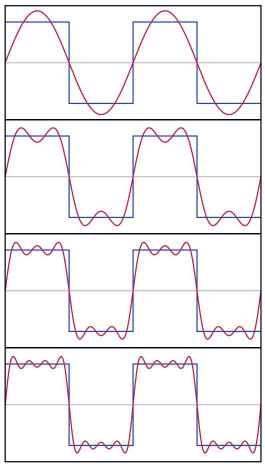
Einführung in die Fourier-Analysis

Gandalf Lechner

Die Fourier-Analysis (auch: *klassische harmonische Analysis*) ist ein zentrales Thema der Analysis mit Verbindungen in viele Gebiete der Mathematik und Anwendungen in diversen anderen Disziplinen. In diesem Seminar sollen die wesentlichen Aspekte der Fourier-Analysis in selbstständigen Vorträgen erarbeitet und einige wichtige Anwendungen studiert werden. Das Seminar ist so konzipiert, dass nur die Grundvorlesungen (Analysis und Lineare Algebra) Voraussetzung sind und ab dem 4. Semester teilgenommen werden kann. Das Seminar kann als Seminar für Bachelor oder als Bachelorseminar (mit angegliederter Bachelorarbeit) belegt werden.



Der erste Themenkomplex beschäftigt sich mit **Fourierreihen**. Hier geht es um die Frage, periodische Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch Linearkombinationen der speziellen periodischen Funktionen $x \mapsto \sin(2\pi kx)$, $x \mapsto \cos(2\pi kx)$ (mit $k \in \mathbb{Z}$) zu approximieren. Meist ist es bequemer, mit komplexwertigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zu arbeiten und Linearkombinationen von $e^{2\pi ikx} = \cos(2\pi kx) + i \sin(2\pi kx)$ zu betrachten. Wir werden sehen, dass viele (aber nicht alle) periodische Funktionen f durch eine *Fourierreihe*

$$x \mapsto \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \, e^{2\pi ikx}$$

dargestellt werden können. Die *Fourierkoeffizienten* a_k, $k \in \mathbb{Z}$, sind komplexe Zahlen, die sich leicht aus f berechnen lassen und diese Funktion charakterisieren. Wenn man x als eine Zeitvariable auffasst, entspricht eine solche Darstellung von f einer Zerlegung in Frequenzanteile.

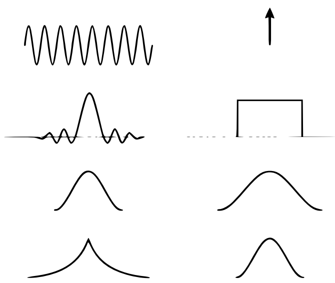
Es ergeben sich allerdings Fragen bzgl. der Konvergenz der obigen Reihe. Für welche Funktionen f konvergiert diese Reihe, und in welchem Sinne? (Punktweise? Gleichmäßig? In einem anderen Sinne? Und wenn die Reihe konvergiert, konvergiert sie dann gegen $f(x)$?) Wir werden verschiedene Aspekte des Konvergenzproblems diskutieren und dabei auch auf das abstrakte Konzept eines *Hilbertraums* stoßen.

In einigen Vorträgen werden vielfältige Anwendungen von Fourierreihen diskutiert werden, z.B. in der ebenen Geometrie (bei gegebenem Umfang eines Gebietes in $\mathbb{R}^2$ maximiert eine Kreisscheibe den Flächeninhalt), in der Zahlentheorie (Verteilung der Zahlen $\{na \mod 1 : n \in \mathbb{N}\}$ für eine gegebene irrationale Zahl a), in der Lösung von partiellen Differenzialgleichungen (Wellen- und Wärmeleitungsgleichung; dies ist der historische Ursprung der Fourier-Analysis in den Arbeiten von Joesph Fourier), oder in der Analysis (Konstruktion einer stetigen nirgends differenzierbaren Funktion).

Der zweite Themenkomplex ist die **Fourier-Transformation**. Hier betrachten wir nicht länger periodische, sondern allgemeinere auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktionen f. Zu f assoziieren wir die Fouriertransformierte Funktion

$$\tilde{f}(k) := \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-2\pi i k x}\, dx.$$

Im Gegensatz zu den Fourierreihen ist $k \in \mathbb{R}$ nun eine kontinuierliche Variable und nicht länger auf $k \in \mathbb{Z}$ beschränkt.



