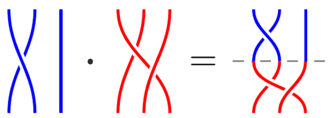
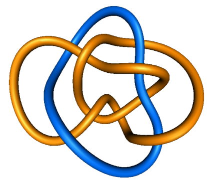
Seminar zum Querschnittsmodul Topologie, Wintersemester 2021/22

# Niedrigdimensionale Topologie: Zopfgruppen & Knotentheorie

Gandalf Lechner





Dieses Seminar befasst sich mit zwei miteinander verwandten Themen der niedrigdimensionalen Topologie: Zöpfen und Knoten/Verschlingungen. Diese erscheinen zunächst als geometrische Gebilde, wie sie in den Bildern oben links (Zöpfe) bzw. rechts (Verschlingung = Knoten mit mehreren Komponenten) dargestellt sind. Man stellt sich hier die Stränge/Fäden als beliebig elastisch vor und unterscheidet nicht zwischen Objekten, die durch stetige Deformationen auseinander hervorgehen, so dass jede Grafik ein zugrundeliegendes topologisches Objekt darstellt. Eine zentrale Frage ist, eine mathematische Beschreibung von Eigenschaften dieser Objekte zu finden, die ebenfalls unter stetigen Deformationen invariant sind, also Eigenschaften der zugrundeliegenden topologischen Zöpfe/Knoten reflektieren.

Im Laufe der Vorträge werden Sie viele Aspekte von topologischen Zöpfen und Knoten kennenlernen, die mit diversen anderen Themen in Zusammenhang stehen. Zöpfe bilden eine Gruppe (siehe Bild oben links für die Idee der Komposition in dieser Gruppe), die sogenannte Zopfgruppe, so dass hier ein Bezug zur Gruppentheorie entsteht. Das Studium der Struktur der Zopfgruppen und ihrer Darstellungen hat Verbindungen zur Algebra und Darstellungstheorie, und die Charakterisierung von Zopfgruppen als Fundamentalgruppen bezieht sich direkt auf die Topologie-Vorlesung. Bei der Diskussion von Knoteninvarianten werden wir aber auch auf kombinatorische Aspekte und Anknüpfungspunkte mit Operatoralgebren stoßen (in diesem Zusammenhang wurde das berühmte Jones-Polynom ursprünglich entdeckt). Anwendungen gibt es unter anderem in der Kryptographie, Biologie (DNA), und der Quantenphysik. Der Fokus des Seminars wird aber auf der Seite der reinen Mathematik liegen.

Für einen ersten Eindruck der Thematik empfiehlt sich ein Blick in die Vorworte der angegebenen Bücher oder den für Abiturienten geschriebenen untechnischen Artikel [Lec21].

## Organisatorisches

In diesem Seminar werden Sie sich selbstständig neue und ungewöhnliche mathematische Themen erarbeiten und dann in einem Vortrag präsentieren und diskutieren. Das wird einerseits Ihre Kommunikationsfähigkeiten in freiem Sprechen und durch Vorbereitung geeigneter Handouts trainieren und Sie andererseits an spannende Fragen mathematischer Forschung heranführen. Für diejenigen, die die Topologie-Vorlesung gehört haben, gibt es auch die Möglichkeit, Inhalte des Querschnittsmoduls Topologie zu vertiefen. Bei einigen Vorträgen gibt es weiterhin die Möglichkeit zum Verfassen von thematisch angegliederten Bachelorarbeiten. Vorträge, die sich dazu eignen, sind mit (B) gekennzeichnet.

### Teilnahme am Seminar und Verteilung der Vorträge

Das Seminar steht allen interessierten Studierenden offen. Die erforderlichen Vorkenntnisse variieren etwas von Vortrag zu Vortrag. Wenn Voraussetzungen vorliegen, die über die Grundvorlesungen hinausgehen, ist dies unter dem Vortragsthema vermerkt. Bitte kontaktieren Sie mich bis

**spätestens 17. September 2021**

wenn Sie teilnehmen möchten und teilen Sie mir mit, für welches Vortragsthema Sie sich interessieren. Ich werde die Themen dann verteilen. Ich habe aktuell noch keine FAU Email-Adresse, werde ab September aber eine haben. Halten Sie auf den Seiten des Departments danach Ausschau (Lehrstuhl Operatoralgebren & Mathematische Physik), oder verwenden Sie stattdessen LechnerG@cardiff.ac.uk. Wenn ich in Erlangen angekommem bin, wird auch eine Website für diese Veranstaltung angelegt werden.

