

Vorlesung Differentialtopologie

Andreas Knauf*

Sommersemester 2020

Zusammenfassung

Vorlesungsbegleitendes Skript. Anregungen und Kritik sind willkommen!

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Mannigfaltigkeiten und ihre Abbildungen	9
2.1	Differenzierbare Mannigfaltigkeiten	10
2.2	Berandete Mannigfaltigkeiten	21
2.3	Abbildungen von Mannigfaltigkeiten	23
2.4	Zusammenhang von Mannigfaltigkeiten	24
2.5	Tangentialbündel und Tangentialabbildung	25
2.6	Topologische Forderungen an Mannigfaltigkeiten	31
3	Einbettungen und Immersionen	34
3.1	Untermannigfaltigkeiten und Einbettungen	35
3.2	Die Einbettungssätze von Whitney	39
3.3	Topologien auf Abbildungsräumen	44
4	Der Satz von Morse und Sard	47
4.1	Stabilität von Abbildungen	47
4.2	Der Satz und sein Beweis	54
4.3	Anwendungen von Morse-Sard	59

*Department Mathematik, Universität Erlangen-Nürnberg, Cauerstr. 11, 91058 Erlangen, Germany. web: <http://math.fau.de/mathematische-physik/andreas-knauf>, e-mail: knauf@math.fau.de

5	Transversalität	61
5.1	Der Transversalitätssatz	61
5.2	Stratifizierte Untervarietäten	69
5.3	Der parametrische Transversalitätssatz	73
5.4	Der Jet–Transversalitätssatz	75
5.5	Singularitäten von Abbildungen	80
6	Morse–Theorie	81
6.1	Morse–Ungleichungen und Subniveaumengen	82
6.2	Singuläre Homologie	91
6.3	Wittens Beweis der Morse–Ungleichungen	96
6.4	Anwendungen und Erweiterungen der Morse–Theorie	99
6.4.1	Existenz periodischer Geodäten	100
6.4.2	Degenerierte kritische Punkte	106
	Anhänge:	108
A	Definition der Betti-Zahlen	108
B	Vektorbündel	112
	Literatur	118
	Index	121

Dieses Skript kann nicht die Lektüre von Lehrbüchern ersetzen, sondern soll sie ergänzen. Es lehnt sich teils an das Buch [Hi] von HIRSCH an. Ein deutschsprachiges Lehrbuch der Differentialtopologie ist [BJ] von BRÖCKER und JÄNICH. [Ko] von KOSINSKI enthält auch weitere hier nicht behandelte Themen. Weitere Literaturangaben finden Sie auf Seite 116.

Da dieses pdf intern und extern verlinkt ist, kann es sinnvoll sein, es online zu benutzen statt es auszudrucken.

1 Einleitung

Die Differentialtopologie beschäftigt sich mit differenzierbaren Mannigfaltigkeiten und den differenzierbaren Abbildungen zwischen ihnen. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten sind spezielle topologische Räume: sie sehen lokal so aus wie der $\mathbb{R}^n$.

Bevor wir zu genauen Definitionen kommen, wollen wir uns an das Beispiel der Sphären oder Kugeloberflächen

$$\mathbb{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|^2 = 1\} \quad (n \in \mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N} \cup \{0\}). \quad (1.1)$$

halten. Zwar wurde so $\mathbb{S}^n$ als Untermannigfaltigkeit eines euklidischen Vektorraums definiert, nicht abstrakt als Mannigfaltigkeit. Man beachte aber, dass in dieser Standardnotation n die Dimension der Kugeloberfläche und nicht die des umgebenden Raumes bezeichnet: denn um sie allein geht es zunächst.

Offensichtlich lässt sich die Differentialtopologie als ein spezielles Gebiet der Topologie auffassen, denn diese beschäftigt sich ja ganz allgemein mit topologischen Räumen und den stetigen Abbildungen zwischen ihnen. Während man aber in der Topologie einen Großteil des Begriffsapparates nur deshalb einführt, um die lokalen Pathologien topologischer Räume zu verwalten, sehen die differenzierbaren Mannigfaltigkeiten lokal ganz simpel aus, eben wie offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Insbesondere gibt es in der Differentialtopologie einen nützlichen Dimensionsbegriff, anders als in der Topologie:

1.1 Beispiel (Peano-Kurve) Sei $X \neq \emptyset$ ein kompakter, zusammenhängender, lokal zusammenhängender Hausdorff-Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Dann existiert nach dem Satz von Hahn und Mazurkiewicz eine Surjektion

$$\varphi \in C([0, 1], X).$$

Z.B. gibt es eine stetige Surjektion φ auf das Quadrat $[0, 1]^2$, die Peano-Kurve. Verlangt man aber, dass φ stetig differenzierbar ist, dann kommen solche Pathologien nicht mehr vor, siehe das Korollar 4.17 des Satzes von Morse und Sard. $\diamond$

Diese lokale Einfachheit von Mannigfaltigkeiten macht man sich auch in der Kartographie der Erdkugel zunutze. Zwar lässt sich die Kugeloberfläche $\mathbb{S}^n$ nicht diffeomorph¹ auf eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ abbilden, aber man kann sie mit mehreren Karten überdecken, wie das für $\mathbb{S}^n$ ja in jedem Weltatlas geschieht.

In den Anwendungen der Differentialtopologie tragen die untersuchten Mannigfaltigkeiten oft eine Zusatzstruktur, beispielsweise eine riemannsche Metrik. Dies kann dann zu lokalen Fragestellungen führen; beispielsweise kann sich die Krümmung einer Fläche von Ort zu Ort ändern, und die Abplattung der Erde an den Polen ist messbar (sogar intrinsisch!).

In der Differentialtopologie selbst kann man aber zwischen diffeomorphen Mannigfaltigkeiten nicht unterscheiden, und sie untersucht entsprechend die unter Diffeomorphismen invarianten Eigenschaften von Mannigfaltigkeiten.

¹Zwei Mannigfaltigkeiten heißen *diffeomorph*, wenn ein differenzierbarer Homöomorphismus, dessen Umkehrabbildung auch differenzierbar ist, die eine Mannigfaltigkeit auf die andere abbildet, siehe Bemerkung 2.32.

1.2 Beispiel (diffeomorphe Mannigfaltigkeiten)

So sind Ellipsoide E_a^n mit den Halbachsen $a_k > 0$ und $a := (a_1, \dots, a_{n+1})$,

$$E_a^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{k=1}^{n+1} (\frac{x_k}{a_k})^2 = 1\}$$

differentialtopologisch von der Sphäre $\mathbb{S}^n$ nicht zu unterscheiden. Denn die Abbildung $f : E_a^n \rightarrow \mathbb{S}^n, x \mapsto x/\|x\|$ ist ein C^∞ -Diffeomorphismus. $\diamond$

In der Differentialtopologie reduzieren sich die *lokalen* Fragen auf Probleme der Analysis. Das Hauptinteresse liegt daher in **globalen Fragestellungen**, also solchen, die die Struktur der Mannigfaltigkeiten als Ganzes betreffen.

1.3 Beispiel (Einbettungen)

Beispielsweise werden wir uns dafür interessieren, ob eine gegebene Mannigfaltigkeit M in eine andere Mannigfaltigkeit N *eingebettet* werden kann, d.h. ob eine stetig differenzierbare Abbildung $f : M \rightarrow N$ existiert, deren Linearisierung überall injektiv ist (*Immersion*), und die M homöomorph auf $f(M)$ wirft.

Wir wissen z.B. schon aus der Definition 1.1 der Sphären $\mathbb{S}^n$, dass diese in den $\mathbb{R}^{n+1}$ eingebettet werden können. Damit kann $\mathbb{S}^n$ natürlich auch in jeden $\mathbb{R}^k$ mit $k > n$ eingebettet werden.

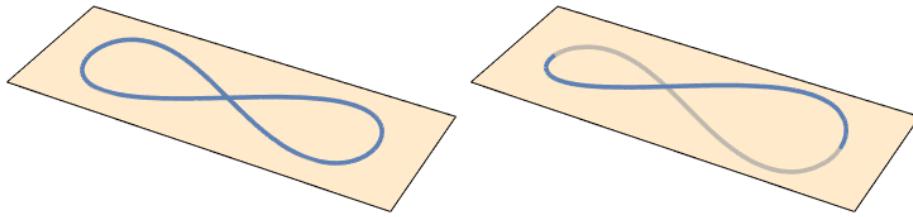
Andererseits ist nicht jede stetig differenzierbare Immersion $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Einbettung; beispielsweise darf kein Kreuzungspunkt wie in der Abbildung unten existieren. $\diamond$

Der 'schwache' Einbettungssatz von Whitney (Satz 3.15) besagt, dass jede (kompakte) m -dimensionale Mannigfaltigkeit M in den $\mathbb{R}^{2m+1}$ eingebettet werden kann. Für unser Beispiel würde das nur die Existenz einer Einbettung der Kreislinie in den $\mathbb{R}^3$ ergeben.

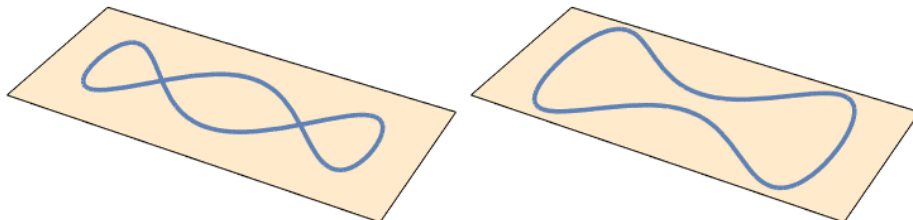
Seine viel tiefer liegende 'starke' Version besagt, dass sogar eine Einbettung von M in den $\mathbb{R}^{2m}$ allgemein möglich ist.

Warum ist die Einbettung in den $\mathbb{R}^{2m+1}$ "einfach", die Einbettung in den $\mathbb{R}^{2m}$ aber "schwierig"? Dies lässt sich schon an unserem Beispiel ansehen. Nehmen wir an, wir suchten nach einer Einbettung von $\mathbb{S}^1$ in den $\mathbb{R}^n$. Sinnvollerweise würden wir mit irgendeiner glatten Abbildung $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ beginnen und diese so abzuändern versuchen, dass daraus eine Einbettung wird.

- Dies ist für den Fall $n = 3$ einfach, denn selbst wenn wir vom links dargestellten $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ ausgehen, können wir den Kreuzungspunkt durch eine kleine Deformation aus der Ebene hinaus zum Verschwinden bringen (rechts):



- Für $n = 2$ besteht eine solche Möglichkeit natürlich nicht, der Schnittpunkt lässt sich nicht durch eine kleine Deformation zum Verschwinden bringen. Die Situation ist sogar noch verzwickter als für den folgenden, links dargestellten Fall $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Denn hier muss, anschaulich gesprochen, nur eine "Schleife auseinander gezogen werden" (rechts).



Was unterscheidet die beiden Abbildungen g und h qualitativ?

Nun, man ist geneigt zu sagen, die Zahl der Schnittpunkte der Kurve mit sich selbst. g hat einen, h zwei Schnittpunkte. Das ist beinahe, aber nicht ganz, die vom Standpunkt der Differentialtopologie aus richtige Sichtweise. Sie versteht die einzelnen Schnitte mit Vorzeichen und kommt im ersten Fall zur Schnittzahl 1, im zweiten aber zur Schnittzahl 0. Eine andere Sichtweise ist es, einer *Immersion* $f \in C^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$, (d.h. die Ableitung f' verschwindet nicht) die Abbildung

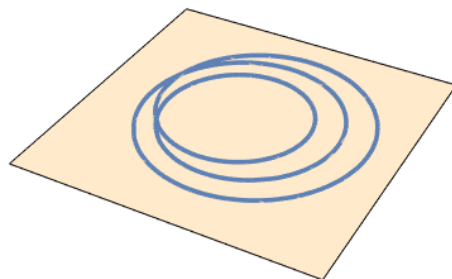
$$\hat{f} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1, \quad x \mapsto f'(x)/\|f'(x)\|$$

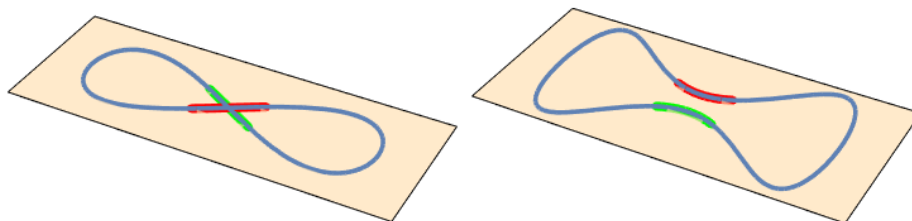
zuzuordnen. Deren *Abbildungsgrad*, also die Zahl $w(f)$ der Umläufe des Bildes von $\hat{f}$, ist invariant unter (C^1) -kleinen Störungen von f . Es ist $w(g) = 0$, aber $w(h) = 1$.

Nebenbei: Die rechts dargestellte reguläre ebene Kurve hat Abbildungsgrad 3. ◇

Um von g ausgehend eine Einbettung zu finden, müssen wir erst einmal eine global definierte Größe, eben $w(g)$, ändern, was durch Ersetzung eines Teilstückes der Kurve durch eine Schleife geschehen kann.

Danach können wir die Kurve auseinanderziehen wie im Fall h (siehe untere Abbildung).

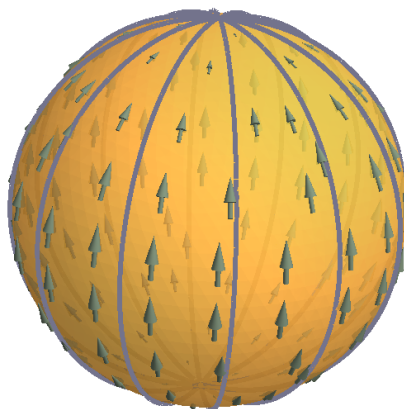




$\mathbb{S}^1$ lässt sich nicht in der Geraden $\mathbb{R}$ einbetten. Allgemein findet man für beliebig hohe Dimensionen m Beispiele von m -dimensionalen Mannigfaltigkeiten, die sich *nicht* in $\mathbb{R}^{2m-1}$ einbetten lassen. Um solche Nichtexistenz-Beweise zu führen, müssen numerische Invarianten der Mannigfaltigkeit gefunden werden, die einer Einbettung entgegenstehen. Die allgemeine Entwicklung der Theorie dieser Invariante der sogenannten **charakteristischen Klassen**, geht allerdings über den Rahmen dieser Vorlesung hinaus.

Aber wir werden bis zur Einführung der sogenannten **Euler-Charakteristik** $\chi(M)$ einer kompakten Mannigfaltigkeit M kommen.

Beispielsweise ist die Euler-Charakteristik $\chi(\mathbb{S}^n)$ der n -Sphäre gleich $1 + (-1)^n$. Das impliziert unter anderem, dass jedes Vektorfeld auf der Sphäre $\chi(\mathbb{S}^2)$ irgendwo verschwindet:



Hier zeigt sich ein Berührungspunkt zwischen der Differentialtopologie und der qualitativen Theorie von Differentialgleichungen. Betrachten wir etwa die Bewegung auf $\mathbb{S}^2$, die durch das Vektorfeld gegeben ist, deren Lösungskurve also tangential zu den Vektoren verlaufen, mit einer Geschwindigkeit, die durch die Länge des Vektors gegeben ist. Dann wissen wir, dass diese Bewegung mindestens einen Ruhepunkt besitzt (siehe obige Abbildung und Beispiel 4.6).

Das letzte Thema dieser Einleitung sind die stabilen Singularitäten differenzierbarer Abbildungen $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Bezeichnet Diff_k die Gruppe der glatten

Diffeomorphismen des $g_k : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$, dann wirkt die Gruppe $G := \text{Diff}_m \times \text{Diff}_n$ auf solchen Abbildungen durch

$$G \times C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \quad , \quad (g_m, g_n; f) \longmapsto g_n \circ f \circ g_m^{-1}.$$

Eine Abbildung f heißt **stabil**, wenn in einer geeigneten Topologie auf $C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ der G -Orbit $\mathcal{O}(f) \subseteq C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ von f eine Umgebung von f ist.

1.4 Beispiel (stabile Abbildungen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$)

Die Abbildungen $f(x) := x$ und auch $f(x) := x^2$ sind stabil, nicht aber $f(x) := x^3$, denn $f_\varepsilon(x) := x^3 + \varepsilon x$ besitzt für kein $\varepsilon > 0$ einen kritischen Punkt, aber für alle $\varepsilon < 0$ zwei kritische Punkte. $\diamond$

Diese beiden (lokalen) Normalformen stabiler Abbildungen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ führen zu den in Abb. 1.1 dargestellten Normalformen stabiler Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, der *Identität* (links) und der *Falte* (Mitte). Im $\mathbb{R}^2$ kommt aber noch eine weitere Normalform hinzu: die *Spitze* (rechts). Die Menge der kritischen Punkte ist jeweils eine (blau dargestellte) Kurve: $x_1 = 0$ für die Falte und $3x_1^2 = x_2$ für die Spitze.

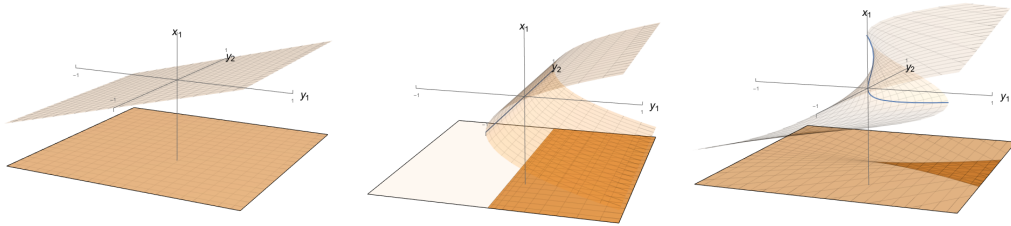
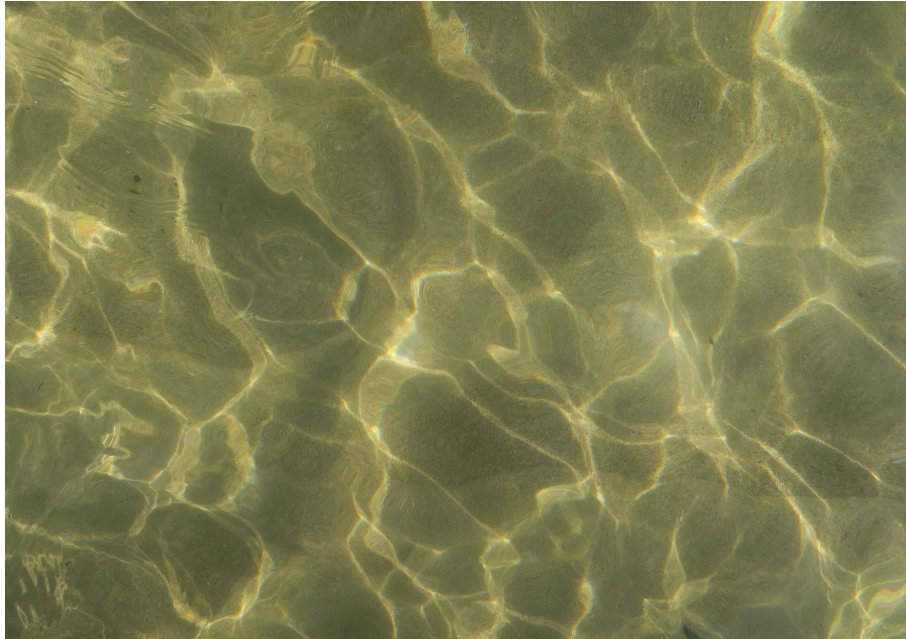


Abbildung 1.1: Normalformen der drei stabilen Singularitäten von Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, nach Whitney. Links: $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$ (keine kritischen Punkte), Mitte: $f(x_1, x_2) = (x_1^2, x_2)$, rechts: $f(x_1, x_2) = (x_1^3 - x_1x_2, x_2)$.

Diese lokalen stabilen Singularitäten können sich zu globalen Mustern zusammenfügen, wie in den hier abgebildeten Kaustiken auf dem Meeresgrund:



Untersuchen kann man sie mit den Techniken der Transversalitäts­theorie aus Kapitel [5](#), siehe Abschnitt [5.5](#).

2 Mannigfaltigkeiten und ihre Abbildungen

Dieses Kapitel soll, soweit sein Inhalt noch nicht bekannt ist, im Selbststudium erarbeitet werden.

Schon in der *Analysis II* sind uns Mannigfaltigkeiten begegnet, als Untermannigfaltigkeiten eines Vektorraums $\mathbb{R}^m$:

2.1 Definition Für $n \in \{0, \dots, m\}$ und $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ heißt eine Teilmenge $N \subseteq \mathbb{R}^m$ eine **n -dimensionale C^r -Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^m$** , wenn jeder Punkt $x \in N$ eine Umgebung $V_x \subseteq \mathbb{R}^m$ besitzt, so dass für eine geeignete Abbildung $f \in C^r(V_x, \mathbb{R}^{m-n})$ mit regulärem Wert 0 gilt:

$$N \cap V_x = f^{-1}(0).$$

2.2 Beispiele (Untermannigfaltigkeiten der $\mathbb{R}^m$)

1. Die n -Sphäre $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ aus Beispiel 2.7 ist Niveaumenge des regulären Werts 1 der reell-analytischen Abbildung $x \mapsto \|x\|^2$, also sogar eine so genannte n -dimensionale C^ω -Untermannigfaltigkeit.



Abbildung 2.1: 2-Sphäre $\mathbb{S}^2$ (links) , 2-Torus $\mathbb{T}^2$ (Mitte) und Fläche mit 2 Henkeln (rechts)

2. Auch der 2-Torus $\mathbb{T}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$, eine Fläche mit einem Henkel, lässt sich als Niveaumenge darstellen:

$$\mathbb{T}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid F(x) = 1\} \text{ mit } F(x) = (\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 2)^2 + x_3^2.$$

3. Die Fläche mit 2 Henkeln in Abbildung 2.1 (rechts) ist die Niveaumenge

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \mid F(x) = 1/4\} \text{ von } F(x) = (4x_1^2(1 - x_1^2) - x_2^2)^2 + x_3^2. \quad \diamond$$

Wir sehen aber jetzt von der Einbettung $N \subseteq \mathbb{R}^m$ ab, sondern betrachten N zunächst als **topologischen Raum** mit der **Teilraumtopologie** (2.2). In diesem Sinn sind n -dimensionale (Unter)-Mannigfaltigkeiten N spezielle topologische Räume, denn jeder Punkt von N besitzt eine zu $\mathbb{R}^n$ homöomorphe Umgebung. Damit können wir auf N Analysis betreiben.

Wir präzisieren zunächst die Begriffsbildung.

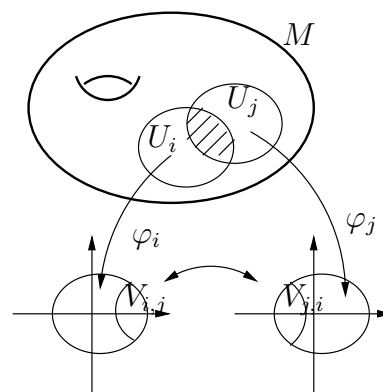
2.1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

2.3 Definition Es sei $(M, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum.

- M heißt **topologische Mannigfaltigkeit**, wenn es ein $n \in \mathbb{N}_0$ gibt, sodass jedes $m \in M$ eine Umgebung $U \in \mathcal{O}$ besitzt, die homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist. Die (eindeutige) Zahl n heißt dann die **Dimension von M** .
- Eine **Karte** (U, φ) von $(M, \mathcal{O})$ (auch **lokales Koordinatensystem** genannt) besteht aus einer offenen Teilmenge $U \subseteq M$ und einem Homöomorphismus $\varphi : U \rightarrow V$ auf das offene Bild $V := \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$.
- Für $r \in \mathbb{N}_0$ bzw. $r = \infty$ oder $r = \omega$ haben zwei Karten (U_i, φ_i) , (U_j, φ_j) **C^r -Überlapp** (oder heißen **C^r -verträglich**), wenn für $V_{i,j} := \varphi_i(U_i \cap U_j) \subseteq \mathbb{R}^n$ die **Kartenwechsel**

$$\varphi_{i,j} := \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}|_{V_{i,j}} : V_{i,j} \rightarrow V_{j,i} \quad (2.1)$$

r -fach stetig differenzierbare Diffeomorphismen sind (d.h. $\varphi_{i,j} \in C^r(V_{i,j}, V_{j,i})$ und $\varphi_{j,i} \in C^r(V_{j,i}, V_{i,j})$), siehe Abbildung.



Kartenwechsel zwischen (U_i, φ_i) und (U_j, φ_j)

- Ein **C^r -Atlas** von M ist eine Menge $\{(U_i, \varphi_i) \mid i \in I\}$ C^r -verträglicher Karten, die M überdecken, das heißt $M = \bigcup_{i \in I} U_i$.
- Zwei C^r -Atlanten heißen **äquivalent**, wenn je zwei ihrer Karten C^r -verträglich sind.

2.4 Bemerkungen

1. Topologische Mannigfaltigkeiten M (oder allgemeiner lokal euklidische Räume) besitzen eine eindeutige Dimension (Schreibweise: $\dim(M)$). Dies ist aber nicht ganz einfach zu beweisen (man denke an die raumfüllenden Peano-Kurven aus Beispiel 1.1). Eine Beweismethode benutzt algebraische Topologie, siehe HATCHER [Ha, Theorem 2.26].

2. Äquivalenz von C^r -Atlanten ist offensichtlich eine Äquivalenzrelation. Für einen C^r -Atlas Φ von M existiert ein eindeutiger *maximaler* C^r -Atlas $\mathcal{A}_M$ von M , der Φ enthält.
Ein solcher maximaler Atlas von M heißt **C^r -differenzierbare Struktur**. $\diamond$

2.5 Definition

- Eine topologische Mannigfaltigkeit $(M, \mathcal{O})$ zusammen mit einer C^r -differenzierbaren Struktur $\mathcal{A}_M$ heißt **C^r -Mannigfaltigkeit**.
- Eine C^1 -Mannigfaltigkeit $(M, \mathcal{A}_M)$ heißt **orientierbar**, wenn sie einen Atlas $\Phi = \{(U_i, \varphi_i) \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{A}_M$ besitzt, bei dem für die Kartenwechsel (2.1) gilt:

$$\det(D\varphi_{i,j}(x)) > 0 \quad (i, j \in I, x \in V_{i,j}).$$

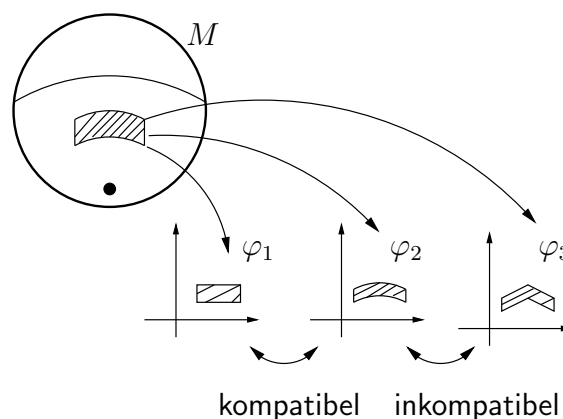
Φ heißt dann ein **orientierter Atlas**.

- Für $\dim(M) \geq 1$ ist eine **Orientierung** von $(M, \mathcal{A}_M)$ ein maximaler orientierter Atlas.

2.6 Bemerkungen

- Man denke bei einem Atlas durchaus an einen Weltatlas. Er muss die ganze Erdoberfläche zeigen. Dazu reicht eine Karte bekanntlich nicht aus. Die Karten des Atlas können durch verschiedene Projektionsarten entstehen. Ein Objekt, das in der einen Karte rechteckig aussieht, kann in der anderen durch Kurven begrenzt sein. Knicke sind aber nicht erlaubt (siehe Abbildung).

Von einer metrischen Struktur wird also abgesehen, nicht aber von der differenzierbaren Struktur.



Verträgliche und nichtverträgliche Karten

2. **Differenzierbarkeitsstufen** Für $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\} \cup \{\omega\}$ bedeutet C^r :

- C^0 : stetig,
- C^n : n -fach stetig differenzierbar,
- C^∞ unendlich oft (stetig) differenzierbar,
- C^ω reell-analytisch.

Diese Differenzierbarkeitsstufen werden durch $r < r+1 < \infty < \omega$ ($r \in \mathbb{N}_0$) geordnet, und man setzt $\infty + 1 := \infty$, $\omega + 1 := \omega$.

3. Oft wird die Schreibweise M^n für eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit M benutzt. $\diamond$

2.7 Beispiele (Mannigfaltigkeiten)

1. Jede offene Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ wird mit der Karte (M, Id_M) zu einer Mannigfaltigkeit. Besitzt sie $z \in \mathbb{N}$ Zusammenhangskomponenten, dann besitzt sie genau 2^z Orientierungen.
2. Als Teilmenge des $\mathbb{R}^{n+1}$ ist die n -Sphäre $M = \mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ ein topologischer Raum. Die $2n+2$ Kartengebiete

$$U_{\pm j} := \{x \in \mathbb{S}^n \mid \pm x_j > 0\} \quad (j = 1, \dots, n+1)$$

und die Abbildungen

$$\varphi_{\pm j} : U_{\pm j} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \longmapsto \varphi_{\pm j}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \hat{x_j} \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$$

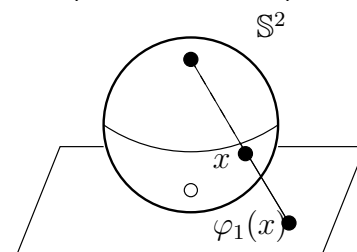
bilden einen C^ω -Atlas von M . Dabei zeigt der Hut über x_j an, dass diese Koordinate weggelassen wird.

3. Ein damit C^ω -verträglicher Atlas auf $\mathbb{S}^n$ wird durch die beiden Karten $\varphi_k : U_k \rightarrow \mathbb{R}^n$ der *stereographischen Projektion* gegeben (siehe Abbildung), mit

$$U_{1/2} := \mathbb{S}^n \setminus \{(0, \dots, 0, \pm 1)^\top\},$$

$$\varphi_{1/2}(x) := \frac{2}{1 \mp x_{n+1}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Da $\frac{1-x_{n+1}}{1+x_{n+1}} = (1 - x_{n+1})^2 / \sum_{k=1}^n x_k^2 = 4 / \|\varphi_1(x)\|^2$, ist der Kartenwechsel auf $U_1 \cap U_2$ geometrisch die Spiegelung an



Stereographische Projektion

der Sphäre mit Radius 2:

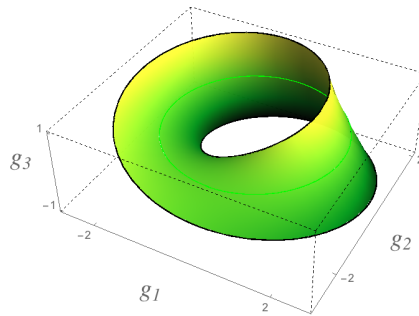
$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(y) = \frac{1 - x_{n+1}}{1 + x_{n+1}} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \frac{4y}{\|y\|^2} \quad \left(y \in \varphi_1(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \right).$$

Er ist also sogar reell-analytisch. Außerdem ist $\mathbb{S}^n$ offensichtlich orientierbar.

Wir fügen zum Atlas $\{(\varphi_1, U_1), (\varphi_2, U_2)\}$ von $\mathbb{S}^n$ alle Karten mit C^ω -Überlapp hinzu und haben damit gezeigt, dass mit dem so definierten maximalen Atlas $\mathbb{S}^n$ eine reell-analytische Mannigfaltigkeit ist.

4. In Definition 2.5 haben wir von einer Einbettung der Mannigfaltigkeit in einen $\mathbb{R}^3$ völlig abgesehen.

Wir können Mannigfaltigkeiten M sogar allein dadurch definieren, indem wir Kartenbilder und verträgliche Übergangsfunktionen angeben. Die Menge M wird dabei als Menge von Äquivalenzklassen unter Kartenwechsel äquivalenter Punkte aufgefasst, die Topologie ist die Quotiententopologie.



Ein Beispiel: Statt das *Möbius-Band* als Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ einzuführen (siehe Abbildung), definieren wir es wie folgt als abstrakte C^∞ -Mannigfaltigkeit M . Die Kartenbilder der drei Karten $\varphi_i : M \rightarrow \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2, 3$ seien die offenen Rechtecke $V_i := (0, 3) \times (-1, 1)$, die Definitions- und Wertebereiche der Kartenwechsel die Teilmengen

$$V_{i,i+1} := \{(x, y) \in V_i \mid x > 2\}, \quad V_{i,i-1} := \{(x, y) \in V_i \mid x < 1\} \quad (i = 1, 2, 3)$$

(mit Index-Addition modulo 3). Die Kartenwechsel selbst seien von der Form

$$\varphi_{i,i+1} : V_{i,i+1} \rightarrow V_{i+1,i}, \quad (x, y) \mapsto (x - 2, -y)$$

$$(\text{also } \varphi_{i+1,i} = \varphi_{i,i+1}^{-1} : V_{i+1,i} \rightarrow V_{i,i+1}, \quad (x, y) \mapsto (x + 2, -y)). \quad \diamond$$

Wir haben jetzt einen ersten Eindruck vom Mannigfaltigkeitsbegriff und wollen natürlich noch mehr Mannigfaltigkeiten kennen lernen.

Es gibt nun eine Reihe von Methoden, aus gegebenen Mannigfaltigkeiten neue zu erzeugen. Einige davon sind im Prinzip schon aus der Topologie bekannt:

2.8 Bemerkungen (Konstruktion von Mannigfaltigkeiten)

1. Die *disjunkte Vereinigung* $M_1 \sqcup M_2$ zweier n -dimensionaler, differenzierbarer Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2

$$M_1 \sqcup M_2 := M_1 \times \{1\} \cup M_2 \times \{2\}.$$

Mit diesem formalen Trick lässt sich die disjunkte Vereinigung auch für $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$, etwa für $M_1 = M_2$, erklären. In einem zweiten Schritt wird die Topologie $\mathcal{O}$ auf $M_1 \sqcup M_2$ erklärt als

$$\mathcal{O} := \{U_1 \sqcup U_2 \mid U_1 \in \mathcal{O}_1, U_2 \in \mathcal{O}_2\}.$$

Ein C^r -Atlas Φ der disjunkten Vereinigung $M_1 \sqcup M_2$ ist für die C^r -Atlanten $\Phi_k := \{(\varphi_i^k, U_i^k) \mid i \in I_k\}$ von M_k durch $\Phi := \tilde{\Phi}_1 \cup \tilde{\Phi}_2$ definiert, wobei die $\tilde{\Phi}_k$ die den Φ_k entsprechenden C^r -Atlanten von $M_k \times \{k\}$ sind.

Meistens² beschränkt man sich auf die Diskussion zusammenhängender Mannigfaltigkeiten.

2. Eine *offene Teilmenge* $N \subseteq M$ einer C^r -Mannigfaltigkeit M bildet offensichtlich in kanonischer Weise wieder eine C^r -Mannigfaltigkeit.

Als Topologie nimmt man für $(N, \mathcal{O}_N)$ die *Teilraumtopologie*

$$\mathcal{O}_N := \{U \cap N \mid U \in \mathcal{O}_M\}, \quad (2.2)$$

als *Atlas* Φ_N von N (ausgehend von einem Atlas $\Phi_M = \{(U_i, \varphi_i) \mid i \in I\}$ von M) die Menge

$$\Phi_N := \{(\varphi_i|_N, U_i \cap N) \mid i \in I\}$$

der auf N eingeschränkten Karten.

Insbesondere sind natürlich die offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ Mannigfaltigkeiten.

Beispiel: Die Gruppen $GL(n, \mathbb{K}) := \{M \in \text{Mat}(n, \mathbb{K}) \mid \det(M) \neq 0\}$ sind für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ Mannigfaltigkeiten, siehe Beispiel 2.16. $\diamond$

3. Das *kartesische Produkt* $M_1 \times M_2$ zweier C^r -Mannigfaltigkeiten M_1, M_2 ist wieder eine C^r -Mannigfaltigkeit.

Auf der Menge $M_1 \times M_2 := \{(m_1, m_2) \mid m_1 \in M_1, m_2 \in M_2\}$ wird die *Produkttopologie* $\mathcal{O}$ durch

$$\mathcal{O} := \{U \subseteq M_1 \times M_2 \mid \forall (x_1, x_2) \in U \exists U_i \in \mathcal{O}_i, x_i \in U_i : U_1 \times U_2 \subseteq U\}.$$

²Ein Gegenbeispiel ist die Theorie der sogenannten *Kobordismen* von Mannigfaltigkeiten.

gegeben. Für Atlanten $\{(\varphi_i^1, U_i^1) \mid i \in I\}$ und $\{(\varphi_j^2, U_j^2) \mid j \in J\}$ von M_1 bzw. M_2 ist

$$\Phi = \{(\varphi_i^1 \times \varphi_j^2, U_i^1 \times U_j^2) \mid i \in I_1, j \in I_2\}$$

ein *Atlas* auf $(M_1 \times M_2, \mathcal{O})$. Diese Konstruktion lässt sich iterieren.

Beispiel (der n -Torus) $\mathbb{T}^n := \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$.

An diesem Beispiel wird noch einmal deutlich, wie nützlich es ist, Mannigfaltigkeiten als nicht notwendig in einen $\mathbb{R}^k$ eingebettete Räume aufzufassen. $\diamond$

4. Während man in der Topologie aus einem gegebenen topologischen Raum durch Äquivalenzklassenbildung und Definition der *Quotiententopologie* einen neuen topologischen Raum bilden konnte, geht dabei im Allgemeinen die Struktur einer C^r -Mannigfaltigkeit verloren.

Beispiel (sich kreuzende Geraden) $M := (\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}) / \sim$ mit

$$(x_1, a_1) \sim (x_2, a_2) \quad \text{für} \quad (x_1, a_1) = (x_2, a_2) \quad \text{und} \quad (0, 1) \sim (0, 2)$$

Keine Umgebung des Kreuzungspunktes ist homöomorph zu einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}$, also ist M keine Mannigfaltigkeit. $\diamond$

Unter bestimmten Umständen wird aber der *Quotientenraum* doch eine C^r -Mannigfaltigkeit, nämlich, wenn er aus den Orbits einer geeigneten *Gruppenwirkung* besteht. Um das zu präzisieren, benötigen wir einige Begriffe.

2.9 Definition

- Eine stetige Abbildung heißt **eigentlich** (englisch: *proper*), wenn die Urbilder kompakter Mengen kompakt sind.
- Eine stetige Gruppenwirkung $\Psi : G \times M \rightarrow M$ einer *topologischen Gruppe* G heißt **eigentlich**, wenn die Abbildung $G \times M \rightarrow M \times M$, $(g, m) \mapsto (m, \Psi(g, m))$ eigentlich ist.

2.10 Lemma

Eigentliche Abbildungen $f \in C(M, N)$ von Mannigfaltigkeiten M, N sind **abgeschlossen**, d.h. die Bilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

Beweis: Sei $A \subseteq M$ abgeschlossen. Jeder Punkt $y \in N \setminus f(A)$ besitzt eine Umgebung, deren Abschluss K kompakt ist. Da f eigentlich ist, ist $A \cap f^{-1}(K)$ kompakt, und damit $f(A \cap f^{-1}(K)) = f(A) \cap K$ abgeschlossen.

Also ist $K \setminus f(A)$ eine Umgebung von y , d.h. $f(A)$ ist abgeschlossen. $\square$

2.11 Satz

Ist $\Psi : G \times M \rightarrow M$ eine freie³ eigentliche Gruppenwirkung der Lie-Gruppe G auf einer Mannigfaltigkeit M , dann besitzt der Quotientenraum

$$M/G = \{\mathcal{O}(m) \mid m \in M\}$$

die differenzierbare Struktur einer Mannigfaltigkeit, und die Abbildung

$$\pi : M \rightarrow M/G, \quad x \mapsto \mathcal{O}(x),$$

die den Punkten von M die sie enthaltenden Orbits zuordnet, ist eine surjektive Submersion.

Beweis: Siehe ABRAHAM und MARSDEN [AM, Proposition 4.1.23]. □

Allgemein ist für einen K -Vektorraum V der projektive Raum $P(V)$ die Menge der eindimensionalen Untervektorräume, und für $V = K^{n+1}$ benutzt man die Schreibweise $KP^n := P(V)$.

2.12 Beispiel (reell-projektiver Raum)

Für $K = \mathbb{R}$ hat jeder eindimensionale Unterraum von $\mathbb{R}^{n+1}$ genau zwei Schnittpunkte mit der Sphäre $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, und diese sind Antipoden.

Offensichtlich ist die Gruppenwirkung $\Psi : \{-1, 1\} \times \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$, $\Psi(g, x) = gx$ eigentlich und frei. Damit wird

$$\mathbb{RP}^n \cong \mathbb{S}^n / \{-1, 1\}$$

nach Satz 2.11 eine C^∞ -Mannigfaltigkeit.

- Konkret können wir mittels der stetigen Surjektion $\pi : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$ der topologischen Räume sogar einen C^ω -Atlas für $\mathbb{RP}^n$ konstruieren. Es gibt nämlich einen C^ω -Atlas $\{(\varphi_i, U_i)\}_{i \in I}$ von $\mathbb{S}^n$, für den die Kartengebiete $U_i \subseteq \mathbb{S}^n$ nicht mit $\{x \in \mathbb{S}^n \mid -x \in U_i\}$ überlappen (siehe z.B. Beispiel 2.7.2).

Damit sind sowohl die $\pi|_{U_i} : U_i \rightarrow \tilde{U}_i := \pi(U_i)$ als auch die Abbildungen

$$\tilde{\varphi}_i : \tilde{U}_i \rightarrow \varphi_i(U_i), \quad \tilde{\varphi}_i([x]) := \varphi_i(x) \quad (i \in I)$$

Homöomorphismen. $\{(\tilde{\varphi}_i, \tilde{U}_i)\}_{i \in I}$ ist also ein C^ω -Atlas von $\mathbb{RP}^n$.

- Da die lineare Abbildung $\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $x \mapsto -x$ Determinante $(-1)^{n+1}$ hat, ist $\mathbb{RP}^n$ genau dann orientierbar, wenn n ungerade ist.

³**Definition:** Ψ heißt **frei**, wenn für alle $m \in M$ die Abbildung $G \rightarrow M$, $g \mapsto \Psi(g, m)$ injektiv ist.

- $\mathbb{RP}^1$ ist diffeomorph zu $\mathbb{S}^1 \cong \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, denn mit $\phi \in C^\omega(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$, $\phi(z) = z^2$ ist $\psi : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{RP}^1$, $\psi(y) = \phi^{-1}(\{y\})$ ein Diffeomorphismus. $\diamond$

2.13 Aufgabe (komplexer projektiver Raum) Versehen Sie für $n \in \mathbb{N}$ die Menge $\mathbb{CP}^n$ mit einer C^∞ -differenzierbaren Struktur, sodass $\dim(\mathbb{CP}^n) = 2n$. $\diamond$

Viele Gruppen sind in natürlicher Weise differenzierbare Mannigfaltigkeiten:

2.14 Definition

- Eine Gruppe $(G, \circ)$ heißt **topologische Gruppe**, wenn G mit einer Topologie versehen ist, sodass gilt:
Die Gruppenverknüpfung $\circ : G \times G \rightarrow G$ und die Inversenbildung $G \rightarrow G$ sind stetig (dabei wird $G \times G$ mit der Produkttopologie versehen).
- Eine Gruppe $(G, \circ)$ heißt **Lie-Gruppe**, wenn G mit einer differenzierbaren Struktur (siehe Seite 11) versehen ist, sodass die Gruppenverknüpfung $G \times G \rightarrow G$ und die Inversenbildung $G \rightarrow G$ glatte Abbildungen sind.

