

Einführung in die partiellen Differentialgleichungen

Emil Wiedemann
Universität Ulm, SS 2020

Vorbemerkungen

Dies ist das Skript zur Vorlesung „Einführung in die partiellen Differentialgleichungen“, die ich im Sommersemester 2020 an der Universität Ulm gehalten habe. Es handelte sich dabei um eine erstmals in Ulm angebotene Veranstaltung im Umfang von zwei Semesterwochenstunden im Rahmen der mathematischen Bachelorstudiengänge. Diese Vorlesung ersetzt die „Elemente der Funktionalanalysis“, deren Notwendigkeit in Frage stand, da ja auch Bachelorstudierende die „große“ Funktionalanalysis ab dem fünften Semester hören können.

Der vorliegende Kurs soll also bereits im Bachelorstudium mit partiellen Differentialgleichungen vertraut machen. Die nötigen Vorkenntnisse sind auf ein Minimum beschränkt: Es werden lediglich Kenntnisse der Analysis aus dem ersten Studienjahr sowie – in sehr geringem Umfang – der Maßtheorie vorausgesetzt. Wir borgen uns ab und zu Resultate aus der Analysis III (zum Beispiel den GAUSSschen Integralsatz) und der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, deren Kenntnis allerdings keine Voraussetzung für diese Vorlesung ist. Die Vorlesung kann also ab dem vierten Semester gehört werden.

Der entscheidende Unterschied zur vierstündigen Mastervorlesung über partielle Differentialgleichungen ist der Verzicht auf Methoden der Funktionalanalysis, insbesondere auf SOBOLEV- und HÖLDERRäume. Das bedeutet zum Glück keineswegs, daß wir uns auf klassische Resultate des 19. Jahrhunderts beschränken müssen: Erfreulicherweise gibt es nämlich in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen zahlreiche interessante und moderne Themen, die ohne funktionalanalytischen Apparat verstanden werden können.

Im Gegensatz zu gewöhnlichen Differentialgleichungen gibt es für partielle keine allgemeine Existenz- und Eindeigkeitstheorie; man muß gewissermaßen jede einzelne Gleichung für sich betrachten (ganz so stimmt das natürlich nicht, es gibt durchaus Theorien für größere Klassen von Gleichungen, etwa für lineare elliptische und parabolische Gleichungen zweiter Ordnung oder für skalare Erhaltungssätze). Wir werden in diesem Semester einige Gleichungen von grundlegender Bedeutung kennenlernen: Transportgleichungen, Erhaltungssätze, die POISSON-Gleichung sowie Wärmeleitungs- und Wellengleichung.

Das Ziel ist einerseits, wichtige mathematische Methoden der Analysis partieller Differentialgleichungen zu entwickeln und erproben (z.B. Faltung, Charakteristiken, Energie- und Symmetrieargumente), andererseits anhand der genannten Gleichungen exemplarisch aufzuzeigen, wie vielfältig die Anwendungen partieller Differentialgleichungen sind und wie unterschiedlich sich die Gleichungen dementsprechend qualitativ verhalten.

Die Darstellung orientiert sich teilweise an [2], dem Lehrbuch für partielle Differentialgleichungen schlechthin.

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkungen	2
Kapitel 1. Ein kleiner Überblick	4
1.1. Einige Beispiele	4
1.2. Zielsetzungen	7
1.3. Klassifikation	8
1.4. Notationen	9
Kapitel 2. Gleichungen erster Ordnung	10
2.1. Transportgleichungen	10
2.2. Skalare Erhaltungssätze	18
Kapitel 3. Gleichungen zweiter Ordnung	28
3.1. Die Wellengleichung	28
3.2. LAPLACE- und POISSON-Gleichung	34
3.3. Die Wärmeleitungsgleichung	43
Literaturverzeichnis	48

KAPITEL 1

Ein kleiner Überblick

Eine *partielle Differentialgleichung* (insfort stets mit PDE bezeichnet¹) ist eine Gleichung, die die partiellen Ableitungen einer gesuchten Funktion $u : \mathbb{R}^m \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ miteinander in Beziehung setzt. Wir setzen stets $m \geq 2$ voraus, da es sich sonst um eine *gewöhnliche* Differentialgleichung handelt.

