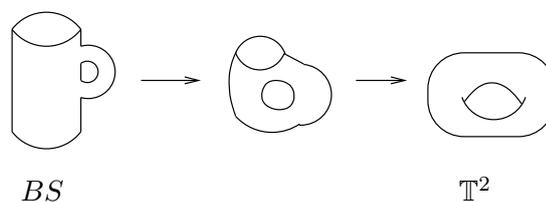
Soweit wir nur Topologien betrachten, die von Metriken kommen, gilt für uns nach Satz 9.4 der *Analysis I*

"stetig = folgenstetig".

Allgemein gilt aber auf *topologischen* Räumen nur "stetig \Rightarrow folgenstetig".

2.25 Beispiele (Homöomorphismen)

1. Für $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1})$ mit $\lambda_i > 0$ sei $E_\lambda := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} (x_i/\lambda_i)^2 = 1\}$ das Ellipsoid mit den Hauptachsen der Länge λ_i .
Dann ist $f : E_\lambda \rightarrow S^n$, $x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$ ein Homöomorphismus.
2. Ähnlich ist die Oberfläche eines **Bierseidels** zum 2-Torus \mathbb{T}^2 aus Beispiel 2.19 homöomorph:



3. Es lässt sich dagegen zeigen, dass S^2 und \mathbb{T}^2 nicht homöomorph sind. Anschaulich liegt das daran, dass der Torus \mathbb{T}^2 einen Henkel hat, die Sphäre S^2 aber nicht. \diamond

2.26 Satz Sind $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ stetig, so auch $g \circ f : X \rightarrow Z$.

Beweis: Nach Satz 2.23 müssen wir nachprüfen, dass für alle offenen $W \subseteq Z$ auch $U := (g \circ f)^{-1}(W) \subseteq X$ offen ist. Wegen der Stetigkeit von g ist $V := g^{-1}(W) \subseteq Y$ offen, wegen der Stetigkeit von f auch $U = f^{-1}(V)$. \square

2.27 Bemerkung (Topologische Vektorräume)

In der *Funktionalanalysis*, also dem Gebiet der Mathematik, in dem Lineare Algebra und Analysis sich kombinieren, betrachtet man sog. *topologische Vektorräume*, d.h. Vektorräume mit einer Topologie, die mit Addition und Skalarmultiplikation verträglich ist. Während nun endlich-dimensionale Vektorräume über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} sinnvollerweise die metrische Topologie tragen, die unabhängig von der die Metrik definierenden Norm ist, kommen für unendlich-dimensionale Vektorräume V oft verschiedene Topologien in Betracht. Oft sind diese Topologien metrische Topologien $\mathcal{O}(d)$ der von einer Norm $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ erzeugten Metrik d . In dieser Topologie ist die Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ immer stetig. \diamond

2.28 Satz Eine lineare Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen normierten Vektorräumen $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ist genau dann stetig, wenn sie Lipschitz-stetig ist, d.h. für ein $L > 0$ gilt

$$\|f(x)\|_Y \leq L \|x\|_X \quad (x \in X). \quad (2.2)$$

Beweis:

- Nach Satz 8.5 der *Analysis II* sind Lipschitz-stetige Abbildungen zwischen metrischen Räumen stetig.
- Wegen $\|f(x_1) - f(x_2)\|_Y = \|f(x)\|_Y$ mit $x := x_1 - x_2$ reicht es aus, die Lipschitz-Stetigkeit bei der Null zu überprüfen. Ist f stetig, dann gibt es zu $\varepsilon := 1$ ein $\delta > 0$ mit

$$\|f(x)\|_Y \leq 1 \quad (\|x\|_X \leq \delta).$$

Setze $L := 1/\delta$. Dann folgt aus der Linearität von f für $x \neq 0$ und $\hat{x} := \delta x / \|x\|_X$, also $\|\hat{x}\|_X = \delta$ und $\|f(\hat{x})\|_Y \leq 1$

$\|f(x)\|_Y = \|f(L\|x\|_X \hat{x})\|_Y = \|L\|x\|_X f(\hat{x})\|_Y = L\|x\|_X \|f(\hat{x})\|_Y \leq L\|x\|_X$,
während für $x = 0$ ebenfalls (2.2) folgt. \square

Ist die lineare Abbildung $f : X \rightarrow Y$ stetig, dann definiert man analog zur Matrixnorm die *Operatornorm* von f als

$$\|f\| := \sup_{\|x\|_X=1} \|f(x)\|_Y, \quad (2.3)$$

falls der Ausdruck endlich ist. $\|f\|$ läßt sich wieder grob als maximaler Streckungsfaktor eines Vektors unter der linearen Abbildung f interpretieren, wobei das Supremum in (2.3) nicht angenommen werden muss.

Wie im nächsten Abschnitt in Satz 2.45 gezeigt wird, sind lineare Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ immer stetig, falls $\dim(X) < \infty$.

2.29 Beispiel Es sei

$$X := C^1([0, 1], \mathbb{R}) := \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig differenzierbar}\},$$

und

$$Y := C([0, 1], \mathbb{R}),$$

beide versehen mit der Supremumsnorm. Dann ist die lineare Abbildung

$$D : X \rightarrow Y, \quad f \mapsto f'$$

nach Satz 2.28 *nicht stetig*, denn zwar besitzt $f_n \in X$, $f_n(x) := x^n$ die Norm $\|f_n\| = |f_n(1)| = 1$, aber wegen $Df_n = nf_{n-1}$ ist $\|Df_n\| = n$ ($n \in \mathbb{N}$). \diamond

2.3 Kompaktheit

Im Buch² von KLAUS JÄNICH beginnt das entsprechende Kapitel mit dem Ausruf: "Ah, Kompaktheit! Eine wundervolle Eigenschaft!" Der Grund ist, dass kompakte Räume oft einfacher zu behandeln sind als nicht kompakte.

In Kapitel 9.3 der *Analysis I* wurde $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt genannt, wenn A beschränkt und abgeschlossen ist.

- Der Prototyp eines kompakten Raumes ist daher das abgeschlossene Intervall $[a, b]$, und wir wissen schon, dass darin jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt $x \in [a, b]$ hat. Das ist eine 'wundervolle Eigenschaft', denn eine geeignete Teilfolge konvergiert dann gegen x .

²Klaus Jänich: *Topologie*. Springer, 1999

- Dagegen ist \mathbb{R} nicht kompakt, und z.B. die Folge $(x_n := n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt keinen Häufungspunkt.

In topologischen Räumen definieren wir Kompaktheit ganz anders und zeigen anschließend, dass im Fall des \mathbb{R}^n die Definitionen übereinstimmen.

2.30 Definition

- Eine Teilmenge X eines topologischen Raumes (M, \mathcal{O}) heißt **kompakt**, wenn jede **offene Überdeckung**, d.h. jede (Mengen-)Familie $(V_i)_{i \in I}$ mit $V_i \in \mathcal{O}$ und

$$X \subseteq \bigcup_{i \in I} V_i,$$

eine **endliche Teilüberdeckung** besitzt, also eine mit einer endlichen Teilmenge $J \subseteq I$ indizierte Überdeckung $X \subseteq \bigcup_{j \in J} V_j$.

- X heißt **folgenkompakt**, wenn jede Folge $a : \mathbb{N} \rightarrow X$ eine gegen ein $x \in X$ konvergente Teilfolge besitzt.

2.31 Beispiel $X := (0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ ist nicht kompakt, denn mit $V_i := (\frac{1}{i}, 2)$ für $i \in \mathbb{N}$ ist auch $U_i := V_i \cap X = (\frac{1}{i}, 1]$ in X offen. Die Familie $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ist eine offene Überdeckung von X . Gäbe es aber eine endliche Teilüberdeckung $X = U_{j_1} \cup \dots \cup U_{j_n}$, dann wäre mit $j := \max(j_1, \dots, j_n)$ der Punkt $\frac{1}{j} \in X$. Er ist aber in keinem U_{j_i} . Widerspruch! \diamond

Natürlich *existieren* für jede Teilmenge X eines topologischen Raumes M immer endliche offene Überdeckungen, z.B. die einelementige bestehend aus M .

Es gibt topologische Räume, die kompakt, aber nicht folgenkompakt sind und solche, in denen das Umgekehrte gilt. Aber:

2.32 Satz Ein metrischer Raum (M, d) ist genau dann kompakt, wenn er folgenkompakt ist.

Beweis: In beiden Richtungen führen wir Widerspruchsbeweise:

1. (M, d) sei kompakt. Wir nehmen nun die Existenz einer Folge $a : \mathbb{N} \rightarrow M$ ohne konvergente Teilfolge an.

Dann existiert für jeden Punkt $x \in M$ eine Umgebung V_x , die nur von endlich vielen Folgengliedern getroffen wird. (Warum? Andernfalls existierte ja ein Punkt $x \in M$, dessen Umgebungen $U_{1/n}(x)$ ($n \in \mathbb{N}$) alle von unendlich vielen Folgengliedern getroffen würden. Dann könnten wir eine gegen x konvergente Teilfolge auswählen).

Nach Voraussetzung besitzt aber die offene Überdeckung $(V_x)_{x \in M}$ eine endliche Teilüberdeckung, und damit die Folge nur endlich viele Glieder. Widerspruch!

2. (M, d) sei folgenkompakt, aber nicht kompakt. Es existiert also eine Überdeckung $(V_i)_{i \in I}$ von M ohne endliche Teilüberdeckung.

Für jeden Punkt $x \in M$ und $J(x) := \{i \in I \mid x \in V_i\}$ setzen wir

$$R(x, i) := \min(\sup\{r > 0 \mid U_r(x) \subseteq V_i\}, 1) \quad (i \in J(x)),$$

sodass für diese Radien also $U_{R(x,i)}(x) \subseteq V_i$ gilt.

Als Nächstes wählen wir für jedes $x \in M$ eine Umgebung $V_{j(x)}$ von x mit

$$j(x) \in J(x) \quad \text{so dass} \quad R(x, j(x)) \geq \frac{1}{2} \sup_{i \in J(x)} R(x, i). \quad (2.4)$$

Anschließend konstruieren wir induktiv eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in M mit

$$x_{n+1} \notin V_{j(x_1)} \cup \dots \cup V_{j(x_n)} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (2.5)$$

(da nach Annahme keine endliche Teilüberdeckung existiert, ist dies möglich).

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt nach Annahme eine konvergente Teilfolge, und wir nehmen o.B.d.A. an, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ selbst gegen $a \in M$ konvergiert, also $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, a) = 0$.

Damit muss wegen (2.5) der Limesradius $\lim_{n \rightarrow \infty} R(x_n, j(x_n)) = 0$ sein.

Andererseits ist $R(a, j(a)) > 0$, es gibt also ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$d(x_n, a) < \frac{1}{4} R(a, j(a)) \quad (n \geq N).$$

Damit ist nicht nur $x_n \in U_{R(a,j(a))}(a)$, sondern sogar die Kugel $U_{R(a,j(a))/4}(x_n)$ um x_n mit n -unabhängigem Radius in $U_{R(a,j(a))}(a)$ enthalten. Wir haben also für ein $n \in \mathbb{N}$ die Bedingung (2.4) verletzt. Widerspruch! \square

2.33 Korollar *Kompakte metrische Räume sind vollständig.*

Beweis: Denn konvergiert eine Teilfolge einer Cauchy-Folge, so auch die Cauchy-Folge selbst. \square

2.34 Beispiel

$\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ ist nicht vollständig (da z.B. $1/\sqrt{2} \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$), also nicht kompakt! \diamond

Satz 2.32 ermöglicht uns zu zeigen, dass die Kompaktheits-Definition der *Analysis I* Spezialfall unserer jetzigen Definition ist.

2.35 Satz (Heine–Borel) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt im Sinne von Definition 2.30, wenn A beschränkt und abgeschlossen ist.

Beweis:

1. Falls A beschränkt und abgeschlossen ist, ist A nach dem Satz von Bolzano–Weierstraß (Satz 7.41 der *Analysis I*) folgenkompakt und damit nach Satz 2.32 kompakt.
2. Ist A unbeschränkt, dann existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \infty$. Diese Folge divergiert also, und A ist nicht (folgen)kompakt.
3. Gleiches gilt, falls A nicht abgeschlossen ist, also einen nicht in A liegenden Häufungspunkt besitzt. \square

Man könnte nun denken, dass allgemein Abgeschlossenheit und Beschränktheit³ einer Teilmenge eines metrischen Raumes ihre Kompaktheit impliziert. Das gilt aber noch nicht einmal für Teilmengen normierter Vektorräume:

2.36 Bemerkung (Kompaktheit)

Die Einheitssphäre $S := \{f \in \ell^2 \mid \|f\|_2 = 1\}$ im *Hilbertschen Folgenraum*

$$\ell^2 := \ell^2(\mathbb{N}) := \left\{ f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|^2 < \infty \right\}$$

bezüglich der Norm $\|f\|_2 := \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|^2}$ ist beschränkt und abgeschlossen, aber nicht kompakt. Denn die Folge $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der (Basis–) Vektoren $e_n(k) := \delta_{n,k}$ ($k \in \mathbb{N}$) liegt in S , besitzt aber wegen $\|e_n - e_m\|_2 = \sqrt{2}$ ($m \neq n$) keine konvergente Teilfolge. \diamond

2.37 Satz Kompakte Teilmengen von Hausdorff–Räumen sind abgeschlossen.

Beweis: Sei M Hausdorff–Raum und $X \subseteq M$ kompakt. Zu zeigen ist: $Y := M - X$ ist offen. Für $y \in Y$ konstruieren wir zum Nachweis eine offene Umgebung $V \subseteq Y$ von y . Für jedes $x \in X$ existieren wegen der Hausdorff-Eigenschaft disjunkte offene Umgebungen $U_x \subseteq M$ von x und $V_x \subseteq M$ von y . Wegen der Kompaktheit von X gibt es eine endliche Teilüberdeckung

$$U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n} \supseteq X$$

der Überdeckung $(U_x)_{x \in X}$ von X . Für die offene Umgebung

$$V := V_{x_1} \cap \dots \cap V_{x_n} \subseteq M$$

³**Definition** Eine Teilmenge $A \subseteq X$ eines metrischen Raums (X, d) heißt **beschränkt**, wenn $A = \emptyset$ oder wenn ihr Durchmesser $\text{diam}(A) = \sup_{x,y \in A} d(x,y)$ endlich ist.

von y gilt: $U_{x_i} \cap V \subseteq U_{x_i} \cap V_{x_i} = \emptyset$ ($i = 1 \dots, n$). Also ist $V \subseteq M - X = Y$. \square

Gegenbeispiel (Kompakt, aber nicht abgeschlossen):

$M := \{1, 2\}$ mit indiskreter Topologie $\mathcal{O} = \{\emptyset, \{1, 2\}\}$. $\{1\} \subset \{1, 2\}$ ist zwar als endliche Menge kompakt, aber nicht abgeschlossen, da $\{2\}$ nicht offen ist. \diamond

Die folgenden beiden Sätze können oft zum Nachweis der Kompaktheit benutzt werden.

2.38 Satz

Ist $X \subseteq M$ kompakt und $f : M \rightarrow Y$ stetig, dann ist $f(X) \subseteq Y$ kompakt.

Beweis: Sei $(V_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $f(X)$ und

$$U_i := f^{-1}(V_i) = \{x \in M \mid f(x) \in V_i\}.$$

Dann ist nach Satz 2.23 auch U_i offen, und es gibt eine endliche Teilüberdeckung $X \subseteq U_{j_1} \cup \dots \cup U_{j_m}$. Damit ist $f(X) \subseteq V_{j_1} \cup \dots \cup V_{j_m}$. \square

Ein weiteres Prinzip zur Identifikation kompakter Mengen ist das folgende:

2.39 Satz

Abgeschlossene Teilmengen kompakter topologischer Räume sind kompakt.

Beweis: Es sei $A \subseteq K$ eine abgeschlossene Teilmenge des kompakten Raums K und $(V_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von A durch (in A) offene Teilmengen $V_i \subseteq A$. Nach Definition 2.17 der Teilraumtopologie gibt es daher in K offene Teilmengen $(U_i)_{i \in I}$ mit $V_i = U_i \cap A$. Die U_i bilden zusammen mit der offenen Menge $K \setminus A$ eine offene Überdeckung von K , die wegen Kompaktheit von K eine endliche Teilüberdeckung besitzt:

$$K = (K \setminus A) \cup U_{j_1} \cup \dots \cup U_{j_m}.$$

Damit ist $A = V_{j_1} \cup \dots \cup V_{j_m}$. \square

Eine Abbildung ist genau dann stetig, wenn die Urbilder der offenen Mengen offen sind, oder äquivalent, wenn die Urbilder der abgeschlossenen Mengen abgeschlossen sind.

So gewinnt man viele Kompakta:

2.40 Beispiel Die n -Sphäre $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ ist kompakt, denn

- S^n ist Urbild der abgeschlossenen Menge $\{1\} \subseteq \mathbb{R}$ unter der stetigen Abbildung $x \mapsto \|x\|$, also abgeschlossen, und
- $S^n \subseteq [-1, 1]^{n+1}$. Die Kompaktheit der Quader haben wir aber schon gezeigt. \diamond

2.41 Satz *Stetige Funktionen* $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ auf kompakten metrischen Räumen $X \neq \emptyset$ nehmen ihr Minimum und Maximum an, d.h. es gibt $x_{\min}, x_{\max} \in X$ mit

$$\inf_{x \in X} f(x) = f(x_{\min}) \quad , \quad \sup_{x \in X} f(x) = f(x_{\max}).$$

Beweis: Da $f(X) \neq \emptyset$, gibt es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\sup_x f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$. Wegen der Äquivalenz von Kompaktheit und Folgenkompaktheit (Satz 2.32) gibt es eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Wegen der Stetigkeit von f und der Äquivalenz von Stetigkeit und Folgenstetigkeit (Satz 9.4 der *Analysis I*) gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_{\max}) \quad \text{für} \quad x_{\max} := \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}.$$

Analog für das Infimum. □

In einem metrischen Raum (X, d) ist der Minimalabstand zweier nicht leerer Teilmengen $V, W \subseteq X$ definiert durch

$$\text{dist}(V, W) := \inf\{d(v, w) \mid v \in V, w \in W\}. \quad (2.6)$$

2.42 Satz *Sind* V *und* W *disjunkt, V *abgeschlossen und W *kompakt, dann ist***

$$\text{dist}(V, W) > 0.$$

Beweis: Der Abstand zu einer beliebigen nicht leeren Teilmenge $V \subseteq X$, also

$$\text{dist}_V : X \rightarrow [0, \infty) \quad , \quad \text{dist}_V(x) = \inf\{d(x, v) \mid v \in V\}$$

ist wegen der Dreiecksungleichung stetig:

$$\text{dist}_V(y) = \inf_{v \in V} d(y, v) \leq d(y, x) + \text{dist}_V(x) \quad (x, y \in X).$$

Ist $V \subseteq X$ abgeschlossen und $x \in X \setminus V$, dann ist $d_V(x) > 0$. (2.6) hat die Form

$$\text{dist}(V, W) = \inf\{\text{dist}_V(w) \mid w \in W\}.$$

Sind nun V und W disjunkt, V abgeschlossen und W kompakt, dann nimmt d_V auf dem kompakten metrischen Raum $W \neq \emptyset$ nach Satz 2.41 das Infimum an. □

Aufgabe: Finden Sie ein Beispiel zweier disjunkter abgeschlossener Teilmengen V, W eines metrischen Raums (X, d) mit $\text{dist}(V, W) = 0$. ◇

Während verschiedene Normen auf einem Vektorraum unterschiedliche geometrische Strukturen erzeugen, können sie einander doch in einem größeren Sinn gleichen:

2.43 Definition Zwei Normen $\|\cdot\|_I$ und $\|\cdot\|_{II}$ auf dem \mathbb{K} -Vektorraum V (mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C}) heißen **äquivalent**, wenn für geeignete $C' \geq C > 0$ gilt:

$$C\|v\|_I \leq \|v\|_{II} \leq C'\|v\|_I \quad (v \in V).$$

Der folgende Satz folgt aus einem Kompaktheitsargument.

2.44 Satz

Alle Normen auf einem endlich-dimensionalen \mathbb{K} -Vektorraum sind äquivalent.

Beweis:

- Ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachten wir den \mathbb{K}^n .
- Es sei $\|\cdot\| : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Norm. Es genügt die Äquivalenz dieser Norm zur *euklidischen Norm* $\|\cdot\|_2$ nachzuweisen, denn Äquivalenz von Normen ist eine Äquivalenzrelation.
- Wir zeigen zunächst, dass die Abbildung $\|\cdot\| : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist. Es sei dazu e_1, \dots, e_n die kanonische Basis des \mathbb{K}^n (mit $\|e_i\|_2 = 1$) und $c_i := \|e_i\|$ die Norm des i -ten Basiselementes. Dann besitzt ein Vektor $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k \in \mathbb{K}^n$ die euklidische Länge $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$ und nach der Dreiecksungleichung die Länge

$$\|x\| \leq \sum_{i=1}^n \|x_i e_i\| = \sum_{i=1}^n |x_i| c_i \leq c \sum_{i=1}^n |x_i| \leq cn \|x\|_2$$

mit $c := \max(c_1, \dots, c_n)$. Damit ist die Norm-Abbildung stetig.

- Nun restringieren wir diese auf die Einheitssphäre

$$S_{\mathbb{K}}^{n-1} := \{x \in \mathbb{K}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$$

des Euklidischen Vektorraums, betrachten also die Abbildung

$$f : S_{\mathbb{K}}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|x\|.$$

Da $S_{\mathbb{K}}^{n-1}$ nach Beispiel 2.40 kompakt⁴ und f stetig ist, nimmt f Minimum $f_{\min} > 0$ und Maximum $f_{\max} < \infty$ an. Daher gilt $f_{\min} \|x\|_2 \leq \|x\| \leq f_{\max} \|x\|_2$. \square

2.45 Satz Sind $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte \mathbb{K} -Vektorräume mit $\dim(X) < \infty$, dann ist jede lineare Abbildung $f : X \rightarrow Y$ stetig.

Beweis: Nach Satz 2.44 können wir annehmen, dass $\|\cdot\|_X$ die euklidische Norm ist. Es sei $e_1, \dots, e_n \in X$ eine Orthonormalbasis und $x = \sum_{i=1}^n c_i e_i \in X$ von der Norm 1, also $\sum_{i=1}^n |c_i|^2 = 1$. Dann ist

$$\|f(x)\|_Y = \left\| \sum_{i=1}^n c_i f(e_i) \right\|_Y \leq \sum_{i=1}^n |c_i| \|f(e_i)\|_Y \leq L$$

mit Lipschitz-Konstante $L := n \max\{\|f(e_i)\|_Y \mid i = 1, \dots, n\}$. \square

⁴Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, dann ist $S_{\mathbb{C}}^{n-1} = S_{\mathbb{R}}^{2n-1}$, wenn man den \mathbb{C}^n reellifiziert d.h. mit dem \mathbb{R}^{2n} identifiziert.

3 Mengensysteme

Wir haben schon im letzten Kapitel *Mengensysteme* betrachtet, nämlich Topologien $\mathcal{O} \subseteq 2^M$ auf einer Menge M . Die Elemente von \mathcal{O} hießen *offen*.

Auch in der Maßtheorie, unserem nächsten Thema, sind Mengensysteme $\mathcal{A} \subseteq 2^M$ zentral, nämlich die der *meßbaren* Teilmengen von M . Das sind die Mengen, denen ein Maß zugeordnet wird, also eine nicht negative Zahl oder Unendlich. Schauen wir uns also an, welche Eigenschaften ein Maß haben muss.

3.1 σ -Algebren und Maße

Zunächst müssen wir festlegen, welche Teilmengen der Grundmenge M überhaupt messbar sein sollen. Wir wählen also wie gesagt ein Mengensystem $\mathcal{A} \subseteq 2^M \equiv \mathcal{P}(M)$ in der Potenzmenge von M aus.

Am bequemsten wäre es, alles messen zu können, also $\mathcal{A} = 2^M$, aber das ist nicht immer möglich. Wir fordern, dass \mathcal{A} eine σ -Algebra ist.

3.1 Definition

- $\mathcal{A} \subseteq 2^M$ heißt **σ -Algebra (von M)**, wenn
 - (a) $M \in \mathcal{A}$
 - (b) $A \in \mathcal{A}$ impliziert, dass $A^c := M \setminus A \in \mathcal{A}$
 - (c) $A_n \in \mathcal{A}$ ($n \in \mathbb{N}$) impliziert, dass $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.
- Für eine σ -Algebra $\mathcal{A} \subseteq 2^M$ von M heißt das Paar (M, \mathcal{A}) **Messraum**, und die Mengen $A \in \mathcal{A}$ heißen **messbar**.

Die kleinste σ -Algebra von M ist damit $\{\emptyset, M\}$, die größte 2^M .

In der Praxis wird man für einen topologischen Raum (M, \mathcal{O}) (also mit Def. 2.2 insbesondere für einen metrischen Raum (M, d) , wie etwa den euklidischen Raum \mathbb{R}^d) eine von diesen beiden im Allgemeinen verschiedene σ -Algebra wählen, welche die offenen und damit auch die abgeschlossenen Mengen enthält (Def. 3.5).

Das Symbol σ soll an den Begriff der Summe erinnern, entsprechend der dritten Forderung in Def. 3.1, also der Stabilität unter abzählbarer Vereinigung.

Sigma-Algebren sind offensichtlich auch unter dem Schnitt abzählbar vieler Mengen stabil: $A_n \in \mathcal{A}$ ($n \in \mathbb{N}$) impliziert, dass $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^c\right)^c \in \mathcal{A}$.

3.2 Definition

- Für einen Messraum (M, \mathcal{A}) heißt eine Abbildung $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ **Maß**, wenn
 - (a) $\mu(\emptyset) = 0$

(b) Für disjunkte (das heißt $A_m \cap A_n = \emptyset$ ($m \neq n$)) $A_n \in \mathcal{A}$ ($n \in \mathbb{N}$) gilt:

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) \quad (\text{abzählbare oder } \sigma\text{-Additivität}).$$

- Dann heißt das Tripel (M, \mathcal{A}, μ) **Maßraum**.
- Das Maß μ heißt **endlich**, wenn $\mu(M) < \infty$, und **Wahrscheinlichkeitsmaß**, wenn $\mu(M) = 1$.

3.3 Beispiele 1. Für eine Menge M mit σ -Algebra 2^M wird durch $\mu(A) := |A|$ falls A endlich, und sonst $\mu(A) := \infty$ ein Maß definiert, das **Zählmaß**.

2. Vom Lebesgue-Maß wissen wir zunächst nur, dass die abgeschlossenen achsenparallelen Würfel der Kantenlänge 1 im Mengensystem $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ liegen. Nun folgt aus den Axiomen einer σ -Algebra, dass mit $A, B \in \mathcal{A}$ auch $A \cap B \in \mathcal{A}$ ist, denn mit $D^c := M \setminus D$ ist $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$. Daraus folgern wir, dass alle Quader messbar sind. Diese können sogar durch endlich viele mengentheoretische Operationen aus den Einheitswürfeln gewonnen werden.

Aber z.B. auch die offene Kreisscheibe $K := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| < 1\}$ ist messbar. Denn wir können sie als abzählbare Vereinigung von Quadraten darstellen. \diamond

Wie weit kommen wir mit dieser Konstruktion?

3.4 Definition Ist ein Mengensystem $\mathcal{E} \subseteq 2^M$ gegeben, dann wird die kleinste σ -Algebra, die \mathcal{E} enthält, die von \mathcal{E} **erzeugte σ -Algebra** genannt und mit $\sigma(\mathcal{E})$ bezeichnet. \mathcal{E} heißt ein **Erzeuger** von $\sigma(\mathcal{E})$.

Vorsicht: Warum gibt es eine kleinste solche σ -Algebra und warum ist sie eindeutig? Wir setzen

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap \{ \mathcal{A} \subseteq 2^M \mid \mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}, \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra} \}.$$

Zunächst enthält die σ -Algebra 2^M nach Voraussetzung \mathcal{E} , es wird also ein nicht leeres Mengensystem geschnitten. Andererseits enthält ihr Durchschnitt \mathcal{E} . Der Schnitt beliebig vieler σ -Algebren $\mathcal{A}_i \subseteq 2^M$ ist aber wieder eine σ -Algebra. \diamond

3.5 Definition Für einen topologischen Raum (M, \mathcal{O}) heißt die von der Topologie $\mathcal{O} \subseteq 2^M$ erzeugte σ -Algebra $\mathcal{B}(M) := \sigma(\mathcal{O})$ die **Borel- σ -Algebra**.

3.2 Ringe, Algebren und Halbringe

Das Wort 'Algebra' erinnert an *die Algebra* als Teilgebiet der Mathematik. In diesem Abschnitt klären wir den Zusammenhang.

Aus der Algebra kennen wir die Definition eines *Rings*.

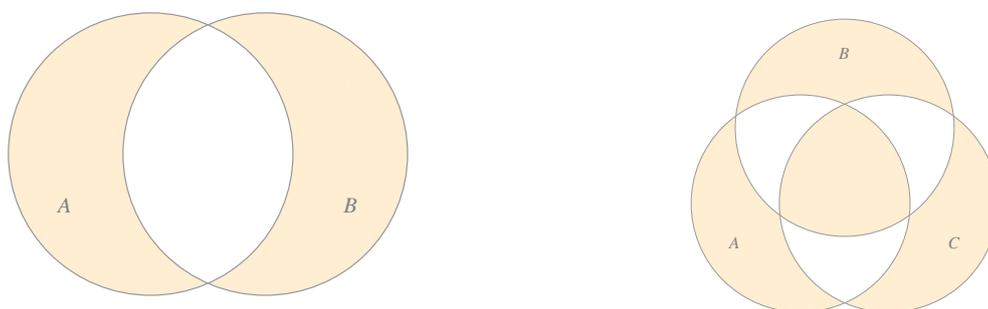


Abbildung 3.1: Symmetrische Differenz $A\Delta B$ (rosa) der (kreisförmigen) Mengen A und B (links), und $A\Delta B\Delta C$ für A , B und C (rechts)

3.6 Definition

- Eine Menge R mit zwei Operationen $+$: $R \times R \rightarrow R$ und \cdot : $R \times R \rightarrow R$ heißt **Ring**, wenn $(R, +)$ eine abelsche Gruppe ist,
 - das Assoziativitätsgesetz $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ und
 - die Distributivgesetze $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ gelten.
- Ein Ring heißt **unitär**, wenn er ein (beidseitiges) neutrales Element 1 der Multiplikation enthält.
- Ein Ring heißt **kommutativ**, wenn $a \cdot b = b \cdot a$ gilt.
- Eine Teilmenge $U \subseteq R$ heißt **Unterring** eines Rings $(R, +, \cdot)$, wenn $(U, +)$ eine Untergruppe von $(R, +)$ ist und aus $a, b \in U$ folgt: $a \cdot b \in U$.

In der Potenzmenge $\mathcal{R} := 2^M$ einer beliebigen Menge M gibt es zwei Operationen, die diese zum kommutativen Ring machen: die *symmetrische Differenz*

$$\Delta : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R} \quad , \quad (A, B) \longmapsto (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

und der Schnitt \cap . Das neutrale Element der als Addition aufgefassten Verknüpfung Δ ist \emptyset . Auch der als Multiplikation aufgefasste Schnitt besitzt hier ein neutrales Element, nämlich M selbst. Da Δ assoziativ ist (siehe Abbildung 3.1, rechts), kann man $A\Delta B\Delta C$ statt $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$ schreiben.

3.7 Definition

Ein **(Mengen-)Ring** \mathcal{R} über M ist ein Mengensystem $\emptyset \neq \mathcal{R} \subseteq 2^M$, für das gilt:

$$\text{Für } A, B \in \mathcal{R} \quad \text{ sind } \quad A \cup B \in \mathcal{R} \quad \text{ und } \quad A \setminus B \in \mathcal{R}.$$

Ein solcher Ring \mathcal{R} über M enthält wenigstens die leere Menge, aber nicht notwendig M selbst. In einem Mengerring \mathcal{R} sind auch symmetrische Differenz $A\Delta B$ und Durchschnitt $A \cap B$ von $A, B \in \mathcal{R}$ enthalten,⁵ denn

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \quad \text{und} \quad A \cap B = (A \cup B) \setminus (A\Delta B).$$

Umgekehrt ist

$$A \setminus B = (A\Delta B) \cap A \quad \text{und} \quad A \cup B = A\Delta(B \setminus A).$$

Daher gilt:

3.8 Lemma Für $\mathcal{R} \subseteq 2^M$ ist $(\mathcal{R}, \cup, \setminus)$ genau dann ein Mengerring, wenn \mathcal{R} im algebraischen Sinn ein Unterring von $(2^M, \Delta, \cap)$ ist.

Beweis: Hausaufgabe □

Ein Grund, Mengerringe einzuführen ist, dass man mit ihnen leicht Maße festlegen kann. Der in diesem Zusammenhang ebenfalls wichtige maßtheoretische Begriff der Mengenalgebra ist analog zum (algebraischen) Begriff der Algebra gebildet:

3.9 Definition

- Eine **Algebra** über einem Körper \mathbb{K} ist ein Ring A mit der Eigenschaft, gleichzeitig \mathbb{K} -Vektorraum zu sein mit

$$k \cdot (ab) = (k \cdot a)b = a(k \cdot b) \quad (k \in \mathbb{K}, a, b \in A).$$

- Ein Mengerring $\mathcal{A} \subseteq 2^M$ heißt **(Mengen-)Algebra**, wenn auch $M \in \mathcal{A}$ ist.

3.10 Satz

$\mathcal{A} \subseteq 2^M$ ist genau dann Mengen-Algebra, wenn $(\mathcal{A}, \Delta, \cap, \cdot)$ eine **unitale** (also $1 \equiv M$ enthaltende) Algebra über dem Körper $\mathbb{F}_2 = (\{0, 1\}, +, \cdot)$ ist.⁶

Beweis: Eine Teilmenge $A \in 2^M$ von M ist durch ihre *charakteristische Funktion*

$$\mathbb{1}_A : M \rightarrow \mathbb{F}_2 \quad , \quad \mathbb{1}_A(m) = \begin{cases} 1 & , m \in A \\ 0 & , m \notin A \end{cases}$$

charakterisiert, und es gilt (wegen der Rechenregel $1 + 1 = 0$ in \mathbb{F}_2)

$$\mathbb{1}_{A\Delta B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B \quad , \quad \mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \quad (A, B \in 2^M). \quad (3.1)$$

⁵Man kann aber Ringe **nicht** durch die Bedingung $A, B \in \mathcal{R} \implies A \cap B \in \mathcal{R}$ und $A \setminus B \in \mathcal{R}$ an ein Mengensystem \mathcal{R} charakterisieren. Ein Gegenbeispiel ist $\mathcal{R} := \{\emptyset, \{a\}, \{b\}\}$.

⁶Der Punkt in $(\{0, 1\}, +, \cdot)$ bezeichnet die Multiplikation im Körper \mathbb{F}_2 , der in $(\mathcal{A}, \Delta, \cap, \cdot)$ die Skalarmultiplikation, siehe (3.2) im Beweis.

Die Menge $\{\mathbb{1}_A \mid A \in \mathcal{A}\}$ der charakteristischen Funktionen bildet nach Lemma 3.8 genau dann einen zu $(\mathcal{A}, \Delta, \cap)$ isomorphen Ring, wenn $(\mathcal{A}, \cup, \setminus)$ ein Mengerring ist. In diesem Fall wird $(\mathcal{A}, \Delta, \cdot)$ mit der Skalarmultiplikation

$$\mathbb{F}_2 \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \quad , \quad k \cdot \mathbb{1}_A = \begin{cases} \mathbb{1}_A & , k = 1 \\ \mathbb{1}_\emptyset & , k = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

ein \mathbb{F}_2 -Vektorraum. Denn damit gilt $k \cdot (\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B) = (k \cdot \mathbb{1}_A) + (k \cdot \mathbb{1}_B)$ und

$$(k \ell) \cdot \mathbb{1}_A = k \cdot (\ell \cdot \mathbb{1}_A) \quad , \quad (k + \ell) \cdot \mathbb{1}_A = (k \cdot \mathbb{1}_A) + (\ell \cdot \mathbb{1}_A) \quad (k, \ell \in \mathbb{F}_2, A, B \in \mathcal{A}),$$

bei Benutzung von (3.1). Da zusätzlich gilt: $k \cdot (\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B) = (k \cdot \mathbb{1}_A) \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_A (k \cdot \mathbb{1}_B)$, ist $(\mathcal{A}, \Delta, \cap, \cdot)$ eine Algebra über \mathbb{F}_2 .

Diese Algebra enthält genau dann ein Einselement, wenn $M \in \mathcal{A}$, denn für alle $B \subseteq M$ gilt: $\mathbb{1}_M \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_B$. \square

Wie erhalten wir nun praktisch Mengerringe? Dies schauen wir uns in unserem wichtigsten Beispiel, dem von $M = \mathbb{R}^d$ an.

3.11 Definition Für $a, b \in \mathbb{R}^d$ ist $a < b$ genau dann, wenn $a_k < b_k$, und $a \leq b$, wenn $a_k \leq b_k$ für alle $k = 1, \dots, d$.

Dies definiert eine *Halbordnung* (= partielle Ordnung) $a \leq b$, also eine transitive, reflexive und antisymmetrische Relation auf \mathbb{R}^d . Für $d > 1$ ist das keine Ordnung, denn $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ lassen sich so in \mathbb{R}^2 nicht vergleichen.

3.12 Definition Für alle $a, b \in \mathbb{R}^d$ sind folgende **Intervalle** definiert:

- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R}^d \mid a \leq x \leq b\}$ (**abgeschlossen**)
- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid a < x < b\}$ (**offen**)
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid a \leq x < b\}$ (**halboffen**)
- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R}^d \mid a < x \leq b\}$ (**halboffen**) .

Betrachten wir nun das Mengensystem

$$\mathcal{I}^d := \{(a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}^d, a \leq b\} \quad \text{oder auch} \quad \mathcal{I}_{\mathbb{Q}}^d := \{(a, b] \mid a, b \in \mathbb{Q}^d, a \leq b\}.$$

\mathcal{I}^d und $\mathcal{I}_{\mathbb{Q}}^d$ sind sehr kleine, gewissermaßen übersichtliche Mengensysteme, mit $|\mathcal{I}^d| = |\mathbb{R}|$ und $|\mathcal{I}_{\mathbb{Q}}^d| = |\mathbb{N}|$. Es sind zwar keine Mengerringe (denn $(a, b] \setminus (c, d]$ ist kein Intervall mehr, wenn $a < c < d < b$), aber es sind Halbringe.⁷

⁷Dieser Mengensysteme betreffende Begriff unterscheidet sich grundlegend von dem eines Halbrings im Sinne der Algebra!