Ein einfaches Beispiel einer Lie-Gruppe ist die abelsche Gruppe $(\mathbb{R}^d, +)$, ebenso deren Untergruppe $\mathbb{Z}^d$ mit der durch die Inklusion $\mathbb{Z}^d \subseteq \mathbb{R}^d$ entstehenden (diskreten) Teilraumtopologie.

2.15 Bemerkungen (Topologische Gruppen und Lie-Gruppen)

1. Da Mannigfaltigkeiten topologische Räume und glatte Abbildungen stetig sind, ist jede Lie-Gruppe eine topologische Gruppe.

Umgekehrt gilt das nicht. Beispielsweise kann man die Gruppe $\text{Diff}(M)$ aller Diffeomorphismen einer Mannigfaltigkeit M als topologische Gruppe auffassen. Für $\dim(M) \geq 1$ müsste sie als ‚Mannigfaltigkeit‘ unendliche Dimension besitzen, was mit unserem Mannigfaltigkeitsbegriff nicht kompatibel ist.

2. Um zu zeigen, dass G eine Lie-Gruppe ist, reicht es aus zu zeigen, dass die Multiplikation glatt ist. Bezeichnen wir diese nämlich mit $M : G \times G \rightarrow G$, dann ist die Inversenbildung $I : G \rightarrow G$, $I(g) = g^{-1}$ Lösung der Gleichung $M(g, I(g)) = e$, und die partielle Ableitung $D_2 M(g, h)$ nach dem zweiten Argument ist ein Isomorphismus. Die Glattheit von I folgt damit aus dem Satz über die implizite Funktion. $\diamond$

2.16 Beispiel (Allgemeine lineare Gruppe)

Die *allgemeine lineare Gruppe* $\text{GL}(V)$ eines Vektorraums V ist die Gruppe der Automorphismen von V (also der *invertierbaren* linearen Abbildungen aus $\text{Lin}(V)$). Damit wirkt sie auf V und auch auf dem projektiven Raum $\mathbb{P}(V)$ von V .

Im Fall eines $\mathbb{K}$ -Vektorraums V endlicher Dimension n ist die Gruppe isomorph zu der Gruppe der invertierbaren Matrizen aus $\text{Mat}(n, \mathbb{K})$. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ ist diese *reelle allgemeine lineare Gruppe*

$$\text{GL}(n, \mathbb{R}) := \{M \in \text{Mat}(n, \mathbb{R}) \mid \det(M) \neq 0\}$$

eine offene Teilmenge des n^2 -dimensionalen Vektorraums $\text{Mat}(n, \mathbb{R})$, und die Gruppenmultiplikation ist als Einschränkung der bilinearen Matrixmultiplikation glatt. Es gilt also $\dim(\text{GL}(n, \mathbb{R})) = n^2$, und die Lie-Gruppe $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ besitzt neben der Untergruppe

$$\text{GL}^+(n, \mathbb{R}) := \{M \in \text{GL}(n, \mathbb{R}) \mid \det(M) > 0\}$$

noch eine zweite Zusammenhangskomponente. Dabei ist die letztere von der Form $\text{GL}^+(n, \mathbb{R})N$ mit einer beliebigen Matrix $N \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ negativer Determinante. Sie sieht also als Mannigfaltigkeit genauso aus wie $\text{GL}^+(n, \mathbb{R})$, ist aber keine Gruppe.

Analog ist für alle $n \in \mathbb{N}$ die *komplexe allgemeine lineare Gruppe*

$$\text{GL}(n, \mathbb{C}) := \{M \in \text{Mat}(n, \mathbb{C}) \mid \det(M) \neq 0\}$$

als offene dichte Teilmenge von $\text{Mat}(n, \mathbb{C})$ eine $2n^2$ -dimensionale (reelle) Mannigfaltigkeit. Diese Lie-Gruppe ist aber zusammenhängend.

Die Gruppen $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ und $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ sind *nicht kompakt*, denn sie enthalten ja die Untergruppe $\{\lambda \mathbb{1} \mid \lambda > 0\}$. $\diamond$

Viele Lie-Gruppen sind Untergruppen von $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ oder $\text{GL}(n, \mathbb{C})$.

2.17 Beispiel (Lie-Gruppen) Die spezielle lineare Gruppe

$$\text{SL}(n, \mathbb{R}) := \{M \in \text{GL}(n, \mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\}$$

ist eine $(n^2 - 1)$ -dimensionale C^ω -Untermannigfaltigkeit von $\text{GL}^+(n, \mathbb{R})$, da 1 regulärer Wert von $\det : \text{Mat}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ ist: Wegen

$$D_M \det(U) = \det(M) \text{tr}(M^{-1}U) \quad \text{ist} \quad D_M \det(M) = n \quad (M \in \text{SL}(n, \mathbb{R})).$$

$\text{SL}(n, \mathbb{R})$ ist zusammenhängend und für $n > 1$ nicht kompakt. $\diamond$

2.18 Aufgabe (orthogonale und unitäre Gruppen)

Zeigen Sie, dass $\text{O}(n)$, $\text{SO}(n)$, $\text{U}(n)$ und $\text{SU}(n)$ Lie-Gruppen sind, berechnen Sie ihre Dimensionen, und finden Sie für $\text{O}(2)$, $\text{SO}(3)$, $\text{U}(1)$ und $\text{SU}(2)$ Diffeomorphismen zu schon bekannten Mannigfaltigkeiten. $\diamond$

Die Grassmann–Mannigfaltigkeiten $\text{Gr}(k, V)$ sind als Verallgemeinerung der projektiven Räume $\text{Gr}(1, V) = P(V)$ aufzufassen. Sie spielen eine zentrale Rolle bei der Klassifikation von Vektorbündeln und sind zunächst algebraisch definiert.

2.19 Definition

- Für einen n -dimensionalen K -Vektorraum V über dem Körper K und $k \in \{0, \dots, n\}$ ist die **Grassmann–Mannigfaltigkeit** $\text{Gr}(k, V)$ die Menge aller k -dimensionalen Untervektorräume von V .
- Statt $\text{Gr}(k, K^n)$ schreibt man kurz $\text{Gr}(k, n)$, wenn der Körper K klar ist.

Damit haben wir nur eine Menge definiert. Wir sind in der Differentialtopologie speziell an den Grassmann–Mannigfaltigkeiten für die Körper $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ interessiert. Also sollen als nächster Schritt auf $\text{Gr}(k, \mathbb{R}^n)$ und $\text{Gr}(k, \mathbb{C}^n)$ Topologien erklärt werden. Mit anderen Worten benötigen wir eine Definition, die uns besagt, wann zwei k -dimensionale Unterräume $u, v \subseteq \mathbb{K}^n$ einander nahe sind.

2.20 Lemma

Betrachte für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $k \in \{0, \dots, n\}$ die Mengen

$$P_{n,k} := \{A \in \text{Lin}(n, \mathbb{K}) \mid \text{rang}(A) = k, A \circ A = A, A^* = A\}$$

der **Orthogonalprojektionen** vom Rang k und

$$\varphi_{n,k} : P_{n,k} \rightarrow \text{Gr}(k, \mathbb{K}^n) \quad , \quad A \mapsto A(\mathbb{K}^n) \subseteq \mathbb{K}^n.$$

Dann sind die $\varphi_{n,k}$ Bijektionen.

Beweis: Da das Bild einer Projektion vom Rang k ein k -dimensionaler Untervektorraum ist, ist $\varphi_{n,k}$ definiert. Ist umgekehrt $v \subseteq \mathbb{K}^n$ ein k -dimensionaler Untervektorraum und $e_1, \dots, e_k \in v$ eine Orthonormalbasis von v , dann ist

$$P_v \in \text{Lin}(n, \mathbb{K}) \quad , \quad P_v(x) := \sum_{j=1}^k \langle x, e_j \rangle e_j$$

die (von der Wahl der Orthonormalbasis unabhängige) Orthogonalprojektion auf v . Denn $P_v(e_j) = e_j$, $P_v^* = P_v$ und

$$P_v \circ P_v(x) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \langle x, e_j \rangle \langle e_j, e_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^k \langle x, e_i \rangle e_i = P_v(x) \quad (x \in \mathbb{K}^n).$$

Also gilt $\varphi_{n,k}^{-1}(v) = P_v$. □

Damit sind $u, v \in \text{Gr}(k, \mathbb{K}^n)$ mit Abstand $d(u, v) := \|P_u - P_v\| < 1$ bezüglich der Operatornorm in dem Sinn einander nahe, dass u keinen zu v orthogonalen Vektor aus $\mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ enthält.

Wir betrachten entsprechend die metrische Topologie von $(\text{Gr}(k, \mathbb{K}^n), d)$.

2.21 Satz In natürlicher Weise ist

- $\text{Gr}(k, \mathbb{R}^n)$ eine kompakte Mannigfaltigkeit der Dimension $k(n - k)$,
- $\text{Gr}(k, \mathbb{C}^n)$ eine kompakte Mannigfaltigkeit der (reellen) Dimension $2k(n - k)$,
- und $\text{Gr}(k, \mathbb{K}^n) \cong \text{Gr}(n - k, \mathbb{K}^n)$.

Beweis von Satz 2.21:

- $\text{Gr}(k, \mathbb{K}^n) \subseteq \text{Lin}(\mathbb{K}^n)$ ist eine Mannigfaltigkeit, wenn man mit dem bezüglich des euklidischen Skalarproduktes auf u senkrechten Unterraum

$$u_s := \{x \in \mathbb{K}^n \mid \forall y \in u : \langle x, y \rangle = 0\}$$

die Umgebung

$$U := \{v \in \text{Gr}(k, \mathbb{K}^n) \mid d(u, v) < 1\}$$

von $u \in \text{Gr}(k, \mathbb{K}^n)$ mit der (implizit definierten) Kartenabbildung⁴

$$\Phi : U \rightarrow \text{Lin}(u, u_s) \quad , \quad v = \text{graph}(\Phi(v)) \quad (2.3)$$

versieht. Die Bedingung $\|P_v - P_u\| < 1$ garantiert dabei, dass nur der Nullvektor in v orthogonal zum Unterraum u ist, also v Graph einer eindeutigen linearen Abbildung aus $\text{Lin}(u, u_s)$ ist. Der zum k -dimensionalen Unterraum u orthogonale Unterraum u_s hat die Dimension $n - k$, also ist

$$\dim_{\mathbb{K}} (\text{Gr}(k, \mathbb{K}^n)) = \dim (\text{Lin}(u, u_s)) = k(n - k).$$

Als Menge der Orthogonalprojektionen des Rangs n ist $\text{Gr}(k, \mathbb{K}^n)$ beschränkt (mit Schranke 1 in der Operatornorm) und abgeschlossen, also kompakt.

- Die Abbildung $\text{Gr}(k, \mathbb{K}^n) \rightarrow \text{Gr}(n - k, \mathbb{K}^n)$, $P_u \mapsto \text{Id}_{\mathbb{K}^n} - P_u$ ist ein Diffeomorphismus. $\square$

2.22 Beispiel (Grassmann-Mannigfaltigkeiten als **homogene Räume**)

Mit der **orthogonalen Gruppe** $O(n)$ und der **unitären Gruppe** $U(n)$ gilt:

$$\text{Gr}(k, \mathbb{R}^n) \cong O(n) / (O(k) \times O(n - k)) \quad \text{und} \quad \text{Gr}(k, \mathbb{C}^n) \cong U(n) / (U(k) \times U(n - k)).$$

Denn jeder k -dimensionale Unterraum $v \subseteq \mathbb{K}^n$ kann als linearer Spann der ersten k Vektoren einer Orthonormalbasis von $\mathbb{K}^n$ gesehen werden. Die **Stabilisatorgruppe** von v ist damit $O(k) \times O(n - k)$ bzw. $U(k) \times U(n - k)$. Satz 2.11 garantiert, dass der Quotient eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist. $\diamond$

⁴Genau genommen wird Φ erst dann zu einer Kartenabbildung, wenn man durch Basiswahl $\text{Lin}(u, u_s)$ mit $\text{Mat}(n \times (n - k), \mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^{n(n - k)}$ identifiziert. Außerdem wird in (2.3) benutzt, dass $\mathbb{K}^n = u \oplus u_s$ ist.

Die Definition der Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ (Definition 2.1) war lokal und lässt sich entsprechend verallgemeinern:

2.23 Definition

Eine Teilmenge $A \subseteq M$ einer m -dimensionalen C^r -Mannigfaltigkeit $(M, \mathcal{A}_M)$ heißt für ein $k \in \mathbb{N}_0$ (eingebettete) **k -dimensionale C^r -Untermannigfaltigkeit** von $(M, \mathcal{A}_M)$, wenn es für alle $a \in A$ eine Karte $(\varphi, U) \in \mathcal{A}_M$ gibt mit $a \in U$ und

$$U \cap A = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\}_{m-k}).$$

Hier zeigt sich die Nützlichkeit des maximalen Atlas $\mathcal{A}_M$.

2.2 Berandete Mannigfaltigkeiten

Die abgeschlossene Vollkugel $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ ist ein Beispiel für eine sogenannte berandete Mannigfaltigkeit. B^n ist keine Mannigfaltigkeit, denn es gibt für die Randpunkte $x \in \partial B^n = \mathbb{S}^{n-1}$ keine zu $\mathbb{R}^n$ homöomorphe Umgebung. Wohl aber gibt es eine Umgebung, die zu einem durch eine lineare Abbildung $\ell : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definierten *Halbraum* homöomorph ist, mit

$$H_\ell^n := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \ell(y) \geq 0\} \quad (\text{also mit } H_0^n = \mathbb{R}^n).$$

2.24 Definition

- Ein topologischer Raum $(M, \mathcal{O})$, für den es ein $n \in \mathbb{N}_0$ gibt, sodass jedes $m \in M$ eine zu einem Halbraum H_ℓ^n homöomorphe Umgebung $U \in \mathcal{O}$ besitzt, heißt **topologische berandete Mannigfaltigkeit**.
- n heißt dann **Dimension von M** .
- Eine **Karte** (U, φ) von $(M, \mathcal{O})$ besitzt als Definitionsbereich eine offene Teilmenge $U \subseteq M$, und $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ ist ein Homöomorphismus auf das relativ offene Bild $\varphi(U) \subseteq H_\ell^n$.
- **C^r -Verträglichkeit** von Karten, **C^r -Atlanten** $\{(U_i, \varphi_i) \mid i \in I\}$ von M und **berandete C^r -Mannigfaltigkeiten** werden analog zu den Definitionen 2.3 und 2.5 eingeführt.

2.25 Definition Der **Rand** der berandeten Mannigfaltigkeit M ist die Menge

$$\partial M := \{m \in M \mid \exists i \in I : m \in U_i, \varphi_i(m) \in \partial(\varphi_i(U_i)) \subseteq \mathbb{R}^n\}.$$

Der Witz bei dieser Definition ist, dass der Rand der Teilmenge $\varphi_i(U_i)$ des $\mathbb{R}^n$ im topologischen Sinn definiert ist. Er besteht genau aus den Punkten von $\varphi_i(U_i)$, die auch in der Hyperebene $\partial H_{\ell_i}^n$ des $\mathbb{R}^n$ liegen.

2.26 Satz Für die Indexmenge $J := \{j \in I \mid U_j \cap \partial M \neq \emptyset\}$ und Abbildungen

$$\tilde{\varphi}_j := \varphi_j|_{\tilde{U}_j} : \tilde{U}_j \rightarrow \partial H_{\ell_j}^n \quad \text{mit Definitionsbereich } \tilde{U}_j := U_j \cap \partial M$$

ist $(\tilde{U}_j, \tilde{\varphi}_j)_{j \in J}$ ein C^r -Atlas des Randes der berandeten C^r -Mannigfaltigkeit M .

Insbesondere ist der Rand ∂M selbst eine unberandete Mannigfaltigkeit: $\partial \partial M = \emptyset$. Dies ist in der Integrationstheorie dual zu der Eigenschaft $dd = 0$ der äußeren Ableitung.

2.27 Beispiel (berandete Mannigfaltigkeit) Halb-unendlicher Zylinder

$$M := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = R^2, x_3 \geq 0\}$$

mit Radius $R > 0$. Wir können z.B. die folgenden vier Karten $(U_i^\pm, \varphi_i^\pm)$, $i = 1, 2$ mit $U_i^\pm := \{x \in M \mid \pm x_i > 0\}$ und $\varphi_i^\pm : U_i^\pm \rightarrow \mathbb{R} \times [0, \infty)$ benutzen (siehe Abbildung):

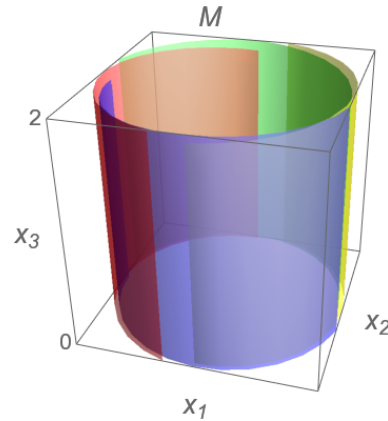
$$\varphi_1^\pm(x_1, x_2, x_3) := (\pm x_2, x_3),$$

$$\varphi_2^\pm(x_1, x_2, x_3) := (\pm x_1, x_3).$$

Der Rand des Zylinders ist

$$\partial M = \{x \in M \mid x_3 = 0\},$$

also ein Kreis mit Radius R in der (x_1, x_2) -Ebene des $\mathbb{R}^3$. $\diamond$



2.28 Bemerkungen (Berandete Mannigfaltigkeiten)

1. Unberandete Mannigfaltigkeiten sind spezielle berandete Mannigfaltigkeiten. Man nennt sie oft *geschlossen*, wenn sie zusätzlich kompakt sind.
2. Das kartesische Produkt $M \times N$ zweier berandeter Mannigfaltigkeiten ist zwar im Allgemeinen keine berandete Mannigfaltigkeit (siehe Seite 69). Das ist aber doch der Fall, wenn $\partial M = \emptyset$ oder $\partial N = \emptyset$. $\diamond$

2.29 Aufgabe (Orientierung des Randes)

Zeigen Sie, dass der Rand ∂M einer orientierbaren berandeten Mannigfaltigkeit M ebenfalls orientierbar ist. Finden Sie Beispiele nicht orientierbarer berandeter Mannigfaltigkeiten mit nicht orientierbarem bzw. mit orientierbarem Rand. $\diamond$

2.3 Abbildungen von Mannigfaltigkeiten

Durch Lokalisierung können wir definieren, wann eine Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten differenzierbar ist.

2.30 Definition Für die C^r -Mannigfaltigkeiten M, N und $f \in C(M, N)$ heißt

- ein Kartenpaar $(\varphi, U) \in \Phi_M, (\psi, V) \in \Phi_N$ **angepasst**, wenn $f(U) \subseteq V$,
- und dann $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$ **lokale Darstellung von f** (bei $x \in U$).
- $f \in C(M, N)$ heißt C^r **bei $x \in M$** , wenn eine C^r -lokale Darstellung von f bei x existiert.
- f heißt C^r , wenn für alle $x \in M$ die Abbildung f C^r bei x ist. Die Menge der C^r -Abbildungen $f : M \rightarrow N$ wird mit $C^r(M, N)$ bezeichnet.

2.31 Bemerkungen (Differenzierbarkeit von Abbildungen)

Es seien M und N C^r -Mannigfaltigkeiten.

1. Aus der Kettenregel folgt die Unabhängigkeit der Differenzierbarkeitsstufe von der lokalen Darstellung. Denn seien $(\varphi_i, U_i) \in \Phi_M$ zwei Karten bei $x \in M$ und $(\psi_i, V_i) \in \Phi_N$ zwei Karten bei $f(x) \in N$ ($i = 1, 2$). Dann gilt

$$\psi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1} = \underbrace{(\psi_2 \circ \psi_1^{-1})}_{C^r\text{-Kartenwechsel}} \circ (\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}) \circ \underbrace{(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})}_{C^r\text{-Kartenwechsel}}.$$

2. Für C^r -Mannigfaltigkeiten M, N, P , $f \in C^r(M, N)$ und $g \in C^r(N, P)$ ist $g \circ f \in C^r(M, P)$.
3. Für eine C^r -Mannigfaltigkeit M ist $\text{Id}_M \in C^r(M, M)$. ◇

2.32 Bemerkung (Kategorie Diff_r) Damit bilden die C^r -Mannigfaltigkeiten die Objekte einer Diff_r genannten *Kategorie*, deren Morphismen die C^r -Abbildungen sind. Die Isomorphismen dieser Kategorie sind die C^r -Diffeomorphismen. Die C^r -Mannigfaltigkeiten M und N heißen *diffeomorph*, wenn es einen C^r -Diffeomorphismus $M \rightarrow N$ gibt (in Zeichen: $M \cong N$).

Am angenehmsten ist in der C^∞ -Kategorie zu arbeiten, da man dort wegen $\infty - 1 = \infty$ beliebig oft differenzieren kann, und gleichzeitig im Gegensatz zu C^ω die Lokalisierung leicht fällt (analytische Abbildungen sind dagegen durch ihre Werte in einer beliebig kleinen Umgebung eines Punkts global festgelegt). ◇

2.4 Zusammenhang von Mannigfaltigkeiten

Für topologische Räume gibt es mehrere Begriffe von Zusammenhang, wobei der (lokale) Wegzusammenhang stärker ist als der (lokale) Zusammenhang:

2.33 Definition Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum.

- $(X, \mathcal{O})$ heißt **zusammenhängend**, wenn X und $\emptyset$ die einzigen abgeschlossenen Elemente von $\mathcal{O}$ sind.
- Ein **Weg** in $(X, \mathcal{O})$ ist eine stetige Abbildung $c : I \rightarrow X$ mit $I := [0, 1]$, also ein Element des **Wegeraums** $C(I, X)$.
- Punkte $x_0, x_1 \in X$ heißen **verbindbar**, wenn es einen Weg c mit $c(0) = x_0$ und $c(1) = x_1$ gibt. Man nennt c dann einen Weg **von** x_0 **nach** x_1 .
- $(X, \mathcal{O})$ heißt **wegzusammenhängend**, wenn es für alle $x_0, x_1 \in X$ einen Weg von x_0 nach x_1 gibt.
- $(X, \mathcal{O})$ heißt **lokal zusammenhängend**, wenn es für jede Umgebung $U \subseteq X$ von $x \in X$ eine zusammenhängende Umgebung $V \subseteq U$ von x gibt.
- $(X, \mathcal{O})$ heißt **lokal wegzusammenhängend**, wenn es für jede Umgebung $U \subseteq X$ von $x \in X$ eine wegzusammenhängende Umgebung $V \subseteq U$ von x gibt.
- Die **Zusammenhangskomponente** $C(x)$ **von** $x \in X$ ist die Vereinigung der x enthaltenden zusammenhängenden Teilmengen von X .
- Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt eine **Zusammenhangskomponente von** X , wenn es ein $x \in X$ gibt mit $U = C(x)$.

2.34 Satz Es seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume.

1. Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ zusammenhängend und gibt es eine stetige Surjektion $f : X \rightarrow Y$, dann ist auch $(Y, \mathcal{O}_Y)$ zusammenhängend.
2. Sind $A_i \subseteq X$ ($i \in I$) zusammenhängend, und $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ für $i, j \in I$, dann ist auch $\bigcup_{i \in I} A_i$ zusammenhängend.
3. Falls $X \neq \emptyset \neq Y$, dann ist $X \times Y$ in der Produkttopologie genau dann zusammenhängend, wenn $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ es sind.
4. Ist der Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ wegzusammenhängend, dann ist er auch zusammenhängend.

5. Ist der Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ lokal wegzusammenhängend, dann ist er auch lokal zusammenhängend.

Beweis: Auf Seite 60 des [Topologie-Skripts](#). □

Entsprechende Beispiele finden sich auf Seite 61 des [Topologie-Skripts](#).

2.35 Satz

Zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeiten sind wegzusammenhängend.

Beweis:

Denn sei $x \in M$ ein Punkt der Mannigfaltigkeit, dann enthält

$$U_x := \{y \in M \mid x \text{ und } y \text{ sind verbindbar}\}$$

den Punkt x und ist offen. Denn ist (ϕ, U) eine Karte von M bei x , dann gilt die entsprechende Eigenschaft für $\phi(x) \in \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$. Verbindbarkeit bleibt aber unter dem Homöomorphismus ϕ^{-1} erhalten.

Aber auch $M \setminus U_x$ ist offen, also nach Voraussetzung leer, und $U_x = M$. □

Während die Zusammenhangskomponenten topologischer Räume zwar abgeschlossene, aber im Allgemeinen nicht offene Mengen sind, sind sie für topologische Mannigfaltigkeiten auch offen.

Damit kann man sie in vielen Fällen separat betrachten.

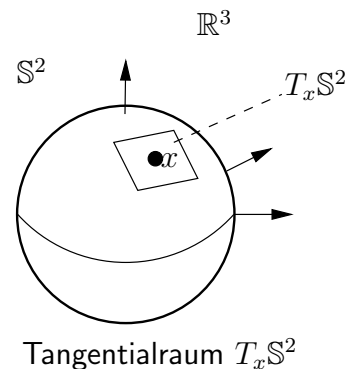
2.5 Tangentialbündel und Tangentialabbildung

Welche geometrische Struktur bilden die Zustände, also Orte und Geschwindigkeiten, eines mechanischen Systems, wenn sein Konfigurationsraum eine Mannigfaltigkeit M ist? Sie bilden das sogenannte Tangentialbündel TM von M .

Ist M eine in den $\mathbb{R}^n$ eingebettete Untermannigfaltigkeit, so ist klar, was wir unter dem Tangentialraum von M an einem Punkt $x \in M$ verstehen. Das ist dann der Unterraum $T_x M$ der Vektoren des Tangentialraums $T_x \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ des $\mathbb{R}^n$ bei x , die an M tangential sind. Ist insbesondere $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, dann ist

$$TM \cong M \times \mathbb{R}^n. \quad (2.4)$$

2.36 Beispiel Der Tangentialraum der Sphäre $\mathbb{S}^d \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ bei $x \in \mathbb{S}^d$ ist $T_x \mathbb{S}^d = \{y \in \mathbb{R}^{d+1} \mid \langle y, x \rangle = 0\}$, siehe nebenstehende Abbildung⁵. ◇



⁵Beispiel 2.36 zeigt, dass schon aus Dimensionsgründen das Tangentialbündel TM einer Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^d$ im Allgemeinen *nicht* in den $\mathbb{R}^d$ eingebettet werden kann, wohl aber die Tangentialräume $T_x M$.

Da nicht alle Mannigfaltigkeiten als Teilmengen eines $\mathbb{R}^n$ definiert sind, müssen wir bei der allgemeinen Definition des Tangentialbündels anders vorgehen:

2.37 Definition

- Ein **Tangentialvektor** einer Mannigfaltigkeit M am Punkt $x \in M$ ist eine Äquivalenzklasse von Kurven $c \in C^1([-\varepsilon, \varepsilon], M)$ mit $c(0) = x$, wobei zwei solche Kurven c_1, c_2 **äquivalent** heißen, wenn in einer Karte (U, φ) , $x \in U$, gilt

$$\left. \frac{d}{dt} \varphi \circ c_1(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \varphi \circ c_2(t) \right|_{t=0}.$$

- Die Menge $T_x M$ von Tangentialvektoren von M an x heißt **Tangentialraum von M an x** .
- Das **Tangentialbündel** TM von M ist die Vereinigung $\bigcup_{x \in M} T_x M$.
- Wir bezeichnen die Projektion der Tangentialvektoren in $T_x M$ auf ihren **Fußpunkt** x mit $\pi_M : TM \rightarrow M$; $\pi_M^{-1}(x) = T_x M$ heißt **Faser** über $x \in M$.
- Eine stetige Abbildung $v : M \rightarrow TM$ mit $\pi_M \circ v = \text{Id}_M$ heißt **(Tangential)-Vektorfeld** auf M , siehe Abbildung 2.3.
- Das Vektorfeld $n : M \rightarrow TM$, $n(x) = 0 \in T_x M$ heißt auch **Nullschnitt**.

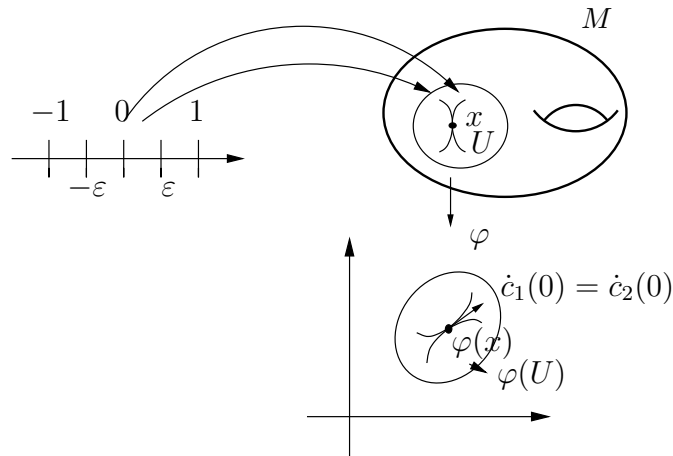


Abbildung 2.2: Tangentialvektor als Äquivalenzklasse von Kurven

Der Tangentialvektor wird also durch die Menge aller Kurven definiert, die aneinander tangential im Sinn von

$$\varphi(c_1(t)) - \varphi(c_2(t)) = o(t) \quad (2.5)$$

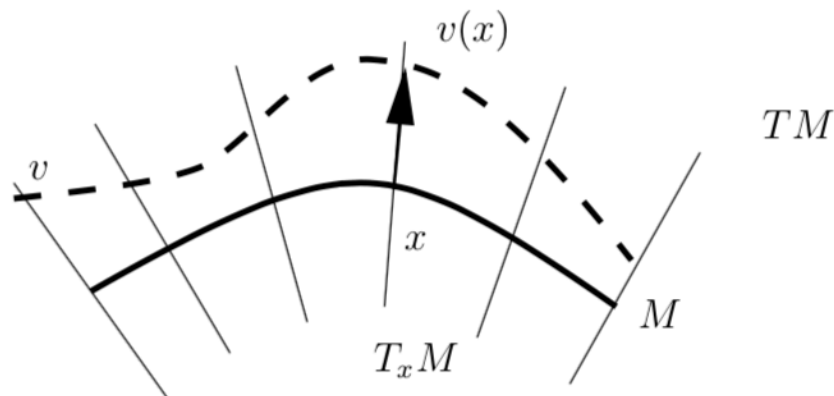


Abbildung 2.3: Ein Tangentialvektorfeld $v : M \rightarrow TM$; das Bild $n(M) \subseteq TM$ des Nullschnitts wird mit M identifiziert

sind, siehe Abbildung 2.2. Die Tangentialitätseigenschaft (2.5) zweier Kurven ist zwar in einer Karte definiert, bleibt aber bei Kartenwechsel erhalten.

2.38 Bemerkung (Definitionen des Tangentialbündels)

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und als Karte werde $(U, \varphi) := (M, \text{Id})$ benutzt. Dann ergibt Definition 2.37 in Übereinstimmung mit (2.4) $TM \cong M \times \mathbb{R}^n$, sodass das Tangentialbündel von M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der doppelten Dimension ist.

Allgemein wird die am Anfang des Abschnitts ausgesprochene Definition des Tangentialbündels TM einer Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ in Definition 2.37 von TM übergeführt, wenn man einem Tangentialvektor $v \in T_m \mathbb{R}^n$ an $m \in M$ die Äquivalenzklasse der auf M projizierten Kurve $t \mapsto m + t v$ zugeordnet. $\diamond$

2.39 Aufgabe (Tangentialbündel) Zeigen Sie, dass das Tangentialbündel TM einer C^2 -Mannigfaltigkeit M eine orientierbare C^1 -Mannigfaltigkeit ist. $\diamond$

Allgemein ist für einen Punkt x einer Mannigfaltigkeit M , eine Karte (U, φ) bei x und eine C^1 -Kurve $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ mit $c(0) = x$ die Ableitung

$$\left. \frac{d}{dt} \varphi \circ c(t) \right|_{t=0}$$

ein Vektor in $T_{\varphi(x)} \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$, und im Kartenbild können wir diese Tangentialvektoren mit einer reellen Zahl multiplizieren und miteinander addieren. Diese Vektorraumstruktur überträgt sich kartenunabhängig auf die Menge $T_x M$ der Tangentialvektoren von M an x . Damit ist $\pi_M : TM \rightarrow M$ im Sinn von Anhang B ein Vektorbündel über M vom Rang $\dim(M)$.

2.40 Definition Für $f \in C^1(M, N)$ heißt $Tf : TM \rightarrow TN$ mit

$$Tf([c]_x) := [f \circ c]_{f(x)} \quad (x \in M, c \text{ Kurve bei } x)$$

die **Tangentialabbildung** von f (dabei bezeichnet $[\cdot]$ die Äquivalenzklasse).

2.41 Satz

- Für eine C^{r+1} -Mannigfaltigkeit M gilt: Der Tangentialraum $T_x M$ von M an x ist ein reeller Vektorraum der Dimension $\dim(T_x M) = \dim(M)$.
- Das Tangentialbündel TM ist eine C^r -Mannigfaltigkeit, und

$$\dim(TM) = 2 \dim(M).$$

Beweis: Sei $\mathcal{A} := \{(U_i, \varphi_i) \mid i \in I\}$ ein C^{r+1} -Atlas von M . Dann ist

$$T\mathcal{A} := \{(TU_i, T\varphi_i) \mid i \in I\}$$

ein C^r -Atlas von TM , genannt der *natürliche Atlas*. Seine Karten heißen *natürliche Karten*. $\square$

Zwar können wir im Prinzip in der Mannigfaltigkeit TM beliebige Koordinaten benutzen. Es ist aber sinnvoll, in den Tangentialvektoren lineare Koordinaten zu verwenden, um in den Karten Tangentialvektoren an einem Punkt wie üblich zu addieren. Eine Karte (U, φ) von M induziert auf U die $n = \dim(M)$ Vektorfelder

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi_n} : U \rightarrow TU,$$

die unter der Tangentialabbildung die Bilder

$$T\varphi \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_l} \right) (u) = (\varphi(u), e_l) \quad (u \in U, l = 1, \dots, n) \quad (2.6)$$

haben (e_l bezeichnet den l -ten kanonischen Basisvektor des $\mathbb{R}^n$). Für $x \in U$ bilden die Tangentialvektoren $\frac{\partial}{\partial \varphi_1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi_n}(x)$ eine Basis von $T_x M$.

Die Menge $\mathcal{X}(M)$ der Vektorfelder einer Mannigfaltigkeit M bildet einen $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Im Kartengebiet U besitzt $X \in \mathcal{X}(M)$ die eindeutige Darstellung $X(x) = \sum_{k=1}^n X_k(x) \frac{\partial}{\partial \varphi_k}(x)$ mit stetigen Funktionen $X_k : U \rightarrow \mathbb{R}$.

2.42 Definition

- Das Tangentialbündel TM einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit M heißt **parallelisierbar**, wenn es einen Diffeomorphismus

$$I : TM \rightarrow M \times \mathbb{R}^n$$

gibt, der faserweise (das heißt restringiert auf die Fasern $T_m M$, für alle $m \in M$) linear und bezüglich M die Identität ist ($I \circ \pi_M^{-1}(m) = \{m\} \times \mathbb{R}^n$).

- Dann heißt I eine **Parallelisierung** von TM .

Alle parallelisierbaren Mannigfaltigkeiten sind insbesondere orientierbar.

2.43 Beispiele (Parallelisierbarkeit)

1. Lie-Gruppen G sind parallelisierbar, denn mit der Linkswirkung $L_g : G \rightarrow G$, $L_g h = g \circ h$ ($g \in G$) und der Lie-Algebra $\mathfrak{g} \cong T_e G \cong \mathbb{R}^{\dim(G)}$ von G ist

$$G \times \mathfrak{g} \rightarrow TG \quad , \quad (g, \xi) \mapsto (T_e L_g)(\xi)$$

ein faserweise linearer Diffeomorphismus mit $(T_e L_g)(\xi) \in T_g G$.

2. Das Tangentialbündel der Sphäre $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ ist

$$T\mathbb{S}^n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1, \langle x, y \rangle = 0\}.$$

- $T\mathbb{S}^1$: Wegen $\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{C} \mid |x| = 1\}$ können wir das Tangentialbündel mit

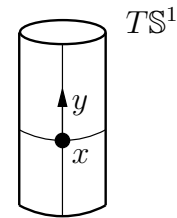
$$T\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mid |x| = 1, \frac{y}{x} \in i\mathbb{R}\}$$

identifizieren. Wir finden eine Parallelisierung

$$I : T\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \quad , \quad (x, y) \mapsto (x, y/(ix))$$

von $T\mathbb{S}^1$, mit Inverser $I^{-1}(x, z) = (x, ixz)$, siehe nebenstehende Abbildung. Wir machen von dieser Tatsache bei der Betrachtung des ebenen Pendels Gebrauch.

- $T\mathbb{S}^2$. **Behauptung:** $T\mathbb{S}^2$ ist *nicht* parallelisierbar.⁶



Tangentialraum
der Kreislinie $\mathbb{S}^1$

⁶**Satz vom Igel:**

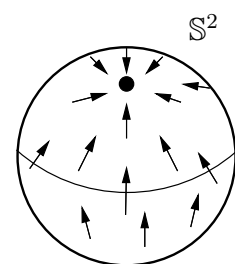
Jeder stetig gekämmte Igel hat mindestens eine kahle Stelle, englisch: *hairy ball theorem*.

Der folgende Beweis von Milnor lässt sich auf alle Sphären $\mathbb{S}^{2n}$ verallgemeinern, siehe GALLOT, HULIN und LAFONTAINE [GHL, Kapitel I.C].

Von den ungerad-dimensionalen Sphären ist außer $\mathbb{S}^1$ nur noch $\mathbb{S}^3$ und $\mathbb{S}^7$ parallelisierbar, siehe HIRZEBRUCH [Hirz]. Dass $\mathbb{S}^3$ parallelisierbar ist, sieht man daran, dass $\mathbb{S}^3$ diffeomorph zur Lie-Gruppe $SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} u & -\bar{v} \\ v & \bar{u} \end{pmatrix} \mid u, v \in \mathbb{C}, |u|^2 + |v|^2 = 1 \right\}$ ist.

Beweis: Durch Widerspruch. Betrachte dazu $I^{-1}(\{x \times \binom{1}{0}\})$. Das ist ein Tangentialvektor an $x \in \mathbb{S}^2$. Dieser Tangentialvektor verschwindet nach Voraussetzung nicht (Linearität). Betrachten wir für alle $x \in \mathbb{S}^2$ diese Tangentialvektoren, so erhalten wir ein nicht verschwindendes Vektorfeld auf $\mathbb{S}^2$.

Ein solches Vektorfeld $Y : \mathbb{S}^2 \rightarrow T\mathbb{S}^2$ existiert aber nicht (siehe Abbildung). Denn sei $Y(x)$ (notfalls durch Normierung) für alle $x \in \mathbb{S}^2$ von der Länge 1, also $Y_\varepsilon := \varepsilon Y$ von der Länge $|\varepsilon|$. Dann bildet



Tangentialvektorfeld auf $\mathbb{S}^2$

$$f_\varepsilon : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad x \mapsto x + Y_\varepsilon(x)$$

auf die Sphäre $S^2(r)$ vom Radius $r := \sqrt{1 + \varepsilon^2}$ ab, und f_ε ist für betragsmäßig kleine ε ein Diffeomorphismus der Sphären.

Wir betrachten auf $\mathbb{R}^3$ die Zwei-Form

$$\omega := x_1 dx_2 \wedge dx_3 + x_2 dx_3 \wedge dx_1 + x_3 dx_1 \wedge dx_2 = r^3 \cos(\theta) d\varphi \wedge d\theta$$

in Kugelkoordinaten

$$x_1 = r \cos(\theta) \cos(\varphi), \quad x_2 = r \cos(\theta) \sin(\varphi), \quad x_3 = r \sin(\theta).$$

Nun können wir den Flächeninhalt $F(r)$ der Sphäre $S^2(r)$ einerseits durch

$$F(r) = \frac{1}{r} \int_{S^2(r)} \omega = 4\pi r^2 = 4\pi (1 + \varepsilon^2)$$

berechnen, andererseits aber nach unserer Widerspruchsannahme durch

$$F(r) = \frac{1}{r} \int_{f_\varepsilon(S^2(1))} \omega = \frac{1}{r} \int_{S^2(1)} f_\varepsilon^*(\omega).$$

Letzterer Ausdruck ist aber ein Polynom in ε , dividiert durch $r = \sqrt{1 + \varepsilon^2}$, wie man durch explizite Betrachtung von $f_\varepsilon^*(\omega)$ sieht. Widerspruch! $\square$

2.44 Bemerkungen (Tangentialabbildung)

1. Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{Tf} & TN \\ \pi_M \downarrow & & \downarrow \pi_N \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

kommutiert, d.h. $T_m M$ wird in $T_{f(m)} N$ abgebildet.

2. Außerdem gilt $T(g \circ f) = (Tg) \circ (Tf)$ und $T(\text{Id}_M) = \text{Id}_{TM}$.

3. Damit wird die Zuordnung

$$M \mapsto TM \quad , \quad f \mapsto Tf$$

zu einem kovarianten Funktor von der Kategorie der C^{r+1} -Mannigfaltigkeiten in die Kategorie der C^r -Mannigfaltigkeiten.

Mittels des Begriffes der Tangentialmannigfaltigkeit haben wir also den Differenzierungsprozess auf Mannigfaltigkeit definiert. $\diamond$

Das Tangentialbündel TM einer Mannigfaltigkeit M und ihr Kotangentialbündel T^*M stehen in einem Verhältnis wie ein Vektorraum und sein Dualraum:

2.45 Definition Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

- Eine Eins-Form auf dem Tangentialraum $T_x M$ von M bei x (also eine lineare Abbildung $T_x M \rightarrow \mathbb{R}$) heißt auch **Kotangentialvektor von M bei x** .
- Der Dualraum von $T_x M$, also der lineare Raum $T_x^* M$ dieser Eins-Formen heißt auch **Kotangentialraum von M bei x** .
- Die Vereinigung $T^* M := \bigcup_{x \in M} T_x^* M$ heißt **Kotangentialbündel von M** .

Damit ist auch $T^* M$ im Sinn von Anhang B ein Vektorbündel über M vom Rang $\dim(M)$. $T^* M$ ist sogar im Sinn von Def. B.4 isomorph zu TM (allerdings nicht kanonisch diffeomorph).

2.46 Bemerkung (Bündelkoordinaten auf $T^* M$)

Wenn mit $n := \dim(M)$ auf einer Umgebung $U \subseteq M$ von x lokale Koordinaten $q = (q_1, \dots, q_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben sind, wird eine Eins-Form p auf $T_x M$ durch die n Zahlen $p_\ell := p\left(\frac{\partial}{\partial q_\ell}(x)\right)$ festgelegt.

Wir identifizieren dann in diesen Koordinaten p mit dem Vektor $(p_1, \dots, p_n)$ und verwenden die Bündelkoordinaten (p, q) auf $T^* U$. $\diamond$

2.6 Topologische Forderungen an Mannigfaltigkeiten

Unser Mannigfaltigkeitsbegriff ist für praktische Zwecke noch zu umfangreich, denn er umschließt auch gewisse nicht hausdorffsche und gewisse hausdorffsche aber nicht parakompakte topologische Räume.