Ein *System* partieller Differentialgleichungen besteht aus mehreren PDEs für mehrere gesuchte Funktionen. Die höchste Ordnung einer partiellen Ableitung, die in einer gegebenen PDE auftritt, heißt *Ordnung* der PDE. In dieser Vorlesung werden ausschließlich Gleichungen erster oder zweiter Ordnung behandelt.

1.1. Einige Beispiele

Die einfachste PDE, die wir im nächsten Kapitel diskutieren, ist die *Transportgleichung*

$$\partial_t u(x, t) + c \partial_x u(x, t) = 0. \quad (1.1)$$

Hierbei ist $c \in \mathbb{R}$ eine gegebene Konstante und $u : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ die gesuchte Funktion. Diese Gleichung ist von erster Ordnung. Es mag verwundern, daß die beiden unabhängigen Variablen mit (x, t) bezeichnet werden und nicht etwa mit (x, y) oder (x_1, x_2) . Dies hat mit der Interpretation von t als Zeit und von x als Position im (eindimensionalen) Raum zu tun. Die Gleichung (1.1) modelliert dann den „Transport“ einer Verteilung u durch ein konstantes Geschwindigkeitsfeld c (mehr zur Interpretation im nächsten Kapitel). PDEs, die eine Zeitvariable enthalten, nennt man oft *Evolutionsgleichungen*².

Unter einer *Lösung* der Gleichung verstehen wir eine stetig differenzierbare Funktion $u : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, sodaß (1.1) erfüllt ist für alle $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$. Bei einer einfachen Gleichung wie (1.1) kann man mit etwas Glück eine Lösung erraten: Ist nämlich $u^0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige stetig differenzierbare Funktion, so definiert

$$u(x, t) := u^0(x - ct)$$

eine Lösung, wie man sofort nachprüft. Gibt man also irgendeine Funktion u^0 vor, so liefert $u^0(x - ct)$ eine Lösung des *Anfangswertproblems*

$$\begin{aligned} \partial_t u(x, t) + c \partial_x u(x, t) &= 0 \quad \text{für alle } (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) &= u^0(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Wir sehen bald, daß $u^0(x - ct)$ die *einzig*e Lösung des Anfangswertproblems für die Transportgleichung ist.

Eine ungemein wichtige PDE ist die *LAPLACE-Gleichung*

$$\Delta u(x) = 0, \quad (1.2)$$

¹von engl. partial differential equations.

²Man beachte, daß diese Bezeichnung im Grunde willkürlich ist, da wir (1.1) auch zum Beispiel als

$$c \partial_x u(x, y) + \partial_y u(x, y) = 0$$

schreiben und mit irgendeiner anderen Interpretation (oder auch mit gar keiner) belegen könnten, in der Zeit nicht vorkommt.

wobei $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ die gesuchte Funktion und Ω eine (sagen wir, offene) Teilmenge von \mathbb{R}^n ist. Wir erinnern uns dabei an den LAPLACE-Operator $\Delta u := \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$. Die LAPLACE-Gleichung ist also eine PDE zweiter Ordnung. Es handelt sich um den Prototyp einer *elliptischen* PDE (der Begriff wird später etwas näher erläutert).

Unter einer Lösung verstehen wir, wenig überraschend, eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, die für jedes $x \in \Omega$ die Eigenschaft (1.2) besitzt. Trivialerweise sind affine Funktionen der Gestalt $u(x) = a \cdot x + b$ mit $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$ stets Lösungen der LAPLACE-Gleichung.

Ist Ω eine beschränkte Menge und g eine stetige Funktion auf dem Rand $\partial\Omega$, so kann man das *Randwertproblem*

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0 && \text{für alle } x \in \Omega, \\ u(x) &= g(x) && \text{für alle } x \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{1.3}$$

stellen, das sinnvoll ist, sofern man noch annimmt, daß u stetig auf dem Abschluß $\bar{\Omega}$ ist. Dieses Randwertproblem modelliert zum Beispiel die Temperaturverteilung einer homogenen flachen Platte, an deren Rändern die Temperaturverteilung auf g fixiert wird, im Gleichgewichtszustand. Führt man der Platte im Innern außerdem Wärme zu oder ab, erhält man die *POISSON-Gleichung*

$$\Delta u(x) = f(x),$$

wobei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion ist.

