Ankündigung der Vorlesung

Regularitätstheorie elliptischer partieller Differentialgleichungen

Cornelia Schneider *schneider@math.fau.de*

Wintersemester 2019/20

Inhalt:
- elliptische partielle Differentialgleichungen
- Variationsformulierung
- Funktionenräume
- Regularität der Lösungen in Sobolev- und Besovräumen

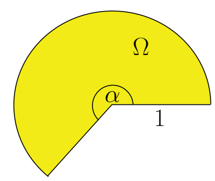
Beschreibung: Als Standardbeispiel einer elliptischen partiellen Differentialgleichung betrachten wir die Poisson-Gleichung mit Dirichlet-Randwerten

$$\begin{aligned} \Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^d, \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

welche die Auslenkung einer Membran beschreibt. Hierbei interpretiert man die rechte Seite f als eine von außen einwirkende Kraft. Die gesuchte Lösung u beschreibt die Auslenkung der Membran. Die Regularitätstheorie beschäftigt sich mit der Frage wie „glatt“ die gesuchte Lösung u ist.
Dies hängt allgemein maßgeblich von der Struktur des Gebietes Ω, den Koeffizienten der Gleichung sowie der Glattheit der rechten Seite f ab. Für glatte Gebiete und hinreichend glatte Koeffizienten hat man einen Shift um 2 in der Skala der Sobolevräume mit gebrochener Glattheit, d.h.

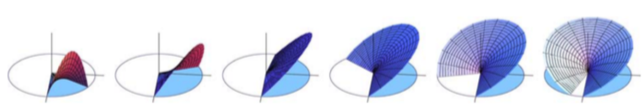
$$f \quad \text{Glattheit} \quad \alpha \qquad \Longrightarrow \qquad u \quad \text{Glattheit} \quad \alpha + 2.$$

Für Lipschitzgebiete ist dies nicht mehr der Fall. Betrachtet man z.B. die obige Poisson-Gleichung auf einem Kreissegment mit Öffnungswinkel $\alpha \in [0, 2\pi]$, rechter Seite $f = 0$ und Randwerten $g = \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\varphi\right)$, so ist die Lösung in Polarkoordinaten gegeben durch



$$u = r^{\frac{\pi}{\alpha}} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\varphi\right), \qquad r \in [0, 1], \quad \varphi \in [0, \alpha].$$

Die folgende Abbildung skizziert die Lösung für Öffnungswinkel $\alpha = 1, 2, \ldots, 6$.



Die Ecke im Ursprung führt bei größer werdendem Winkel α zu einem singulären Verhalten des Gradienten. Im Falle eines Kreises mit Schlitz ($\alpha = 2\pi$) verhält sich die Lösung nahe des Ursprungs wie $r^{1/2}$ und es folgt in diesem Fall für die Regularität in der Sobolev-Skala

$$u \quad \text{Glattheit} < \frac{3}{2} \qquad \text{(selbst bei glatter rechter Seite } f \in C^\infty).$$

Dagegen lässt sich zeigen, dass die Regularität der Lösung in der Skala von Besovräumen wesentlich höher ist (hier erfolgt wieder ein Shift um 2), was in der Anwendung den Nutzen adaptiver Verfahren (nichtlineare Approximation) zur Lösung von elliptischen Problemen auf Lipschitz Gebieten rechtfertigt.

Vorkenntnisse: Grundvorlesungen Analysis sind wünschenswert. Die Vorlesung richtet sich an Bachelor- und Masterstudenten.

Literatur

[Hack96] W. Hackbusch. *Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen.* Teubner Studienbücher, 1996.

[KMR97] V. Kozlov, V. Maz'ya und J. Rossmann. *Elliptic boundary value problems in domains with point singularities.* . American Mathematical Society, 1997.

[Gris85] P. Grisvard. *Elliptic boundary value problems in domains with point singularities.* Pitman, Boston, 1985.