2.47 Definition Ein topologischer Raum heißt **Hausdorff-Raum**, wenn man zu je zwei voneinander verschiedenen Punkten disjunkte Umgebungen finden kann.

2.48 Beispiel (Gerade mit zwei Ursprüngen)

Diese ist ein Beispiel eines eindimensionalen lokal euklidischen topologischen Raums, der nicht hausdorffsch ist. Man setzt dabei

$$M := \widetilde{M}/\sim \quad \text{mit} \quad \widetilde{M} := \mathbb{R} \times \{0\} \cup \mathbb{R} \times \{1\}$$

und durch $(x, 0) \sim (x, 1)$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ erzeugter Äquivalenzrelation, und versieht M mit der Quotiententopologie.

Mit den Karten (φ_i, U_i) für $U_i := \{[x \times \{i\}] \mid x \in \mathbb{R}\}$ und $\varphi_i([x \times \{i\}]) := x$ für $i = 0, 1$ ist M eine C^ω -Mannigfaltigkeit im Sinn von Definition 2.5. $\diamond$

2.49 Definition

Ein Hausdorff-Raum X heißt **parakompakt**, wenn für jede offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von X eine offene Überdeckung $\{V_j\}_{j \in J}$ existiert, die

1. eine **Verfeinerung** von $\{U_i\}_{i \in I}$ ist, d.h. für alle $j \in J$ gibt es ein $i \in I$ mit $V_j \subseteq U_i$

2. und die **lokal endlich** ist, d.h. für alle $x \in X$ gibt es eine Umgebung U_x von x mit

$$\text{card}\{j \in J \mid V_j \cap U_x \neq \emptyset\} < \infty.$$

2.50 Beispiele (Parakompaktheit)

1. Die Familie $(U_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine offene, aber nicht lokal endliche Überdeckung des $\mathbb{R}^n$, siehe Abbildung 2.4, links.
Sie besitzt die lokal-endliche offene Überdeckung $(U_R(z))_{z \in \mathbb{Z}^n}$ als Verfeinerung. Dabei muss für den Radius der an den Gitterpunkten $z \in \mathbb{Z}^n$ zentrierten Kugeln $R > \sqrt{n}/2$ gewählt werden, um zu gewährleisten, dass der $\mathbb{R}^n$ auch wirklich überdeckt wird, siehe Abbildung 2.4, rechts.
2. Es gibt eine nicht parakompakte eindimensionale topologische Mannigfaltigkeit, die sogenannte **Lange Gerade**, siehe Hirsch [Hi, Kapitel 1.1, Aufgabe 9]. $\diamond$

Die Forderung der Parakompaktheit bedeutet praktisch keine große Einschränkung. Sie ist erfüllt, wenn die Topologie des lokal euklidischen Raumes von einer Metrik erzeugt wird, also etwa wenn M als Teilmenge eines $\mathbb{R}^m$ definiert wird.

2.51 Definition

- Eine **Zerlegung der Eins** (englisch: **partition of unity**) auf einem topologischen Hausdorff-Raum $(M, \mathcal{O})$ ist eine Familie $(f_i)_{i \in I}$ stetiger Funktionen $f_i : M \rightarrow [0, 1]$, so dass für jedes $x \in M$ gilt:
 x hat eine Umgebung U , sodass die Indexmenge $\{j \in I \mid f_j|_U \neq 0\}$ endlich ist, und $\sum_{i \in I} f_i(x) = 1$.

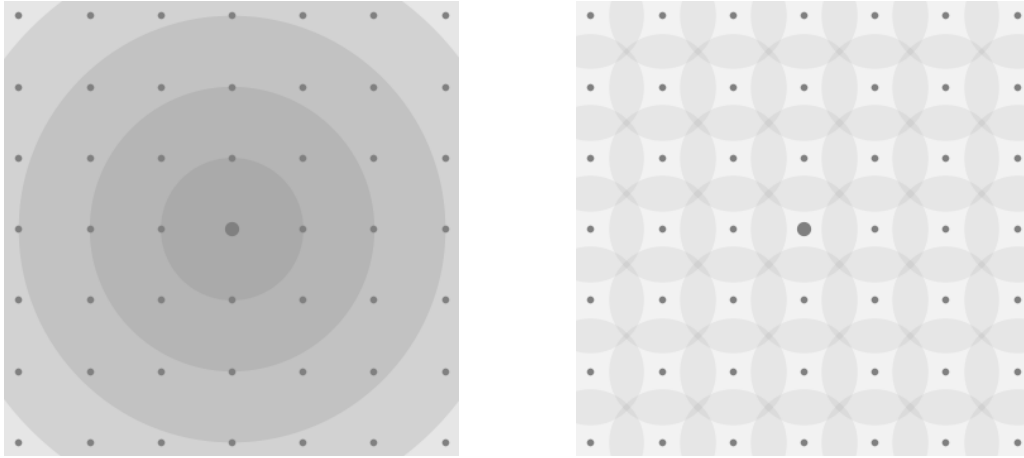


Abbildung 2.4: Überdeckungen des $\mathbb{R}^2$. Links: Nicht lokal endliche Überdeckung $(U_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$. Rechts: Lokal endliche Überdeckung $(U_R(z))_{z \in \mathbb{Z}^n}$ (mit $R = 3/4$).

- Eine Zerlegung der Eins $(f_i)_{i \in I}$ heißt **angepasst an eine offene Überdeckung** $(U_i)_{i \in I}$ von M , wenn für alle $i \in I$ gilt: $\text{supp}(f_i) \subseteq U_i$.

Zerlegungen der Eins sind nützlich, weil man mit ihnen *lokal*, das heißt auf geeigneten Umgebungen U_i definierte Objekte zu einem *global*, d.h. auf ganz M definierten Objekt konvex-kombinieren kann.

Daher klärt der folgende Satz die Bedeutung des Begriffes ‚parakompakt‘:

2.52 Satz Ein topologischer Hausdorff–Raum ist genau dann parakompakt, wenn er für jede offene Überdeckung eine angepasste Zerlegung der Eins besitzt.

Ab jetzt wird angenommen:

(Berandete) Mannigfaltigkeiten sind hausdorffsch und parakompakt, mit abzählbarer Basis.

2.53 Bemerkung Wir werden normalerweise *glatte* (C^∞ –) Mannigfaltigkeiten M untersuchen. Es gibt dann zu der offenen Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ durch Kartengebiete eine angepasste Zerlegung der Eins durch *glatte* Funktionen $(f_i)_{i \in I}$.

Diese kann man bei Bedarf verwenden, um Konstruktionen in den Kartenbildern zu solchen der gesamten Mannigfaltigkeit zusammenzusetzen (etwa die Mannigfaltigkeit mit einer riemannschen Metrik zu versehen). $\diamond$

3 Einbettungen und Immersionen

In diesem Abschnitt werden wir uns mit der Frage beschäftigen, wann es C^r -Abbildungen $f : M \rightarrow N$ zwischen gegebenen C^r -Mannigfaltigkeiten M, N gibt, die M in N *einbetten*, oder, etwas schwächer, eine *Immersion* von M in N darstellen. Um die Abbildung zu linearisieren, müssen wir einfache stetige Differenzierbarkeit von f fordern.

3.1 Definition Sei $f : M \rightarrow N$ eine C^1 -Abbildung zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten M, N , und sei $m \in M$.

- f heißt **immersiv** bei $m \in M$, wenn $T_m f : T_m M \rightarrow T_{f(m)} N$ injektiv, **submersiv** bei $m \in M$, wenn $T_m f$ surjektiv ist.
- f heißt **Immersion**, wenn für alle $m \in M$ f immersiv bei m ist.
- f heißt **Submersion**, wenn für alle $m \in M$ f submersiv bei m ist.
- f heißt **Einbettung**, wenn f eine Immersion ist, die M homöomorph auf $f(M)$ abbildet. (In Zeichen: $f : M \hookrightarrow N$)

3.2 Beispiele

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3$ ist ein Homöomorphismus, aber bei $x = 0$ nicht immersiv.
2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto \begin{pmatrix} x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$ ist bei $x = 0$ nicht immersiv, siehe Abbildung 3.1.
3. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist für $n \geq 2$ keine Submersion.
4. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1, x \mapsto \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$ ist eine Immersion und eine Submersion, aber keine Einbettung. $g : \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{S}^1, [x] \mapsto \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$ ist wohldefiniert und eine surjektive Einbettung, also ein Diffeomorphismus.
5. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto x \exp(-x^2) \begin{pmatrix} 1 \\ x^2 \end{pmatrix}$ ist eine injektive Immersion, aber keine Einbettung, siehe Abbildung 3.1.
6. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \tanh(x)$ ist eine nicht abgeschlossene Einbettung. ◇

3.3 Aufgabe (punktierter Torus)

Es sei $p \in \mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Beweisen Sie, dass es dann zwar keine Immersion $\mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, aber eine Immersion $\mathbb{T}^2 \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ gibt. ◇

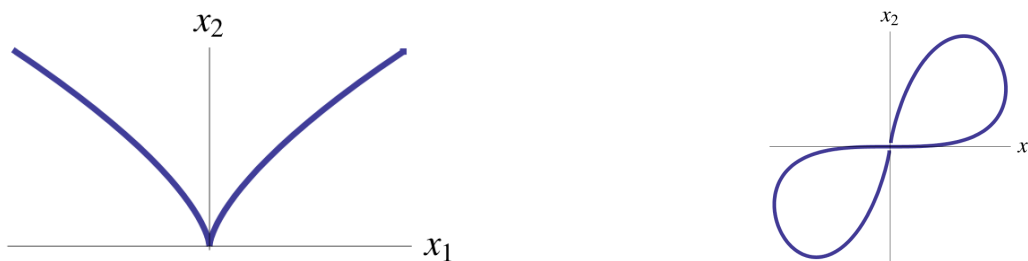


Abbildung 3.1: Beispiel 3.2.2 (links) und Beispiel 3.2.5 (rechts)

3.1 Untermannigfaltigkeiten und Einbettungen

In der Differentialtopologie gibt es eine untrennbare Verbindung zwischen Aussagen über Mannigfaltigkeiten und Aussagen über differenzierbare Abbildungen zwischen ihnen. Ein Beispiel dafür ist der folgende Satz:

3.4 Satz

Sei N eine C^r -Mannigfaltigkeit mit $r \geq 1$. Eine Teilmenge $A \subseteq N$ ist genau dann eine C^r -Untermannigfaltigkeit, wenn A das Bild einer C^r -Einbettung ist.

Beweis:

" $\implies$ ":

Sei A eine m -dimensionale C^r -Untermannigfaltigkeit von N im Sinn von Definition 2.23, d.h. für jedes $a \in A$ gibt es eine Karte $(\varphi, U) \in \mathcal{A}_N$ mit $a \in U$ und $A \cap U = \varphi^{-1}(\varphi(U) \cap \mathbb{R}^m \times \{0\})$. Dann ist $(\varphi|_{A \cap U}, A \cap U)$ eine lokale Karte für A , und wir erhalten so einen C^r -Atlas Φ_A von A . Durch Übergang zum maximalen Atlas $\mathcal{A}_A \supseteq \Phi_A$ wird $(A, \mathcal{A}_A)$ zu einer C^r -Mannigfaltigkeit.

Die Inklusion $I : A \rightarrow N$ ist eine C^r -Einbettung im Sinn von Definition 3.1, denn I ist eine injektive Immersion, deren Inverse stetig ist.

" $\impliedby$ ":

Es sei $f : M \hookrightarrow N$ eine C^r -Einbettung einer Mannigfaltigkeit M , und $A := f(M)$. Wir teilen den Beweis, dass A eine Untermannigfaltigkeit von N ist, in vier Schritte auf, um die elementaren Techniken der Differentialtopologie zu üben.

1. Lokalisierung

Da f eine Einbettung ist, ist insbesondere $f : M \rightarrow A \subseteq N$ ein Homöomorphismus. Wir erinnern uns, dass die Teilraumtopologie auf A das Mengensystem $\{A \cap O \mid O \in \mathcal{O}_N\}$ ist.

Außerdem gibt es wegen der Stetigkeit von f einen Atlas $\{(\varphi_i, M_i) \mid i \in I\}$

von M und eine Familie $\{(\psi_j, N'_j) \mid j \in J\}$ von Karten von N mit $I \subseteq J$ und

$$f(M_i) \subseteq N'_i \quad (i \in I).$$

Da die $f(M_i) \subseteq A \subseteq N$ offen sind, können wir durch Restriktion auf offene Teilmengen $N_i \subseteq N'_i$ annehmen, dass $f(M_i) = A \cap N_i$ gilt.

Wir definieren durch die lokalen Darstellungen

$$f_i \in C^r(\varphi_i(M_i), \mathbb{R}^n) \quad , \quad x \mapsto \psi_i \circ f \circ \varphi_i^{-1}(x)$$

von f eine C^r -Einbettung. Nach Definition 2.23 ist $A = f(M)$ genau dann eine Untermannigfaltigkeit von N , wenn gilt:

$$A_i := f(M_i) \subseteq N_i \text{ ist eine Untermannigfaltigkeit von } N_i \quad (i \in I). \quad (3.1)$$

Wir beweisen (3.1), indem wir zeigen, dass $f_i(\varphi_i(M_i))$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist.

2. Affine Transformation in eine Normalform

Wir lassen jetzt die Indizes $i \in I$ weg und betrachten für eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^m$ und $n \geq m$ eine Abbildung $f \in C^r(U, \mathbb{R}^n)$, bei der für ein $u \in U$ gilt:

$$\text{rang}(D_u f) = m.$$

Der Bequemlichkeit halber verwenden wir eine andere Bildkarte des $\mathbb{R}^n$:
Zunächst existiert für $D_u f \in \text{Mat}(n \times m, \mathbb{R})$ eine "Linksinverse" $L \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$, sodass

$$L D_u f = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_m \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}(n \times m, \mathbb{R}).$$

Mit der Affinität $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\rho(z) = L(z - f(u))$ des Bildraums setzen wir

$$g := \rho \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^n \quad , \text{ also } g(x) = L(f(x) - f(u)).$$

Damit ist $g(u) = 0$ und $D_u g = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_m \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. Satz von der Umkehrabbildung

Wir fassen die ersten m bzw. die restlichen $n - m$ Komponenten von g zusammen:

$$g = (g^I, g^{II})^t : U \longrightarrow \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{n-m} = \mathbb{R}^n.$$

Wegen $D_u g^I = \mathbb{1}_m$ existiert nach dem Satz von der Umkehrabbildung eine Umgebung $U' \subseteq U$ von u sodass $g^I|_{U'}$ ein C^r -Diffeomorphismus auf sein Bild ist. Damit ist $g(U')$ bei $g(u) = 0$ tangential an $\mathbb{R}^m \times \{0\}_{n-m}$.

4. Linearisierung

Wir definieren für eine Umgebung $W \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$ von 0 eine C^r -Abbildung

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^I \\ \psi^{II} \end{pmatrix} : V' \times W \rightarrow \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{n-m}$$

durch

$$\psi^I(y) := y^I, \quad \psi^{II}(y) := y^{II} - g^{II}((g^I)^{-1}(y^I)) \quad (y = \begin{pmatrix} y^I \\ y^{II} \end{pmatrix} \in V' \times W).$$

Wegen $D_u g^{II} = 0$ ist, bei geeigneter Wahl von V' und W , ψ ein C^r -Diffeomorphismus auf sein Bild, d.h. eine Kartenabbildung.

Außerdem gilt $\psi(g(x)) = \begin{pmatrix} g^I(x) \\ 0 \end{pmatrix}$, sodass wir $g(V')$ als m -dimensionale C^r -Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ entlarvt haben. $\square$

3.5 Bemerkung (infinitesimal, lokal und global)

Der vorliegende Satz besagt, dass ein durch eine lokale Eigenschaft definiertes Objekt, nämlich eine Untermannigfaltigkeit, das gleiche ist wie ein global definiertes Objekt, eine Einbettung. Der erste Beweisschritt der schwierigeren Richtung (Einbettungen sind Untermannigfaltigkeiten) besteht in einer Lokalisierung auf ein Problem der Analysis, der dritte Schritt (Satz von der Umkehrabbildung) führt eine "infinitesimale" Aussage ($\text{rang}(D_u g)$ maximal) in eine lokale (Invertierbarkeit von g^I in einer Umgebung von u) über.

Beide Schritte werden uns jetzt immer wieder begegnen; wir werden aber mit wachsender Routine weniger ausführlich sein. $\diamond$

3.6 Aufgabe (Einbettung) Zeigen Sie: Eine injektive Immersion einer kompakten Mannigfaltigkeit ist eine Einbettung. Vergleichen Sie mit Beispiel 3.2.5. $\diamond$

3.7 Definition Sei $f \in C^1(M, N)$ eine Abbildung der Mannigfaltigkeiten M, N .

- $m \in M$ heißt **regulärer Punkt** von f , wenn f submersiv bei m ist. Sonst heißt m **kritischer Punkt**⁷ von f .
- $n \in N$ heißt **regulärer Wert** von f , wenn alle $m \in f^{-1}(n)$ reguläre Punkte sind; sonst n **kritischer Wert** von f .
- $\text{crp}(f) \subseteq M$ bezeichnet die Menge der kritischen Punkte von M .
 $\text{crv}(f) := f(\text{crp}(f)) \subseteq N$ ist damit die Menge der kritischen Werte.

⁷**Achtung:** Manchmal wird stattdessen $m \in M$ **kritischer Punkt** von f genannt, wenn die lineare Abbildung $T_m f : T_m M \rightarrow T_{f(m)} N$ nicht den maximal möglichen Rang $\min(\dim(M), \dim(N))$ hat, und sonst **regulärer Punkt**. Zum Beispiel ist eine **reguläre Kurve** $c \in C^1(I, N)$ eine, die keine kritischen Punkte hat, deren Ableitung also nirgends Null ist.

- Ist n ein regulärer Wert, dann heißt $f^{-1}(n) \subseteq M$ **reguläre Niveaufläche**.

3.8 Satz (vom regulären Wert) Sei $f \in C^r(M, N)$, $r \geq 1$. Wenn $n \in f(M)$ regulärer Wert von f ist, dann ist $f^{-1}(n) \subseteq M$ eine C^r -Untermannigfaltigkeit.

Beweis: Nach Lokalisierung wie in Satz 3.4 können wir den Satz von der impliziten Funktion anwenden (Satz 8.19 der *Analysis II*). $\square$

3.9 Notation (regulärer Wert)

Ein regulärer Wert $n \in N$ muss nicht in $f(M) \subseteq N$ liegen. Dann ist $f^{-1}(n)$ natürlich die leere Menge. Diese scheinbar unsinnige Definition wird uns nach Einführung des Transversalitätsbegriffes lästige Fallunterscheidungen ersparen. $\diamond$

3.10 Definition Sei $f \in C^1(M, N)$ und A eine C^1 -Untermannigfaltigkeit von N . f heißt **transversal** zu A , wenn gilt:

$$T_{f(x)}A + (T_x f)(T_x M) = T_{f(x)}N \quad (x \in f^{-1}(A)).$$

3.11 Bemerkungen (Transversalität)

1. Für $\dim(A) + \dim(M) < \dim(N)$ muss dann $f^{-1}(A) = \emptyset$ gelten.
2. Transversalität ist immer durch eine kleine Variation von f (bzw. von A) erreichbar, siehe Satz 5.2. Insofern entspricht der Transversalitätsbegriff der Vorstellung, dass f und A "in allgemeiner Lage" sind. $\diamond$

Wir verallgemeinern damit den Satz vom regulärer Wert:

3.12 Satz Sei $f \in C^r(M, N)$, $r \geq 1$ und $A \subseteq N$ eine C^r -Untermannigfaltigkeit.

- Wenn f transversal zu A ist, dann ist $f^{-1}(A)$ eine C^r -Untermannigfaltigkeit von M .
- Die Kodimension von $f^{-1}(A)$ in M ist gleich der Kodimension von A in N .

3.13 Bemerkungen ((Ko-)dimension einer Untermannigfaltigkeit)

1. Die *Kodimension* von A in N ist definiert als $\text{codim}(A) := \dim(N) - \dim(A)$.
2. Es kann $\dim(f^{-1}(A)) = \dim(M) - \text{codim}(A) < 0$ vorkommen, siehe Bemerkung 3.11.1. Allgemein interpretieren wir $\dim(P) < 0$ als $P = \emptyset$. $\diamond$

Beweis von Satz 3.12:

Wir setzen $m := \dim(M)$, $n := \dim(N)$ und $a := \dim(A)$.

Die Aussage lässt sich lokal, d.h. für $x \in f^{-1}(A)$ im Bild einer Karte bei $y := f(x) \in A \subseteq N$ überprüfen. Nach Definition 2.23 von Untermannigfaltigkeiten gibt es eine Karte (ψ, W) von N bei y , mit

$$\psi(y) = 0, \quad \psi(W) = U \times V \subseteq \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^a \times \mathbb{R}^{n-a}, \quad \text{und} \quad \psi(A \cap W) = U \times \{0\}.$$

In einer lokalen Darstellung (siehe Definition 2.30) von f ist diese Abbildung nach Umbenennung von der Form $f \in C^r(M, U \times V)$, mit $M \subseteq \mathbb{R}^m$ offen.

Mit der Projektion $\pi_2 : U \times V \rightarrow V$, $(u, v) \mapsto v$ auf die zweite Komponente ist f genau dann transversal zu $A = U \times \{0\}$, wenn 0 regulärer Wert von $\pi_2 \circ f : M \rightarrow V$ ist. Dann ist nach Satz 3.8 $f^{-1}(A) = (\pi_2 \circ f)^{-1}(0)$ eine Untermannigfaltigkeit von M , mit

$$\dim(f^{-1}(A)) = \dim(M) - \dim(V) = m - (n - a) = \dim(M) - \text{codim}(A). \quad \square$$

3.2 Die Einbettungssätze von Whitney

Wir haben in der Zwischenzeit einige Mannigfaltigkeiten abstrakt, d.h. ohne Rückgriff auf eine Einbettung in den $\mathbb{R}^n$ definiert. So wurden die projektiven Räume $\mathbb{RP}^n$ in Beispiel 2.12 durch Äquivalenzklassenbildung eingeführt. Dass die Ausgangsmannigfaltigkeit $\mathbb{S}^n$ in diesem Fall in den $\mathbb{R}^{n+1}$ eingebettet war, heißt nicht, dass eine solche Einbettung auch für den $\mathbb{RP}^n$ existieren muss, und tatsächlich lässt sich der $\mathbb{RP}^2$ nicht in den $\mathbb{R}^3$ einbetten (nur in den $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$).

Wir werden in Satz 3.14 zunächst zeigen, dass für kompakte m -dimensionale Mannigfaltigkeiten eine Einbettung in einen $\mathbb{R}^n$ überhaupt existiert, wobei n im Allgemeinen groß sein wird. Im Satz 3.15 werden wir n auf $2m + 1$ drücken.

3.14 Satz *Sei M eine kompakte C^r -Mannigfaltigkeit, mit $1 \leq r \leq \infty$. Dann existiert für ein $q \in \mathbb{N}$ eine C^r -Einbettung $g : M \rightarrow \mathbb{R}^q$.*

Beweis: Zunächst bemerken wir, dass der Fall reell-analytischer Einbettungen ausgespart wurde. Das liegt an der Lokalisierungsmethode des Beweises.

Zum zweiten erinnern wir uns daran, dass wir eine Mannigfaltigkeit M durch Karten und Kartenwechsel definieren (Def. 2.3). Wir werden also versuchen, zunächst die einzelnen Kartengebiete einzubetten und dann diese Einbettungen aneinanderzusetzen. Wegen der Kompaktheit hat M einen endlichen Atlas

$$\Phi = \{(\varphi_i, U_i) \mid i \in \{1, \dots, l\}\}.$$

Definieren wir die abgeschlossene Vollkugel im $\mathbb{R}^n$ vom Radius r durch $D^n(r) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq r\}$, dann finden wir sogar einen solchen Atlas Φ , für den gilt:

$$\varphi_i(U_i) \supseteq D^m(2) \quad \text{und} \quad M = \bigcup_{i=1}^l \text{int}(\varphi_i^{-1}(D^m(1))). \quad (3.2)$$

Den inneren Ball $D^m(1)$ werden wir nutzen, um eine lokale Einbettung sicherzustellen, und in $D^m(2) \setminus D^m(1)$ die Anheftung an die anderen Abbildungen besorgen. Daher definieren wir eine *Abschneidefunktion* auf dem $\mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned} \lambda \in C^\infty(\mathbb{R}^m, [0, 1]) \quad & \text{mit} \quad \lambda(x) = 1 \quad \text{für} \quad x \in D^m(1) \\ & \text{und} \quad \lambda(x) = 0 \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^m \setminus D^m(2). \end{aligned}$$

Mittels der Kartenabbildungen φ_i machen wir aus λ Funktionen auf M :

$$\lambda_i \in C^r(M, [0, 1]) \quad , \quad \lambda_i(x) := \begin{cases} \lambda \circ \varphi_i & , x \in U_i \\ 0 & , x \in M \setminus U_i \end{cases} \quad (i = 1, \dots, l).$$

Nach der Voraussetzung (3.2) überdecken die $B_i := \lambda_i^{-1}(1) \subseteq U_i$ die Mannigfaltigkeit M . Eingeschränkt auf $\text{int}(B_i)$ sind damit die Abbildungen

$$f_i \in C^r(M, \mathbb{R}^m) \quad , \quad f_i(x) := \begin{cases} \lambda_i(x)\varphi_i(x) & , x \in U_i \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

injektive Immersionen.

$$g_i := (f_i, \lambda_i) : M \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{m+1} \quad \text{und} \quad g := (g_1, \dots, g_l) : M \rightarrow \mathbb{R}^q$$

mit $q := (m+1)l$ sind r -fach stetig differenzierbar.

Wegen der entsprechenden Eigenschaft der $f_i|_{\text{int}(B_i)}$ ist g eine injektive Immersion. Denn sei $x, y \in M$, $y \in B_i$ und $g(x) = g(y)$. Dann ist $\lambda_i(x) = \lambda_i(y) = 1$, also auch $x \in B_i$. $f_i|_{\text{int}(B_i)}$ ist aber ein Diffeomorphismus auf das Bild.

Da M kompakt ist, ist g eine Einbettung. $\square$

Nachdem wir jetzt eine Einbettung $M \hookrightarrow \mathbb{R}^q$ der m -dimensionalen Mannigfaltigkeit M in *einen* hochdimensionalen Vektorraum erreicht haben, werden wir die Dimension auf $2m+1$ drücken.

3.15 Satz (Einbettungssatz von Whitney, schwache Version)

Sei M eine kompakte C^r -Mannigfaltigkeit mit $2 \leq r \leq \infty$. Dann existiert eine C^r -Einbettung $M \hookrightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$ mit $m := \dim(M)$.

3.16 Bemerkung (Differenzierbarkeitsstufen)

Die Aussage ist auch für C^1 - und sogar C^0 -Mannigfaltigkeiten wahr, siehe HIRSCH [Hi, Seite 27]. Sie stimmt ebenso für C^ω -Mannigfaltigkeiten, siehe MORREY [Morr]. Die Schwierigkeit liegt hier in einer zu Satz 3.14 analogen Aussage, während der Beweis von Satz 3.15 unverändert funktioniert. $\diamond$

Beweis von Satz 3.15:

- Zunächst gibt es nach Satz 3.14 für ein geeignetes $q \in \mathbb{N}$ eine C^r -Einbettung $i_q : M \hookrightarrow \widetilde{M} \subseteq \mathbb{R}^q$ von M . Für $q \leq 2m + 1$ sind wir fertig.
- Also nehmen wir $q > 2m + 1$ an, und konstruieren daraus eine Einbettung in den $\mathbb{R}^{q-1} \equiv \mathbb{R}^{q-1} \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^q$, indem wir $\widetilde{M}$ injektiv in diese Hyperebene projizieren. Wir projizieren längs eines Vektors $v \in \mathbb{R}^q \setminus (\mathbb{R}^{q-1} \times \{0\})$, d.h. wir betrachten die durch

$$f_v : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^{q-1} \quad , \quad x \mapsto x - \frac{x \cdot v}{v \cdot v} v \quad (3.3)$$

gegebene lineare Abbildung.

Wir dürfen $v \in \mathbb{R}^q \setminus \mathbb{R}^{q-1}$ als normiert annehmen, also $v \in \mathbb{S}^{q-1} \setminus \mathbb{S}^{q-2}$, mit dem Äquator $\mathbb{S}^{q-2} \equiv \mathbb{S}^{q-1} \times \{0\} \subseteq \mathbb{S}^{q-1}$. Natürlich wird nicht jeder solche Vektor zu einer Projektion f_v führen, die eine Einbettung von M in $\mathbb{R}^{q-1}$ definiert.

Wenn es eine Sekante oder Tangente von $\widetilde{M} \subseteq \mathbb{R}^q$ parallel zu v gibt, wird die Injektivität der Abbildung bzw. deren Immersivität verletzt. Mit anderen Worten, es darf weder Punkte $x \neq y \in \widetilde{M} \subseteq \mathbb{R}^q$ geben mit $v = \frac{x-y}{\|x-y\|}$, noch $z \in M$ mit $v \in T_z \widetilde{M}$.

- Wir untersuchen die erste Bedingung, indem wir für die $2m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit

$$N := (\widetilde{M} \times \widetilde{M}) \setminus \Delta \quad \text{mit der Diagonale } \Delta := \{(a, b) \in \widetilde{M} \times \widetilde{M} \mid a = b\}$$

von $\mathbb{R}^{2q}$ die Abbildung auf die Sekantenrichtung

$$\sigma \in C^r(N, \mathbb{S}^{q-1}) \quad , \quad \sigma(x, y) := \frac{x - y}{\|x - y\|} \quad (3.4)$$

untersuchen. Wir müssen also verlangen, dass unser Projektionsvektor v in

$$\mathbb{S}^{q-1} \setminus (\mathbb{S}^{q-2} \cup \sigma(N))$$

liegt. Finden wir überhaupt so ein v ? Einerseits ist die Untermannigfaltigkeit $\mathbb{S}^{q-1} \setminus \mathbb{S}^{q-2}$ in $\mathbb{S}^{q-1}$ offen und dicht. Andererseits ist nach Voraussetzung

$$\dim(\mathbb{S}^{q-1}) = q - 1 > 2m = \dim(N). \quad (3.5)$$

Daher würde man intuitiv erwarten, dass das Bild $\sigma(N)$ der niedrig-dimensionalen Mannigfaltigkeit N nicht ganz $\mathbb{S}^{q-1} \setminus \mathbb{S}^{q-2}$ überdecken kann.

Das ist in unserem Fall wahr. Da für die in (3.4) definierte Abbildung σ gilt, dass $\dim(N) < \dim(\mathbb{S}^{q-1})$ ist und sie stetig differenzierbar ist, ist jeder Punkt

von N kritisch, und die Voraussetzungen von Proposition 4.17 und des Satzes 4.15 von Morse und Sard sind erfüllt. Beide besagen dann, dass $\sigma(N) \subseteq \mathbb{S}^{q-1}$ eine Nullmenge ist und das Komplement $\mathbb{S}^{q-1} \setminus (\sigma(N))$ dicht ist.

Ohne eine Differenzierbarkeitsannahme an f könnte man aber solche Dimensionsbetrachtungen sicher nicht anstellen, siehe Beispiel 1.1.

- Wir mussten gleichzeitig sicherstellen, dass kein Tangentialvektor an $\widetilde{M}$ parallel zum Projektionsvektor v ist.

Dazu betrachten wir zunächst das *Einheits-Tangentialbündel*

$$T^1\widetilde{M} := \{z \in T\widetilde{M} \mid \|z\| = 1\}.$$

Die euklidische Länge $\|z\|$ eines Tangentialvektors z ist wohldefiniert, da ja M als $\widetilde{M} \subseteq \mathbb{R}^q$ eingebettet wurde, sodass ein Tangentialvektor $z \in T_m\widetilde{M} \subseteq T_m\mathbb{R}^q \cong \mathbb{R}^q$ als Vektor in $\mathbb{R}^q$ aufgefasst werden kann.

Zunächst ist das Einheits-Tangentialbündel eine C^{r-1} -Mannigfaltigkeit, denn

$$T^1\widetilde{M} = \nu^{-1}(1) \quad \text{mit} \quad \nu \in C^{r-1}(T\widetilde{M}, \mathbb{R}^q), \quad \nu(z) = \|z\|^2,$$

und 1 ist ein regulärer Wert von ν , denn für $\|z\| = 1$ ist $\frac{d}{dt}\nu(tz)|_{t=1} = 2$. Da $\nu \in C^{r-1}(T\widetilde{M}, \mathbb{R}^q)$, wird $T^1\widetilde{M}$ nach Satz 3.8 eine C^{r-1} -Untermannigfaltigkeit der C^{r-1} -Mannigfaltigkeit $T\widetilde{M}$, mit $\dim(T^1\widetilde{M}) = 2m - 1$.

$T^1\widetilde{M}$ hat gegenüber $T\widetilde{M}$ den Vorteil kompakt zu sein, denn $\widetilde{M}$ ist kompakt, und an jedem Punkt von $\widetilde{M}$ heftet man eine $(m-1)$ -dimensionale Sphäre an.

Wir betrachten jetzt die Abbildung

$$\tau \in C^{r-1}(T^1\widetilde{M}, \mathbb{S}^{q-1}) \quad , \quad \tau(z, v) = v \in T_z\widetilde{M} \subseteq T_z\mathbb{R}^q \cong \mathbb{R}^q \quad (z \in M),$$

die geometrisch durch Parallelverschieben des Vektors in $T^1\widetilde{M}$ gegeben ist. Wegen der Voraussetzung $r \geq 2$ ist τ stetig differenzierbar. Außerdem ist $\dim(T^1\widetilde{M}) = 2m - 1 < 2m \leq \dim(\mathbb{S}^{q-1})$. Also ist nach Korollar 4.17 das Komplement von $\tau(T^1\widetilde{M})$ in $\mathbb{S}^{q-1}$ dicht. Gleichzeitig ist $\tau(T^1\widetilde{M})$ als stetiges Bild einer kompakten Menge kompakt, $\mathbb{S}^{q-1} \setminus \tau(T^1\widetilde{M})$ also *offen* und dicht. Damit ist auch

$$\mathbb{S}^{q-1} \setminus (\tau(T^1\widetilde{M}) \cup \sigma(N) \cup \mathbb{S}^{q-2})$$

in $\mathbb{S}^{q-1}$ offen und dicht, enthält also einen Punkt v . Wir haben damit eine injektive Immersion der kompakten Mannigfaltigkeit M in $\mathbb{R}^{q-1}$

$$i_{q-1} := f_v \circ i_q : M \rightarrow \mathbb{R}^{q-1}$$

konstruiert. Wegen der Kompaktheit von M ist i_{q-1} aber eine Einbettung, denn nach Lemma 5.16 des *Topologie-Skripts* ist eine stetige Bijektion eines kompakten Raums auf einen Hausdorff-Raum ein Homöomorphismus. $\square$

3.17 Korollar

Seien M, N kompakte C^r -Mannigfaltigkeiten mit $2 \leq r \leq \infty$, M kompakt und $\dim(N) \geq 2 \dim(M) + 1$. Dann existiert eine Einbettung $f \in C^r(M, N)$.

Beweis: Denn der $\mathbb{R}^n$, in den wir M nach Satz 3.15 einbetten können, ist zur offenen Kugel $B^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ diffeomorph; die Abbildung $\varphi \in C^\infty(B^n, \mathbb{R}^n)$, $x \mapsto \frac{x}{1-\|x\|^2}$ ist ein Diffeomorphismus, mit $\varphi^{-1}(y) = \frac{2y}{1+\sqrt{1+\|y\|^2}}$.

Nach eventueller Verkleinerung lässt sich aber die Kugel durch die Inverse einer Kartenabbildung offen in die n -dimensionale Mannigfaltigkeit N einbetten. $\square$

Der Einbettungssatz 3.15 lässt sich relativ einfach beweisen, weil durch eine kleine Änderung eines vorgegebenen Projektionsvektors v eine Einbettung erreicht werden konnte.

Zwar kann man eine m -dimensionale kompakte Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^{2m}$ einbetten, doch der Beweis [Wh2] dieser *starken Version des Einbettungssatzes von Whitney* kommt nicht ohne globale Methoden aus (siehe Seite 4). Entsprechend existiert keine $2m$ -Variante des folgenden Approximationssatzes.

3.18 Satz Sei M eine kompakte C^r -Mannigfaltigkeit mit $2 \leq r \leq \infty$, und $g \in C^r(M, \mathbb{R}^n)$ für $n \geq 2 \dim(M) + 1$.

Dann existiert für alle $\epsilon > 0$ eine Einbettung $f \in C^r(M, \mathbb{R}^n)$ mit

$$\max\{\|f(x) - g(x)\| \mid x \in M\} < \epsilon.$$

Beweis:

- Zunächst ergänzt man g durch eine Einbettung $h \in C^r(M, \mathbb{R}^s)$ mit einem geeigneten $s \in \mathbb{N}$ und betrachtet für $q := n + s$

$$H := g \times h : M \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s \equiv \mathbb{R}^q.$$

Dadurch wird M als $\widetilde{M} := H(M)$ eingebettet.

- Beginnend mit $H^{(q)} := H$ konstruieren wir Einbettungen der Form

$$H^{(q-t)} \in C^r(M, \mathbb{R}^{q-t}) \quad , \quad H^{(q-t-1)} = f_{v^{(q-t)}}^{(q-t)} \circ H^{(q-t)} \quad (t = 1, \dots, s),$$

wobei $f_w^{(\ell)} : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}^{\ell-1}$ die Projektion entlang $w \in \mathbb{S}^{\ell-1} \setminus \mathbb{S}^{\ell-2}$ ist, siehe (3.3). Für $v^{(\ell)} := e_\ell = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{S}^{\ell-1} \setminus \mathbb{S}^{\ell-2} \subseteq \mathbb{R}^\ell$ ($\ell = n+1, \dots, q$) ist

$$H^{(n)} = g.$$

Nach Satz 3.15 gibt es in jeder Umgebung der $e_\ell \in \mathbb{S}^{\ell-1}$ Vektoren $v^{(\ell)}$, für die $H^{(\ell-1)} : M \rightarrow \mathbb{R}^{\ell-1}$ eine Einbettung ist, wenn $H^{(\ell)} : M \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ eine war. $\square$

Wir wissen schon, wann eine Abbildung $f \in C^1(M, N)$ zwischen den (glat-
ten) Mannigfaltigkeiten M und N transversal zu einer Untermannigfaltigkeit
 $A \subseteq N$ ist (Definition 3.10). Falls dies aber nicht der Fall ist, kann man Trans-
versalität durch eine kleine Änderung von f erreichen? Um diese Frage zu präzi-
sieren, muss man offensichtlich eine Topologie auf $C^1(M, N)$ definieren.

3.3 Topologien auf Abbildungsräumen

Wir betrachten zunächst einmal das entsprechende Problem für *topologische
Räume* $(M, \mathcal{O}_M)$, $(N, \mathcal{O}_N)$. Der Raum $C(M, N)$ soll also mit einer Topologie zu
versehen werden. Welche bieten sich an?

1. Die Topologie der *punktweisen Konvergenz* ist die gleiche wie die Restriktion
des mit der Produkttopologie versehenen Raums $\text{Abb}(M, N) \cong \times_{m \in M} N$ auf
 $C(M, N)$. Da sie nicht von der Topologie auf M abhängt, ist sie für unsere
Zwecke nicht zu gebrauchen.
2. Die *kompakt-offene Topologie* $\mathcal{O}_{\text{KO}}$ auf $C(M, N)$ wird von der *Subbasis*

$$\{\mathcal{U}(K, V) \mid K \subseteq M \text{ kompakt, } V \subseteq N \text{ offen}\}$$

mit $\mathcal{U}(K, V) := \{f \in C(M, N) \mid f(K) \subseteq V\}$ erzeugt. Da $\mathcal{O}_{\text{KO}}$ auch
als *schwache* (englisch: *weak*) Topologie bezeichnet wird, ist $C_W(M, N)$ die
Schreibweise für den mit $\mathcal{O}_{\text{KO}}$ topologisierten Funktionenraum.

In Abschnitt 5.5 des *Topologie-Skripts* wird erklärt, welche Eigenschaften diese
Topologie auszeichnen. Ist M nicht kompakt, dann wird das Verhalten von
 $f \in C(M, N)$ 'bei Unendlich' durch $\mathcal{O}_{\text{KO}}$ nicht kontrolliert, denn die von der
Subbasis erzeugte *Basis* besteht ja aus Mengen der Form $\bigcap_{i=1}^k \mathcal{U}(K_i, V_i)$.

3. Die *starke Topologie* wird durch die *Umgebungsbasis* der

$$U_W(f) := \{g \in C(M, N) \mid \text{graph}(g) \subseteq W\}$$

von $f \in C(M, N)$ definiert, wobei $W \subseteq M \times N$ eine offene Umgebung von
 $\text{graph}(f)$ ist. Man verwendet die Schreibweise $C_S(M, N)$.

Die starke ist *feiner* als die schwache Topologie. Ist M kompakt, dann sind
die beiden Topologien einander gleich.

Alle diese Topologien sind in der Differentialtopologie nicht so nützlich, weil sie
nicht das Verhalten der Ableitung vorschreiben (siehe aber Seite 46).

3.19 Beispiel Für die Kreislinie $\mathbb{S}^1 := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ konvergiert die Folge der $f_n \in$
 $C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$, $f_n(x) = \sin(nx)/n$ in $C_W(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}) = C_S(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ gegen die Nullfunk-
tion, obwohl die Folge der Ableitungen $f'_n(x) = \cos(nx)$ nicht konvergiert. $\diamond$

Nun sind für $r \in \mathbb{N}_0$ die Ableitungen von $f \in C^r(M, N)$ in den lokalen Kartendarstellungen von f definiert. Das macht man sich zunutze, um auf diesem Funktionenraum brauchbare Topologien zu definieren:

3.20 Definition

Es seien M und N C^r -Mannigfaltigkeiten mit $r \in \mathbb{N}_0$, und $f \in C^r(M, N)$.

- Die **schwache Topologie auf $C^r(M, N)$** wird durch die folgende Umgebungs-Subbasis von $f \in C^r(M, N)$ bestimmt. Es seien (φ, U) und (ψ, V) Karten von M bzw. N , $K \subseteq U$ kompakt mit $f(K) \subseteq V$ und $\varepsilon > 0$.

$$\{g \in C^r(M, N) \mid g(K) \subseteq V, \forall k = 0, \dots, r, \forall x \in \varphi(K) : \quad (3.6) \\ \|D^k(\psi \circ g \circ \varphi^{-1})(x) - D^k(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x)\| < \varepsilon\}$$

ist dann ein Element der Umgebungs-Subbasis.

Der so definierte topologische Raum wird mit $C_W^r(M, N)$ bezeichnet.

- Die **starke oder Whitney-Topologie auf $C^r(M, N)$** wird durch folgende Umgebungs-Basis von f bestimmt. Es sei $\Phi = \{(\varphi_i, U_i) \mid i \in I\}$ eine Familie von Karten von M , für die $\{U_i \mid i \in I\}$ lokal endlich ist.

Die Elemente der Umgebungs-Basis bestehen aus dem Schnitt von Mengen der Form (3.6), für die Karten (φ_i, U_i) von M und Kompakta $K_i \subseteq U_i$.