3.13 Definition Ein Mengensystem $\mathcal{H} \subseteq 2^M$ heißt **Halbring** über M , wenn

1. $\emptyset \in \mathcal{H}$
2. Für $A, B \in \mathcal{H}$ ist $A \cap B \in \mathcal{H}$ (**durchschnittsstabil**)
3. Für $A, B \in \mathcal{H}$ gibt es disjunkte $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{H}$ mit $A \setminus B = \bigcup_{k=1}^n C_k$.

Es wird also nicht gefordert, dass die Differenz zweier Elemente eines Halbringes wieder im Halbring ist. Das ist auch im Allgemeinen nicht der Fall, denn:

3.14 Lemma \mathcal{I}^1 und $\mathcal{I}_{\mathbb{Q}}^1$ sind Halbringe über \mathbb{R} .

Beweis: Für alle a, b, c, d in \mathbb{R} beziehungsweise in \mathbb{Q} gilt

1. $(a, a] = \emptyset$
2. $(a, b] \cap (c, d] = (\max(a, c), \min(b, d)]$
3. $(a, b] \setminus (c, d] = (a, \min(b, c)] \dot{\cup} (\max(a, d), b]$. \square

Versteht man \min und \max im \mathbb{R}^d komponentenweise, dann stimmt auch für \mathcal{F}^d die Gleichung $(a, b] \cap (c, d] = (\max(a, c), \min(b, d)]$.

Die Gleichung $(a, b] \setminus (c, d] = (a, \min(b, c)] \dot{\cup} (\max(a, d), b]$ lässt sich zwar nicht so leicht auf mehrere Dimensionen übertragen. Wegen des folgenden Lemmas gilt aber eine zu Lemma 3.14 analoge Aussage auch im \mathbb{R}^d .

3.15 Lemma Sind \mathcal{H}_1 und \mathcal{H}_2 Halbringe (über M_1 und M_2), dann ist

$$\mathcal{H}_1 * \mathcal{H}_2 := \{A \times B \mid A \in \mathcal{H}_1, B \in \mathcal{H}_2\} \quad (3.3)$$

Halbring (über $M_1 \times M_2$).

Beweis:

1. $\emptyset \times \emptyset = \emptyset \in \mathcal{H}_1 * \mathcal{H}_2$
2. Für alle $A, A' \in \mathcal{H}_1, B, B' \in \mathcal{H}_2$ gilt wegen der Durchschnittsstabilität der \mathcal{H}_i :

$$(A \times B) \cap (A' \times B') = (A \cap A') \times (B \cap B') \in \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2.$$

3. $(A \times B) \setminus (A' \times B') = ((A \setminus A') \times B) \dot{\cup} ((A \cap A') \times (B \setminus B'))$, und die beiden disjunkten Mengen der rechten Seite sind jeweils disjunkte Vereinigungen endlich vieler Elemente des Mengensystems $\mathcal{H}_1 * \mathcal{H}_2$. Siehe auch Abb. 3.2. \square

3.16 Korollar Also sind in beliebiger Dimension \mathcal{I}^d und $\mathcal{I}_{\mathbb{Q}}^d$ Halbringe über \mathbb{R}^d .

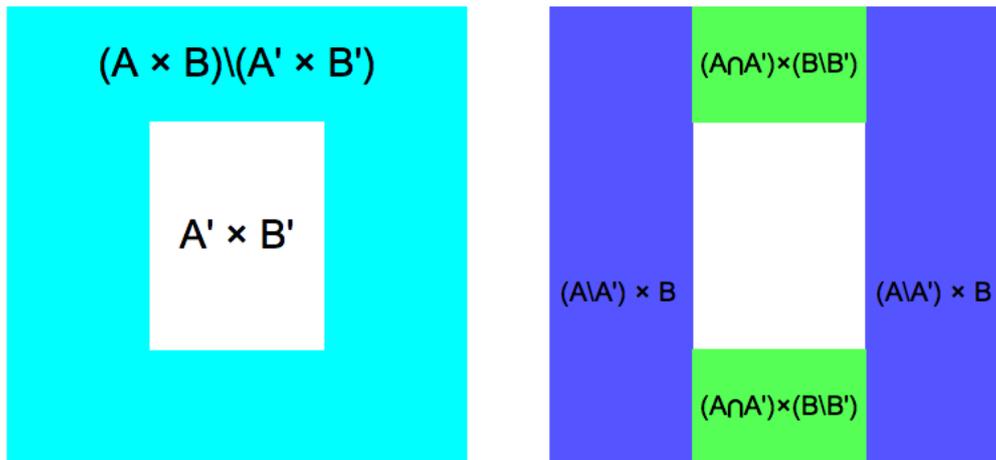


Abbildung 3.2: Für $A' \subseteq A$ (horizontal) und $B' \subseteq B$ (vertikal): $(A \times B) \setminus (A' \times B')$ (links, zyan), dargestellt als disjunkte Vereinigung $(A \setminus A') \times B \dot{\cup} A' \times (B \setminus B')$ (rechts)

Beweis: Denn $\mathcal{I}^{k+1} = \mathcal{I}^k * \mathcal{I}$ und $\mathcal{I}_{\mathbb{Q}}^{k+1} = \mathcal{I}_{\mathbb{Q}}^k * \mathcal{I}_{\mathbb{Q}}$. □

Wir erhalten allgemein für ein Mengensystem $\mathcal{S} \subseteq 2^M$ den von \mathcal{S} **erzeugten Ring**, also den kleinsten \mathcal{S} enthaltenden Ring $\mathcal{R} \subseteq 2^M$, durch Schnittbildung:

$$\mathcal{R} = \bigcap \{R \subseteq 2^M \mid \mathcal{S} \subseteq R, R \text{ ist ein Ring}\}. \quad (3.4)$$

3.17 Lemma Für Elemente $A, B_1, \dots, B_m \in \mathcal{H}$ eines Halbringes $\mathcal{H} \subseteq 2^M$ gibt es disjunkte $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{H}$ mit

$$A \setminus \left(\bigcup_{k=1}^m B_k \right) = \bigcup_{\ell=1}^n C_{\ell}. \quad (3.5)$$

3.18 Beispiel (Intervalle) Es ist nützlich, sich zu überlegen, wie man etwa im Fall des Halbringes \mathcal{I}^d der halboffenen Intervalle die Intervalle C_{ℓ} konstruiert.

Dort wird (wegen der Ordnung von \mathbb{R}) durch jedes $B_k = (c, d]$ eine Zerlegung von $A = (a, b]$ in höchstens 3^d disjunkte Intervalle definiert, deren Intervallgrenzen bezüglich der j -ten Koordinate aufeinanderfolgende Zahlen in der Menge $\{a_j, b_j, c_j, d_j\}$ sind. Schnitt dieser zu verschiedenen B_k gehörenden Intervalle liefert die C_{ℓ} . ◇

Beweis von Lemma 3.17:

- Für $m = 1$ ist (3.5) wie bemerkt Teil der Definition eines Halbringes.
- Für den Induktionsschritt $m \mapsto m + 1$ sei die disjunkte Zerlegung (3.5) gegeben, und wir wollen $A \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{m+1} B_k \right)$ als disjunkte Vereinigung von Elementen des Halbringes \mathcal{H} darstellen. Dazu stellen wir die disjunkten Mengen $C_{\ell} \setminus B_{m+1}$ jeweils

als disjunkte Vereinigungen

$$C_\ell \setminus B_{m+1} = \bigcup_{r=1}^{R_\ell} \tilde{C}_{\ell,r} \quad \text{mit} \quad \tilde{C}_{\ell,r} \in \mathcal{H} \quad (\ell = 1, \dots, n)$$

dar. Das ist wegen der dritten Eigenschaften von Halbringen möglich. Damit ist

$$A \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{m+1} B_k \right) = \bigcup_{\ell=1}^n \bigcup_{r=1}^{R_\ell} \tilde{C}_{\ell,r}. \quad \square$$

Die Form (3.4) für den von einem Mengensystem erzeugten Ring ist nicht sehr explizit. Ist das Mengensystem dagegen schon ein Halbring, dann kann man letzteren direkt angeben:

3.19 Satz *Der von einem Halbring $\mathcal{H} \subseteq 2^M$ erzeugte Ring ist von der Form*

$$\mathcal{R} := \left\{ \bigcup_{k=1}^m A_k \mid m \in \mathbb{N}, A_1, \dots, A_m \in \mathcal{H} \text{ disjunkt} \right\}.$$

Beweis:

- \mathcal{R} ist im von \mathcal{H} erzeugten Ring enthalten, denn dieser enthält sogar beliebige endliche Vereinigungen.
- Um zu beweisen, dass \mathcal{R} ein Ring ist, benutzen wir Lemma 3.8.

1. $\emptyset \in \mathcal{R}$: denn $\emptyset \in \mathcal{H}$.

2. **Aus $A, B \in \mathcal{R}$ folgt $A \cap B \in \mathcal{R}$:**

Für $A = \bigcup_{k=1}^m A_k$ und $B = \bigcup_{\ell=1}^n B_\ell$ mit jeweils disjunkten $A_k, B_\ell \in \mathcal{H}$ ist

$$A \cap B = \bigcup_{\substack{1 \leq k \leq m \\ 1 \leq \ell \leq n}} A_k \cap B_\ell$$

endliche Vereinigung disjunkter Elemente von \mathcal{H} , also $A \cap B \in \mathcal{R}$.

3. **Aus $A, B \in \mathcal{R}$ folgt $A \Delta B \in \mathcal{R}$:**

Das schließen wir wegen $A \Delta B = (A \setminus B) \dot{\cup} (B \setminus A)$ (disjunkt!) aus

$A, B \in \mathcal{R} \implies A \setminus B \in \mathcal{R}$.

Aber $A \setminus B = \bigcup_{k=1}^m (A_k \setminus \bigcup_{\ell=1}^n B_\ell)$ ist nach Lemma 3.17 disjunkte Vereinigung von Elementen aus \mathcal{H} , also $A \setminus B \in \mathcal{R}$. □

3.20 Definition

- *Der von \mathcal{I}^d erzeugte Ring $\left\{ \bigcup_{k=1}^m I_k \mid m \in \mathbb{N}, I_k \in \mathcal{I}^d \text{ disjunkt} \right\}$ d -dimensionaler **Intervallsummen** heißt \mathcal{F}^d .*

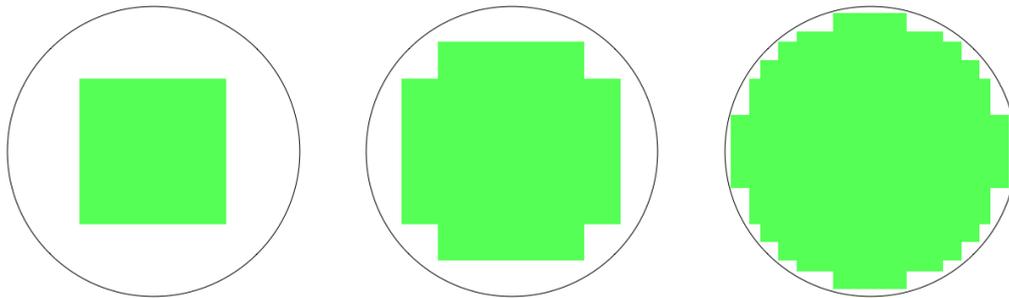


Abbildung 3.3: Ausschöpfung einer Kreisscheibe durch Elemente von \mathcal{F}^2

- Analog definiert man den von $\mathcal{I}_{\mathbb{Q}}^d$ erzeugten Ring $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}}^d$.

3.21 Bemerkung (Ring und σ -Algebra)

Es ist anschaulich klar, dass man Teilmengen des \mathbb{R}^d wie z.B. offene Vollkugeln $U_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^d \mid \|y - x\| < \varepsilon\}$ durch Folgen von Elementen $A_n \in \mathcal{F}^d$, $A_{n+1} \supseteq A_n$ ($n \in \mathbb{N}$) in dem Sinn ausschöpfen kann, dass jeder Punkt $y \in U_\varepsilon(x)$ für genügend große n in A_n enthalten ist, siehe Abbildung 3.3. Andererseits sind diese Vollkugeln selbst nicht Elemente von \mathcal{F}^d . Um dies zu erreichen, muss man zu der von \mathcal{F}^d erzeugten σ -Algebra $\sigma(\mathcal{F}^d)$ übergehen. \diamond

3.22 Bemerkung (Systeme von Mengensystemen)

Mit den Begriffen *Halbring*, *Ring*, *Algebra*, *σ -Algebra* haben wir einige Eigenschaften kennengelernt, die Mengensystemen, also Teilmengen $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(M)$ der Potenzmenge von M , zukommen können. Auch die Begriffe *Topologie* (Def. 2.1) und *Dynkin-System* (Def. 4.4) definieren solche Eigenschaften.

Diese Mengen $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(M)$ sind Elemente von $\mathcal{P}(\mathcal{P}(M))$. Anders gesagt, definiert für eine beliebige Grundmenge M jeder dieser Begriffe eine Teilmenge von $\mathcal{P}(\mathcal{P}(M))$, eben derjeniger Mengensysteme, die die entsprechende Eigenschaft besitzen. Noch anders gesagt, entspricht jedem der Begriffe ein Element von $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(M)))$. Der Begriff der *Potenzmenge* erweist sich hier als nützlich. . . \diamond

3.3 Inhalte, Prämaße und Maße

Wir wissen schon, dass ein Maß auf der σ -Algebra $\mathcal{A} \subseteq 2^M$ eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ ist mit

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. Für disjunkte $A_n \in \mathcal{A}$ ($n \in \mathbb{N}$) ist $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Wie kommen wir zur σ -Algebra und dem Maß, wenn wir nur einen Halbring $\mathcal{H} \subseteq 2^M$ und eine "vernünftige" Volumenmessung auf \mathcal{H} haben?

3.23 Definition Es sei $\mathcal{H} \subseteq 2^M$ ein Halbring.

- $\nu : \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty]$ heißt **Inhalt**, wenn

(a) $\nu(\emptyset) = 0$

- (b) Für $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{H}$ disjunkt mit $A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{H}$ gilt:

$$\nu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \nu(A_k) \quad (\text{endliche Additivität}).$$

- Ein Inhalt ν heißt **σ -additiv**, wenn für disjunkte $A_k \in \mathcal{H}$ ($k \in \mathbb{N}$) gilt:

$$\nu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \nu(A_k) \quad , \text{ falls } \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{H}. \quad (3.6)$$

Ein σ -additiver Inhalt $\nu : \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty]$ heißt **Prämaß**.

- Ein Inhalt ν heißt **endlich**⁸, wenn $\nu(A) \in [0, \infty)$ ($A \in \mathcal{H}$).
- $A \in \mathcal{H}$ heißt **ν -Nullmenge**, wenn $\nu(A) = 0$ ist.
- Eine Eigenschaft, die Elementen von M zukommen kann, gilt **ν -fast überall**, falls die Teilmenge von M , für die sie nicht gilt, eine ν -Nullmenge ist.

3.24 Bemerkung (Monotonie von Inhalten auf Halbringen)

Durch die Forderung der endlichen Additivität folgt, dass für einen Inhalt ν gilt:

$$\nu(B) \leq \nu(A) \quad (A, B \in \mathcal{H}, B \subseteq A).$$

Denn es gibt ja disjunkte Elemente C_1, \dots, C_n des Halbrings \mathcal{H} mit $A \setminus B = \bigcup_{k=1}^n C_k$. Also ist A die disjunkte Vereinigung von B und den C_k . Mit der endlichen Additivität des Inhalts ν auf \mathcal{H} folgt

$$\nu(A) = \nu\left(B \cup \bigcup_{k=1}^n C_k\right) = \nu(B) + \sum_{k=1}^n \nu(C_k) \geq \nu(B). \quad \diamond$$

Es liegt nahe, den Inhalt $\nu_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty]$ auf dem Halbring \mathcal{H} zu einem Inhalt $\nu_{\mathcal{R}} : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$ auf dem vom Halbring erzeugten Ring \mathcal{R} zu erweitern. Für disjunkte $A_k \in \mathcal{H}$ müssen wir dabei

$$\nu_{\mathcal{R}}\left(\bigcup_{k=1}^m A_k\right) := \sum_{k=1}^m \nu_{\mathcal{H}}(A_k) \quad (3.7)$$

setzen, damit $\nu_{\mathcal{R}}$ endlich additiv ist. Wir wissen aber noch nicht, ob $\nu_{\mathcal{R}}$ damit wohldefiniert ist (also $\nu_{\mathcal{R}}$ existiert), denn die Menge $A := \bigcup_{k=1}^m A_k \in \mathcal{R}$ kann eventuell auch in anderer Form $\bigcup_{\ell=1}^n B_{\ell}$ mit disjunkten $B_{\ell} \in \mathcal{H}$ dargestellt werden, und es fragt sich, ob dann $\sum_{k=1}^m \nu_{\mathcal{H}}(A_k) = \sum_{\ell=1}^n \nu_{\mathcal{H}}(B_{\ell})$ gilt.

⁸Das harmonisiert mit der Definition der Endlichkeit von Maßen auf Seite 21.

3.25 Satz

- Es gibt genau eine Fortsetzung $\nu_{\mathcal{R}}$ von $\nu_{\mathcal{H}}$ zu einem Inhalt auf \mathcal{R} , und diese ist durch (3.7) gegeben.
- $\nu_{\mathcal{R}}$ ist genau dann ein Prämaß, wenn $\nu_{\mathcal{H}}$ eines ist.

Beweis:

- Für die beiden Darstellungen von A setzen wir $C_{k,\ell} := A_k \cap B_\ell \in \mathcal{H}$. Diese sind disjunkt. Da $\nu_{\mathcal{H}}$ ein Inhalt ist, gilt $\sum_{k=1}^m \nu_{\mathcal{H}}(A_k) = \sum_{k=1}^m \sum_{\ell=1}^n \nu_{\mathcal{H}}(C_{k,\ell}) = \sum_{\ell=1}^n \nu_{\mathcal{H}}(B_\ell)$. Also ist $\nu_{\mathcal{R}}$ darstellungsunabhängig definiert, und

$$\nu_{\mathcal{H}} = \nu_{\mathcal{R}} \upharpoonright_{\mathcal{H}}. \quad (3.8)$$

- Um zu überprüfen, ob $\nu_{\mathcal{R}}$ ein Inhalt auf \mathcal{R} ist, betrachten wir nun disjunkte Mengen $A, B \in \mathcal{R}$. Für diese gibt es disjunkte $A_k, B_\ell \in \mathcal{H}$ mit

$$A = \bigcup_{k=1}^m A_k \quad \text{und} \quad B = \bigcup_{\ell=1}^n B_\ell.$$

Also ist $\nu_{\mathcal{R}}(A \cup B)$ gleich

$$\nu_{\mathcal{R}}\left(\left(\bigcup_{k=1}^m A_k\right) \cup \left(\bigcup_{\ell=1}^n B_\ell\right)\right) = \sum_{k=1}^m \nu_{\mathcal{H}}(A_k) + \sum_{\ell=1}^n \nu_{\mathcal{H}}(B_\ell) = \nu_{\mathcal{R}}(A) + \nu_{\mathcal{R}}(B).$$

- Ist $\nu_{\mathcal{R}}$ ein Prämaß, dann ist wegen (3.8) auch $\nu_{\mathcal{H}}$ eines.
- Ist dagegen $\nu_{\mathcal{H}}$ ein Prämaß, dann ist für disjunkte $A_k \in \mathcal{R}$ ($k \in \mathbb{N}$) und $A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{R}$ zu zeigen, dass gilt:

$$\nu_{\mathcal{R}}(A) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \nu_{\mathcal{R}}(A_k). \quad (3.9)$$

Diese Ringlelemente besitzen disjunkte Zerlegungen

$$A = \bigcup_{j=1}^m B_j, \quad A_k = \bigcup_{\ell=1}^{m_k} C_{k,\ell} \quad \text{mit} \quad B_j, C_{k,\ell} \in \mathcal{H}.$$

Also ist $\nu_{\mathcal{R}}(A) = \sum_{j=1}^m \nu_{\mathcal{H}}(B_j)$ und $\nu_{\mathcal{R}}(A_k) = \sum_{\ell=1}^{m_k} \nu_{\mathcal{H}}(C_{k,\ell})$. Wir erhalten mit $D_{j,k,\ell} := B_j \cap C_{k,\ell} \in \mathcal{H}$ wegen der Prämaßeigenschaft von $\nu_{\mathcal{H}}$

$$\begin{aligned} \nu_{\mathcal{R}}(A) &= \sum_{j=1}^m \nu_{\mathcal{H}}(B_j) = \sum_{j=1}^m \nu_{\mathcal{H}}\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{\ell=1}^{m_k} D_{j,k,\ell}\right)\right) \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{m_k} \nu_{\mathcal{H}}(D_{j,k,\ell}) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{\ell=1}^{m_k} \nu_{\mathcal{H}}(C_{k,\ell}) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \nu_{\mathcal{R}}(A_k). \quad \square \end{aligned}$$

3.26 Bemerkung (Subadditivität von Inhalten auf Ringen)

Aus der Monotonie von Inhalten (Bemerkung 3.24) folgt auch die Subadditivität von Inhalten ν auf Ringen \mathcal{R} bei nicht notwendig disjunkten Vereinigungen:

$$\nu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \nu(A_k) \quad (A_k \in \mathcal{R}).$$

Denn $A := \bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{R}$ und mit $B_k := A_k \setminus \bigcup_{\ell=1}^{k-1} A_\ell \in \mathcal{R}$ ist A die disjunkte Vereinigung der B_k , also mit Monotonie $\nu(B_k) \leq \nu(A_k)$

$$\nu(A) = \nu\left(\dot{\bigcup}_{k=1}^n B_k\right) = \sum_{k=1}^n \nu(B_k) \leq \sum_{k=1}^n \nu(A_k) \quad \diamond$$

3.27 Beispiel (Inhalt und Prämaß)

Sie haben schon in einer Hausaufgabe bewiesen, dass für eine abzählbar unendliche Menge M

$$\mathcal{A} := \{A \subseteq M \mid |A| < \infty \text{ oder } |M \setminus A| < \infty\}$$

ein Ring ist und

$$\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty] \quad , \quad \mu(A) := \begin{cases} 0 & , \quad |A| < \infty \\ \infty & , \quad |A| = \infty \end{cases}$$

einen Inhalt auf \mathcal{A} definiert. Dieser ist aber kein Prämaß.

Letzteres folgt auch aus der mangelnden Stetigkeit der Mengenfunktion μ von unten. Dieser Begriff soll zunächst geklärt werden. \diamond

Sei allgemein A_k ($k \in \mathbb{N}$) eine Familie von Teilmengen A_k eines Raumes M . Dann definieren wir den **Limes superior** \limsup und **Limes inferior** \liminf durch

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} A_k := \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k := \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{\ell=k}^{\infty} A_\ell$$

und

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} A_k := \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k := \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{\ell=k}^{\infty} A_\ell.$$

Falls also $x \in \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k$, dann kommt x in unendlich vielen A_k vor, falls $x \in \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k$, dann liegt x in allen A_k außer endlich vielen. Es gilt insbesondere

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} A_k \supseteq \liminf_{k \rightarrow \infty} A_k.$$

Falls $\limsup_{k \rightarrow \infty} A_k = \liminf_{k \rightarrow \infty} A_k$ gilt, sprechen wir vom *Limes*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k := \limsup_{k \rightarrow \infty} A_k = \liminf_{k \rightarrow \infty} A_k.$$

Diese Definitionen stimmen insofern mit denen für Funktionenfolgen aus der *Analysis I* überein, als die charakteristischen Funktionen $\mathbb{1}_{A_k}$ die Beziehung

$$\mathbb{1}_{\overline{\lim_{k \rightarrow \infty} A_k}}(x) = \overline{\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{A_k}}(x) \quad (x \in M)$$

erfüllen, und analog für \liminf . Daraus ergibt sich insbesondere, dass (*monoton*) *wachsende* ($A_{k+1} \supseteq A_k$) und (*monoton*) *fallende* ($A_{k+1} \subseteq A_k$) Folgen konvergieren, genauso wie monotone Folgen von Funktionen⁹ $f_k : M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ punktweise konvergieren. Schreibweise:

$$A_k \uparrow A \text{ bzw. } A_k \downarrow A \quad \text{und} \quad f_k \uparrow f \text{ bzw. } f_k \downarrow f. \quad (3.10)$$

Damit können wir die Eigenschaft, ein Prämaß zu sein, folgendermaßen charakterisieren:

3.28 Satz *Ein Inhalt $\mu : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$ auf dem Ring \mathcal{R} ist genau dann ein Prämaß, wenn μ von unten stetig ist, d.h.*

$$A_k \in \mathcal{R} \text{ und } A_k \uparrow A \in \mathcal{R} \quad \implies \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) = \mu(A).$$

[**Bemerkung:** Das ist in Beispiel 3.27 nicht erfüllt.]

Beweis:

- Ist μ Prämaß, und ist die wachsende Folge $A_k \in \mathcal{R}$ ($k \in \mathbb{N}$) und $A_k \uparrow A \in \mathcal{R}$, dann gilt mit $A_0 := \emptyset \in \mathcal{R}$: A ist die disjunkte Vereinigung der $A_k \setminus A_{k-1} \in \mathcal{R}$, also

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k \setminus A_{k-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mu(A_k \setminus A_{k-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

Eventuell handelt es sich um einen uneigentlichen Limes mit Wert ∞ .

- Sei umgekehrt ein Inhalt μ auf dem Ring \mathcal{R} von unten stetig. Sind die $B_k \in \mathcal{R}$ disjunkt und ist $B := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k \in \mathcal{R}$, dann gilt $A_k \uparrow B$ für $A_k := \bigcup_{\ell=1}^k B_\ell \in \mathcal{R}$, also $\mu(B) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^k \mu(B_\ell) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \mu(B_\ell)$. \square

Wir haben in Korollar 3.16 festgestellt, dass die Mengensysteme

$$\mathcal{I}^d = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}^d, a \leq b\} \quad \text{und} \quad \mathcal{I}_{\mathbb{Q}}^d = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}^d, a \leq b\}$$

Halbringe auf \mathbb{R}^d sind. Wir setzen nun

$$\lambda_{\mathcal{I}}^d : \mathcal{I}^d \rightarrow [0, \infty), \quad \lambda_{\mathcal{I}}^d((a, b)) := \prod_{k=1}^d (b_k - a_k) \quad \text{und} \quad \lambda_{\mathcal{I}, \mathbb{Q}}^d := \lambda_{\mathcal{I}}^d \upharpoonright_{\mathcal{I}_{\mathbb{Q}}^d},$$

also anschaulich das Produkt der Kantenlängen des Quaders $(a, b]$.

⁹Eine Topologie und Rechenregeln auf der erweiterten Zahlengerade $\overline{\mathbb{R}}$ werden in Definition 5.1 eingeführt.

3.29 Satz $\lambda_{\mathcal{I}}^d$ und $\lambda_{\mathcal{I},\mathbb{Q}}^d$ sind Prämaße auf den Halbringen \mathcal{I}^d und $\mathcal{I}_{\mathbb{Q}}^d$. Sie definieren damit Prämaße $\lambda_{\mathcal{F}}^d$ und $\lambda_{\mathcal{F},\mathbb{Q}}^d$ auf den Ringen \mathcal{F}^d und $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}}^d$ (Def. 3.20). Man nennt $\lambda_{\mathcal{F}}^d$ das **Lebesgue-Prämaß** auf dem \mathbb{R}^d .

Beweis:

- Zunächst sind $\lambda_{\mathcal{I}}^d$ und $\lambda_{\mathcal{I},\mathbb{Q}}^d$ Inhalte, denn $\lambda_{\mathcal{I}}^d(\emptyset) = \lambda_{\mathcal{I}}^d((a, a]) = 0$, und für endliche disjunkte Zerlegungen des Quaders stimmt die Summenformel.
- Sei $d = 1$ und $(a_k, b_k]$ ($k \in \mathbb{N}$) eine abzählbare disjunkte Zerlegung eines Intervalls $(a, b]$, $a < b$. Man könnte nun denken, dass dann nach Umnummerierung gelten muss: $a_{k+1} = b_k$, aber so einfach ist es nicht, denn die Intervallgrenzen können sich ja im Inneren von $(a, b]$ häufen.

Stattdessen benutzen wir den Überdeckungssatz 2.35 von Heine und Borel. Dazu finden wir für alle $\varepsilon > 0$ ein $\alpha \in (a, b)$ und $\beta_k > b_k$ mit

$$\alpha - a \leq \varepsilon \quad \text{und} \quad \beta_k - b_k \leq \varepsilon 2^{-k} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Damit ist

$$[\alpha, b] \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k] \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, \beta_k).$$

Nach Heine-Borel wird das kompakte Intervall $[\alpha, b]$ durch endlich viele der offenen Intervalle (a_k, β_k) überdeckt. Es gibt also nach Umnummerierung ein $N \in \mathbb{N}$ mit $[\alpha, b] \subseteq \bigcup_{k=1}^N (a_k, \beta_k) \subseteq \bigcup_{k=1}^N (a_k, b_k]$.

Es sind $(\alpha, b] \in \mathcal{I}^1$ und die $(a_k, \beta_k] \in \mathcal{I}^1$, also wegen der Monotonie (Bemerkung 3.24) und Subadditivität (Bem. 3.26) des Inhalts $\lambda_{\mathcal{I}}^1$

$$\lambda_{\mathcal{I}}^1((\alpha, b]) \leq \lambda_{\mathcal{I}}^1\left(\bigcup_{k=1}^N (a_k, \beta_k]\right) \leq \sum_{k=1}^N \lambda_{\mathcal{I}}^1((a_k, \beta_k]).$$

Daher ist

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathcal{I}}^1((a, b]) &\leq \varepsilon + \lambda_{\mathcal{I}}^1((\alpha, b]) \leq \varepsilon + \sum_{k=1}^N \lambda_{\mathcal{I}}^1((a_k, \beta_k]) \\ &\leq \varepsilon + \sum_{k=1}^N \left(\lambda_{\mathcal{I}}^1((a_k, b_k]) + \varepsilon 2^{-k} \right) \leq 2\varepsilon + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{\mathcal{I}}^1((a_k, b_k]). \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die eine Ungleichung

$$\lambda_{\mathcal{I}}^1((a, b]) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{\mathcal{I}}^1((a_k, b_k]) \quad (\sigma\text{-Subadditivität})$$

der für Prämaße geforderten Gleichung (3.6). Die umgekehrte Ungleichung gilt nach dem folgenden Satz 3.30 allgemein für Inhalte.

- Die Prämaß-Eigenschaft von $\lambda_{\mathcal{I},\mathbb{Q}}$ folgt durch Restriktion von $\lambda_{\mathcal{I}}$ auf $\mathcal{I}_{\mathbb{Q}}^1 \subseteq \mathcal{I}^1$.
- Der Fall $d > 1$ ist ähnlich, und ein Spezialfall der entsprechenden Frage für Stieltjes-Maße, siehe Kapitel 3.4.
- Sind aber $\lambda_{\mathcal{I}}^d$ und $\lambda_{\mathcal{I},\mathbb{Q}}^d$ Prämaße, dann nach Satz 3.25 auch $\lambda_{\mathcal{F}}^d$ und $\lambda_{\mathcal{F},\mathbb{Q}}^d$. \square

3.30 Satz Ist $\nu : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$ Inhalt auf einem Ring \mathcal{R} , dann gilt für **disjunkte** $A_k \in \mathcal{R}$ mit $A := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{R}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k) \leq \nu(A) \quad (\sigma\text{-Superadditivität}).$$

Beweis: Die Ungleichung $\sum_{k=1}^N \nu(A_k) = \nu(\bigcup_{k=1}^N A_k) \leq \nu(A)$ gilt dann nach Definition des Inhalts und Bemerkung 3.26 für alle $N \in \mathbb{N}$. Also ist auch

$$\sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \nu(A_k) \leq \nu(A). \quad \square$$

Bis jetzt wissen wir noch nicht, ob wir das lebesguesche Prämaß $\lambda_{\mathcal{F}}^d$ zu einem Maß machen können. Die von Carathéodory stammende Technik dafür ist aber sehr allgemein. Bevor ich sie behandle, werde ich noch mehr Prämaße auf \mathbb{R} beschreiben, damit wir mehr Anschauungsmaterial haben. Die Konstruktion wird sogar alle endlichen Prämaße auf \mathbb{R} liefern und ermöglichen, den Unterschied zwischen Inhalten und Prämaßen präziser zu verstehen.

3.4 Stieltjes-Inhalte auf \mathbb{R}

Wir benutzen den Halbring $\mathcal{I} \equiv \mathcal{I}^1 = \{(a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$ über \mathbb{R} .

3.31 Satz

1. Sei $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsend und ist

$$\mu_F : \mathcal{I} \rightarrow [0, \infty) \quad , \quad \mu_F((a, b]) := F(b) - F(a),$$

dann ist μ_F ein endlicher Inhalt, genannt der **Stieltjes-Inhalt** zu F .

2. Es ist $\mu_F = \mu_G$ genau dann, wenn $F - G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konstant ist.

3. Ist $\mu : \mathcal{I} \rightarrow [0, \infty)$ ein endlicher Inhalt, dann ist $\mu = \mu_F$ mit

$$F(x) := \begin{cases} \mu((0, x]) & , \quad x \geq 0 \\ -\mu((x, 0]) & , \quad x < 0. \end{cases}$$

Beweis:

1. • $\mu_F(\emptyset) = \mu_F((a, a]) = F(a) - F(a) = 0.$

• Sei $(a, b]$ disjunkte Vereinigung der Intervalle $(a_k, b_k]$ ($k = 1, \dots, N$). Dann muss nach Ummummerierung gelten: $a_1 = a$, $b_k = a_{k+1}$ und $b_N = b$, also $\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^N (F(b_k) - F(a_k)) = \sum_{k=1}^N \mu_F((a_k, b_k])$.

2. Sei $\mu_F = \mu_G$ und $C := G(0) - F(0)$. Dann ist für alle $x \geq 0$

$$G(x) - F(x) = (\mu_G((0, x]) + G(0)) - (\mu_F((0, x]) + F(0)) = C.$$

Analog für $x < 0$.

3. Wir zeigen die Gleichheit der Inhalte von $(a, b]$ für $0 \leq a \leq b$. Die anderen Fälle sind analog. Für das angegebene F ist

$$\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a) = \mu((0, b]) - \mu((0, a]) = \mu((a, b]). \quad \square$$

3.32 Beispiele (Stieltjes-Inhalte)

1. Das Lebesgue-Prämaß $\lambda_{\mathcal{I}}^1$ ist für alle $c \in \mathbb{R}$ gleich μ_{F_c} , mit

$$F_c(x) = c + x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

2. Für $a \in \mathbb{R}$ ist das *Dirac-Maß* δ_a der zur (rechtsseitig stetigen) Funktion $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} 0 & , x < a \\ 1 & , x \geq a \end{cases}$ gehörende Stieltjes-Inhalt.

3. Wie als Aufgabe zu zeigen ist, gibt es stetige monoton wachsende Funktionen $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, deren Ableitung außerhalb der *Cantor-Menge* $C \subseteq [0, 1]$ existiert und Null ist, mit $F(0) = 0$, $F(1) = 1$. Das Stieltjes-Prämaß dieses F ist nicht auf einen Punkt, sondern auf der Cantor-Menge "konzentriert". Letztere hat aber Lebesgue-Maß Null, siehe Beispiel 4.29. \diamond

Ich spreche die ganze Zeit von Prämaßen, obwohl Satz 3.31 nur garantiert, dass Stieltjes-Inhalte tatsächlich Inhalte sind. Warum darf ich das?

3.33 Beispiel (Inhalt, aber kein Prämaß) Der Stieltjes-Inhalt zu

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad F(x) := \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases}$$

ist μ_F , mit $\mu_F((0, 1]) = F(1) - F(0) = 1$, und $(0, 1] = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]$ (disjunkt). Aber $\sum_{k \in \mathbb{N}} \mu_F((\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]) = \sum_{k \in \mathbb{N}} (1 - 1) = 0$, also ist dieser Stieltjes-Inhalt kein Prämaß auf \mathcal{I} . Vergleiche mit dem Dirac-Maß δ_0 in Beispiel 3.32.2.

F ist linksseitig stetig (d.h. $\lim_{x \nearrow a} F(x) = F(a)$ für alle $a \in \mathbb{R}$), aber unste-tig. Das passt nicht zur Wahl unseres Halbrings linksseitig offener Intervalle. \diamond

Die letzte Beobachtung verallgemeinert sich zu folgendem Satz:

3.34 Satz *Der Stieltjes-Inhalt μ_F von $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann ein Prämaß auf \mathcal{I} , wenn F rechtsseitig stetig ist (d.h. $\lim_{x \searrow a} F(x) = F(a)$ für alle $a \in \mathbb{R}$).*

Beweis:

- Sei F rechtsseitig stetig. Dann argumentiert man mit dem Überdeckungssatz von Heine-Borel, analog zum Beweis der Prämaß-Eigenschaft für den Fall $F(x) = x$ (Lebesgue) in Satz 3.29. Die Bedingung $\beta_k - b_k \leq \varepsilon 2^{-k}$ verallgemeinert sich zu $F(\beta_k) - F(b_k) \leq \varepsilon 2^{-k}$, etc. Dass man ein solches $\beta_k > b$ finden kann, liegt an der rechtsseitigen Stetigkeit von F .
- Sei umgekehrt μ_F ein Prämaß auf \mathcal{I} , also nach Satz 3.25 auch auf \mathcal{F} . Sei weiter $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine monoton gegen a fallende Folge reeller Zahlen. Dann ist $\lim_{k \rightarrow \infty} F(x_k) = F(a) + \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_F((a, x_k])$. Die Behauptung $\lim_{k \rightarrow \infty} F(x_k) = F(a)$ folgt damit aus folgendem Lemma. \square

Man nennt dann μ_F ein *Lebesgue–Stieltjes–Prämaß*. Eine analoge Konstruktion ist auch im \mathbb{R}^d möglich, siehe ELSTRODT [EI, II, §3].

3.35 Lemma *Sei $\mu : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$ ein Prämaß auf dem Ring \mathcal{R} und $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $A_n \in \mathcal{R}$ eine monoton gegen $A \in \mathcal{R}$ fallende Folge (also $A_n \downarrow A$). Falls $\mu(A_1) < \infty$, gilt $\mu(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu(A)$ (**Stetigkeit von oben**).*

Beweis: Wegen $A_1 \setminus A_n \uparrow A_1 \setminus A$ folgt dies aus der in Satz 3.28 bewiesenen Stetigkeit eines Prämaßes von unten, denn

$$\mu(A_1) - \mu(A_n) = \mu(A_1 \setminus A_n) \uparrow \mu(A_1 \setminus A) = \mu(A_1) - \mu(A).$$

In der ersten Gleichung wurde dabei $\mu(A_1) < \infty$ verwandt! \square

3.36 Beispiel Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ Riemann-integrierbar, dann ist

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad F(x) := \int_0^x f(y) dy$$

stetig und monoton wachsend. Also ist μ_F ein Prämaß. Wir stellen uns f als *Dichte* von μ_F in Bezug auf das Lebesgue-Prämaß $\lambda_{\mathcal{I}}^1$ vor (siehe Def. 5.16). \diamond

4 Vom Prämaß zum Maß

Prämaße unterscheiden sich von Maßen dadurch, dass sie auf Halbringen \mathcal{H} statt auf σ -Algebren definiert sind. Wir haben schon gesehen (Satz 3.25), dass wir sie problemlos auf den von \mathcal{H} erzeugten Ring \mathcal{R} fortsetzen können.

