

Querschnittsmodul Topologie

Sommersemester 2022

Dozent: Andreas Knauf¹

Assistent: NN

Vierstündige Vorlesung mit zweistündiger Übung

Zum Inhalt:

DEFINITION. Ein **topologischer Raum** (M, \mathcal{O}) ist eine Menge M mit einer Familie \mathcal{O} von Teilmengen, sodass beliebige Vereinigungen und endliche Schnitte von Mengen in \mathcal{O} wieder in \mathcal{O} liegen. Insbesondere ist $\emptyset \in \mathcal{O}$ und $M \in \mathcal{O}$.

Die Mengen aus \mathcal{O} werden **offen** genannt.

Eine Beispielklasse sind die metrischen Räume (M, d) , wobei die offenen Mengen beliebige Vereinigungen offener Kugeln $\{y \in M \mid d(x, y) < \varepsilon\}$ sind. Konkret kann man etwa an $M = \mathbb{R}^n$ mit euklidischer Metrik $d(x, y) = \|x - y\|$ denken.

DEFINITION. Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ zwischen topologischen Räumen M, N heißt **stetig**, wenn die Urbilder offener Mengen offen sind.

Soweit zur Definition.

Wie man unter dem Begriff 'Topologie' in wikipedia nachschlagen kann, "findet man Aspekte von ihr in fast jedem Teilgebiet der Mathematik".

Oft wird mit ihr die *Existenz* interessierender Objekte nachgewiesen:

BEISPIELE:

- Auf einem kompakten topologischen Raum M besitzt jede stetige Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ein (globales) Minimum und ein Maximum. Das kann man z.B. dazu benutzen, um zu zeigen, dass zwischen zwei Punkten einer geschlossenen Fläche eine kürzeste Verbindungskurve existiert.
- Zu jedem Zeitpunkt herrscht irgendwo auf der Erde Windstille. Würden wir aber auf der Oberfläche einer Kaffeetasse leben, dann müsste es nicht so sein. Denn diese ist zu einem Torus homöomorph (siehe den wikipedia-Artikel!), und auf einem Torus gibt es nicht verschwindende Vektorfelder.

¹Department Mathematik, Universität Erlangen-Nürnberg, Cauerstr. 11, D-91058 Erlangen. e-mail: knauf@math.fau.de

Die Vorlesung und die begleitenden Übungen werden die topologischen Konzepte einführen, die Sie in weiterführenden Vorlesungen benötigen, etwa in der Maßtheorie, Wahrscheinlichkeitstheorie, der Funktionalanalysis, oder im Masterbereich etwa für Lie-Gruppen, Klassische Mechanik oder Algebraische Geometrie. Sie wird zu etwa gleichen Teilen Mengentheoretische und Algebraische Topologie behandeln.

Es gibt ein vorlesungsbegleitendes Skript.