Der so definierte topologische Raum wird mit $C_S^r(M, N)$ bezeichnet.

- Die **schwache und die starke Topologie auf $C^\infty(M, N)$** wird durch die Inklusionen $I_r : C^\infty(M, N) \rightarrow C_{W/S}^r(M, N)$ mit $r \in \mathbb{N}$ induziert. Sie sind also die größten Topologien, bezüglich derer die I_r stetig sind.

3.21 Bemerkung (Jets)

Da Def. 3.20 über (3.6) von Karten und Matrixnormen abhängt, erscheinen die Topologien $C_{W/S}^r(M, N)$ weit weniger konzeptionell als die von $C_{W/S}(M, N)$ auf Seite 44. Bei Kartenwechsel verändern sich die Ableitungen in (3.6) recht kompliziert, nach der (multivariaten) **Formel von Faà di Bruno**.

Die Sprache der **Jets** ermöglicht aber eine kartenunabhängige Definition, siehe [Hi, Chapter 2.4], sowie KOLÁR, MICHOR und SLOVÁČ [KMS, Chapter 12], und $C_{W/S}^0(M, N)$ stimmt mit $C_{W/S}(M, N)$ überein.

$f, g \in C^r(M, N)$ definieren bei $x \in M$ den gleichen r -Jet, wenn in einer lokalen Darstellung bei x ihre Taylor-Polynome der Ordnung r übereinstimmen. Dies definiert eine Äquivalenzrelation, deren Äquivalenzklassen in der Form $j_x^r f$ geschrieben werden (es gilt also $j_x^r f = j_x^r g$). Die Menge dieser Äquivalenzklassen wird mit

$$J^r(M, N)$$

bezeichnet. Dies ist selbst eine Mannigfaltigkeit, die in der lokalen Darstellung $\tilde{f}$ von f bei x mit $m := \dim(M)$ und $n := \dim(N)$ durch die folgenden Koordinaten gegeben sind:⁸

$$x = (x_1, \dots, x_m) \quad \text{und} \quad \partial^s \tilde{f}_\ell(x) \quad (\ell = 1, \dots, n, \quad s \in \mathbb{N}_0^m \text{ mit } |s| \leq r).$$

Beispielsweise ist $J^0(M, N) = M \times N$. Es ergibt sich die folgende Struktur von Bündel-Projektionen.

$$J^r(M, N) \rightarrow J^{r-1}(M, N) \rightarrow \dots \rightarrow J^1(M, N) \rightarrow J^0(M, N) \begin{array}{l} \nearrow M \\ \searrow N \end{array}.$$

$f \in C^r(M, N)$ definiert einen Schnitt (also $\sigma^r \circ j^r = \text{Id}_M$)

$$j^r f : M \rightarrow J^r(M, N) \quad , \quad x \mapsto j_x^r f$$

im Bündel $\sigma^r : J^r(M, N) \rightarrow M$. $j^r f$ heißt die r -*Jet-Erweiterung* von f .
Genauer sind für $s \geq r$ Definitions- und Wertebereiche der injektiven *Jet-Abbildung*

$$j^r : C^s(M, N) \rightarrow C^{s-r}(M, J^r(M, N)) \quad , \quad f \mapsto j^r f. \quad (3.7)$$

Setzen wir in (3.7) $s := r$, dann stimmt die schwache bzw. die starke Topologie auf $C^r(M, N)$ aus Definition 3.20 mit der bezüglich j^r induzierten Initialtopologie⁹ der (kartenunabhängig definierten, siehe Seite 44!) schwachen bzw. starken Topologie auf $C(M, J^r(M, N))$ überein. $\diamond$

3.22 Beispiel (Mannigfaltigkeit $J^1(M, N)$ der 1-Jets)

Da die Vektorräume $\text{Lin}(T_x M, T_{f(x)} N)$ für alle $x \in M$ die Dimension mn besitzen, ist

$$\dim(J^1(M, N)) = m + n + mn.$$

Wegen $\text{Lin}(T_x M, T_{f(x)} \mathbb{R}) \cong \text{Lin}(T_x M, \mathbb{R}) \cong T_x^* M$ ist $J^1(M, \mathbb{R})$ ein Vektorbündel vom Rang $\dim(M)$ über $M \times \mathbb{R}$, und

$$J^1(M, \mathbb{R}) \cong T^* M \times \mathbb{R}. \quad \diamond$$

⁸Es wird die *Multiindex-Notation* aus (4.3) benutzt.

⁹siehe Abschnitt 3.1 des *Topologie-Skripts*.

4 Der Satz von Morse und Sard

Im letzten Kapitel wurden Methoden entwickelt, die uns erlauben, flexibler mit Mannigfaltigkeiten und ihren Abbildungen umzugehen. Für viele Zwecke können wir beispielsweise annehmen, dass unsere Mannigfaltigkeiten C^∞ sind, denn:

4.1 Satz Für $r \in \mathbb{N}$ ist jede C^r -Mannigfaltigkeit C^r -diffeomorph zu einer C^∞ -Mannigfaltigkeit.

Beweis: HIRSCH, [Hi, Theorem 2.10]. ◇

Also gelte in diesem Kapitel bei Bedarf die

Voraussetzung: Wir betrachten nur C^∞ -Mannigfaltigkeiten.

4.1 Stabilität von Abbildungen

Wir haben in Abschnitt 3.3 Topologien auf den Abbildungsräumen $C^r(M, N)$ eingeführt. Wie in HIRSCH [Hi, Chapter 2, Theorem 2.6] gezeigt wird, gilt:

4.2 Satz Für $1 \leq s \leq \infty$ und C^s -Mannigfaltigkeiten M, N ist $C^s(M, N)$ dicht in $C_S^r(M, N)$, falls $0 \leq r < s$.

Mit anderen Worten, wir haben die Möglichkeit, mit glatten – und damit technisch einfacheren – Abbildungen zu hantieren.

Dabei gingen viele wichtige Eigenschaften nicht verloren, denn sie sind auf offenen Mengen in den Abbildungsräumen erfüllt:

4.3 Satz (Stabilitätssatz) Für Mannigfaltigkeiten M, N sind die Teilmengen

1. $\text{Imm}^r(M, N)$ der Immersionen
2. $\text{Sub}^r(M, N)$ der Submersionen
3. $\text{Emb}^r(M, N)$ der Einbettungen
4. $\text{Prop}^r(M, N)$ der eigentlichen Abbildungen
5. $\text{CEmb}^r(M, N)$ der abgeschlossenen Einbettungen
6. $\text{Diff}^r(M, N)$ der Diffeomorphismen

von $C_S^r(M, N)$ für $r \in \mathbb{N}$ offen.

Beweis: Es wird zunächst die Differenzierbarkeitsstufe $s = 1$ (bzw. $s = 0$ unter Punkt 4.) betrachtet. Die Aussagen für $r > s$ ergeben sich für die jeweilige Klasse X von Abbildungen aus $X^r(M, N) = X^s(M, N) \cap C^r(M, N)$.

1. Wir betrachten die Menge $\text{Imm}^1(M, N)$ der C^1 -**Immersionen** $f : M^m \rightarrow N^n$. In Karten (φ, U) und (ψ, V) von M bzw. N , $K \subseteq U$ kompakt mit $f(K) \subseteq V$ ist

$$\tilde{K} := \{D(\psi \circ g \circ \varphi^{-1})(x) \mid x \in \varphi(K)\} \subseteq \text{Mat}(n \times m, \mathbb{R})$$

kompakt, und in der offenen Menge

$$\text{Mat}_m(n \times m, \mathbb{R}) := \{M \in \text{Mat}(n \times m, \mathbb{R}) \mid \text{rang}(M) = m\} \quad (4.1)$$

enthalten. Im metrischen Raum $\text{Mat}(n \times m, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{mn}$ ist also

$$\varepsilon := \text{dist}(\tilde{K}, \text{Mat}(n \times m, \mathbb{R}) \setminus \text{Mat}_m(n \times m, \mathbb{R})) > 0,$$

(siehe **Analysis III**, Satz 2.42). Die Abbildungen g aus der Menge

$$\begin{aligned} \{g \in C^1(M, N) \mid g(K) \subseteq V, \forall x \in \varphi(K) : \\ \|D(\psi \circ g \circ \varphi^{-1})(x) - D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x)\| < \varepsilon\} \end{aligned}$$

sind also auf K immersiv. Nach Definition des topologischen Raums $C_S^1(M, N)$ erhalten wir so eine Umgebung $W \subseteq C_S^1(M, N)$ von f mit $W \subseteq \text{Imm}^1(M, N)$.

2. Während für Immersionen $f : M^m \rightarrow N^n$ gilt: $m \leq n$, ist für Submersionen notwendigerweise $m \geq n$. Um zu beweisen, dass die Mengen $\text{Sub}^1(M, N) \subseteq C_S^1(M, N)$ der C^1 -**Submersionen** dicht liegen, betrachten wir also analog zu (4.1) die offene Menge $\text{Mat}_n(n \times m, \mathbb{R}) \subseteq \text{Mat}(n \times m, \mathbb{R})$.
3. Nach Definition 3.1 sind **Einbettungen** $f : M \hookrightarrow N$ Immersionen, die M homöomorph auf $f(M) \subseteq N$ abbilden.

- Nach Teil 1. des Beweises ist $\text{Imm}^1(M, N) \subseteq C_S^1(M, N)$ offen.
- Ist $K \subseteq M$ kompakt, dann ist für $g \in \text{Imm}^1(M, N)$ die Restriktion $g|_K : K \rightarrow g(K)$ ein Homöomorphismus, wenn $g|_K$ injektiv ist. Letzteres ist für genügend kleine Kompakta $K \subseteq U$ nach der Formel

$$\tilde{g}(x_1) - \tilde{g}(x_0) = \int_0^1 D\tilde{g}_{(1-t)x_0+tx_1} dt \cdot (x_1 - x_0) \quad (x_i \in \varphi(K))$$

der Fall, wenn $g|_K$ C^1 -nah bei $f|_K$ ist.

- Es gibt einen lokal endlichen Atlas $\mathcal{A}_M := \{(\varphi_i, U_i) \mid i \in I\}$ von M und eine Familie $\{(\psi_i, V_i) \mid i \in I\}$ von Karten von N mit $f(U_i) \subseteq V_i$, sowie Kompakta $K_i \subseteq U_i$ wie oben mit $\bigcup_{i \in I} \text{int}(K_i) = M$.

Weiter besitzt N eine Metrik d , die die Topologie von N erzeugt. Die kompakte Menge $f(K_i)$ und die dazu disjunkte abgeschlossene Menge $\overline{f(M \setminus U_i)}$ haben positiven Minimalabstand. Mit

$$\varepsilon_i := \frac{1}{2} \operatorname{dist}(f(K_i), \overline{f(M \setminus U_i)}) > 0$$

betrachten wir die in $C_S^1(M, N)$ offene Umgebung von f , die aus den obigen $g \in \operatorname{Imm}^1(M, N)$ bestehen mit

$$\max\{d(f(x), g(x)) \mid x \in K_i\} < \varepsilon_i \quad (i \in I).$$

Diese sind ebenfalls Einbettungen von M .

4. Ist $f \in C(M, N)$, dann gibt es einen lokal endlichen Atlas $\mathcal{L}_M = \{(\varphi_i, U_i) \mid i \in I\}$ von M , eine Familie $\{(\psi_i, V_i) \mid i \in I\}$ von Karten von N mit $f(U_i) \subseteq V_i$, sowie Kompakta $K_i \subseteq U_i$ mit $\bigcup_{i \in I} \operatorname{int}(K_i) = M$.

Ist f **eigentlich**, dann kann die Überdeckung von $f(M)$ durch die V_i lokal endlich gewählt werden, denn die Überdeckung von $f(M)$ durch die $f(U_i)$ ist lokal endlich.

Hat nun $g \in C(M, N)$ auch die Eigenschaft $g(K_i) \subseteq V_i$, dann ist g ebenfalls eigentlich. Denn sei $L \subseteq N$ kompakt, dann wird L von endlich vielen V_i geschnitten. Also wird $f^{-1}(L)$ durch endlich viele K_i überdeckt. Da $f^{-1}(L)$ abgeschlossen ist, ist es selbst kompakt. Also ist $\operatorname{Prop}^0(M, N) \subseteq C_S(M, N)$ offen.

5. **Abgeschlossene Einbettungen:** Eine C^1 -Einbettung $f : M \hookrightarrow N$ ist genau dann eigentlich, wenn $f(M)$ abgeschlossen ist. Aus Teil 3. und 4. des Satzes folgt damit, dass $\operatorname{CEmb}^r(M, N) = \operatorname{Emb}^r(M, N) \cap \operatorname{Prop}^r(M, N)$ offen ist.
6. **Diffeomorphismen:** Es seien $M = \coprod_{i \in I} M_i$ und $N = \coprod_{j \in J} N_j$ Mannigfaltigkeiten mit ihren Zerlegungen in Zusammenhangskomponenten. Dann ist

$$C(M, N) = \coprod_{\pi \in \operatorname{Abb}(I, J)} C^\pi(M, N) \text{ mit } C^\pi(M, N) := \{f \in C(M, N) \mid f(M_i) \subseteq N_{\pi(i)}\},$$

und die $C^\pi(M, N) \subseteq C_S(M, N)$ sind offen und abgeschlossen.

Jedes $f \in \operatorname{Diff}^r(M, N)$ ist eine Submersion, eine Einbettung, eigentlich und $f \in C^\pi(M, N)$ mit einer Bijektion π .

Sei umgekehrt $f \in C^r(M, N)$ eine Submersion, eine Einbettung, eigentlich und $f \in C^\pi(M, N)$ mit einer Bijektion π . Dann ist das Bild $f(M_i) \subseteq N$ jeder Zusammenhangskomponente $M_i \subseteq M$ offen, da f eine Submersion ist, und nach Lemma 2.10 abgeschlossen, weil f eigentlich ist. Also ist es eine

Zusammenhangskomponente von N . Da f auch eine Einbettung ist, handelt es sich um einen Diffeomorphismus.

Wegen der Teile 2., 3. und 4. des Satzes folgt damit, dass

$$\text{Diff}^r(M, N) = \text{Sub}^r(M, N) \cap \text{Emb}^r(M, N) \cap \text{Prop}^r(M, N) \cap C^{\text{Bij}}(M, N)$$

mit $C^{\text{Bij}}(M, N) := \coprod_{\pi \in \text{Bij}(I, J)} C^\pi(M, N)$ offen ist. $\square$

4.4 Bemerkung (Stabilitätssatz 4.3 für die schwache Topologie)

Keine der Aussagen von Satz 4.3 stimmt für die schwache Topologie $C_W^r(M, N)$, falls M nicht kompakt ist. Das folgende Gegenbeispiel stammt aus GUILLEMIN und POLLACK [GP, Chapter 1.6, Exercise 9]. Es sei $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $\rho|_{[-1,1]} = 1$ und $\rho|_{\mathbb{R} \setminus (-2,2)} = 0$. Weiter sei $f_t \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f_t(x) = x\rho(tx)$, also $f_0 = \text{Id}_{\mathbb{R}}$.

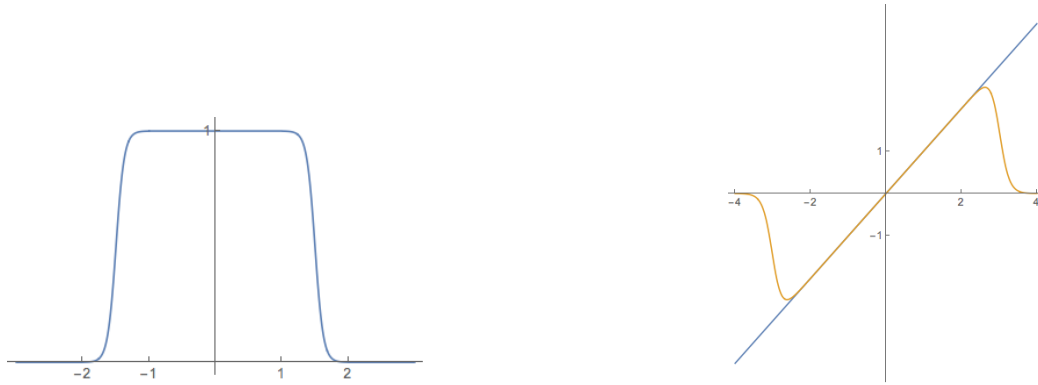


Abbildung 4.1: Links: Die Abschneidefunktion ρ . Rechts: $f_0 = \text{Id}_{\mathbb{R}}$ und $f_{1/2}$

Damit ist f_0 in allen sechs in Satz 4.3 aufgeführten Teilmengen von $C^r(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ enthalten, f_t für $t > 0$ aber in keiner. Andererseits ist in jeder im topologischen Raum $C_W^r(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ offenen Umgebung von f_0 ein f_t mit $t > 0$ enthalten, denn

$$f_t|_{[-1/t, 1/t]} = f_0|_{[-1/t, 1/t]} \quad (t > 0). \quad \diamond$$

Natürlich kann es sein, dass die in Satz 4.3 angesprochenen offenen Teilmengen von $C_S^r(M, N)$ leer sind.

Wir hatten aber in Satz 3.18 exemplarisch gezeigt, dass dimensionsabhängig durch kleine Variationen von Abbildungen $f \in C_S^r(M, N)$ solche mit "schönen" Eigenschaften erzeugt werden können. Es gilt sogar, wie man mit der Jet-Transversalität aus Abschnitt 5.4 zeigt:

4.5 Satz Für $1 \leq r \leq \infty$ und C^r -Mannigfaltigkeiten M, N mit

1. $\dim(N) \geq 2 \dim(M)$ sind **Immersionen dicht** in $C_S^r(M, N)$.
2. $\dim(N) \geq 2 \dim(M) + 1$, M kompakt sind **Einbettungen dicht** in $C_S^r(M, N)$.

Beweis: Siehe Satz 5.29, und HIRSCH [Hi, Theorem 2.12 und 2.13]. $\square$

Wir hatten in Bemerkung 3.21 gesehen, wie man, zumindest konzeptionell, die Kontrolle der Ableitungen auf den einfacheren Fall der Kontrolle in der C^0 -Topologie zurückführen konnte, unter Verwendung der Jets.

Eigenschaften, die auf offenen *und* dichten Teilmengen von $C_S^r(M, N)$ erfüllt sind, sind natürlich besonders praktisch, denn, von einer gegebenen Abbildung ausgehend, können wir sie durch beliebig kleine Variation erreichen, danach aber verlieren wir sie bei genügend kleiner Variation nicht mehr.

Man kann also, wenn man gleichzeitig noch weitere derartige Eigenschaften erreichen will, den Prozess iterieren.

Manchmal tritt diese Situation "in minderer Güte" auf, indem man nur *Baire-Räume*, d.h. Schnitte abzählbarer Familien offener dichter Mengen zur Verfügung hat (siehe Seite 54).

Im Kapitel 5 wird es um Transversalität gehen. Unter geeigneten Voraussetzungen werden zu einer gegebenen Untermannigfaltigkeit $A \subseteq N$ transversale Abbildungen in $C_{S/W}^r(M, N)$ offen und dicht liegen.

Bis jetzt ist noch nicht klar, warum Transversalität eine so schöne Eigenschaft ist. Ein Motto des Transversalitäts-Kapitels im Buch [Hi] ist aber das Zitat "Transversality unlocks the secrets of the manifold" von Horst Elmar Winkelkemper. Warum? Dazu ein Beispiel.

4.6 Beispiel (Nullstellen von Vektorfeldern und Euler-Charakteristik)

Sei $v \in C^1(M, TM)$ ein Tangentialvektorfeld der Mannigfaltigkeit M , also $\pi_M \circ v = \text{Id}_M$, und $n \in C^1(M, TM)$ der Nullschnitt. Eine Nullstelle von v , also ein $m \in M$ mit $v(m) = 0 \in T_m M$, entspricht einem Schnittpunkt der Untermannigfaltigkeiten $v(M) \subseteq TM$ und $n(M) \subseteq TM$. Beide haben die gleiche Dimension wie M , während $\dim(TM) = 2 \dim(M)$ ist. Daher sind $T_m v(T_m M)$ und $T_m n(T_m M)$ zwei Untervektorräume von $T_{v(m)} TM$ mit jeweils halber Dimension. Sind sie transversal, schneiden sie sich nur im Nullpunkt.

Ist M orientiert, kann man diesem Schnittpunkt eine Zahl $+1$ oder -1 zuordnen, die **Schnittzahl**. Ist M auch kompakt, dann hat v nur endlich viele solche Nullstellen. Die Summe der Schnittzahlen eines beliebigen transversalen Vektorfelds $v \in C^1(M, TM)$ ist dann die Euler-Charakteristik $\chi(M)$ von M .

Betrachten wir als Beispiel die Sphären.

- Für Sphären ungerader Dimension gibt es nullstellenfreie Vektorfelder, denn $\mathbb{S}^{2n-1} \cong \{x \in \mathbb{C}^n \mid \|x\| = 1\}$, und $v(x) := ix$ definiert ein Tangentialvektorfeld konstanter Länge 1. Also ist $\chi(\mathbb{S}^{2n-1}) = 0$.

- Wir hatten in Beispiel 2.43.2 bemerkt, dass es auf den gerad-dimensionalen Sphären $\mathbb{S}^{2n}$ keine nicht verschwindenden Tangentialvektorfelder gibt, und es gilt $\chi(\mathbb{S}^{2n}) = 2$.

Wir benutzen hier also Transversalität, um etwas über die Topologie von Mannigfaltigkeiten zu erfahren. $\diamond$

Der wichtigste Satz dieses Kapitels ist der von Morse und Sard (Satz 4.15). Er besagt, dass für genügend oft differenzierbare Abbildungen $f : M \rightarrow N$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten die Menge der kritischen Werte von f Maß Null in N hat.

4.7 Bemerkung (Maß Null)

Scheinbar setzt die Formulierung des Theorems die Existenz eines kanonisch definierten Maßes auf N voraus, ähnlich wie auf dem $\mathbb{R}^n$ ein ausgezeichnetes Maß, das **Lebesgue-Maß** λ^n , existiert (siehe Kapitel 4.3 der *Analysis III*).

Tatsächlich kann ein solches ausgezeichnetes Maß auf allgemeinen Mannigfaltigkeiten ohne Zusatzstrukturen nicht existieren. Das Lebesgue-Maß selbst war ja unter Zuhilfenahme einer Zusatzstruktur des $\mathbb{R}^n$, nämlich der einer abelschen Gruppe, eingeführt worden. Denn eine definierende Eigenschaft ist die *Translationsinvarianz* ($\lambda^n(A + a) = \lambda^n(A)$ für $A \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar und $a \in \mathbb{R}^n$). $\diamond$

4.8 Definition

Sei M eine C^1 -Mannigfaltigkeit und $X \subseteq M$. X hat **Maß Null**, wenn seine Kartenbilder $\varphi(U \cap X) \subseteq \mathbb{R}^n$ für alle Karten (φ, U) Lebesgue-Nullmengen sind.

4.9 Bemerkung (Begriffsbildung) Ähnliche Situationen hatten wir schon kennen gelernt. So konnten wir zwar nicht vom *Schnittwinkel* zweier Kurven in einer Mannigfaltigkeit sprechen, wohl aber definieren, wann zwei solche Kurven tangential sind, also *Schnittwinkel Null* haben. Das war sogar zur Grundlage der Definition 2.37 der Tangentialvektoren gemacht worden. $\diamond$

4.10 Bemerkung (Konsistenz der Definition)

Es gibt bekanntlich *Homöomorphismen*, die Lebesgue-Nullmengen in Mengen von positivem Lebesgue-Maß abbilden, etwa die *Cantor-Funktion*. Das lässt vielleicht an der Konsistenz von Definition 4.8 zweifeln.

In dieser wird aber verlangt, dass die Kartenwechsel *stetig differenzierbar* sind. Wegen des nachfolgenden Lemmas 4.11 muss damit nur für *einen* C^1 -Atlas Φ von M überprüft werden, dass $X \subseteq M$ Maß Null hat. Denn wegen der stetigen Differenzierbarkeit der Kartenwechsel gilt das dann für alle Karten des mit Φ kompatiblen maximalen Atlas $\mathcal{A}_M$. $\diamond$

Wie können wir die Maß-Null-Eigenschaft praktisch testen? Dazu gehen wir zunächst auf den Fall des $\mathbb{R}^n$ zurück, der ja über die Kartenabbildung auch die lokale Struktur von Mannigfaltigkeiten bestimmt.

Damit kann man die Frage lokalisieren; und X hat Maß Null, wenn jeder Punkt von X eine Umgebung in X besitzt, deren Maß Null ist.

Ich erinnere kurz an die Konstruktion der *D-dimensionalen Hausdorff-Maße* für einen metrischen Raum (M, d) mittels der äußeren Maße $\mathcal{H}_\delta^D$ und $\mathcal{H}^D$,

$$\mathcal{H}_\delta^D(A) := \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \text{diam}(U_i)^D \mid A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i, \text{diam}(U_i) \leq \delta \right\} \quad (A \subseteq M),$$

$$\mathcal{H}^D(A) := \lim_{\delta \searrow 0} \mathcal{H}_\delta^D(A) \quad (A \subseteq M),$$

siehe Kapitel 4.2 der *Analysis III*. Nullmengen von Hausdorff-Maßen verhalten sich vernünftig unter stetig differenzierbaren Abbildungen:

4.11 Lemma Sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$.

1. Dann ist f *lokal Lipschitz-stetig*.
2. Wenn $N \subseteq U$ eine Menge vom D -dimensionalen Hausdorff-Maß $\mathcal{H}^D(N) = 0$ ist, dann ist auch $\mathcal{H}^D(f(N)) = 0$.
3. Für die Hausdorff-Dimensionen $\dim_H(B) := \inf \{D \geq 0 \mid \mathcal{H}^D(B) = 0\}$ gilt

$$\dim_H(f(A)) \leq \dim_H(A).$$

4. Wenn $N \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^m$ eine λ^m -Nullmenge ist, dann gilt für $m = n$ auch $\lambda^n(f(N)) = 0$.

Beweis:

1. Für $x \in U$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $K := \overline{U_\delta}(x) \subseteq U$. Da die abgeschlossene Vollkugel K kompakt ist, besitzt auf dieser konvexen Menge f die Lipschitz-Konstante

$$L := \sup \{ \|Df_y\| \mid y \in K \} < \infty.$$

2. Für alle $\delta > 0$ und $\varepsilon > 0$ gibt es eine Überdeckung von $N \cap K$ durch offene Mengen U_k mit Durchmessern $\text{diam}(U_k) < \delta$ und $\sum_{k \in \mathbb{N}} (\text{diam}(U_k))^D < \varepsilon$. Daher überdecken die Bilder $V_k := f(U_k)$ die Menge $f(N \cap K)$, mit

$$\text{diam}(V_k) < L \delta \quad \text{und} \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} (\text{diam}(V_k))^D < L^D \varepsilon,$$

also $\mathcal{H}_{L\delta}^D(f(N \cap K)) \leq L^D \mathcal{H}_\delta^D(N \cap K)$. Da U von abzählbar vielen solchen Kompakta K überdeckt wird, folgt $\mathcal{H}^D(f(N)) = 0$.

3. Das folgt aus Teil 2, denn $\dim_H(\cup_{k \in \mathbb{N}} B_k) = \sup\{\dim_H(B_k) \mid k \in \mathbb{N}\}$.
4. Nach [ELSTRODT](#), [[E](#), Satz III.2.9] ist das n -dimensionale Hausdorff-Maß $\mathcal{H}^n$ auf dem $\mathbb{R}^n$ bis auf eine positive Konstante gleich dem Lebesgue-Maß λ^n . $\square$

4.2 Der Satz und sein Beweis

Zur Vorbereitung des Satzes von Morse und Sard erinnern wir an einige Begriffe: Nach Definition [3.7](#) heißt ein Punkt $x \in M$ *kritischer Punkt* von $f \in C^1(M, N)$, wenn $T_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ nicht surjektiv ist. $\text{crp}(f) \subseteq M$ bezeichnet die Menge der kritischen Punkte von f , und $\text{crv}(f) := f(\text{crp}(f)) \subseteq N$ ist die Menge der kritischen Werte, $N \setminus \text{crv}(f)$ die der regulären Werte.

4.12 Definition *Es sei X ein topologischer Raum.*

- Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt **mager**, wenn sie als Vereinigung abzählbar vieler nirgends dichter Teilmengen dargestellt werden kann.
- Eine Teilmenge $R \subseteq X$ heißt **residuell**, wenn $X \setminus R$ mager ist.
- X heißt **Baire-Raum**, wenn die residuellen Teilmengen dicht sind.

4.13 Beispiel (Baire-Raum) $\mathbb{Q}$ ist kein Baire-Raum, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ aber schon. $\diamond$

Der [Satz von Baire](#) besagt, dass vollständige metrische Räume und auch lokal-kompakte Hausdorff-Räume Baire-Räume sind.

Ein Beweis dieses Satzes findet sich z.B. in [MUNKRES](#) [[Mu](#), Theorem 48.2].

Für die uns interessierenden topologischen Räume gilt:

4.14 Satz 1. *Mannigfaltigkeiten sind Baire-Räume.*

2. *Die Abbildungsräume $C_S^r(M, N)$ sind Baire-Räume.*

Beweis: Da Mannigfaltigkeiten lokalkompakte Hausdorff-Räume sind, folgt Teil 1. aus dem Satz von Baire. Für den Beweis der zweiten Aussage siehe [HIRSCH](#), [[Hi](#), Theorem 2.4.4, p.62]. $\square$

4.15 Satz (Morse und Sard)

Seien M, N C^r -Mannigfaltigkeiten und $f \in C^r(M, N)$. Wenn gilt:

$$r \geq r_0 := \max(\dim(M) - \dim(N), 0) + 1,$$

dann hat die Menge $\text{crv}(f)$ der kritischen Werte von f Maß Null, und die Menge der regulären Werte ist residuell.

4.16 Bemerkungen (Morse und Sard)

1. Basierend auf der Arbeit [AMo] von ANTHONY MORSE wurde der Satz 1942 von SARD in [Sa] bewiesen, aber unter Verwendung der von uns nicht benutzten Definition von *kritischen Punkten*, siehe Fußnote 7 auf Seite 37.

Der folgende Beweis orientiert sich an dem von MILNOR in [MW, §3]. Jener wiederum basiert auf PONTRYAGIN, [Po, Theorem 4]. Er liefert zunächst nicht die optimale Differenzierbarkeitsstufe r_0 , ist aber leichter verständlich als der von Sard. Außerdem wird in ABRAHAM und ROBBIN [AR, §15] gezeigt, wie man den Beweis anpassen kann, sodass r_0 erreicht wird.

2. Natürlich ist die Menge $\text{crp}(f)$ der kritischen Punkte im Allgemeinen nicht von Maß Null. Denn falls etwa $f : M \rightarrow N$ konstant ist, folgt $\text{crp}(f) = M$.
3. Wir können den Beweis wieder lokalisieren. Also betrachten wir $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $W \subseteq \mathbb{R}^m$ offen. $\diamond$

Beweis von Satz 4.15:

Wir setzen $m := \dim(M)$, $n := \dim(N)$ und schreiben $f = (f_1, \dots, f_n)^t$.

Behauptung: Für $m < n$ und $f \in C^1(W, \mathbb{R}^n)$ hat $\text{crv}(f)$ das λ^n -Maß Null.

Beweis: Es gilt $\text{crp}(f) = W$, also nach Lemma 4.11.3

$$\dim_H(\text{crv}(f)) = \dim_H(f(W)) \leq \dim_H(W) = m < n. \quad (4.2)$$

Es folgt $\mathcal{H}^n(\text{crv}(f)) = 0$, also auch $\lambda^n(\text{crv}(f)) = 0$.

Im Weiteren nehmen wir daher $m \geq n$ an, also $r_0 = m - n + 1 \geq 1$.

Da wir höhere Totalableitungen $D^\ell f$ von f kontrollieren müssen, schreiben wir für den *Multiindex* $k = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{N}_0^m$ die k -te partielle Ableitung in der Form

$$\partial^k : C^{|k|+s}(W, \mathbb{R}) \rightarrow C^s(W, \mathbb{R}) \quad , \quad g \mapsto \frac{\partial^{k_1}}{\partial x_1^{k_1}} \dots \frac{\partial^{k_m}}{\partial x_m^{k_m}} g, \quad (4.3)$$

also $\partial^0 := \text{Id}$. ∂^k heißt *Differentialoperator der Ordnung* $|k| := \sum_{i=1}^m |k_i|$. Mit

$$C_\ell := \{x \in W \mid \forall k \in \{1, \dots, \ell\} : D^k f(x) = 0\} \quad (\ell \in \mathbb{N})$$

zerlegen wir die Menge $\text{crp}(f)$ der kritischen Punkte in paarweise disjunkte Teilmengen:

$$\text{crp}(f) = (\text{crp}(f) \setminus C_1) \cup \bigcup_{j=1}^{r_0-1} (C_j \setminus C_{j+1}) \cup C_{r_0}. \quad (4.4)$$

1. **Behauptung:** In der Zerlegung (4.4) ist $\lambda^n(f(C_{r_0})) = 0$.

Beweis:

Die partiellen Ableitungen $\partial^k f$ sind für $|k| = r_0$ stetig, also auf jedem Kompaktum $K \subseteq W$ gleichmäßig stetig. Daher gilt nach der qualitativen Taylor-Formel die auf K *uniforme (Peano)-Restglied-Abschätzung*

$$\|f(p) - f(q)\| = o(\|p - q\|^{r_0}) \quad (p \in C_{r_0} \cap K, q \in K, q \rightarrow p). \quad (4.5)$$

Wir können K als achsenparallelen Würfel der Kantenlänge ℓ annehmen, und zeigen, dass $f(C_{r_0} \cap K)$ Maß Null hat. Für $S \in \mathbb{N}$ unterteilen wir K in S^m Würfel W_k der Kantenlänge ℓ/S , die in ihrem Inneren nicht überlappen.

Wir betrachten nur diejenigen Würfel W_k , $k = 1, \dots, t \leq S^m$ mit

$$C_{r_0} \cap W_k \neq \emptyset.$$

Jedes W_k ist in einer Vollkugel vom Radius $\frac{\ell}{S}\sqrt{m}$ enthalten, deren Mittelpunkt in $C_{r_0} \cap K$ liegt. Wegen (4.5) liegt $f(W_k)$ in einem Würfel $W'_k \subseteq \mathbb{R}^n$ mit Kantenlänge

$$o\left(\left(\frac{\ell}{S}\sqrt{m}\right)^{r_0}\right) = o(S^{-r_0}).$$

Es gibt $t \leq S^m$ solcher Würfel, sodass die Summe ihrer n -dimensionalen Lebesgue-Maße

$$\sum_{k=1}^t \lambda^n(W'_k) \leq S^m o(S^{-nr_0}) = o(S^{m-nr_0}) = o(S^0),$$

denn wegen $m \geq n$ gilt $m - nr_0 = (1 - n)(m - n) \leq 0$.

Also hat $f(U \cap W_{r_0})$ Maß Null.

2. **Behauptung:** In der Zerlegung (4.4) ist $\lambda^n(f(C_j \setminus C_{j+1})) = 0$.

Beweis:

Wir führen eine Induktion in der Dimension m des Definitionsbereichs von f . *Induktionsanfang* $m = n$, also $r_0 = 1$: $C_j \setminus C_{j+1}$ kommt in (4.4) nicht vor.

Im *Induktionsschritt* sei also $m > n$. Es genügt zu beweisen, dass jeder Punkt $\bar{x} \in C_j \setminus C_{j+1}$ eine Umgebung $U \subseteq W$ hat, für die gilt: $\lambda^n(f(C_j \cap U)) = 0$. Denn dann wird jedes Kompaktum in W durch endlich viele solche Umgebungen überdeckt. Wegen $\bar{x} \notin C_{j+1}$ gibt es ein $k' \in \mathbb{N}_0^m$ mit $|k'| = j + 1$ und $\partial^{k'} f(\bar{x}) \neq 0$. Wegen $\bar{x} \in C_j$ gibt es daher ein $k \in \mathbb{N}_0^m$ mit $|k| = j$ und $w(\bar{x}) = 0$ für $w := \partial^k f \in C^{r-j}(W, \mathbb{R}^n)$, aber o.B.d.A. $\partial_1 w_1(\bar{x}) \neq 0$.

Der Satz über implizite Funktionen besagt, dass in geeigneten Umgebungen U von $\bar{x}$ und U' von $\bar{x}' := (0, x_2, \dots, x_m)$ die Abbildung

$$h \in C^{r-j}(U, U') \quad , \quad h(x) = (w_1(x), x_2, \dots, x_m) \quad (4.6)$$

ein Diffeomorphismus ist. In diesen neuen Koordinaten ist

$$h(C_j \cap U) \subseteq \{y \in U' \mid y_1 = 0\}. \quad (4.7)$$

Wir haben die Dimension des Definitionsbereichs also um Eins verringert. Der Preis, den wir scheinbar zahlen müssen, besteht in der kleinen Differenzierbarkeitsstufe $r - j$ von h . Wegen $j \leq r_0 - 1 = m - n$ in (4.4) verringert sich diese im ersten Schritt auf $r - (m - n)$.

Insgesamt würde die für die Induktion nötige Differenzierbarkeitsstufe r quadratisch statt wie r_0 linear in $m - n$ wachsen, siehe PONTRYAGIN [Po, p.20]. Dies ist aber nicht der Fall, wie in [AR, §15] unter Verwendung eines auf MARTIN KNESER und GEORGES GLAESER zurückgehenden Kompositionssatzes gezeigt wird.

3. **Behauptung:** In der Zerlegung (4.4) ist $\lambda^n(f(\text{crp}(f) \setminus C_1)) = 0$.

Beweis:

Es ist $\text{crp}(f) \setminus C_1 = \{x \in W \mid 1 \leq \text{rang}(Df(x)) < n\}$.

Also ist $\text{crp}(f) \setminus C_1 = \emptyset$, wenn die Bilddimension n gleich Eins ist.

Diesmal werden wir eine Induktion in n (statt in m , wie in Schritt 2.) führen, mit $n = 1$ als Induktionsanfang.

Analog zu Schritt 2. genügt es zu beweisen, dass jeder Punkt $\bar{x} \in \text{crp}(f) \setminus C_1$ eine Umgebung $U \subseteq W$ hat, für die gilt: $\lambda^n(f(\text{crp}(f) \cap U)) = 0$. Ebenfalls analog zu (4.6) finden wir nach dem Satz über implizite Funktionen den Diffeomorphismus auf das Bild U'

$$h \in C^r(U, U') \quad , \quad h(x) = (f_1(x), x_2, \dots, x_m),$$

wenn wir o.B.d.A. annehmen, dass $\partial_1 f_1(\bar{x}) \neq 0$. Zwar spielt, anders als in (4.7), der Wert $h_1(\bar{x}) = f_1(\bar{x}) \in \mathbb{R}$ keine besondere Rolle. Wir können aber über ihn integrieren. Dazu setzen wir

$$f' \in C^r(U', \mathbb{R}^n) \quad , \quad f' := f \circ h^{-1}$$

Es gilt $\text{crp}(f') = h(\text{crp}(f) \cap U)$, also $\text{crv}(f') = f'(\text{crp}(f')) = f(\text{crp}(f) \cap U)$.

Nach Induktionsannahme haben für $A := \text{crv}(f') \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ die y_1 -Schnitte

$$A(y_1) := \{y_2 \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (y_1, y_2) \in A\} \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \quad (y_1 \in \mathbb{R})$$

Maß $\lambda^{n-1}(A(y_1)) = 0$. Nach dem Satz von Cavalieri (Satz 6.8 der Analysis III) folgt $\lambda^n(A) = 0$.

Behauptung: Die Menge der regulären Werte ist ist residuell.

Beweis:

Wir zeigen, dass alle $x \in \text{crp}(f)$ eine Umgebung U_x besitzen, sodass

$$N \setminus f(\text{crp}(f) \cap \overline{U_x})$$

offen und dicht ist. Da wir M mit abzählbar vielen solchen U_x ($x \in I$) überdecken können, ist dann die Menge der regulären Werte von f von der Form

$$N \setminus \text{crv}(f) = N \setminus \bigcup_{x \in I} f(\text{crp}(f) \cap \overline{U_x}) = \bigcap_{x \in I} N \setminus f(\text{crp}(f) \cap \overline{U_x})$$

und damit residuell. Wir können dabei sogar annehmen, dass die U_x in Kartengebieten liegen und $\overline{U_x}$, also auch $\text{crp}(f) \cap \overline{U_x}$ kompakt ist. Damit ist (nach Lemma 5.14 des [Topologie-Skripts](#)) auch $f(\text{crp}(f) \cap \overline{U_x}) \subseteq N$ kompakt, also abgeschlossen (Lemma 5.2). Wir haben damit die *Offenheit* von $N \setminus f(\text{crp}(f) \cap \overline{U_x})$ gezeigt. Da nach dem Oben bewiesenen $f(\text{crp}(f) \cap \overline{U_x})$ Maß Null hat, ist das Komplement $N \setminus f(\text{crp}(f) \cap \overline{U_x})$ *dicht* in N . $\square$

Eine unmittelbare Folgerung des Satzes 4.15 ist:

4.17 Korollar

Seien M, N C^∞ -Mannigfaltigkeiten mit $\dim(M) < \dim(N)$ und $f \in C^1(M, N)$. Dann hat $f(M) \subseteq N$ Maß Null, und $N \setminus f(M)$ ist residuell und damit dicht.

Beweis:

1. Da $\dim(M) - \dim(N) < 0$, ist die im Satz 4.15 geforderte Differenzierbarkeitsstufe $r \geq 1$ für $f \in C^1(M, N)$ erfüllt.
2. Aus dem gleichen Grund ist die Menge der kritischen Punkte $\text{crp}(f) = M$. $\square$

4.18 Bemerkungen (Satz von Morse und Sard)

1. Wie das folgende Beispiel zeigt, ist $N \setminus f(M)$ im Allgemeinen nicht offen. Es seien $M := \mathbb{R}$, $N := \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ mit Projektion $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ und

$$f_c := \pi \circ \hat{f}_c \quad \text{mit} \quad \hat{f}_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto (x, cx) \quad \text{und} \quad c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Als Folge des [Gleichverteilungssatzes](#) ist $f_c(M) \subseteq N$ eine dichte Teilmenge des Torus (siehe auch Beispiel 5.3.4).