Wir werden zuerst klären, für welche f das obige uneigentliche Riemann-Integral Sinn macht. Für f in geeigneten Funktionenräumen, z.B. dem *Schwartz-Raum* $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, zeigt sich, dass $\mathcal{F} : f \mapsto \tilde{f}$ wohldefiniert und invertierbar ist. Das heißt, dass die Fouriertransformierte $\tilde{f}$ alle Information über die Originalfunktion f enthält. Allerdings ist der Zusammenhang zwischen f und $\tilde{f}$ trickreich, da lokale Eigenschaften von f (wie z.B. Stetigkeit, Differenzierbarkeit) in globale Eigenschaften von $\tilde{f}$ (z.B. Abfall von $|\tilde{f}(k)|$ für $k \to \pm\infty$) übersetzt werden. Während $\mathcal{F}$ linear ist (Integration ist linear), verhält sich das punktweise Produkt $f \cdot g$ von Funktionen interessanter unter Fourier-Transformation und führt uns auf den Begriff der *Faltung* von Funktionen.

Anwendungen der Fourier-Transformation gibt es in vielen Gebieten, insbesondere in der Physik. So werden wir z.B. die *Heisenbergsche Unschärferelation* mit Hilfe der Fourier-Transformation verstehen können und sehen, wie die freie *Schrödinger-Gleichung* (eine zentrale Gleichung der Quantenmechanik) per Fourier-Transformation gelöst werden kann.

Wenn man versucht, $\tilde{f}$ für eine periodische Funktion wie z.B. $x \mapsto \sin(x)$ zu berechnen, stößt man auf Probleme: Das Integral $\int_{\mathbb{R}} \sin(x) e^{-2\pi i k x} dx$ konvergiert nicht im üblichen Sinne, da $\sin(x)$ für $x \to \pm\infty$ nicht abfällt. Das hat damit zu tun, dass diese Funktion "nur eine Frequenz enthält", und führt uns auf das Konzept von **Distributionen**. Dies sind in einem gewissen Sinne singuläre Verallgemeinerungen von Funktionen, die mit einer geeigneten Herangehensweise aber immer noch differenziert und Fourier-transformiert werden können. Distributionen sind ein wichtiges Werkzeug in vielen Bereichen der Analysis; wir werden hier einige grundlegende Aspekte und Beispiele von Distributionen erarbeiten.

Das letzte Thema soll eine Einführung in die **harmonische Analysis** sein. Hier werden wir eine Variante der Fourier-Transformation auf endlichen abelschen Gruppen kennenlernen, die durch Gruppencharaktere formuliert ist und in Numerik und Quanteninformationstheorie wichtige Anwendungen findet. Es zeigt sich, dass diese Transformation genau wie die Fourierreihen als auch die Fourier-Transformation Spezialfälle einer allgemeineren Theorie von harmonischer Analysis auf gewissen abelschen Gruppen ist.

Literatur

Die Literatur zur Fourier-Analysis ist sehr reichhaltig. Zwei für dieses Seminar geeignete Bücher sind:

[Dei05] A. Deitmar. *A First Course in Harmonic Analysis*. Springer, 2005.

[SS03] E. M. Stein und R. Shakarchi. *Fourier Analysis - An Introduction*. Princeton University Press, 2003.

Die einführenden Kapitel dieser Bücher können auch als erste Orientierung zur Thematik dienen.

Teilnahme und Verteilung der Vorträge

Das Seminar steht allen Studierenden ab dem 4. Semester offen, die die Grundvorlesungen (Analysis und Lineare Algebra) erfolgreich absolviert haben und an weiterführenden Themen interessiert sind. Die Anzahl der Vorträge ist auf ca. 14-15 begrenzt (ein Vortrag pro Woche). Wenn Sie Interesse haben, teilzunehmen, kontaktieren Sie mich bitte vorab per E-Mail unter gandalf.lechner@fau.de.

Die in dem einführenden Text angedeuteten Themen werden noch präzisiert und an die TeilnehmerInnen angepasst.