Warum gehen wir nicht direkt einen Schritt weiter und setzen das Prämaß von \mathcal{R} auf die von \mathcal{R} erzeugte σ -Algebra $\sigma(\mathcal{R})$ fort? Das hat mindestens zwei Gründe:

1. Es ist nicht so leicht nachzuprüfen, dass diese Fortsetzung existiert und eindeutig ist.
2. Manchmal ist $\sigma(\mathcal{R})$ gar nicht die angemessene σ -Algebra.

Beispielsweise haben wir in Beispiel 1.1.2 die Dirac-Maße δ_a mit $a \in \mathbb{R}^d$ durch

$$\delta_a(A) := \begin{cases} 1 & , a \in A \\ 0 & , a \in \mathbb{R}^d \setminus A \end{cases} \quad (A \subseteq \mathbb{R}^d)$$

problemlos auf ganz $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ anstatt nur auf der Borel- σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ definiert, die vom Halbring \mathcal{I}^d erzeugt wird.

Man geht daher (und diese mathematische Idee war wirklich gut!) über das das Prämaß von $\mathcal{R} \subseteq 2^M$ auf die gesamte Potenzmenge fortsetzende sogenannte *äußere Maß*. Dies ist zwar meist gar kein Maß, lässt sich aber wieder zu einem solchen einschränken.

4.1 Die Carathéodory-Konstruktion

Wir schauen uns zuerst die Einschränkung eines äußeren Maßes an.

4.1 Definition

Ein **äußeres Maß** auf M ist eine Abbildung $\eta : 2^M \rightarrow [0, \infty]$ mit

1. $\eta(\emptyset) = 0$
2. $A \subseteq B \subseteq M \implies \eta(A) \leq \eta(B)$ (**Monotonie**)
3. $A_n \subseteq M$ ($n \in \mathbb{N}$) $\implies \eta(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \eta(A_n)$ (**σ -Subadditivität**).

Es wird also auch für disjunkte A_n nicht die σ -Additivität gefordert. Aus der zusätzlichen Forderung der σ -Additivität gewinnt man aber in Satz 4.3 die angemessene σ -Algebra $\mathcal{A}_\eta \subseteq 2^M$. Die Restriktion $\eta|_{\mathcal{A}_\eta}$ ist dann ein Maß.

4.2 Definition

Ist $\eta : 2^M \rightarrow [0, \infty]$ ein äußeres Maß, dann heißt $A \subseteq M$ **η -messbar**, wenn

$$\eta(Q) \geq \eta(Q \cap A) + \eta(Q \cap A^c) \quad (Q \subseteq M).$$

Achtung:

1. Die Mengen Q selbst sind dabei im Allgemeinen *nicht* η -messbar.
2. Diese Definition erlaubt es auch, von η -Messbarkeit von Mengen A mit $\eta(A) = \infty$ zu sprechen. Insbesondere ist M offensichtlich η -messbar.
3. Wegen der Subadditivität von η ist A genau dann η -messbar, wenn gilt:

$$\eta(Q) = \eta(Q \cap A) + \eta(Q \cap A^c) \quad (Q \subseteq M).$$

Der folgende **Maßerweiterungssatz von Carathéodory** ist fundamental für die Konstruktion von Maßen:

4.3 Satz (Carathéodory) *Ist $\eta : 2^M \rightarrow [0, \infty]$ ein äußeres Maß, dann ist*

$$\mathcal{A}_\eta := \{A \subseteq M \mid A \text{ ist } \eta\text{-messbar}\}$$

eine σ -Algebra und die Restriktion $\eta \upharpoonright_{\mathcal{A}_\eta}$ ein Maß.

Beweis:

Wir zeigen zunächst, dass \mathcal{A}_η eine Algebra ist, also ein Mengering mit $M \in \mathcal{A}_\eta$.

1. Die leere Menge ist η -messbar, denn $\eta(\emptyset) = 0$, also $\eta(Q) = \eta(\emptyset) + \eta(Q)$.
2. Ist $A \in \mathcal{A}_\eta$, dann auch $A^c \in \mathcal{A}_\eta$, da die Definition der η -Messbarkeit symmetrisch in A und A^c ist. Insbesondere ist $M \in \mathcal{A}_\eta$.
3. Wenn wir noch die Implikation $A, B \in \mathcal{A}_\eta \implies A \cup B \in \mathcal{A}_\eta$ gezeigt haben, wissen wir immerhin, dass \mathcal{A}_η eine Algebra ist.¹⁰ Es ist also zu beweisen, dass

$$\eta(Q \cap (A \cup B)) + \eta(Q \cap A^c \cap B^c) = \eta(Q) \quad (Q \subseteq M) \quad (4.1)$$

gilt, denn $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$. Wendet man die für A und B gültigen Identitäten nacheinander auf die rechte Seite von (4.1) an, erhält man

$$\eta(Q) = \eta(Q \cap A \cap B) + \eta(Q \cap A \cap B^c) + \eta(Q \cap A^c \cap B) + \eta(Q \cap A^c \cap B^c). \quad (4.2)$$

Während der letzte Term schon in dieser Form auf der linken Seite von (4.1) auftaucht, können wir für die anderen drei Terme benutzen, dass die disjunkte Vereinigung

$$(A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = A \cup B$$

¹⁰Denn dann folgt auch die Eigenschaft $A, B \in \mathcal{A}_\eta \implies A \setminus B \in \mathcal{A}_\eta$ eines Rings aus Definition 3.7, denn $A \setminus B = A \cap B^c = (A^c \cup B)^c$.

ist. Daraus folgt mit $\tilde{Q} := Q \cap (A \cup B)$ für den letzten Term in (4.1) wie in (4.2), dass $\eta(\tilde{Q})$ gleich

$$\begin{aligned} & \eta(\tilde{Q} \cap A \cap B) + \eta(\tilde{Q} \cap A \cap B^c) + \eta(\tilde{Q} \cap A^c \cap B) + \eta(\tilde{Q} \cap A^c \cap B^c) \\ = & \eta(Q \cap A \cap B) + \eta(Q \cap A \cap B^c) + \eta(Q \cap A^c \cap B) + 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

ist. In die linke Seite von (4.1) eingesetzt, ergibt dies den Beweis von (4.1). Für *disjunkte* $A, B \in \mathcal{A}_\eta$ ist $A = A \cap B^c$ und $B = A^c \cap B$, also nach (4.3)

$$\eta(Q \cap (A \cup B)) = \eta(Q \cap A) + \eta(Q \cap B). \quad (4.4)$$

4. Um nun zu zeigen, dass \mathcal{A}_η nicht nur eine Algebra, sondern eine σ -Algebra ist, betrachten wir eine Folge von $A_n \in \mathcal{A}_\eta$, und wir wollen zeigen, dass dann auch $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ in \mathcal{A}_η liegt. Seien dazu die A_n zunächst disjunkt (wie auch in der Formel für die σ -Additivität eines Maßes vorausgesetzt). Dann ist $B_n := \bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{A}_\eta$, denn \mathcal{A}_η ist ja eine Algebra. Außerdem folgt aus der Regel (4.4) durch Induktion

$$\eta(Q \cap B_n) = \sum_{k=1}^n \eta(Q \cap A_k) \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (4.5)$$

Nun gilt $B_n \uparrow A$, also wegen der Monotonieeigenschaft 2) in der Definition 4.1 des äußeren Maßes η

$$\eta(Q) = \eta(Q \cap B_n) + \eta(Q \cap B_n^c) \geq \eta(Q \cap B_n) + \eta(Q \cap A^c) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Durch Einsetzen von (4.5) und Bildung des Limes $n \rightarrow \infty$ ergibt sich damit

$$\eta(Q) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \eta(Q \cap A_k) + \eta(Q \cap A^c) \geq \eta(Q \cap A) + \eta(Q \cap A^c), \quad (4.6)$$

Letzteres wegen der σ -Subadditivität des äußeren Maßes η . Damit ist also A η -messbar, und gleichzeitig die Formel

$$\eta(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta(A_k)$$

der σ -Additivität bewiesen (man setze $Q := A$ in (4.6)).

5. Trotzdem sind wir mit dem Beweis noch nicht ganz fertig. Wir haben die Implikation

$$A_n \in \mathcal{A}_\eta \ (n \in \mathbb{N}) \implies A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}_\eta$$

bis jetzt nur für *disjunkte* A_n bewiesen. Solche Mengensysteme tragen den Namen *Dynkin-Systeme*, und wir zeigen als Nächstes (Satz 4.6), dass durchschnittsstabile Dynkin-Systeme schon σ -Algebren sind. \square

4.4 Definition Ein Mengensystem $\mathcal{D} \subseteq 2^M$ heißt **Dynkin-System**, wenn

1. $M \in \mathcal{D}$,
2. mit $A \in \mathcal{D}$ auch $A^c \in \mathcal{D}$ ist,
3. für eine Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ disjunkter $A_n \in \mathcal{D}$ auch $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$ ist.

4.5 Beispiele (Dynkin-Systeme) 1. Jede σ -Algebra ist ein Dynkin-System, denn die Definitionen unterscheiden sich nur in der Forderung der Disjunktheit.

2. Nicht jedes Dynkin-System ist eine σ -Algebra. Für alle Mengen M mit $|M| = 2n$, $n \in \mathbb{N}$ bildet $\mathcal{D} := \{A \subseteq M \mid |A| \in 2\mathbb{N}_0\}$ ein Dynkin-System mit $2^{|M|-1}$ Teilmengen A .

Aber für $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und etwa $M := \{1, 2, \dots, 2n\}$ ist zwar $A := \{1, 2\}$ und $B := \{2, 3\}$ in \mathcal{D} , nicht aber $A \cup B$. \mathcal{D} ist also nicht einmal eine Algebra.

3. Im Beweis von Satz 4.3 wurde gezeigt, dass \mathcal{A}_η ein Dynkin-System ist, sogar ein durchschnittsstabiles (denn \mathcal{A}_η ist ja auch eine Algebra). \diamond

4.6 Satz Ein Dynkin-System $\mathcal{D} \subseteq 2^M$ ist genau dann eine σ -Algebra, wenn \mathcal{D} durchschnittsstabil ist, also wenn aus $A, B \in \mathcal{D}$ folgt: $A \cap B \in \mathcal{D}$.

Beweis:

- Die Definition 4.4 eines Dynkin-Systems weicht nur in Punkt 3. von der Definition 3.1 einer σ -Algebra ab, und σ -Algebren sind durchschnittsstabil. Also ist nur noch zu zeigen, dass aus der Durchschnittsstabilität von \mathcal{D} folgt, dass die Eigenschaft 3. einer σ -Algebra erfüllt ist:

$$A_n \in \mathcal{D} \ (n \in \mathbb{N}) \quad \text{impliziert} \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}.$$

- Zunächst ist mit $A, B \in \mathcal{D}$ wegen der Durchschnittsstabilität von \mathcal{D} auch $A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{D}$ und $A \cup B = (A \setminus B) \dot{\cup} B \in \mathcal{D}$. Setzen wir daher $B_0 := \emptyset$ und $B_n := \bigcup_{k=1}^n A_k$ ($n \in \mathbb{N}$), dann sind alle B_n in \mathcal{D} . $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ wird durch

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (B_n \setminus B_{n-1})$$

als disjunkte Vereinigung der $B_n \setminus B_{n-1} \in \mathcal{D}$ dargestellt. Also gilt nach der dritten definierenden Eigenschaft eines Dynkin-Systems: $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$. \square

Damit ist auch Satz 4.3 vollständig bewiesen.

Wie erhalten wir nun ein äußeres Maß? Schönerweise durch Rückgriff auf die am einfachsten zu kontrollierende Mengenfunktion, den Inhalt auf einem Halbring:

4.7 Satz (Fortsetzungssatz)

Es sei $\mu : \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty]$ ein Inhalt auf einem Halbring $\mathcal{H} \subseteq 2^M$, dann gilt:

1. $\eta : 2^M \rightarrow [0, \infty]$, $\eta(A) := \inf \{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \mid A_n \in \mathcal{H}, A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \}$
(mit $\inf \emptyset = \infty$) ist ein äußeres Maß, und alle $A \in \mathcal{H}$ sind η -messbar.
2. Ist μ sogar ein Prämaß, dann ist $\eta|_{\mathcal{H}} = \mu$.
3. Sonst gibt es ein $A \in \mathcal{H}$ mit $\eta(A) < \mu(A)$.

Beweis:

1. Wir überprüfen zunächst die Eigenschaften eines äußeren Maßes:

- $\eta(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$.
- *Monotonie:* $\eta(B) \geq \eta(A)$ für $B \supseteq A$, weil eine Überdeckung von B auch eine Überdeckung von A ist.
- *σ -Subadditivität:* Für Folgen $A_n \subseteq M$ ($n \in \mathbb{N}$) von Teilmengen ist zu zeigen: $\eta(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \eta(A_n)$. Wir können o.B.d.A. $\eta(A_n) < \infty$ voraussetzen, denn sonst ist die Ungleichung erfüllt (da $\infty \leq \infty$).

Wir wissen damit nach Definition von η , dass es überhaupt eine Überdeckung von A_n durch Elemente des Halbrings gibt.

Wegen der Eigenschaft des Infimums einer Teilmenge von \mathbb{R} finden wir für alle $\varepsilon > 0$ auch eine solche Familie von $B_{n,k} \in \mathcal{H}$ mit

$$A_n \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_{n,k} \quad \text{und} \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(B_{n,k}) \leq \eta(A_n) + \varepsilon 2^{-n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Da die Doppelindizierung immer noch abzählbar ist, folgt mit der Monotonieeigenschaft und $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$

$$\eta\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n,k \in \mathbb{N}} \mu(B_{n,k}) \leq \varepsilon + \sum_{n \in \mathbb{N}} \eta(A_n),$$

was für $\varepsilon \searrow 0$ die σ -Subadditivität impliziert.

Damit ist η ein äußeres Maß.

Als nächstes zeigen wir, dass die Elemente $A \in \mathcal{H}$ des Halbrings die Messbarkeitseigenschaft $A \in \mathcal{A}_{\eta}$, also ¹¹

$$\eta(Q) \geq \eta(Q \cap A) + \eta(Q \cap A^c) \quad (Q \subseteq M) \quad (4.7)$$

¹¹Die umgekehrte Ungleichung gilt, weil η nach Teil 1. ein äußeres Maß ist.

erfüllen. Im Beweis können wir voraussetzen, dass $\eta(Q) < \infty$ gilt. Für den von \mathcal{H} erzeugten Ring \mathcal{R} und eine Überdeckung $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \supseteq Q$ mit $B_n \in \mathcal{H} \subseteq \mathcal{R}$ sind die $B_n \cap A \in \mathcal{H}$ eine Überdeckung von $Q \cap A$ und analog $B_n \cap A^c \in \mathcal{R}$ eine Überdeckung für $Q \cap A^c$. Da die Fortsetzung $\mu_{\mathcal{R}}$ von μ auf $\mu_{\mathcal{R}}$ ein Inhalt ist, folgt $\mu(B_n) = \mu_{\mathcal{R}}(B_n) = \mu_{\mathcal{R}}(B_n \cap A) + \mu_{\mathcal{R}}(B_n \cap A^c)$, also

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_{\mathcal{R}}(B_n \cap A) + \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_{\mathcal{R}}(B_n \cap A^c).$$

Auf der linken Seite ergibt das Infimum über die Überdeckungen von Q das äußere Maß $\eta(Q)$. Rechts hat man noch mehr Möglichkeiten zur Infimumsbildung der Überdeckungen von A bzw. von A^c . Das zeigt Ungleichung (4.7).

2. Wie man aus der dritten Behauptung des Fortsetzungssatzes ablesen kann, muss man zum Nachweis der Gleichheit von äußerem und Prämaß auf \mathcal{H} die σ -Additivität (3.6) von Prämaßen benutzen.

- Trivial ist die Ungleichung $\eta(A) \leq \mu(A)$ für $A \in \mathcal{H}$, denn A überdeckt sich selbst.
- Umgekehrt würde für $\eta(A) < \mu(A)$ eine Überdeckung $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ von A mit $A_n \in \mathcal{H}$ und $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) < \mu(A)$ existieren. Das würde der Prämaßbeigenschaft (3.6) widersprechen. Denn aus den A_n konstruieren wir die *disjunkte* Überdeckung von A durch die $B_n := A \cap (A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k) \in \mathcal{R}$, also $\mu_{\mathcal{R}}(B_n) \leq \mu_{\mathcal{R}}(A_n) = \mu(A_n)$, aber mit Satz 3.25 der Widerspruch

$$\mu(A) = \mu_{\mathcal{R}}(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_{\mathcal{R}}(B_n) \quad (\sigma\text{-Additivität}).$$

3. Ist dagegen μ nur ein Inhalt, kein Prämaß, dann finden wir nach Definition 3.23 disjunkte Teilmengen $A_n \in \mathcal{H}$ ($n \in \mathbb{N}$) mit $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{H}$, aber

$$\mu(A) \neq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n). \quad (4.8)$$

Wegen der Monotonie von μ und Additivität von $\mu_{\mathcal{R}}$ folgt¹²

$$\mu(A) = \mu_{\mathcal{R}}(A) \geq \mu_{\mathcal{R}}(\bigcup_{n=1}^N A_n) = \sum_{n=1}^N \mu_{\mathcal{R}}(A_n) = \sum_{n=1}^N \mu(A_n) \quad (N \in \mathbb{N}),$$

also $\mu(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. Damit muss wegen (4.8) gelten:

$$\mu(A) > \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) \geq \eta(A). \quad \square$$

¹²Hier gehen wir wieder zwischenzeitlich zum Inhalt $\mu_{\mathcal{R}}$ auf dem von \mathcal{H} erzeugten Ring \mathcal{R} über, weil nicht gelten muss, dass $\bigcup_{n=1}^N A_n \in \mathcal{H}$, wohl aber $\bigcup_{n=1}^N A_n \in \mathcal{R}$.

4.2 Hausdorff–Maße

Als erste Anwendung des Maßerweiterungssatzes 4.3 von Carathéodory werden wir jetzt für $D \in [0, \infty)$ das D -dimensionale Hausdorff–Maß \mathcal{H}^D auf einem metrischen Raum konstruieren.

4.8 Definition Der Durchmesser einer Teilmenge $B \subseteq M$ eines metrischen Raums (M, d) ist $\text{diam}(\emptyset) := 0$, und sonst

$$\text{diam}(B) := \sup\{d(x, y) \mid x, y \in B\} \in [0, \infty].$$

1. **Konstruktion äußerer Maße \mathcal{H}_δ^D , für $D, \delta \in (0, \infty)$.**

Es ist $\mathcal{H}_\delta^D : \mathcal{P}(M) \rightarrow [0, \infty]$,

$$\mathcal{H}_\delta^D(A) := \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \text{diam}(U_i)^D \mid A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i, \text{diam}(U_i) \leq \delta \right\} \quad (A \subseteq M)$$

(mit $\mathcal{H}_\delta^D(A) = \inf(\emptyset) = +\infty$, falls es keine solche Überdeckung von A mit Mengen U_i gibt) ein äußeres Maß. Denn

- (a) $\mathcal{H}_\delta^D(\emptyset) = 0$, da $\text{diam}(U_i)^D = 0$ für $U_i := \emptyset$.
- (b) Ist $A \subseteq B \subseteq M$ und $B \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$, dann auch $A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$, also $\mathcal{H}_\delta^D(A) \leq \mathcal{H}_\delta^D(B)$.
- (c) Für $A_n \subseteq M$ ($n \in \mathbb{N}$), $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ und $A_n \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_{i,n}$ mit

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \text{diam}(U_{i,n})^D \leq \mathcal{H}_\delta^D(A_n) + 2^{-n} \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N})$$

ist $A \subseteq \bigcup_{i,n \in \mathbb{N}} U_{i,n}$, also $\mathcal{H}_\delta^D(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_\delta^D(A_n) + \varepsilon$. Mit $\varepsilon \searrow 0$ folgt die σ -Subadditivität.

2. **Konstruktion der äußeren Hausdorff–Maße \mathcal{H}^D , für $D \in (0, \infty)$.**

Für $0 < \delta_1 \leq \delta_2$ ist $\mathcal{H}_{\delta_1}^D(A) \geq \mathcal{H}_{\delta_2}^D(A)$, sodass der (eventuell uneigentliche) Limes

$$\mathcal{H}^D(A) := \lim_{\delta \searrow 0} \mathcal{H}_\delta^D(A) \quad (A \subseteq M)$$

existiert. Er definiert ein äußeres Maß $\mathcal{H}^D : \mathcal{P}(M) \rightarrow [0, \infty]$, denn es ist

- (a) $\mathcal{H}^D(\emptyset) = \lim_{\delta \searrow 0} \mathcal{H}_\delta^D(\emptyset) = \lim_{\delta \searrow 0} 0 = 0$,
- (b) für $A \subseteq B \subseteq M$ gilt nach 1.b)

$$\mathcal{H}^D(A) = \lim_{\delta \searrow 0} \mathcal{H}_\delta^D(A) \leq \lim_{\delta \searrow 0} \mathcal{H}_\delta^D(B) = \mathcal{H}^D(B),$$

(c) und für $A_n \subseteq M$ ($n \in \mathbb{N}$) und $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ist nach 1.c)

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^D(A) &= \lim_{\delta \searrow 0} \mathcal{H}_\delta^D(A) \leq \lim_{\delta \searrow 0} \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_\delta^D(A_n) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \lim_{\delta \searrow 0} \mathcal{H}_\delta^D(A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}^D(A_n). \end{aligned}$$

Man definiert zusätzlich als 0-dimensionales äußeres Hausdorff-Maß \mathcal{H}^0 das Zählmaß auf M (siehe Beispiel 3.3). Das durch \mathcal{H}^D induzierte Maß heißt das *D-dimensionale Hausdorff-Maß* auf (M, d) .

4.9 Bemerkungen (Hausdorff-Maße)

1. Es läßt sich zeigen (Satz I.9.3 in [EI]), dass alle Borel-Mengen \mathcal{H}^D -messbar sind, denn das äußere Maß ist *metrisch*: Für alle nichtleeren Teilmengen $A, B \subseteq M$ mit positivem Minimalabstand $\inf\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\} > 0$ ist

$$\mathcal{H}^D(A \cup B) = \mathcal{H}^D(A) + \mathcal{H}^D(B).$$

2. Während für $M = \mathbb{R}^d$ mit euklidischer Metrik $d(x, y) = \|x - y\|$ das d -dimensionale Hausdorff-Maß bis auf eine positive Konstante (nämlich das inverse Lebesgue-Maß einer Vollkugel vom Radius 1) gleich λ^d ist (Satz III.2.9 in [EI]), sind für $D \neq d$ die Hausdorff-Maße davon verschieden. Insbesondere sind die Maße von Vollkugeln für $D < d$ unendlich. Sie fallen also nicht in die Klasse der Stieltjes-Maße aus Abschnitt 3.4.
3. Die Hausdorff-Maße können dazu benutzt werden, beliebigen Teilmengen $A \subseteq \mathbb{R}^d$ eine reelle Zahl zwischen 0 und d , ihre *Hausdorff-Dimension*, zuzuordnen:

$$\dim_H(A) := \inf \{D \geq 0 \mid \mathcal{H}^D(A) = 0\}.$$

Für die Cantor-Menge $C \subseteq [0, 1]$ (siehe Bsp. 4.29) gilt $\dim_H(C) = \frac{\log(2)}{\log(3)}$. \diamond

4.3 Das Lebesgue-Maß λ^d und seine Translationsinvarianz

Wir hatten auf dem Halbring $\mathcal{I}^d = \{(a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}^d, a \leq b\}$ der achsenparallelen halboffenen Quader durch $\lambda_{\mathcal{I}}^d([a, b]) = \prod_{k=1}^d (b_k - a_k)$ einen Inhalt definiert, der sich als Prämaß herausstellte (Satz 3.29).

Nach dem Fortsetzungssatz (Satz 4.7) induziert $\lambda_{\mathcal{I}}^d$ ein äußeres Maß $\eta : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$, das *äußere Lebesguesche Maß*. Es gilt $\eta|_{\mathcal{I}^d} = \lambda_{\mathcal{I}}^d$.

Weiter erhalten wir nach dem Satz von Carathéodory (Satz 4.3) eine Fortsetzung des Prämaßes $\lambda_{\mathcal{I}}^d$ zu einem Maß

$$\lambda^d := \eta|_{\mathcal{L}^d} : \mathcal{L}^d \rightarrow [0, \infty] \quad \text{auf der } \sigma\text{-Algebra } \mathcal{L}^d := \mathcal{A}_\eta, \quad (4.9)$$

dem *Lebesgue-Maß*. Es gilt also insbesondere

$$\lambda^d((a, b]) = \eta((a, b]) = \lambda_{\mathcal{I}}^d((a, b]) \quad (a \leq b).$$

Wegen der Wichtigkeit des Lebesgue-Maßes erhielt die σ -Algebra der Lebesgue-messbaren Teilmengen ein eigenes Symbol \mathcal{L}^d . Wie groß ist diese σ -Algebra?

Aus dem Auswahlaxiom folgt, dass \mathcal{L}^d nicht die gesamte Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ ist (siehe Abschnitt 4.7). Andererseits ist immerhin $\sigma(\mathcal{I}^d) \subseteq \mathcal{L}^d$.

4.10 Lemma *Die vom Halbring $\{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}^d, a \leq b\}$ der offenen Intervalle erzeugte σ -Algebra und $\sigma(\mathcal{I}^d)$ sind beide die Borel- σ -Algebra $\mathcal{B}^d(\mathbb{R}^d)$ (Def. 3.5) der Topologie \mathcal{O} offener Teilmengen von \mathbb{R}^d .*

Beweis: Hausaufgabe. □

Also ist $\sigma(\mathcal{I}^d) = \mathcal{B}^d$ für

$$\mathcal{B}^d := \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),$$

die σ -Algebra der *Borel-Mengen*. Tatsächlich ist auch die Inklusion $\mathcal{B}^d \subseteq \mathcal{L}^d$ echt. Denn \mathcal{L}^d umfasst *alle* Teilmengen von $A \in \mathcal{B}^d$ mit $\lambda^d(A) = 0$, und es gibt solche A , die selbst keine Borel-Mengen sind. Die Einschränkung des Lebesgue-Maßes

$$\beta^d := \lambda^d \upharpoonright_{\mathcal{B}^d} : \mathcal{B}^d \rightarrow [0, \infty]$$

wird *Lebesgue-Borel-Maß* genannt. Praktisch fällt der Unterschied zwischen β^d und λ^d aber oft nicht auf, da man meistens durch stetige Funktionen definierte Teilmengen des \mathbb{R}^d misst, die damit in \mathcal{B}^d liegen. Im folgenden Sinn ist der Maßraum $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}^d, \lambda^d)$ die Vervollständigung von $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d, \beta^d)$:

4.11 Definition

1. Ein Maßraum (M, \mathcal{M}, μ) und das Maß μ heißen **vollständig**, wenn jede Teilmenge einer μ -Nullmenge (also einer messbaren Menge $A \in \mathcal{M}$ mit Maß $\mu(A) = 0$) ebenfalls eine μ -Nullmenge ist.

2. Für einen Maßraum (M, \mathcal{M}, μ) heißt $(M, \widetilde{\mathcal{M}}, \widetilde{\mu})$ mit

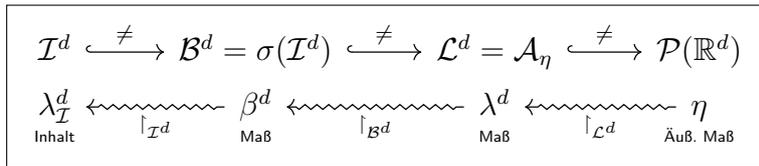
$$\mathcal{N} := \{N \subseteq M \mid \exists \mu\text{-Nullmenge } A \in \mathcal{M} \text{ mit } N \subseteq A\}$$

$$\widetilde{\mathcal{M}} := \{A \cup N \mid A \in \mathcal{M}, N \in \mathcal{N}\}, \quad \widetilde{\mu}(A \cup N) := \mu(A) \quad (A \in \mathcal{M}, N \in \mathcal{N})$$

die **Vervollständigung** von (M, \mathcal{M}, μ) .

Tatsächlich ist $\widetilde{\mu}$ wohldefiniert und $(M, \widetilde{\mathcal{M}}, \widetilde{\mu})$ ein vollständiger Maßraum.

Zusammenfassend erhalten wir die folgenden Inklusionen und Restriktionen:



Eine zentrale Eigenschaft des Lebesgue–Maßes ist seine *Translationsinvarianz*, also

$$\lambda^d(A + a) = \lambda^d(A) \quad (A \in \mathcal{L}^d, a \in \mathbb{R}^d).$$

Diese folgt aus der Translationsinvarianz des Halbrings \mathcal{I}^d und der Translationsinvarianz von λ^d auf \mathcal{I}^d . Sie verknüpft die Struktur der Gruppe $(\mathbb{R}^d, +)$, die eine topologische Gruppe¹³ ist, mit der Maßtheorie.

4.12 Bemerkung (Haar–Maß) Im Begriff des *Haar–Maßes* erfährt diese Konstruktion eine wichtige Verallgemeinerung. Für eine *lokalkompakte* topologische Gruppe G können wir ein solches reguläres Borel-Maß $\mu \neq 0$ (siehe Definition 4.13) finden, das unter den Links–Translationen

$$L_g : G \rightarrow G \quad , \quad L_g(h) = g \circ h \quad (g \in G)$$

invariant ist. Ein solches **(linkes) Haar–Maß** ist bis auf Normierung eindeutig. \diamond

Später, in Satz 4.25 werden wir sehen, dass das Lebesgue–Maß λ^d neben Translationen auch unter Drehungen und Spiegelungen invariant ist. Dazu müssen wir aber erst Bildmaße untersuchen.

Abschließend vermerken wir, dass das Lebesgue–Maß die nützliche Eigenschaft der Regularität besitzt. Das ermöglicht Approximationstechniken.

4.13 Definition *Es sei (M, \mathcal{O}) ein Hausdorff-Raum und $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ ein Maß auf einer σ -Algebra $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{B}(M)$, die also die Borel- σ -Algebra enthält.*

- μ heißt **lokal endlich**, wenn für jeden Punkt $x \in M$ eine offene Umgebung U_x von x existiert mit $\mu(U_x) < \infty$.
- μ heißt **Borel-Maß**, wenn¹⁴ μ lokal endlich ist und $\mathcal{A} = \mathcal{B}(M)$.
- μ heißt **von außen regulär**, wenn für alle $B \in \mathcal{B}(M)$ und $\varepsilon > 0$ eine offene Menge $U \supseteq B$ existiert mit $\mu(U \setminus B) < \varepsilon$.

¹³**Definition.** Eine Gruppe (G, \circ) heißt **topologische Gruppe**, wenn G mit einer Topologie versehen ist, sodass gilt: Die Gruppenverknüpfung $\circ : G \times G \rightarrow G$ und die Inversenbildung $G \rightarrow G$ sind stetig (dabei wird $G \times G$ mit der **Produkttopologie**, siehe Def. 2.14, versehen).

¹⁴Der Begriff der Borel-Maße wird in der Literatur nicht einheitlich benutzt.

- μ heißt **von innen (abgeschlossen)**¹⁵ **regulär**, wenn für alle $B \in \mathcal{B}(M)$ und $\varepsilon > 0$ eine abgeschlossene Menge $A \subseteq B$ existiert mit $\mu(B \setminus A) < \varepsilon$.
- μ heißt **regulär**, wenn μ von außen und von innen regulär ist.

4.14 Bemerkungen (Regularität)

1. Machen Sie sich klar, dass diese Approximierbarkeit durch offene Mengen *von außen* und durch abgeschlossene Mengen *von innen* eine sinnvolle Forderung ist, während die umgekehrten Bedingungen schon für λ^1 und die Teilmengen $B := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ bzw. $B := \mathbb{Q}$ von \mathbb{R} *nicht* erfüllt sind.
2. Nach Bemerkung 4.9.2 ist das Hausdorff-Maß \mathcal{H}^D auf dem \mathbb{R}^d für $D < d$ nicht lokal endlich, also auch nicht von außen regulär. \diamond

Dass das Lebesgue-Maß λ^d lokal endlich ist, sollte klar sein. Aber es gilt auch:

4.15 Satz Das Lebesgue-Maß λ^d ist regulär.

Beweis:

1. Wir beginnen mit dem Fall einer *beschränkten* Teilmenge $B \in \mathcal{L}^d = \mathcal{A}_\eta$ (siehe (4.9)), die von außen durch offene Mengen approximiert werden soll. Sei also $\varepsilon > 0$. Nach Definition des äußeren Maßes $\eta(B)$ im Fortsetzungssatz (Satz 4.7) gibt es eine Überdeckung von B durch eine Familie von $A_n \in \mathcal{I}^d$ mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{\mathcal{I}}^d(A_n) \leq \lambda^d(B) + \varepsilon/2 < \infty.$$

Zwar sind die Intervalle $A_n \subseteq \mathbb{R}^d$ nur halboffen, aber es gibt jeweils ein A_n enthaltendes offenes Intervall U_n mit $\lambda^d(U_n) \leq \lambda^d(A_n) + \varepsilon 2^{-n-1}$. Damit enthält die offene Menge $U := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ auch B und

$$\begin{aligned} \lambda^d(U) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^d(U_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda^d(A_n) + \varepsilon 2^{-n-1}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{\mathcal{I}}^d(A_n) + \varepsilon/2 \\ &\leq \lambda^d(B) + \varepsilon < \infty. \end{aligned}$$

Daraus folgt $\lambda^d(U \setminus B) = \lambda^d(U) - \lambda^d(B) < \varepsilon$.

2. Ist $B \in \mathcal{L}^d$ *unbeschränkt*, dann könnte $\lambda^d(B) = \infty$ sein, was den letzten Schritt verbieten würde (denn der Ausdruck $\infty - \infty$ ist undefiniert). Aber für alle $n \in \mathbb{N}$ sind die Mengen $B_n := \{x \in B \mid \|x\| \leq n\} \in \mathcal{L}^d$ beschränkt, besitzen also nach Teil 1. eine offene Umgebung V_n mit $\lambda^d(V_n \setminus B_n) < \varepsilon 2^{-n}$.

¹⁵Oft wird statt Abgeschlossenheit Kompaktheit von A gefordert. Da (M, \mathcal{O}) ein Hausdorff-Raum ist, ist diese Definition nach Satz 2.37 restriktiver. Aber für viele Hausdorff-Räume sind die beiden Definitionen äquivalent, siehe etwa [Ei, Satz VIII.1.9].

Außerdem ist $B_n \subseteq B_{n+1}$ und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = B$. Die offene Umgebung $V := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$ von B besitzt eine durch ε beschränkte Maßdifferenz zu B :

$$\begin{aligned} \lambda^d(V \setminus B) &= \lambda^d\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (V_n \setminus B)\right) \leq \lambda^d\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (V_n \setminus B_n)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^d(V_n \setminus B_n) \\ &< \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon 2^{-n} = \varepsilon. \end{aligned}$$

3. Die Approximation von $B \in \mathcal{L}^d$ von innen durch eine abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq B$ bereitet nun keine Schwierigkeiten mehr. Denn $B^c := \mathbb{R}^d \setminus B \in \mathcal{L}^d$ besitzt ja nach Teil 2. eine offene Umgebung V mit $\lambda^d(V \setminus B^c) < \varepsilon$. Setzen wir $A := \mathbb{R}^d \setminus V$, dann ist $A \subseteq B$ abgeschlossen und $B \setminus A = B \cap V = V \setminus B^c$, also auch $\lambda^d(B \setminus A) < \varepsilon$. \square

4.4 Messbare Abbildungen und Bildmaße

Eine Drehung des \mathbb{R}^d ist zunächst einmal eine stetige Abbildung. Wie wir gleich sehen werden, bedeutet das nicht nur, dass Urbilder offener Mengen offen sind, sondern allgemeiner, dass Urbilder von Borel-Mengen wieder Borel-Mengen sind. Das macht so eine Drehung zu einer messbaren Abbildung.

4.16 Definition

- Eine Abbildung $f : A \rightarrow B$ zwischen Messräumen (A, \mathcal{A}) und (B, \mathcal{B}) heißt¹⁶ $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -**messbar**, wenn $f^{-1}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{A}$ gilt, mit dem Mengensystem

$$f^{-1}(\mathcal{C}) := \{f^{-1}(C) \mid C \in \mathcal{C}\} \subseteq 2^A \quad (\mathcal{C} \subseteq 2^B). \quad (4.10)$$

- Ist $f : A \rightarrow B$ messbar und $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ ein Maß, dann heißt $f_*(\mu) : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$, $M \mapsto \mu(f^{-1}(M))$ das **Bildmaß von μ bezüglich f** .

Tatsächlich ist $f_*(\mu)$ ein Maß, denn

- $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ und
- für disjunkte $M_k \in \mathcal{B}$ ($k \in \mathbb{N}$) ist

$$\begin{aligned} f_*(\mu)\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k\right) &= \mu\left(f^{-1}\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} f^{-1}(M_k)\right) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu\left(f^{-1}(M_k)\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} f_*(\mu)(M_k), \end{aligned}$$

denn auch die $(f^{-1}(M_k))_{k \in \mathbb{N}}$ sind disjunkt.

¹⁶Man sagt kurz: f ist messbar, wenn klar ist, bezüglich welcher σ -Algebren.

4.17 Lemma Für Messräume (A, \mathcal{A}) , (B, \mathcal{B}) , (C, \mathcal{C}) , messbare Abbildungen $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ und ein Maß $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ erfüllen die Bildmaße

$$(g \circ f)_*(\mu) = g_*(f_*(\mu)) \quad (\text{Transitivität}).$$

Beweis: Für alle $M \in \mathcal{C}$ gilt: $(g \circ f)_*(\mu)(M) = \mu((g \circ f)^{-1}(M)) = \mu(f^{-1} \circ g^{-1}(M)) = f_*(\mu)(g^{-1}(M)) = g_*(f_*(\mu))(M)$. \square

So etwas beweist sich ohne Zuhilfenahme des Gehirns. Wie zeigt man nun praktisch, dass eine Abbildung $f : A \rightarrow B$ messbar ist? Dazu genügt es, die Eigenschaft $f^{-1}(C) \in \mathcal{A}$ für eine kleinere Familie von Teilmengen $C \subseteq B$ als die σ -Algebra \mathcal{B} zu kontrollieren. Das gelingt, weil die induzierte Abbildung $f^{-1} : 2^B \rightarrow 2^A$ der Teilmengen **operationstreu** ist, also (im Gegensatz zu $f : 2^A \rightarrow 2^B$) mit Schnitt, Vereinigung und Komplementbildung vertauscht:

4.18 Satz Für $f : A \rightarrow B$ ist

$$f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{E})) \quad (\mathcal{E} \subseteq 2^B). \quad (4.11)$$

Sind (A, \mathcal{A}) und (B, \mathcal{B}) Messräume und $\mathcal{E} \subseteq 2^B$ ein Erzeuger der σ -Algebra \mathcal{B} , dann ist $f : A \rightarrow B$ genau dann messbar, wenn gilt: $f^{-1}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$.