2. Wie das Beispiel 1.1 der Peano-Kurven zeigt, lässt sich die Voraussetzung auch dann nicht zu $f \in C^0(M, N)$ abschwächen, wenn $\dim(M) < \dim(N)$.
3. In [Wh1] konstruierte WHITNEY für alle Dimensionen $m \geq 2$ Gegenbeispiele für die Aussage von Satz 4.15 mit $f \in C^{m-1}([0, 1]^m, \mathbb{R})$, statt der geforderten Differenzierbarkeitsstufe $r_0 = m$.
Eine einfache Konstruktion eines Gegenbeispiels $f \in C^1([0, 1]^2, \mathbb{R})$ geht auf GRINBERG in [Gr] zurück. Dabei ist $f(x, y) = g(x) + g(y)$. Die Menge der kritischen Werte der streng monoton steigenden Funktion $g \in C^1([0, 1], [0, 1])$

ist $\text{crv}(g) = C$, die Mitteldrittel-Cantor-Menge. Wie in Beispiel 4.29 des Analysis III-Skripts gezeigt wird, ist mit der Minkowski-Summe daher

$$\text{crv}(f) = \text{crv}(g) + \text{crv}(g) = C + C = [0, 2].$$

Zur Konstruktion einer solchen Funktion g wird $g(x) := \int_0^x h(z) dz$ gesetzt, mit $h \in C([0, 1], [0, 1])$ geeignet. Zum Beispiel wird zunächst eine Cantor-Menge

$$C' := \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} C'_k \subseteq C'_0 := [0, 1]$$

definiert, wobei $C'_{k+1} \subseteq C'_k$ durch Herausschneiden zentrierter offener Intervalle der Länge $\beta_k := \frac{1}{5}(2/5)^k$ aus allen 2^k abgeschlossenen Intervallen von C'_k entsteht.¹⁰ Da $\sum_{k \in \mathbb{N}_0} 2^k \beta_k = 1$, ist das Lebesgue-Maß $\lambda^1(C') = 0$. Es wird $h|_{C'} := 0$ gesetzt, und für x in einem Intervall aus $C'_k \setminus C'_{k+1}$ wird $h(x)$ als der mit $r_k := 2 \frac{\alpha_k}{\beta_k}$ multiplizierte Minimalabstand zu dessen beiden Randpunkten gesetzt. Wegen $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = 0$ ist h stetig, und das Integral von h über diese Intervalle hat den Wert α_k . Daraus folgt $\text{crv}(g) = C$. $\diamond$

4.3 Anwendungen des Satzes von Morse und Sard

Wir kommen zu ersten Anwendungen des Satzes von Morse und Sard:

4.19 Definition Für einen Unterraum $A \subseteq X$ eines topologischen Raums X

- heißt $f \in C(X, A)$ **Retraktion**, wenn $f|_A = \text{id}_A$.
- $A \subseteq X$ heißt **Retrakt** von X , wenn es eine Retraktion $f : X \rightarrow A$ gibt.

4.20 Satz Es gibt keine Retraktion $f : D^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1} = \partial D^n$.

Beweis: Widerspruchsbeweis unter Anwendung des Satzes von Morse und Sard.

- Wir können Satz 4.15 aber nur auf Retraktionen $h : D^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ anwenden, die mindestens zweimal stetig differenzierbar sind. $f : D^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ dagegen ist nach Definition nur eine stetige Retraktion. Daher konstruieren wir, von f ausgehend, eine Retraktion $h \in C^2(D^n, \mathbb{S}^{n-1})$.
- Zunächst ist $f|_{\mathbb{S}^{n-1}} = \text{id}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ natürlich so glatt wie nur möglich. Also definieren wir als Zwischenschritt die Retraktion $g \in C(D^n, \mathbb{S}^{n-1})$

$$g(x) := \begin{cases} f(x/\|x\|) & , \frac{1}{2} \leq \|x\| \leq 1 \\ f(2x) & , 0 \leq \|x\| < \frac{1}{2} \end{cases} ,$$

die in einer Umgebung des Randes von D glatt ist.

¹⁰Bei der Cantor-Menge C sind die entsprechenden Längen $\alpha_k := \frac{1}{3}3^{-k}$.

- Wir approximieren g nach Satz 4.2 durch eine glatte Retraktion h , wobei wir mittels radialer Abschneidefunktionen h in einer Umgebung des Randes gleich g setzen.
- Morse-Sard liefert uns jetzt die Existenz eines regulären Wertes $y \in \mathbb{S}^{n-1}$ von h . Damit wird $h^{-1}(y)$ eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit von D^n . (Eigentlich wissen wir das formal noch nicht, denn wir hatten den Satz über Urbilder regulärer Werte nur für unberandete Mannigfaltigkeiten bewiesen, während D^n berandet ist ($\partial D^n = \mathbb{S}^{n-1}$!). Hier haben wir aber eine besonders gutartige Situation, da $h|_{D^n}$ automatisch regulär (sogar die Identität) ist. $h^{-1}(y)$ kann sich also nicht etwa tangential an den Rand heranschleichen.)
- Da h eine Retraktion ist, gilt $y \in h^{-1}(y)$, und wir betrachten die Zusammenhangskomponente $W \subseteq h^{-1}(y)$ von y . W ist wie $h^{-1}(y)$ eine kompakte, eindimensionale berandete Mannigfaltigkeit mit Rand

$$\partial W = W \cap \mathbb{S}^{n-1},$$

also ein in D^n eingebettetes Intervall, dessen beide Randpunkte in $\mathbb{S}^{n-1}$ liegen. Natürlich gilt $y \in \partial W$, aber es muss noch einen zweiten, von y verschiedenen, Randpunkt $z \in \partial W$ geben und

$$h(z) = z.$$

Wegen $z \in h^{-1}(y)$ folgt aber $h(z) = y = z$, also ein Widerspruch. $\square$

4.21 Bemerkung Unter der Annahme der Existenz einer glatten Retraktion $h : D^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ folgt Satz 4.20 auch aus dem Satz von Stokes. Denn auf der orientierten Mannigfaltigkeit $\mathbb{S}^{n-1}$ existiert eine Volumenform ω . Damit wäre

$$0 < \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \omega = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} h^* \omega = \int_{D^n} dh^* \omega = \int_{D^n} h^* d\omega = \int_{D^n} h^* 0 = 0. \quad \diamond$$

4.22 Korollar (Fixpunktsatz von Brouwer)

Jede Abbildung $f \in C(D^n, D^n)$ besitzt einen Fixpunkt $x \in D^n$, d.h. $f(x) = x$.

Beweis: Widerspruchsannahme: Für alle $x \in D^n$ gelte $f(x) \neq x$. Der von $f(x)$ ausgehende Strahl durch x trifft $\mathbb{S}^{n-1}$ in einem Punkt $g(x)$. Betrachte also

$$g : D^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}, \quad g(x) := x + t \frac{x - f(x)}{\|x - f(x)\|} \quad \text{mit } t \geq 0,$$

siehe Abbildung 4.2. Man überprüft durch Einsetzen, dass für

$$t := \sqrt{1 - \|x\|^2 + \langle x, v \rangle^2} - \langle x, v \rangle \quad \text{mit } v := \frac{x - f(x)}{\|x - f(x)\|}$$

tatsächlich $\|g(x)\| = 1$ gilt. g ist also stetig.

Außerdem ist $\langle x, v \rangle > 0$, falls $x \in \mathbb{S}^{n-1}$, was $t = 0$, d.h. $g|_{\mathbb{S}^{n-1}} = \text{Id}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ impliziert. Damit ist g eine Retraktion, in Widerspruch zu Satz 4.20. $\square$

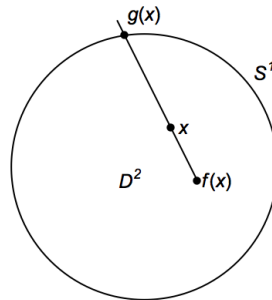


Abbildung 4.2: Die Retraktion $g : D^2 \rightarrow S^1$ im Beweis des Fixpunktsatzes von Brouwer

4.23 Bemerkungen (Fixpunktsatz von Brouwer)

1. Es gilt sogar allgemeiner, dass kompakte Mannigfaltigkeiten nie auf ihren Rand retrahiert werden können. Der Beweis ist ganz analog.

Auf die Kompaktheit kann man dabei allerdings nicht verzichten; als Gegenbeispiel betrachte man das halboffene Intervall $[0, \infty[$.

2. Von ähnlichem Typus sind alternative Argumente, die zeigen, dass auf $\mathbb{S}^{2n}$ kein nicht verschwindendes Tangentialvektorfeld existiert (Satz vom Igel, siehe auch Fußnote 6 auf Seite 29). $\diamond$

5 Transversalität

5.1 Der Transversalitätssatz

Wir werden zunächst den Transversalitäts-Begriff aus Definition 3.10 noch ein wenig verallgemeinern (nämlich lokalisieren) und Notationen einführen.

5.1 Definition Sei $f \in C^1(M, N)$, $A \subseteq N$ eine Untermannigfaltigkeit, und $K \subseteq M$. f heißt **transversal** zu A entlang K ($f \pitchfork_K A$), wenn

$$T_{f(x)}N = T_{f(x)}A + T_x f(T_x M) \quad (x \in K \text{ mit } f(x) \in A).$$

Der entsprechende Abbildungsraum ist

$$\pitchfork_K^r(M, N; A) := \{f \in C^r(M, N) \mid f \pitchfork_K A\}.$$

Statt $f \pitchfork_M A$ schreibt man kurz $f \pitchfork A$, und $\pitchfork^r(M, N; A) := \pitchfork_M^r(M, N; A)$.

Ein grundlegendes Resultat ist der folgende Transversalitätssatz, der durch die von René Thom stammende Jet-Version (Satz 5.25) verallgemeinert werden wird.

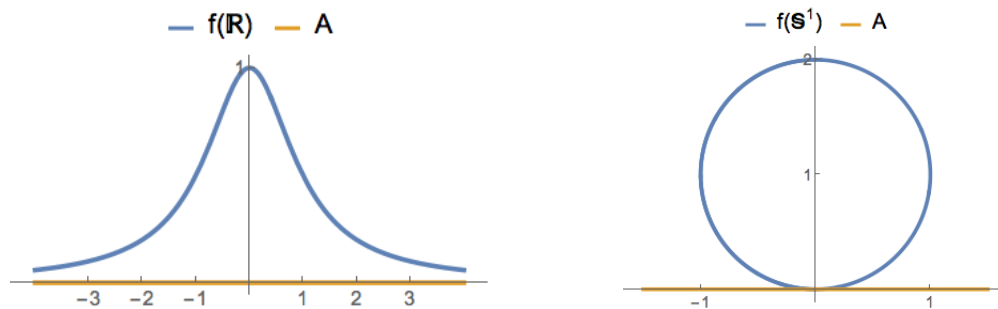
5.2 Satz (Transversalitätssatz) Es seien M, N Mannigfaltigkeiten, $A \subseteq N$ eine Untermannigfaltigkeit und $1 \leq r \leq \infty$. Dann gilt:

- a) $\cap^r(M, N; A)$ ist residuell (und damit dicht) in $C_S^r(M, N)$ und $C_W^r(M, N)$.
- b) Sei A abgeschlossen und $L \subseteq M$ abgeschlossen (bzw. kompakt). Dann ist $\cap_L^r(M, N; A)$ dicht und offen in $C_S^r(M, N)$ (bzw. auch in $C_W^r(M, N)$).

Allgemein heißt eine Eigenschaft, die Punkten eines topologischen Raums zukommen kann, **generisch**, wenn sie auf einer residuellen Teilmenge erfüllt ist. Teil a) besagt also, dass Transversalität zur Untermannigfaltigkeit C^r -generisch ist. Um Satz 5.2 zu beweisen, werden wir einiges an Technik bereitstellen müssen. Davor schauen wir uns aber einige Beispiele an:

5.3 Beispiele (Transversalität)

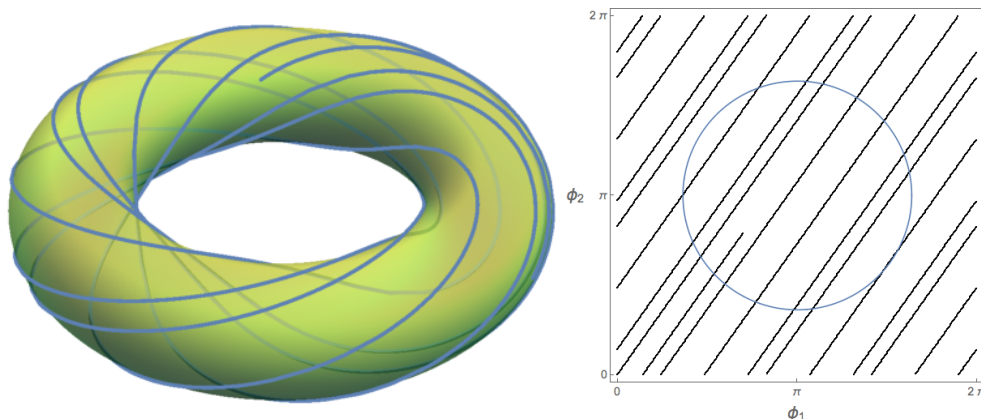
1. Für $M := \mathbb{R}$, $N := \mathbb{R}^2$, $A := \mathbb{R} \times \{0\} \subseteq N$ ist M nicht kompakt. $\cap^r(M, N; A)$ ist bei $f : M \rightarrow N$, $f(x) = \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{x^2+1} \end{pmatrix}$ offen in $C_S^r(M, N)$, aber nicht in $C_W^r(M, N)$. Siehe Abbildung unten, links.



2. Für $M := \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2$, $N := \mathbb{R}^2$, $A := \mathbb{R} \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ist M kompakt. $f : M \rightarrow N$, $f(x) = x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist nicht in $\cap^r(M, N; A)$. Siehe Abb. oben, rechts.
3. Für $M := \mathbb{S}^1$, $N := \mathbb{R}^2$ ist $A := \{(x_1, x_2) \in N \mid x_2 = 0, x_1 \neq 0\}$ nicht abgeschlossen. Da für $f : M \rightarrow N$, $f(x) = x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt: $f(M) \cap A = \emptyset$, ist $f \in \cap^\infty(M, N; A)$, aber jede Umgebung von f in $C_{S/W}^r(M, N)$ enthält nicht zu A transversale Abbildungen g .
4. In Teil b) wird nicht behauptet, dass $\cap^r(M, N; A)$ offen in $C_S^r(M, N)$ sei, wenn M nicht kompakt ist. Dies ist auch im Allgemeinen falsch:

Sei zum Beispiel die Gerade $M := \mathbb{R}$ mit irrationaler Steigung c injektiv in den Torus $N := \mathbb{T}^2$ immersiert und $A := \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{T}^2$ eingebettet wie in der Abbildung rechts (siehe auch Bemerkung 4.18.1).

Dann ist $M \subseteq N$ dicht, und die beiden Stellen von A mit der Tangentensteigung c können nicht bewegt werden, ohne dass sie mit Punkten von M zusammenfallen.



◇

Wir schauen uns zunächst an, wie eine *lokale* Version des Satzes bewiesen wird.

5.4 Lemma ('Lokaler Transversalitätssatz')

Sei K eine kompakte Teilmenge der Mannigfaltigkeit U und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist

$$\mathfrak{H}_K^r(U, V; (\mathbb{R}^q \times \{0\}_{n-q}) \cap V)$$

für $1 \leq r \leq \infty$ offen und dicht in $C_W^r(U, V)$.

5.5 Bemerkung (Lemma 5.4 als lokale Version von Satz 5.2)

$(\mathbb{R}^q \times \{0\}) \cap V$ vertritt hier die Stelle der Untermannigfaltigkeit $A \subseteq N$ im Transversalitätssatz 5.2. Nach Def. 2.23 einer Untermannigfaltigkeit gibt es für alle $a \in A$ eine Karte $(\varphi, U) \in \mathcal{A}_N$ von N bei a , für die $U \cap A = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^q \times \{0\}_{n-q})$. ◇

Beweis von Lemma 5.4:

- Wir können uns auf $V = \mathbb{R}^n$ beschränken, denn aus der Dichtheit und Offenheit für diesen Fall folgt wegen der Offenheit von

$$C^r(U, V) \subseteq C_W^r(U, \mathbb{R}^n)$$

die entsprechende Aussage bezüglich $C_W^r(U, V)$.

- Wir setzen $A := \mathbb{R}^q \times \{0\}_{n-q}$ und benutzen die natürliche Projektion

$$\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n / A$$

auf den **Quotientenvektorraum**.

Für Punkte $x \in K$ und $f \in C^r(U, \mathbb{R}^n)$ mit $f \in \mathfrak{h}_{\{x\}} A$ gilt *alternativ*:

- (a) Entweder $f(x) \notin A$,
- (b) oder $f(x) \in A$, aber $f \notin \mathfrak{h}_{\{x\}} A$, was gleichbedeutend damit ist, dass x regulärer Punkt von $\pi \circ f \in C^r(U, \mathbb{R}^n / A)$ ist.

Damit gibt es für alle $f \in C^r(U, \mathbb{R}^n)$ mit $f \in \mathfrak{h}_K A$ und alle $y \in K$ eine kompakte Umgebung $K_y \subseteq K$ von y mit

- (a) $f(K_y) \cap A = \emptyset$, falls $f(y) \notin A$,
- (b) sonst: alle $x \in K_y$ sind reguläre Punkte von $\pi \circ f$.

Diese beide Eigenschaften sind für $r \in \mathbb{N}$ offen in $C_W^r(U, \mathbb{R}^n)$, und wir können K durch endlich viele K_y überdecken. Damit ist auch $\mathfrak{h}_K^r(U, \mathbb{R}^n; A)$ offen.

- Dichtheit von $\mathfrak{h}_K^r(U, \mathbb{R}^n; A)$ bei $g \in C_W^\infty(U, \mathbb{R}^n)$ folgt durch Betrachtung der parallel-verschobenen Funktionen

$$g_y : U \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad g_y(x) := g(x) - y \quad (y \in \mathbb{R}^n) \quad (5.1)$$

und dem Satz 4.15 von Morse und Sard. Denn in $\mathbb{R}^n$ existiert ja eine Nullfolge $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ mit regulärem Wert $\pi(y_k)$ von $\pi \circ g$, d.h. regulärem Wert 0 von g_{y_k} .

- Die entsprechende Aussage für die Differenzierbarkeitsstufe $r \in \mathbb{N}$ von g folgt wegen der Dichtheit von $C^\infty(U, \mathbb{R}^n) \subseteq C_W^r(U, \mathbb{R}^n)$ (Satz 4.2). $\square$

Für den Beweis von Satz 5.2 benötigen wir zusätzlich zu Lemma 5.4 ein Globalisierungsargument. Das von HIRSCH ist **garbentheoretisch**:

5.6 Definition Es sei $0 \leq r \leq \infty$, und M und N seien C^r -Mannigfaltigkeiten. Eine C^r -**Abbildungsklasse** auf (M, N) ist eine Funktion $\mathcal{H}$, deren Definitionsbereich aus Tripeln (L, U, V) , $U \subseteq M$, $V \subseteq N$ offen, $L \subseteq M$ abgeschlossen, $L \subseteq U$ besteht, und die jedem Tripel eine Menge von Abbildungen

$$\mathcal{H}_L(U, V) \equiv \mathcal{H}(L, U, V) \subseteq C^r(U, V)$$

zuordnet. Dabei muss $\mathcal{H}$ das folgende **Lokalisierungsaxiom** erfüllen:

Für Tripel (L, U, V) ist $f \in C^r(U, V)$ in $\mathcal{H}_L(U, V)$, wenn es Familien

$$\{(L_i, U_i, V_i) \mid i \in I\} \quad \text{und} \quad \{f_i \in \mathcal{H}_{L_i}(U_i, V_i) \mid i \in I\}$$

von Tripeln und Abbildungen, sowie Umgebungen $W_i \subseteq U_i$ von L_i gibt mit

$$L \subseteq \bigcup_{i \in I} L_i \quad \text{und} \quad f|_{W_i} = f_i|_{W_i} \quad (i \in I).$$

In unserem aktuellen Problem wird die C^r -Abbildungsklasse

$$\mathcal{H} : (L, U, V) \mapsto \mathfrak{H}_L^r(U, V; V \cap A) \quad (5.2)$$

sein. Man beachte, dass A nicht die gleiche Rolle wie L (oder U und V) spielt.

$\mathcal{H}$ ordnet eben den Mengen (L, U, V) diejenigen Funktionen aus $C^r(U, V)$ zu, die eine gewisse Eigenschaft besitzen. Dass hier die Eigenschaft darin besteht, transversal zu A zu sein, spielt keine entscheidende Rolle für das Folgende.

Wir wollen ja darauf hinaus, dass die "Eigenschaft" $\mathcal{H}_L(M, N)$ offen und dicht in $C_{S/W}^r(M, N)$ ist, wenn sie *lokal* offen und dicht ist.

Die letztgenannte Voraussetzung nennen wir *Reichhaltigkeit*:

5.7 Definition Eine Abbildungsklasse $\mathcal{H}$ heißt **reichhaltig**, wenn offene Überdeckungen $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ von M, N existieren, sodass, falls die offenen Mengen $U \subseteq M$, $V \subseteq N$ Teilmengen von Elementen von $\mathcal{U}$ bzw. $\mathcal{V}$ sind und $L \subseteq U$ kompakt ist, $\mathcal{H}_L(U, V)$ offen und dicht in $C_W^r(U, V)$ ist.

Reichhaltigkeit ist eine lokale Eigenschaft, aber das Lokalisierungsaxiom sagt uns gerade, dass wir aus ihr die globale Eigenschaft folgern können.

5.8 Satz (Globalisierungssatz) Sei $\mathcal{H}$ eine reichhaltige C^r -Abbildungsklasse auf (M, N) , $0 \leq r \leq \infty$. Für $L \subseteq M$ abgeschlossen gilt:

- a) $\mathcal{H}_L(M, N)$ ist offen und dicht in $C_S^r(M, N)$.
- b) $\mathcal{H}_L(M, N)$ ist (sogar) offen und dicht in $C_W^r(M, N)$, wenn L kompakt ist.

Um also Teil b) unseres Transversalitätssatzes zu beweisen, müssen wir nachher nur die Reichhaltigkeit von (5.2) nachweisen.

Beweis von Satz 5.8:

- Offensichtlich müssen wir, um für eine Funktion $f \in C^r(M, N)$ die Eigenschaft $\mathcal{H}$ global nachzuweisen (d.h.: $f \in \mathcal{H}_L(M, N)$), wissen, dass sie auf Einschränkungen von f auf eine Überdeckung von M gilt.

- Wichtig ist wegen der Frage der Residualität die Indizierung von $\mathcal{U}$ und $\mathcal{V}$ durch eine *abzählbare* Indexmenge I . Dies ist wegen unserer im Kasten auf Seite 33 fixierten Forderungen an die Mannigfaltigkeiten auch möglich:
 - Es gibt einen lokal endlichen Atlas $\Phi = \{(\varphi_i, U_i) \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{A}_M$ von M ,
 - Kompakta $K_i \subseteq U_i$, ($i \in I' \subseteq I$) mit $L = \bigcup_{i \in I'} K_i$, und
 - eine Familie $\Psi = \{(\psi_i, V_i)\}_{i \in I'}$ von Karten von N mit $f(K_i) \subseteq V_i$ ($i \in I'$).
- Weil $\mathcal{H}$ reichhaltig ist, können wir Φ und Ψ so wählen, dass für alle offenen Mengen $E_i \subseteq U_i$ mit $K_i \subseteq E_i$ der Abbildungsraum $\mathcal{H}_{K_i}(E_i, V_i)$ dicht und offen in $C_W^r(E_i, V_i)$ ist. Wir zeigen zunächst, dass

$$\mathcal{M} := \{g \in C^r(M, N) \mid \forall i \in I' : g|_{U_i} \in \mathcal{H}_{K_i}(U_i, V_i)\}$$

schwach bzw. stark **offen** ist. Wegen des Lokalisierungsaxioms und der Überdeckungseigenschaft $L = \bigcup_{i \in I'} K_i$ ist immerhin¹¹

$$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}_L(M, N).$$

Ist, wie in Teil b) von Satz 5.8 angenommen, L kompakt, dann können wir $|I'| < \infty$ annehmen. In diesem Fall ist $\mathcal{M}$ endlicher Schnitt offener Teilmengen von $C_W^r(M, N)$, also $\mathcal{M}$ offen in $C_W^r(M, N)$.

Ist, wie in Teil b) von Satz 5.8 angenommen, L abgeschlossen, dann ist $\mathcal{M}$ offen in $C_S^r(M, N)$, denn die Überdeckung von M durch die Kartengebiete U_i von Φ ist lokal endlich.

- Wir beginnen mit dem Beweis der **Dichtheitsaussagen**, und zwar für Teil a). Teil b) lässt sich ganz analog zeigen.

Wir starten mit einem beliebigen $f \in C^r(M, N)$ und einer Umgebung

$$\mathcal{N}^r \equiv \mathcal{N}^r(f; \Phi, \Psi, \mathcal{K}, \epsilon)$$

von f , mit $\mathcal{K} := \{K_i\}_{i \in I'}$ und $\epsilon := \{\epsilon_i\}_{i \in I'}$ mit $\epsilon_i > 0$ beliebig gewählt. Wir müssen eine f approximierende, aber zur Abbildungsklasse gehörende Abbildung $\hat{f}$ konstruieren, also

$$\hat{f} \in \mathcal{H}_L(M, N) \cap \mathcal{N}^r. \quad (5.3)$$

Dazu ändern wir f nacheinander für jedes $j \in I'$ auf $E_j := U_j \cap f^{-1}(V_j)$ so ab, dass wir die lokalisierte Eigenschaft erreichen.

¹¹Aus der Beweisführung in HIRSCH [Hi, p.75] scheint zu folgen, dass sogar $\mathcal{M} = \mathcal{H}_L(M, N)$ gilt. Das kann ich aber nicht nachvollziehen.

Nach Voraussetzung ist $K_j \subseteq E_j$ und wegen der Reichhaltigkeit von $\mathcal{H}$ ist $\mathcal{H}_{K_j}(E_j, V_j)$ dicht in $C^r(E_j, V_j)$.

Wir benutzen Abschnidefunktionen

$$\ell_j \in C^r(E_j, [0, 1]) \quad (j \in I')$$

mit kompaktem Träger $\text{supp}(\ell_j)$ und $\ell_j|_{K_j} = 1$.

Sei nun $g \in \mathcal{H}_{K_j}(E_j, V_j)$ nahe bei $f|_{E_j}$. Dann ist

$$h \in C^r(M, N) \quad , \quad h(x) := \begin{cases} f(x) + \ell_j(x)[g(x) - f(x)] & , \quad x \in E_j \\ f(x) & , \quad x \notin E_j \end{cases}$$

definiert, wobei wir implizit die Linearität im Kartenbild $\psi_j(V_j)$ auf V_j übertragen haben.

Außerdem ist nahe bei K_j $h = g$, sodass wegen des Lokalisierungsaxiomes $h \in \mathcal{H}_{K_j}(M, N)$.

Wegen der Dichtheit von $\mathcal{H}_{K_j}(E_j, V_j)$ können wir f durch solche g approximieren, sodass wir mit h in $\mathcal{N}^r$ hineinwandern (schwache $\implies$ starke Topologie!).

Wir ändern f schrittweise in Umgebungen der K_i ab, ohne dass wir $\mathcal{N}^r$ wieder verlassen. So konstruieren wir $\tilde{f}$ aus (5.3), was die Dichtheit von $\mathcal{H}_L(M, N)$ in $C_S^r(M, N)$ zeigt. $\square$

Beweis von Satz 5.2:

- Zum Beweis von **Teil b)** müssen wir nachweisen, dass für $1 \leq r \leq \infty$ die Abbildung

$$\mathcal{H} : (L, U, V) \longmapsto \mathfrak{H}_L^r(U, V; A \cap V)$$

eine reichhaltige Abbildungsklasse darstellt.

Transversalität ist eine lokal definierte, d.h. durch Abarbeitung der Karten nachprüfbare Eigenschaft. Damit ist $\mathcal{H}$ eine Abbildungsklasse im Sinn von Definition 5.6, das Lokalisierungsaxiom wird also erfüllt.

Zunächst können wir sicher eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von M als Überdeckung mit Untermannigfaltigkeiten $U_i \subseteq M$ auffassen. Weiter können wir in N eine offene Überdeckung $\mathcal{V}$ von M durch Kartengebiete finden, sodass die Kartenbilder von A genau die Form $(\mathbb{R}^q \times \{0\}_{n-q}) \cap V$ haben, die im Lemma 5.4 verlangt wird, denn A ist eine Untermannigfaltigkeit.

Also folgt Teil b) des Transversalitätssatzes für (unberandete) Mannigfaltigkeiten N aus dem Globalisierungssatz 5.8.

- In **Teil a)** des Transversalitätssatzes wurde nicht vorausgesetzt, dass die Untermannigfaltigkeit $A \subseteq N$ abgeschlossen ist. Wir können dann aber immer noch A durch abzählbar viele kompakte Kartengebiete A_k , ($k \in \mathbb{N}$) überdecken und Teil a) damit auf Teil b) zurückführen.

Zum Nachweis der Residualität in der starken Topologie beachten wir die Relation

$$\mathfrak{H}^r(M, N; A) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathfrak{H}^r(M, N; A_k).$$

Wegen der Abgeschlossenheit der A_k sind die Mengen $\mathfrak{H}^r(M, N; A_k)$ in der starken Topologie dicht und offen, woraus die Aussage folgt.

Für die entsprechende Aussage in der schwachen Topologie überdecken wir auch M durch abzählbar viele Kompakta M_j , $j \in \mathbb{N}$. Dann haben wir

$$\mathfrak{H}^r(M, N; A_k) = \bigcap_{j=1}^{\infty} \mathfrak{H}^r(M_j, N; A_k),$$

wobei die $\mathfrak{H}^r(M_j, N; A_k)$ nach Teil b) des Transversalitätssatzes offen und dicht in der schwachen Topologie sind. Wieder haben wir nur abzählbar $\times$ abzählbar = abzählbar viele Schnitte solcher Mengen. $\square$

Wir hatten in Definition 3.10 Transversalität einer Abbildung zu einer gegebenen Untermannigfaltigkeit definiert. Wählt man als Abbildung nun die Inklusionsabbildung einer zweiten Untermannigfaltigkeit, so ergibt sich zwanglos die Definition der *Transversalität zweier Untermannigfaltigkeiten* (und wirklich sind die beiden Untermannigfaltigkeiten dabei gleichberechtigt).

5.9 Aufgabe (transversale Untermannigfaltigkeiten)

Zeigen Sie unter Verwendung von Satz 3.12: Sind A_1 und A_2 zueinander transversale Untermannigfaltigkeiten der Mannigfaltigkeit N , dann gilt

$$T_a(A_1 \cap A_2) = T_a A_1 \cap T_a A_2 \quad (a \in A_1 \cap A_2) \quad \diamond$$

Transversalität von Untermannigfaltigkeiten lässt sich immer erreichen:

5.10 Satz *Es seien $A_1, A_2 \subseteq N$ C^r -Untermannigfaltigkeiten, $1 \leq r \leq \infty$. Dann enthält jede Umgebung der Inklusion $i_2 : A_2 \rightarrow N$ in $C_S^r(A_2, N)$ eine zu A_1 transversale C^∞ -Einbettung.*

Beweis: Nach Satz 4.3.3 ist $\text{Emb}^r(A_2, N) \subseteq C_S^r(A_2, N)$ offen (für $1 \leq r \leq \infty$).

Weiter wissen wir nach Satz 4.2, dass $C^\infty(A_2, N) \subseteq C_S^r(A_2, N)$ dicht ist. Also finden wir auch in jeder C_S^r -Umgebung eine C^∞ -Einbettung und wir können uns von vornherein auf den Fall $r = \infty$ beschränken.

Damit wird der Satz eine unmittelbare Folge des Teils a) des Transversalitätssatzes 5.2. Denn dieser besagt, angewandt auf unsere Situation, dass insbesondere $\mathfrak{H}^\infty(A_2, N; A_1)$ dicht in $C_S^\infty(A_2, N)$ ist. (Wir verwenden noch einmal Satz 4.2 für $r = \infty$ und beachten, dass die $C_S^\infty(A_2, N)$ -Topologie feiner als die $C_S^r(A_2, N)$ -Topologie ist). $\square$

5.2 Stratifizierte Untervarietäten

Wir können nun auch gleichzeitig die Transversalität einer Abbildung zu *mehreren* Untermannigfaltigkeiten erreichen:

5.11 Satz *Es seien $A_0, \dots, A_q$ C^r -Untermannigfaltigkeiten von N , $1 \leq r \leq \infty$. Dann ist*

$$\mathfrak{H}^r(M, N; A_0, \dots, A_q) := \bigcap_{l=0}^q \mathfrak{H}^r(M, N; A_l)$$

residuell in $C_S^r(M, N)$.

Beweis: Teil a) von Satz 5.2 sagt aus, dass die einzelnen Mengen $\mathfrak{H}^r(M, N; A_l)$ residuell sind. Endliche Schnitte residueller Mengen sind aber wieder abzählbare Schnitte offener dichter Mengen und damit residuell. $\square$

Ein typischer Fall, bei dem das obige Theorem angewendet werden kann, ist der einer stratifizierten Varietät, die die **Whitney-Bedingungen** erfüllt:

5.12 Definition

- Eine **Stratifizierung** eines topologischen Raums X ist eine **Filtrierung**

$$X^{(0)} \subseteq X^{(1)} \subseteq \dots \subseteq X^{(n-1)} \subseteq X^{(n)} = X$$

*in abgeschlossene Teilmengen, wobei die **Strata** $M^{(k)} := X^{(k)} \setminus X^{(k-1)}$ mit $X^{(-1)} := \emptyset$ glatte Mannigfaltigkeiten mit $\dim(M^{(k)}) = k$ sind.*

- Eine Abbildung heißt **transversal zu einer stratifizierten Untervarietät**, falls sie transversal zu jedem Stratum ist.

5.13 Beispiele (Stratifizierung)

1. Eine n -dimensionale berandete Mannigfaltigkeit X ist die disjunkte Vereinigung $M^{(n)} \sqcup M^{(n-1)}$, mit dem Rand $M^{(n-1)} = \partial X$.

2. Analog ist das Produkt $X \times Y$ zweier berandeter Mannigfaltigkeiten eine *'Mannigfaltigkeit mit Ecken'*, besitzt also eine Stratifizierung mit

$$M^{(n-1)} = \partial X \times (Y \setminus \partial Y) \sqcup (X \setminus \partial X) \times \partial Y \quad \text{und} \quad M^{(n-2)} = \partial X \times \partial Y. \quad \diamond$$

5.14 Satz Die Teilmengen

$$\text{Lin}(m, n; \rho) := \{T \in \text{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \mid \text{rang}(T) = \rho\} \quad (0 \leq \rho \leq \min(m, n)) \quad (5.4)$$

bilden die Strata einer Stratifizierung des Vektorraums $\text{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, und

$$\dim(\text{Lin}(m, n; \rho)) = mn - (m - \rho)(n - \rho).$$

5.15 Beispiel Die Strata des vier-dimensionalen Vektorraums $\text{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ sind

- $\text{Lin}(2, 2; 0) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$
- $\text{Lin}(2, 2; 1) = \{T \in \text{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \mid \det(T) = 0, T \neq 0\}$ und
- $\text{Lin}(2, 2; 2) = \text{GL}(2, \mathbb{R}).$ $\diamond$

Beweis von Satz 5.14:

- Da jedes $T \in \text{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ einen Rang zwischen 0 und $\min(m, n)$ besitzt, müssen wir nur beweisen, dass die $\text{Lin}(m, n; \rho)$ Untermannigfaltigkeiten sind. Es ist dann klar, dass $\text{Lin}(m, n; \min(m, n))$ offen und dicht in $\text{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ ist.
- Eine lineare Abbildung in $\text{Lin}(m, n; \rho)$ besitzt nach Permutation der kanonischen Basen von $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ die darstellende Matrix

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \text{Mat}(n \times m, \mathbb{R}) \quad \text{mit } A \in \text{GL}(\rho, \mathbb{R}).$$

Multiplikation mit $S := \begin{pmatrix} \mathbb{1}_\rho & 0 \\ -CA^{-1} & \mathbb{1}_{n-\rho} \end{pmatrix} \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ ergibt

$$ST = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

Die Forderung $\text{rang}(ST) \equiv \text{rang}(T) = \rho$ ist also gleichbedeutend mit dem System von $(m - \rho)(n - \rho)$ linear unabhängigen Gleichungen für D ,

$$D - CA^{-1}B = 0 \in \text{Mat}((n - \rho) \times (m - \rho), \mathbb{R}).$$

Da die Menge der invertierbaren Matrizen aus $\text{Mat}(\rho, \mathbb{R})$ offen und die Abbildung $T \mapsto D - CA^{-1}B$ nach der *Cramerschen Regel* reell-analytisch ist, folgt, dass $\text{Lin}(m, n; \rho)$ eine C^ω -Untermannigfaltigkeit von $\text{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ ist.

- Die Dimensionsformel folgt aus dieser lokalen Darstellung von $\text{Lin}(m, n; \rho)$. $\square$

5.16 Aufgabe (Vereinigung von Strata) Zeigen Sie, dass die Teilmengen

$$\widetilde{\text{Lin}}(m, n; \rho) := \{T \in \text{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \mid \text{rang}(T) \leq \rho\} \quad (0 \leq \rho \leq \min(m, n))$$

für $0 < \rho < \min(m, n)$ keine Untermannigfaltigkeiten von $\text{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ sind. $\diamond$

5.17 Bemerkung Wir können nun beantworten, ob "typischerweise" Familien $F \in C^1(P, \text{Lin}(m, n))$ von linearen Abbildungen (parametrisiert durch eine Mannigfaltigkeit P) Elemente niedrigen Ranges ρ enthalten.

Da Transversalität von F zur Stratifizierung (5.4) residual ist, gilt für solche F :

$$F(P) \cap \text{Lin}(m, n; \rho) = \emptyset, \text{ falls } \dim(P) < (m - \rho)(n - \rho). \quad \diamond$$

Der folgende Satz beschreibt eine besondere Eigenschaft von Abbildungen in sogenannte Stiefel-Mannigfaltigkeiten.

5.18 Definition

- Die Mannigfaltigkeit $S_k(\mathbb{R}^n) := \text{Lin}(k, n; k)$ ($k \leq n \in \mathbb{N}_0$) der linearen Abbildungen $v : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit Rang k heißt **nicht kompakte Stiefel-Mannigfaltigkeit**.
- $v = (v_1, \dots, v_k) \in S_k(\mathbb{R}^n)$ heißt ein **k -Rahmen oder-Bein** (englisch: frame).
- $V_k(\mathbb{R}^n) := \{(v_1, \dots, v_k) \in S_k(\mathbb{R}^n) \mid \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{i,k}\}$ ($k \leq n \in \mathbb{N}_0$) heißt **(kompakte) Stiefel-Mannigfaltigkeit**.

5.19 Bemerkungen (Stiefel-Mannigfaltigkeiten)

1. Es ist $\dim(S_k(\mathbb{R}^n)) = nk$, $S_1(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $S_n(\mathbb{R}^n) \cong \text{GL}(n, \mathbb{R})$.
2. Die Spaltenvektoren $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ der linearen Abbildung $v \in S_k(\mathbb{R}^n)$ sind nach Voraussetzung linear unabhängig.
3. Anwendung des **Gram-Schmidt-Verfahrens** auf die Vektoren $v_1, \dots, v_k$ liefert eine stetige Surjektion $\Pi_k : S_k(\mathbb{R}^n) \rightarrow V_k(\mathbb{R}^n)$. Daraus ergibt sich

$$\dim(V_k(\mathbb{R}^n)) = \dim(S_k(\mathbb{R}^n)) - \binom{k+1}{2}.$$

Beispielsweise ist $V_1(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{S}^{n-1}$ und $V_n(\mathbb{R}^n) \cong \text{O}(n)$.

4. Die stetigen Surjektionen

$$S_k(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \text{Gr}(k, \mathbb{R}^n) \quad , \quad v = (v_1, \dots, v_k) \longmapsto \text{span}(v_1, \dots, v_k)$$

zeigen, dass die (kompakten und nicht kompakten) Stiefel-Mannigfaltigkeiten Bündel über den Grassmann-Mannigfaltigkeiten sind. $\diamond$

5.20 Satz Sei $A \subseteq M$ eine abgeschlossene Teilmenge einer Mannigfaltigkeit M . Dann lässt sich eine stetige Abbildung $A \rightarrow S_k(\mathbb{R}^n)$ zu einer stetigen Abbildung $M \rightarrow S_k(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen, wenn $\dim(M) \leq n - k$.

5.21 Beispiele (Abbildungen in Stiefel–Mannigfaltigkeiten)

1. Für $A = \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ lässt sich $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow S_1(\mathbb{R}^3)$, $f(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ zur stetigen Abbildung $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1(\mathbb{R}^3)$, $\tilde{f}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1-x_1^2-x_2^2 \end{pmatrix}$ fortsetzen.
2. Für $A = \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ lässt sich $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow S_1(\mathbb{R}^2)$, $f(x) = x$ nicht zu einer stetigen Abbildung $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1(\mathbb{R}^2)$ fortsetzen. Denn mit Π_k aus Bemerkung 5.19.3 ist die Abbildung $\Pi_1 \circ f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ die Identität, hat also Rotationszahl 1. $\diamond$

Beweis von Satz 5.20:

- Für $k = 0$ besteht $S_k(\mathbb{R}^n)$ aus einem Punkt. Für $k = n$ besteht wegen der Bedingung $\dim(M) = 0$ jede Zusammenhangskomponente von M aus einem Punkt. Wir nehmen also $1 \leq k \leq n - 1$ an und setzen $m := \dim(M)$.
- Es gibt eine abzählbare, lokal endliche Überdeckung von M durch zu m -dimensionalen abgeschlossenen Vollkugeln homöomorphe Teilmengen U_ℓ ($\ell \in \mathbb{N}$). Mit der gegebenen Abbildung $f_0 \in C(A, S_k(\mathbb{R}^n))$,

$$D_0 := A \quad \text{und} \quad D_\ell := D_{\ell-1} \cup U_\ell$$

setzen wir induktiv $f_{\ell-1} \in C(D_{\ell-1}, S_k(\mathbb{R}^n))$ zu $f_\ell \in C(D_\ell, S_k(\mathbb{R}^n))$ fort. Dies definiert die gesuchte Abbildung $f \in C(M, S_k(\mathbb{R}^n))$.

- Für den Induktionsschritt genügt es, die auf der abgeschlossenen Menge $A_\ell := D_{\ell-1} \cap U_\ell$ definierte Abbildung $g := f_{\ell-1}|_{A_\ell} \in C(A_\ell, S_k(\mathbb{R}^n))$ stetig auf U_ℓ fortzusetzen.
- Der Fortsetzungssatz von Tietze (Lemma 4.15 des Topologie-Skripts) besagt, dass für normale (z.B. metrisierbare) topologische Räume X auf abgeschlossenen Mengen $A \subseteq X$ definierte Funktionen $h \in C(A, \mathbb{R})$ sich stetig auf X fortsetzen lassen. Wenden wir diesen Satz auf alle Komponenten von g an, so erhalten wir eine stetige Abbildung

$$\tilde{g} : U_\ell \rightarrow \text{Lin}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n) \quad , \quad \tilde{g}|_{A_\ell} = g.$$

- Sei $X := \text{Lin}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n) \setminus S_k(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $\tilde{g}^{-1}(X)$ abgeschlossen, da X abgeschlossen und $\tilde{g}$ stetig ist, und $\tilde{g}^{-1}(X) \cap A_\ell = \emptyset$. Daher können wir $\tilde{g}$, restringiert auf eine offene Umgebung $V \supseteq \tilde{g}^{-1}(X)$, $\bar{V} \cap A_\ell = \emptyset$, als C^∞ annehmen (das folgt aus dem relativen Approximationssatz [Hi, Thm. 2.2.5]).