### Erwartungen an die TeilnehmerInnen

Ihre Studienleistung zum Seminar besteht aus a) einem Seminarvortrag von maximal 90 Minuten Dauer (inklusive Fragen/Diskussion), b) einer schriftlichen Ausarbeitung von maximal 10 Seiten Länge zu Ihrem Vortragsthema, und c) einer mündlichen Prüfung von ca. 15 Minuten Dauer.

Die Ausarbeitung ist spätestens eine Woche vor dem Vortrag in elektronischer Form bei mir einzureichen. Ich werde sie korrigieren und sie haben dann noch die Chance, Fehler auszubessern und eine korrigierte Version zur Benotung einzureichen. Ihre fertige Ausarbeitung wird den anderen TeilnehmerInnen des Seminars wie ein ausführliches Vorlesungsskript zur Verfügung gestellt.

Sollten Sie dieses Seminar als Bachelorseminar belegen und darin eine Bachelorarbeit anfertigen, besteht ihre Studienleistung aus a) einem Seminarvortrag von maximal 90 Minuten Dauer (inklusive Fragen/Diskussion) und b) Ihrer Bachelorarbeit (maximal 20 Seiten ohne Literaturangaben, Zusammenfassung und Deckblatt). Die Bachelorarbeit ist benotet, das Bachelorseminar eine unbenotete separate Prüfung. Sie können die

Bachelorarbeit vor der endgültigen Abgabe bei mir einreichen, und ich werde sie korrigieren. Sie haben dann noch die Chance, Fehler zu verbessern und eine zweite, korrigierte Version zur Benotung einzureichen. Die Bachelorarbeit muss beim Prüsungsamt angemeldet werden. Nährere Informationen dazu, die notwendigen Formulare und das Template für die Bachelorarbeit erhalten Sie auf der Webseite des Prüfungsamts bzw. des Studierendenservicezentrums. Unabhängig davon teilen Sie mir bitte frühzeitig mit, wann Sie Ihre Arbeit abgeben möchten.

Auch an den Terminen, an denen Sie nicht vortragen, wird eine aktive Teilnahme erwartet. Stellen Sie Fragen während der Vorträge, insbesondere wenn etwas unklar ist – das hilft Ihnen, dem Vortragenden und allen TeilnehmerInnen des Seminars ganz entscheidend.

## Tipps für die Vorbereitung und die Vorträge

- Ein Seminarvortrag muss detailliert vorbereitet werden. Das dauert meist viel länger als erwartet, planen Sie also viel Zeit dafür ein.
- In einem ersten Schritt müssen Sie selbst Ihr Seminarthema genau verstehen. In einem zweiten Schritt müssen Sie dann überlegen, wie Sie diese Inhalte am besten vermitteln. Merken Sie sich also, welche Punkte Ihnen beim Literaturstudium zuerst unverständlich vorgekommen sind, und erklären Sie diese Aspekte dann besonders sorgfältig in Ihrem Vortrag.
- Planen Sie im Vorfeld, welche Punkte am wichtigsten sind und auf keinen Fall ausgelassen werden können (z.B. zentrale Definitionen und Ergebnisse), und welche Aspekte Sie vielleicht nur mündlich ohne Tafelanschrieb erwähnen können (z.B. langweilige Rechnungen oder Bemerkungen, die im Rest des Vortrags keine Rolle spielen).
- Sie sollten Ihren Vortrag auf jeden Fall mindestens einmal mit einem/r Kommilitonen/in als Publikum als Probevortrag halten. Das wird Ihnen zeigen, inwiefern Ihre zeitliche Planung realistisch ist und außerdem eventuelle Schwächen/Unklarheiten in der Präsentation offenlegen.
- Bringen Sie in Ihrem Vortrag Beispiele zu den von Ihnen behandelten Konzepten, das hilft für das Verständnis meist sehr.
- Die meisten Vorträge behandeln Themen, die eine interessante grafische/diagrammatische Darstellung erlauben. Planen Sie sorgfältig eine geeignete Präsentation dieser grafischen Elemente in Ihrem Vortrag.
- Sie alle haben schon eine Menge Vorträge/Vorlesungen gehört und wissen deshalb aus Erfahrung, was einen guten Vortrag ausmacht – orientieren Sie sich für Ihren eigenen Vortrag daran.
- Wir gehen davon aus, dass das Seminar als Präsenzveranstaltung angeboten werden kann. Sollte dies pandemiebedingt nicht möglich sein (was ich nicht hoffen

will) wird das Seminar online stattfinden. Für diesen Fall müssten Sie dann eine digitale Präsentation erstellen.

