

Bachelorseminar „Approximationstheorie“

Art der Veranstaltung: Bachelorseminar, 2SWS, 5 ECTS, Sommersemester 2022

Ansprechpartner: PD Dr. Cornelia Schneider schneider@math.fau.de

Inhalt: Untersuchungsobjekt der Approximationstheorie ist die Darstellung „komplizierter“ Objekte (meist Funktionen) durch einfachere Objekte, die sich mit endlicher Information darstellen lassen. Die Standardsituation ist ein normierter Raum X mit Norm $\|\cdot\|$ und ein meist endlichdimensionaler Teilraum $U \subset X$, dessen Elemente die „einfachen“ Funktionen sind. Zwei sehr wichtige Beispiele sind in diesem Zusammenhang

- (1) $X = C[a, b]$, der Vektorraum der stetigen Funktionen auf $[a, b]$ und

$$U = \{p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, a_i \in \mathbb{R}\},$$

der $(n+1)$ -dimensionale Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$.

- (2) $X = C_{2\pi}(\mathbb{R})$, der Vektorraum aller stetigen 2π -periodische Funktionen und

$$U = \left\{ t(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), a_i, b_i \in \mathbb{R} \right\},$$

der $(2n+1)$ -dimensionale Vektorraum der trigonometrischen Polynome vom Grad $\leq n$.

Das Ziel ist die Approximation (\approx Annäherung) einer komplizierten Zielfunktion $f \in X$ durch eine geeignete Funktion p (bzw. t) aus dem Teilraum $U \subset X$. Der Approximationsfehler

$$E^{(\bullet)}(f) = \inf_{p \in \mathbb{R}} \|f - p\|_{\bullet} \quad (\text{minimaler Fehler})$$

wird hierbei gemessen durch die von der Norm $\|\cdot\|_{\bullet}$ induzierte Metrik, wobei z.B.

$$\|f\|_{\infty} = \sup |f(x)|, \quad \|f\|_2 = \left(\int |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad \|f\|_1 = \int |f(x)| dx \quad (*)$$

mögliche Normen sind.

Die Fragen, mit denen sich die Approximationstheorie beschäftigt, können nun folgendermaßen formuliert werden:

- Gibt es für alle $f \in X$ eine *Bestapproximation* $p^* \in U$ (bzw. $p_{(\bullet)}^* \in U$ in Abhängigkeit von der Norm $\|\cdot\|_{\bullet}$), d.h. eine Funktion, die

$$\|f - p^*\| \leq \|f - p\|$$

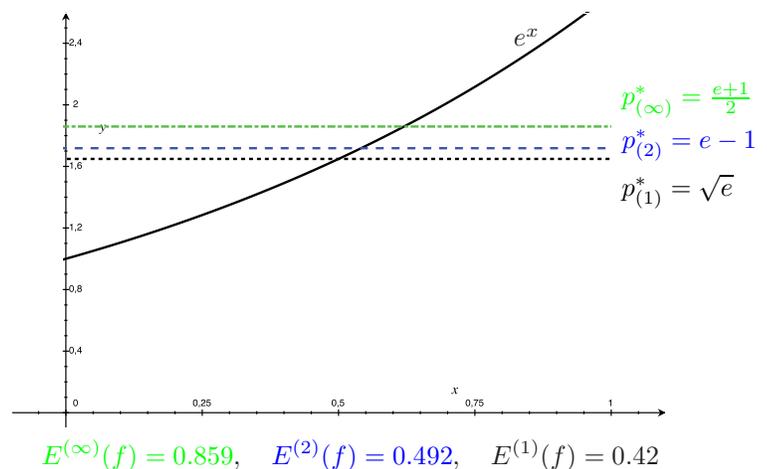
für alle $p \in U$ erfüllt?

- Wann ist die Bestapproximation p^* eindeutig?
- Wie lässt sich p^* konstruieren/ charakterisieren?
- Fehlerabschätzung: Betrachte Teilräume $U_0 \subset U_1 \subset \dots \subset U_n \subset \dots$ und zugehörige Fehler

$$E_n(f) := \inf_{p \in U_n} \|f - p\|.$$

Gilt z.B. $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(f) = 0$?

Beispiel: Approximation von $f = e^x \in C[0, 1]$ durch bestmögliche Konstante $p \in \mathbb{R}$ in den versch. Normen (*) und zugehöriger Approximationsfehler



Nachfolgend eine kurze Liste mit möglichen Vortragsthemen:

(1) Klassische Approximationstheorie

- Satz von Weierstraß, Satz von Stone-Weierstraß, Satz von Korovkin, Müntz-Sätze, Haarscher Eindeutigkeitssatz, Sätze vom Jackson-Bernstein-Typ

(2) Moderne Approximationstheorie

- Approximation mit Splines und Wavelets, Entropie-, Approximations- und Kolmogorovzahlen

(3) Weitere forschungsnahe Themen...

Das Thema des Vortrags kann Ausgangspunkt für eine Bachelorarbeit sein.

Vorkenntnisse: Analysis-Module des Bachelorstudiums.

Studien- und Prüfungsleistung: Vortrag (90min) und schriftliche Ausarbeitung (ca. 5 Seiten)

Literatur

- [1] B. Carl and I. Stephani. *Entropy, compactness and the approximation of operators*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
- [2] R. A. DeVore und G. G. Lorentz. *Constructive Approximation*. Springer, Berlin, 1993.
- [3] G.G. Lorentz. *Approximation of functions*. 2nd. Edition, Chelsea, New York, 1986.
- [4] M.W. Müller. *Approximationstheorie*. Studien-Texte Mathematik. Akad. Verlagsges. Wiesbaden, 1978.
- [5] A. Schönhage. *Approximationstheorie*. De Gruyter, Berlin 1971.
- [6] ...weitere Originalliteratur.