- Wir sehen jetzt, dass wir, wenn wir auf V an $\tilde{g}$ etwas rütteln, erreichen können, dass $\tilde{g}(V) \cap X = \emptyset$. Denn nach dem vorigen Satz ist

$$X = \text{Lin}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n) - \text{Lin}(k, n; k) = \bigcup_{\rho=0}^{k-1} \text{Lin}(k, n; \rho)$$

die Vereinigung von Mannigfaltigkeiten, deren Dimension

$$\begin{aligned} \dim(\text{Lin}(k, n; \rho)) &= kn - (k - \rho)(n - \rho) \\ &\leq kn - (k - (k - 1))(n - (k - 1)) = kn - n + k - 1 \end{aligned}$$

so klein ist, dass $\dim(\text{Lin}(k, n; \rho)) + m \leq kn - n + k - 1 + n - k < kn$ ist. Daher impliziert der Transversalitätssatz 5.2 das Ergebnis. $\square$

5.3 Der parametrische Transversalitätssatz

Unser nächstes Resultat, der *parametrische Transversalitätssatz*, hat viele eigenständige Anwendungen, er wird aber auch als Input des Jet-Transversalitätssatzes 5.25 auftauchen.

Da wir parameterabhängige Funktionen auch als Funktionen auf dem Produkt von Parameterraum P und Definitionsbereich M auffassen wollen, benutzen wir folgende

5.22 Notation Für $F : P \rightarrow C^r(M, N)$ bezeichne

$$F^{\text{ev}} : P \times M \rightarrow N, \quad (p, m) \mapsto F(p)(m)$$

die **Auswertungsabbildung**, und $F_p := F(p)$ ($p \in P$). $\diamond$

5.23 Satz (Parametrischer Transversalitätssatz)

M, N, P seien C^r -Mannigfaltigkeiten, $A \subseteq N$ sei eine C^r -Untermannigfaltigkeit und

$$r > \max(\dim(M) - \dim(N) + \dim(A), 0). \quad (5.5)$$

Sei weiter $F^{\text{ev}} \in C^r(P \times M, N)$ transversal zu A : $F^{\text{ev}} \pitchfork A$.

1. Dann ist $\pitchfork(F; A) := \{p \in P \mid F_p \pitchfork A\} \subseteq P$ residuell und damit dicht.
2. Wenn A abgeschlossen und $F : P \rightarrow C_S^r(M, N)$ stetig ist, dann ist $\pitchfork(F; A)$ sogar offen.

Beweis:

- Wir nutzen aus, dass wegen der Transversalität der C^r -Abbildung F^{ev} zu A nach Satz 3.12

$$W := (F^{\text{ev}})^{-1}(A) \subseteq P \times M$$

eine C^r -Untermannigfaltigkeit ist.

Nach dem gleichen Satz ist die Kodimension von W gleich der von A , sodass

$$\dim(W) = \dim(P) + \dim(M) - (\dim(N) - \dim(A)). \quad (5.6)$$

- Weiter bezeichnen wir die Projektion auf den Parameterraum mit

$$\pi : P \times M \rightarrow P, \quad (p, m) \mapsto p.$$

Eingeschränkt auf das Urbild von A unter F^{ev} ist $\pi|_W : W \rightarrow P$ eine C^r -Abbildung, und wegen (5.5) und (5.6) gilt $r > \max(\dim(W) - \dim(P), 0)$. Also sind nach dem Satz 4.15 von Morse und Sard die regulären Parameterwerte $p \in P$ bezüglich $\pi|_W$ residuell.

- Die Produktmannigfaltigkeit $P \times M$ wird durch die Untermannigfaltigkeiten der Form $\pi^{-1}(p) = \{p\} \times M$ ($p \in P$) gefasert.

Wenn $p \in P$ nun regulärer Wert von $\pi|_W$ ist, so ist $\{p\} \times M$ zu W transversal. Denn in einem beliebigen Schnittpunkt $w = (p, m) \in (\{p\} \times M) \cap W$ gilt ja, dass $T_w W$ unter der linearisierten Projektionsabbildung $T_w \pi$ surjektiv auf $T_p P$ abgebildet wird (siehe Abbildung), und Transversalität der beiden Untermannigfaltigkeiten bedeutet, dass gilt:

$$T_w W + T_w(\{p\} \times M) = T_w(P \times M).$$

Dann ist aber auch

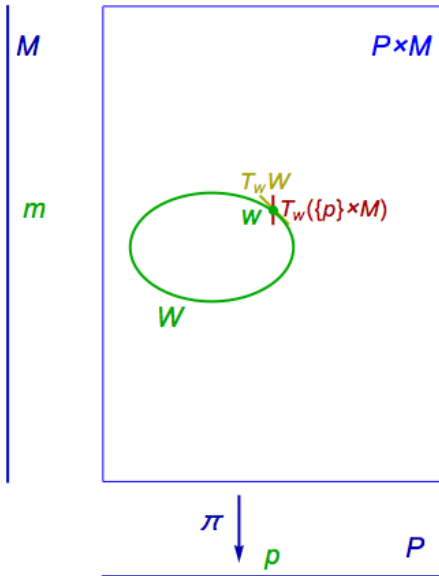
$$F_p \pitchfork A,$$

denn einerseits können wir $F_p : M \rightarrow N$ kanonisch mit $F^{\text{ev}}|_{\{p\} \times M}$ identifizieren, andererseits können wir mit w wie oben alle $a \in F_p(M) \cap A$ als

$$a = F^{\text{ev}}(w), \quad \text{mit } w \text{ geeignet} \quad (5.7)$$

schreiben. Daher ist $F_p : M \rightarrow N$ transversal zu $A \subseteq N$:

$$\begin{aligned} (T_m F_p)(T_m M) + T_a A &\stackrel{1.}{=} (T_w F^{\text{ev}})T_w(\{p\} \times M) + T_a A \\ &\stackrel{2.}{=} (T_w F^{\text{ev}})(T_w(\{p\} \times M) + T_w W) + T_a A \\ &\stackrel{3.}{=} (T_w F^{\text{ev}})T_w(P \times M) + T_a A \\ &\stackrel{4.}{=} T_a N. \end{aligned}$$



1. Die Ersetzung von $(T_m F_p)(T_m M)$ durch $(T_w F^{\text{ev}})T_w(\{p\} \times M)$ folgt dabei aus der obigen kanonischen Identifizierung von F_p und $F^{\text{ev}}|_{\{p\} \times M}$,
2. die von $T_a A$ durch $(T_w F^{\text{ev}})(T_w W) + T_a A$ aus der Definition (5.7) von w ,
3. Gleichung 3. benutzt die vorausgesetzte Regularität von p bez. $\pi|_W$,
4. die letzte Gleichung war die Transversalitätsannahme des Satzes ($F^{\text{ev}} \pitchfork A$).

Insgesamt haben wir $F_p \pitchfork A$ bewiesen.

Also ist $\pitchfork(F; A)$ residuell, wie im ersten Teil des Satzes behauptet.

- Im zweiten Teil des Satzes war unter der zusätzlichen Voraussetzung der Stetigkeit von $F : P \rightarrow C_S^r(M, N)$ und der Abgeschlossenheit von A die Offenheit von

$$\pitchfork(F; A) = F^{-1}(\pitchfork^r(M, N; A)) \subseteq P$$

behauptet worden. Dies ergibt sich aber daraus, dass nach dem Transversalitätssatz 5.2b) für A abgeschlossen $\pitchfork^r(M, N; A) \subseteq C_S^r(M, N)$ offen ist:

Für $F_p \pitchfork A$ gibt es eine in der starken Topologie offene Umgebung $U \subseteq \pitchfork^r(M, N; A)$ von F_p , und $F^{-1}(U) \subseteq P$ ist eine offene Umgebung von p . $\square$

5.24 Aufgabe Sei M eine C^r -Mannigfaltigkeit, $f \in C^r(M, \mathbb{R}^n)$ und A eine C^r -Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$, mit $r > \max(\dim(M) - \text{codim}(A), 0)$.

Zeigen Sie: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $p \in \mathbb{R}^n$ mit $\|p\| < \epsilon$, so dass die Abbildung $f_p \in C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$, $f_p(x) := f(x) + p$ transversal zu A ist. $\diamond$

5.4 Der Jet-Transversalitätssatz

In vielen Anwendungen werden aber der Transversalitätssatz 5.2 oder parametrische Transversalität nicht ausreichen, weil Bedingungen an Ableitungen gestellt werden. Wir benötigen dann den Begriff der Jet-Transversalität.

Wir hatten mit $J^r(M, N)$ die Mannigfaltigkeit aller r -Jets von M nach N bezeichnet, und C^∞ -Funktionen von M nach N über die Jet-Abbildung (3.7) ihre r -Jet-Erweiterung zugeordnet, mit $1 \leq r < s \leq \infty$.

Im Jet-Transversalitätssatz wählen wir zunächst eine Untermannigfaltigkeit $A \subseteq J^r(M, N)$, und suchen nach denjenigen Abbildungen $h \in C^s(M, N)$, deren Jet-Erweiterung $j^r h : M \rightarrow J^r(M, N)$ transversal zu A wird, also nach

$$\pitchfork^s(M, N; j^r, A) := \{h \in C^s(M, N) \mid j^r h \pitchfork A\}.$$

Der Einfachheit halber arbeiten wir mit C^∞ -Mannigfaltigkeiten.

5.25 Satz (Jet-Transversalitätssatz)

Es seien M, N C^∞ -Mannigfaltigkeiten und

$$A \subseteq J^r(M, N) \quad \text{eine } C^\infty\text{-Untermannigfaltigkeit,} \quad (1 \leq r < s \leq \infty).$$

- Dann ist $\mathcal{H}^s(M, N; j^r, A) \subseteq C_S^r(M, N)$ residuell (und daher dicht).
- Für A abgeschlossen ist $\mathcal{H}^s(M, N; j^r, A)$ offen.

Als Motivation dient die folgende Anwendung.

5.26 Bemerkung (Jet–Transversalitätssatz)

Es soll gezeigt werden, dass eine offene dichte Menge $\mathcal{S} \subseteq C_S^\infty(M, N)$ existiert, für deren Elemente $f \in \mathcal{S}$ die Teilmengen

$$R(f, \rho) := \{m \in M \mid \text{rang}(T_m f) = \rho\} \quad (\rho = 0, \dots, \min(\dim(M), \dim(N)))$$

Untermannigfaltigkeiten von M sind. Sicher lässt sich diese Behauptung nicht aus dem Transversalitätssatz 5.2 ableiten, denn R wird über die erste Ableitung von f definiert. Wir können auch nicht einfach die erste Ableitung $Tf : TM \rightarrow TN$ variieren, denn die so veränderte Distribution vom Rang $\dim(M)$ muss für $\dim(M) \geq 2$ nicht mehr Ableitung einer Funktion sein (siehe Abbildung 5.1 und den Satz von Frobenius).

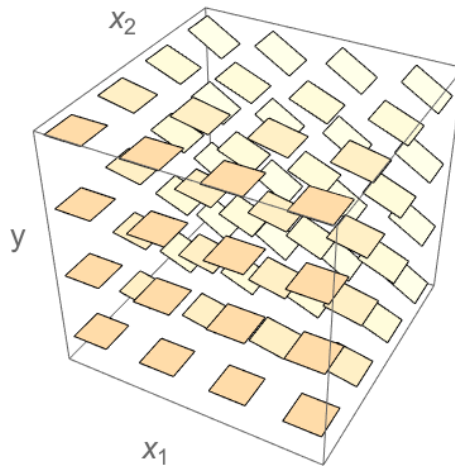


Abbildung 5.1: y -unabhängige geometrische Rang 2-Distribution $D \subseteq TM$ für $M := \mathbb{R}_x^2 \times \mathbb{R}_y$, die nicht tangential zum Graph einer Funktion $f \in C^1(\mathbb{R}_x^2, \mathbb{R}_y)$ ist

Wir können aber $J^1(M, N)$ nach dem Rang der ersten Ableitung stratifizieren, und dann mit dem Jet–Transversalitätssatz für Untermannigfaltigkeits-Familien an f wackeln, bis $j^1 \tilde{f}$ transversal zu den Strata von $J^1(M, N)$ wird. Die Stratifizierung von $J^1(M, N)$ ist wiederum eine Folge der in Satz 5.14 bewiesenen Stratifizierung von $\text{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. $\diamond$

Wir werden den Jet-Transversalitätssatz mit einer ähnlichen Strategie beweisen wie den Transversalitätssatz 5.2. Insbesondere werden wir zunächst eine lokale Aussage beweisen und diese danach globalisieren.

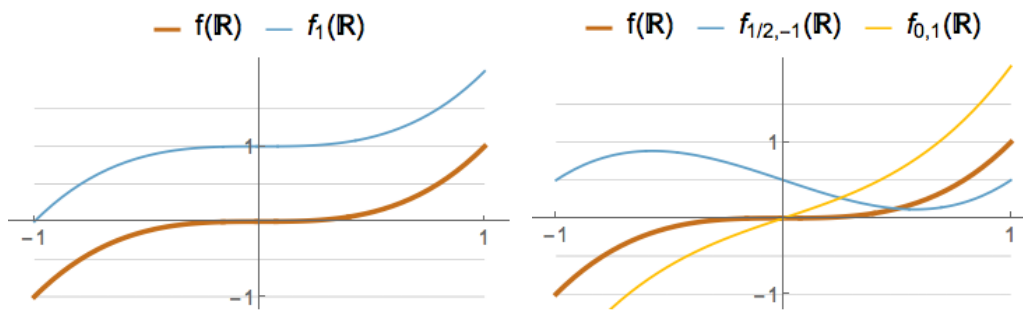
Beim Beweis der lokalen Aussage (Lemma 5.4) hatten wir den Satz von Morse und Sard genutzt, indem wir in (5.1) von einer Funktion $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ Konstanten subtrahiert hatten. So einfach können wir jetzt nicht mehr argumentieren:

5.27 Beispiel (Jet-Transversalität)

Der Raum der Eins-Jets $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist isomorph zum $\mathbb{R}^3$, denn für $x \in \mathbb{R}$ ist $j_x^1 f = (x, f(x), f'(x))$. Für $A \subseteq J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $A := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\}$,

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad f(x) = x^3 \quad \text{und} \quad f_p(x) := f(x) - p \quad (p \in \mathbb{R})$$

ist $j_p^1 f : M \rightarrow J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ für kein $p \in \mathbb{R}$ bei 0 zu A transversal, denn die zweite Ableitung verschwindet dort ebenfalls. Siehe Abbildung, links.



Aber mit $f_{a,b} \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f_{a,b}(x) = f(x) - a - bx$ lässt sich Transversalität zu A herstellen, siehe Abbildung, rechts.

Wir werden also Polynome zu den (lokalisierten) f hinzuaddieren. $\diamond$

Beweis von Satz 5.25:

- Der zweite Teil der Behauptung, also die Offenheit von $\cap (M, N; j^r, A)$, folgt aus der Stetigkeit von j^r (siehe (3.7)), der Relation

$$\cap (M, N; j^r, A) = (j^r)^{-1}(\cap^{s-r} (M, J^r(M, N); A))$$

und der Tatsache, dass $\cap^{s-r} (M, J^r(M, N); A) \subseteq C_S^{s-r}(M, J^r(M, N))$ für abgeschlossene A nach Teil b) des Transversalitätssatzes 5.2 offen ist.

- Für den ersten Teil, die Residualität von $\cap (M, N; j^r, A)$, müssen wir wieder nachweisen, dass für $U \subseteq M$, $V \subseteq N$ offen und $L \subseteq U$ abgeschlossen in M

$$\mathcal{H}_L(U, V) := \{f \in C^s(U, V) \mid j^r \cap_L A\}$$

eine reichhaltige C^s -Abbildungsklasse auf dem Mannigfaltigkeits-Paar (M, N) ist. Unter dieser Voraussetzung können wir dann den Globalisierungssatz 5.8 anwenden.

- – Dass $\mathcal{H}_L$ eine C^s -Abbildungsklasse ist, folgt aus der Lokalität der definierten Bedingung (siehe das Lokalisierungsaxiom in Definition 5.6).
- Für die *Reichhaltigkeit* überdecken wir zunächst M und N durch offene Koordinatengebiete und betrachten (wie im Beweis des Transversalitätssatzes 5.2) die lokalen Darstellungen der Abbildungen.
Wir zeigen also, dass für $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit $A \subseteq J^r(U, \mathbb{R}^n)$ die Menge

$$\natural^s(U, \mathbb{R}^n; j^r, A) \subseteq C_W^s(U, \mathbb{R}^n)$$

der zu A transversalen Abbildungen offen und dicht ist.

Die *Offenheit* ergibt sich unmittelbar aus der Abgeschlossenheit von A .

Zum Nachweis der *Dichtheit* variieren wir die vorgegebene Abbildung $f \in C^s(U, \mathbb{R}^n)$ mit Polynomen: Wir verwenden also den Parameterraum

$$P := J_0^s(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \quad \text{der } s\text{-Jets bei } 0,$$

den wir ja mit der Menge der Abbildung $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, deren Komponenten $(g_1, \dots, g_n)$ Polynome der Ordnung $\leq s \in \mathbb{N}$ sind, identifizieren können.

- Wir wenden dann den parametrisierten Transversalitätssatz 5.23 an, betrachten also die verkettete Abbildung

$$F : P \xrightarrow{\alpha_f} C^s(U, \mathbb{R}^n) \xrightarrow{j^r} C^{s-r}(U, J^r(U, \mathbb{R}^n)),$$

wobei α_f durch $g \mapsto f + g|_U$, d.h. durch Variation des vorgegebenen f durch Polynome, gegeben ist. Die Auswertungsabbildung

$$F^{\text{ev}} : P \times U \rightarrow J^r(U, \mathbb{R}^n)$$

muss transversal zu A sein, wenn wir den parametrisierten Transversalitätssatz anwenden wollen.

- Wir können die Bild-Mannigfaltigkeit in eine ähnliche Form wie das Urbild bringen, indem wir die natürliche Identifizierung

$$J^r(U, \mathbb{R}^n) \cong J_0^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \times U$$

benutzen. Also

$$F^{\text{ev}} : J_0^s(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \times U \longrightarrow J_0^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \times U \quad , \quad (j_0^s(g), x) \longmapsto (j_0^r(g+f), x).$$

Offensichtlich handelt es sich um eine im ersten Faktor affine, also glatte Abbildung. Zudem ist die Abbildung wegen $s > r$ surjektiv. Nach Satz 5.23 ist die Menge

$$\{p \in P \mid F(p) \pitchfork A\}$$

der Parameter, die zu Transversalität führen, dicht in P . Wegen der Stetigkeit von

$$\alpha_f : P \rightarrow C_W^s(U, \mathbb{R}^n) \quad , \quad \alpha_f(g) = f + g|_U$$

können wir also f durch transversale Abbildungen in der C_W^s -Topologie annähern, was die Reichhaltigkeit des Funktors beweist. Für A abgeschlossen sind wir also wegen des Globalisierungssatzes 5.8 fertig.

Wenn $A \subseteq J^r(M, N)$ eine nicht abgeschlossene Untermannigfaltigkeit ist, schreiben wir wieder

$$A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k,$$

wobei die $A_k \subseteq A$ kompakte Vollkugeln der Dimension von A sind.

Aus der Baire-Eigenschaft von $C_S^s(M, N)$ (Satz 4.14.2) folgt die Residualität von

$$\pitchfork^s(M, N; j^r, A) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \pitchfork^s(M, N; j^r, A_k). \quad \square$$

Wir schauen uns unsere bisherigen Aussagen über Immersionen jetzt unter Einbeziehung des Jet-Transversalitätssatzes an.

- Nach dem Stabilitätssatz 4.3.1 ist $\mathbf{Imm}^r(M, N)$ in $C_S^r(M, N)$ offen.
- Nach Satz 4.5 ist $\mathbf{Imm}^r(M, N) \subseteq C_S^r(M, N)$ für $\dim(N) \geq 2 \dim(M)$ dicht.

Wir holen jetzt den Beweis der zweiten Behauptung nach. Dazu betrachten wir das Vektorbündel

$$\pi : J^1(M, N) \rightarrow J^0(M, N) \cong M \times N, \quad (5.8)$$

aus Beispiel 3.22 und stratifizieren es durch

$$S_r(M, N) := \{\sigma \in J^1(M, N) \mid \text{rang}(\sigma) = \ell - r\} \quad (r = 0, \dots, \ell). \quad (5.9)$$

Dabei ist $\ell := \min(m, n)$ mit $m := \dim(M)$ und $n := \dim(N)$; für $\sigma = j_x^1 f$ wird σ mit der linearen Abbildung $T_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ identifiziert.

5.28 Satz $S_r(M, N)$ ist eine Untermannigfaltigkeit von $J^1(M, N)$, und

$$\dim(S_r(M, N)) = \dim(J^1(M, N)) - (m - \ell + r)(n - \ell + r).$$

Beweis:

Für Karten (U, φ) von M und (V, ψ) von N ist mit der Fußpunktprojektion (5.8)

$$\pi^{-1}(U \times V) \cong \tilde{U} \times \tilde{V} \times \text{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n),$$

für $\tilde{U} := \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^m$ und $\tilde{V} := \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^n$. Die Behauptung folgt damit aus Satz 5.14. $\square$

Es gilt damit $\text{Imm}^r(M, N) = \{f \in C^r(M, N) \mid j^1 f(M) \subseteq S_0(M, N)\}$.

5.29 Satz (Whitney)

$\text{Imm}^r(M, N) \subseteq C_S^r(M, N)$ ist für $\dim(N) \geq 2 \dim(M)$ dicht ($r \in \mathbb{N}$).

Beweis: Dann ist für $r \geq 1$ in $J^1(M, N)$

$$\text{codim}(S_r(M, N)) \geq \text{codim}(S_1(M, N)) = n - m + 1 \geq m + 1.$$

Die Aussage folgt aus dem Jet-Transversalitätssatz 5.25. $\square$

5.5 Singularitäten von Abbildungen

Als weitere Anwendung des Jet-Transversalitätssatzes betrachten wir kurz die am Ende der Einleitung angesprochenen stabilen Singularitäten differenzierbarer Abbildungen. Diese werden ausführlich in [GG, Chapter 3] von GOLUBITSKY und GUILLEMIN, und in [AVG] von ARNOL'D, VARCHENKO und GOUSSEIN-ZADÉ behandelt.

Für $f \in C^\infty(M, N)$, $m := \dim(M)$ und $n := \dim(N)$ heißt

$$S_r(f) := (j^1 f)^{-1}(S_r(M, N)) \subseteq M \quad (r = 0, \dots, \min(m, n)),$$

siehe (5.9), die Menge der **Singularitäten** von f vom Typ S_r . Im engeren Sinn wird man $x \in S_r(f)$ eine Singularität nennen, wenn $r \geq 1$ ist.

Es sei $m \geq n$ und $j^1 f \pitchfork S_r(M, N)$. Damit ist nach Satz 5.28 $S_1(f) \subseteq M$ eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension

$$m - \dim(S_1(f)) = \text{codim}(S_1(M, N)) = m - n + 1 \geq 1.$$

5.30 Definition Es sei $\dim(M) \geq \dim(N)$ und $f \in C^\infty(M, N)$.

- $x \in S_1(f)$ heißt **Faltungspunkt**, wenn $T_x(S_1(f)) + \ker(T_x f) = T_x M$.
- f heißt **Submersion mit Falten**, wenn alle $x \in S_r(f)$ mit $r \geq 1$ Faltungspunkte sind.

- Dann heißt $S_1(f)$ der **Faltungslocus** von f .

Die Funktion f ist also außerhalb ihres Faltungslocus eine Submersion.

5.31 Beispiele (Falten)

1. Die Projektion $f \in C^\omega(\mathbb{S}^n, \mathbb{R}^n)$, $f(x) = (x_1, \dots, x_n)$ der Sphäre $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ist eine Submersion mit Falten. Der Faltungslocus ist der Äquator $\mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{S}^n$.
2. Für $N = \mathbb{R}$ und kompakte Mannigfaltigkeiten M sind die stabilen Submersionen mit Falten $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ gerade die glatten Morse-Funktionen von M (siehe die untenstehende Definition 6.1), deren kritische Punkte paarweise verschiedene Werte haben [GG, Chapter III, Proposition 2.2]. $\diamond$

Auf Seite 145ff von [GG] findet sich eine Diskussion der schon in der Einleitung, auf Seite 7, angesprochenen Resultate im Artikel [Wh3] von WHITNEY über Abbildungen der Ebene in sich.

Als dritte lokale Normalform stabiler Abbildungen (neben Identität und Falte) findet sich dort die Spitze.

5.32 Definition $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ hat eine **Spitze** bei $x \in \mathbb{R}^2$, wenn gilt

1. $x \in S_1(f)$,
2. $j^1 f$ ist bei x transversal zu den 1-Jets von Rang 1,
3. $\ker(T_x f)$ ist tangential zu $S_1(f)$.

5.33 Aufgabe (Spitze) Zeigen Sie:

1. $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, $f(x_1, x_2) = (x_1^3 - x_1 x_2, x_2)$ hat eine Spitze bei 0.
2. Für jede Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^2$ von 0 gibt es eine Umgebung $V \subseteq C_W^2(U, \mathbb{R}^2)$ von $f|_U$, sodass alle $g \in V$ eine Spitze in U haben. $\diamond$

6 Morse–Theorie

Ziel der von MARSTON MORSE in [MMo] initiierten Morse-Theorie ist es, die Beziehung zwischen den topologischen Eigenschaften einer Mannigfaltigkeit M und den kritischen Punkten geeigneter (Morse-Funktionen genannter) Abbildungen $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ zu verstehen. Ein Klassiker der Morse-Theorie ist das Buch [Mi] von MILNOR. Modernere Entwicklungen findet man in [Ni] von NICOLAESCU.

6.1 Morse–Ungleichungen und Subniveaumengen

6.1 Definition

Es sei M eine C^2 –Mannigfaltigkeit, $f \in C^2(M, \mathbb{R})$ und $x \in M$ ein kritischer Punkt von f .

- Die **Hessesche** von f bei x ist die Bilinearform

$$\text{Hess}_{(f,x)} : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad \text{Hess}_{(f,x)}(X, Y) = L_{\tilde{X}} L_{\tilde{Y}} f(x). \quad (6.1)$$

Dabei sind $\tilde{X}$ und $\tilde{Y}$ beliebige in einer Umgebung von x definierte Vektorfelder mit $\tilde{X}(x) = X$ und $\tilde{Y}(x) = Y$. $L_{\tilde{Z}}$ bezeichnet die **Lie-Ableitung** nach $\tilde{Z}$.

- x heißt **nicht degeneriert**, wenn $\text{Hess}_{(f,x)}$ nicht degeneriert ist, also gilt:

$$\text{Hess}_{(f,x)}(X, \cdot) \in T_x^* M \setminus \{0\} \quad (X \in T_x M \setminus \{0\}). \quad (6.2)$$

- Der **Index** $\text{Ind}_f(x)$ von x ist dann der Index von $\text{Hess}_{(f,x)}$, also die maximale Dimension eines Unterraums von $T_x M$, auf dem $\text{Hess}_{(f,x)}$ negativ definit ist.
- $f \in C^2(M, \mathbb{R})$ wird **Morse-Funktion** genannt, wenn alle kritischen Punkte von f nicht degeneriert sind.
- Für $f \in C(M, \mathbb{R})$ und $a \leq b \in \mathbb{R}$ ist $M_a^b := f^{-1}([a, b])$. Die $M^b := f^{-1}((-\infty, b])$ heißen **Subniveaumengen**,
- $f \in C(M, \mathbb{R})$ heißt **vollständig** (englisch: **exhaustive**), wenn die Subniveaumengen von f kompakt sind.

6.2 Lemma $\text{Hess}_{(f,x)}$ ist wohldefiniert und eine symmetrische Bilinearform.

Beweis: Sei also x ein kritischer Punkt von $f \in C^2(M, \mathbb{R})$.

1. Zunächst gilt wegen der Formel $L_{\tilde{X}} L_{\tilde{Y}} - L_{\tilde{Y}} L_{\tilde{X}} = L_{[\tilde{X}, \tilde{Y}]}$ mit dem Kommutator $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ der Vektorfelder

$$\text{Hess}_{(f,x)}(\tilde{X}, \tilde{Y}) - \text{Hess}_{(f,x)}(\tilde{Y}, \tilde{X}) = L_{[\tilde{X}, \tilde{Y}]} f(x) = 0,$$

denn $df(x) = 0$. Für gegebene Wahlen der X bzw. Y fortsetzenden Vektorfelder ist der Ausdruck also symmetrisch.

2. Sind $\tilde{X}'$ und $\tilde{Y}'$ Vektorfelder mit $\tilde{X}'(x) = X$ und $\tilde{Y}'(x) = Y$ dann gilt

$$L_{\tilde{X}'} L_{\tilde{Y}'} f(x) = L_{\tilde{X}'} L_{\tilde{Y}} f(x) = L_{\tilde{Y}} L_{\tilde{X}'} f(x) = L_{\tilde{Y}} L_{\tilde{X}} f(x). \quad \square$$

6.3 Bemerkung (Berechnung des Morse-Index)

Praktisch kann man in einer beliebigen Karte (φ, U) bei x in $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ den Index der Hesse-Matrix $D^2(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$ berechnen. $\diamond$

6.4 Beispiele (Höhenfunktion auf $\mathbb{S}^n$; Morse-Funktionen für Produkte)

1. Die Abbildung $f \in C^\infty(\mathbb{S}^n, \mathbb{R})$, $f(x) = x_{n+1}$ ist eine Morse-Funktion. Mit den Karten (φ_i, U_i) der stereographischen Projektion aus Beispiel 2.7.3 ergibt sich

$$\|\varphi_{1/2}(x)\| = \frac{2\sqrt{1-x_{n+1}^2}}{1 \mp x_{n+1}} = 2\sqrt{\frac{1 \pm x_{n+1}}{1 \mp x_{n+1}}},$$

also

$$x_{n+1} = \frac{-4 + \|\varphi_1(x)\|^2}{4 + \|\varphi_1(x)\|^2} = -1 + \frac{1}{2}\|\varphi_1(x)\|^2 + \mathcal{O}(\|\varphi_1(x)\|^4)$$

beziehungsweise

$$x_{n+1} = \frac{4 - \|\varphi_2(x)\|^2}{4 + \|\varphi_2(x)\|^2} = 1 - \frac{1}{2}\|\varphi_2(x)\|^2 + \mathcal{O}(\|\varphi_2(x)\|^4).$$

Entsprechend ist $\text{Ind}_f((0, \dots, 0, -1)^\top) = 0$ und $\text{Ind}_f((0, \dots, 0, 1)^\top) = n$.

2. Für Morse-Funktionen $f_1 \in C^2(M_1, \mathbb{R}), \dots, f_m \in C^2(M_m, \mathbb{R})$ ist

$$f \in C^2(M, \mathbb{R}) \quad , \quad f(x_1, \dots, x_m) := \sum_{k=1}^m f_k(x_k)$$

eine Morse-Funktion auf $M := M_1 \times \dots \times M_m$. Ist $x := (x_1, \dots, x_m)$ ein kritischer Punkt von f , dann gilt $\text{Ind}_f(x) = \sum_{k=1}^m \text{Ind}_{f_k}(x_k)$.

Etwa für den m -dimensionalen Torus $\mathbb{T}^m = \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$ und die Höhenfunktionen $f_k : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ aus Teil 1. hat f genau 2^m kritische Punkte, wobei die $\binom{m}{k}$ kritischen Punkte $x \in \mathbb{T}^m$ mit dem Wert $f(x) = -m + 2k$ den Index $\text{Ind}_f(x) = k$ besitzen. $\diamond$

6.5 Bemerkung (Kompaktheit) Aus der Taylor-Formel für $Df(x)$ folgt, dass für eine Morse-Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit kritischem Punkt x eine Umgebung von x existiert, in der x der einzige kritische Punkt ist. Ist f vollständig, dann hat f also auf jeder Subniveaumenge nur endlich viele kritische Punkte. $\diamond$

Es gibt viele Morse-Funktionen auf einer Mannigfaltigkeit M :

6.6 Satz Die Menge der Morse-Funktionen ist in $C_S^2(M, \mathbb{R})$ offen und dicht.

Beweis:

Das folgt aus dem Jet-Transversalitätssatz 5.25, denn nach Beispiel 3.22 ist $J^1(M, \mathbb{R}) \cong T^*M \times \mathbb{R}$. Also ist mit (6.2) $f \in C_S^2(M, \mathbb{R})$ genau dann eine Morse-Funktion, wenn $j^1 f : M \rightarrow J^1(M, \mathbb{R})$ transversal zum Nullschnitt ist. $\square$

Die *Morse–Ungleichungen* für eine Morse–Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ stellen eine Beziehung her zwischen der in den Betti–Zahlen $\text{bet}_{\ell}(M)$ (siehe Anhang A) codierten Topologie von M und den Kardinalitäten $\text{crit}_{\ell}(f) := |\text{Crit}_{\ell}(f)|$ der Mengen $\text{Crit}_{\ell}(f)$ kritischer Punkte mit Index ℓ . In ihrer einfachsten ‘schwachen’ Form besagen sie für eine kompakte Mannigfaltigkeit M^n , dass

$$\boxed{\text{crit}_{\ell}(f) \geq \text{bet}_{\ell}(M) \quad (\ell = 0, \dots, n).} \quad (6.3)$$

Eine Morse–Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, für die Gleichheit gilt, heißt *perfekt*.¹²

Es ist allerdings wichtig, dass wir zwar (für Dimensionen $n \geq 1$) die linke Seite der Ungleichungen durch Veränderung von f beliebig groß machen können, aber trotzdem nicht in beliebiger Weise. Insbesondere gilt immer die Gleichung

$$\boxed{\sum_{\ell=0}^n (-1)^{\ell} \text{crit}_{\ell}(f) = \sum_{\ell=0}^n (-1)^{\ell} \text{bet}_{\ell}(M) =: \chi(M).} \quad (6.4)$$

wobei wir die alternierende Summe der Betti–Zahlen als Definition der *Euler–Charakteristik* $\chi(M)$ der Mannigfaltigkeit gewählt haben.

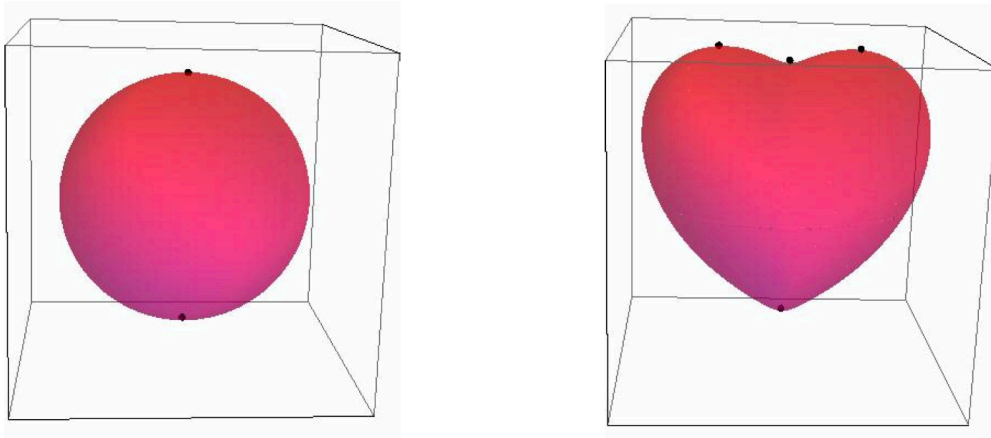
6.7 Beispiel (Sphären)

Die Höhenfunktion $f \in C^{\omega}(\mathbb{S}^n, \mathbb{R})$, $f(x) = x_{n+1}$ von $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ bezüglich der üblichen Einbettung in den $\mathbb{R}^{n+1}$ hat ein Minimum und ein Maximum und keine weiteren kritischen Punkte (siehe Bsp. 6.4.1). Es ist also $\text{crit}_0(f) = \text{crit}_n(f) = 1$, $\text{crit}_1(f) = \dots = \text{crit}_{n-1}(f) = 0$ und damit die Euler–Charakteristik

$$\chi(\mathbb{S}^n) = 1 + (-1)^n \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Wenn wir die runde Sphäre $\mathbb{S}^2$ eindellen, erscheint für die Höhenfunktion eine weitere Maximalstelle, aber eben unweigerlich noch mindestens ein weiterer kritischer Punkt.

¹²Eine solche Funktion braucht für M nicht zu existieren. Ein Beispiel ist die (im Zusammenhang der Poincaré–Vermutung wichtige) sogenannte *Poincaré–Sphäre*, siehe Remark 5.15 im Buch [Ni] von NICOLAESCU.



Die rechte Abbildung zeigt für $n = 2$ den Fall $\text{crit}_0(f) = \text{crit}_{n-1}(f) = 1$, $\text{crit}_n(f) = 2$. Die alternierende Summe (6.4) ändert sich dann nicht. $\diamond$

6.8 Bemerkung (Anwendungen der Morse-Ungleichungen)

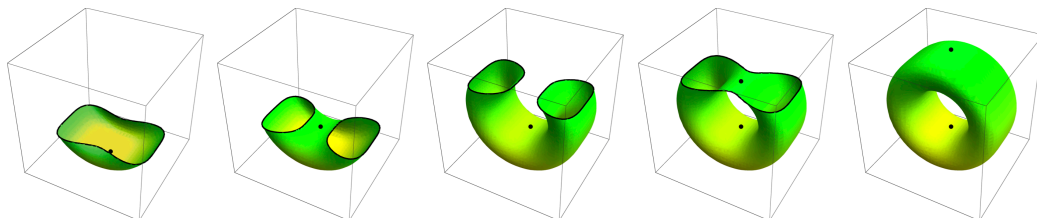
Die Morse-Ungleichungen werden verwendet, um von kritischen Punkten geeigneter Morse-Funktionen auf die Topologie der Mannigfaltigkeit zu schließen. Beispielsweise kann man durch die Euler-Charakteristik sowohl die orientierbaren als auch die nicht orientierbaren kompakten Flächen topologisch klassifizieren¹³.

Mindestens ebenso wichtig ist es, umgekehrt zu zeigen, dass Morse-Funktionen viele kritische Punkte besitzen müssen. Ein Beispiel ist die Frage nach der Minimalzahl periodischer Orbits für hamiltonsche Systeme, siehe die [Arnol'd-Vermutung](#). $\diamond$

6.9 Aufgabe (projektiver Raum)

Finden Sie auf dem projektiven Raum $\mathbb{RP}^n$ eine Morse-Funktion mit möglichst wenigen kritischen Punkten. $\diamond$

Wir stellen kurz die Schritte des klassischen Beweises der Morse-Ungleichungen zusammen. Die Mannigfaltigkeit M wird dabei durch Vergrößerung des Parameters b aus den Subniveaumengen $M^b = f^{-1}((-\infty, b])$ der Morse-Funktion f aufgebaut.



Subniveaumengen einer perfekten Morse-Funktion $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ des Torus.

¹³Siehe z.B. DUBROVIN, FOMENKO und NOVIKOV [DFN, Band 3, Theorem 1.3.20]

Ist b regulärer Wert von f , dann ist M^b eine berandete Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial M^b = f^{-1}(b)$. Ist f eine vollständige Morse-Funktion, dann sind die kritischen Werte von f eine **diskrete** Teilmenge von $\mathbb{R}$.

6.10 Aufgabe (nicht resonante Morse-Funktionen)

Zeigen Sie für kompakte Mannigfaltigkeiten M , dass die Menge der Morse-Funktionen $f \in C^2(M, \mathbb{R})$, für die alle kritischen Punkte $x \in M$ voneinander verschiedene kritische Werte $f(x)$ besitzen, in $C_S^2(M, \mathbb{R})$ offen und dicht ist. Solche Morse-Funktionen f heißen **nicht resonant**. $\diamond$

Man unterscheidet Intervalle danach, ob sie einen kritischen Wert von f enthalten oder nicht.

6.11 Lemma

Enthält $M_a^b := f^{-1}([a, b])$ für $f \in C^{r+1}(M, \mathbb{R})$, $r \geq 1$ keinen kritischen Punkt und ist kompakt, dann ist die berandete Mannigfaltigkeit M_a^b diffeomorph zu $[a, b] \times f^{-1}(a)$, mit einem C^r -Diffeomorphismus, der die Niveaumengen $f^{-1}(c)$ auf $\{c\} \times f^{-1}(a)$ abbildet.

Beweis:

Allgemein ist für eine riemannsche C^r -Metrik g auf M der Gradient von $f \in C^{r+1}(M, \mathbb{R})$ das Vektorfeld

$$\nabla f \in C^r(M, TM) \quad , \quad g(\nabla f, \cdot) = df.$$

Man benutzt auf M_a^b den Fluss Φ des (geeignet normierten) Gradientenvektorfeldes $X := \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|^2} : M_a^b \rightarrow TM_a^b$. Dieser führt wegen

$$df(X) = \frac{df(\nabla f)}{g(\nabla f, \nabla f)} = 1$$

Niveaumengen in Niveaumengen über. Wegen der Kompaktheit von M_a^b existiert die Lösung des Anfangswertproblems mit Anfangswert $x \in M_a^b$ für alle Zeiten im Intervall $[a - f(x), b - f(x)]$. Betrachten wir die Restriktion

$$\Psi \in C^r([0, b - a] \times f^{-1}(a), M_a^b)$$

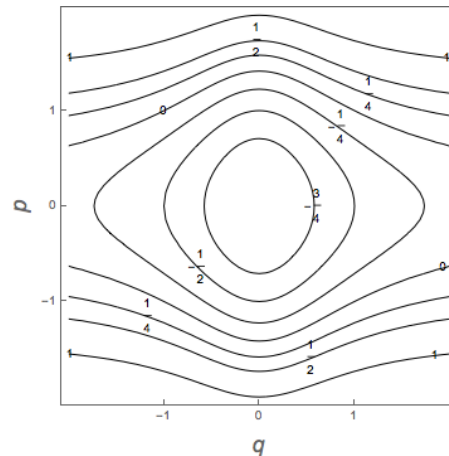
des Flusses Φ auf Anfangswerte in $f^{-1}(a) \subseteq \partial M_a^b$, dann ist $\Psi^{-1} : M_a^b \rightarrow [0, b - a] \times f^{-1}(a)$ bis auf eine Verschiebung des Zeitparameters um a der gesuchte Diffeomorphismus. Siehe auch HIRSCH [Hi, Kapitel 6.1, Satz 2.2.]. $\square$

6.12 Aufgabe (Kompaktheit von M_a^b)

Zeigen Sie, dass die Aussage von Lemma 6.11 auf die Funktion

$$f \in C^\omega(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \quad , \quad f(q, p) = \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{1+q^2}$$

(deren Contour-Plot rechts abgebildet ist), nicht zutrifft, obwohl der einzige kritische Punkt $(0, 0)$ von f nicht degeneriert ist. Weshalb funktioniert der Beweis (mit dem euklidischen Gradienten ∇f von f) nicht? $\diamond$



In der Nähe eines kritischen Punktes der Morse-Funktion f kann man so genannte *Morse-Koordinaten* finden, in denen f eine einfache Form besitzt:

6.13 Lemma (Morse–Lemma)

Es sei $m \in M^n$ ein nicht degenerierter kritischer Punkt von $f \in C^{r+1}(M, \mathbb{R})$, $r \geq 1$ mit Index k . Dann gibt es eine C^r -Karte (U, φ) bei m mit

$$f \circ \varphi^{-1}(x) = f(m) - \sum_{i=1}^k x_i^2 + \sum_{i=k+1}^n x_i^2 \quad (x \in \varphi(U)). \quad (6.5)$$

Beweis: Nach Voraussetzung ist die Hessesche Bilinearform $\text{Hess}_{(f,m)}$ aus (6.1) nicht degeneriert. Nach dem **Trägheitssatz von Sylvester** gibt es also eine Basis von $T_m M$, in der die Darstellungsmatrix die Form $\text{diag}(-1, \dots, -1, 1, \dots, 1)$ mit k Einträgen -1 ist. In den mit diesem Basiswechsel linear transformierten lokalen Koordinaten hat das zweite Taylor-Polynom von f bei m die Form (6.5). Ein Diffeomorphismus, der den Restterm der Taylor-Entwicklung zum Verschwinden bringt wird in HIRSCH [Hi, Satz 1.1 von Kapitel 6.1] dargestellt. (Siehe Exercise 1 für die optimale Differenzierbarkeitsstufe r). $\square$

Enthält M_a^b genau einen kritischen Punkt m , dann 'entsteht topologisch' $M^b = M^a \cup M_a^b$ aus M^a durch Ankleben der *stabilen Mannigfaltigkeit*

$$W^s(m) := \{x \in M \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi_t(x) = m\}$$

von m bezüglich des Gradientenflusses Φ (siehe Abbildung 6.1).