## Betreuung

Wenn Sie beim Literaturstudium zur Vorbereitung Ihres Vortrags auf unüberwindliche Hindernisse/Fragen stoßen, können Sie mich kontaktieren, um diese Unklarheiten in einem Gespräch zu klären. Bitte teilen Sie mir dazu vorab per Email genau mit, was Ihre Fragen sind. Für einige anspruchsvollere Vorträge rate ich dringend zu einer solchen Vorbesprechung; das ist beim Vortragsthema dann jeweils vermerkt.

## Mögliche Vortragsthemen

Einige dieser Themen sind für den logischen Ablauf des Seminars unerlässlich, andere optional, siehe dazu das Diagramm auf Seite 11 für die thematischen Abhängigkeiten der einzelnen Vorträge untereinander. Wenn Sie über ein nicht aufgeführtes passendes Thema vortragen wollen, lassen Sie es mich wissen.

### 1 Zopfgruppen I: Einführung

In diesem einführenden Vortrag werden geometrische Zöpfe und Zopfdiagramme (geeignete ebene Projektionen von dreidimensionalen geometrischen Zöpfen auf die Ebene) definiert. Durch die Einführung der Äquivalenzrelation Isotopie und Quotientenbildung erreicht man das für das ganze Semester zentrale Konzept eines (topologischen) Zopfes als eine Äquivalenzklasse geometrischer Zöpfe unter Isotopie. Es wird dann gezeigt, dass die Menge der topologischen Zöpfe die Struktur einer Gruppe hat. Diese Zopfgruppe kann auch als eine Fundamentalgruppe eines bestimmten topologischen Raumes verstanden werden.

*Voraussetzungen:* Topologie inklusive Fundamentalgruppe

- [KT08]: Kapitel 1.2 ohne Abschnitt 1.2.3, bis inklusive Lemma 1.11. Beachten Sie, dass in diesem Buch in Kapitel 1.1 zuerst eine alternative (äquivalente) Definition der Zopfgruppe gegeben wird, die für diesen Vortrag aber noch keine Rolle spielt.
- Die Verbindung zu Fundamentalgruppen findet sich in [Bir74] Abschnitt 1.1, siehe auch die kurzen Bemerkungen in [KT08, Abschnitt 1.4.3].
- Für einen elementaren Zugang zur Zopfgruppe siehe auch [Kus05] S. 35–39 (exklusive Satz 3.1.7).

### 2 Zopfgruppen II: Generatoren und Relationen

In diesem Vortrag wird eine alternative Definition der Zopfgruppe $B_n$ gegeben, die auf einer Präsentation (Generatoren und Relationen) beruht und vorerst keine Verbindung mit geometrischen oder topologischen Zöpfen zu haben scheint. Je nach Hörerschaft sollte zuerst kurz etwas zu Gruppenpräsentationen im Allgemeinen gesagt werden. Das

Hauptziel dieses Vortrags ist es, die Äquivalenz dieser algebraischen Definition der Zopfgruppe durch Generatoren und Relationen mit der geometrisch-topologischen Definition aus Vortrag 1 zu zeigen. Dazu werden sogenannte Reidemeister-Bewegungen von Zöpfen studiert.

*Voraussetzungen:* Gruppenpräsentationen

- In [KT08] Kapitel 1.1.1 findet sich die Definition der Standard-Präsentation der Zopfgruppe.
- Die Reidemeister-Bewegungen und der Beweis der Äquivalenz der beiden Definitionen sind in [KT08] Theorem 1.6 (nur die Hauptideen des Beweises bringen) und Theorem 1.12. Eine sehr knappe Fassung findet sich in [Kus05] Satz 3.1.7.

## 3 Die reine Zopfgruppe und das Zentrum der Zopfgruppe

Ausgehend von der Definition der Zopfgruppe in Vortrag 2 lässt sich ein natürlicher Gruppenhomomorphismus von $B_n$ auf die symmetrische Gruppe $S_n$ angeben, dessen Kern die reine Zopfgruppe $P_n$ genannt wird. Diese Untergruppe von $B_n$ ist hilfreich, um verschiedene gruppentheoretische Eigenschaften der Zopfgruppe zu beweisen. Insbesondere lässt sich das Zentrum von $B_n$ berechnen und es folgt, dass $B_n$ und $B_m$ für $n \neq m$ nicht isomorph sind.

*Voraussetzungen:* Gruppentheorie: Gruppenhomomorphismen, symmetrische Gruppe, Zentrum einer Gruppe

- Erinnern Sie nach der Definition des Homomorphismus $B_n \to S_n$ an die Standard-Präsentation der symmetrischen Gruppe. Beweisen Sie, dass $B_n$ für $n > 2$ nicht abelsch ist (Lemma 1.3 in [KT08].)
- Folgen Sie [KT08] Kapitel 1.3, um die reine Zopfgruppe $P_n$ und den fundamentalen Zopf $\Delta_n$ zu definieren. Beweisen Sie dann die einfache Hälfte ($\Delta_n^2 \in Z(B_n)$) von Theorem 1.24 in [KT08]. Je nach Zeit können Sie andere interessante Resultate wie Kor. 1.19 und Kor. 1.25 ohne Beweis angeben.