Beweis:

- $f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) \supseteq \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))$: Wegen der Operationstreu von f^{-1} ist die linke Seite von (4.11) eine σ -Algebra, also $f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) = \sigma(f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}))) \supseteq \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))$.
- $f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) \subseteq \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))$: Das Mengensystem \mathcal{E} ist offensichtlich in

$$\mathcal{C} := \{C \subseteq B \mid f^{-1}(C) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))\} \subseteq 2^B$$

enthalten. Weiter ist \mathcal{C} eine σ -Algebra, da

1. $B \in \mathcal{C}$. Denn $f^{-1}(B) = A$, und A ist Element seiner σ -Algebra $\sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))$.
2. aus $C \in \mathcal{C}$ folgt $B \setminus C \in \mathcal{C}$, da

$$f^{-1}(B \setminus C) = f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(C) = A \setminus f^{-1}(C),$$

3. aus $C_k \in \mathcal{C}$ ($k \in \mathbb{N}$) folgt $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_k \in \mathcal{C}$, da

$$f^{-1}\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_k\right) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f^{-1}(C_k).$$

Damit gilt $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{C}$, also auch $f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) \subseteq f^{-1}(\mathcal{C}) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))$.

Wir beweisen nun die Behauptung über den Erzeuger \mathcal{E} der σ -Algebra \mathcal{B} .

- Da $\sigma(\mathcal{E}) \supseteq \mathcal{E}$, folgt $f^{-1}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$ aus $f^{-1}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{A}$, also der Messbarkeit von f .
- Ist umgekehrt $f^{-1}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$, dann folgt aus (4.11)

$$f^{-1}(\mathcal{B}) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{E})) \subseteq \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A},$$

also die Messbarkeit von f . □

4.19 Bemerkung (Stetigkeit und Messbarkeit) Sind (A, \mathcal{O}_A) und (B, \mathcal{O}_B) topologische Räume, und $f : A \rightarrow B$ stetig, dann ist nach Satz 4.18 f messbar bezüglich der Borel- σ -Algebren $\mathcal{A} := \sigma(\mathcal{O}_A)$ und $\sigma(\mathcal{O}_B)$. Denn $\sigma(\mathcal{O}_B)$ wird ja durch \mathcal{O}_B erzeugt, und wegen der Stetigkeit von f ist $f^{-1}(\mathcal{O}_B) \subseteq \mathcal{O}_A$.

Aber auch die meisten praktisch vorkommenden unstetigen Funktionen sind messbar, beispielsweise die charakteristischen Funktionen $\mathbb{1}_M : A \rightarrow \{0, 1\}$ messbarer Teilmengen $M \in \mathcal{A}$ des Messraumes (A, \mathcal{A}) . ◇

4.5 Eindeutigkeitsätze

Wir werden in Abschnitt 4.6 feststellen, dass das Bildmaß des Lebesgue-Maßes unter einer invertierbaren affinen Abbildung ein Vielfaches des Lebesgue-Maßes ist. Dazu verwenden wir die Tatsache, dass das Lebesgue-Maß λ^d das einzige translationsinvariante Maß auf \mathbb{R}^d ist, das dem Standardwürfel Maß 1 gibt.

4.20 Satz (Maßeindeutigkeitsatz)

Es seien μ, ν Maße auf der σ -Algebra $\mathcal{A} \subseteq 2^M$, und es gebe einen durchschnitts-stabilen Erzeuger \mathcal{E} von \mathcal{A} mit

(a) $\mu \upharpoonright_{\mathcal{E}} = \nu \upharpoonright_{\mathcal{E}}$

(b) Es gibt $E_n \in \mathcal{E}$ mit $\mu(E_n) = \nu(E_n) < \infty$ ($n \in \mathbb{N}$) und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = M$.

Dann ist $\mu = \nu$.

4.21 Bemerkung (Voraussetzungen der Eindeutigkeit) Ohne die Forderung (b) muss $\mu = \nu$ nicht gelten. Ein Beispiel ist $\mathcal{A} := \{\emptyset, M\}$ und $\mathcal{E} := \{\emptyset\}$. Dann gilt immer (a) unabhängig davon, ob $\mu(M) = \nu(M)$ ist oder nicht. ◇

Beweis: (siehe auch Satz 5.4 von BAUER [Ba])

- Für die E_n aus Bedingung b) des Satzes setzen wir $F_1 := E_1$ und $F_{n+1} := E_{n+1} \setminus (\bigcup_{k=1}^n E_k)$ ($n \in \mathbb{N}$). Dann ist die Folge der F_n disjunkt mit

$$\bigcup_{k=1}^n F_k = \bigcup_{k=1}^n E_k \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Außerdem sind die $F_k \in \mathcal{A}$, aus der σ -Additivität der Maße $\mu, \nu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ folgt also wegen Bedingung (b) für alle $A \in \mathcal{A}$:

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(F_k \cap A) \quad \text{und} \quad \nu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(F_k \cap A).$$

- Es genügt also zu zeigen, dass $\mu(F_k \cap A) = \nu(F_k \cap A)$ gilt. Nun ist $F_k \cap A \subseteq E_k$. Wir wollen also beweisen, dass $F_k \cap A \in \mathcal{D}_k$ gilt, mit

$$\mathcal{D}_k := \{B \in \mathcal{A} \mid \mu(E_k \cap B) = \nu(E_k \cap B)\} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Konkret zeigen wir einfach, dass \mathcal{D}_k schon die gesamte σ -Algebra \mathcal{A} ist.

- Die \mathcal{D}_k sind Dynkin-Systeme, denn:

- Wegen $\mu(E_k) = \nu(E_k)$ ($k \in \mathbb{N}$) und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = M$ ist $M \in \mathcal{D}_k$.
- Mit $B \in \mathcal{D}_k$ ist auch $B^c \in \mathcal{D}_k$, denn wegen $\mu(E_k) = \nu(E_k) < \infty$ ist

$$\begin{aligned} \mu(E_k \cap B^c) &= \mu(E_k \setminus (E_k \cap B)) = \mu(E_k) - \mu(E_k \cap B) \\ &= \nu(E_k) - \nu(E_k \cap B) = \nu(E_k \cap B^c). \end{aligned}$$

- Für disjunkte $B_n \in \mathcal{D}_k$ ($n \in \mathbb{N}$) ist auch $B := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ in \mathcal{D}_k :

$$\mu(E_k \cap B) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_k \cap B_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(E_k \cap B_n) = \nu(E_k \cap B).$$

- – Da der Erzeuger \mathcal{E} von \mathcal{A} nach Voraussetzung des Satzes durchschnitts stabil ist, also mit $B \in \mathcal{E}$ auch $E_k \cap B \in \mathcal{E}$ gilt, folgt aus Bedingung (a): $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_k$. Da \mathcal{D}_k ein Dynkin-System ist, gilt damit für das von \mathcal{E} erzeugte Dynkin-System $\delta(\mathcal{E})$: $\delta(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}_k$.
- Mit \mathcal{E} ist aber auch $\delta(\mathcal{E})$ durchschnitts stabil. Nach Satz 4.6 folgt:

$$\sigma(\mathcal{E}) = \delta(\mathcal{E}).$$

- Andererseits ist \mathcal{E} Erzeuger der σ -Algebra \mathcal{A} , d.h.: $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$.

Zusammenfassend erhalten wir

$$\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E}) = \delta(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}_k \subseteq \mathcal{A}, \quad \text{also} \quad \mathcal{D}_k = \mathcal{A}.$$

Damit ist $F_k \cap A \in \mathcal{D}_k$, womit der Eindeigkeitssatz gezeigt ist. □

4.22 Definition Ein Inhalt $\mu : \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty]$ auf einem Halbring $\mathcal{H} \subseteq 2^M$ heißt σ -**endlich**, wenn es eine Folge von $A_n \in \mathcal{H}$ gibt mit

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = M \quad \text{und} \quad \mu(A_n) < \infty \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Da Halbringe durchschnittsstabil sind, folgt für diese aus dem Eindeutigkeitsatz 4.20 zusammen mit dem Fortsetzungssatz 4.7:

4.23 Korollar Jedes σ -endliche Prämaß $\mu : \mathcal{H} \mapsto [0, \infty]$ auf einem Halbring \mathcal{H} über M kann auf genau eine Weise fortgesetzt werden zu einem Maß auf $\sigma(\mathcal{H})$.

4.24 Satz (Eindeutigkeit des Lebesgue–Maßes)

Ist μ ein translationsinvariantes Maß auf \mathcal{L}^d mit $\mu((0, 1]^d) = 1$, dann ist $\mu = \lambda^d$.

Beweis:

- Zunächst folgt für $n_1, \dots, n_d \in \mathbb{N}$:

$$\mu\left(\left(0, \frac{1}{n_1}\right] \times \dots \times \left(0, \frac{1}{n_d}\right]\right) = \frac{1}{n_1 \dots n_d},$$

indem man den Einheitswürfel aus disjunkten Translaten dieses kleinen Quaders zusammensetzt und Translationsinvarianz von μ benutzt. Denn

$$(0, 1]^d = \dot{\bigcup}_{k_1=1}^{n_1} \dots \dot{\bigcup}_{k_d=1}^{n_d} \left(\frac{k_1-1}{n_1}, \frac{k_1}{n_1}\right] \times \dots \times \left(\frac{k_d-1}{n_d}, \frac{k_d}{n_d}\right].$$

- Auch beliebige rationale Quader $(a, b] \in \mathcal{I}_{\mathbb{Q}}^d$ lassen sich aus disjunkten Translaten dieser Quader zusammensetzen. Das zeigt $\mu|_{\mathcal{I}_{\mathbb{Q}}^d} = \lambda^d|_{\mathcal{I}_{\mathbb{Q}}^d} = \lambda_{\mathbb{I}, \mathbb{Q}}^d$.
- Da $\sigma(\mathcal{I}_{\mathbb{Q}}^d) = \mathcal{B}^d$ gilt und $\lambda_{\mathbb{I}, \mathbb{Q}}^d$ ein σ -endliches Prämaß ist, folgt $\mu|_{\mathcal{B}^d} = \lambda^d|_{\mathcal{B}^d}$ mit Korollar 4.23. Damit ist auch $\mu = \lambda^d$, siehe auch [EI, Korollar II.6.5]. \square

4.6 Transformation des Lebesgue–Maßes mit Affinitäten

Eine affine Abbildung $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ lässt sich eindeutig in der Form

$$f(x) = a + Ax \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{R}^d, \quad A \in \text{Mat}(d, \mathbb{R})$$

schreiben. Wir setzen dann $\det(f) := \det(A)$. Ist $A \in \text{GL}(d, \mathbb{R})$, also invertierbar, heißt sie *Affinität*. Die Affinitäten des \mathbb{R}^d bilden eine Gruppe.

Affine Abbildungen sind insbesondere stetig, also Borel-messbar. Damit ist eine Affinität f auch $(\mathcal{L}^d, \mathcal{L}^d)$ -messbar bezüglich der σ -Algebra \mathcal{L}^d auf \mathbb{R}^d . Denn diese ist die Vervollständigung von \mathcal{B}^d , und da Affinitäten sogar Lipschitz-stetig sind, gilt $\lambda^d(f^{-1}(C)) = \lambda^d(A^{-1}(C - a)) = 0$, falls $C \in \mathcal{B}^d$ eine Nullmenge ist.

4.25 Satz Für Affinitäten $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ ist das Bildmaß des Lebesgue-Maßes

$$f_*(\lambda^d) = \frac{1}{|\det(f)|} \lambda^d. \quad (4.12)$$

Beweis:

- Da λ^d translationsinvariant ist, können wir uns auf den Fall $f(x) = Ax$ mit $A \in \text{GL}(d, \mathbb{R})$ beschränken. Bezeichnet nämlich

$$t_a : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad x \mapsto x + a$$

die Translation um $a \in \mathbb{R}^d$, dann ist auch das Bildmaß $f_*(\lambda^d)$ des Lebesgue-Maßes translationsinvariant, denn für alle $B \in \mathcal{L}^d$ ist wegen $t_a^{-1} = t_{-a}$

$$\begin{aligned} t_{a,*}(f_*(\lambda^d))(B) &= f_*(\lambda^d)(t_{-a}(B)) = \lambda^d(f^{-1}(t_{-a}(B))) \\ &= \lambda^d(f^{-1}(B) - f^{-1}(a)) = \lambda^d(f^{-1}(B)) = f_*(\lambda^d)(B). \end{aligned}$$

Also ist nach dem Eindeigkeitsatz 4.24 des Lebesgue-Maßes $f_*(\lambda^d) = C\lambda^d$, mit einem $C > 0$, das von f abhängt.

- Ist die lineare Abbildung f orthogonal, dann lässt f die Einheits-Vollkugel im \mathbb{R}^d invariant, also ist $C = 1$.
- Ist $f \in \text{GL}(d, \mathbb{R})$ dagegen diagonal, dann stimmt die Determinantenformel (4.12). Denn dann ist $\det(f) \neq 0$ Produkt der Streckungsfaktoren in den Achsenrichtungen, und Volumina von Quadern transformieren sich unter f wie gewünscht.
- Man kann jedes $A \in \text{GL}(d, \mathbb{R})$ in der Form

$$A = O_1 D O_2 \quad (4.13)$$

schreiben mit orthogonalen Matrizen O_1, O_2 und diagonalem D .

Denn AA^* ist eine selbstadjungierte positive Matrix. Sie besitzt also eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren w_i , die wir in der Form $w_i = O_1 e_i$ ($i = 1, \dots, d$) mit den kanonischen Basisvektoren e_i des \mathbb{R}^d und einer orthogonalen Matrix O_1 schreiben können. Die Eigenwerte von w_i sind positiv. Wir schreiben sie in der Form λ_i^2 mit $\lambda_i > 0$ und setzen $D := \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$. Dann gilt $AA^* = O_1 D^2 O_1^*$. Wir setzen $O_2 := D^{-1} O_1^* A$. Damit ist

$$O_2 O_2^* = D^{-1} O_1^* (AA^*) O_1 D^{-1} = D^{-1} O_1^* (O_1 D^2 O_1^*) O_1 D^{-1} = \mathbb{1}_d.$$

Also ist auch O_2 orthogonal. Aus der Definition von O_2 ergibt sich (4.13).

Mit der Transitivitäts-Eigenschaft von Bildmaßen (Lemma 4.17) und der Determinanten-Produktformel folgt die Behauptung. \square

Insbesondere ist damit das Lebesgue–Maß unter Drehspiegelungen invariant, also auch unter Bewegungen. Unter einer **Bewegung** des euklidischen Raums \mathbb{R}^d versteht man eine (bijektive) Isometrie des \mathbb{R}^d . Jede Affinität der Form

$$x \mapsto Ax + b \quad \text{mit} \quad A \in O(d), \quad b \in \mathbb{R}^d$$

ist damit eine Bewegung, denn für die euklidische Metrik d und $x, y \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$d(Ax + b, Ay + b) = \|Ax + b - (Ay + b)\| = \|A(x - y)\| = \|x - y\| = d(x, y).$$

Man kann umgekehrt zeigen, dass jede Bewegung von dieser Form ist. Die Bewegungen des \mathbb{R}^d bilden damit eine Untergruppe der Gruppe seiner Affinitäten.

4.7 Die Unlösbarkeit des Maßproblems

Das von Lebesgue 1902 formulierte *Maßproblem* besteht in folgender Aufgabe:

Finde ein Maß $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$, das invariant unter den Bewegungen des \mathbb{R}^d ist, und für das $\mu([0, 1]^d) = 1$ gilt.

Wir zeigen, dass dieses Problem unlösbar ist, indem wir einen (modifizierten) *Beweis von Vitali* aufgreifen.

4.26 Satz (Vitali, 1905) *Das System \mathcal{L}^d der Lebesgue–messbaren Mengen in \mathbb{R}^d ist eine echte Teilmenge von $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$.*

Beweis:

- Die Relation \sim auf \mathbb{R}^d mit $x \sim y$, falls $x - y \in \mathbb{Q}^d$, ist eine Äquivalenzrelation. Nach dem Auswahlaxiom¹⁷ der Mengenlehre gibt es eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^d$ von Vertretern der Äquivalenzklassen, d.h. für alle $x \in \mathbb{R}^d$ gibt es genau ein $y \in M$ mit $x \sim y$. Eine solche Menge M wird *Vitali–Menge* genannt.
- Falls $M \in \mathcal{L}^d$, dann ist entweder $\lambda^d(M) = 0$ oder $\lambda^d(M) \in (0, \infty]$. Beides führt zum Widerspruch.
- Wäre nämlich $\lambda^d(M) = 0$, dann wäre wegen der Abzählbarkeit von \mathbb{Q}^d auch

$$\lambda^d(\mathbb{R}^d) = \lambda^d\left(\bigcup_{z \in \mathbb{Q}^d} (M + z)\right) = \sum_{z \in \mathbb{Q}^d} \lambda^d(M + z) = \sum_{z \in \mathbb{Q}^d} \lambda^d(M) = 0,$$

im Widerspruch zu $\lambda^d([0, 1]^d) = 1$ und zur Monotonie von Maßen.

¹⁷**Auswahlaxiom:** Zu jeder Menge A von nicht leeren Mengen $X \in A$ gibt es eine *Auswahlfunktion* genannte Abbildung $F : A \rightarrow \bigcup_{X \in A} X$ mit $F(X) \in X$ ($X \in A$).

- Wäre dagegen $\lambda^d(M) > 0$, dann würde die *Differenzmenge*

$$M - M = \{m_1 - m_2 \mid m_1, m_2 \in M\}$$

nach dem folgenden **Satz von Steinhaus** eine Umgebung der Null enthalten, also auch einen Punkt aus $\mathbb{Q}^d \setminus \{0\}$. Es gäbe damit voneinander verschiedene $m_1, m_2 \in M$ mit $m_1 - m_2 \in \mathbb{Q}^d$, M wäre also kein Vertretersystem. \square

4.27 Satz (Steinhaus, 1920 (!))

Ist $A \subseteq \mathbb{R}^d$ Lebesgue-messbar ($A \in \mathcal{L}^d$) mit $\lambda^d(A) > 0$, so gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$U_\delta(0) \subseteq A - A.$$

Beweis:

1. Wir können annehmen, dass A beschränkt ist, also $\lambda^d(A) < \infty$ gilt. Denn für die Mengen $A_n := \{x \in A \mid \|x\| \leq n\}$ gilt $A_n \in \mathcal{L}^d$, $A_n - A_n \subseteq A - A$, $\lambda^d(A_n) < \infty$ und $\lambda^d(A_n) > 0$, letzteres, falls $n \in \mathbb{N}$ genügend groß ist.
2. Da das Lebesgue-Maß regulär ist (Satz 4.15) und nach Annahme $\lambda^d(A) \in (0, \infty)$, gibt es eine offene Menge U und eine abgeschlossene Menge $K \neq \emptyset$ mit $K \subseteq A \subseteq U$ und $\lambda^d(U) < 2\lambda^d(K)$.
Da O.B.d.A. nach Teil 1. des Beweises A beschränkt ist, ist $K \subseteq A$ kompakt.
3. Nach Satz 2.42 ist für die abgeschlossene und nach Teil 1. nicht leere Menge $U^c := \mathbb{R}^d \setminus U$

$$\delta := \text{dist}(U^c, K) > 0.$$

4. Für $u \in U_\delta(0)$ liegt daher die verschobene Menge $K + u$ auch in U . Sie hat nicht leeren Schnitt mit $K \subseteq U$. Denn sonst wäre, im Widerspruch zu Teil 2.

$$2\lambda^d(K) = \lambda^d(K) + \lambda^d(K + u) = \lambda^d(K \dot{\cup} (K + u)) \leq \lambda^d(U).$$

5. Es gibt also ein $x \in K \cap (K + u)$. Anders gesagt, gilt mit $y := x - u \in K$:

$$u = x - y \in K - K \subseteq A - A \quad (u \in U_\delta(0)). \quad \square$$

4.28 Bemerkung (Satz von Vitali)

Zusätzlich zum Satz 4.26 von Vitali ist es auch so, dass keine Fortsetzung des Lebesgue-Maßes auf die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ möglich ist. Das ist der Maximalität der σ -Algebra \mathcal{L}^d der Carathéodory-Konstruktion geschuldet, siehe ELSTRODT [EI, Satz III 3.2]. Das Maßproblem ist eben unlösbar.

Allerdings ist die Verwendung des Auswahlaxioms (wie von Solovay 1970 gezeigt) im Beweis dieser Tatsache unverzichtbar. Ohne die Annahme des Auswahlaxioms wäre also die Behauptung $\mathcal{L}^d = \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ logisch konsistent. So berührt die Maßtheorie die Mengenlehre, und damit die Grundfesten der Mathematik. \diamond

Im Zusammenhang mit dem Satz von Steinhaus ist interessant, dass auch Mengen vom Lebesgue-Maß Null eine große Differenzmenge besitzen können:

4.29 Beispiel (Die Cantor-Menge)

Analog zur Dezimalentwicklung reeller Zahlen kann jede Zahl $x \in [0, 1]$ in der Form $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k 3^{-k}$ mit $c_k \in \{0, 1, 2\}$ dargestellt werden. Diese Darstellung ist nicht ganz eindeutig, denn $\sum_{k=n}^{\infty} 2 \cdot 3^{-k} = 3^{1-n}$. Diese Uneindeutigkeit betrifft aber nur die Darstellung von abzählbar vielen x . Setzen wir

$$C_n := \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} c_k 3^{-k} \mid c_k \in \{0, 1, 2\}, c_k \neq 1 \text{ für } k \leq n \right\} \quad (n \in \mathbb{N}_0),$$

dann ist $C_0 = [0, 1]$, $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, $C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$ etc., also $C_{n+1} \subseteq C_n$, C_n abgeschlossen und $\lambda^1(C_n) = (\frac{2}{3})^n$. Damit ist das Lebesgue-Maß der *Cantor-Menge*

$$C := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$$

definiert und $\lambda^1(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^1(C_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{2}{3})^n = 0$.

Andererseits ist C ein Beispiel für eine Menge, die zwar nicht die Voraussetzung, wohl aber die Folgerung des zitierten Satzes von Steinhaus erfüllt. Denn

$$C = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} c_k 3^{-k} \mid c_k \in \{0, 2\} \right\},$$

also $\frac{1}{2}(C + C) = \{ \frac{1}{2}(x + y) \mid x, y \in C \} = \{ \sum_{k=1}^{\infty} (b_k + c_k) 3^{-k} \mid b_k, c_k \in \{0, 1\} \} = [0, 1]$. Analog ist $C - C = [-1, 1]$, also $\dim_H(C - C) = 1$. Dass dies möglich ist, hängt damit zusammen, dass $\dim_H(C) = \frac{\log(2)}{\log(3)} \approx 0.6309 > \frac{1}{2}$, siehe Bemerkung 4.9.3. Siehe auch [Fa, Section 7.2] von **KENNETH FALCONER**. \diamond

5 Das Lebesgue-Integral

Da das Integral über eine nicht negative stetige Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$ das Volumen unter ihrem Graphen ist, ist Integrationstheorie wesentlich Maßtheorie. Für Funktionen, bei denen das Riemann-Integral und das jetzt zu definierende *Lebesgue-Integral* existieren, stimmen beide überein. Mit dem Lebesgue-Integral ist aber einfacher zu rechnen, was Vertauschen von Limiten und Integration etc. betrifft. Da Reihen nicht negativer Zahlen aber nach $+\infty$ divergieren können, betrachten wir einleitend

5.1 Numerische Funktionen

5.1 Definition Die erweiterte Zahlengerade

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty],$$

mit Ordnungsstruktur von \mathbb{R} , erweitert um $-\infty < x < +\infty$ ($x \in \mathbb{R}$), besitze die folgenden Rechenregeln¹⁸

$$\begin{aligned} x + \infty &:= \infty + x := \infty & (x \in (-\infty, \infty] := \mathbb{R} \cup \{+\infty\}) \\ x - \infty &:= -\infty + x := -\infty & (x \in [-\infty, \infty) := \mathbb{R} \cup \{-\infty\}) \\ \infty - \infty &:= -\infty + \infty := 0 \\ a \cdot (\pm\infty) &:= (\pm\infty) \cdot a := \begin{cases} \pm\infty & , a > 0 \\ \mp\infty & , a < 0 \\ 0 & , a = 0 \end{cases} . \end{aligned}$$

Die Topologie ist die der Metrik $d : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \rightarrow [0, 2]$, $d(x, y) = |\tanh x - \tanh y|$, mit $\tanh(\pm\infty) := \pm 1$. $\overline{\mathbb{R}}$ ist also ein kompakter Hausdorff-Raum. Dann ist die Borel- σ -Algebra $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ von der Form

$$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \{B \cup A \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), A \subseteq \{\pm\infty\}\}.$$

5.2 Definition

- Abbildungen $F : M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ heißen **numerische Funktionen**.
- Ist (M, \mathcal{A}) ein Messraum, dann heißt $f : M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ **messbar**, wenn f $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ -messbar ist.

5.3 Satz Für jede numerische Funktion $f : M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ sind äquivalent:

- f ist messbar
- $f^{-1}((a, \infty]) \in \mathcal{A}$ ($a \in \mathbb{R}$)
- $f^{-1}([a, \infty]) \in \mathcal{A}$ ($a \in \mathbb{R}$)
- $f^{-1}([-\infty, a]) \in \mathcal{A}$ ($a \in \mathbb{R}$)
- $f^{-1}((-\infty, a)) \in \mathcal{A}$ ($a \in \mathbb{R}$)

¹⁸**Vorsicht:** Damit ist die Addition auf $\overline{\mathbb{R}}$ nicht assoziativ, denn für $a \in \mathbb{R}$ ist $(a + \infty) - \infty = \infty - \infty = 0$, aber $a + (\infty - \infty) = a + 0 = a$!

Beweis:

Vorbemerkung: Satz 5.3 folgt auch aus der Tatsache, dass die durch $a \in \mathbb{R}$ parametrisierten Mengensysteme Erzeuger von $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ sind (Beweis: Hausaufgabe).

Wir zeigen zunächst, dass (b) – (e) äquivalent sind. (b) ist zu (d) äquivalent und (c) zu (e), weil die σ -Algebra unter Komplementbildung abgeschlossen ist. Weiter folgt (b) aus (c) und analog (e) aus (d), denn $(c, \infty] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [c + \frac{1}{n}, \infty]$.

Nun wird die Äquivalenz von (a) und (c) bewiesen. Betrachte dazu die vom Mengensystem $\mathcal{M} := \{[c, \infty] \mid c \in \mathbb{R}\}$ erzeugte σ -Algebra. Wegen $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ ist $\sigma(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$.

Umgekehrt sind auch alle halboffenen endlichen Intervalle der Form $[c, d)$ mit $c, d \in \mathbb{R}$ in $\sigma(\mathcal{M})$ enthalten, denn $[c, d) = [c, \infty] \setminus [d, \infty]$.

Damit ist $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \subseteq \sigma(\mathcal{M})$ und wegen $\{+\infty\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [n, \infty]$ und $\{-\infty\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [-\infty, -n) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\mathbb{R}} \setminus [n, \infty]$ sogar $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \subseteq \sigma(\mathcal{M})$. \square

In der Schreibweise für das Supremum und Infimum von Mengen reeller Zahlen wurde schon implizit $\overline{\mathbb{R}}$ verwendet. Ein Vorteil numerischer Funktionen ist, dass bei Supremums- und Infimumsbildung diese Klasse nicht verlassen wird.

5.4 Satz Sind die numerischen Funktionen $f_n : M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar ($n \in \mathbb{N}$), dann sind auch $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup_n f_n$ und $\liminf_n f_n$ messbar.

Beweis:

1. Für $f := \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ und $a \in \mathbb{R}$ ist $f^{-1}((-\infty, a]) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f_n^{-1}((-\infty, a])$ als Schnitt messbarer Mengen messbar. Nach Satz 5.3 ist damit f messbar. Analog ist auch $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$ messbar.
2. $\limsup_{n \in \mathbb{N}} f_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{n \geq N} f_n = \inf_{N \rightarrow \infty} \sup_{n \geq N} f_n$ ist nach Teil 1. Infimum der Folge $(\sup_{n \geq N} f_n)_{N \in \mathbb{N}}$ messbarer Funktionen. Wieder nach Teil 1. ist dieses Infimum messbar. Der Fall $\liminf_{n \in \mathbb{N}} f_n$ ist wieder analog. \square

5.5 Satz Sind $f, f_1, f_2 : (M, \mathcal{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ messbar und $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, so sind auch (mit Def. 5.1) αf , $f_1 + f_2$, $f_1 f_2$, $\max(f_1, f_2)$, $\min(f_1, f_2)$ und $|f|$ messbar.

Beweis: Wir benutzen die Messbarkeitskriterien aus Satz 5.3.

1. αf ist messbar, denn für $\alpha \in (0, \infty)$ ist

$$(\alpha f)^{-1}([-\infty, c)) = f^{-1}([-\infty, c/\alpha)),$$

und die anderen Fälle sind analog.

2. Es sei $g := f_1 + f_2$. Wir zeigen für alle $c \in \mathbb{R}$, dass $M_c := g^{-1}([-\infty, c])$ messbar ist. Das folgt, weil M_c eine abzählbare Vereinigung messbarer Mengen ist:

$$M_c = \bigcup_{s \in \mathbb{Q}} \left[f_1^{-1}([-\infty, s]) \cap f_2^{-1}([-\infty, c - s]) \right].$$

3. Jetzt ist $g := f_1 f_2$, und wieder $M_c := g^{-1}([-\infty, c])$. Für $c > 0$ ist

$$M_c = \bigcup_{s \in \mathbb{Q}^+} \left[(f_1^{-1}([0, s]) \cap f_2^{-1}([-\infty, \frac{c}{s}])) \cup f_1^{-1}((-s, 0]) \cap f_2^{-1}([\frac{-c}{s}, \infty)) \right].$$

Also ist M_c als abzählbare Vereinigung messbarer Mengen messbar. Die Fälle $c \leq 0$ folgen analog.

4. Die Messbarkeit von $\max(f_1, f_2)$ folgt aus Satz 5.4 (mit $f_n = -\infty$ für $n > 2$).
 5. Die Messbarkeit von $\min(f_1, f_2)$ folgt aus $\min(f_1, f_2) = -\max(-f_1, -f_2)$.
 6. Die Messbarkeit von $|f|$ folgt aus Teil 4. und 1., denn $|f| = \max(f, -f)$. \square

5.6 Satz Für einen Messraum (M, \mathcal{A}) ist $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_d \end{pmatrix} : M \rightarrow \mathbb{R}^d$ genau dann $(\mathcal{A}, \mathcal{B}^d)$ -messbar, wenn die $f_k : M \rightarrow \mathbb{R}$ $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -messbar sind.

Beweis:

- Die Projektionen $\pi_k : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \mapsto x_k$ sind stetig, also $(\mathcal{B}^d, \mathcal{B})$ -messbar. Daher ist mit f auch $f_k = \pi_k \circ f$ messbar.
- Da der Halbring \mathcal{I}^d der halboffenen Intervalle des \mathbb{R}^d die σ -Algebra \mathcal{B}^d erzeugt, reicht es, die Messbarkeit von $f^{-1}((a, b]) \subseteq M$ für alle $a \leq b \in \mathbb{R}^d$ zu konstatieren. Diese folgt aber aus

$$f^{-1}((a, b]) = \bigcap_{k=1}^d f_k^{-1}((a_k, b_k]). \quad \square$$

Komplexwertige Funktionen sind also genau dann messbar, wenn $\operatorname{Re}(f)$ und $\operatorname{Im}(f)$ messbar sind.

5.2 Einfache Funktionen und ihre Integrale

Bei der Einführung des Riemann-Integrals geeigneter Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kamen *Treppenfunktionen* vor, die als endliche Linearkombinationen von Indikatorfunktionen eines Intervalls definiert wurden.

Jetzt werden wir geeigneten Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ auf beliebigen Maßräumen (M, \mathcal{A}, μ) ein Integral zuordnen und insbesondere in Definition 5.7 den Begriff der Treppenfunktionen neu fassen. Für $M = \mathbb{R}$ mit dem Lebesgue-Maß wird dann etwa die Indikatorfunktion von \mathbb{Q} eine Treppenfunktionen im neuen, aber nicht im alten Sinn sein. Wenn beide Begriffe vorkommen, sollte man zur Unterscheidung besser das Wort *einfache Funktion* benutzen.

5.7 Definition

Eine messbare Funktion $f : (M, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, die nur endlich viele Werte annimmt, heißt **einfache Funktion** oder **Treppenfunktion**.

5.8 Bemerkungen

1. Die Menge $\mathcal{T} \equiv \mathcal{T}(M, \mathcal{A})$ der einfachen Funktionen auf dem Messraum (M, \mathcal{A}) ist ein Unterraum des \mathbb{R} -Vektorraums $\text{Abb}(M, \mathbb{R})$ aller reellen Funktionen.
2. Wir werden zunächst Integrale nicht negativer messbarer Funktionen definieren, indem wir sie von unten durch einfache Funktionen aus

$$\mathcal{T}^+ \equiv \mathcal{T}^+(M, \mathcal{A}) := \{f \in \mathcal{T}(M, \mathcal{A}) \mid f \geq 0\}$$

approximieren. ◇

Ist $f \in \mathcal{T}$ mit m -elementigem Bild $f(M) = \{a_1, \dots, a_m\}$, dann sind die Niveaumengen $A_j := f^{-1}(a_j) \subseteq M$ Elemente der σ -Algebra \mathcal{A} , und

$$f = \sum_{j=1}^m a_j \mathbb{1}_{A_j}.$$

Diese Darstellung der einfachen Funktion hat den Vorteil, dass die A_j disjunkt sind. Aber auch für nicht notwendig verschiedene a_j und nicht notwendig disjunkte messbare A_j ist $\sum_{j=1}^m a_j \mathbb{1}_{A_j}$ eine einfache Funktion.

5.9 Satz $f : M \rightarrow [0, \infty]$ ist genau dann messbar, wenn es eine Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von $u_n \in \mathcal{T}^+$ gibt mit $u_n \uparrow f$.

Beweis:

- Das Supremum messbarer Funktionen ist nach Satz 5.4 messbar.

- Ist umgekehrt $f : M \rightarrow [0, \infty]$ messbar, dann konstruieren wir eine monotone Folge von $u_n \in \mathcal{T}^+$ wie folgt. Wir quantisieren f , bei Wegschneiden großer Werte, indem wir für den Feinheitsparameter $n \in \mathbb{N}$ und die Indexmenge $I_n := \{0, \dots, n2^n\}$ die folgenden Mengen definieren:

$$A_{j,n} := \begin{cases} f^{-1}([j2^{-n}, (j+1)2^{-n})) & , j \in \{0, \dots, n2^n - 1\} \\ f^{-1}([n, \infty]) & , j = n2^n \end{cases} .$$

- Wegen der Messbarkeit von f sind die $A_{j,n} \in \mathcal{A}$, d.h. messbar,
- Als Urbilder disjunkter Intervalle sind die $(A_{j,n})_{j \in I_n}$ disjunkt,
- und $\bigcup_{j \in I_n} A_{j,n} = M$.

Wir setzen $u_n := \sum_{j \in I_n} j 2^{-n} \mathbb{1}_{A_{j,n}}$, ersetzen also jeweils durch den unteren Intervallwert. Damit ist $u_n \in \mathcal{T}^+$ und $u_n \leq f$.

- Die Partition $\{A_{j,n+1} \mid j \in I_{n+1}\}$ verfeinert $\{A_{j,n} \mid j \in I_n\}$, es ist also

$$u_{n+1} \geq u_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

- Für $f(x) < \infty$ und $n \geq f(x)$ ist $u_n(x) \geq f(x) - 2^{-n}$, für $f(x) = \infty$ ist $u_n(x) = n$. Also folgt $u_n \uparrow f$. \square

Es sei jetzt (M, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum (ein wichtiges Beispiel ist $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d, \beta^d)$ mit dem Lebesgue–Borel-Maß β^d).

5.10 Definition Für eine einfache Funktion $f = \sum_{j=1}^m a_j \mathbb{1}_{A_j} \in \mathcal{T}^+(M, \mathcal{A})$ mit m -elementigem Bild $f(M) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ und Niveaumengen $A_j := f^{-1}(\alpha_j)$ heißt

$$\int_M f d\mu := \sum_{j=1}^m \alpha_j \mu(A_j) \in [0, \infty]$$

das $(\mu-)$ **Quasi-Integral von f** , bzw. das **Integral von f** , falls $\int_M f d\mu < \infty$,

Das Praktische an dieser Definition ist, dass sie auch für andere Darstellungen $f = \sum_{k=1}^n \beta_k \mathbb{1}_{B_k}$ mit nicht notwendig disjunkten, messbaren B_k funktioniert.

5.11 Lemma Dann gilt $\sum_{k=1}^n \beta_k \mu(B_k) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mu(A_j)$.

Beweis: B_k ist die disjunkte Vereinigung der $B_{k,j} := B_k \cap A_j$, also

$$\sum_{k=1}^n \beta_k \mu(B_k) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \beta_k \mu(B_{k,j}) .$$

Für alle $j = 1, \dots, m$ zerlegen die messbaren Mengen

$$C_{j,I} := \bigcap_{k \in I} B_{k,j} \cap \bigcap_{k \in \{1, \dots, n\} \setminus I} M \setminus B_{k,j} \quad (I \subseteq \{1, \dots, n\})$$

die Menge A_j , und für $C_{j,I} \neq \emptyset$ ist $\sum_{k \in I} \beta_k = \alpha_j$. Also ist

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \beta_k \mu(B_{k,j}) &= \sum_{j=1}^m \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}} \left(\sum_{k \in I} \beta_k \right) \mu(C_{j,I}) \\ &= \sum_j \alpha_j \sum_I \mu(C_{j,I}) = \sum_j \alpha_j \mu(A_j). \end{aligned} \quad \square$$

Zwar ist $\mathcal{T}^+(M, \mathcal{A})$ im Gegensatz zu $\mathcal{T}(M, \mathcal{A})$ kein Vektorraum. Wir können also noch nicht sagen, dass dieses Integral eine lineare Abbildung sei, aber jedenfalls verletzt unsere Abbildung

$$\int_M \bullet d\mu : \mathcal{T}^+(M, \mathcal{A}) \longrightarrow [0, \infty]$$

bis auf die Möglichkeit des Wertes Unendlich keine der Desiderata eines Integrals, also Reproduktion des Maßes, Linearität und Monotonie:

- $\int_M \mathbb{1}_A d\mu = \mu(A) \quad (A \in \mathcal{A})$
- $\int_M (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_M f d\mu + \beta \int_M g d\mu \quad (\alpha, \beta \geq 0, f, g \in \mathcal{T}^+)$
- $\int_M f d\mu \leq \int_M g d\mu \quad (f \leq g \in \mathcal{T}^+)$

Bis jetzt haben wir nur die endliche Additivität von μ genutzt. Um messbare Funktionen zu integrieren, brauchen wir die σ -Additivität:

5.3 Integration messbarer Funktionen

Für den Messraum (M, \mathcal{A}) bezeichnen wir mit $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}(M, \mathcal{A})$ die Menge der messbaren numerischen Funktionen $f : M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ und setzen

$$\mathcal{M}^+ \equiv \mathcal{M}^+(M, \mathcal{A}) := \{f \in \mathcal{M}(M, \mathcal{A}) \mid f \geq 0\}.$$

Ist $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ ein Maß, dann definieren wir für $f \in \mathcal{M}^+$

$$\int_M f d\mu := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_M u_n d\mu, \quad (5.1)$$

für eine Folge von einfachen Funktionen $u_n \in \mathcal{T}^+(M, \mathcal{A})$ mit $u_n \uparrow f$.