Um in der Anwendung auf Temperturverteilungen zu verbleiben, können wir uns fragen, was passiert, wenn eine Platte, die zunächst kalt ist, am Rand erhitzt wird. Ist diese Erhitzung wieder durch eine Funktion $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, die ihrerseits nicht von der Zeit abhängt, so wird man erwarten, daß sich nach einiger Zeit die durch das Randwertproblem für die LAPLACE-Gleichung gegebene Gleichgewichtsverteilung einstellt. Doch wie entwickelt sich die Temperaturverteilung bis zum Erreichen dieses Gleichgewichts? Dies läßt sich mit der *Wärmeleitungsgleichung* modellieren:

$$\partial_t u(x, t) - \Delta u(x, t) = 0.$$

Hierbei bezieht sich Δ nur auf die x -Variablen, also $\Delta u(x, t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x, t)$. Will man die Wärmeleitungsgleichung auf einem beschränkten Gebiet Ω lösen, so stellt man meist ein *Anfangs- und Randwertproblem* der Form

$$\begin{aligned} \partial_t u(x, t) - \Delta u(x, t) &= 0 && \text{für alle } (x, t) \in \Omega \times [0, \infty), \\ u(x, t) &= g(x) && \text{für alle } (x, t) \in \partial\Omega \times [0, \infty), \\ u(x, 0) &= u^0(x) && \text{für alle } x \in \Omega. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Die Wärmeleitungsgleichung ist der Prototyp einer *parabolischen* PDE. Falls eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung nicht von t abhängt, sodaß also $\partial_t u = 0$, so erhält man dadurch eine Lösung der LAPLACE-Gleichung. Zudem erwartet man aus physikalischer Intuition, daß sich eine Lösung von (1.4) mit $t \rightarrow \infty$ einer Lösung des entsprechenden stationären (d.h. zeitunabhängigen) Randwertproblems (1.3) annähert.

Allgemein kann man elliptische Gleichungen als stationäre Versionen eines entsprechenden parabolischen Problems auffassen; elliptische und parabolische PDEs sind in dieser (sehr vagen) Weise miteinander verwandt. Eine gänzlich verschiedene Klasse von PDEs stellen dagegen die *hyperbolischen* Probleme dar. Deren Prototyp ist die *Wellengleichung*

$$\partial_{tt} u(x, t) - \Delta u(x, t), \tag{1.5}$$

die der Wärmeleitungsgleichung täuschend ähnlich sieht, aber in der Zeit eine *zweite* Ableitung aufweist. Wie vorhin bezieht sich Δ nur auf die Raumvariablen x . Auch für die Wellengleichung kann man ein Anfangs- und Randwertproblem formulieren, wobei wegen

der erhöhten Zahl von Zeitableitungen auch der Anfangszustand von $\partial_t u$ vorgegeben werden muß. Man erhält so ein Problem der Form

$$\begin{aligned} \partial_{tt}u(x, t) - \Delta u(x, t) &= 0 \quad \text{für alle } (x, t) \in \Omega \times [0, \infty), \\ u(x, t) &= g(x) \quad \text{für alle } (x, t) \in \partial\Omega \times [0, \infty), \\ u(x, 0) &= u^0(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega, \\ \partial_t u(x, 0) &= v^0(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Ist $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, so kann man mit diesem Anfangs- und Randwertproblem (mit Randbedingungen $u(a, t) = u(b, t) = 0$ für alle t) die Schwingung einer fest eingespannten Saite (zum Beispiel eines Klaviers oder einer Bratsche) beschreiben. Ebenso kann man für $\Omega = \mathbb{R}^3$ die Wellengleichung als Modell der Schallausbreitung in einem homogenen Medium (z.B. annähernd Luft) verwenden.