## 4 Das Wortproblem in der Zopfgruppe

Die Nichteindeutigkeit der Darstellung eines Gruppenelements als Produkt von Generatoren und inversen Generatoren führt auf das sogenannte Wortproblem. Geometrisch gesehen geht es um die Frage, ob ein gegebener Zopf $b \in B_n$ "glatt gekämmt" werden kann oder nicht. In diesem Vortrag soll eine Lösung des Wortproblems diskutiert werden, die auf Wirkungen von Zöpfen als Automorphismen von freien Gruppen beruht. Diese Sichtweise ergibt sich, wenn man die Fundamentalgruppe des Komplements eines ins Unendliche verlängerten Zopfes betrachtet.

*Voraussetzungen:* Topologie inklusive Fundamentalgruppe, freie Gruppen

- Im Sinne eines für alle Teilnehmenden zugänglichen Vortrags sollte kurz die Definition der Fundamentalgruppe und von freien Gruppen gebracht werden.

- In [Sti93] Abschnitt 7.3.5 finden Sie eine anschauliche Erklärung, wie die Zopfgruppe $B_n$ durch Automorphismen auf der freien Gruppe $F_n$ wirkt, vgl. auch Thm. 1.31 in [KT08].
- Diskutieren Sie anhand von geeigneten Beispielen, wie diese abstrakte Sichtweise zu einer konkreten Lösung des Wortproblems führt.

## 5 Knotentheorie: Einführung

Nachdem wir Zopfgruppen kennengelernt haben, werden in diesem Vortrag Knoten als geschlossene überkreuzungspunktfreie Kurven im $\mathbb{R}^3$ und Verschlingungen als mehrkomponentige Knoten eingeführt. Analog zu Zöpfen ist zwischen geometrischen Knoten, Knotendiagrammen, und (topologischen) Knoten als Äquivalenzklassen von geometrischen Knoten unter Isotopie zu unterscheiden. Diskutieren Sie, wie man pathologische "wilde" Knoten ausschließt und definieren Sie orientierte Knoten. Bringen Sie einige Beispiele von Knoten: Unknoten, Kleeblattknoten, Hopf-Verschlingung, Achterknoten. Formulieren Sie dann den Satz von Reidemeister. Da er sehr ähnlich zu dem bereits für Zöpfe gezeigten Satz in Vortrag 2 ist, genügt es hier, kurz auf die neuen Elemente in seinem Beweis hinzuweisen.

Gegeben zwei geometrische Knoten (oder Verschlingungen) $K$ und $K'$, so ist eine Hauptfrage in der Knotentheorie, zu entscheiden, ob $K$ und $K'$ isotop sind. In diesem Zusammenhang werden Knoteninvarianten eingeführt und als Beispiel die Verschlingungszahl von orientierten $2$-Verschlingungen diskutiert, was die Stärke des Satzes von Reidemeister demonstriert.

- Folgen Sie Kapitel 1 des Skriptes [Kus05]. Zusätzlich können Sie auch [Liv93] Kapitel 2 und Kapitel 3.1 zu Rate ziehen.

## 6 Knoten-Invarianten: $3$-Färbbarkeit und Determinante

In diesem Vortrag sollen zwei Invarianten von nicht orientierten Verschlingungen präsentiert werden, die einen kombinatorischen Charakter haben. Die erste Invariante ist die Eigenschaft, ein Diagramm der gegebenen Verschlingung auf bestimmte Art und Weise mit $3$ Farben einzufärben. Mit Hilfe des Satzes von Reidemeister zeigt man, dass diese Eigenschaft nicht von dem gewählten Diagramm abhängt, also wirklich eine Invariante definiert.

Diese Invariante lässt sich zu einer sehr viel stärkeren numerischen Invariante, der Determinante einer Verschlingung, verallgemeinern. Dazu formuliert man zunächst 3-Färbbarkeit als die Lösbarkeit eines gewissen Gleichungssystems modulo 3, wobei jede Gleichung einem Kreuzungspunkt des betrachteten Diagramms entspricht und die Zahlen $0, 1, 2$ die 3 Farben ersetzen. Man kann dann statt mit $3$ mit einer beliebigen ungeraden Primzahl $p$ arbeiten und Methoden der Linearen Algebra verwenden, um die Lösbarkeit mit Hilfe einer Determinante zu entscheiden.