Nach Satz 5.9 gibt es überhaupt so eine Folge von u_n , und wegen der Monotonie des Integrals $\int_M : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ existiert auch der Limes in $[0, \infty]$. Wir müssen noch überprüfen, ob dieser Limes von der Wahl der Folge abhängt.

5.12 Satz Für jede monoton wachsende Folge von $u_n \in \mathcal{T}^+$ und $v \in \mathcal{T}^+$ mit $v \leq u := \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ gilt $\int_M v d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_M u_n d\mu$.

Beweis: Sei $v = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}$ mit $A_j \in \mathcal{A}$ disjunkt. Für $\beta > 1$ setze

$$B_n := \{x \in M \mid \beta u_n(x) \geq v(x)\} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Diese Mengen sind messbar, und $B_n \uparrow M$. Da μ wie jedes Maß von unten stetig ist (Satz 3.28), gilt

$$\begin{aligned} \int_M v d\mu &= \sum_{j=1}^m \alpha_j \mu(A_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m \alpha_j \mu(A_j \cap B_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_M v \mathbb{1}_{B_n} d\mu \leq \beta \lim_{n \rightarrow \infty} \int_M u_n d\mu \quad (\beta > 1). \end{aligned}$$

Im Limes $\beta \searrow 1$ ergibt sich die Behauptung. \square

5.13 Bemerkungen

1. Dieser Satz impliziert, dass das Integral von $f \in \mathcal{M}^+$ wohldefiniert ist, denn für eine zweite f monoton approximierende Folge von einfachen Funktionen $v_k \in \mathcal{T}^+$ ist $v_k \leq \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$, also $\int_M v_k d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_M u_n d\mu$.
2. Monotonie und Linearität (bei Multiplikation mit positiven Zahlen) übertragen sich von \mathcal{T}^+ auf \mathcal{M}^+ . \diamond

5.14 Satz Für $f \in \mathcal{M}^+(M, \mathcal{A})$ gilt $\int_M f d\mu = 0$ genau dann, wenn

$$\mu(f^{-1}((0, \infty])) = 0.$$

Beweis:

- Für $A := f^{-1}((0, \infty])$ und $A_n := f^{-1}((\frac{1}{n}, \infty])$ gilt $A_n \uparrow A$.
- Ist $\int_M f d\mu = 0$, dann wegen $\frac{1}{n} \mathbb{1}_{A_n} \leq f$ auch $\mu(A_n) = \int_M \mathbb{1}_{A_n} d\mu = 0$ ($n \in \mathbb{N}$). Die Stetigkeit des Maßes von unten impliziert dann $\mu(A) = 0$.
- Ist umgekehrt $\mu(A) = 0$, dann ist wegen $\infty \mathbb{1}_A \geq f$ und $\infty \cdot 0 = 0$ (Def. 5.1)

$$0 \leq \int_M f d\mu \leq \infty \int_M \mathbb{1}_A d\mu = \infty \mu(A) = 0. \quad \square$$

Unter bestimmten Bedingungen kann man den Limes in das Integral hineinziehen. Das haben wir schon bei der Definition (5.1) von $\int_M f d\mu$ von $f \in \mathcal{M}^+(M, \mathcal{A})$ mit einer Folge einfacher Funktionen $u_n \in \mathcal{T}^+(M, \mathcal{A})$ und $u_n \uparrow f$ gesehen, also unter Monotonievoraussetzung. Diese Monotonievoraussetzung ist auf messbare numerische Funktionen verallgemeinerbar, weshalb der folgende Satz auch der Satz von der monotonen Konvergenz heißt.

5.15 Satz (Beppo Levi) Für $f_n \in \mathcal{M}^+(M, \mathcal{A})$, $f_n \uparrow f$ gilt

$$\int_M f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_M f_n d\mu. \quad (5.2)$$

Beweis:

- Der Limes f liegt nach Satz 5.4 in \mathcal{M}^+ , denn $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \sup_{n \rightarrow \infty} f_n$.
- Wegen der Monotonie des Integrals ist $\int_M f d\mu \geq \int_M f_n d\mu$, also gilt die Ungleichung " \geq " in (5.2).
- Ist $u \in \mathcal{T}^+$, $u \leq f$, dann sind für $\beta > 1$ die $B_n := \{x \in M \mid \beta f_n(x) \geq u(x)\}$ messbar, mit $B_n \uparrow M$ und $\beta f_n \geq u \mathbb{1}_{B_n} \in \mathcal{T}^+$ und $u \mathbb{1}_{B_n} \uparrow u$. Es folgt

$$\int_M u d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_M u \mathbb{1}_{B_n} d\mu \leq \beta \lim_{n \rightarrow \infty} \int_M f_n d\mu \quad (\beta > 1),$$

also $\int_M u d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_M f_n d\mu$. Daraus folgt wegen der Definition (5.1) von $\int_M f d\mu$ die umgekehrte Ungleichung " \leq " in (5.2). \square

Gegenbeispiel bei Verletzung der Monotoniebedingung:

Für $f_n \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}, \mathcal{L}^1)$, $f_n := \frac{1}{n} \mathbb{1}_{[0, n]}$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0$, aber $\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda^1(x) = 1$.

5.16 Definition

Sei $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ ein Maß auf (M, \mathcal{A}) und $f \in \mathcal{M}^+$. Dann heißt

$$f\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty] \quad , \quad A \mapsto \int_M f \mathbb{1}_A d\mu$$

das Maß mit Dichte f in Bezug auf μ .

5.17 Lemma Die Mengenfunktion $f\mu$ ist tatsächlich ein Maß auf (M, \mathcal{A}) .

Beweis: Für disjunkte $A_k \in \mathcal{A}$ und $A := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ ist nach Satz 5.15

$$f\mu(A) = \int_M f \mathbb{1}_A d\mu = \int_M \sum_{k \in \mathbb{N}} f \mathbb{1}_{A_k} d\mu = \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_M f \mathbb{1}_{A_k} d\mu = \sum_{k \in \mathbb{N}} f\mu(A_k),$$

denn $g_n := \sum_{k=1}^n f \mathbb{1}_{A_k} \in \mathcal{M}^+$, und $g_n \uparrow f \mathbb{1}_A$. \square

Bis jetzt können wir nur nicht negative messbare Funktionen integrieren. Da wir aber messbare Funktionen $f : M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eindeutig als Differenz $f = f_+ - f_-$ ihrer (nach Satz 5.5 messbaren) Positiv- und Negativteile

$$f_{\pm} : M \rightarrow [0, \infty] \quad , \quad f_{\pm}(x) := \max(\pm f(x), 0) \quad (5.3)$$

darstellen können, setzen wir

$$\int_M f d\mu := \int_M f_+ d\mu - \int_M f_- d\mu \in \overline{\mathbb{R}},$$

wenn mindestens einer der Summanden endlich ist. $\int_M f d\mu$ heißt dann das **Quasi-Integral** von f . Falls beide Summanden endlich sind, heißt f **integrierbar** oder **integrabel**, und $\int_M f d\mu$ das **Integral** von f .

Ist also f genau dann integrierbar, wenn $|f| = f_+ + f_-$ integrierbar ist? Nicht ganz. Denn wie das Beispiel von $f = \mathbb{1}_V - \mathbb{1}_{[0,1] \setminus V}$ mit einer Vitali-Menge $V \subseteq [0, 1]$ zeigt, kann $|f|$ messbar sein, ohne dass das für f gilt. Also:

5.18 Satz

$f : M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann integrierbar, wenn f messbar und $|f|$ integrierbar.

In ähnlicher Weise definieren wir das Integral von $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ als

$$\int_M f d\mu := \int_M \operatorname{Re}(f) d\mu + i \int_M \operatorname{Im}(f) d\mu, \quad (5.4)$$

soweit beide Summanden definiert sind und nennen f dann wieder integrierbar oder integrabel. Damit wird der Raum¹⁹

$$\mathcal{L}^1(\mu) := \mathcal{L}^1(M, \mu) := \mathcal{L}^1(M, \mathcal{A}, \mu) := \{f : M \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ integrierbar}\} \quad (5.5)$$

zu einem Vektorraum über \mathbb{C} , und

$$\mathcal{L}^1(\mu) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f \longmapsto \int_M f d\mu$$

ist eine lineare Abbildung.

Will man explizit nur reelle Funktionen integrieren, dann schreibt man

$$\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(M, \mu) := \{f : M \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in \mathcal{L}^1(M, \mu)\}.$$

Dies ist dann ein \mathbb{R} -Vektorraum.

Um aus dem \mathbb{C} -Vektorraum $\mathcal{L}^1(M, \mu)$ einen normierten Vektorraum zu machen, führen wir auf ihm zunächst eine Halbnorm ein:

5.19 Definition

- Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und einen \mathbb{K} -Vektorraum V heißt eine Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ **Halbnorm**, wenn für alle $f, g \in V$ und $k \in \mathbb{K}$ gilt:

¹⁹Die Notation $\mathcal{L}^1(M, \mathcal{A}, \mu)$ ist sinnvoll, wenn man besonders auf die σ -Algebra \mathcal{A} hinweisen will. Sonst ist sie etwas länglich. Die Idee bei der Kurzschreibweise $\mathcal{L}^1(\mu)$ ist, dass zur Definition von μ sowieso der Maßraum (M, \mathcal{A}) angegeben werden muss.

- (a) $\|f\| \in [0, \infty)$
- (b) $\|kf\| = |k| \|f\|$
- (c) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$

$(V, \|\cdot\|)$ heißt dann **halbnormierter Vektorraum**.

- Eine Halbnorm $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Norm**, wenn aus $\|f\| = 0$ folgt: $f = 0$.
- Eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem halbnormierten Vektorraum heißt **Cauchy-Folge**, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $\|f_m - f_n\| < \varepsilon$ für alle $m, n \geq N$.
- Eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem halbnormierten Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ **konvergiert** (gegen f), falls es ein $f \in V$ gibt mit $\lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m - f\| = 0$.
 f heißt dann ein **Grenzwert** oder **Limes** der Folge.

Wenn eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $f \in V$ konvergiert, dann ist f genau dann eindeutig, wenn die Halbnorm eine Norm ist.

Eine solche Halbnorm erlaubt die Definition der *offenen Kugel* mit Radius $\varepsilon > 0$ um $f \in V$:

$$U_\varepsilon(f) := \{g \in V \mid \|g - f\| < \varepsilon\}.$$

Sie induziert damit eine Topologie des \mathbb{K} -Vektorraums V (und der obige Konvergenzbegriff stimmt mit dem topologischen von Definition 2.10 überein).

Angewandt auf den Vektorraum der μ -integrierbaren Funktionen ist

$$\|f\| := \int_M |f| d\mu \quad (f \in \mathcal{L}^1(M, \mu))$$

eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^1(M, \mu)$, da das Integral monoton und linear ist sowie die Dreiecksungleichung $|f + g| \leq |f| + |g|$ gilt.

Natürlich sind nicht alle stetigen Funktionen integrierbar. Ein Gegenbeispiel ist die charakteristische Funktion $\mathbb{1}_M$, falls μ ein nicht endliches Maß auf M ist. Immerhin gilt für den Fall des Lebesgue-Maßes:

5.20 Satz Für den Vektorraum $C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ der stetigen Funktionen $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ mit kompaktem Träger gilt:

$$C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}) \subseteq \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \lambda^d).$$

Beweis: Nach Definition von $C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ ist für $f \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ der Träger

$$\text{supp}(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \neq 0\}}$$

kompakt, also abgeschlossen und damit messbar. Mit f ist auch $|f|$ stetig, und $\text{supp}(f) = \text{supp}(|f|)$. Nach Satz 2.41 ist also $c := \sup\{|f(x)| \mid x \in \mathbb{R}^d\} < \infty$,

f ist messbar, und die Majorante $|f|$ von f ist integrierbar, denn $c \mathbb{1}_{\text{supp}(f)}$ ist eine integrierbare Majorante von $|f|$. \square

Man könnte nun denken, dass diese stetigen Funktionen mit kompaktem Träger sehr untypisch für Lebesgue-integrierbare Funktionen sind. Wenn wir sie als Funktionen auffassen, dann ist das wohl der Fall, denn *typischerweise* ist etwa $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \lambda^d)$ an keinem Punkt stetig. Allerdings gilt:

5.21 Satz $C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}) \subseteq \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \lambda^d)$ ist ein dichter Teilraum.

Das heißt, für alle $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \lambda^d)$ gibt es eine Folge von $f_n \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0.$$

Beweis: Da nach Definition des Integrals f in der $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \lambda^d)$ -Halbnorm durch Treppenfunktionen approximiert wird, und diese endliche Linearkombinationen von charakteristischen Funktionen messbarer Mengen $B \subseteq \mathbb{R}^d$ mit endlichem Maß sind, genügt es, letztere durch stetige Funktionen mit kompaktem Träger zu approximieren. Wir können annehmen, dass $\lambda^d(B) > 0$ ist.

- Ist B beschränkt, gibt es nach Satz 4.15 für alle $\delta > 0$ ein Kompaktum $K \subseteq B$, $K \neq \emptyset$ und eine beschränkte offene Menge $U \supseteq B$ mit $\lambda^d(U \setminus K) < \delta$. Wir setzen

$$h : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1] \quad , \quad h(x) := 1 - \min(1, d(x, K)/C),$$

mit $d(x, K) = \inf\{\|x - k\| \mid k \in K\}$ und, da $U^c = \mathbb{R}^d \setminus U$ abgeschlossen ist,

$$C := \text{dist}(U^c, K) > 0,$$

siehe Satz 2.42. h ist stetig, mit $h|_K = 1$, $h|_{\mathbb{R}^d \setminus U} = 0$, also $h \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ und

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbb{1}_B - h| d\lambda^d \leq \lambda^d(U \setminus K) < \delta.$$

- Nicht beschränkte solche $B \subseteq \mathbb{R}^d$ können durch die beschränkten \mathcal{L}^d -messbaren Teilmengen $B_n := \{x \in B \mid \|x\| \leq n\}$ im Maß approximiert werden. \square

5.22 Bemerkung (Koflächenformel)

Es sei $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) := C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \cap C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ und $g \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ mit $\nabla g(x) \neq 0$ für alle $x \in \text{supp}(f)$. Dann gilt die so genannte Koflächenformel

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \|\nabla g(x)\| d\lambda^d(x) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{g^{-1}(t)} f(x) d\mathcal{H}^{d-1}(x) \right) dt.$$

Diese ist eine von vielen Resultaten der *geometrischen Maßtheorie*, siehe FEDERER [Fe] und MORGAN [Mo]. \diamond

5.4 Konvergenzsätze

Mit dem Satz 5.15 über monotone Konvergenz (Beppo Levi) haben wir einen Konvergenzsatz der Maß- und Integrationstheorie kennen gelernt. Die Voraussetzung dieses Satzes, das monotone Wachstum der $f_n : M \rightarrow [0, \infty)$ in $n \in \mathbb{N}$ ist allerdings oft nicht erfüllt. Einen noch häufiger anwendbaren Satz, den von Lebesgue über dominierte Konvergenz, werden wir jetzt kennen lernen. Wie das folgende Lemma von Fatou benutzt sein Beweis den Satz von Beppo Levi.

5.23 Satz (Lemma von Fatou) Für $f_n \in \mathcal{M}^+$ ($n \in \mathbb{N}$) gilt:

$$\int_M \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_M f_n d\mu$$

Beweis: Wir benutzen die monoton wachsende Folge der $g_n := \inf_{k \geq n} f_k \in \mathcal{M}^+$. Für diese ist $g_n \uparrow f := \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k \in \mathcal{M}^+$, also nach Beppo Levi

$$\int_M f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_M g_n d\mu,$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_M g_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_M \inf_{k \geq n} f_k d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} \int_M f_k d\mu = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_M f_n d\mu. \quad \square$$

Intuitiv erwartet man auch, dass die linke Seite im Fatou-Lemma 5.23 eher kleiner ist als die rechte, weil dort über alle Punkte einzeln optimiert wird.

Beim folgenden Satz von Lebesgue ist bemerkenswert, dass wir auf die Positivität der f_n verzichten können.

5.24 Satz über majorisierte Konvergenz (Lebesgue, 1910)

Für die $f_n \in \mathcal{L}^1(M, \mu)$ gebe es eine Majorante $F \in \mathcal{L}^1(M, \mu)$, das heißt: $|f_n| \leq F$ ($n \in \mathbb{N}$). Weiter existiere der punktweise Limes f der f_n . Dann ist $f \in \mathcal{L}^1(M, \mu)$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_M f_n d\mu = \int_M f d\mu.$$

Beweis:

- Als Limes messbarer Funktionen ist f nach Satz 5.4 messbar. Da $|f| \leq F \in \mathcal{L}^1(M, \mu)$, ist auch $f \in \mathcal{L}^1(M, \mu)$.
- Man würde gern das Lemma von Fatou (Satz 5.23) anwenden. Setzt man versuchsweise $g_n := |f - f_n|$, dann kommt allerdings die triviale Ungleichung $\liminf_n \int g_n d\mu \geq 0$ heraus. Umdrehen des Vorzeichens von g_n hilft auch nicht, denn dann wäre g_n nicht in \mathcal{M}^+ .

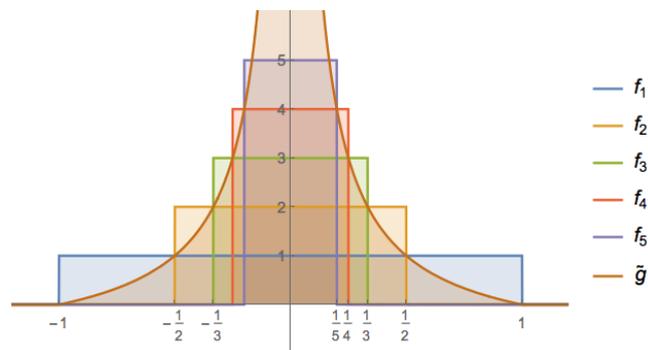


Abbildung 5.1: Bsp. 5.25: Die nicht integrierbare Minorante \tilde{g} an die Majoranten.

- Statt dessen setzt man $g_n := |f| + F - |f - f_n|$, womit $g_n \in \mathcal{M}^+$ ist.
- Fatou liefert mit $\liminf_{n \rightarrow \infty} g_n = |f| + F$:

$$\int_M (|f| + F) d\mu \leq \int_M (|f| + F) d\mu - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_M |f - f_n| d\mu ,$$

also $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\| = 0$, das heißt \mathcal{L}^1 -Konvergenz der f_n gegen f . \square

5.25 Beispiel (Ungleichung im Lemma von Fatou) Für die Funktionenfolge $f_n : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, $f_n = n \mathbb{1}_{[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]}$ ist $\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda^1 = 2$ ($n \in \mathbb{N}$), aber

$$f := \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \quad \text{von der Form} \quad f(x) = \begin{cases} \infty & , x = 0 \\ 0 & , x \neq 0 \end{cases} ,$$

also die linke Seite der Fatou-Ungleichung $\int f d\lambda^1 = 0$. Der Satz von Lebesgue ist hier nicht anwendbar. Denn falls g eine Majorante ist, muss diese größer sein als $\sup_n f_n$, und diese Funktion ist ihrerseits größer als die nicht integrierbare Funktion $\tilde{g} : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, $\tilde{g}(x) := 1/|x| - 1$ für $0 < |x| \leq 1$ und Null sonst (siehe Abbildung 5.1). \diamond

Statt Werten in \mathbb{C} oder \mathbb{R} könnten die f_n auch Werte in $\overline{\mathbb{R}}$ annehmen. Denn wir wissen schon, dass dann $f_n^{-1}(\pm\infty)$ μ -Nullmengen sind.

Anwendungen des Satzes von Lebesgue gibt es wie Sand am Meer. Insbesondere können wir diverse Grenzprozesse mit der Integration vertauschen.

Dazu ein Beispiel:

Eine natürliche Art, Stetigkeit von parameterabhängigen Funktionen im Parameter zu diskutieren, ist, den Parameterraum als metrischen Raum (P, d) anzusetzen und Familien von Abbildungen $f_p \in \mathcal{L}^1(\mu)$ zu betrachten, die für μ -fast alle $m \in M$ stetige Abbildungen

$$P \rightarrow \mathbb{C} \quad , \quad p \mapsto f_p(m)$$

ergeben. Dann gilt folgende Aussage:

5.26 Satz (Parameterabhängige Integrale)

Falls auf einer Umgebung $U \subseteq P$ von $p_0 \in P$ für eine geeignete integrierbare Funktion $g \in \mathcal{M}^+$, $g \in \mathcal{L}^1(M, \mu)$ gilt

$$|f_p| \leq g \quad (p \in U),$$

dann ist das parameterabhängige Integral

$$F : P \rightarrow \mathbb{C} \quad , \quad p \mapsto \int_M f_p d\mu \quad (5.6)$$

stetig in p_0 .

Beweis: Für alle gegen p_0 konvergierenden Folgen $p : \mathbb{N} \rightarrow P$ muss gezeigt werden: $\lim_{n \rightarrow \infty} F(p_n) = F(p_0)$. Wir haben die μ -fast überall geltende punktweise Konvergenz der f_{p_n} gegen f_{p_0} vorausgesetzt. Die f_{p_n} werden durch g dominiert; also liefert der Satz von Lebesgue die Aussage. \square

Dieser Satz lässt sich in mehrere Richtungen verallgemeinern. Z.B. ist auch die Abbildung

$$P \rightarrow \mathcal{L}^1(M, \mu) \quad , \quad p \mapsto f_p$$

bezüglich der $\|\cdot\|_1$ -Halbnorm stetig in p_0 . Ohne die Voraussetzung der Existenz einer integrierbaren Majorante g gilt er jedoch nicht:

5.27 Beispiel

Für Parameterraum $P := \mathbb{R}$, Maßraum $(M, \mu) := (\mathbb{R}, \lambda^1)$ seien die Integranden

$$f_p(x) := \begin{cases} \exp\left(-\left(x - \frac{1}{p}\right)^2\right) & , p \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & , p = 0 \end{cases}.$$

Hier ist zwar für alle $x \in \mathbb{R}$ $p \mapsto f_p(x)$ stetig und $f_p \in \mathcal{L}^1(\lambda^1)$, aber es gibt kein dominierendes $g \in \mathcal{L}^1(\lambda^1)$, und die Abbildung (5.6) ist unstetig bei $p = 0$, denn: $F(0) = 0$, aber (nach Beispiel 6.15) $F(p) = \sqrt{\pi}$ für alle $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. \diamond

5.28 Beispiel (Fourier-Transformation) Durch

$$\hat{f} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C} \quad , \quad \hat{f}(k) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \exp(-i \langle k, x \rangle) dx$$

ist die *Fourier-Transformierte* von $f \in \mathcal{L}^1(\lambda^d)$ definiert. Da $x \mapsto \exp(-i \langle k, x \rangle)$ stetig ist und Betrag Eins hat, existiert das Integral, und $|\hat{f}(k)| \leq \|f\|$ ($k \in \mathbb{R}^d$).

Darüber hinaus ist \hat{f} sogar stetig, weil die Bedingungen von Satz 5.26 erfüllt sind. \diamond

Ähnlich leicht stellt man fest, dass man unter Umständen die Ableitung nach dem Parameter mit der Integration vertauschen kann: Wir nehmen dabei Einfachheit halber an, dass wir nur einen reellen Parameter haben, P also ein reelles Intervall ist.

Wieder gelte für die $f_p : M \rightarrow \mathbb{C} : f_p \in \mathcal{L}^1(M, \mu)$ ($p \in P$), und die partielle Ableitung $\frac{\partial f_p(m)}{\partial p}$ existiere bei $p_0 \in P$ für alle $m \in M$.

5.29 Satz (Differentiation unter dem Integral)

Falls eine Umgebung $U \subseteq P$ von p_0 und ein $g \in \mathcal{L}^1(M, \mu)$ existiert, sodass die $g_p := \frac{f_p - f_{p_0}}{p - p_0}$ auf $U \setminus \{p_0\}$ durch g dominiert werden ($|g_p| \leq g$), dann ist die Abbildung (5.6) bei p_0 differenzierbar mit

$$F'(p_0) = \int_M \left. \frac{\partial f_p(m)}{\partial p} \right|_{p=p_0} d\mu(m).$$

Beweis: Für eine beliebige gegen p_0 konvergierende Folge $p : \mathbb{N} \rightarrow P$ mit $p_n \neq p_0$ muss gezeigt werden:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_M g_{p_n} d\mu = \int_M \lim_{n \rightarrow \infty} g_{p_n} d\mu, \quad (5.7)$$

denn $\lim_{n \rightarrow \infty} g_{p_n} = \left. \frac{\partial f_p}{\partial p} \right|_{p=p_0}$, und $F'(p_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_M g_{p_n} d\mu$, falls der Limes existiert. Gleichung (5.7) ist aber die Aussage des Satzes von Lebesgue. \square

6 Produktmaße und Mehrfachintegrale

Das in der *Analysis I* behandelte Riemann-Integral einer reellen Funktion hatte zwei sich ergänzende Aspekte:

- Eine geometrische Interpretation als 'Fläche unter dem Graphen',
- Eine rechnerische, die etwa ermöglichte, beliebige rationale Funktionen zu integrieren.

Auch für das Lebesgue-Integral einer Funktion mehrerer Variablen ist es wünschenswert, neben dem Nachweis seiner Existenz auch seinen Wert berechnen oder zumindest abschätzen zu können. Dazu wird in Abschnitt 6.2 die mehrdimensionale auf die eindimensionale Integration zurückgeführt. Im ersten Abschnitt dieses Kapitels werden wir aber zunächst die entsprechenden maßtheoretischen Fragen klären, insbesondere den Zusammenhang der Lebesgue-Maße λ^d auf \mathbb{R}^d für verschiedene Dimensionen d .

6.1 Produkt- σ -Algebren und Produktmaße

6.1 Definition

Es seien $(X_i, \mathcal{A}_i)_{i \in I}$ Messräume, $X := \prod_{i \in I} X_i$ das kartesische Produkt und $\pi_j : X \rightarrow X_j$, $(x_i)_{i \in I} \mapsto x_j$ ($j \in I$) die Projektionen auf dessen Faktoren. Dann ist²⁰

$$\bigotimes_{i \in I} \mathcal{A}_i := \sigma \left(\bigcup_{i \in I} \pi_i^{-1}(\mathcal{A}_i) \right) \quad (6.1)$$

die **Produkt- σ -Algebra** auf X .

Die Produkt- σ -Algebra ist damit die kleinste σ -Algebra auf X , bezüglich derer alle Projektionsabbildungen messbar sind.

Da σ -Algebren oft unhandlicher als sie erzeugende Mengensysteme (wie etwa der Halbring \mathcal{I}^d der Intervalle statt der Borel- σ -Algebra $\mathcal{B}^d = \sigma(\mathcal{I}^d)$) sind, ist der folgende Satz nützlich:

6.2 Satz Sind \mathcal{E}_i Erzeuger der σ -Algebren \mathcal{A}_i , dann wird $\sigma \left(\bigcup_{i \in I} \pi_i^{-1}(\mathcal{A}_i) \right)$ von $\bigcup_{i \in I} \pi_i^{-1}(\mathcal{E}_i)$ erzeugt.

Beweis: • Dass die Produkt- σ -Algebra (6.1) die σ -Algebra $\sigma \left(\bigcup_{i \in I} \pi_i^{-1}(\mathcal{E}_i) \right)$ enthält, folgt aus $\mathcal{E}_i \subseteq \mathcal{A}_i$.

• Umgekehrt besagt Satz 4.18, angewendet auf die Projektion $\pi_j : X \rightarrow X_j$, dass diese messbar bezüglich $\sigma \left(\bigcup_{i \in I} \pi_i^{-1}(\mathcal{E}_i) \right)$ ist (also $\pi_j^{-1}(\mathcal{A}_j)$ Teilmenge dieser σ -Algebra ist), weil $\pi_j^{-1}(\mathcal{E}_j) \subseteq \sigma \left(\bigcup_{i \in I} \pi_i^{-1}(\mathcal{E}_i) \right)$ gilt. \square

Das Produkt endlich vieler σ -Algebren $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ schreibt man auch in der Form

$$\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n := \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i.$$

Wegen Satz 6.2 ist das Produkt assoziativ. Zum Beispiel ist

$$(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \otimes \mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_1 \otimes (\mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3),$$

und wir können statt endlicher Produkte ohne Verlust das Produkt nur zweier σ -Algebren diskutieren.

6.3 Lemma Mit dem in (3.3) eingeführten Produkt $*$ von Halbringen ist dann

$$\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 = \sigma(\mathcal{A}_1 * \mathcal{A}_2).$$

Beweis: Denn da für $A_i \in \mathcal{A}_i$ gilt: $A_1 \times X_2 \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \ni X_1 \times A_2$, folgt auch

$$A_1 \times A_2 = (A_1 \times X_2) \cap (X_1 \times A_2) \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2,$$

²⁰Siehe (4.10) für die Definition von $\pi_i^{-1}(\mathcal{A}_i)$.

d.h. $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \supseteq \sigma(\mathcal{A}_1 * \mathcal{A}_2)$. Umgekehrt gilt auch $A_1 \times X_2, X_1 \times A_2 \in \mathcal{A}_1 * \mathcal{A}_2$ und damit

$$(A_1 \times X_2) \cup (X_1 \times A_2) \in \sigma(\mathcal{A}_1 * \mathcal{A}_2),$$

also $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \subseteq \sigma(\mathcal{A}_1 * \mathcal{A}_2)$. \square

6.4 Bemerkung (σ -Algebren des \mathbb{R}^d)

Produkte tauchen im Zusammenhang des Lebesgue-Maßes $\lambda^d : \mathcal{L}^d \rightarrow [0, \infty]$ (siehe (4.9)) und Lebesgue-Borel-Maßes $\beta^d = \lambda^d \upharpoonright_{\mathcal{B}^d} : \mathcal{B}^d \rightarrow [0, \infty]$ auf dem \mathbb{R}^d auf. Dieser lässt sich ja für alle $p = 1, \dots, d-1$ als Produktraum $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{d-p}$ auffassen, und es stellt sich die Frage, ob die σ -Algebren diese Produktstruktur respektieren.

- Tatsächlich gilt für die Borel- σ -Algebren $\mathcal{B}^d = \mathcal{B}^p \otimes \mathcal{B}^{d-p}$ (siehe [EI, III, §5]).
- Aber $\mathcal{L}^d \not\supseteq \mathcal{L}^p \otimes \mathcal{L}^{d-p}$, denn jeder Schnitt (siehe die untenstehende Def. 6.7) einer Menge aus $\mathcal{L}^p \otimes \mathcal{L}^{d-p}$ ist Lebesgue-messbar, im Gegensatz etwa zur Nullmenge $M \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{d-p}$, mit einer Vitali-Menge M , siehe Satz 4.26. \diamond

6.5 Definition Ein Maß $\mu : \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \rightarrow [0, \infty]$ heißt **Produktmaß** der Maße $\mu_i : \mathcal{A}_i \rightarrow [0, \infty]$, wenn gilt

$$\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \mu_2(A_2) \quad (A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2). \quad (6.2)$$

6.6 Satz Es gibt ein solches Produktmaß von μ_1 und μ_2 . Falls die Maße μ_i σ -endlich sind, ist dieses eindeutig. Es wird dann mit $\mu_1 \otimes \mu_2$ bezeichnet.

Beweis:

- Wir zeigen unter Verwendung der Vereinbarung $0 \cdot \infty = 0$ aus Definition 5.1, dass die rechte Seite von (6.2) ein Prämaß $\tilde{\mu}$ auf dem Halbring $\mathcal{A}_1 * \mathcal{A}_2$ definiert.
- Nach dem Fortsetzungssatz 4.7 gibt es dann ein $\tilde{\mu}$ fortsetzendes Maß auf der von diesem Halbring erzeugten σ -Algebra $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$.
- Sind die Maße μ_i σ -endlich, dann auch das Prämaß $\tilde{\mu}$. Nach Korollar 4.23 ist dann das Produktmaß eindeutig. \square

Man möchte aber nicht nur die eindeutige Existenz des Produktmaßes zur Kenntnis nehmen, sondern mit ihm auch messen. Dafür ist die Technik der Schnitte praktisch.

6.7 Definition Für zwei Mengen X_1, X_2 , $A \subseteq X_1 \times X_2$ und $x_1 \in X_1$ heißt

$$A(x_1) := \{x_2 \in X_2 \mid (x_1, x_2) \in A\} \subseteq X_2$$

x_1 -Schnitt von A (siehe Abbildung 6.1).

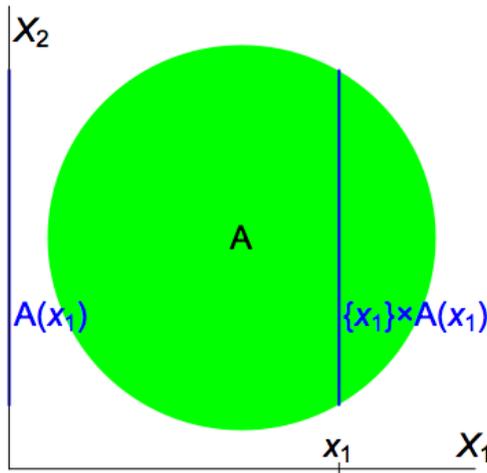


Abbildung 6.1: Schnitt von einer Kreisscheibe $A \subseteq X_1 \times X_2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Damit kann das Produktmaß von $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ mittels der *Cavalieri-Formel*

$$\mu_1 \otimes \mu_2 (A) = \int_{X_1} \mu_2(A(x_1)) d\mu_1(x_1) \quad (6.3)$$

bestimmt werden. Diese ist zunächst für messbare Mengen A der Form $A_1 \times A_2 \in \mathcal{A}_1 * \mathcal{A}_2$ richtig, denn dann ist $A(x_1) = A_2$ falls $x_1 \in A_1$ und $A(x_1) = \emptyset$ sonst, also

$$\mu_1 \otimes \mu_2 (A) = \mu_2(A_2) \int_{X_1} \mathbb{1}_{A_1}(x_1) d\mu_1(x_1) = \mu_1(A_1) \mu_2(A_2). \quad (6.4)$$

Allgemein gilt:

6.8 Satz Für σ -endliche Maße μ_i stimmt die Cavalieri-Formel (6.3).

Beweis: • Es muss zunächst gezeigt werden, dass die Schnitte $A(x_1)$ messbar sind, also Elemente der σ -Algebra \mathcal{A}_2 von X_2 sind. Das folgt daraus, dass das System derjenigen $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, für die das immer gilt, selbst eine σ -Algebra bildet. Denn dieses enthält ja nach (6.4) $\mathcal{A}_1 * \mathcal{A}_2$, ist dann also gleich $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$.

• Der nächste Schritt besteht darin, die Meßbarkeit der Abbildungen

$$f_A : X_1 \rightarrow [0, \infty] , \quad x_1 \mapsto \mu_2(A(x_1)) \quad (A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$$

nachzuweisen. Jedenfalls gilt dies wieder für $A \in \mathcal{A}_1 * \mathcal{A}_2$. Es reicht also wieder zu zeigen, dass diese A eine σ -Algebra bilden. Hier geht die σ -Endlichkeit von μ_2 ein (siehe Lemma 23.2 in [Ba]).

• Die Cavalieri-Formel folgt dann mit dem Eindeutigkeitssatz 4.20, angewandt auf den durchschnittsstabilen Erzeuger $\mathcal{A}_1 * \mathcal{A}_2$ von $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. \square

6.9 Beispiel (Maß der Kreisscheibe)

Wir betrachten $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i) := (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \beta)$ und die Kreisscheibe

$$A := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\} \subseteq X_1 \times X_2.$$

Deren Lebesgue–Borel–Maß ist nach der Cavalieri–Formel (siehe Abbildung 6.1)

$$\beta^2(A) = \int_{\mathbb{R}} \beta(A(x_1)) dx_1 = \int_{-1}^1 2\sqrt{1-x_1^2} dx_1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos^2(\varphi) d\varphi = \pi.$$

Im vorletzten Schritt wurde $x_1 = \sin(\varphi)$ substituiert, also $\sqrt{1-x_1^2} = \cos(\varphi)$. \diamond

6.10 Bemerkung (Produktmaße und Wahrscheinlichkeitstheorie)

Unendliche Produktmaße können im Allgemeinen nicht sinnvoll definiert werden, da ja schon für eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ positiver Zahlen das Produkt $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ nicht einmal uneigentlich konvergieren muss. Das ist aber für Folgen mit $a_n \in [0, 1]$ der Fall. Entsprechend existieren unter sehr schwachen Voraussetzungen Produktmaße von Wahrscheinlichkeitsmaßen (und sie sind wichtig für so genannte *stochastische Prozesse*), siehe KLENKE [Kl, Kap. 14]. \diamond

6.2 Der Satz von Fubini

Der folgende, oft auch nach Tonelli benannte Satz ermöglicht die schrittweise Ausführung mehrdimensionaler Integrale.

6.11 Satz (Fubini)

Es seien (X, \mathcal{A}, μ) und (Y, \mathcal{B}, ν) σ -endliche Maßräume. Dann gilt:

(a) Für alle $f \in \mathcal{M}^+(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ sind die numerischen Funktionen

$$x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y) \quad \text{und} \quad y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$$

$$\text{messbar, und } \int_{X \times Y} f d\mu \otimes d\nu = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x).$$

(b) Ist $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ -messbar und eines der drei Integrale

$$\int_{X \times Y} |f| d\mu \otimes d\nu, \quad \int_X \left(\int_Y |f(x, y)| d\nu(y) \right) d\mu(x), \quad \int_Y \left(\int_X |f(x, y)| d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

endlich, dann sind alle drei gleich, und das gilt dann auch für f statt $|f|$.