6.14 Aufgabe (stabile Mannigfaltigkeit) Zeigen Sie mit Lemma 6.13, dass $W^s(m)$ eine $\text{Ind}(m)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von M ist. $\diamond$

Die obige noch vage Aussage 'entsteht topologisch' wird durch die folgende Definition präzisiert und anschließend bewiesen.

6.15 Definition Für einen topologischen Raum X und $A \subseteq X$ heißt

- A ein **Retrakt** von X , wenn eine **Retraktion** von X zu A gibt, also ein $g \in C(X, A)$ mit $g|_A = \text{Id}_A$ (siehe Definition 4.19),
- A ein **Deformationsretrakt** von X , wenn es eine **Deformationsretraktion** von X zu A gibt, also ein $F \in C(X \times [0, 1], X)$ mit

$$F(\cdot, 0) = \text{Id}_X \quad , \quad F(\cdot, 1)|_A = \text{Id}_A \quad \text{und} \quad F(X, 1) = A,$$

- A ein **starkes Deformationsretrakt** von X , wenn es eine ('starke') Deformationsretraktion $F \in C(X \times [0, 1], X)$ gibt mit $F(\cdot, t)|_A = \text{Id}_A$ ($t \in [0, 1]$).

6.16 Bemerkungen (Deformationretrakte)

1. Für topologische Räume X, Y heißt $f_0 \in C(X, Y)$ bekanntlich **homotop** zu $f_1 \in C(X, Y)$, wenn es ein $F \in C(X \times [0, 1], Y)$ gibt mit $F(\cdot, i) = f_i$.
 X und Y heißen **homotopieäquivalent**, wenn es $f \in C(X, Y)$ und $g \in C(Y, X)$ gibt, sodass $g \circ f$ homotop zu Id_X und $f \circ g$ homotop zu Id_Y sind. Eine Deformationsretraktion F ist also eine Homotopie zwischen $F(\cdot, 0) = \text{Id}_X$ und der Retraktion $F(\cdot, 1)$.
2. Umgekehrt sind Retrakte oft keine Deformationsretrakte. Denn während etwa einpunktige $A \subseteq X$ Retrakte von X sind, ist A nur dann Deformationsretrakt, wenn X **kontrahierbar** ist, also z.B. nicht für $X = \mathbb{S}^n$.
3. Für das *Buch mit unendlich vielen Seiten* in Kapitel 4.1 des **Topologie-Skripts** ist $A := \{i\}$ ein Beispiel für ein Deformationsretrakt, das kein starkes Deformationsretrakt ist. $\diamond$

6.17 Aufgabe Beweisen Sie die Behauptung aus Bemerkung 6.16.3. $\diamond$

6.18 Satz Es sei $m \in M$ der einzige kritische Punkt der vollständigen Morse-Funktion $f \in C^2(M, \mathbb{R})$ mit dem kritischen Wert $c := f(m)$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $M^{c-\varepsilon} \cup W^s(m)$ ein starkes Deformationsretrakt von $M^{c+\varepsilon}$ ist.

Beweis: Der klassische Beweis findet sich in [Mi, §3] von MILNOR.

Der folgende eigene Beweis verwendet Techniken von dynamischen Systemen.

- Zunächst ist wegen der Vollständigkeit von f die Menge $\text{crv}(f) \subseteq \mathbb{R}$ der kritischen Werte diskret. Es gibt also ein $\varepsilon > 0$, für das c der einzige kritische Wert von f in $[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ ist. $M^{c \pm \varepsilon}$ sind damit kompakte berandete Mannigfaltigkeiten. Wir benutzen die Abkürzungen

$$X := M^{c+\varepsilon} \quad , \quad A := M^{c-\varepsilon} \cup W^s(m) \quad \text{und} \quad k := \text{Ind}(m).$$

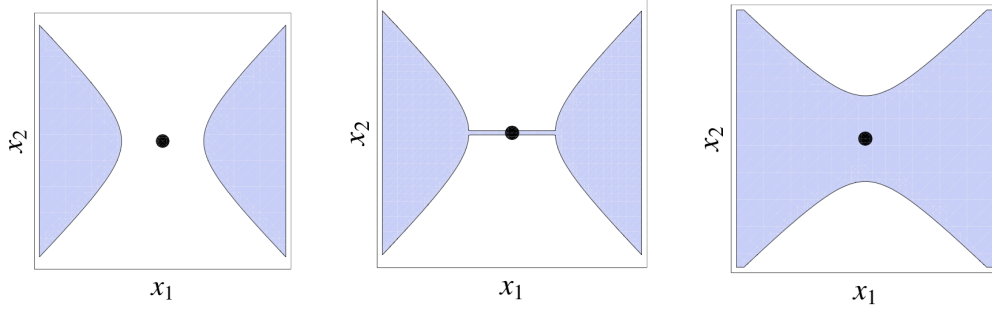


Abbildung 6.1: Subniveaumengen $M^{c-\varepsilon}$ (links) und $M^{c+\varepsilon}$ (rechts) einer Morse-Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ in der Nähe eines kritischen Punktes m mit $c = f(m)$ und $\text{Ind}(m) = 1$. Die mittlere Abbildung zeigt die Vereinigung von $M^{c-\varepsilon}$ und der stabilen Mannigfaltigkeit von m . Die Karte entspricht der im Morse-Lemma 6.13.

- Unser Ziel ist es, ein C^1 -Vektorfeld Z auf X zu definieren, für das

$$Z|_A = 0 \quad \text{und} \quad df(Z)|_{X \setminus A} < 0 \quad (6.6)$$

gilt. Dann ist der von Z erzeugte Vorwärtsfluss Ψ vollständig:

$$\Psi \in C^1(X \times [0, \infty), X).$$

Ψ lässt A punktweise invariant, und *im Mengensinn* gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} \Psi(t, X) = A$.

- Für kleine $\varepsilon > 0$ ist $W_\varepsilon^s(m) := W^s(m) \cap M_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon}$ eine k -dimensionale Vollkugel um m vom Radius $\sqrt{\varepsilon}$, die in der Morse-Umgebung U von m aus Lemma 6.13 enthalten ist. Durch nochmalige Verkleinerung von $\varepsilon > 0$ können wir voraussetzen, dass mit $\delta := 2\sqrt{\varepsilon}$ auch $U_{2\delta}(m) \subseteq U$ gilt.

Weiter benutzen wir eine Abschneidefunktion

$$\chi \in C^\infty(X, [0, 1]) \quad \text{mit} \quad \chi(x) = \begin{cases} 1 & , x \in U_\delta(m) \\ 0 & , x \in X \setminus U_{2\delta}(m) \end{cases}$$

und definieren ein C^1 -Vektorfeld Y auf X durch

$$Y(x) := \chi(x)\tilde{Y}(x) + (1 - \chi(x))(-\nabla f(x)),$$

wobei (in Morse-Koordinaten (6.5)) $\tilde{Y}(x) := -\sum_{i=k+1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ ist. Für

$$\tilde{\rho} \in C^\infty(\mathbb{R}, [0, 1]) \quad , \quad \tilde{\rho}(y) = \begin{cases} \exp(-1/(y - c + \varepsilon)) & , y > c - \varepsilon \\ 0 & , y \leq c - \varepsilon \end{cases}$$

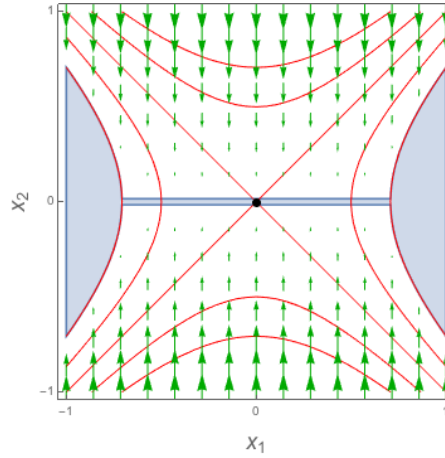


Abbildung 6.2: Das Vektorfeld Z (grün) in der Morse-Umgebung des kritischen Punktes m (schwarz). Rot: Niveaulinien von f , Blau: $M^{c-\varepsilon} \cup W^s(m)$

ist die Abschneidefunktion $\rho := \tilde{\rho} \circ f \in C^2(M, [0, 1])$ genau auf $M^{c-\varepsilon}$ gleich Null. Damit erfüllt das Vektorfeld $Z := \rho Y$ die Forderungen (6.6), siehe Abbildung 6.2.

- Wir definieren nun die starke Deformationsretraktion $F \in C(X \times [0, 1], X)$ von $X = M^{c+\varepsilon}$ zu $A = M^{c-\varepsilon} \cup W^s(m)$ durch

$$F(x, s) := \begin{cases} \Psi(\operatorname{artanh}(s), x) & , s \in [0, 1) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \Psi(t, x) & , s = 1 \end{cases} \quad (x \in X).$$

Während F auf $X \times [0, 1)$ stetig differenzierbar ist (siehe Kapitel 7 des [Differentialgleichungs-Skripts](#)), ist zunächst sogar die *Existenz* der Limiten $F(x, 1)$ nicht offensichtlich. Sie ergibt sich aber, zusammen mit der Stetigkeit von F , wie folgt.

- Einen Punkt $x_0 \in U_\delta(m)$ schreiben wir in Morse-Koordinaten als $x = (y, z)$ mit $y = (y_1, \dots, y_k)$. Analog schreiben wir $\Psi(t, x_0) = (y(t, x_0), z(t, x_0))$. Es ist dann $y(t, x_0) = y_0$, während (siehe (6.5))

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t, x_0) = \begin{cases} 0 & , \|y_0\|^2 \leq \varepsilon \\ \sqrt{\|y_0\|^2 - \varepsilon} \frac{z_0}{\|z_0\|} & , \|y_0\|^2 > \varepsilon > \|y_0\|^2 - \|z_0\|^2 \\ z_0 & , \|y_0\|^2 - \|z_0\|^2 \geq \varepsilon \end{cases}.$$

Damit ist F auf $U_\delta(m) \times [0, 1]$ stetig.

- Für $x \in X \setminus U_\delta(m)$ gilt $Y(x) \neq 0$. Die Vorwärtsorbits verlassen also in endlicher Zeit diese kompakte Menge, wobei ∂A auf dieser Menge transversal zu Y ist. Die Vorwärtsorbits von Z sind aber in denen von Y enthalten, und ihr Limes liegt in A . Dies impliziert die Stetigkeit von F . $\square$

Mit den im nächsten Abschnitt aufbereiteten Techniken der singulären Homologie wird die Topologieänderung der Subniveaumenge kontrolliert.

6.2 Singuläre Homologie

ist eine **Homologietheorie**, die auf allgemeine topologische Räume X anwendbar ist. Bausteine sind die Standard- k -Simplices. Im Folgenden kann ich aus Zeitgründen nur eine Minimalversion der singulären Homologie darstellen. Wer sie noch nicht kennt, sollte ein beliebiges Buch über algebraische Topologie zu Rate ziehen.

Sind $a_0, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$ geometrisch unabhängig in dem Sinn, dass sie in keinem $(k-1)$ -dimensionalen affinen Unterraum liegen, so heißt die konvexe Hülle

$$\sigma^k := [a_0, \dots, a_k] := \left\{ \sum_{i=0}^k t_i a_i \mid t_i \geq 0, \sum_{i=0}^k t_i = 1 \right\}$$

dieser Punkte **Standard- k -Simplex**; die i -te Seite

$$\sigma_{(i)}^{k-1} := [a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_k] \quad (i = 0, \dots, k)$$

ist Konvexkombination der Punkte außer a_i .

6.19 Definition Es sei X ein topologischer Raum und G eine abelsche Gruppe.

- Ein **singulärer k -Simplex** ist ein Paar (σ^k, f) mit einem $f \in C(\sigma^k, X)$.
- Eine **singuläre k -Kette** c_k ist eine endliche formale Linearkombination

$$c_k = \sum_i g_i (\sigma_i^k, f_i) \quad \text{mit} \quad g_i \in G. \quad (6.7)$$

Die Menge $C_k(X; G)$ dieser k -Ketten c_k ist damit eine abelsche Gruppe.

- **Rand** eines singulären Simplex ist die formale Linearkombination

$$\partial(\sigma^k, f) := \sum_{q=0}^k (-1)^q (\sigma_{(q)}^{k-1}, f|_{\sigma_{(q)}^{k-1}}),$$

der Rand der singulären Kette (6.7) ist $\partial c_k := \sum_i g_i \partial(\sigma_i^k, f_i)$.

$\partial : C_k(X; G) \rightarrow C_{k-1}(X; G)$ ist ein Gruppenhomomorphismus. Es gilt damit

$$\partial \partial c_k = 0.$$

- Eine Kette c_k heißt **Zykel** ($c_k \in Z_k(X; G)$), wenn $\partial c_k = 0$, **Rand** ($c_k \in B_k(X; G)$), wenn $c_k = \partial c_{k+1}$. $B_k(X; G)$ ist eine Untergruppe von $Z_k(X; G)$.
- Zwei Zykeln c'_k, c''_k heißen **äquivalent**, wenn $c'_k - c''_k \in B_k(X; G)$ gilt.
- Die Faktorgruppe $H_k(X; G) := Z_k(X; G)/B_k(X; G)$ der Äquivalenzklassen heißt k -te **singuläre Homologiegruppe**.

Wenn klar ist, welche abelsche Gruppe G gemeint ist, schreibt man oft kurz $H_k(X)$ statt $H_k(X; G)$, etc.

Ist die abelsche Gruppe $(G, +)$ ein Körper $(G, +, \cdot)$, dann lassen sich die singulären Homologiegruppen $H_k(X; G)$ als Vektorräume über diesem Körper auffassen. Die **Betti-Zahlen**

$$\text{bet}_k(X, G) := \dim(H_k(X; G)) \quad (k \in \mathbb{N}_0)$$

hängen vom Körper G nur über dessen **Charakteristik** ab (**Universeller Koeffizientensatz**). Ist M eine nicht zu komplizierte¹⁴ Mannigfaltigkeit, dann gilt aus dem gleichen Grund

$$\text{bet}_k(M, \mathbb{Q}) = \text{bet}_k(M) \quad (k \in \mathbb{N}_0)$$

mit den in (A.3) definierten Betti-Zahlen.

Eine stetige Abbildung $\varphi : X \rightarrow Y$ induziert die Abbildung φ_* zwischen Ketten: $\varphi_*(c_k) := \sum_i g_i(\sigma_i^k, \varphi \circ f_i)$. Diese induziert einen Homomorphismus

$$\varphi_* : H_k(X; G) \rightarrow H_k(Y; G).$$

Dieser hängt nur von der Homotopieklasse von φ ab. Insbesondere besitzen **homotopieäquivalente** Räume isomorphe (singuläre) Homologiegruppen.¹⁵

6.20 Beispiel (Homotopieäquivalenz) $H_k(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}; G) = H_k(\mathbb{S}^n; G)$, denn mit der Inklusion $i : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ und der radialen Projektion

$$j : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^n, \quad x \mapsto x/\|x\|$$

gilt $j \circ i = \text{Id}_{\mathbb{S}^n}$, und $i \circ j$ ist via

$$H \in C(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \times [0, 1], \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \quad , \quad H(x, t) = (1 - t) \frac{x}{\|x\|} + tx$$

homotop zu $\text{Id}_{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}} = H(\cdot, 1)$. ◇

¹⁴genau: sind die Homologiegruppen endlich erzeugt, was z.B. für kompakte M der Fall ist

¹⁵Beweis z.B. in [DFN, Band 2, Chapter 1.6.]

Zum Beweis der Morse–Ungleichungen benötigen wir die *relativen Homologien*. Ist Y ein Teilraum des topologischen Raumes X , dann ist $C_k(Y)$ eine Untergruppe von $C_k(X)$, und wir setzen

$$C_k(X, Y) := C_k(X) / C_k(Y).$$

∂ bildet $C_k(Y)$ in $C_{k-1}(Y)$ ab, und definiert damit einen Randoperator

$$\partial : C_k(X, Y) \rightarrow C_{k-1}(X, Y)$$

zwischen den Quotientengruppen. Es sei die Gruppe der *relativen Zykeln*

$$Z_k(X, Y) := \{c_k \in C_k(X, Y) \mid \partial c_k = 0\}$$

und die der relativen Ränder

$$B_k(X, Y) := \{c_k \in C_k(X, Y) \mid \exists c_{k+1} \in C_{k+1}(X, Y), c_k = \partial c_{k+1}\}.$$

Die k -te *relative Homologiegruppe* ist definiert als

$$H_k(X, Y) := Z_k(X, Y) / B_k(X, Y). \quad (6.8)$$

- Da jeder Zykel aus $H_k(X)$ als einer in $H_k(X, Y)$ betrachtet werden kann, erhalten wir einen Homomorphismus

$$j : H_k(X) \longrightarrow H_k(X, Y) \quad , \quad j([z_k]) = [z_k + C_k(Y)].$$

- Andererseits induziert die Inklusion $i : Y \rightarrow X$ einen Homomorphismus

$$i_* : H_k(Y) \longrightarrow H_k(X).$$

- Zu guter Letzt stellen wir fest, dass für $k \geq 1$ und $[z_k + C_k(Y)] \in H_k(X, Y)$ $z_k + C_k(Y)$ ein relativer k -Zykel ist, ∂z_k also in $C_{k-1}(Y)$ liegt. Wegen $\partial \partial z_k = 0$ ist ∂z_k ein $(k-1)$ -Zykel; $\partial z_k \in Z_{k-1}(Y)$ definiert also ein Element $[\partial z_k] \in H_{k-1}(Y)$. Die entsprechende Abbildung ist

$$\partial : H_k(X, Y) \longrightarrow H_{k-1}(Y) \quad , \quad [z_k + C_k(Y)] \longmapsto [\partial z_k].$$

6.21 Definition

- Für abelsche Gruppen A_k und Gruppenhomomorphismen f_k (bzw. K -Vektorräume und lineare Abbildungen) heißt eine Sequenz

$$A_\bullet := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} A_k \quad \text{mit} \quad \cdots A_{\ell+2} \xrightarrow{f_{\ell+1}} A_{\ell+1} \xrightarrow{f_\ell} A_\ell \xrightarrow{f_{\ell-1}} A_{\ell-1} \xrightarrow{f_{\ell-2}} A_{\ell-2} \cdots$$

exakt, wenn gilt: $\text{im}(f_k) = \ker(f_{k+1})$ ($k \in \mathbb{Z}$).

- Für endlich-dimensionale Vektorräume mit $\dim(A_k) = 0$ für $k < 0$ und $k > n$ nennt man $A_\bullet$ **zulässig**. Das **Poincaré–Polynom** von $A_\bullet$ ist dann

$$P_{A_\bullet}(t) := \sum_{\ell=0}^n \dim(A_\ell) t^\ell \in \mathbb{Z}[t].$$

- Für $P(t), R(t) \in \mathbb{Z}[t]$ ist $P \succ R$, falls gilt $P(t) = R(t) + (1+t)Q(t)$ wobei $Q(t) \in \mathbb{Z}[t]$ nicht negative Koeffizienten besitzt.

6.22 Lemma Für eine exakte Sequenz zulässiger K -Vektorräume

$$\cdots A_\ell \xrightarrow{i_\ell} B_\ell \xrightarrow{j_\ell} C_\ell \xrightarrow{\partial_\ell} A_{\ell-1} \xrightarrow{i_{\ell-1}} B_{\ell-1} \xrightarrow{j_{\ell-1}} C_{\ell-1} \xrightarrow{\partial_{\ell-1}} A_{\ell-2} \cdots$$

gilt $P_{A_\bullet} + P_{C_\bullet} \succ P_{B_\bullet}$.

Beweis: (Nach [Ni, Lemma 2.14]) Aus der Exaktheit folgt mit dem **Rangatz**:

$$\begin{aligned} \dim(A_k) &= \operatorname{def}(i_k) + \operatorname{def}(j_k), \\ \dim(B_k) &= \operatorname{def}(j_k) + \operatorname{def}(\delta_k), \\ \dim(C_k) &= \operatorname{def}(\delta_k) + \operatorname{def}(i_{k-1}), \end{aligned}$$

also $\dim(A_k) - \dim(B_k) + \dim(C_k) = \operatorname{def}(i_k) + \operatorname{def}(i_{k-1})$. Damit ist

$$P_{A_\bullet}(t) - P_{B_\bullet}(t) + P_{C_\bullet}(t) = (1+t)Q(t) \quad \text{für} \quad Q(t) := \sum_{\ell=0}^n \operatorname{def}(i_\ell) t^\ell. \quad \square$$

6.23 Satz Die Sequenz

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_k(Y) \xrightarrow{i_*} H_k(X) \xrightarrow{j} H_k(X, Y) \xrightarrow{\partial_*} H_{k-1}(Y) \xrightarrow{i_*} \cdots H_0(X, Y) \rightarrow 0$$

ist exakt. Es gilt also

$$\ker(i_*) = \operatorname{im}(\partial_*) \quad , \quad \ker(j) = \operatorname{im}(i_*) \quad \text{und} \quad \ker(\partial_*) = \operatorname{im}(j).$$

Beweis:

Einen Beweis findet man in jedem Buch über algebraische Topologie, z.B. in HATCHER [Ha, Section 2.1]. $\square$

Wir kehren zu den Morse–Ungleichungen zurück. Um diese zu beweisen, ist es nützlich, das **Poincaré–Polynom**

$$P_M(t) := \sum_{\ell=0}^n \operatorname{bet}_{\ell}(M^n) t^\ell$$

der Mannigfaltigkeit M mit dem Poincaré-Polynom

$$P_f(t) := \sum_{\ell=0}^n \text{crit}_\ell(f) t^\ell$$

der Morse-Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ zu vergleichen. Die kritischen Punkte $x \in \text{crp}(f)$ von f sollen o.B.d.A. (siehe Aufgabe 6.10) voneinander verschiedene (kritische) Werte $f(x)$ haben. Nach Definition ist die ℓ -te relative Betti-Zahl für $Y \subseteq X$ gleich

$$\text{bet}_{\ell}(X, Y) := \dim(H_\ell(X, Y)),$$

und wir setzen $P_{X,Y}(t) := \sum_{\ell=0}^{\infty} \text{bet}_{\ell}(X, Y) t^\ell$.

6.24 Lemma $P_f(t) = \sum_{\ell=0}^n \sum_{x \in \text{crp}(f)} \text{bet}_{\ell}(M^{f(x)}, M^{f(x)} \setminus \{x\}) t^\ell$.

Beweis: Für $\varepsilon > 0$ klein gilt nach Satz 6.18

$$H_k(M^{f(x)}, M^{f(x)} \setminus \{x\}) \cong H_k(M^{f(x)+\varepsilon}, M^{f(x)-\varepsilon}).$$

Für $Y \subseteq X$ bezeichnet X/Y den Quotientenraum von X nach der Äquivalenzrelation, bei der alle Punkte von Y äquivalent sind, bei dem Y also zu einem Punkt $*$ zusammengeschlagen wurde. Dann folgt (siehe HATCHER [Ha, Proposition 2.22])

$$H_k(X, Y) \cong H_k(X/Y, *) \quad (k \in \mathbb{N})$$

In unserem Fall ist aber für den kritischen Punkt x mit Index λ der topologische Raum $M^{f(x)+\varepsilon}/M^{f(x)-\varepsilon}$ homotopieäquivalent zu $D^\lambda/\partial D^\lambda$.

Außerdem ist $D^\lambda/\partial D^\lambda$ homöomorph zu $\mathbb{S}^\lambda$ (Beispiel 3.25 des Topologie-Skripts), sodass

$$H_k(M^{f(x)+\varepsilon}/M^{f(x)-\varepsilon}, *) \cong H_k(\mathbb{S}^\lambda, *)$$

ist. Daher ist

$$\text{bet}_{\ell}(M^{f(x)}, M^{f(x)} \setminus \{x\}) = \text{bet}_{\ell}(\mathbb{S}^\lambda, *) = \begin{cases} 1 & , k = \lambda \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases} \quad \square$$

Wir beweisen eine etwas stärkere Form der Morse-Ungleichungen (6.3):

6.25 Satz Für eine vollständige Morse-Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ gilt $P_f \succcurlyeq P_M$.

Beweis:

Für $\text{crv}(f) = \{c_1, \dots, c_r\}$ mit $c_k < c_{k+1}$, $c_0 := c_1 - 1$ und $c_{r+1} := c_r + 1$ setzen wir $t_k := \frac{1}{2}(c_k + c_{k+1})$. Damit ist $M^{t_0} = \emptyset$, also $P_{M^{t_0}} = 0$ und nach Lemma 6.24

$$P_f = \sum_{k=0}^r P_{M^{t_{k+1}}, M^{t_k}} \quad \text{und} \quad P_M = P_{M^{t_{r+1}}} - P_{M^{t_0}}.$$

Wegen Satz 6.23 und Lemma 6.22 folgt

$$P_{M^{t_{k+1}}, M^{t_k}} \succcurlyeq P_{M^{t_{k+1}}} - P_{M^{t_k}} \quad (k = 0, \dots, r),$$

was nach Summation über k die Aussage impliziert. $\square$

6.3 Wittens Beweis der Morse–Ungleichungen

Der Physiker **EDWARD WITTEN** veröffentlichte 1982 in [Wi] einen alternativen Beweis der Morse–Ungleichungen für eine geschlossene orientierbare Mannigfaltigkeit M , der auf einer Deformation des **Laplace–Beltrami–Operators** auf $\Omega^*(M)$ (siehe (A.1)) mithilfe der Morse-Funktion beruht. Hier wird sein Beweis nur skizziert, in CYCON ET AL, [CFKS, Chapter 11] findet man eine ausführliche Darstellung, und in [Bo3] von BOTT eine Einordnung der Bedeutung.

Schon der Laplace–Beltrami–Operator auf $\Omega^0(M)$, also für Funktionen auf M , ist von der Wahl einer riemannschen Metrik g auf M abhängig.

1. Bei Vorhandensein einer riemannschen Metrik g können wir mittels der Abbildung

$$T_m M \ni X(m) \mapsto g(m)(X(m), \cdot) \in T_m^* M$$

Kotangential- und Tangentialbündel miteinander identifizieren und so auch eine Metrik g^* auf T^*M einführen. Der $\binom{n}{p}$ -dimensionale Vektorraum $\Omega_m^p(M)$ der äußeren p -Formen bei $m \in M$ lässt sich mittels bilinearer Fortsetzung von

$$\langle \lambda_1 \wedge \dots \wedge \lambda_p, \rho_1 \wedge \dots \wedge \rho_p \rangle_m^p := \det \left(\{g^*(m)(\lambda_i, \rho_j)\}_{i,j=1}^p \right) \quad (m \in M)$$

für $\lambda_i, \rho_j \in \Omega_m^1(M)$ mit einer Riemannschen Metrik versehen.

2. Auf einer orientierbaren kompakten riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) existiert eine nicht verschwindende endliche Volumenform $\omega \in \Omega^n(M^n)$, die lokal durch eine Orthonormalbasis von Kovektoren aufgespannt wird. $\int_M \omega$ ist dann das Volumen von (M, g) . Damit können wir das innere Produkt

$$\langle \alpha, \beta \rangle := \int_M \langle \alpha(m), \beta(m) \rangle_m^p \omega \quad (\alpha, \beta \in \Omega^p(M))$$

auf $\Omega^p(M)$ einführen.

3. Es sei δ der bezüglich dieses inneren Produktes zur äußeren Ableitung d (siehe (A.2)) adjungierte Operator

$$\langle \delta \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, d\beta \rangle. \quad (6.9)$$

Das **Kodifferential** δ bildet also $(p+1)$ -Formen in p -Formen ab, und $\delta^2 = 0$.

Der **Laplace–Beltrami–deRham–Operator** Δ auf $\Omega^*(M)$ ist durch

$$\Delta := d\delta + \delta d = (d + \delta)^2 \quad (6.10)$$

definiert. Die Differentialformen in seinem Kern heißen *harmonisch*, die im Kern von d *geschlossen* und die im Kern von δ *ko-geschlossen*.

Δ ist ein **elliptischer Operator**. Wegen der Selbstadjungiertheit von Δ ist sein Spektrum rein reell, ja sogar positiv:

$$\langle \alpha, \Delta \alpha \rangle = \langle d\alpha, d\alpha \rangle + \langle \delta\alpha, \delta\alpha \rangle \geq 0.$$

An dieser Formel sieht man auch (formal), dass

$$\Delta \alpha = 0 \quad \text{äquivalent ist zu} \quad d\alpha = 0 \quad \text{und} \quad \delta\alpha = 0.$$

4. Es gilt die **Hodge-Zerlegung**

$$\Omega^p(M) = \Omega_H^p(M) \oplus \Omega_d^p(M) \oplus \Omega_\delta^p(M) \quad (p \in \mathbb{N}_0),$$

wobei

- $\Omega_H^p(M) \subseteq \Omega^p(M)$ den Untervektorraum der harmonischen p -Formen,
- $\Omega_d^p(M) = \text{Ran}[d : \Omega^{p-1}(M) \rightarrow \Omega^p(M)]$ den der exakten
- und $\Omega_\delta^p(M)$ den der koexakten Formen bezeichnet.

Dass diese drei Räume paarweise orthogonal sind, folgt formal aus (6.9), $dd = 0 = \delta\delta$ und aus der Zerlegung

$$\alpha = \alpha_H + \Delta\gamma = \alpha_H + \delta(d\gamma) + d(\delta\gamma) \quad (\alpha \in \Omega^p(M))$$

mit α_H harmonisch und $\gamma \in \Omega^p(M)$ geeignet. Denn für den selbstadjungierten Operator Δ ist $\Omega^p(M) = \ker(\Delta) \oplus \text{im}(\Delta)$ eine orthogonale Zerlegung. Es ist

$$\dim(\Omega_H^p(M)) = \text{beti}_p(M), \quad (6.11)$$

denn die harmonischen Formen sind insbesondere geschlossen, und Addition einer exakten Form macht die harmonischen Formen unharmonisch.

Witten benutzt nun die Morse-Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, um den Laplace–Beltrami–Operator zu deformieren: Es sei

$$d_t := \exp(-tf) d \exp(tf), \quad \delta_t := \exp(tf) \delta \exp(-tf) \quad \text{und} \quad \Delta_t := d_t \delta_t + \delta_t d_t.$$

Damit gilt

$$\ker(d_t) = \exp(-tf) \ker(d) \quad \text{und} \quad \text{ran}(d_t) = \exp(-tf) \text{ran}(d),$$

sodass (mit offensichtlichen Bezeichnungen) in Verallgemeinerung von (6.11) gilt:

$$\dim(\Omega_{H_t}^p(M)) = \text{beti}_p(M) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Wir bestimmen also die p -te Betti-Zahl, indem wir die Dimension der Kerns von $\Delta_t \geq 0$ auf $\Omega^p(M)$ berechnen. Dies gelingt im Limes $t \rightarrow \infty$.

6.26 Proposition (Proposition 11.13 in [CFKS]) *Es gilt*

$$\Delta_t = \Delta + tA + t^2 \|df\|^2 \quad (t \in \mathbb{R}), \quad (6.12)$$

wobei A ein *Differentialoperator* nullter Ordnung ist, der lokal in einer metrisch flachen Umgebung U die Form

$$A = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} [(a^i)^*, a^j]$$

besitzt, mit $(a^i)^* \alpha := dx_i \wedge \alpha$ und dem adjungierten Operator

$$a^i dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_p} = \sum_{k=1}^p (-1)^k g^{i,j_k} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_{k-1}} \wedge dx_{j_{k+1}} \wedge \dots \wedge dx_{j_p}.$$

Bei einem kritischen Punkt a lässt sich $\|df\|^2$ nach Lemma 6.13 in lokalen Morse-Koordinaten x in der Form

$$\|df(x)\|^2 = 4\|x\|^2$$

schreiben, und Δ stimmt dort mit dem euklidischen Laplace-Operator

$$\Delta_E := - \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \geq 0$$

überein. Wie man durch eine Skalierung der Koordinaten mit Faktor t feststellt, gilt

$$\text{spek}(\Delta_E + 4t^2\|x\|^2) = t \text{ spek}(\Delta_E + 4\|x\|^2) \quad (t > 0).$$

Da auch der Operator A in (6.12) mit t multipliziert wird, und mit $\Delta_E + 4\|x\|^2$ kommutiert, ist ein Vergleich des Spektrums von Δ_t auf $\Omega^p(M)$ mit dem Spektrum des t -fachen der direkten Summe

$$\bigoplus_{a \in \text{crp}(f)} K^{(a)} \quad , \text{ mit } K^{(a)} := \Delta_E + 4\|x\|^2 + 2A^{(a)} \quad \text{auf } \Omega^p(\mathbb{R}^n) \quad (6.13)$$

für

$$A^{(a)} := \sum_{i=1}^{n-\text{ind}(a)} [a_i^*, a_i] - \sum_{i=n-\text{ind}(a)+1}^n [a_i^*, a_i] \quad (a \in \text{crp}(f))$$

naheliegend. Das Spektrum der direkten Summe der Operatoren ist

$$\text{spek}\left(\bigoplus_{a \in \text{crp}(f)} K^{(a)}\right) = \bigcup_{a \in \text{crp}(f)} \text{spek}(K^{(a)}). \quad (6.14)$$

Zur Berechnung der rechten Seite benutzen wir die Abkürzungen $N := \{1, \dots, n\}$, $I := \{i_1, \dots, i_p\} \subseteq N$ und $dx_I := dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$. Damit ist

$$[a_i^*, a_i] dx_I = \pm dx_I$$

mit positivem Vorzeichen, falls $i \in I$, sonst negativem Vorzeichen.

In einer Orthonormalbasis von Eigenfunktionen des **harmonischen Oszillators** führt jede Eigenfunktion ψ zu $\binom{n}{p}$ Eigenformen p -ter Stufe der Form ψdx_I mit $|I| = p$ von $K^{(a)}$. Dabei ist der Beitrag von $A^{(a)}$ zum Eigenwert für $\bar{I} := N \setminus I$, $k := \{1, \dots, n - \text{ind}(a)\} \subseteq N$ und $\bar{k} := N \setminus k$ gleich

$$\lambda_a(I) := |I \cap k| - |\bar{I} \cap k| - |I \cap \bar{k}| + |\bar{I} \cap \bar{k}|. \quad (6.15)$$

Genau dann ist also $\lambda_a(I) = -n$ (d.h. minimal), wenn $\text{ind}(a) = p$ und $k = \bar{I}$.

Da $-\Delta_E + 4\|x\|^2$ die Eigenwerte $4(n + \frac{1}{2})$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ besitzt, ist das Spektrum

$$\text{spek}(K^{(a)}) = \left\{ \sum_{i=1}^n 4(n_i + \frac{1}{2}) + 2\lambda_a(I) \mid n_i \in \mathbb{N}_0 \right\} \quad (a \in \text{crp}(f)).$$

Zusammen mit (6.15) folgt: Null ist Eigenwert der Multiplizität $\delta_{\text{ind}(a), p}$. Nach (6.14) ist damit Null Eigenwert von $\bigoplus_a K^{(a)}|_{\Omega^p(M)}$ der Multiplizität $\text{crit}_p(f)$.

Zum Vergleich der Spektren von Δ_t und (6.13) zerlegen wir die Eins-Funktion $\mathbb{1}_M$ auf M mittels geeigneter Funktionen

$$J_a \in C^\infty(M, [0, 1]) \quad \text{mit} \quad J_b(a) = \delta_{a,b} \quad (a, b \in \text{crp}(f)),$$

sodass $J_0^2 + \sum_{a \in \text{crp}(f)} J_a^2 \equiv \mathbb{1}_M$ für $J_0 := \sqrt{1 - \sum_{a \in \text{crp}(f)} J_a^2}$. Dann ist (6.10) von der Form

$$\Delta = \sum_{a \in \text{crp}(f) \cup \{0\}} (J_a \Delta J_a - \|dJ_a\|^2),$$

wie man durch Berechnung des doppelten Kommutators $[J_a, [J_a, \Delta]]$ überprüft (siehe auch [CFKS, page 28]). Für große Werte des Parameters t können höchstens die Null-Eigenwerte von (6.13) zu Null-Eigenwerten von Δ_t führen. Es gilt damit:

$$\text{bet}_p(M) = \dim(\ker(\Delta_t|_{\Omega^p})) \leq \dim(\ker(\bigoplus_{a \in \text{crp}(f)} K^{(a)}|_{\Omega^p})) = \text{crit}_p(f),$$

was die Morse–Ungleichungen (6.3) beweist.

6.4 Anwendungen und Erweiterungen der Morse–Theorie

In diesem Abschnitt wird ein Überblick (teils ohne Beweise, aber mit Literaturangaben) über Anwendungen und Erweiterungen der Morse–Theorie gegeben.

6.4.1 Existenz periodischer Geodäten

Es ist in der Morse–Theorie nicht zwingend notwendig, dass die untersuchte Mannigfaltigkeit der Definition 2.5 genügt, also endliche Dimension besitzt. Beispielsweise besitzt für das Intervall $I := [0, 1]$ der Raum $N := H^1(I, M)$ der H^1 –Kurven¹⁶ $c : I \rightarrow M$ auf einer **riemannschen Mannigfaltigkeit** (M, g) die Struktur einer unendlich-dimensionalen Mannigfaltigkeit (siehe KLINGENBERG [Kli, Kapitel 2.3]), mit riemannscher Metrik.

Für glatte Vektorfelder v, w entlang c (also $v(t), w(t) \in T_{c(t)}M$) setzt man

$$\langle v, w \rangle := \int_I \left[g_{c(t)}(v(t), w(t)) + g_{c(t)}(\nabla v(t), \nabla w(t)) \right] dt. \quad (6.16)$$

Damit wird $H^1(I, M)$ zu einer sogenannten **Hilbert–Mannigfaltigkeit**. Das *Energiefunktional*

$$\mathcal{E} : H^1(I, M) \rightarrow [0, \infty) \quad , \quad c \mapsto \frac{1}{2} \int_I g_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) dt \quad (6.17)$$

ist glatt. Seine kritischen Punkte sind die konstanten Kurven, denn die Ableitung

$$D\mathcal{E}(c)(v) = \int_I g_{c(t)}(\dot{c}(t), \nabla v(t)) dt \quad (v \in T_c H^1(I, M)) \quad (6.18)$$

in Richtung $v := \dot{c}$ ist sonst positiv. Die kritische Menge ist also homöomorph zu M . Wir werden die Restriktion der Funktion $\mathcal{E} : N \rightarrow [0, \infty)$ auf geeignete (unendlich-dimensionale) Untermannigfaltigkeiten von N untersuchen, um Informationen über Geodäten auf M zu bekommen.

Eine **Geodäte** auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) ist eine Kurve $c \in C^2(I, M)$, für die der Paralleltransport entlang c den Geschwindigkeitsvektor c' invariant lässt, die also in lokalen Koordinaten die Geodätengleichung

$$\ddot{x}_h + \Gamma_{i,j}^h(x) \dot{x}_i \dot{x}_j = 0 \quad (h = 1, \dots, d)$$

mit den **Christoffel-Symbolen**

$$\Gamma_{i,j}^h(x) := \frac{1}{2} g^{h,k}(x) \left(\frac{\partial g_{k,j}}{\partial x_i}(x) + \frac{\partial g_{i,k}}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial g_{i,j}}{\partial x_k}(x) \right) \quad (i, j, h = 1, \dots, d),$$

erfüllt (hier wird die **Einsteinsche Summenkonvention** benutzt). Für das Intervall $I = [0, 1]$ ist sie damit Extremal des Energiefunktionals (6.17) und des *Längenfunktionals*

$$\mathcal{L} : H^1(I, M) \rightarrow [0, \infty) \quad , \quad \mathcal{L}(c) := \int_I \sqrt{g_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t))} dt, \quad (6.19)$$

¹⁶Also solche mit quadratintegrabler erster Ableitung. $H^1(I, M)$ ist eine andere Bezeichnung für den **Sobolev-Raum** $W^{1,2}(I, M)$.

im Vergleich mit Kurven, deren Anfangs- und Endpunkt gleich $c(0)$ bzw. $c(1)$ sind. Eine analoge Aussage gilt für beliebige Punktepaare auf der Geodäte.

Ist M eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^k$ und die riemannsche Metrik g auf M die Restriktion der euklidischen Metrik des $\mathbb{R}^k$, dann zeichnen sich die Geodäten auf M dadurch aus, dass ihre Beschleunigung $c''(t) \in T_{c(t)}\mathbb{R}^k$ senkrecht auf dem Tangentialraum $T_{c(t)}M$ ist.

Die geodätische Bewegung, aufgefasst als Fluss auf dem Tangentialbündel TM , ist **hamiltonsch**, mit der Hamilton-Funktion

$$H : TM \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad v \mapsto \frac{1}{2}g_m(v, v) \quad \text{für } v \in T_m M. \quad (6.20)$$

Dabei ist die das hamiltonsche Vektorfeld X_H definierende symplektische Form die mittels der Bündelabbildung $TM \rightarrow T^*M$, $v \mapsto g(v, \cdot)$ vom Kotangentenbündel T^*M auf TM zurückgezogene kanonische symplektische Form ω_0 .

Das Längenfunktional $\mathcal{L}$ ermöglicht es, eine (zusammenhängende) riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) als metrischen Raum mit Metrik $d : M \times M \rightarrow [0, \infty)$,

$$d(q_0, q_1) := \inf \{ \mathcal{L}(c) \mid c \in H^1(I, M), c(0) = q_0, c(1) = q_1 \} \quad (6.21)$$

aufzufassen. Nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt für die Zeitintervalle $[t_0, t_1] \subseteq I$:

$$d(c(t_0), c(t_1)) \leq \sqrt{2\mathcal{E}(c)} (t_1 - t_0).$$

6.27 Definition

- Die riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) heißt **geodätisch vollständig**, wenn es für jeden Tangentialvektor $v \in T_m M$ eine Geodäte $c : \mathbb{R} \rightarrow M$ mit $c(0) = m$ und $c'(0) = v$ gibt.
- Auf einer geodätisch vollständigen Mannigfaltigkeit heißt mit diesen Bezeichnungen die Abbildung

$$\exp : TM \rightarrow M \quad , \quad v \mapsto c(1)$$

Exponentialabbildung.

Ihre Restriktion auf $T_m M$ wird mit $\exp_m : T_m M \rightarrow M$ bezeichnet.

Diese Exponentialabbildung der Differentialgeometrie sollte nicht mit der gleichnamigen Abbildung aus der Theorie der Lie-Gruppen verwechselt werden ¹⁷.

¹⁷Bei einer unter der Links- und der Rechtswirkung invarianten Metrik auf einer Lie-Gruppe G fallen die beiden Begriffe aber zusammen, wenn man die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ in $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ als Tangentialraum $T_e G$ von G beim neutralen Element $e \in G$ auffasst. Beispiele sind abelsche Lie-Gruppen wie $\mathbb{R}^n$ und der Torus $\mathbb{T}^n$.