*Voraussetzungen:* Restklassen modulo einer Primzahl $p$ (Erinnerung: $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ist ein Körper) und Ergebnisse aus der Linearen Algebra über Determinanten.

- Eine sehr zugängliche Beschreibung von 3-Färbbarkeit und Determinante findet sich in dem Buch von Livingston [Liv93], Kapitel 3.2–3.4. Einige Teile der Beweise sind in diesem Buch allerdings als Übungen formuliert und nicht im Detail ausgeführt.

## 7 Fundamentalgruppen von Knotenkomplementen

Eine direkt auf der Topologie-Vorlesung aufbauende Knoteninvariante kann wie folgt definiert werden: Gegeben einen Knoten $K \subset \mathbb{R}^3$, betrachten wir sein Komplement, den topologischen Raum $\mathbb{R}^3 \backslash K$, und dessen Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{R}^3 \backslash K)$. In diesem Vortrag wird eine Methode hergeleitet, eine Präsentation von $\pi_1(\mathbb{R}^3 \backslash K)$ anzugeben. Die Herleitung beruht wesentlich auf dem Satz von Seifert und van Kampen, so dass dieser Vortrag von jemanden übernommen werden sollte, der auch den zweiten Teil der Topologie-Vorlesung gehört hat. Im Sinne der Hörerschaft sollte kurz das Konzept der Fundamentalgruppe und der Satz von Seifert und van Kampen in einer möglichst elementaren Form wiederholt werden.

Ziel des Vortrags ist es, die Wirtinger-Präsentation von $\pi_1(\mathbb{R}^3 \backslash K)$ zu beweisen und mit einigen Beispielen zu illustrieren. So lässt sich insbesondere zeigen, dass die Hopf-Verschlingung nicht trivial ist. Falls Zeit ist, kann auch gezeigt werden, dass im Falle des Kneeblattknotens die Fundamentalgruppe isomorph zu der Zopfgruppe auf drei Strängen ist.

*Voraussetzungen:* Topologie inklusive Fundamentalgruppe und Satz von Seifert und van Kampen

- [Sti93] Abschnitt 4.2.3–4.2.5; siehe auch Abschnitt 3.4.1 für den Satz von Seifert und van Kampen.
- Für die Identifikation der Fundamentalgruppe des Komplements des Kneeblattknotens ist [KT08] Abschnitt 1.1.4 hilfreich.

## 8 Von Zöpfen zu Knoten: Der Satz von Alexander

Ziel dieses Vortrags ist, die bis hier separat betrachteten Themenkomplexe Zöpfe und Knoten/Verschlingungen zusammenzuführen. Zu diesem Zweck wird eine Abbildung von der Menge *aller* Zöpfe (d.h. der disjunkten Vereinigung aller Zopfgruppen $B_n$, $n \in \mathbb{N}$) in die Menge aller Verschlingungen konstruiert (Abschluss eines Zopfes). Hauptziel dieses Vortrags ist es, zu beweisen, dass diese Abbildung surjektiv ist (Satz von Alexander), dass also jede Verschlingung als Abschluss eines Zopfes (mit geeigneter Strangzahl) geschrieben werden kann. Außerdem kann ein expliziter Algorithmus angegeben werden, der eine gegebene Verschlingung als Abschluss eines Zopfes realisiert.

- [KT08] Kapitel 2.3–2.4.
- Alexanders Theorem ist auch in Abschnitt 2.1–2.2 von [Bir74] diskutiert, die Beweisidee findet sich auch knapp in [Kus05] Seite 41.

## 9 Markov-Bewegungen und der Satz von Markov

Während im vorigen Vortrag gezeigt wurde, dass die durch Abschluss von Zöpfen gegebene Abbildung $\{\text{Zöpfe}\} \to \{\text{Verschlingungen}\}$ surjektiv ist, ist es leicht zu sehen, dass sie nicht injektiv ist. Es gibt zwei "Markov-Bewegungen" genannte Operationen auf der Menge aller Zöpfe, die den Abschluss eines Zopfes nicht ändern, wie in diesem Vortrag zuerst diskutiert werden sollte. Anschließend geht es darum, den Satz von Markov zu beweisen, demzufolge zwei Zöpfe mit dem gleichen Abschluss stets durch eine Kette von Markov-Bewegungen verbunden sind.

Der Beweis dieses Satzes ist ziemlich lang und Sie werden einige wesentliche Komponenten für den Vortrag auswählen müssen.

- Ein untechnischer Überblick über Markov-Bewegungen und Markovs Theorem findet sich in [Ada95] (p. 145-147) oder [Kau93] (p. 94).
- Für einen Beweis des Satzes von Markov verwenden Sie [BZ03] (Thm. 10.22) oder [KT08] (Thm. 2.8).