Beweis: • Der Satz reduziert sich für charakteristische Funktionen $f = \mathbb{1}_A$ messbarer Mengen $A \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ auf die Cavalieri–Formel, also auf Satz 6.8.

• Damit gilt er auch für alle Treppenfunktionen $f \in \mathcal{T}^+(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$.

• $f \in \mathcal{M}^+(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ kann man durch eine monotone Folge von Treppenfunktionen approximieren, weshalb Aussage (a) gilt.

• Aussage (b) beweist man durch Zerlegung von f in Real- und Imaginärteil und weiter in Positiv- und Negativteile. \square

Die Endlichkeitsvoraussetzung in (b) kann man nicht weglassen lassen:

6.12 Beispiel (Cauchy)

Die Ableitung des Arcustangens ist ²¹ $\frac{d}{dz} \arctan z = \frac{1}{1+z^2}$. Damit gilt für $x, y > 0$:

$$\frac{\partial}{\partial y} \arctan\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{-x/y^2}{1+x^2/y^2} = \frac{-x}{x^2+y^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \arctan\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{2x^2-(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Also ist mit $f(x, y) := \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy &= \int_0^1 \frac{-x}{x^2+y^2} \Big|_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^1 \frac{-1}{1+y^2} dy \\ &= \arctan(0) - \arctan(1) = -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

und analog $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx = \frac{\pi}{4}$, denn der Integrand wechselt beim Austausch von x und y sein Vorzeichen. Das Ergebnis des Doppelintegrals hängt also von der Integrationsreihenfolge ab. Woran liegt das? Wir würden vielleicht erwarten, dass das Doppelintegral gleich dem Lebesgue-Integral

$$\int_Q f(x, y) d\lambda^2(x, y) \quad \text{mit dem Quadrat } Q := [0, 1]^2$$

ist. Aber dem Satz von Fubini hätten wir nicht argumentieren können. Denn dieses Integral existiert nicht, weil der Integrand f nicht in $\mathcal{L}^1(Q, \lambda^2|_Q)$ ist. Das Doppelintegral (in beliebiger Reihenfolge) des Betrags von f divergiert nämlich:

$$\begin{aligned} \int_Q |f(x, y)| d\lambda^2(x, y) &= 2 \int_0^1 \left(\int_y^1 f(x, y) dx \right) dy = 2 \int_0^1 \left[\frac{-x}{x^2+y^2} \right]_y^1 dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{-2}{1+y^2} + \frac{1}{y} \right) dy = +\infty. \end{aligned}$$

Wir haben hier benutzt, dass f auf $\{(x, y) \in Q \mid x > y\}$ stetig und positiv ist. \diamond

Jetzt werden wir die praktischen Konsequenzen des Satzes 6.11 von Fubini betrachten. Oft handelt es sich bei den Integralen um Lebesgue-Integrale, und da (im Wesentlichen, siehe Bemerkung 6.4)

$$\lambda^d = \lambda^p \otimes \lambda^{d-p} \quad \text{für alle } p = 1, \dots, d-1,$$

gibt er uns eine Vorschrift an die Hand, wie wir mehr- auf eindimensionale Integrale zurückführen und damit berechnen können.

6.13 Beispiele

²¹denn er ist Umkehrfunktion des Tangens mit Ableitung $\tan'(u) = \frac{1}{\cos^2(u)} = 1 + \tan^2(u)$.

1. Auf dem Würfel $W^{(3)}$ mit $W^{(n)} := \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]^n \subseteq \mathbb{R}^n$ soll

$$f : W^{(3)} \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = \cos(x_1 + x_2 + x_3)$$

integriert werden. Wegen der Stetigkeit von f und der Kompaktheit von $W^{(n)}$ ist Fubini anwendbar und liefert nach Iteration

$$I := \int_{W^{(3)}} f \, d\lambda^3 = \int_{W^{(1)}} \int_{W^{(1)}} \left(\int_{W^{(1)}} f(x_1, x_2, x_3) \, d\lambda^1(x_3) \right) d\lambda^1(x_2) d\lambda^1(x_1).$$

Wegen $\sin(\varphi + \pi/2) - \sin(\varphi - \pi/2) = 2 \cos \varphi$ ist das gleich

$$\begin{aligned} I &= \int_{W^{(1)}} \left(\int_{W^{(1)}} 2 \cos(x_1 + x_2) \, d\lambda^1(x_2) \right) d\lambda^1(x_1) \\ &= \int_{W^{(1)}} 4 \cos(x_1) \, d\lambda^1(x_1) = 8 \cos(0) = 8. \end{aligned}$$

2. Der **Große Umordnungssatz** für Doppelreihen besagt: Falls für $(a_{m,n})_{m,n \in \mathbb{N}}$ mit $a_{m,n} \in \mathbb{C}$ die Reihe $\sum_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} |a_{m,n}|$ konvergiert, dann gilt

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} a_{m,n}.$$

Dies ist der Satz von Fubini für den Maßraum $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \text{Zählmaß})$.

3. **Beweis der Formel** $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \frac{\pi^2}{6}$: Siehe ELSTRODT [El, Seite 184]. \diamond

6.3 Die Transformationsformel

Während durch den Satz von Fubini viele Integrale einer analytischen Berechnung zugänglich gemacht werden, lässt die sogenannte **Transformationsformel** die Benutzung von Symmetrien und angepassten Koordinaten im \mathbb{R}^d zu. Im Fall $d = 1$ ist sie unter dem Namen 'Integration durch Substitution' aus der Schule bekannt und das Gegenstück der Kettenregel der Differentialrechnung.

6.14 Satz (Jacobi, 1841) *Es seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $t : X \rightarrow Y$ ein C^1 -Diffeomorphismus. Dann gilt: $f : Y \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann β^d -integrierbar, wenn $f \circ t \cdot |\det(Dt)| : X \rightarrow \mathbb{C}$ β^d -integrierbar ist. Dann gilt:*

$$\int_Y f \, d\beta^d = \int_X f \circ t \cdot |\det(Dt)| \, d\beta^d.$$

Beweis: Es genügt, die Ungleichung

$$\int_Y f d\beta^d \leq \int_X f \circ t |\det(Dt)| d\beta^d \quad (6.5)$$

für $f \in \mathcal{M}^+$ zu zeigen. Denn

- jede reelle Funktion $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Differenz ihrer Positiv- und Negativteile (5.3), und ihr Integral ist entsprechend definiert;
- das Integral (5.4) einer komplexen Funktionen $f : Y \rightarrow \mathbb{C}$ ist durch die Integrale ihres Real- und Imaginärteils definiert;
- die Umkehrung der Ungleichung (6.5) erreicht man durch Benutzung der Umkehrabbildung $t^{-1} : Y \rightarrow X$. Denn nach Definition von C^1 -Diffeomorphismen ist t nicht nur stetig differenzierbar und bijektiv, sondern auch t^{-1} ist stetig differenzierbar, und nach der Kettenregel ist $D \text{Id}_Y = D(t \circ t^{-1}) = D(t) \circ t^{-1} D(t^{-1})$, also $\det(D(t^{-1})) = 1/(\det(Dt) \circ t^{-1})$.

Die Aussage der Transformationsformel stimmt für invertierbare *affine* Abbildungen (also Affinitäten), wie in Abschnitt 4.6 gezeigt wurde.

Nach dem Satz von Taylor lässt sich t in der Nähe von $x_0 \in X$ durch die Affinität $x \mapsto t(x_0) + Dt(x_0)(x - x_0)$ approximieren, mit einem Fehler der Ordnung $o(\|x - x_0\|)$. Das reicht aus zum Beweis von (6.5). Man zerlegt dabei das Integrationsgebiet in Würfel, approximiert in den Würfeln affin und verfeinert diese Zerlegung. Die Details findet man in ELSTRODT [El, V.4]. \square

Tatsächlich gilt diese Transformationsformel nicht nur für das Lebesgue-Borel-Maß β^d , sondern auch für das Lebesgue-Maß λ^d .

6.15 Beispiel (Integral der Gauß-Funktion) Es ist nach Fubini

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2) d\lambda^1(x) \right)^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-\|x\|^2) d\lambda^2(x).$$

Das letztere Integral besitzt in Polarkoordinaten $t(r, \varphi) := r \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$ eine besonders einfache Gestalt. Wähle also als deren Definitions- bzw. Wertebereich

$$X := (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \quad , \quad Y := \mathbb{R}^2 \setminus (-\infty, 0] \times \{0\}.$$

$t : X \rightarrow Y$ ist ein C^1 -Diffeomorphismus mit $\det(Dt)(r, \varphi) = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} = r$.

Da die Halbachse $\mathbb{R}^2 \setminus Y = (-\infty, 0] \times \{0\}$ eine λ^2 -Nullmenge ist, gilt

$$\int_{\mathbb{R}^2} \exp(-\|x\|^2) d\lambda^2(x) = 2\pi \int_{(0, \infty)} \exp(-r^2) r dr = \pi,$$

also $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}$. \diamond

7 Konvergenzbegriffe der Maß- und Integrations- theorie

Typisch für die Analysis ist die Betrachtung von Limiten. Im Kontext der Integrationstheorie werden wir Limiten von Funktionenfolgen $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $f_k \in \mathcal{L}^1(M, \mu)$ untersuchen, aber gleich eine größere Klasse von Funktionenräumen betrachten:

7.1 Definition

- Für eine messbare Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ auf dem Maßraum (M, \mathcal{A}, μ) und $p \in [1, \infty)$ ist $f \in \mathcal{L}^p(M, \mu) \equiv \mathcal{L}^p(\mu)$, falls $|f|^p \in \mathcal{L}^1(M, \mu)$. Dann ist

$$\|f\|_p := \| |f|^p \|^{1/p} = \left(\int_M |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

- Für $p = \infty$ heißt $f \in \mathcal{L}^\infty(M, \mu) \equiv \mathcal{L}^\infty(\mu)$, falls es ein $c \geq 0$ gibt mit $\mu(\{x \in M \mid |f(x)| > c\}) = 0$. Dann ist das **wesentliche Supremum** von f

$$\|f\|_\infty := \inf \left\{ c \geq 0 \mid \mu(\{x \in M \mid |f(x)| > c\}) = 0 \right\}.$$

Die Abbildungen $\|\cdot\|_p : \mathcal{L}^p(M, \mu) \rightarrow [0, \infty)$ sind Halbnormen, wie im nächsten Abschnitt in Satz 7.7 gezeigt wird.

7.1 Ungleichungen in \mathcal{L}^p -Räumen

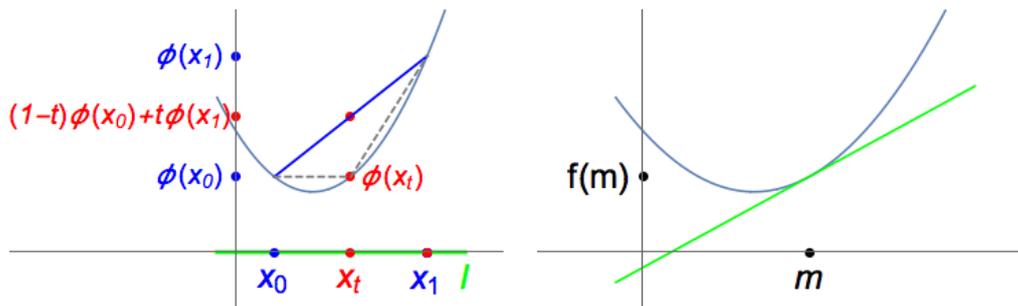


Abbildung 7.1: Links: Konvexe Funktion $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$, rechts: Stützgerade an φ

In der *Analysis II* wurde eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^d$ *konvex* genannt, wenn für $x_0, x_1 \in U$ auch die Konvexkombinationen $x_t := (1-t)x_0 + tx_1$ mit $t \in [0, 1]$ in U liegen. Insbesondere sind die konvexen Teilmengen von \mathbb{R} die Intervalle.

7.2 Definition Eine Funktion $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ heißt **konvex**, wenn für $x_0, x_1 \in I$ gilt (siehe Abbildung 7.1):

$$\varphi(x_t) \leq (1-t)\varphi(x_0) + t\varphi(x_1) \quad (t \in [0, 1]). \quad (7.1)$$

7.3 Bemerkungen (Eigenschaften konvexer Funktionen)

1. Für $x_0 < x_1 \in I$ verläuft der Graph von φ im Intervall $[x_0, x_1]$ unterhalb der Sekante:

$$\varphi(x_t) \leq \varphi(x_0) + \frac{\varphi(x_1) - \varphi(x_0)}{x_1 - x_0}(x_t - x_0). \quad (7.2)$$

Denn $x_t - x_0 = t(x_1 - x_0)$

2. Für $x_0 < x_1 \in I$ und $t \in (0, 1)$ gilt $x_0 < x_t < x_1$, und

$$\frac{\varphi(x_t) - \varphi(x_0)}{x_t - x_0} \leq \frac{\varphi(x_1) - \varphi(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{\varphi(x_1) - \varphi(x_t)}{x_1 - x_t} \quad (7.3)$$

für die Sekantensteigungen (siehe die gestrichelten Geraden in Abb. 7.1, links). Denn die linke Ungleichung ergibt sich durch Umstellung aus (7.2), und die rechte Ungleichung läßt sich analog beweisen.

3. Im Inneren von I ist die konvexe Funktion φ stetig. Denn für $x \in \text{Int}(I)$ existieren wegen der aus (7.3) folgenden Beschränktheit der Sekantensteigungen und ihrer Monotonie in y sogar die links- und rechtsseitigen Ableitungen bei x :

$$\varphi'_-(x) := \lim_{y \uparrow x} \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{x - y} \quad \text{und} \quad \varphi'_+(x) := \lim_{y \downarrow x} \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x}.$$

4. Daraus folgt, dass der Graph von φ immer oberhalb der *Stützgerade*

$$y \mapsto \varphi(x) + \varphi'_-(x)(y - x)$$

an x liegt. ◇

(7.1) lässt sich mit dem Wahrscheinlichkeitsraum (M, \mathcal{A}, μ) , $M := \{0, 1\}$, $\mathcal{A} := 2^M$, $\mu(\{0\}) := 1-t$, also $\mu(\{1\}) := t$ und $f : M \rightarrow I$, $f(i) := x_i$ so formulieren:

$$\varphi\left(\int_M f d\mu\right) \leq \int_M \varphi \circ f d\mu.$$

Die Jensen-Ungleichung verallgemeinert dies, mit Verwendung der Stützgeraden:

7.4 Satz (Jensen)

Es sei $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion auf dem Intervall I und (M, \mathcal{A}, μ) ein Wahrscheinlichkeitsraum. Dann gilt für $f \in \mathcal{L}^1(M, \mu)$ mit $f(M) \subseteq I$:

$$\varphi\left(\int_M f d\mu\right) \leq \int_M \varphi \circ f d\mu, \quad (7.4)$$

wobei das rechte Integral existiert, aber möglicherweise gleich $+\infty$ ist.

Beweis:

- Da $\mu(M) = 1$ ist und $f(M) \subseteq I$, gilt $m := \int_M f d\mu \in I$. Die linke Seite ist also definiert.
- Da φ auf $\text{Int}(I)$ stetig ist und $f \in \mathcal{L}^1(M, \mu)$, ist $\varphi \circ f : M \rightarrow \mathbb{R}$ messbar.
- Es gilt wegen Bemerkung 7.3.4 mit dem Erwartungswert $m \in I$ von f :

$$\varphi(y) \geq \varphi(m) + \varphi'_-(m)(y - m) \quad , \text{ also } \quad \varphi \circ f(x) \geq \varphi(m) + \varphi'_-(m)(f(x) - m).$$

Wegen $\int_M (f - m) d\mu = 0$ folgt daraus zunächst die Endlichkeit des Integrals $\int_M (\varphi \circ f)_- d\mu$ über den Negativteil, also Existenz der rechten Seite von (7.4). Mit $\int_M \varphi(m) d\mu = \varphi(m)$ ergibt sich die Jensen-Ungleichung. \square

Viele Ungleichungen folgen aus der Jensen-Ungleichung:

7.5 Beispiel (Geometrisch–arithmetische Ungleichung)

Für ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $M := \{1, \dots, n\}$ seien die $\alpha_k := \mu(\{k\}) \in (0, 1]$. Es gilt dann für Vektoren $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ mit Einträgen $y_i \geq 0$

$$\prod_{k=1}^n y_k^{\alpha_k} \leq \sum_{k=1}^n \alpha_k y_k.$$

Das ist klar, wenn ein Eintrag $y_k = 0$ ist. Sonst ist wegen der Konvexität der Exponentialfunktion $\varphi := \exp$, mit $f(k) := \log(y_k)$, aus (7.4)

$$\prod_{k=1}^n y_k^{\alpha_k} = \exp\left(\sum_k \alpha_k f(k)\right) = \exp\left(\int_M f d\mu\right) \leq \int_M \exp(f) d\mu = \sum_{k=1}^n \alpha_k y_k.$$

Im Spezialfall der Gleichverteilung, also $\alpha_k = \frac{1}{n}$ ($k = 1, \dots, n$) ergibt sich

$$(y_1 \cdot \dots \cdot y_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k.$$

Für $n = 2$ ist damit $y_1 y_2 \leq \frac{1}{4}(y_1 + y_2)^2$, also $y_1 y_2 \leq \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2)$. \diamond

Die Hölder–Ungleichung verallgemeinert die Cauchy–Schwarz–Ungleichung:

7.6 Satz (Hölder–Ungleichung) Für ein konjugiertes Paar $p, q \in [1, \infty]$, d.h. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ist mit $f \in \mathcal{L}^p(M, \mu)$ und $g \in \mathcal{L}^q(M, \mu)$

$$\int_M |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q. \quad (7.5)$$

Beweis:

- Ist $f \in \mathcal{L}^\infty(M, \mu)$, also $g \in \mathcal{L}^1(M, \mu)$ (oder umgekehrt), dann können wir $|f| \leq \|f\|$ annehmen, und die Schranke aus dem Integral herausziehen.
- Für $p, q \in (1, \infty)$ können wir $f \geq 0, g \geq 0$ voraussetzen, denn mit f ist auch $|f| \in \mathcal{L}^p(M, \mu)$, und der Übergang zum Betrag ändert die linke und rechte Seite von (7.5) nicht.

Wenn wir f, g und das Maß μ auf die messbare Menge $\tilde{M} := g^{-1}((0, \infty]) \subseteq M$ restringieren, dann ändert sich die linke Seite von (7.5) nicht, während sich die rechte Seite höchstens verkleinern kann. Daher können wir von Anfang an annehmen, dass $g > 0$ gilt, der Kehrwert von g also existiert und $\|g\|_q > 0$ ist.

- Die Funktion $f g$ ist in $\mathcal{L}^1(M, \mu)$, denn wegen der Konvexität der Funktion $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ gilt für alle $x \in M$ mit $f(x)g(x) > 0$ und

$$a := p \ln(f(x)) \quad , \quad b := q \ln(g(x))$$

$$f(x)g(x) = \exp\left(\frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b\right) \leq \frac{1}{p} \exp(a) + \frac{1}{q} \exp(b) = \frac{1}{p} f(x)^p + \frac{1}{q} g(x)^q,$$

woraus die Integrierbarkeit von $f g$ folgt.

- Dann ist der Erwartungswert von $F := f g^{-q/p}$ bezüglich des durch

$$\nu(B) := \frac{\int_B g^q d\mu}{\int_M g^q d\mu} \quad (B \in \mathcal{M})$$

definierten Wahrscheinlichkeitsmaßes ν mit Dichte $g^q / \int_M g^q d\mu$ in Bezug auf μ gleich

$$\langle F \rangle \equiv \int_M F d\nu = \frac{\int_M f g^{-q/p} g^q d\mu}{\int_M g^q d\mu} = \frac{\int_M f g d\mu}{\int_M g^q d\mu}.$$

Setzen wir nun $C(t) := |t|^p$, dann ist C konvex, also nach Satz 7.4

$$\langle C \circ F \rangle = \int_M f^p g^{-q} d\nu = \frac{\int_M f^p d\mu}{\int_M g^q d\mu} \geq C(\langle F \rangle).$$

Durch Bildung der p -ten Wurzel folgt

$$\frac{\|f\|_p}{\|g\|_q^{q/p}} = \left(\frac{\int_M f^p d\mu}{\int_M g^q d\mu} \right)^{1/p} \geq \frac{\int_M fg d\mu}{\int_M g^q d\mu} = \frac{\|fg\|_1}{\|g\|_q^q}.$$

Multiplikation dieser Ungleichung mit $\|g\|_q^q$ ergibt (7.5). □

Spezialfall ist wie gesagt die *Cauchy–Schwarz–Ungleichung* für $f, g \in \mathcal{L}^2(M, \mu)$:

$$\int_M |fg| d\mu \leq \|f\|_2 \|g\|_2. \quad (7.6)$$

Eine wichtige Folgerung von Satz 7.6 ist, dass die Dreiecksungleichung gilt. Diese wird auch *Minkowski–Ungleichung* genannt.

7.7 Satz Für $p \in [1, \infty]$ und $f, g \in \mathcal{L}^p(M, \mu)$ gilt $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Beweis:

- $p = 1$ oder $p = \infty$: Hier folgt die Ungleichung aus der Dreiecksungleichung $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$. Also
- $p \in (1, \infty)$ und o.B.d.A. $\int_M |f + g|^p d\mu > 0$. Wir müssen zunächst ausschließen, dass $\int_M |f + g|^p d\mu = \infty$ ist, also zeigen, dass auch $f + g \in \mathcal{L}^p(M, \mu)$:

$$\int_M |f + g|^p d\mu \leq \int_M (2 \max(|f|, |g|))^p d\mu \leq 2^p \int_M (|f|^p + |g|^p) d\mu.$$

Dann ist mit dem zu p dualen Exponenten $q = \frac{1}{1-\frac{1}{p}} \in (1, \infty)$

$$\begin{aligned} \int_M |f + g|^p d\mu &\leq \int_M |f| |f + g|^{p-1} d\mu + \int_M |g| |f + g|^{p-1} d\mu \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} (\|f\|_p + \|g\|_p) \| |f + g|^{p-1} \|_q \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) \left(\int_M |f + g|^p d\mu \right)^{1-\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Division durch $(\int_M |f + g|^p d\mu)^{1-\frac{1}{p}} \in (0, \infty)$ ist möglich und ergibt

$$\|f + g\|_p = \left(\int_M |f + g|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \quad \square$$

7.8 Korollar Für $p \in [1, \infty]$ ist $\mathcal{L}^p(\mu)$ ein \mathbb{C} -Vektorraum mit Halbnorm $\|\cdot\|_p$.

Beweis: Die messbaren Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ bilden einen \mathbb{C} -Vektorraum V . Die Teilmenge $\mathcal{L}^p(\mu)$ von V enthält die Nullfunktion, mit $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ ist wegen Satz 7.7 $\|f + g\|_p < \infty$, und $\|kf\|_p = |k| \|f\|_p$ ($k \in \mathbb{C}$), also

$$f + g \in \mathcal{L}^p(\mu) \quad \text{und} \quad kf \in \mathcal{L}^p(\mu).$$

Damit ist $\mathcal{L}^p(M, \mu)$ ein \mathbb{C} -Vektorraum.

Die Minkowski-Ungleichung zeigt, dass $\|\cdot\|_p$ eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^p(\mu)$ ist. \square

7.9 Beispiel (Lebesgue-Integrabilität)

$$f_c : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto \begin{cases} \left(\frac{|\sin(\|x\|)}{\|x\|} \right)^c, & x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

ist für alle Parameterwerte $c \in [0, \infty)$ stetig, also messbar (siehe Abbildung 7.2).

Die Aussage $f_c \in \mathcal{L}^p(\lambda^d)$ ist gleichbedeutend mit $f_{c'} \in \mathcal{L}^1(\lambda^d)$ für $c' := pc$.

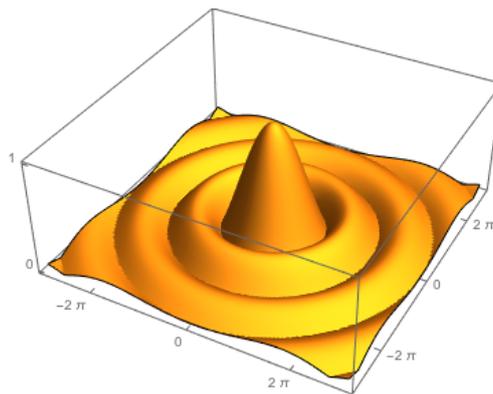


Abbildung 7.2: Die Funktion $f_c : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ für $c = 1$

Sie ist wahr, falls $c' > d$, für $c' \in [0, d]$ aber nicht. Das zeigt man in Dimension $d = 1$ wie in der *Analysis II*. Der Fall $d \geq 2$ kann durch Polarkoordinaten auf ein eindimensionales Integral zurückgeführt werden, denn $f_{c'}$ hängt nur vom Betrag des Arguments ab. Es gilt wegen der Transformationsformel (mit dem Flächeninhalt $c_d := \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$ der Sphäre $S^{d-1} \subseteq \mathbb{R}^d$)

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_{c'} d\lambda^d = c_d \int_0^\infty \left(\frac{|\sin(r)|}{r} \right)^{c'} r^{d-1} d\lambda^1(r),$$

woraus sich die Aussage ergibt. Denn $\frac{|\sin(r)|}{r} \leq \min(1, 1/r)$, und für $c' \in [0, d]$ ist

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left(\frac{|\sin(r)|}{r} \right)^{c'} r^{d-1} d\lambda^1(r) \geq \frac{\int_0^\pi |\sin(r)|^{c'} dr}{(n+1)\pi} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Da die harmonische Reihe divergiert, divergiert die Summe über n . \diamond

In vielen mathematischen Gebieten, etwa in der Theorie partieller Differentialgleichungen, ist die Anwendung von \mathcal{L}^p -Ungleichungen wie der Hölder-Ungleichung tägliches Brot.

7.10 Beispiel Für $(M, \mu) = (\mathbb{N}, \text{Zählmaß})$ und $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ ist

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(n)| \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \text{und} \quad \|f\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|^p\right)^{1/p} \quad (p \in [1, \infty)).$$

Hier gilt also $\|f\|_p = 0$ genau dann, wenn $f = 0$, die $\|\cdot\|_p : \mathcal{L}^p(\mathbb{N}, \mu) \rightarrow [0, \infty)$ sind also Normen.

Etwa für $f(n) := \frac{1}{n \log(n+1)}$ ist $f \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{N}, \mu)$, denn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log(n+1)}$ divergiert. Aber $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{N}, \mu)$ für alle $p \in (1, \infty]$. \diamond

In welchem Verhältnis stehen die Räume $\mathcal{L}^p(M, \mu)$ für verschiedene p ?

- Allgemein ist für das *Zählmaß* μ auf einer Menge M und $p \in [1, \infty)$ höchstens dann $f \in \mathcal{L}^p(M, \mu)$, wenn $|\{m \in M \mid |f(m)| \geq 1\}| < \infty$ ist. Daher gilt *hier*

$$\mathcal{L}^p(\mu) \subseteq \mathcal{L}^q(\mu) \quad , \quad \text{falls} \quad 1 \leq p \leq q \leq \infty.$$

- Ist stattdessen (M, \mathcal{A}, μ) ein *endlicher Maßraum*, also $\mu(M) < \infty$, dann folgt mit Hölder für $f \in \mathcal{L}^q(\mu)$:

$$\|f\|_p = \|f \mathbb{1}_M\|_p \leq \mu(M)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_q,$$

denn mit $r := \frac{q}{p}$, $s := \frac{1}{1 - \frac{1}{r}}$ ist

$$\begin{aligned} \|f \mathbb{1}_M\|_p^p &= \int_M (|f| \mathbb{1}_M)^p d\mu \\ &\leq \left(\int_M |f|^{pr} d\mu\right)^{\frac{1}{r}} \cdot \left(\int_M \mathbb{1}_M^{ps} d\mu\right)^{\frac{1}{s}} = \|f\|_q^p \mu(M)^{p(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})}. \end{aligned}$$

Insbesondere ist

$$\mathcal{L}^q(\mu) \subseteq \mathcal{L}^p(\mu) \quad , \quad \text{falls} \quad 1 \leq p \leq q \leq \infty,$$

entgegen dem Fall eines *Zählmaßes*.

- Für ein *endliches Zählmaß* μ sind die \mathbb{C} -Vektorräume $\mathcal{L}^p(M, \mu)$ also alle einander gleich und isomorph zu \mathbb{C}^n mit $n := |M| < \infty$.
- Für $(M, \mu) = (\mathbb{R}^d, \lambda^d)$ ist die Skala der \mathcal{L}^p -Räume in keiner Richtung ineinander enthalten. Das ergibt sich aus [Beispiel 7.9](#), zusammen mit der folgenden Feststellung: Die Funktionen $f_c : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} \|x\|^{-c} & , 0 < \|x\| \leq 1 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$ sind messbar und für $c \in (0, d/p)$ in $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d, \lambda^d)$, sonst aber nicht.

7.2 Die Banach-Räume $L^p(M, \mu)$

Bis jetzt hat unsere Theorie der Räume $\mathcal{L}^p(M, \mu)$ noch einen Schönheitsfehler: Falls es eine nicht leere μ -Nullmenge $N \subseteq M$ gibt, ist

$$\|\cdot\|_p : \mathcal{L}^p(M, \mu) \rightarrow [0, \infty)$$

keine Norm, sondern nur eine Halbnorm (siehe Seite 66), denn $0 = \mu(N) = \int \mathbb{1}_N d\mu = \int \mathbb{1}_N^p d\mu$ für $p \in [1, \infty)$, also²² $\|\mathbb{1}_N\|_p = 0$. Entsprechend ist dann die durch $\|\cdot\|_p$ erzeugte Topologie auf $\mathcal{L}^p(M, \mu)$ nicht hausdorffsch, siehe Def. 2.8. Andererseits ist

$$\mathcal{N} := \{f : M \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ messbar, } f(x) = 0 \text{ } \mu\text{-fast überall}\}$$

eine Teilmenge aller $\mathcal{L}^p(M, \mu)$, und $\|f\|_p = 0$ genau dann, wenn $f \in \mathcal{N}$. Außerdem ist \mathcal{N} sogar ein Untervektorraum von $\mathcal{L}^p(M, \mu)$. Daher benutzen wir die **Quotientenräume**

$$L^p(M, \mu) := \mathcal{L}^p(M, \mu) / \mathcal{N} \quad (p \in [1, \infty)). \quad (7.7)$$

Wir identifizieren also Funktionen, die sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden.

Da wegen der Dreiecksungleichung $\|f\|_p = \|g\|_p$ für alle $f \in g + \mathcal{N}$ gilt, wird durch $\|[g]\|_p^* := \|g\|_p$ für $g \in \mathcal{L}^p(M, \mu)$ und die Äquivalenzklasse $[g] := g + \mathcal{N}$ eine Norm $\|\cdot\|_p^* : L^p(M, \mu) \rightarrow [0, \infty)$ definiert.

7.11 Bemerkung (\mathcal{L}^p und L^p)

Der Stern unterscheidet die p -Norm $\|\cdot\|_p^*$ von der Halbnorm $\|\cdot\|_p$. Wir lassen diesen aber gleich wieder weg, um weniger schreiben zu müssen.

Es ist auch eine übliche Schlamperei, die Elemente von L^p -Räumen als Funktionen zu bezeichnen, während sie ja nur Äquivalenzklassen von solchen sind.

Allerdings gibt z.B. für ein $\tilde{f} \in L^p(\mathbb{R}^d, \lambda^d)$ unter den Repräsentanten $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d, \lambda^d)$ von \tilde{f} höchstens eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$. Man wird dann sinnvollerweise mit diesem Repräsentanten f arbeiten. \diamond

Wir zeigen abschließend, dass die normierten \mathbb{C} -Vektorräume $(L^p(M, \mu), \|\cdot\|_p)$ vollständig sind, in ihnen also jede Cauchy-Folge konvergiert. Dabei ist es wichtig, schon im $\mathcal{L}^p(M, \mu)$ zwei Konvergenzbegriffe zu unterscheiden. Weder erzwingt nämlich punktweise Konvergenz die Konvergenz im \mathcal{L}^p -Sinn noch umgekehrt:

7.12 Beispiele

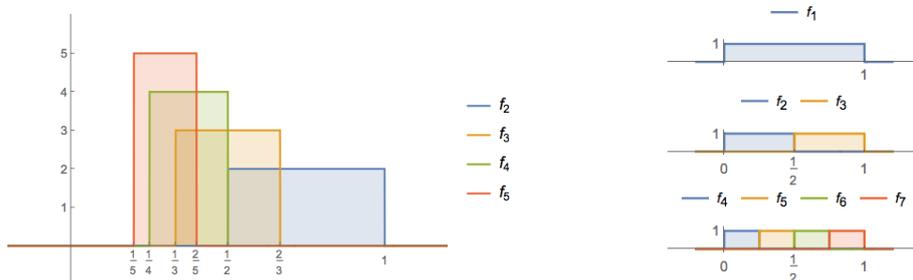


Abbildung 7.3: Die Funktionenfolgen aus Bsp. 7.12.1 (links) und 7.12.2 (rechts)

1. Punktweise, aber nicht im \mathcal{L}^p -Sinn konvergente Folge:

Die Folge skaliert charakteristischer Funktionen von Intervallen (siehe Abbildung 7.3, links)

$$f_k := k \mathbb{1}_{[1/k, 2/k]} \quad (k \in \mathbb{N})$$

liegt für alle $p \in [1, \infty]$ in $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \lambda^1)$, und konvergiert punktweise gegen die Nullfunktion:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Die Folge ist aber keine Cauchy-Folge in $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \lambda^1)$. Denn $\|f_k\|_p = k^{1-\frac{1}{p}} \geq 1$, und für $\ell > 2k$ sind die Intervalle $[1/k, 2/k]$ und $[1/\ell, 2/\ell]$ disjunkt, also $\|f_k - f_\ell\|_p^p = \|f_k\|_p^p + \|f_\ell\|_p^p \geq 1$.

2. Im \mathcal{L}^p -Sinn ($p \in [1, \infty)$), aber nicht punktweise konvergente Folge:

Für $k \in \mathbb{N}$ seien $\nu, q \in \mathbb{N}_0$ durch $\nu := \lfloor \log_2 k \rfloor$ und $q := k - 2^\nu$ definiert, also $0 \leq q < 2^\nu$. Wir wählen die Funktionenfolge (siehe Abbildung 7.3, rechts)

$$f_k := \mathbb{1}_{I_k} \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \lambda^1) \quad \text{mit den Intervallen } I_k := [q 2^{-\nu}, (q+1)2^{-\nu}].$$

Es ist $\|f_k\|_p = 2^{-\nu/p} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, aber für kein $x \in [0, 1]$ existiert der punktweise Limes $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$, denn x ist in mindestens einem, höchstens zwei Intervallen I_k der Länge $2^{-\nu}$ enthalten. \diamond

Diese zweite Feststellung macht den folgenden Satz erstaunlich (man rät nicht so leicht, was f sein könnte):

7.13 Satz (Riesz–Fischer, 1907) Die Räume $\mathcal{L}^p(M, \mu)$ ($p \in [1, \infty]$) sind vollständig. Das heißt, zu jeder Cauchy-Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{L}^p(M, \mu)$ gibt es ein

$$f \in \mathcal{L}^p(M, \mu) \quad \text{mit} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

²²auch für $p = \infty$.

Beweis:

- Betrachte zunächst für $p \in [1, \infty)$ eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ der Cauchy-Folge mit

$$\|f_m - f_{n_k}\|_p \leq 2^{-k} \quad (m \geq n_k). \quad (7.8)$$

Wir zeigen zuerst, dass diese punktweise μ -fast überall gegen ein $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ konvergiert. Für $g_k := f_{n_k} - f_{n_{k+1}}$ ist mit (7.8)

$$\left\| \sum_{k=1}^n |g_k| \right\|_p \leq \sum_{k=1}^n \|g_k\|_p \leq \sum_{k=1}^n 2^{-k} < 1.$$

Der Satz 5.15 über monotone Konvergenz besagt für $G := \sum_{k=1}^{\infty} |g_k|$:

$$\|G\|_p^p = \int_M \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n |g_k| \right)^p d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_M \left(\sum_{k=1}^n |g_k| \right)^p d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^n |g_k| \right\|_p^p \leq 1.$$

Damit ist $G^{-1}(\infty) \subseteq M$ eine μ -Nullmenge, die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ konvergiert also μ -fast überall absolut. Entsprechend gibt es ein $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) = f_{n_1}(x) - \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{k-1} g_{\ell}(x) = f(x) \quad (\mu\text{-fast überall}).$$

- Der Limes messbarer Funktionen ist messbar, also ist f messbar. Ist er aber in $\mathcal{L}^p(M, \mu)$? Das würde natürlich folgern, wenn man sogar zeigen könnte, dass für $m \rightarrow \infty$ das Integral

$$\int_M |f - f_m|^p d\mu \in [0, \infty]$$

gegen Null geht, also sogar Konvergenz im p -ten Mittel vorliegt.

Nun ist nach Definition von f und dem Satz 5.23 von Fatou

$$\begin{aligned} \int_M |f - f_m|^p d\mu &= \int_M \liminf_{k \rightarrow \infty} |f_{n_k} - f_m|^p d\mu \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_M |f_{n_k} - f_m|^p d\mu \leq \varepsilon \quad (m \geq m_0(\varepsilon)), \end{aligned}$$

denn $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist ja eine Cauchy-Folge im Vektorraum $\mathcal{L}^p(M, \mu)$.

- Für $p = \infty$, also die durch das wesentliche Supremum gegebene Halbnorm, ist

$$N := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{x \mid |f_k(x)| > \|f_k\|_{\infty}\} \cup \bigcup_{k, \ell \in \mathbb{N}} \{x \mid |f_{\ell}(x) - f_k(x)| > \|f_{\ell} - f_k\|_{\infty}\}$$

als abzählbare Vereinigung von μ -Nullmengen eine μ -Nullmenge in M . Damit konvergiert die Cauchy-Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{L}^{\infty}(M, \mu)$ auf $M \setminus N$ gleichmäßig.

$$f : M \rightarrow \mathbb{C} \quad , \quad f(x) := \begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) & , x \in M \setminus N \\ 0 & , x \in N \end{cases}$$

ist messbar, und $\|f\|_{\infty} \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \|f_k\|_{\infty} < \infty$. Also ist $f \in \mathcal{L}^{\infty}(M, \mu)$. \square

7.14 Korollar *Damit sind die normierten \mathbb{C} -Vektorräume $L^p(M, \mu)$ für alle $p \in [1, \infty]$ Banach-Räume. $L^2(M, \mu)$ ist ein Hilbert-Raum mit Skalarprodukt*

$$\langle [f], [g] \rangle := \int_M f \bar{g} d\mu \quad (f, g \in \mathcal{L}^2(M, \mu)).$$

Beweis:

- Durch die Bildung von Äquivalenzklassen beim Übergang von $\mathcal{L}^p(M, \mu)$ zu $L^p(M, \mu)$ wird die Eindeutigkeit des Limes der Cauchy-Folge erzwungen.
- Für $f, g \in \mathcal{L}^2(M, \mu)$ ist das Produkt $f\bar{g} : M \rightarrow \mathbb{C}$ messbar. Nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung (7.6) ist $\langle |f|, |\bar{g}| \rangle \leq \|f\|_2 \|g\|_2 < \infty$, also die Abbildung $(f, g) \mapsto \int_M f \bar{g} d\mu$ eine positiv semidefinite Sesquilinearform.²³

Wegen $\langle F, F \rangle = \|F\|_2^2 > 0$ für $F \in L^2(M, \mu) \setminus \{0\}$ ist die auf $L^2(M, \mu)$ induzierte Sesquilinearform positiv definit, also ein Skalarprodukt. \square

²³d.h. linear im ersten, konjugiert linear im zweiten Argument; in der Physik wird die umgekehrte Konvention benutzt.