6.28 Beispiele

1. Kompakte Mannigfaltigkeiten sind bezüglich jeder riemannschen Metrik geodätisch vollständig. Denn die flussinvarianten Niveaulächen der Hamilton-Funktion (6.20) sind dann ebenfalls kompakt.
2. Ein einfaches Beispiel für eine Exponentialabbildung ist die der runden Sphäre $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$. Vom Tangentialraum $T_n \mathbb{S}^2 \cong \mathbb{R}^2$ des Nordpols n aus gesehen wird durch die Inverse der Tangentialabbildung $\exp_n : T_n \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ die (Erd-) Kugel azimutal auf die Ebene abgebildet. Die Geodäten sind in diesem Fall Großkreise.

Der Nordpol erscheint als Nullpunkt und in Form konzentrischer Kreise der Radien $2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$. In nebenstehender Abbildung sieht man die Antarktis mit dem Südpol als Kreis mit Radius π . $\diamond$



Inverse Exponentialabbildung der Erde am Nordpol, also äquidistante Azimutalprojektion. ¹⁸

6.29 Satz (Hopf und Rinow) Für eine zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. (M, g) ist geodätisch vollständig.
2. (M, d) (mit der Metrik d aus (6.21)) ist ein vollständiger metrischer Raum;
3. die abgeschlossenen und bezüglich d beschränkten Teilmengen von M sind kompakt;

Unter dieser Voraussetzung existiert für je zwei Punkte q_0 und q_1 von M eine Geodäte $c : [0, 1] \rightarrow M$ mit $c(i) = q_i$ und minimaler Länge $\mathcal{L}(c) = d(q_0, q_1)$.

Um die Geodäten mithilfe von Morse-Theorie zu untersuchen, muss man ihren Index bezüglich des Energiefunktionalen verstehen. Dieser hängt mit ihren konjugierten Punkten zusammen.

¹⁸Bild: Mit freundlicher Genehmigung des Wikipedia-Autors RokerHRO

6.30 Definition

- Es sei $c : [0, T] \rightarrow M$ ein Geodätensegment auf der riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) . Dann heißt $q := c(t)$ **konjugierter Punkt von** $p := c(0)$ (entlang c), wenn die lineare Abbildung

$$T_{c'(0)t} \exp_p : T_{c'(0)t} T_p M \longrightarrow T_q M$$

einen nichttrivialen Kern besitzt.

- Die Dimension dieses Kerns heißt **Multiplizität** $\text{Mult}_c(t)$ des konjugierten Punktes.

6.31 Bemerkung (konjugierte Punkte)

Man betrachtet also die Linearisierung der Exponentialabbildung und schaut damit, ob eine Variation der Anfangsgeschwindigkeit der bei p startenden Geodäte uns trotzdem in der Zeit t zu $q = \exp_p(c'(0)t)$ führt. Die zu p konjugierten Punkte $c(t)$ entlang der Geodäte c besitzen damit Zeitparameter t , die sich nicht häufen.

Ist q konjugierter Punkt von p entlang c , dann ist auch p konjugierter Punkt von q (entlang der umgekehrt durchlaufenen Geodäte).

In Beispiel 6.28.2 sind genau die Antipodenpaare $(p, q) = (p, -p)$ und die Paare (p, p) der Sphäre zueinander konjugiert, entlang jedes sie treffenden Großkreissegmentes. $\diamond$

Die in Bemerkung 6.8.2 eingeführte Hilbert–Mannigfaltigkeit $H^1(I, M)$ besitzt nur die konstanten Kurven als kritische Punkte des Energiefunktional $\mathcal{E}$. Man kann aber über die Endpunktabbildung

$$\pi : H^1(I, M) \rightarrow M \times M, \quad c \mapsto (c(0), c(1))$$

Untermannigfaltigkeiten von $H^1(I, M)$ definieren und $\mathcal{E}$ darauf restringieren. Besonders wichtig sind die Räume

$$\Omega_{p,q} M := \pi^{-1}((p, q)) \quad (p, q \in M)$$

der bei p beginnenden und bei q endenden Kurven, und

$$\Lambda M := \pi^{-1}(\Delta), \quad \text{mit der Diagonale } \Delta := \{(q, q) \mid q \in M\}.$$

6.32 Satz (Index–Satz von Morse) Der Index des Energiefunktional

$$\mathcal{E} : \Omega_{p,q} M \longrightarrow [0, \infty)$$

bei einer Geodäte c von p nach q ist¹⁹ $\sum_{t \in (0,1)} \text{Mult}_c(t)$.

¹⁹Die Summe ist endlich!

Beweis: In KLINGENBERG [Kli, Theorem 2.5.9]. □

Der Raum ΛM kann sinnvollerweise als Raum von H^1 -Schleifen $c : \mathbb{S}^1 \rightarrow M$ aufgefasst werden. Das (wieder mit $\mathcal{E}$ bezeichnete) auf ΛM restringierte Energiefunktional ist dann invariant unter den Drehungen $t \mapsto t + s$ auf $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Es ist also immer degeneriert und damit keine Morse-Funktion²⁰.

Die kritischen Punkte von $\mathcal{E} : \Lambda M \rightarrow [0, \infty)$ besitzen aber endlichen Index, und sie sind geschlossene Geodäten. Letzteres schließt man durch partielle Integration aus der Formel (6.18) für ihre Ableitung $D\mathcal{E}$.

6.33 Satz *Falls (M, g) vollständig ist, sind auch $\Omega_{p,q}M$ und ΛM bezüglich der von (6.16) abgeleiteten Metrik auf $H^1(I, M)$ vollständige metrische Räume.*

Beweis: Siehe KLINGENBERG [Kli, Theorem 2.4.7]. Dort wird angenommen, dass M kompakt ist. Die leichte Verallgemeinerung auf vollständige (M, g) findet man in Proposition 4.1 von.²¹ □

Um in $\Omega_{p,q}M$ beziehungsweise ΛM Geodäten als kritische Punkte von $\mathcal{E}$ zu finden, überprüft man eine sogenannte **Palais-Smale-Bedingung**. Wir bezeichnen diese Räume dabei pauschal mit Ω :

6.34 Definition (Palais-Smale-Bedingung)

Alle Folgen $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Kurven in Ω , für die die Folge $(\mathcal{E}(c_k))_{k \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist und $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\text{grad } \mathcal{E}(c_k)\| = 0$ gilt, besitzen eine konvergente Teilfolge.

6.35 Beispiel (Gegenbeispiel)

Ist (M, g) die (vollständige) riemannsche Mannigfaltigkeit $M := \mathbb{R}$ mit euklidischer Metrik g , dann ist die Palais-Smale-Bedingung für ΛM nicht erfüllt.

Denn etwa die Folge der konstanten Schleifen c_k mit $c_k(t) := k$ erfüllt die Voraussetzung der Definition, besitzt aber keine konvergente Teilfolge. ◇

6.36 Lemma *Die Palais-Smale-Bedingung ist für $\Omega_{p,q}M$ erfüllt, falls (M, g) vollständig ist, und für ΛM , falls M kompakt ist.*

Unter den genannten Voraussetzungen erzeugt das Gradientenvektorfeld $\text{grad } \mathcal{E}$ einen vollständigen Fluss auf Ω . Man findet also beispielsweise in jeder Zusammenhangskomponente von $\Omega_{p,q}M$ ein p mit q verbindendes Geodätenseg-

²⁰Aber es könnte eine sogenannte Morse-Bott-Funktion sein. Bei einer **Morse-Bott-Funktion** ist die kritische Menge eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit und die Hesse-Matrix in Normalenrichtung ist nicht degeneriert.

²¹M. Klein, A. Knauf: *Classical Planar Scattering by Coulombic Potentials*. LNP 13. Berlin: Springer, 1993

ment. Diese Zusammenhangskomponenten werden durch die **Fundamentalgruppe** $\pi_1(M)$ nummeriert.

Auch im Fall trivialer Fundamentalgruppe kann man oft die Existenz vieler solcher Geodätensegmente nachweisen:

6.37 Beispiel (Geodäten auf einer Sphäre)

- Sei zunächst $M = \mathbb{S}^n$ mit Standardmetrik g und $p, q \in \mathbb{S}^n$ nicht konjugiert, also nicht gleich oder Antipoden. Wir können diese beiden Punkte mit unendlich vielen Geodäten-Segmenten mit Multiplizitäten $k(n-1)$, $k \in \mathbb{N}_0$ verbinden. Allerdings sind diese alle Segmente *einer* (in $\text{span}(p, q)$ liegenden) Geodäte.
- Ist die Metrik nicht die Standardmetrik, so lässt sich unter Zuhilfenahme des Satzes 4.15 von Morse und Sard angewandt auf die Exponentialabbildung, immer noch feststellen, dass fast alle $(p, q) \in M \times M$ nicht konjugiert sind, und man erhält wieder viele verbindende Geodätensegmente. Allerdings werden diese im Allgemeinen geometrisch verschieden sein. $\diamond$

Eine andere Fragestellung ist die nach Existenz und Zahl geschlossener Geodäten. Man benutzt dabei das in Bemerkung 6.8.2 eingeführte und auf den Raum der H^1 -Schleifen $c : \mathbb{S}^1 \rightarrow M$ restringierte Energiefunktional $\mathcal{E} : \Lambda M \rightarrow [0, \infty)$.

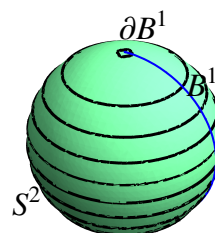
6.38 Satz (Ljusternik und Fet)

Auf einer geschlossenen riemannschen Mannigfaltigkeit existiert eine periodische Geodäte.

Beweis: Neben dem Originalbeweis in [LF], siehe auch KLINGENBERG [Kli, Theorem 3.7.7], gibt es in [Kli, Thm. 2.4.20] einen weiteren Beweis. Beweisidee:

- Wenn die Fundamentalgruppe $\pi_1(M)$ nicht trivial ist, dann gibt es auch nicht triviale **Konjugationsklassen** in $\pi_1(M)$, also nicht kontrahierbare Schleifen. Da allgemein die Zusammenhangskomponenten von ΛM den Konjugationsklassen entsprechen, finden wir durch Straffziehen einer solchen Schleife mit dem Gradientenfluß eine geschlossene Geodäte.

• Ist aber M einfach zusammenhängend, dann existiert eine nicht triviale **Homotopiegruppe**²² $\pi_\ell(M)$, $2 \leq \ell \leq \dim(M)$. Sei $f : \mathbb{S}^\ell \rightarrow M$ nicht homotop zu einer konstanten Abbildung. Wir zerlegen $\mathbb{S}^\ell$ (auf die in der Abbildung für $\ell = 2$ angedeuteten Weise) in durch $B^{\ell-1}$ parametrisierte Orbits von $\mathbb{S}^1$, mit konstanten Kreisen für Parameter aus $\partial B^{\ell-1}$. Diese ziehen wir gemeinsam straff. Die meisten Schleifen schrumpfen zu konstanten Schleifen zusammen. Aber, da f nicht homotop zu einer konstanten Abbildung ist, konvergiert eine Schleife gegen eine geschlossene Geodäte positiver Länge.
 Beispiel: Im Fall von $M = \mathbb{S}^2$ mit Standardmetrik und $f = \text{Id}_{\mathbb{S}^2}$ ist diese der Äquator. $\square$



6.39 Bemerkung (Existenz vieler geschlossener Geodäten)

Typischerweise besitzt eine geschlossene riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) (mit $\dim(M) \geq 2$) mehr als eine geschlossene Geodäte. Dabei nennen wir zwei Geodäten geometrisch verschieden, wenn ihre Orbits im Einheits-Tangentialbündel T^1M verschieden sind.

Dies kann man zeigen, wenn die Fundamentalgruppe $\pi_1(M)$ hinreichend groß ist (etwa für Tori, mit $\pi_1(\mathbb{T}^n) \cong \mathbb{Z}^n$). Aber auch zum Beispiel für die Sphäre $\mathbb{S}^2$ mit beliebigen Metriken ist das bewiesen worden, siehe BANGERT [Ban]. $\diamond$

6.40 Bemerkung (Krümmung und geschlossene Geodäten)

Besitzt (M, g) negative **Schnittkrümmung**, dann ist jede geschlossene Geodäte minimal. Damit existiert aber auch in jeder nichttrivialen Konjugationsklasse nur genau eine geschlossene Geodäte, denn gäbe es zwei solche homotope Geodäten $c_0, c_1 : \mathbb{S}^1 \rightarrow M$, dann könnte man eine sie verbindende Kurve $H : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \Lambda(M)$ mit $H(\cdot, 0) = c_0$, $H(\cdot, 1) = c_1$ finden. Gemeinsame Verkürzung der Schleifen $H(\cdot, t)$ würde eine dritte nicht minimale Geodäte liefern. $\diamond$

6.4.2 Degenerierte kritische Punkte

Ein großes Problem bei der Anwendung der Morse-Theorie ist die Voraussetzung der Nichtdegeneriertheit der kritischen Punkte. Zwar wird diese Voraussetzung in irgendeinem generischen Sinn erfüllt sein, doch für den konkreten Einzelfall nützt uns diese Tatsache wenig.

Hier ist die Ljusternik–Schnirelmann–Kategorie nützlich:

²²eine analog zur Fundamentalgruppe definierte Gruppe von Homotopieklassen stetiger Abbildungen $\mathbb{S}^\ell \rightarrow M$.

6.41 Definition Die **Ljusternik–Schnirelmann–Kategorie** $\text{cat}(X)$ eines Hausdorff-Raums X ist die Minimalzahl in X kontrahierbarer abgeschlossener (nicht notwendig zusammenhängender) Mengen

$$A_1, \dots, A_k \subseteq X \quad \text{mit} \quad X = \bigcup_{i=1}^k A_i$$

Sonst ist $\text{cat}(X) := \infty$.

6.42 Satz Eine Funktion $f \in C^2(M, \mathbb{R})$ auf einer geschlossenen Mannigfaltigkeit M besitzt mindestens $\text{cat}(M)$ kritische Punkte.

Beweis: Einen Beweis findet man in Band 3, §19 von DUBROVIN, FOMENKO und NOVIKOV [DFN]. $\square$

Die Ljusternik–Schnirelmann–Kategorie lässt sich mithilfe der cup–Länge berechnen:

6.43 Definition Die **cup–Länge** $\text{cup}(M)$ von M ist die Maximalzahl von Elementen $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in H^*(M, \mathbb{Z})$ mit $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p \neq 0$.

6.44 Satz $\text{cat}(M) \geq \text{cup}(M) + 1$.

Beweis: Siehe NICOLAESCU [Ni, Theorem 2.58]. $\square$

6.45 Beispiel (Torus)

$\text{cup}(\mathbb{T}^n) = n$, wie man durch Benutzung einer Basis $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in H^1(\mathbb{T}^n)$ von $H^*(\mathbb{T}^n)$ sieht (vergleiche mit Beispiel A.7).

Jede glatte Funktion $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt also mindestens $n + 1$ kritische Punkte.

Diese untere Schranke wird auch realisiert.

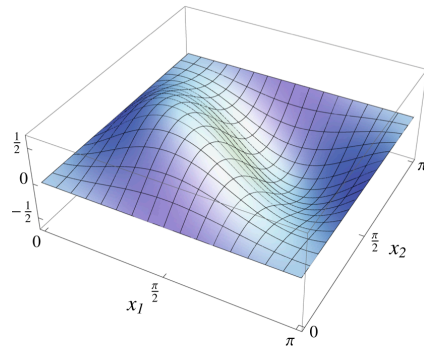
Etwa für den 2-Torus $\mathbb{T}^2 := (\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z})^2$ ist die Funktion $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$x \mapsto \sin(x_1) \sin(x_2) \sin(x_1 + x_2)$$

wohldefiniert und hat genau drei kritische Punkte:

- $(0, 0)$ (degeneriert),
- $(\pi/3, \pi/3)$ (Maximalstelle), und
- $(2\pi/3, 2\pi/3)$ (Minimalstelle),

siehe Abbildung. $\diamond$



Anhänge

A Definition der Betti-Zahlen

Für nicht zu komplizierte topologische Räume M werden als Invarianten die **Betti-Zahlen** $\text{bet}_{\ell}(M) \in \mathbb{N}_0$ ($\ell \in \mathbb{N}_0$) als die Dimension der singulären Homologiegruppe $H_{\ell}(M, \mathbb{Q})$ definiert. In diesem Anhang wird dies unter der vereinfachenden Annahme getan, dass M eine Mannigfaltigkeit ist. Dazu führen wir die Kohomologietheorie von **de Rham** ein, die mehr Struktur des topologischen Raumes voraussetzt als z.B. die **singuläre**.

Es werden zunächst **Differentialformen**²³ auf der Mannigfaltigkeit M^n betrachtet, also antisymmetrische Multilinearformen des Tangentialbündels.

In einer lokalen Karte (U, φ) von M^n mit Koordinaten $x_i = \varphi_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ lässt sich eine solche k -Form ω immer als

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} f_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

notieren, mit den Koeffizientenfunktionen $f_{i_1 \dots i_k}$.

Das Transformationsverhalten unter Koordinatenwechsel ergibt sich für $x = \tilde{x}(y)$ aus der Transformationsregel

$$dx_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial y_k} dy_k \quad (i = 1, \dots, n)$$

der 1-Formen und deren Antisymmetrie. Es sei $\Omega^k(M)$ der $\mathbb{R}$ -Vektorraum der k -Formen auf M . Mit dem Dachprodukt $\wedge : \Omega^k(M) \times \Omega^l(M) \rightarrow \Omega^{k+l}(M)$,

$$\omega \wedge \rho = \sum f_{i_1 \dots i_k} g_{j_1 \dots j_l} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l}$$

für die l -Form $\rho = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq n} g_{i_1 \dots i_l} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_l}$ wird

$$\Omega^*(M) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Omega^k(M) \cong \bigoplus_{k=0}^{\dim(M)} \Omega^k(M) \quad (\text{A.1})$$

zu einer Algebra. Es ist $\Omega^k(M) = \{0\}$ für $k > \dim(M)$.

Unabhängig von der Existenz einer Metrik auf M ist immer die **äußere Ableitung** $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ ($k \in \mathbb{N}_0$) definiert, lokal durch

$$d\omega = \sum_{j, 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \frac{\partial f_{i_1, \dots, i_k}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}. \quad (\text{A.2})$$

²³Siehe Kapitel 8 der **Analysis III** für eine Einführung in die Theorie der Differentialformen.

$\omega \in \Omega^*(M)$ heißt *geschlossen*, falls $d\omega = 0$, *exakt*, falls $\omega = d\rho$ für eine Form ρ . Wegen $dd\rho = 0$ ist jede exakte Form geschlossen, z.B.

$$ddf = d \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j + \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i \right) = 0.$$

Auf dem Raum

$$Z^k(M) := \ker(d|_{\Omega^k(M)})$$

der geschlossenen Formen nennen wir zwei geschlossene Formen *äquivalent* oder *kohomolog* ($\omega_1 \sim \omega_2$), wenn $\omega_1 - \omega_2 \in B^k(M)$, mit dem Unterraum

$$B^k(M) := \operatorname{im}(d|_{\Omega^{k-1}(M)}) \subseteq Z^k(M)$$

der exakten Formen. Diese Äquivalenzrelationen definieren die k -te **de Rham-Kohomologiegruppe** (einen $\mathbb{R}$ -Vektorraum)

$$\begin{aligned} H^k(M) &\equiv H_{\text{d.R.}}^k(M, \mathbb{R}) := Z^k(M)/B^k(M) \\ H^*(M) &\equiv H_{\text{d.R.}}^*(M, \mathbb{R}) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} H^k(M). \end{aligned}$$

A.1 Aufgabe (Poincaré-Lemma)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig. Zeigen Sie: Es gilt

$$H^k(U) = 0 \quad (k = 1, \dots, n),$$

d.h. zu jedem geschlossenen $\omega \in \Omega^k(U)$ existiert ein $\eta \in \Omega^{k-1}(U)$ mit $d\eta = \omega$. Nehmen Sie dafür o.B.d.A. an, dass U sternförmig bezüglich des Nullpunkts ist, und betrachten Sie für das zeitabhängige Vektorfeld

$$X : (0, 1] \times U \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad X_t(y) := y/t$$

und die Skalierungs-Abbildungen

$$F_t : U \rightarrow U, \quad y \mapsto ty \quad (t \in [0, 1])$$

die $(k-1)$ -Form $\eta := \int_0^1 F_t^* \mathbf{i}_{X_t} \omega \, dt$. ◇

Im Gegensatz zu den Räumen $Z^k(M)$ und $B^k(M)$ sind die $\mathbb{R}$ -Vektorräume $H^k(M)$ für kompakte Mannigfaltigkeiten M und für nicht zu komplizierte, nicht kompakte Mannigfaltigkeiten endlich-dimensional. In diesem Fall ist also die ℓ -te **Betti-Zahl**

$$\operatorname{bet}_{\ell}(M) := \dim(H^{\ell}(M)) \quad (\ell \in \mathbb{N}_0) \quad (\text{A.3})$$

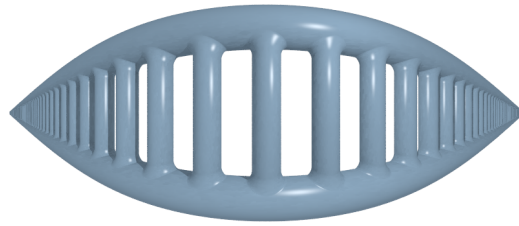


Abbildung A.1: Jacobs-Leiter, aus [wikimedia.org](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Jacobs-Leiter)

definiert.

Gegenbeispiel: Eine Fläche M von unendlichem Geschlecht, also unendlich-dimensionaler Kohomologiegruppe $H^1(M)$, ist die *Jacobs-Leiter*. $\diamond$

Nach dem *Satz von de Rham* stimmen die so definierten Betti-Zahlen mit denen der singulären Homologie überein.

A.2 Satz *Besitzt die Mannigfaltigkeit M nur endlich viele Zusammenhangskomponenten, dann ist $\text{bet}_0(M)$ gleich deren Anzahl.*

Beweis:

- Eine Null-Form ω auf M ist eine reelle Funktion.
- Diese ist genau dann geschlossen, wenn ihre Ableitung Null ist, sie also auf den Zusammenhangskomponenten von M konstant ist.
- Ihre Werte auf den Zusammenhangskomponenten lassen sich frei wählen. $\square$

A.3 Beispiel (Betti-Zahlen des $\mathbb{R}^n$) Nach Satz A.2 ist $\text{bet}_0(\mathbb{R}^n) = 1$.

Nach dem *Poincaré-Lemma* ist dagegen $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ für $k \geq 1$ geschlossen genau dann, wenn ω exakt ist. Es folgt $\text{bet}_k(\mathbb{R}^n) = 0$. $\diamond$

In vielen Fällen ist bei Berechnungen von de Rham-Kohomologien hilfreich auszunutzen, dass die äußere Ableitung sich *natürlich* unter Abbildungen $f : M \rightarrow N$ verhält, dass also $df = f^*d$ gilt.

A.4 Beispiel (Betti-Zahlen der Sphären)

- $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ist invariant unter der Wirkung der *Drehgruppe* $\text{SO}(n+1)$.
- Wir können nun Formen $\omega \in \Omega^*(\mathbb{S}^n)$ mitteln. Mit μ bezeichnen wir das *Haarsche Maß* auf der Gruppe $\text{SO}(n+1)$, d.h. das (eindeutige) Wahrscheinlichkeitsmaß mit der Eigenschaft

$$\mu(L_g(A)) = \mu(A) = \mu(R_g(A))$$

für alle Borel-Mengen $A \subseteq \mathrm{SO}(n+1)$, wobei Links- und Rechtswirkung von $g \in \mathrm{SO}(n+1)$ durch

$$L_g(h) := g \circ h, \quad R_g(h) := h \circ g \quad (h \in \mathrm{SO}(n+1))$$

definiert sind. Wir mitteln die Form ω , setzen also

$$\bar{\omega} := \int_{\mathrm{SO}(n+1)} g^* \omega \, d\mu(g).$$

Es gilt $h^* \bar{\omega} = \bar{\omega}$ für alle $h \in \mathrm{SO}(n+1)$, die Form ist also invariant.

- Offensichtlich ist wegen $dg^* = g^* d$ die gemittelte Form $\bar{\omega}$ geschlossen bzw. exakt, wenn ω geschlossen bzw. exakt ist. Aber auch die Umkehrung gilt. Wir können also zu invarianten Repräsentanten $\bar{\omega}$ von Kohomologieklassen übergehen, die durch ihren Wert an einem Punkt der Sphäre, z.B. dem Nordpol fixiert sind, und unter der Stabilisatorgruppe $\mathrm{SO}(n) \subseteq \mathrm{SO}(n+1)$ invariant sein müssen. Dies gilt für die konstanten 0- und n -Formen, aber für keine weiteren. Damit ist

$$\mathrm{betti}_0(\mathbb{S}^n) = \mathrm{betti}_n(\mathbb{S}^n) = 1, \quad \mathrm{betti}_i(\mathbb{S}^n) = 0 \quad (0 < i < n). \quad \square$$

A.5 Aufgabe (Betti-Zahlen der projektiven Räume)

Berechnen Sie die Betti-Zahlen der projektiven Räume $\mathbb{RP}^n$ ($n \in \mathbb{N}$). $\diamond$

A.6 Bemerkung (Künneth-Formel)

Die äußere Ableitung erfüllt die Leibniz-Regel $d(\omega \wedge \rho) = (d\omega) \wedge \rho + (-1)^k \omega \wedge d\rho$. Daher ist mit ω und ρ auch $\omega \wedge \rho$ geschlossen und für eine beliebige $(k-1)$ -Form σ zur geschlossenen Form $(\omega + d\sigma) \wedge \rho$ kohomolog. $H^*(M)$ wird damit zu einem *(Kohomologie)-Ring*, und es gilt die *Künneth-Formel*

$$H^k(M_1 \times M_2) = \bigoplus_{l_1+l_2=k} H^{l_1}(M_1) \otimes H^{l_2}(M_2) \quad (k \geq 0)$$

oder kurz $H^*(M_1 \times M_2) = H^*(M_1) \otimes H^*(M_2)$. $\diamond$

A.7 Beispiel (Betti-Zahlen der Tori)

Damit ergibt sich für den n -Torus $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}_1^1 \times \dots \times \mathbb{S}_n^1$

$$H^k(\mathbb{T}^n) = \bigoplus_{l_1+\dots+l_n=k} \bigotimes_{i=1}^n H^{l_i}(\mathbb{S}_i^1) \cong \bigoplus_{l_1+\dots+l_n=k} \mathbb{R} = \mathbb{R}^{\binom{n}{k}} \quad (k \in \mathbb{N}_0).$$

Also ist $H^*(\mathbb{T}^n)$ die von den Erzeugern e_i von $H(\mathbb{S}_i^1)$ erzeugte äußere Algebra $\wedge(e_1, \dots, e_n)$. Entsprechend ist die k -te Betti-Zahl $\mathrm{betti}_k(\mathbb{T}^n) = \binom{n}{k}$. $\diamond$

B Vektorbündel

Vektorbündel oder, genauer gesagt, Vektorraumbündel, sind topologische Räume B , an die man an jedem Punkt einen Vektorraum $\mathbb{R}^n$ angeheftet hat, wobei über kleinen Umgebungen $U \subseteq B$ eines Punktes der Totalraum E die Struktur eines Produktes von Umgebung und Vektorraum besitzt.

B.1 Definition

- Ein (reelles, topologisches) **Vektorraumbündel** vom **Rang** n ist ein Tripel (E, π, B) , wobei $\pi : E \rightarrow B$ eine stetige surjektive Abbildung ist, jedes $E_b := \pi^{-1}(b)$ ein reeller n -dimensionaler Vektorraum ist, wobei gilt:

Lokale Trivialität: Jedes $b \in B$ hat eine Umgebung U , für die ein Homöomorphismus

$$\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$$

existiert, derart, dass für jedes $b \in B$

$$\varphi_b := \varphi|_{E_b} : E_b \rightarrow \{b\} \times \mathbb{R}^n$$

ein Vektorraum-Isomorphismus ist.

- (E, π, B) heißt **Vektorbündel über** B , E Totalraum, B **Basis**, π **Projektion**, die E_b heißen **Fasern**.
- Statt (E, π, B) schreibt man oft kurz E , manchmal $\xi = (E, \pi, B)$.
- (φ, U) wie oben heißt **Bündelkarte**.
- Ein Bündel über B heißt **trivial**, wenn eine Bündelkarte (φ, B) existiert.

B.2 Bemerkungen (Vektorbündel)

1. Wenn also ein Tangentialbündel $\pi_M : TM \rightarrow M$ trivial ist, ist M gemäß Definition 2.42 parallelisierbar. Siehe auch die Beispiele 2.43.
2. Über einer gegebenen Basis B existieren immer triviale Bündel $B \times \mathbb{R}^n$ beliebiger Dimension $n \in \mathbb{N}_0$. $\diamond$

B.3 Beispiele (Vektorbündel)

1. Wir haben schon zwei Klassen von Vektorbündeln kennen gelernt, das Tangentialbündel $\pi_M : TM \rightarrow M$ einer Mannigfaltigkeit M (Definition 2.37), und ihr Kotangentialbündel $\pi_M^* : T^*M \rightarrow M$ (Definition 2.45).
2. Ist $A \subseteq M$ eine Untermannigfaltigkeit, dann ist $T_A M := \bigcup_{a \in A} T_a M$ ein Vektorbündel über A vom Rang $\dim(M)$.

3. Das *algebraische Normalenbündel* einer Untermannigfaltigkeit $A \subseteq M$ wird als Quotientenbündel

$$T_M A / T A := \bigcup_{a \in A} T_a M / T_a A$$

definiert. Es ist ein Vektorraumbündel vom Rang $\dim(M) - \dim(A)$.

4. Ist g eine Riemannsche Metrik auf M , dann ist

$$T A^\perp := \bigcup_{a \in A} T_a A^\perp \quad \text{mit} \quad T_a A^\perp := \{v \in T_a M \mid \forall w \in T_a A : g_a(v, w) = 0\}$$

das *geometrische Normalenbündel*, das aus allen auf A senkrecht stehenden Tangentialvektoren v besteht. Es ist kanonisch isomorph zum algebraischen Normalenbündel der Untermannigfaltigkeit $A \subseteq M$.

Etwa für die Untermannigfaltigkeit $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ist

$$(TS^n)^\perp = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1, y \in \text{span}(x)\}. \quad \diamond$$

Das Normalenbündel $T A^\perp$ ermöglicht es, den Begriff einer *Tubenumgebung* der Untermannigfaltigkeit A einzuführen, wobei es sich um eine Einbettung des Normalenbündels von $A \subseteq M$ in einen kleinen Schlauch um A handelt. Siehe HIRSCH, [Hi, Chapter 4.5].

Bis jetzt kann der Basisraum eines Vektorbündels ein beliebiger topologischer Raum sein und muss keine Mannigfaltigkeit sein. Wir werden aber in Def. B.6 differenzierbare Vektorraumbündel einführen.

Vektorbündel sind gemischte algebraisch-topologische Objekte. Wir interessieren uns insbesondere für die stetigen Abbildungen zwischen Vektorbündeln, die nicht nur Faser in Faser überführen, sondern, eingeschränkt auf die Fasern, lineare Abbildungen sind:

B.4 Definition

Seien $\xi_i = (E_i, \pi_i, B_i)$, $i = 0, 1$ Vektorraumbündel.

- Eine **Faserabbildung** $F : \xi_0 \rightarrow \xi_1$ ist eine stetige Abbildung $F : E_0 \rightarrow E_1$, die eine Abbildung $f : B_0 \rightarrow B_1$ überlagert, d.h. es existiert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E_0 & \xrightarrow{F} & E_1 \\ \pi_0 \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\ B_0 & \xrightarrow{f} & B_1 \end{array}.$$

- Wenn für $b \in B$ die $F_b := F|_{\pi_0^{-1}(b)}$, $F_b : (E_0)_b \rightarrow (E_1)_{f(b)}$ linear sind, dann heißt f ein **Vektorbündel-Morphismus**, falls
 - alle F_b injektiv, Vektorbündel**monomorphismus**,
 - alle F_b surjektiv, Vektorbündel**epimorphismus**,
 - alle F_b bijektiv, **Vektorbündelabbildung**.

Wenn $f : B_0 \rightarrow B_1$ ein Homöomorphismus und F eine Vektorbündelabbildung ist, dann heißt F **Äquivalenz**.

- Ist $B_0 = B_1 \equiv B$ und $f = \text{Id}_B$, dann heißt die Vektorbündelabbildung F **Isomorphismus**.

B.5 Definition Sei (E, π, B) ein Vektorbündel.

1. Eine Menge $\{(f_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ von Bündelkarten heißt **Bündelatlas** von E , wenn $B = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$.
2. Die stetigen Abbildungen

$$U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R}) \quad , \quad x \mapsto (f_\beta)_x \circ (f_\alpha)_x^{-1}$$

heißen die **Übergangsfunktionen**.

B.6 Definition

Ein Bündelatlas eines Vektorbündels (E, π, B) über einer C^k -Mannigfaltigkeit heißt **differenzierbar** (C^k), wenn alle Übergangsfunktionen C^k sind.

Ein **differenzierbares** Vektorraumbündel ist ein Paar (ξ, ϕ) bestehend aus $\xi = (E, \pi, B)$ und einem maximal differenzierbaren Bündelatlas ϕ für E .

B.7 Bemerkung Damit wird der Totalraum E eines k -dimensional differenzierbaren Vektorbündels über einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit M in kanonischer Weise eine $(n + k)$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. $\diamond$

Wir betrachten zwar hauptsächlich differenzierbare Vektorraumbündel, können aber auch an Vektorbündel über "unendlich-dimensionalen Mannigfaltigkeiten" denken.

B.8 Bemerkung (Klassifikation von Vektorbündeln)

Eine interessante Frage ist die nach den "Verdrehungen" eines Vektorbündels. Man will beispielsweise wissen:

- Wann ist ein Vektorbündel trivial?

- Wie kann man entscheiden, ob zwei Vektorbündel über der gleichen Basis isomorph sind?

Dies geschieht unter Benutzung der Grassmann-Manigfaltigkeiten der k -dimensionalen Unterräume des $\mathbb{R}^\infty$, siehe HIRSCH, [\[Hi, Chapter 4.3\]](#). $\diamond$

B.9 Aufgabe Zeigen Sie, dass es für $n \in \mathbb{N}$ genau zwei Isomorphieklassen von Vektorbündeln mit Rang n über der Basis $\mathbb{S}^1$ gibt. $\diamond$

Literatur

- [AM] Ralph Abraham, Jerrold E. Marsden: *Foundations of Mechanics*, second edition, fourth printing. Reading: Benjamin/Cummings, 1982.
- [AR] Ralph Abraham, Joel Robbin: *Transversal mappings and flows*. New York: WA Benjamin, 1967.
- [AVG] Vladimir Arnold, Alexander Varchenko, Sabir Goussein-Zadé: *Singularités des applications différentiables, Tome I*. Éditions Mir. Moskau, 1986
- [Ban] V. Bangert: *On the existence of closed geodesics on two-spheres*. International Journal of Mathematics **4**, 1–10 (1993)
- [Bo1] Raoul Bott: *The Stable Homotopy of the Classical Groups*. Annals of Mathematics **70**, 313–337 (1959)
- [Bo2] Raoul Bott: *Lectures on Morse theory, old and new*. Bulletin of the American Mathematical Society **7.2**, 331–358 (1982)
- [Bo3] Raoul Bott: *Morse theory indomitable*. Publications mathématiques de l'I.H.É.S. **68**, 99–114 (1988)
- [BJ] Theodor Bröcker; Klaus Jänich: *Einführung in die Differentialtopologie*. Springer, 1990
- [CFKS] Hans Cycon, Richard Froese, Werner Kirsch, Barry Simon: *Schrödinger Operators with Application to Quantum Mechanics and Global Geometry*. Texts and Monographs in Physics. Berlin: Springer 1987
- [DFN] Boris Dubrovin, Anatoli Fomenko, Sergei Novikov: *Modern Geometry – Methods and Applications*, Band I–III. Berlin: Springer, 1992
- [El] Jürgen Elstrodt: *Maß- und Integrationstheorie*. 7. Auflage. Berlin: Springer 2011
- [GHL] Sylvestre Gallot, Dominique Hulin, Jacques Lafontaine: *Riemannian Geometry*. Berlin: Springer, 1993
- [GG] Martin Golubitsky, Victor Guillemin: *Stable mappings and their singularities*. Graduate Texts in Mathematics **14**, Springer, 1973
- [GP] Victor Guillemin, Alan Pollack: *Differential Topology*. Prentice-Hall: American Mathematical Society, 1974

- [Gr] Eric L. Grinberg: *On the smoothness hypothesis in Sard's Theorem*. The American Mathematical Monthly **92**, 733–734 (1985).
- [Ha] Allan Hatcher: *Algebraic Topology*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002
- [Hi] Morris Hirsch: *Differential Topology*. Graduate Texts in Mathematics **33**, Springer, 2012
- [Hirz] Friedrich Hirzebruch: *Divisionsalgebren und Topologie*. In: Ebbinghaus, H.-D. et al: *Zahlen*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1992
- [Kli] Wilhelm Klingenberg: *Riemannian Geometry*. (De Gruyter Studies in Mathematics 1), 2nd Edition. Berlin: de Gruyter, 1995
- [KMS] Ivan Kolár, Peter Michor, Jan Slovák: *Natural operations in differential geometry*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1993
- [Ko] Antoni Kosinski: *Differential Manifolds*. Academic Press, 1993
- [LF] Lasar Lusternik, Abram Fet: *Variational problems on closed manifolds*. Dokl. Akad. Nauk. SSSR **81**, 17–18 (1951); Amer. Math. Soc. Transl. **90** (1953)
- [Mi] John Milnor: *Morse Theory*. Princeton University Press, 1973
- [MW] John Milnor, David W. Weaver: *Topology from the differentiable viewpoint*. Princeton University Press, 1997.
- [Morr] Charles B. Morrey, Jr: *The Analytic Embedding of Abstract Real-Analytic Manifolds*, Annals of Mathematics **68**, 159–201 (1958)
- [AMo] Anthony P. Morse: *The Behavior of a Function on Its Critical Set*. Annals of Mathematics **40**, 62–70 (1939)
- [MMo] Marston Morse: *The Calculus of Variations in the Large*. American Mathematical Society Colloquium Publication **18**, 1934.
- [Mu] James Munkres: *Topology – a first course*. Prentice-Hall 1974, 2. Auflage, 2000.
- [Ni] Liviu I. Nicolaescu: *An Invitation to Morse Theory*. Universitext. Springer 2007
- [Po] Lev Pontryagin: *Smooth manifolds and their applications in homotopy theory*. Amer. Math. Soc. Translations, Ser. 2, II, 1–114 (1959)

- [Sa] Arthur Sard: *The measure of the critical values of differentiable maps*. Bulletin of the American Mathematical Society **48**, 883–890 (1942)
- [Wh1] Hassler Whitney: *A function not constant on a connected set of critical points*. Duke Mathematical Journal **1.4** 514–517 (1935).
- [Wh2] Hassler Whitney: *The Self-Intersections of a Smooth n -Manifold in $2n$ -Space*. Annals of Mathematics **45**, 220–246 (1944)
- [Wh3] Hassler Whitney: *On Singularities of Mappings of Euclidean Spaces. I. Mappings of the Plane into the Plane* Annals of Mathematics **62**, 374–410 (1955)
- [Wi] Edward Witten: *Supersymmetry and Morse theory*. J. Differential Geometry **17**, 661–692 (1982)

Index

- allgemeine lineare Gruppe 17
- Atlas 10
 - Bündelatlas 114
 - maximaler 11
 - natürlicher 28
- Auswertungsabbildung 73
- Betti-Zahl 92, 109
 - relative 95
- Deformationsretrakt 88
- de Rham–Kohomologiegruppe 109
- differenzierbare Struktur 11
- Eigentliche Abbildung 15
- Einbettung 34, 35
- Einheits-Tangentialbündel 42
- Euler-Charakteristik 51, 84
- exakte Sequenz 93
- Exponentialabbildung 101
- Falte 7, 80
- Faserabbildung 113
- Fußpunkt 26
- generisch 62
- Geodäte 100
- geodätisch vollständig 101
- Gerade
 - kreuzende 15
 - lange 32
 - mit zwei Ursprüngen 32
- Gradient 86
- Hausdorff–Maß 53
- Hessesche 82
- Homotopieäquivalenz 88
- Immersion 34
- Index 82
- Jets 45
- Karte 10
 - für berandete Mannigfaltigkeit 21
 - Kartenwechsel 10
 - natürliche 28
- Kategorien 23
- konjugierter Punkt 103
- Kotangentialbündel 31
- kritischer Punkt 37
 - nicht degenerierter 82
- Lie–Gruppe 17
- lokale Darstellung 23
- lokal endlich 32
- lokal Lipschitz-stetig 53
- mager 54
- Mannigfaltigkeit
 - berandete 21
 - differenzierbare (C^r –) 11
 - disjunkte Vereinigung 14
 - geschlossene 22
 - Grassmann- 19
 - kartesisches Produkt 14
 - mit Ecken 69
 - orientierbare 11
 - Stiefel- 71
 - topologische 10
- Maß Null 52
- Möbius–Band 13
- Morse-Funktion 82
 - nicht resonante 86
 - perfekte 84
 - vollständige 82
- Morse-Koordinaten 87
- Normalenbündel 112
- Nullschnitt 26
- orientierbar 11, 29
- Palais–Smale-Bedingung 104
- Peano–Kurve 3
- Poincaré-Lemma 109
- Poincaré-Polynom 94
- projektiver Raum 16, 85, 111
- regulärer Punkt / Wert 37
- residuell 54

- Retraktion [59](#)
- Satz
 - Baire [54](#)
 - Einbettung [43](#)
 - Fixpunktsatz von Brouwer [60](#)
 - Globalisierungssatz [65](#)
 - Hopf und Rinow [102](#)
 - vom Igel [29](#), [61](#)
 - Jet-Transversalitätssatz [75](#)
 - Morse–Lemma [87](#)
 - Morse und Sard [54](#)
 - Stabilitätssatz [47](#)
 - Transversalitätssatz [62](#)
 - vom regulären Wert [38](#)
 - Whitney [39](#), [40](#)
- singuläre Homologie [91](#)
 - relative [93](#)
- Sphäre [9](#), [84](#)
 - Betti-Zahlen [110](#)
 - Tangentialbündel [29](#)
 - Tangentialraum [25](#)
- Spitze [7](#), [81](#)
- stabile Mannigfaltigkeit [87](#)
- stereographische Projektion [12](#)
- Stratifizierung [69](#)
- Submersion [34](#)
- Tangentialabbildung [27](#)
- Tangentialbündel [26](#)
- Tangentialvektor [26](#)
- Topologie
 - schwache = kompakt-offene [44](#)
 - starke = Whitney [44](#)
- topologische Gruppe [17](#)
- Torus [9](#), [62](#), [83](#)
- transversal [38](#)
- Transversalität zweier Untermannigfaltigkeiten [68](#)
- Untermannigfaltigkeit
 - des $\mathbb{R}^n$ [9](#)
 - einer Mannigfaltigkeit [21](#), [35](#)
- Vektorraumbündel [112](#)
- Vektorfeld [26](#), [51](#)
- Zerlegung der Eins [32](#)