## 10 Die Kauffman-Klammer und das Jones-Polynom

Viele starke Invarianten ordnen (orientierten) Verschlingungen Polynome zu. In diesem Vortrag soll das Jones-Polynom definiert werden, das von Vaughan Jones in seinen Arbeiten zu von Neumann Algebren entdeckt wurde und die Knotentheorie revolutionierte. Der hier gewählte Zugang kommt allerdings ohne Operatoralgebren aus und beruht auf einem auf Louis Kauffman zurückgehenden kombinatorischen Algorithmus. Die Idee ist, zuerst die sogenannte Kauffman-Klammer durch induktive Zerlegung eines Knotendiagramms in immer kleinere und einfachere Diagramme zu definieren. Invarianz unter den Reidemeister-Bewegungen erfordert dann das Einführen einer Orientierung auf dem Diagramm und führt zu dem Jones-Polynom.

- [Kaw96] Kapitel 8 bis einschließlich Thm. 8.2.1. Diese Darstellung ist relativ knapp; Sie sollten darauf achten, in Ihrem Vortrag genügend Beispiele für die neuen Konzepte zu geben. Ziehen Sie auch weitere Texte wie z.B. [Kus05] (Kapitel 2) oder [Lec16] (Seite 46–57) hinzu.
- Diskutieren Sie die Definition des Jones-Polynoms und seine wichtigsten Eigenschaften (Thm. 8.1.12 und Thm. 8.2.1 in [Kaw96]). Als Beispiel können Sie das Jones-Polynom des Kneeblattknotens berechnen.

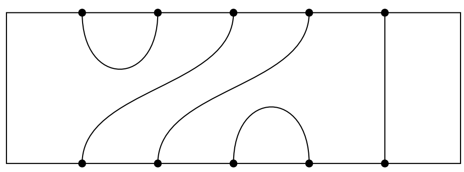
## 11 Anwendungen des Jones-Polynoms und das HOMFLY-Polynom

Dieser Vortrag baut direkt auf dem vorherigen auf und rückt die sogenannte Flechtrelation (auch Entwirrungsrelation, Englisch: *skein relation*) des Jones-Polynoms in den Fokus. Zuerst wird bewiesen, dass sich das Jones-Polynom eindeutig durch die Forderung der Flechtrelation und der Normierung auf dem Unknoten charakterisieren lässt. Dies vereinfacht die Berechnung von Jones-Polynomen wesentlich, wie an einigen Beispielen demonstriert werden soll. Weiterhin soll gezeigt werden, wie das Jones-Polynom für Unterscheidung von Knoten genutzt werden kann, und die Verallgemeinerung auf das HOMFLY-Polynom (ohne Beweis) erklärt werden.

- Beweisen Sie die Charakterisierung des Jones-Polynoms durch Flechtrelation und Normierung (Satz 2.3.6 und Übung 2.3.3 in [Kus05]). Verwenden Sie dann die Flechtrelation, um das Jones-Polynom eines Beispielknotens zu bestimmen.
- Diskutieren Sie das Verhalten des Jones-Polynoms unter Spiegelung und beweisen Sie, dass der Kneeblattknoten nicht spiegelsymmetrisch ist (Satz 2.3.10 in [Kus05]).
- Wenn Sie noch Zeit haben sollten, können Sie auch auf Summen von Knoten und Primknoten eingehen (Abschnitt 2.4 in [Kus05]). Dieses Thema eignet sich auch für eine Bachelorarbeit (B).
- Definieren Sie das HOMFLY-Polynom wie in Theorem 8.2.6 in [Kaw96] (ohne Beweis).

## 12 Die Temperley-Lieb Algebra (B)

Die Temperley-Lieb Algebra (oder Temperley-Lieb-Jones Algebra) ist eine assoziative endlichdimensionale Algebra $\mathrm{TL}_n(\delta)$, die von einer natürlichen Zahl $n$ und einem komplexen Parameter $\delta$ abhängt. Sie hat ihren Ursprung in Modellen der Statistischen Mechanik einerseits (Temperley & Lieb) und von Neumann Algebren andererseits (Jones). In diesem Vortrag soll die Temperley-Lieb Algebra auf zwei verschiedene Arten und Weisen definiert werden: Einmal durch Erzeuger und Relationen, und einmal durch gewisse Diagramme wie z.B. (für $n = 5$)



Es wird dann ein Isomorphismus zwischen diesen beiden Konstruktionen konstruiert.