8 Differentialformen und Mannigfaltigkeiten

In diesem Kapitel werden wir den Satz von Stokes, die Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung auf beliebige Dimensionen, herleiten.

In zahlreichen Anwendungen der Analysis wird *über Untermannigfaltigkeiten* des \mathbb{R}^n *integriert*. Um diese Integration durchzuführen, entwickeln wir den Kalkül der Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten.

Dieser Kalkül lässt auch den *geometrischen Gehalt* physikalischer Theorien wie Elektrodynamik oder Allgemeine Relativitätstheorie klar hervortreten (beispielsweise lassen sich die sogenannten **Maxwell-Gleichungen** der Elektrodynamik mit Differentialformen als $dF = 0$, $d^*F = j$ schreiben, siehe Beispiel 8.18).

Eine gute Einführung gibt das Buch [AF] von AGRICOLA und FRIEDRICH.

8.1 Multilinearformen

Der erste Schritt ist die algebraische Theorie der *äußeren Formen*, denn diese beschreiben das Verhalten der Differentialformen an einem Punkt der Mannigfaltigkeit.

8.1 Definition *Es sei E ein n -dimensionaler reeller Vektorraum. Eine Abbildung $\varphi : E \times \dots \times E \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **multilinear**, wenn sie in jedem Argument linear ist, d.h. für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x_j, x_j^{I/II} \in E$*

$$\varphi(x_1, \dots, x_{j-1}, \lambda x_j, x_{j+1}, \dots, x_k) = \lambda \varphi(x_1, \dots, x_k)$$

und

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j^I + x_j^{II}, x_{j+1}, \dots, x_k) \\ = \varphi(x_1, \dots, x_j^I, \dots, x_k) + \varphi(x_1, \dots, x_j^{II}, \dots, x_k). \end{aligned}$$

*Genauer spricht man bei k Argumenten von einer **k -linearen** Abbildung.*

Einige multilineare Abbildungen sind schon aus der Linearen Algebra vertraut:

8.2 Beispiele (multilineare Abbildungen)

1. $k = 1$. Dann heißt die lineare Abbildung $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ auch eine *Linearform*. Ihr Kern $\ker(\varphi) = \varphi^{-1}(0) \subseteq E$ ist ein Untervektorraum der Dimension

$$\dim(\ker(\varphi)) = \begin{cases} \dim(E) - 1 & , \varphi \neq 0 \\ \dim(E) & , \varphi = 0 \end{cases} .$$

Die Menge E^* der Linearformen auf E enthält die Nullabbildung $0 : E \rightarrow \{0\}$ und wird mit

$$(\phi + \psi)(x) := \phi(x) + \psi(x), \quad (k\phi)(x) := k(\phi(x)) \quad (x \in E, \phi, \psi \in E^*, k \in \mathbb{R})$$

zu einem \mathbb{R} -Vektorraum, dem *Dualraum von E* . Auf $E := \mathbb{R}^n$ mit Standardbasis $e_1, \dots, e_n \in E$ bezeichne $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in E^*$ die *Dualbasis* (d.h. diejenige Basis des Dualraumes E^* von E , für die $\alpha_i(e_j) = \delta_{i,j}$ gilt). Dann ist $\varphi = \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i$ mit Koeffizienten $c_i := \varphi(e_i)$. Also ist $\dim(E^*) = \dim(E) = n$.

2. $k = 2$, $E = \mathbb{R}^n$ mit kanonischem inneren Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Für $A \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$ ist

$$\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x, y) := \langle x, Ay \rangle$$

eine *Bilinearform*. Sie heißt (*anti*-) *symmetrisch*, wenn

$$\varphi(x, y) = \pm \varphi(y, x) \quad (x, y \in E).$$

3. $k = n$, $E = \mathbb{R}^n$. Die n -lineare Abbildung

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) := \det(x_1, \dots, x_n) \quad (x_i \in E)$$

heißt *Determinantenform*. Sie gibt das orientierte Volumen des von x_1, \dots, x_n aufgespannten Parallelotops an. \diamond

Offensichtlich können wir zwei k -lineare Abbildungen φ_1, φ_2 *addieren*, indem wir

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(x_1, \dots, x_k) := \varphi_1(x_1, \dots, x_k) + \varphi_2(x_1, \dots, x_k)$$

setzen und eine k -lineare Abbildung φ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ *multiplizieren*:

$$(\lambda\varphi)(x_1, \dots, x_k) := \lambda(\varphi(x_1, \dots, x_k)).$$

Damit wird (wie für $E^* = L^1(E, \mathbb{R})$) die Menge $L^k(E, \mathbb{R})$ der k -linearen Abbildungen von E in \mathbb{R} zu einem \mathbb{R} -Vektorraum.

8.3 Definition *Es sei E ein n -dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum.*

- Dann heißt $\varphi \in L^k(E, \mathbb{R})$ **äußere k -Form**, wenn sie **antisymmetrisch** ist, d.h. für alle $1 \leq i < l \leq k$ und $x_1, \dots, x_k \in E$ gilt

$$\varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_l, \dots, x_k) = -\varphi(x_1, \dots, x_l, \dots, x_i, \dots, x_k).$$

- Der Unterraum der äußeren k -Formen wird mit $\Lambda^k(E) \subseteq L^k(E, \mathbb{R})$ bezeichnet.

8.4 Beispiele Betrachten wir die Beispiele 8.2:

1. $\Lambda^1(E) = L^1(E, \mathbb{R}) = E^*$.
2. $(x, y) \mapsto \langle x, Ay \rangle$ definiert eine äußere 2-Form auf \mathbb{R}^n genau dann, wenn die Matrix A antisymmetrisch ist.
3. Die Determinantenform ist bis auf ihre Vielfachen die einzige äußere n -Form auf dem \mathbb{R}^n . \diamond

8.5 Definition Das äußere Produkt von $\omega_1, \dots, \omega_k \in \Lambda^1(E)$ ist die durch

$$\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k(x_1, \dots, x_k) := \det \begin{pmatrix} \omega_1(x_1) & \dots & \omega_k(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_1(x_k) & \dots & \omega_k(x_k) \end{pmatrix} \quad (x_i \in E)$$

definierte k -lineare Abbildung.

Offensichtlich ist $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k$ eine k -Form, also in $\Lambda^k(E)$.

Insbesondere ist damit für die Dualbasis $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ von E^*

$$\alpha_{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{i_k} \in \Lambda^k(E).$$

Wegen der Eigenschaften der Determinante stimmt diese äußere Form bis auf Vorzeichen mit derjenigen überein, bei der i_1, \dots, i_k aufsteigend geordnet sind und ist genau dann $\neq 0$, wenn alle Indizes voneinander verschieden sind.

Wir können nun jede k -Form $\omega \in \Lambda^k(E)$ eindeutig als Linearkombination

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k} \alpha_{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{i_k}$$

mit Koeffizienten

$$\omega_{i_1 \dots i_k} := \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \in \mathbb{R}$$

darstellen. Da die Indexmengen $\{i_1, \dots, i_k\}$ die k -elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$ durchlaufen, gilt für $\dim(E) = n$

$$\dim(\Lambda^k(E)) = \binom{n}{k}.$$

Das äußere Produkt der k -Form ω mit einer l -Form

$$\psi := \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq n} \psi_{j_1 \dots j_l} \alpha_{j_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{j_l}$$

wird nun distributiv als $\omega \wedge \psi \in \Lambda^{k+l}(E)$,

$$\omega \wedge \psi := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k} \psi_{j_1 \dots j_l} \alpha_{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{i_k} \wedge \alpha_{j_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{j_l}$$

definiert. All diejenigen Summanden, bei denen ein Indexpaar $i_r = j_s$ vorkommt, sind gleich Null, denn $\alpha_l \wedge \alpha_l = -\alpha_l \wedge \alpha_l = 0$.

- Offensichtlich ist das äußere Produkt *assoziativ*, d.h. für beliebige äußere Formen auf E gilt

$$(\omega \wedge \psi) \wedge \rho = \omega \wedge (\psi \wedge \rho).$$

- Weiter gilt für eine k -Form ω und eine l -Form ψ

$$\omega \wedge \psi = (-1)^{k \cdot l} \psi \wedge \omega,$$

denn wir müssen $k \cdot l$ -mal 1-Formen kommutieren, um von der einen zur anderen Form zu gelangen.

8.6 Beispiel *Symplektische Form* auf dem \mathbb{R}^{2n}

$$\omega := \sum_{i=1}^n \alpha_i \wedge \alpha_{i+n} \in \Lambda^2(\mathbb{R}^{2n}).$$

Für $n = 2$ ergibt sich

$$\omega = \alpha_1 \wedge \alpha_3 + \alpha_2 \wedge \alpha_4,$$

also

$$\begin{aligned} \omega \wedge \omega &= (\alpha_1 \wedge \alpha_3 + \alpha_2 \wedge \alpha_4) \wedge (\alpha_1 \wedge \alpha_3 + \alpha_2 \wedge \alpha_4) \\ &= \underbrace{\alpha_1 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_3}_0 + \alpha_2 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_3 \\ &\quad + \alpha_1 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_4 + \underbrace{\alpha_2 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_4}_0 \\ &= (-1)^3 \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4 + (-1)^1 \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4 \\ &= -2\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4. \end{aligned}$$

Die symplektische Form ω hat eine Schlüsselrolle in der klassischen Mechanik. Dort bezeichnet man die Koordinaten x_1, \dots, x_n als Impulskordinaten, die Koordinaten x_{n+1}, \dots, x_{2n} als Ortskoordinaten. \diamond

8.7 Beispiel Wir betrachten jetzt speziell den \mathbb{R}^3 , also unseren Anschauungsraum, und ordnen Vektoren $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3 \in \mathbb{R}^3$ verschiedene äußere Formen zu:

- Allgemein vermittelt das kanonische innere Produkt im \mathbb{R}^n einen Isomorphismus

$$v \mapsto v^* \quad , \quad v^*(w) := \langle v, w \rangle \quad (w \in \mathbb{R}^n)$$

des \mathbb{R}^n und seines Dualraumes. Die 1-Form v^* besitzt dabei die Gestalt

$$v^* = \sum_{i=1}^n v_i \alpha_i \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n).$$

- $v \in \mathbb{R}^n$ wird auch eine $(n-1)$ -Form $\omega_v \in \Lambda^{n-1}(\mathbb{R}^n)$,

$$\omega_v(w_2, \dots, w_n) := \det(v, w_2, \dots, w_n) \quad (w_2, \dots, w_n \in \mathbb{R}^n)$$

zugeordnet. Speziell im \mathbb{R}^3 finden wir die 2-Form

$$\omega_v = v_1 \alpha_2 \wedge \alpha_3 + v_2 \alpha_3 \wedge \alpha_1 + v_3 \alpha_1 \wedge \alpha_2.$$

- Das äußere Produkt zweier solcher 1-Formen ergibt auf dem \mathbb{R}^3 die 2-Form

$$\begin{aligned} v^* \wedge w^* &= (v_1 \alpha_1 + v_2 \alpha_2 + v_3 \alpha_3) \wedge (w_1 \alpha_1 + w_2 \alpha_2 + w_3 \alpha_3) \\ &= (v_1 w_2 - v_2 w_1) \alpha_1 \wedge \alpha_2 + (v_2 w_3 - v_3 w_2) \alpha_2 \wedge \alpha_3 \\ &\quad + (v_3 w_1 - v_1 w_3) \alpha_3 \wedge \alpha_1 \\ &= \omega_{v \times w}. \end{aligned}$$

Wir haben auf diese Weise das *Kreuzprodukt*

$$v \times w = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$$

zweier Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$ gewonnen. ◇

8.8 Satz Die Vektoren $w_1, \dots, w_k \in E^*$ sind genau dann linear abhängig, wenn

$$w_1 \wedge \dots \wedge w_k = 0.$$

Beweis:

- Wenn sie linear abhängig sind, können wir einen Index $i \in \{1, \dots, k\}$ mit $w_i = \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^k c_l w_l$ finden. Damit gilt aber

$$w_1 \wedge \dots \wedge w_k = \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^k c_l w_1 \wedge \dots \wedge w_l \wedge \dots \wedge w_k = 0,$$

denn in jedem Summanden kommt w_l doppelt vor.

- Andernfalls können wir die Vektoren zu einer Basis

$$w_1, \dots, w_n \quad \text{mit} \quad n := \dim(E^*)$$

ergänzen, sodass $w_1 \wedge \dots \wedge w_n \neq 0$ ist. Dann ist aber auch $w_1 \wedge \dots \wedge w_k \neq 0$. □

8.9 Definition *Der reelle Vektorraum*

$$\Lambda^*(E) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Lambda^k(E) \cong \bigoplus_{k=0}^{\dim(E)} \Lambda^k(E)$$

(mit $\Lambda^0(E) := \mathbb{R}$) mit der durch das Dachprodukt gegebenen Multiplikation heißt die **äußere** oder **Grassmann-Algebra** über E .

8.10 Bemerkungen 1. $\dim(\Lambda^*(E)) = 2^{\dim(E)}$, denn $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

2. Für beliebige $k, l \in \mathbb{N}_0$ ist für alle $\omega \in \Lambda^k(E)$ und $\varphi \in \Lambda^l(E)$:
 $\omega \wedge \varphi \in \Lambda^{k+l}(E)$, aber für $m > \dim(E)$ ist $\dim(\Lambda^m(E)) = 0$.

8.11 Definition Für eine lineare Abbildung $f : E \rightarrow F$ endlich dimensionaler \mathbb{R} -Vektorräume und $\omega \in \Lambda^k(F)$ heißt die durch

$$f^*(\omega)(v_1, \dots, v_k) := \omega(f(v_1), \dots, f(v_k)) \quad (v_1, \dots, v_k \in E)$$

definierte k -Form $f^*(\omega)$ die **Zurückziehung** (engl. **pull-back**) von ω mit f .

Es gilt $f^*(\omega) \in \Lambda^k(E)$, denn $f^*(\omega)$ ist k -linear und antisymmetrisch.

8.12 Satz (Pull-back mit $f \in L(E, F)$)

1. Die Abbildung $f^* : \Lambda^*(F) \rightarrow \Lambda^*(E)$ ist linear.
2. Für $g \in L(F, G)$ ist $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.
3. Für die identische Abbildung $\text{Id}_E : E \rightarrow E$ ist $\text{Id}_E^* = \text{Id}_{\Lambda^*(E)}$.
4. Für eine invertierbare Abbildung $f \in \text{GL}(E, F)$ ist $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.
5. $f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*(\alpha) \wedge f^*(\beta)$.

Beweis: Wir beweisen die Behauptungen für die Summanden Λ^k , $k \in \mathbb{N}_0$ von Λ^* : Für alle Vektoren $v_1, \dots, v_k \in E$ gilt

1. Mit $\alpha, \beta \in \Lambda^k(F)$ und $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} f^*(c_1\alpha + c_2\beta)(v_1, \dots, v_k) &= (c_1\alpha + c_2\beta)(f(v_1), \dots, f(v_k)) \\ &= c_1\alpha(f(v_1), \dots, f(v_k)) + c_2\beta(f(v_1), \dots, f(v_k)) \\ &= c_1f^*\alpha(v_1, \dots, v_k) + c_2f^*\beta(v_1, \dots, v_k). \end{aligned}$$

2. $(g \circ f)^*\alpha(v_1, \dots, v_k) = \alpha(g \circ f(v_1), \dots, g \circ f(v_k)) = g^*\alpha(f(v_1), \dots, f(v_k)) = f^* \circ g^*\alpha(v_1, \dots, v_k)$

3. $\text{Id}_E^*(\alpha)(v_1, \dots, v_k) = \alpha(\text{Id}_E(v_1), \dots, \text{Id}_E(v_k)) = \alpha(v_1, \dots, v_k)$.

4. Folgt aus 2. und 3.: $(f^{-1})^*f^* = (f \circ f^{-1})^* = \text{Id}_F^* = \text{Id}_{\Lambda^*(F)}$.

5. Hausaufgabe □

8.2 Differentialformen

Wir wollen nun Differentialformen auf offenen Teilmengen $U \subseteq \mathbb{R}^n$ einführen. Dies definiert auch lokal (in einer Karte) Differentialformen auf n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten.

Eine *Differentialform* ω auf $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine von Ort zu Ort variierende äußere Form, deren Variation wir als glatt voraussetzen.

Wir schreiben eine allgemeine k -Form ω in der *Grundform*

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \in \Omega^k(U), \quad (8.1)$$

wobei die $\omega_{i_1 \dots i_k} \in \Omega^0(U) := C^\infty(U, \mathbb{R})$ sind, und die dx_i den Koordinatenfunktionen $x_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zugeordnete 1-Differentialformen sind ($dx_i \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$). Den Raum der k -Differentialformen schreiben wir ab jetzt zur Unterscheidung vom Raum der äußeren k -Formen mit dem Symbol Ω statt Λ .

Die dx_i sind durch ihre Wirkung auf ein Vektorfeld $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert, und $dx_i(v)(y) := v_i(y)$. 1-Differentialformen machen also aus Vektorfeldern Funktionen, und für k Vektorfelder $v^{(l)} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist für die k -Form ω aus (8.1)

$$\omega(v^{(1)}, \dots, v^{(k)}) := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k} \cdot \det \begin{pmatrix} dx_{i_1}(v^{(1)}) & \dots & dx_{i_k}(v^{(1)}) \\ \vdots & & \vdots \\ dx_{i_1}(v^{(k)}) & \dots & dx_{i_k}(v^{(k)}) \end{pmatrix}.$$

Das Ergebnis ist also eine reelle Funktion auf U .

Die in Abschnitt 8.1 abgeleiteten Rechenregeln für die äußeren Formen übertragen sich auf die Differentialformen.

Auf dem \mathbb{R} -Vektorraum

$$\Omega^*(U) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Omega^k(U) \cong \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(U)$$

der Differentialformen betrachten wir jetzt den *Differentialoperator* d , der durch

- $df := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ für Funktionen $f \in C^\infty(U, \mathbb{R}) = \Omega^0(U)$
- und $d\omega := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} d\omega_{i_1 \dots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ für k -Formen $\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$

definiert ist. d verwandelt eine k -Form also in eine $(k+1)$ -Form.

8.13 Definition

Diese lineare Abbildung $d : \Omega^*(U) \rightarrow \Omega^*(U)$ heißt **äußere Ableitung**.

8.14 Beispiele (äußere Ableitung)

1. Für $\omega \in \Omega^0(\mathbb{R}^3)$ ist $d\omega = \frac{\partial\omega}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\omega}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial\omega}{\partial x_3}dx_3$.

2. Für $\omega = \omega_1dx_1 + \omega_2dx_2 + \omega_3dx_3 \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ ist

$$\begin{aligned} d\omega &= (d\omega_1) \wedge dx_1 + (d\omega_2) \wedge dx_2 + (d\omega_3) \wedge dx_3 \\ &= \left(\frac{\partial\omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\omega_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 + \left(\frac{\partial\omega_3}{\partial x_2} - \frac{\partial\omega_2}{\partial x_3} \right) dx_2 \wedge dx_3 \\ &\quad + \left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x_3} - \frac{\partial\omega_3}{\partial x_1} \right) dx_3 \wedge dx_1. \end{aligned}$$

3. Für $\omega = \omega_{12}dx_1 \wedge dx_2 + \omega_{23}dx_2 \wedge dx_3 + \omega_{31}dx_3 \wedge dx_1 \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ ist

$$d\omega = \left(\frac{\partial\omega_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial\omega_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial\omega_{31}}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

4. Für $\omega \in \Omega^3(\mathbb{R}^3)$ ist $d\omega = 0$. ◇

8.15 Satz d ist eine **Antiderivation**, d.h. für $\alpha \in \Omega^k(U)$ und $\beta \in \Omega^l(U)$ ist

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta.$$

Beweis: Wegen der Linearität von d genügt es, diese Gleichung für Monome

$$\alpha := f \tilde{\alpha} \quad , \quad \beta := g \tilde{\beta} \quad , \quad f, g \in C^\infty(U, \mathbb{R})$$

mit $\tilde{\alpha} := dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ und $\tilde{\beta} := dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l}$ zu beweisen. Es gilt

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= d(f \cdot g) \wedge \tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta} = ((df)g + f(dg)) \wedge \tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta} \\ &= (df)\tilde{\alpha} \wedge g\tilde{\beta} + (-1)^k f\tilde{\alpha} \wedge (dg)\tilde{\beta} = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta. \quad \square \end{aligned}$$

8.16 Satz Auf $\Omega^*(U)$ gilt $\boxed{dd = 0}$.

Beweis:

1. Für $f \in \Omega^0(U)$ ist $ddf = d\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_i} dx_l \wedge dx_i = \sum_{1 \leq r < s \leq n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_r \partial x_s} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_s \partial x_r} \right) dx_r \wedge dx_s = 0$, da wir wegen der Glattheit von f die partiellen Ableitungen vertauschen können.

2. Für $\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \in \Omega^k(U)$ ist

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (d\omega_{i_1 \dots i_k}) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

und daher

$$\begin{aligned} dd\omega &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \left[(dd\omega_{i_1 \dots i_k}) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\ell=1}^k (-1)^\ell d\omega_{i_1 \dots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{\ell-1}} \wedge (ddx_{i_\ell}) \wedge dx_{i_{\ell+1}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \right] \\ &= 0, \end{aligned}$$

denn gemäß Satz 8.15 wird die äußere Ableitung auf die 1-Formen $d\omega_{i_1 \dots i_k}$ und dx_{i_ℓ} angewandt, und nach Teil 1. ist das Ergebnis Null. \square

8.17 Definition Eine Differentialform $\varphi \in \Omega^*(U)$ heißt

- **geschlossen**, wenn $d\varphi = 0$,
- **exakt**, wenn $\varphi = d\psi$ für ein $\psi \in \Omega^*(U)$ gilt.

Nach Satz 8.16 sind exakte Differentialformen geschlossen.

Für k -Formen auf konvexen Teilmengen U des \mathbb{R}^n gilt (für $k \geq 1$) auch die Umkehrung (sogenanntes *Poincaré-Lemma*, siehe [AF]).

8.3 Vektoranalysis

Wir erinnern uns an Beispiel 8.7, in dem wir Vektoren in 1-Formen bzw. $(n-1)$ -Formen umgewandelt haben. Gleiches wollen wir jetzt auch für Vektorfelder und Differentialformen tun. Wir ordnen also mithilfe des kanonischen Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf dem \mathbb{R}^n dem Vektorfeld $v \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$

1. die durch $v^* \in \Omega^1(U)$, $v^*(w) := \langle v, w \rangle$ ($w \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$) definierte 1-Form zu. In Koordinaten ist $v^* = \sum_{i=1}^n v_i dx_i$.
2. Die Zuordnung einer $(n-1)$ -Form $\omega_v \in \Omega^{n-1}(U)$ zum Vektorfeld v wird durch

$$\omega_v(w_1, \dots, w_{n-1}) := \det(v, w_1, \dots, w_{n-1}) \quad (w_i \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)) \quad (8.2)$$

definiert, also durch ihre Anwendung auf $n-1$ Vektorfelder. In Koordinaten ergibt sich $\omega_v = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n(v, \cdot, \dots, \cdot)$, also

$$\omega_v = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} v_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n. \quad (8.3)$$

Dabei bedeutet \widehat{dx}_i Entfernen von dx_i .

Im ersten Fall sieht man die Rechenregel

$$\boxed{\text{grad}(f)^* = df} \quad (8.4)$$

für den *Gradienten*

$$\text{grad}(f) \equiv \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

einer reellen Funktionen f , im zweiten gilt

$$\boxed{\text{div}(v) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = d\omega_v} \quad (8.5)$$

für die *Divergenz*

$$\text{div}(v) \equiv \nabla \cdot v := \sum_{k=1}^n \frac{\partial v_k}{\partial x_k}$$

eines Vektorfeldes v . Denn nach (8.3) ist

$$d\omega_v = \sum_{i,k=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n,$$

und die Summanden sind für $k \neq i$ gleich Null. Da $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ die kanonische Volumenform auf dem \mathbb{R}^n ist, ergibt dies eine Relation, die praktisch nützlich ist.

Speziell für $n = 3$ Dimensionen ist die *Rotation*

$$\text{rot } v \equiv \nabla \times v := \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

des Vektorfeldes v durch die Relation

$$\boxed{\omega_{\text{rot } v} = d(v^*)} \quad (8.6)$$

mit der äußeren Ableitung verknüpft, siehe Beispiel 8.14.2.

- Es ergibt sich aus (8.5), (8.6) und Satz 8.16

$$\text{div}(\text{rot } v) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = d\omega_{\text{rot } v} = ddv^* = 0,$$

also mit $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \neq 0$

$$\boxed{\text{div rot } v = 0.}$$

Diese und ähnliche Relationen sind übrigens, da sie aus $dd = 0$ abgeleitet sind, auch bei einer anderen Wahl der Riemannschen Metrik²⁴ gültig.

- Auch die Relation

$$\boxed{\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0,}$$

die für beliebige glatte Funktionen f gültig ist, entpuppt sich als eine Manifestation des Gesetzes $dd = 0$: Wegen (8.6) und (8.4) gilt

$$\omega_{\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f)} = d(\operatorname{grad} f)^* = dd f = 0.$$

- Als letztes Beispiel für die Nützlichkeit der Differentialformen in der Vektoranalysis soll die Identität

$$\boxed{\operatorname{div}(v \times w) = \langle \operatorname{rot} v, w \rangle - \langle v, \operatorname{rot} w \rangle}$$

abgeleitet werden: Wir haben schon im Beispiel 8.7 gesehen, dass

$$\boxed{v^* \wedge w^* = \omega_{v \times w}} \quad (8.7)$$

gilt, denn die entsprechende Rechenregel für äußere Formen überträgt sich direkt auf Differentialformen im \mathbb{R}^3 . Also gilt unter Benutzung von (8.5), (8.7) und (8.6)

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(v \times w) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 &= d\omega_{v \times w} = d(v^* \wedge w^*) \\ &= (dv^*) \wedge w^* - v^* \wedge dw^* = \omega_{\operatorname{rot} v} \wedge w^* - v^* \wedge \omega_{\operatorname{rot} w} \\ &= (\langle \operatorname{rot} v, w \rangle - \langle v, \operatorname{rot} w \rangle) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3, \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

8.18 Beispiel (Elektromagnetisches Feld)

Die kartesischen Koordinaten x_1, \dots, x_4 auf der Raumzeit \mathbb{R}^4 bezeichnen den Raumpunkt $x := (x_1, x_2, x_3)$ und den Zeitpunkt $t := x_4$. Die *Feldstärke* $F \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$ sei durch

$$F := B_1 dx_2 \wedge dx_3 + B_2 dx_3 \wedge dx_1 + B_3 dx_1 \wedge dx_2 + \sum_{i=1}^3 E_i dx_i \wedge dx_4$$

²⁴**Def.:** Eine **Riemannsche Metrik** auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung $g \in C^\infty(U, \operatorname{Mat}(n, \mathbb{R}))$, wobei $g(x)$ für $x \in U$ eine symmetrische positiv definite Matrix ist. $g(x)$ definiert also ein Skalarprodukt $(Y, Z) \mapsto \langle Y, g(x)Z \rangle$ bei x ; siehe auch [AF, Kapitel 3.2].

gegeben, wobei $E := (E_1, E_2, E_3) \in C^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ das elektrische und $B := (B_1, B_2, B_3) \in C^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ das magnetische Feld bezeichnet.

Die *homogene Maxwell-Gleichung* $dF = 0$ ist äquivalent zu

$$\operatorname{div}_x(B) = 0 \quad , \quad \frac{\partial B}{\partial t} = -\operatorname{rot}_x E.$$

Aus dem Poincaré-Lemma schließen wir auf die Existenz eines so genannten *Eichfeldes* $A \in \Omega^1(\mathbb{R}^4)$ mit $F = dA$. \diamond

Ein weiterer Aspekt von Differentialformen ist ihr Verhalten unter Abbildungen.

8.19 Definition Es seien $U \subseteq \mathbb{R}^m, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} : U \rightarrow V$ glatt. Die **Zurückziehung (pull-back)** $\varphi^*\omega$ der Differentialform

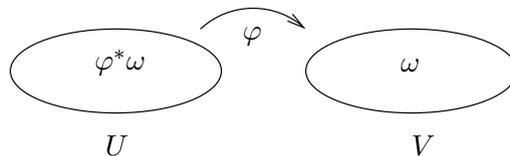
$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \in \Omega^k(V)$$

ist durch

$$\varphi^*\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k} \circ \varphi \cdot d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k}$$

definiert.

Der Pull-back $\varphi^*\omega$ ist also eine k -Form auf $U \subseteq \mathbb{R}^m$.



8.20 Beispiel Die Polarkoordinaten sind durch $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\varphi_1(r, \psi) := r \cos \psi \quad , \quad \varphi_2(r, \psi) := r \sin \psi$$

definiert. Es soll die 2-Form $\omega = f dx_1 \wedge dx_2$ zurückgezogen werden. Mit $\tilde{f} := f \circ \varphi$, also der in Polarkoordinaten geschriebenen Funktion f , ergibt sich wegen

$$d\varphi_1 = \cos(\psi)dr - r \sin(\psi)d\psi \quad , \quad d\varphi_2 = \sin(\psi)dr + r \cos(\psi)d\psi$$

$$\varphi^*\omega = \tilde{f} d\varphi_1 \wedge d\varphi_2 = \tilde{f} r (\cos^2 \psi + \sin^2 \psi) dr \wedge d\psi = \tilde{f} r dr \wedge d\psi.$$

8.21 Satz Für alle $\varphi \in C^\infty(U, V)$ gilt

$$\boxed{\varphi^*d = d\varphi^*}$$

Beweis: Durch Anwendung der Kettenregel. Einerseits gilt

$$\begin{aligned} d\varphi^*(f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) &= d((f \circ \varphi) \cdot d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k}) \\ &= d(f \circ \varphi) \wedge d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k}. \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \varphi^* d(f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) &= \varphi^* \left(\sum_{l=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_l} dx_l \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \right) \\ &= \left(\sum_{l=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_l} \circ \varphi d\varphi_l \right) \wedge d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k}, \end{aligned}$$

wobei $\sum_{l=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_l} \circ \varphi d\varphi_l$ gleich $df \circ \varphi$ ist. □

Durch Spezialisierung auf Diffeomorphismen φ schließen wir aus Satz 8.21, dass die äußere Ableitung einer Differentialform unabhängig vom verwendeten Koordinatensystem definiert ist.

8.4 Integration von Differentialformen

Vorbetrachtung: In der *Analysis I* wurden für geeignete Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Integralbegriffe eingeführt:

- das *Riemannsches Integral* $\int_a^b f(x) dx$, interpretiert als (signierte) Fläche unter dem Graphen von f auf dem Intervall $[a, b]$,
- das *unbestimmte Integral* $\int f(x) dx$, d.h. die Menge aller Stammfunktionen $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F' = f$.

Die Stammfunktionen unterscheiden sich nur durch eine reelle Konstante voneinander.

- Der *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung* verknüpfte die beiden Integralbegriffe folgendermaßen: Für eine beliebige Stammfunktion F von f gilt

$$\int_a^b f dx = F(b) - F(a).$$

Wir beachten, dass

1. auf der rechten Seite der *Rand* $\{a, b\} = \partial I$ des Intervalls $I := [a, b]$ auftaucht, über das auf der linken Seite integriert wird und

2. dass der Integrand $f dx$, als 1-Form aufgefasst, gleich der *äußeren Ableitung* dF der Stammfunktion F ist.

Bei der Integration von geeigneten Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ haben wir den Riemanschen Integralbegriff erweitert, indem wir für geeignete Gebiete $M \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\int_M f dx = \int_{\mathbb{R}^n} f \mathbb{1}_M dx$$

als (signiertes) Volumen unter dem Graphen von f , restringiert auf M , interpretiert haben.

Unbeachtet blieb dabei die Frage, ob auch für $n > 1$ Dimensionen ein Zusammenhang zwischen Integration und Differentiation existiert.

Nun ist die Ableitung einer Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ die 1-Form $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$. Nur für $n = 1$ konnten wir dieser Ableitung wieder eine Funktion (nämlich $f' = \frac{\partial f}{\partial x}$) zuordnen.

Tatsächlich liefert uns, wie wir sehen werden, die Integration von *Differentialformen* k -ter Stufe über k -dimensionale Flächen die adäquate Verallgemeinerung des *Hauptsatzes*, den Satz von Stokes. Wir integrieren zunächst n -Formen auf dem \mathbb{R}^n , und danach k -Formen auf k -dimensionalen Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n .

8.22 Definition Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und $\omega \in \Omega^n(U)$ habe kompakten Träger (d.h. für $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ ist $f(x) = 0$ außerhalb eines Kompaktums $K \subseteq U$). Das **Integral** von ω ist dann

$$\int_U \omega := \int_U f(x) dx_1 \dots dx_n.$$

8.23 Satz Es seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi : V \rightarrow U$ ein Diffeomorphismus mit konstantem Vorzeichen ε von $\det(D\varphi(x))$. Dann gilt

$$\int_V \varphi^* \omega = \varepsilon \int_U \omega.$$

Beweis: Nach Definition des pull-back ist unter Benutzung der *symmetrischen Gruppe* S_n

$$\begin{aligned} \varphi^* \omega &= f \circ \varphi d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_n = f \circ \varphi \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^n \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{i_1}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_{i_n}} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n} \\ &= f \circ \varphi \sum_{\pi \in S_n} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{\pi(1)}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_{\pi(n)}} dx_{\pi(1)} \wedge \dots \wedge dx_{\pi(n)} \\ &= f \circ \varphi \left(\sum_{\pi \in S_n} \text{sign}(\pi) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{\pi(1)}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_{\pi(n)}} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= f \circ \varphi \det(D\varphi) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n. \end{aligned}$$

Nach dem Transformationsatz (Satz 6.14) ergibt die Integration dieser n -Form auf V

$$\int_V f \circ \varphi \det(D\varphi) dx_1 \dots dx_n = \varepsilon \int_V f \circ \varphi |\det D\varphi| dx = \varepsilon \int_U f dx = \varepsilon \int_U \omega. \quad \square$$

Wir sehen insbesondere, dass das Integral über die n -Form ω nicht von der Wahl des (orientierten) Koordinatensystems abhängt.

Betrachten wir $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ als die *Standardvolumenform* auf dem \mathbb{R}^n , dann können wir $\int_U \omega$ auch als Integral der *Funktion* f über U auffassen.

Wenn wir als nächstes Funktionen über k -dimensionale Flächen im \mathbb{R}^n integrieren wollen, müssen wir uns zunächst über die Standardvolumenform klar werden. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und für $n \geq k$

$$\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

eine injektive glatte Abbildung mit $\text{rang}(D\varphi(x)) = k \quad (x \in U)$, also vom maximalen Rang. φ parametrisiert die k -dimensionale Fläche $V := \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$. Gesucht ist nun eine Form $\omega^{(\varphi)} \in \Omega^k(U)$, für die für jedes in V offene $V' \subseteq V$

$$\int_{\varphi^{-1}(V')} \omega^{(\varphi)}$$

der Flächeninhalt von V' ist.

Drei vernünftige Forderungen an die φ -abhängige Definition von $\omega^{(\varphi)}$ sind, dass

- das Quadrat $V' := (0, 1)^k \times \{0\}^{n-k} \subseteq \mathbb{R}^n$ den Flächeninhalt 1 besitzt.
- sich unter einer Drehung $O \in SO(n)$ der Flächeninhalt von V' nicht ändert, und ebenso wenig unter Translationen.
- der Flächeninhalt von V sich nicht ändert, wenn die Parametrisierung (orientierungserhaltend) geändert wird.

Diese Forderungen werden von der riemannschen **Volumenform**

$$\omega^{(\varphi)} := \sqrt{\det(g)} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k \quad (8.8)$$

der parametrisierten Fläche V erfüllt, wobei die symmetrische $k \times k$ -Matrix g durch

$$g := (D\varphi)^\top D\varphi$$

definiert ist, und für reguläre Parametrisierung ($\text{rang}(D\varphi(x)) = k \quad (x \in U)$) wegen

$$\langle v, g(x)v \rangle = \langle D\varphi(x)v, D\varphi(x)v \rangle = \|D\varphi(x)v\|_2^2 > 0 \quad (v \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\})$$

$g(x) > 0$ gilt, die Matrix also positiv definit ist.

g heißt *metrischer Tensor*. $|g|$ bezeichnet in der Literatur oft $\det(g)$.

Ist beispielsweise $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch $\psi = O \circ \varphi$ mit $O \in SO(n)$ gegeben, dann ist g invariant unter der Drehung:

$$(D\psi)^\top D\psi = (OD\varphi)^\top (OD\varphi) = (D\varphi)^\top O^\top OD\varphi = (D\varphi)^\top D\varphi = g.$$

Wir können eine Funktion $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ integrieren, indem wir das Integral

$$\int_U f \circ \varphi \cdot \omega^{(\varphi)}$$

bilden. Dieser Ausdruck ist invariant unter einer Veränderung der Parametrisierung. Der Spezialfall $f = \mathbb{1}_V$ liefert wieder das k -dimensionale Volumen von V .