Die algebraische Definition weist Ähnlichkeiten zu den Relationen der Zopfgruppe auf, und die diagrammatische Definition weist auf die Existenz eines Spur-Funktionals $\mathrm{tr} : \mathrm{TL}_n(\delta) \to \mathbb{C}$ hin, das analog zum Abschluss von Zöpfen definiert ist und eine Markov-Eigenschaft hat. Diese sogenannte Markov-Spur soll auch in diesem Vortrag etabliert werden.

*Voraussetzungen:* Definition einer Algebra durch Erzeuger und Relationen

- Der erste Teil (die beiden Definitionen der Temperley-Lieb Algebra und ihre Äquivalenz) können auf [Sun07] (Seite 2–15) basieren.
- Die Idee der Markov-Spur ist die folgende: Für ein Temperley-Lieb Diagramm $D \in \mathrm{TL}_n(\delta)$ definiert man $\mathrm{tr}(D) := \delta^{(\text{Anzahl geschlossener Loops im Abschluss von } D) - n}$.

Dieser Aspekt kann gut in einer angegliederten Bachelorarbeit ausgearbeitet werden. In jedem Fall sollte dieser Vortrag mit mir vorbesprochen werden.

## 13 Die Temperley-Lieb Algebra und das Jones-Polynom (B)

Aufbauend auf dem vorigen Vortrag wird nun die ursprüngliche Definition des Jones-Polynoms nachvollzogen. Zuerst wird eine allgemeine Strategie vorgestellt, wie man durch Darstellungen der Zopfgruppen in einer Algebra mit Markov-Spur Invarianten von Verschlingungen definieren kann. Das verwendet die unendliche Zopfgruppe $B_\infty$, eine leichte Verallgemeinerung der bisher betrachteten Zopfgruppen $B_n$.

Dann wird diese Strategie konkret am Beispiel der Temperley-Lieb Algebra umgesetzt, indem eine Darstellung von $B_\infty$ in $\mathrm{TL}_\infty(\delta)$ (einer unendlichen Variante der Temperley-Lieb Algebra aus dem vorigen Vortrag) definiert wird und bewiesen wird, dass die sich ergebende Invariante gleich dem Jones-Polynom ist.

- Dieses Thema ist durch die schwierigere Quellenlage anspruchsvoller, es bietet sich eine Koppelung an eine Bachelorarbeit an. Der Vortrag sollte auf jeden Fall mit mir vorbesprochen werden.
- Die unendliche Zopfgruppe wird z.B. in [Kus05] (S.42/43) beschrieben. Für die allgemeine Strategie der Definition von Invarianten durch Darstellungen der Zopfgruppe in einer Algebra mit Markov-Spur siehe die knappen Notizen in [Lec16] (Lemma 5.7). Für die konkrete Realisierung im Falle der Temperley-Lieb Algebra kann man sich an den ersten paar Zeilen auf Seite 105 von [Jon85] orientieren. Für den Beweis, dass die sich ergebene Invariante mit dem in Vortrag 10 definierten Jones-Polynom übereinstimmt verwende man die Charakterisierung durch die Flechtrelation.

## 14 Erweiterte Yang–Baxter-Operatoren und Knoteninvarianten (B)

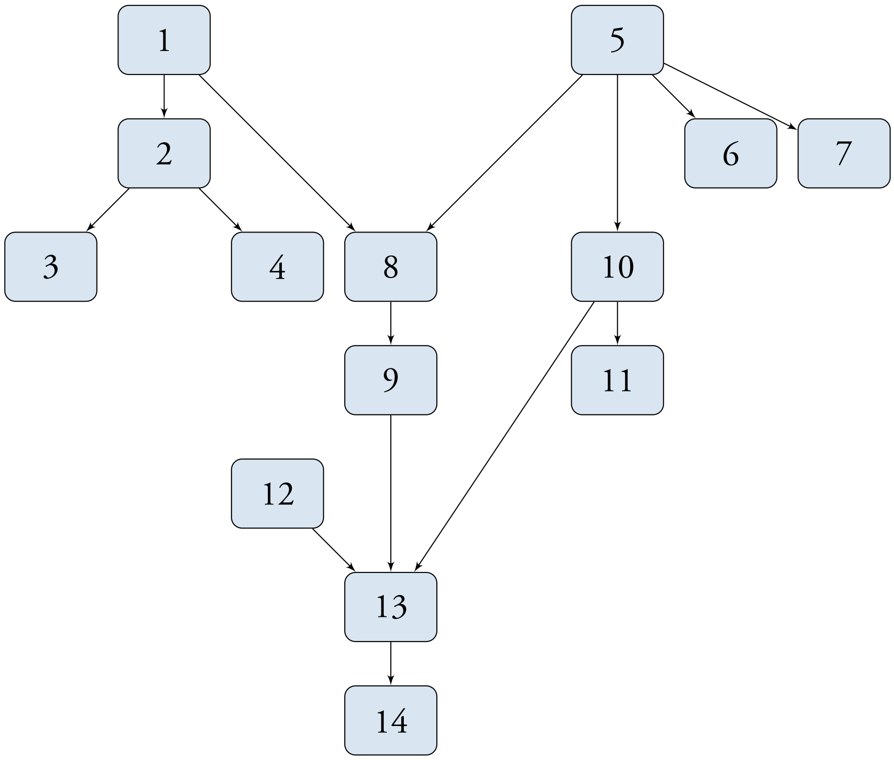
Im letzten Vortrag wird das Auffinden von vielen Knoteninvarianten mit Lösungen der sogenannten Yang-Baxter Gleichung verbunden. Dies ist eine aus der Physik stammende kubische Gleichung für eine lineare Abbildung $R : V \otimes V \to V \otimes V$, wobei $V$ ein Vektorraum ist. Zum Verständnis dieser Gleichung sollte zuerst an das Tensorprodukt $\otimes$ von Vektorräumen und Matrizen erinnert werden.

Es zeigt sich, dass jede invertierbare Lösung $R$ der Yang-Baxter Gleichung Darstellungen aller Zopfgruppen $B_n$, $n \in \mathbb{N}$, definiert. Um auf diesen Darstellungen eine Markov-Spur zu konstruieren, wird eine sogenannte Erweiterung von $R$ benötigt, dies ist eine lineare Abbildung $\mu : V \to V$, so dass insbesondere $R(\mu \otimes \mu) = (\mu \otimes \mu)R$ gilt. Die zugehörigen Knoteninvarianten können dann ähnlich wie im vorigen Vortrag definiert werden. Es gibt hier viel Material für eine angegliederte Bachelor- oder Masterarbeit.

*Voraussetzungen:* Tensorprodukte

- Eine gut lesbare Darstellung findet sich in Abschnitt 3.3 von [Kus05].

## Thematische Abhängigkeiten zwischen den Vorträgen




# Literatur


[Ada95] C. C. Adams. *Das Knotenbuch*. Spektrum, 1995.

[Bir74] J. Birman. *Braids, Links and Mapping Class Groups*. Princeton University Press, 1974. URL: https://www.jstor.org/stable/j.ctt1b9rzv3.

[BZ03] G. Burde und H. Zieschang. *Knots*. de Gruyter, 2003. URL: https://www.degruyter.com/document/doi/10.1515/9783110270785/html.

[Jon85] V. F. R. Jones. "A Polynomial Invariant for Knots via von Neumann Algebras". *Bull. Am. Math. Soc.* 12.1 (1985), 103–111. URL: https://metaphor.ethz.ch/x/2019/fs/401-3574-61L/files/Jones_original_1985.pdf.

[Kau93] L. Kauffman. *Knots and Physics*. World Scientific, 1993. URL: https://www.worldscientific.com/worldscibooks/10.1142/4256.

[Kaw96] A. Kawauchi. *A Survey of Knot Theory*. Birkhäuser, 1996. URL: https://www.springer.com/gp/book/9783764351243.

[KT08] C. Kassel und V. Turaev. *Braid Groups*. Springer, 2008. URL: https://www.springer.com/gp/book/9780387338415.

[Kus05] D. Kussin. *Vorlesung Knoten*. 2005. URL: http://www-math.uni-paderborn.de/~dirk/Notes/knoten.pdf.

[Lec16] G. Lechner. "Knots - Lecture Notes". 2016. URL: http://gandalflechner.eu/wp-content/uploads/2021/07/Knots-2016.pdf.

[Lec21] G. Lechner. “Zopfgruppen, die Yang-Baxter Gleichung, und Unterfaktoren”. *Snapshots of modern mathematics from Oberwolfach* 5 (2021). URL: https://publications.mfo.de/handle/mfo/3872.

[Liv93] C. Livingston. *Knot Theory*. Math. Assoc. of America, 1993. URL: https://www.jstor.org/stable/10.4169/j.ctt5hh90k.

[Sti93] J. Stillwell. *Classical Topology and Combinatorial Group Theory*. Springer, 1993. URL: https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4612-4372-4.

[Sun07] V. Sunder. “The Temperley-Lieb algebra”. 2007. URL: https://www.imsc.res.in/~sunder/iitb.pdf.

## Wörterbuch

Um Ihnen das Studium der in der Regel englischsprachigen Literatur zu erleichtern, liste ich hier Übersetzungen einiger nur selten benutzter Begriffe auf.

- ambient isotopy — Umgebungsisotopie
- link — Verschlingung
- linking number — Verschlingungszahl
- skein relation — Flechtrelation oder Entwirrungsrelation
- writhe — Windungszahl