8.24 Beispiel Wir wollen den Flächeninhalt eines zweidimensionalen **Torus** $M \subseteq \mathbb{R}^3$ berechnen. Dieser sei für Parameter $r_1 > r_2 > 0$ durch $M := \varphi(U)$ mit

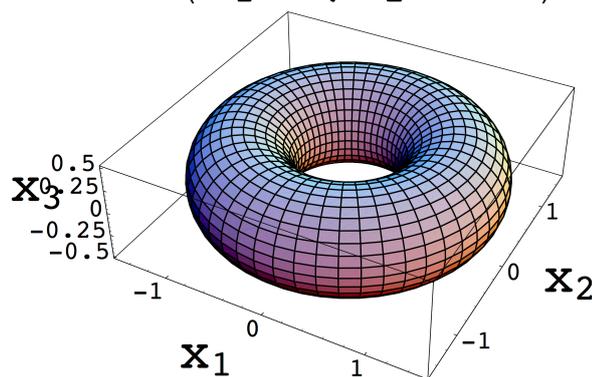
$$\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad U := [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$$

und

$$\varphi(\psi_1, \psi_2) := \begin{pmatrix} (r_1 + r_2 \cos \psi_2) \cos \psi_1 \\ (r_1 + r_2 \cos \psi_2) \sin \psi_1 \\ r_2 \sin \psi_2 \end{pmatrix}$$

parametrisiert. Wir scheren uns nicht weiter um die Tatsache, dass $U \subseteq \mathbb{R}^2$ nicht offen ist, denn der Rand von U ist eine Lebesgue-Nullmenge.

$$M \quad (r_1 = 1, r_2 = 1/2)$$



Die Koeffizienten der Riemannschen Metrik $g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$ mit $g_{21} = g_{12}$ sind

$$\begin{aligned} g_{11}(\psi_1, \psi_2) &= \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \psi_1} \right)^2 = (r_1 + r_2 \cos \psi_2)^2 (\sin^2 \psi_1 + \cos^2 \psi_1) \\ &= (r_1 + r_2 \cos \psi_2)^2 \\ g_{12}(\psi_1, \psi_2) &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \varphi_i}{\partial \psi_1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \psi_2} = r_2 \sin \psi_2 (r_1 + r_2 \cos \psi_2) \sin \psi_1 \cos \psi_1 \\ &\quad - r_2 \sin \psi_2 (r_1 + r_2 \cos \psi_2) \cos \psi_1 \sin \psi_1 \\ &= 0 \\ g_{22}(\psi_1, \psi_2) &= \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \psi_2} \right)^2 = r_2^2 [\sin^2 \psi_2 (\cos^2 \psi_1 + \sin^2 \psi_1) + \cos^2 \psi_1] \\ &= r_2^2, \end{aligned}$$

also $\sqrt{|g|} = \sqrt{\det g} = r_2(r_1 + r_2 \cos \psi_2) > 0$ und damit die Torus-Fläche

$$\int_U \omega^{(\varphi)} = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{|g|} d\psi_1 d\psi_2 = (2\pi)^2 r_1 r_2. \quad \diamond$$

Betrachten wir den im Beispiel vorliegenden Spezialfall einer *Hyperfläche* V des \mathbb{R}^n genauer. $V = \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ besitzt eine Parametrisierung

$$\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{für } U \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \text{ offen.}$$

Auf V existiert ein bis auf Vorzeichen eindeutiges stetiges *Normalenvektorfeld*

$$N : V \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \|N(y)\| = 1 \quad (y \in V),$$

das senkrecht auf V steht, also

$$\langle N \circ \varphi(x), D\varphi(x)w \rangle = 0 \quad (x \in U, w \in \mathbb{R}^{n-1}).$$

Es gilt dann für die $n \times n$ -Matrix $M(x) := (N \circ \varphi(x), D\varphi(x))$

$$M^\top(x)M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{g}(x) & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad (x \in U)$$

also $\det g(x) = \det(M^\top(x)M(x)) = (\det(M(x)))^2$, oder, bei geeigneter Wahl der Orientierung des Normalenvektorfeldes

$$\sqrt{|g|} = \det M. \quad (8.9)$$

Damit ergibt sich für die in (8.2) definierte zum Normalenvektorfeld N duale $(n-1)$ -Form ω_N auf V die Gleichheit zur Volumenform der Hyperfläche V :

8.25 Satz $\varphi^*\omega_N = \omega^{(\varphi)}$ für $\omega^{(\varphi)}$ aus (8.8).

Beweis: Bezeichnen wir mit $\widehat{d\varphi}_k$ wieder das Entfernen von $d\varphi_k$, dann ist

$$\begin{aligned}\varphi^*\omega_N &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} N_k \circ \varphi d\varphi_1 \wedge \dots \wedge \widehat{d\varphi}_k \wedge \dots \wedge d\varphi_n \\ &= \det(M) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}.\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt also aus (8.9). □

Eine weitere wichtige Situation ist die, dass im die k -dimensionale Untermannigfaltigkeit $V \subseteq \mathbb{R}^n$ umgebenden Raum eine k -Form $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ existiert, deren Integral über $V = \varphi(U)$ (mit einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^k$ und durch $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ parametrisiert) wir durch

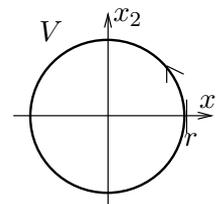
$$\int_V \omega := \int_U \varphi^*\omega$$

definieren. Nach Satz 8.23 ist dieses Integral bis auf das Vorzeichen unabhängig von der Wahl der Parametrisierung.

8.26 Beispiel 1-Form $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$, $\omega := x_1 dx_2$

$$U := [0, 2\pi) \quad , \quad \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$\varphi(\psi) := \begin{pmatrix} r \cos \psi \\ r \sin \psi \end{pmatrix}$, also $V = \varphi(U)$ der Kreis vom Radius $r > 0$ um den Ursprung. Es gilt



$$\int_V \omega = \int_U \varphi^*\omega = \int_U r \cos \psi d(r \sin \psi) = r^2 \int_U \cos^2 \psi d\psi = \pi r^2. \quad \diamond$$

In diesem Beispiel fällt auf, dass das Integral von $d\omega = dx_1 \wedge dx_2$, also dem kanonischen orientierten Flächenelement des \mathbb{R}^2 , über die von V eingeschlossene Kreisscheibe vom Radius r gleich dem Integral von ω über die Kreislinie ist.

Dies ist kein Zufall, sondern die Manifestation eines allgemeinen Satzes, des sogenannten Satzes von Stokes. Dieser stellt eine Beziehung zwischen Integralen über Mannigfaltigkeiten und Integralen über ihren Rand her. Ohne wegen der Kürze der Zeit den allgemeinen Mannigfaltigkeitsbegriff einführen zu können, möchte ich doch kurz das Wichtigste skizzieren.²⁵

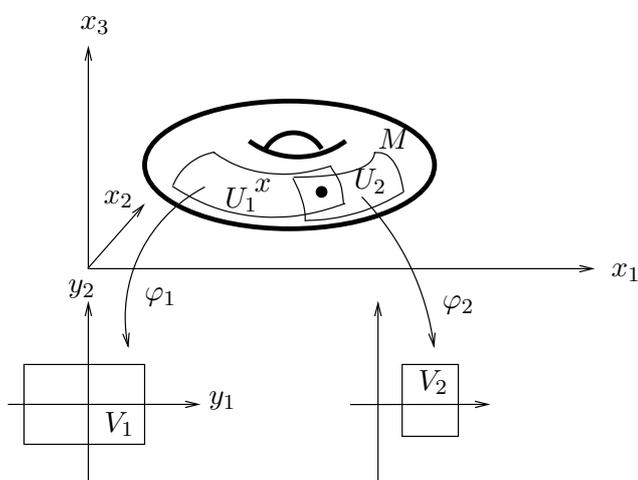
Die in der *Analysis II* eingeführten, in den \mathbb{R}^n eingebettete k -dimensionale Mannigfaltigkeiten $M \subseteq \mathbb{R}^n$ sehen zunächst in einer geeigneten Umgebung $V_x \subseteq M$ jedes ihrer Punkte $x \in M$ wie der \mathbb{R}^k aus:

²⁵Siehe z.B. [AF] und ABRAHAM und MARSDEN [AM, Kapitel 2 und 3] für eine genauere und weitergehende Einführung.

8.27 Definition

Für $k \in \{0, \dots, n\}$ heißt eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ **k -dimensionale Untermannigfaltigkeit** des \mathbb{R}^n , wenn jeder Punkt $x \in M$ eine Umgebung $V_x \subseteq \mathbb{R}^n$ besitzt, so dass für eine geeignete Abbildung $f \in C^1(V_x, \mathbb{R}^{n-k})$ mit regulärem Wert 0 gilt: $M \cap V_x = f^{-1}(0)$.

Das heißt aber nicht, dass die gesamte Mannigfaltigkeit notwendig homöomorph zu irgendeiner offenen Teilmenge des \mathbb{R}^k ist. Beispielsweise ist dies für den in Beispiel 8.24 besprochenen $k = 2$ -dimensionalen Torus M im \mathbb{R}^3 nicht der Fall (denn im \mathbb{R}^2 gibt es keine nicht leere offene Teilmenge, die kompakt ist).



- Wohl aber kann man den topologischen Raum M durch *Kartengebiete*, d.h. offene Teilmengen $U_i \subseteq M$ überdecken, die zu offenen Teilmengen $V_i \subseteq \mathbb{R}^k$ homöomorph sind. Für kompakte Mannigfaltigkeiten genügen endlich viele U_i .
- Die inversen Abbildungen $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i \subseteq \mathbb{R}^k$ (*Kartenabbildungen*) sollen *verträglich* sein, d.h. $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ auf dem Definitionsbereich $\varphi_j(U_i \cap U_j) \subseteq V_j$ glatt.
- Besitzt die Mannigfaltigkeit M einen *Rand*, dann verlangen wir, dass die Kartenbilder V_i als Teilmengen des Halbraums

$$\mathbb{R}_+^k := \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_k \geq 0\}$$

offen sind. Der Rand des Halbraums \mathbb{R}_+^k ist $\partial\mathbb{R}_+^k = \mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}$.

- Der *Rand* ∂M von M ist dann Vereinigung der Mengen $\varphi_i^{-1}(\mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}) \subseteq M$. ∂M ist eine $(k - 1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.

8.28 Beispiel Berandeter halb-unendlicher Zylinder

$$M := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = R^2, x_3 \geq 0\}$$

mit Radius $R > 0$.

Wir können z.B. die folgenden vier Karten (U_i^\pm, φ_i^\pm) , $i = 1, 2$ benutzen:

$$\begin{aligned} U_i^\pm &:= \{x \in M \mid \pm x_i > 0\} \\ \varphi_i^\pm &: U_i^\pm \rightarrow \mathbb{R}_+^2 \\ \varphi_1^\pm(x_1, x_2, x_3) &:= (\pm x_2, x_3) \\ \varphi_2^\pm(x_1, x_2, x_3) &:= (\pm x_1, x_3). \end{aligned}$$

Der Rand des Zylinders ist

$$\partial M = \{x \in M \mid x_3 = 0\},$$

also ein Kreis mit Radius R in der (x_1, x_2) -Ebene des \mathbb{R}^3 . ◇

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung besitzt die folgende Verallgemeinerung:

8.29 Satz (Stokes) *Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine (orientierte) k -dimensionale Mannigfaltigkeit und ω eine $(k-1)$ -Form (mit kompaktem Träger) auf M . Dann gilt*

$$\boxed{\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega}.$$

Beweis:

- Wir beweisen den Satz hier nur für den Fall einer berandeten Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ der vollen Dimension $k = n$. Den Beweis für beliebige, nicht notwendig eingebettete berandete Mannigfaltigkeiten findet man etwa in AGRI-COLA und FRIEDRICH [AF, Kapitel 3.6].

- Nach dem Satz über implizite Funktionen finden wir für jeden Punkt $x \in \partial M$ eine Umgebung $U_i \subseteq M$ von x und eine Kartenabbildung $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i \subseteq \mathbb{R}_+^n$ mit $\partial M \cap U_i = \varphi_i^{-1}(\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$. Da ω nur auf einem Kompaktum von Null verschieden ist, genügen endlich viele Karten.

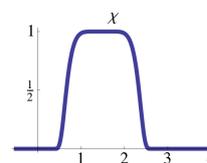
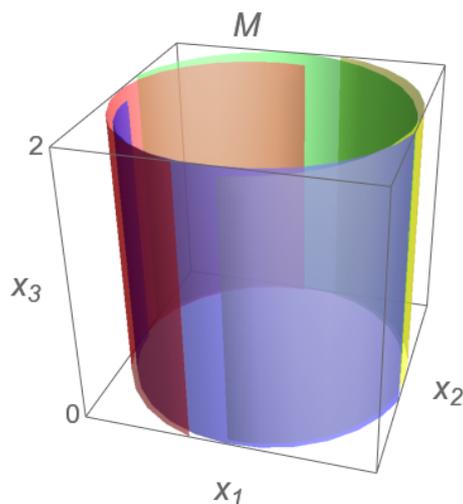
- Wir können nun mit einem Trick die scheinbar einschränkende Voraussetzung $\text{supp}(\omega) \subseteq U_i$ benutzen.

Es gibt nämlich eine glatte *Zerlegung der Eins*, eine Familie von Funktionen $\chi_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit $\chi_i \geq 0$, $\text{supp}(\chi_i) \subseteq U_i$ und $\sum_{i \in I} \chi_i = 1$, siehe Abbildung.

Setzen wir $\omega_i := \chi_i \omega$, dann ist

$$\sum_{i \in I} \omega_i = \omega \quad \text{und} \quad \text{supp}(\omega_i) \subseteq U_i.$$

- Nach oben stehender Definition reicht es aus, die Integration einer $(n-1)$ -Form ω mit im Halbraum \mathbb{R}_+^n gelegenen Träger zu betrachten. Dann lässt sich



(wenn wir wie in Abschnitt 8.4 die Entfernung einer Eins-Form durch einen Hut indizieren) ω in der Form

$$\omega = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} f_k dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{k-1} \wedge \widehat{dx_k} \wedge dx_{k+1} \wedge \dots \wedge dx_n$$

schreiben. Dabei sind die f_k Funktionen mit kompaktem Träger in \mathbb{R}_+^n .

• Nun ist $d\omega = \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_k} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, also

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^n} d\omega &= \sum_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{\partial f_k}{\partial x_k} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f_k}{\partial x_k} dx_k \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{k-1} \wedge \widehat{dx_k} \wedge dx_{k+1} \wedge \dots \wedge dx_n \\ &\quad + (-1)^{n-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_0^\infty \frac{\partial f_n}{\partial x_n} dx_n \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}. \end{aligned}$$

Das innere Integral verschwindet nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für $k = 1, \dots, n-1$.

Für den letzten Summanden ergibt partielle Integration aber

$$\int_0^\infty \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) dx_n = -f_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0),$$

also insgesamt

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} d\omega = (-1)^n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}.$$

• Andererseits ist $\omega|_{\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}} = (-1)^{n-1} f_n dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}$, denn x_n ist auf diesem Unterraum gleich Null, also auch $dx_n|_{\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}} = 0$. Mit der richtigen Wahl der Orientierungen ergibt sich also $\int_{\mathbb{R}_+^n} d\omega = \int_{\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}} \omega$, und damit der Satz von Stokes. \square

8.30 Beispiele (Satz von Stokes)

1. **Kurvenintegral:** Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ das Bild einer (regulären, injektiven) Kurve

$$c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

und $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion.

Dann besteht ∂M aus den Punkten $c(0)$ und $c(1)$. Diese bekommen als Anfangs- und Endpunkte aber unterschiedliche Orientierung, sodass die Formel

$$\int_0^1 \frac{\partial F \circ c}{\partial t}(t) dt = \int_{[0,1]} d(F \circ c) = F \circ c(1) - F \circ c(0) \quad (8.10)$$

entsteht. Ist $F = \tilde{F}|_M$ mit einer glatten Funktion $\tilde{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, dann ist das Integral in (8.10) gleich $\tilde{F}(c(1)) - \tilde{F}(c(0))$, unabhängig von der Wahl des Weges c mit vorgegebenem Anfangs- und Endpunkt.

2. Symplektische 2-Form $\omega = -d\theta = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$ auf dem Phasenraum $P := \mathbb{R}_p^n \times \mathbb{R}_q^n$ mit 1-Form $\theta := \sum_{i=1}^n p_i dq_i$.

Es sei $c : S^1 \rightarrow P$ eine Schleife, deren Bild das Bild M einer Kreisscheibe berandet, d.h.

$$c(S^1) = \partial M.$$

Dann ist das Integral $\int_{\partial M} \theta = -\int_M \omega$, unabhängig von der Wahl von M .

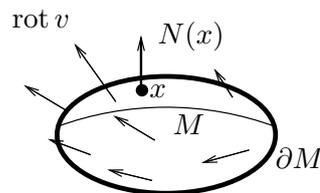
3. **Satz von Kelvin-Stokes:** Wir bleiben bei dem Bild $M = \varphi(\mathbb{D})$ der Einheitskreisscheibe $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^2$. Diese soll aber diesmal im \mathbb{R}^3 liegen.

Weiter sei $v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld. Dann ist v^* eine 1-Form, dv^* eine (auf M integrierbare) 2-Form, und nach (8.6) gilt

$$\omega_{\text{rot } v} = dv^*.$$

Also ist das Integral von dv^* über M gleich dem Integral des Skalarproduktes von $\text{rot } v$ mit der Flächennormale N (bezüglich des Flächenelementes $\sqrt{|g|} dx_1 \wedge dx_2$) und es folgt nach Satz 8.25

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{D}} \langle \text{rot } v, N \rangle \circ \varphi \sqrt{\det(g)} dx_1 \wedge dx_2 \\ &= \int_{\mathbb{D}} \varphi^*(\langle \text{rot } v, N \rangle) \omega^{(\varphi)} = \int_M \langle \text{rot } v, N \rangle \omega_N = \int_M \omega_{\text{rot } v} = \int_M dv^* = \int_{\partial M} v^*. \end{aligned}$$



Beispielsweise könnte v das Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeit sein. Dann sieht man aus der obigen Formel, dass bei Rotationsfreiheit der Strömung die Tangentialkomponente der Geschwindigkeit bezüglich der Schleife ∂M im Mittel verschwindet.

4. **Gaußscher Integralsatz:** Die Divergenz eines Vektorfeldes ist nach (8.5) via

$$\operatorname{div}(v) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = d\omega_v$$

mit der äußeren Ableitung verbunden.

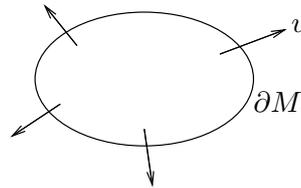
Ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine n -dimensionale berandete Untermannigfaltigkeit (z.B. eine Vollkugel), dann gilt nach dem Satz von Stokes

$$\int_M d\omega_v = \int_{\partial M} \omega_v.$$

Für die Randpunkte $x \in \partial M$ bezeichne $N(x)$ den nach außen gerichteten Normalenvektor (mit $\|N(x)\| = 1$). $v(x)$ lässt sich eindeutig in der Form

$$v(x) = \langle v(x), N(x) \rangle N(x) + w(x) \quad (8.11)$$

schreiben, wobei dann $w(x)$ tangential an ∂M bei x ist, also $\int_{\partial M} \omega_w = 0$ und mit (8.11) $\int_{\partial M} \omega_v = \int_{\partial M} \langle v, N \rangle \omega_N$. Es ergibt sich also



$$\int_M \operatorname{div}(v) dx_1 \dots dx_n = \int_M d\omega_v = \int_{\partial M} \omega_v = \int_{\partial M} \langle v, N \rangle \omega_N.$$

Ist das Vektorfeld divergenzfrei (wie beispielsweise das Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeit), dann fließt also durch die Randfläche ∂M genauso viel aus M heraus wie herein. \diamond

8.31 Zur Geschichte (Satz von Stokes)

Als Faustregel kann man sagen, dass nach Mathematikern benannte Sätze nicht von diesen zum ersten Mal bewiesen wurden. So verhält es sich auch beim Satz von Stokes. Seine komplizierte Entstehungsgeschichte wird im Artikel [Ka] von VICTOR KATZ beleuchtet. Er schreibt:

'All of the mathematicians who stated and proved versions of this theorem were interested in it for specific physical reasons. Gauss was interested in the theory of magnetic attraction, Ostrogradsky in the theory of heat, Green in electricity and magnetism, Poisson in elastic bodies, and Sarrus in floating bodies. In nearly all cases, the theorems involved occurred in the middle of long papers and were

only thought of as tools toward some physical end.'

Der Roman *La formule de Stokes* von MICHÈLE AUDIN [Au] beschäftigt sich literarisch mit dem gleichen Thema. ◇

Anhang

A Das Banach-Tarski-Paradox

Der Inhalt dieses Anhangs wird in dieser Vorlesung nicht weiter benutzt. Er kann bei Interesse studiert werden.

A.1 Satz (Banach und Tarski, [BT])

Es gibt eine Zerlegung der Vollkugel $K := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| \leq 1\}$ in fünf disjunkte Teile, die durch Bewegungen des \mathbb{R}^3 zu zwei disjunkten Kopien von K zusammengesetzt werden können.

Das ist sicher eine der erstaunlichsten Aussagen der Mathematik. Eine (auf Hausdorff zurückgehende) Folgerung ist

A.2 Korollar Das folgende **Inhaltsproblem** ist für $d = 3$ unlösbar:
Gesucht wird ein Inhalt $\nu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$, der (wie das Lebesgue-Maß)

1. Unter Bewegungen invariant ist
2. durch $\nu([0, 1]^d) = 1$ normiert ist.

Damit ist das Inhaltsproblem auch für alle Dimensionen $d \geq 3$ unlösbar. Wie Banach zeigte, ist es für $d = 1$ und $d = 2$ lösbar. Das steht nicht in Widerspruch zur Unlösbarkeit des Maßproblems in diesen Dimensionen (Abschnitt 4.7). Denn die Forderung der σ -Additivität ist restriktiver als die der endlichen Additivität.

In diesem Anhang skizzieren wir den Beweis des Satzes von Banach und Tarski. Ein erstes hier wichtiges Konzept ist das der Gruppenwirkung.

A.3 Definition Eine **Wirkung** einer Gruppe (G, \circ) auf einer Menge M ist eine Familie von Bijektionen $\Phi_g : M \rightarrow M$ ($g \in G$) mit

$$\Phi_e = \text{Id}_M \quad \text{und} \quad \Phi_{g_1} \circ \Phi_{g_2} = \Phi_{g_1 \circ g_2} \quad (g_1, g_2 \in G).$$

Für $m \in M$ heißt die Menge $\{\Phi_g(m) \mid g \in G\} \subseteq M$ der **Orbit** oder die **Bahn** durch m .

A.4 Beispiel (Gruppenwirkung)

Im Satz von Banach und Tarski wirkt die Gruppe \mathbb{E}_d der Bewegungen auf $M = \mathbb{R}^d$. Dabei ist die Gruppe *als Menge* das kartesische Produkt $\mathbb{E}_d = \mathbb{R}^d \times O(d)$, und für $g = (a, A) \in \mathbb{E}_d$ ist $\Phi_g(x) = Ax + a$. Das neutrale Element von \mathbb{E}_d ist $e = (0, \mathbb{1}_d)$, und die Gruppenverknüpfung ist durch die Komposition der Abbildungen definiert, also das **semidirekte Produkt**

$$(a_1, A_1) \circ (a_2, A_2) := (a_1 + A_1 a_2, A_1 A_2). \quad \diamond$$

Oft schreibt man einfach gx statt $\Phi_g(x)$.

Gruppen (G, \circ) wirken auf verschiedene Arten auf sich selbst, z.B. von links:

$$\Phi_g(h) := g \circ h \quad (g, h \in G).$$

Ist $\Phi : G \times M \rightarrow M$, $\Phi(g, m) = \Phi_g(m)$ eine Gruppenwirkung auf einem metrischen Raum (M, d) , dann heißt sie *isometrisch*, wenn

$$d(\Phi_g(m_1), \Phi_g(m_2)) = d(m_1, m_2) \quad (m_1, m_2 \in M, g \in G).$$

Das ist bei den Bewegungen des \mathbb{R}^d der Fall, denn für $g = (A, b) \in \mathbb{E}_d$ ist

$$\begin{aligned} d(\Phi_g(m_1), \Phi_g(m_2)) &= \|\Phi_g(m_1) - \Phi_g(m_2)\| = \|Am_1 + b - (Am_2 + b)\| \\ &= \|A(m_1 - m_2)\| = \|m_1 - m_2\| = d(m_1, m_2). \end{aligned}$$

A.5 Definition Für eine Gruppenwirkung $\Phi : G \times N \rightarrow M$

- heißen $A, B \subseteq M$ **endlich zerlegungsäquivalent**, wenn es für ein $n \in \mathbb{N}$ disjunkte Zerlegungen $A = \dot{\bigcup}_{i=1}^n A_i$ und $B = \dot{\bigcup}_{i=1}^n B_i$ sowie Gruppenelemente $g_1, \dots, g_n \in G$ gibt mit

$$B_i = g_i A_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

- heißt $A \subseteq M$ **endlich G -paradox**, wenn es eine disjunkte Zerlegung $A = A_1 \dot{\cup} A_2$ gibt, sodass A_1 und A_2 endlich zerlegungsäquivalent zu A sind.

Endliche Zerlegungsäquivalenz ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{P}(M)$. Weil sie die Kardinalität erhält, können endliche nicht leere Teilmengen $A \subseteq M$ nicht endlich G -paradox sein.

Wir definieren jetzt eine Gruppe G , deren Linkswirkung auf sich endlich G -paradox ist.

A.6 Definition

Es seien \mathbb{Z}_S und \mathbb{Z}_T zwei disjunkte Kopien der ganzen Zahlen. Die **Freie Gruppe** $\mathbb{F} := \mathbb{F}_2$ über zwei Erzeugern ist das **freie Produkt** von \mathbb{Z}_S und \mathbb{Z}_T . \mathbb{F} besteht also als Menge aus dem neutralen Element e und den endlichen Wörtern der Form

$$k_{\ell_1}^{(1)} k_{\ell_2}^{(2)} \dots k_{\ell_n}^{(n)} \quad \text{mit} \quad \ell_i \neq \ell_{i+1} \in \{S, T\} \quad \text{und} \quad k_{\ell_i}^{(i)} \in \mathbb{Z}_{\ell_i} \setminus \{0\}.$$

Die Multiplikation von Elementen von \mathbb{F} erfolgt durch Verkettung und Kürzung.

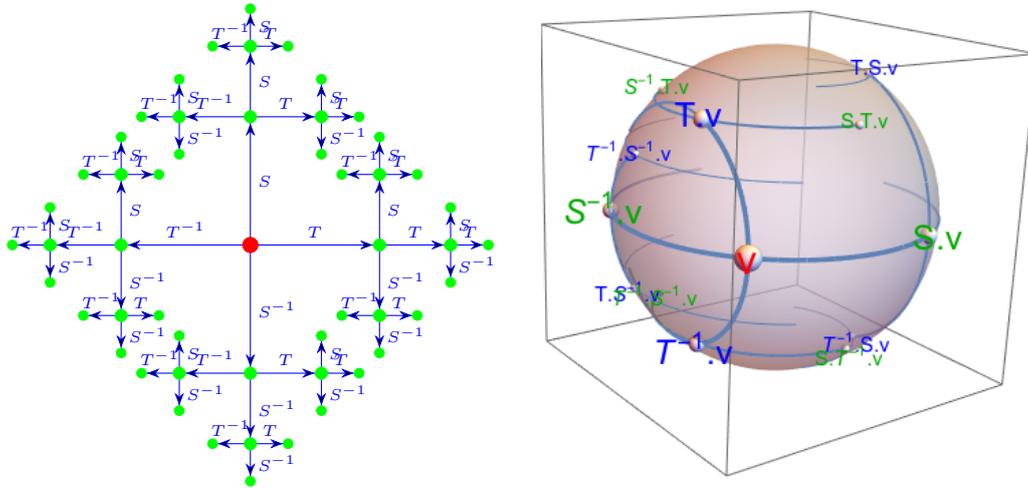


Abbildung A.1: Links: Freies Produkt $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_S \star \mathbb{Z}_T$. Die Eins-Elemente $S \in \mathbb{Z}_S$ und $T \in \mathbb{Z}_T$ erzeugen die Gruppen. Rechts: Bahn des Vektors $v \in S^2$ unter der Wirkung von \mathbb{F}

Beispielsweise ist das Produkt von $3_S(-4)_T(-2)_S$ und $4_S 8_T$ gleich $3_S(-4)_T 2_S 8_T$, und $(3_S(-4)_T(-2)_S)^{-1} = 2_S 4_T(-3)_S$. Insbesondere ist \mathbb{F} nicht abelsch.

Wenn man die Eins aus \mathbb{Z}_S mit S und die Eins aus \mathbb{Z}_T mit T bezeichnen, können wir statt $3_S(-4)_T(-2)_S$ auch $SSST^{-1}T^{-1}T^{-1}T^{-1}S^{-1}S^{-1}$ schreiben. So werden die Elemente von \mathbb{F} zu den Knoten eines gerichteten Graphen (eines so genannten *Cayley-Graphen*), deren Kanten, von e ausgehend, mit S, T, S^{-1} und T^{-1} bezeichnet werden (siehe Abbildung A.1, links).

A.7 Lemma Die Linkswirkung von \mathbb{F} auf sich ist endlich \mathbb{F} -paradox.

Beweis: \mathbb{F} besitzt die disjunkte Zerlegung in die folgenden fünf Teilmengen:

$$\mathbb{F} = \{e\} \dot{\cup} \mathbb{F}_S \dot{\cup} \mathbb{F}_{S^{-1}} \dot{\cup} \mathbb{F}_T \dot{\cup} \mathbb{F}_{T^{-1}}, \quad (\text{A.1})$$

wobei die reduzierten Wörter aus \mathbb{F}_k mit k beginnen. Diese Zerlegung entspricht dem rot gezeichneten neutralen Element e und den vier von ihm ausgehenden 'Ästen' in Abbildung A.1, links. Für die disjunkten Teilmengen $A_S := \mathbb{F}_S \dot{\cup} \mathbb{F}_{S^{-1}} \subseteq \mathbb{F}$ und $A_T := \mathbb{F}_T \dot{\cup} \mathbb{F}_{T^{-1}} \subseteq \mathbb{F}$ gilt:

$$\mathbb{F}_S \dot{\cup} S\mathbb{F}_{S^{-1}} = \mathbb{F} \quad \text{und} \quad \mathbb{F}_T \dot{\cup} T\mathbb{F}_{T^{-1}} = \mathbb{F}.$$

\mathbb{F} ist also endlich zerlegungsäquivalent zu A_S und auch zu A_T . Ein kleiner Schönheitsfehler bleibt: die disjunkte Vereinigung $A_S \dot{\cup} A_T$ ist nicht \mathbb{F} , sondern $\mathbb{F} \setminus \{e\}$. Aber dieser läßt sich reparieren, siehe Exercise 2.2.2 von TERENCE TAO [Ta]. \square

Der nächste Schritt besteht darin, \mathbb{F} in die Drehgruppe $SO(3)$ einzubetten. Das geschieht z.B. dadurch, dass man den beiden Erzeugern S und T von \mathbb{F} die Drehmatrizen

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{8}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{8}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{8}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{8}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

zuordnet und zeigt, dass der dadurch definierte Gruppenhomomorphismus

$$\mathbb{F} \rightarrow SO(3)$$

injektiv ist. Intuitiv sollte es einfach sein, zwei entsprechende Erzeuger zu finden, denn \mathbb{F} ist ja im Gegensatz zu $SO(3)$ abzählbar. Aber um die Injektivität für ein konkretes Paar nachzuweisen, ist ein algebraisches Argument nötig.

$SO(3)$ wirkt auf \mathbb{R}^3 durch Multiplikation, und lässt sich sowohl auf die Einheitsvollkugel K als auch auf deren Rand S^2 einschränken.

Der Orbit durch den Punkt $v := (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0) \in S^2$ ist in Abbildung A.1, rechts dargestellt. Da jede von der Identität verschiedene Drehung auf S^2 genau zwei Fixpunkte besitzt, nämlich die Punkte auf der Drehachse, gibt es nur abzählbar viele $m \in S^2$, für die die Abbildung $G \rightarrow S^2, g \mapsto \Phi_g(m)$ nicht bijektiv ist.

Nach dem Auswahlaxiom können wir für jeden typischen (bijektiven) Orbit $\mathcal{O} \subseteq S^2$ einen Vertreter $x_{\mathcal{O}} \in \mathcal{O}$ wählen. Für jede der fünf disjunkten Mengen in (A.1) bekommen wir durch Wirkung auf die Menge der $x_{\mathcal{O}}$ eine Teilmenge von S^2 – und damit eine paradoxe Zerlegung derselben.

Um die Vollkugel K (bis auf ihren Mittelpunkt $0 \in \mathbb{R}^3$) entsprechend zu zerlegen, multipliziert man die fünf Teilmengen von S^2 mit der Menge $(0, 1]$, setzt sie also radial ins Innere des Balls fort.

So wird gezeigt, dass K endlich \mathbb{E}_3 -paradox ist. Weitere Details findet man zum Beispiel in [Ta, Section 2.2].

Literatur

- [AM] Ralph Abraham, Jerrold E Marsden: *Foundations of Mechanics*. 2. Auflage, Addison-Wesley Publishing, New York, 1987. [In Kapitel 2 und 3 wird eine Einführung in die Analysis auf Mannigfaltigkeiten gegeben]
- [AF] Ilka Agricola, Thomas Friedrich: *Globale Analysis*. Vieweg, 2001
- [Au] Michèle Audin: *La formule de Stokes*. Cassini. Paris, 2016
- [BT] Stefan Banach, Alfred Tarski: *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*. Fundamenta math. **6**, 244–277 (1924)
- [Ba] Heinz Bauer: *Maß- und Integrationstheorie*. 2. Auflage. Berlin: De Gruyter
- [El] Jürgen Elstrodt: *Maß- und Integrationstheorie*. 7. Auflage. Berlin: Springer 2011
- [Fa] Kenneth T. Falconer: *Fraktale Geometrie. Mathematische Grundlagen und Anwendungen*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 1999
- [Fe] Herbert Federer: *Geometric Measure Theory* (Classics in Mathematics). Berlin: Springer, 1996
- [Ha] Paul Halmos: *Measure Theory*. Berlin: Springer 1974
- [Ka] Victor Katz: *The History of Stokes' Theorem*. Mathematics Magazine **52**, 146–156 (1979)
- [KI] Achim Klenke: *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Berlin: Springer, 2008
- [LS] Gerd Laures, Markus Szymik: *Grundkurs Topologie*. Berlin: Springer Spektrum, 2015
- [Mo] Frank Morgan: *Geometric Measure Theory: A Beginner's Guide*. Academic Press, 2008
- [Ta] Terence Tao: *An epsilon of room: pages from year three of a mathematical blog*, 2010

Index

- abgeschlossen 7
- abgeschlossene Hülle 7
- äußere Ableitung 97
- äußere Form 92
- äußeres Maß 38
 - Lebesguesches 45
- äußeres Produkt 93
- Affinität 53
- Algebra (algebraisch; Mengenalgebra) 24
- Antiderivation 98
- Auswahlfunktion 55
- beschränkt 17
- Bewegung 55
- Bilinearform 92
- Borel-Maß 47
- Borel-Mengen 22, 46
- Cantor-Menge 36, 45, 57
- Cauchy-Folge
 - auf halbnormiertem Raum 66
- Cauchy-Schwarz-Ungleichung 84
- Cavalieri-Formel 75
- charakteristische Funktion 24
- Dichte 65
- Differentialform 97
 - exakte 99
 - geschlossene 99
- Differenzmenge 56
- Dimension
 - einer Untermannigfaltigkeit 108
 - Hausdorff- 45
- Dirac-Maß 3, 36
- Divergenz eines Vektorfelds 100
- Dualbasis 92
- Durchmesser 44
- durchschnittsstabil 26
- Dynkin-System 41
- einfache Funktion 61
- erweiterte Zahlengerade 58
- erzeugter Ring 27
- erzeugte σ -Algebra 22
- fast überall 30
- folgenkompakt 15
- folgenstetig 12
- Fourier-Transformation 71
- Grassmann-Algebra 96
- Grenzwert 8
- Gruppenwirkung 115
- Haar-Maß 47
- Häufungspunkt einer Folge 8
- Häufungspunkt einer Menge 8
- Halbnorm 66
- Halbordnung 25
- Halbring 26
- Hausdorff-Raum 8
- Hölder-Ungleichung 83
- Inhalt 29
 - endlicher 30
 - σ -additiver 30
 - σ -endlicher 53
 - Stieltjes-Inhalt 35
- Inhaltsproblem 115
- Inneres einer Menge 7
- Intervalle 25
- Koflächenformel 68
- Konvergenz
 - auf halbnormiertem Raum 66
 - monotone 33
 - einer Folge 8
- Kreuzprodukt 95
- \mathcal{L}^1 -Raum 66
- \mathcal{L}^p -Raum 80
- L^p -Raum 87
- Limes 8
- $\liminf_{k \rightarrow \infty}, \limsup_{k \rightarrow \infty}$ 32
- Maß 21
 - Bildmaß 49
 - Dirac-Maß δ_a 3, 36
 - Hausdorff-Maß \mathcal{H}^D 44

Lebesgue–Borel–Maß β^d 47
 Lebesgue–Maß λ^d 45
 metrisches 45
 Produktmaß 74
 reguläres 47
 Zählmaß 22
 Maßproblem 55
 Maßraum 22
 Mengenfamilie 15
 Mengensystem 6
 Systeme von Mengensystemen 29
 messbar
 Abbildung 49
 bezüglich äußerem Maß 38
 Menge 21
 Messraum 21
 Minkowski–Ungleichung 84
 Monotonie von Inhalten 30
 multilinear 91
 μ –Integral 62
 μ –Nullmenge 30
 numerische Funktion 58
 operationstreu 50
 Operatornorm 14
 Orbit 115
 Polarkoordinaten 79, 102
 Positiv– und Negativteil 65
 Prämaß 30
 Lebesgue– 34
 Lebesgue–Stieltjes– 37
 Produkt– σ –Algebra 73
 pull–back 96, 102
 Randpunkt 7
 Ring (Algebra; Mengenring) 22
 Rotation eines Vektorfelds 100
 Satz von
 Banach und Tarski 115
 Carathéodory 39
 Fatou 69
 Fubini 76
 Gauß, Gaußscher Integralsatz 113
 Heine–Borel 17
 Jacobi (Transformationsformel) 78
 Jensen 82
 Kelvin–Stokes 112
 Lebesgue 69
 Beppo Levi 65
 Riesz–Fischer 88
 Steinhaus 56
 Stokes 110
 Vitali 55
 Satz
 Eindeutigkeit der Lebesgue–Maße 53
 Fortsetzungssatz 42
 majorisierte Konvergenz 69
 Maßeindeutigkeitssatz 51
 monotone Konvergenz 65
 Schnitt in kartesischen Produkten 74
 sigma–additiv 21, 30
 sigma–Algebra 21
 sigma–endlicher Inhalt 53
 Spurtopologie 10
 stetig 11
 Stetigkeit 11
 von oben 37
 von unten 33
 Subadditivität
 abzählbare Subadd.
 von äußeren Maßen 39
 von Inhalten auf Ringen 32
 symmetrische Differenz 23
 Topologie 6
 induzierte 10
 Produkttopologie 9
 translationsinvariant 47
 Träger 67
 Treppenfunktion 61
 Umgebung 7
 Untermannigfaltigkeit 108
 vollständig, Vervollständigung 46
 wesentliches Supremum 80
 Zählmaß 22