Für $\Omega = \mathbb{R}$ überzeugt man sich leicht davon, daß jede Funktion der Gestalt $u(x, t) = v(x+t) + w(x-t)$, wobei v und w beliebige Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind, die Wellengleichung löst. Man vergleiche dies mit der Lösung der Transportgleichung.

Bisher haben wir nur skalare PDEs betrachtet, aber keine Systeme. Eines der einfachsten Systeme von PDEs erhalten wir, indem wir für eine Lösung u der Wellengleichung (mit $\Omega = \mathbb{R}$) definieren $v := \partial_t u$, $w := \partial_x u$, und dann (1.5) schreiben als

$$\begin{aligned} \partial_t v - \partial_x w &= 0, \\ \partial_t w - \partial_x v &= 0. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Mögliche Anfangswerte können dann wie in (1.6) durch

$$v(x, 0) = v^0(x), \quad w(x, 0) = w^0(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega$$

vorgegeben werden.

Mit $u := (v, w)$ und $F(u) := (-w, -v) = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u$ können wir dies kompakter schreiben als

$$\partial_t u + \partial_x F(u) = 0. \tag{1.8}$$

Man kann $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ beliebig wählen und erhält dadurch eine ganze Klasse von PDEs, die man als *Erhaltungssätze* bezeichnet. Erfüllt F eine gewisse Strukturbedingung³, so heißt (1.8) ein *strikt hyperbolisches System von Erhaltungssätzen*. Zu diesen Systemen zählen nicht zuletzt die Grundgleichungen der Gasdynamik, die sogenannten EULERgleichungen.

Im Gegensatz zu gewöhnlichen Differentialgleichungen gibt es für PDE keine allgemeine Existenz- und Eindeigkeitstheorie. Dies ist in Anbetracht der diversen physikalischen Phänomene, die durch verschiedene PDE beschrieben werden, und des stark unterschiedlichen qualitativen Verhaltens ihrer Lösungen auch nicht zu erwarten. Existenz- und Eindeigkeitsfragen für PDE sind auch heute noch Gegenstand aktueller Forschung. Zur Illustration der Bedeutung solcher Forschungsfragen sei auf das Clay Mathematics Institute verwiesen, das im Jahr 2000 sieben sogenannte Millennium-Probleme identifiziert hat, deren Lösung mit je einer Million Dollar dotiert ist. Eines dieser Probleme handelt von einem System von PDE, den NAVIER-STOKES-Gleichungen:

$$\begin{aligned} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p &= \Delta u \\ \operatorname{div} u &= 0. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Dabei sind $u : \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $p : \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ die gesuchten Funktionen. Es handelt sich um vier Gleichungen für die vier Unbekannten (u_1, u_2, u_3, p) . Hierbei werden ∂_t und Δ komponentenweise genommen (also $\partial_t u = (\partial_t u_1, \partial_t u_2, \partial_t u_3)$ und analog für Δu),

³nämlich die, daß $DF(u)$ für jedes $u \in \mathbb{R}^2$ paarweise verschiedene reelle Eigenwerte besitzt.

und $(u \cdot \nabla)u$ bezeichnet den Vektor mit i -ter Komponente $u \cdot \nabla u_i$. Der Divergenzoperator ist durch $\operatorname{div} u = \sum_{i=1}^3 \partial_{x_i} u_i$ gegeben.

Die NAVIER-STOKES-Gleichungen beschreiben die Strömung einer inkompressiblen viskosen Flüssigkeit im Raum. Das Millennium-Problem lautet wie folgt (siehe [3]):

Gegeben ein divergenzfreies, beliebig oft differenzierbares Vektorfeld $u^0 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, das mit $|x| \rightarrow \infty$ schneller abklingt als jedes Polynom. Dann existiert eine beliebig oft differenzierbare Lösung $(u, p) : \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ von (1.9) mit Anfangsbedingung $u(\cdot, 0) = u^0$.

1.2. Zielsetzungen

Wir haben nun einige Beispiele von PDEs gesehen. Was aber will man überhaupt erreichen, wenn man sich als Mathematiker*in mit PDEs beschäftigt?

1.2.1. Explizite Lösungsformeln? Die naheliegende Antwort ist die, daß man eine Gleichung *lösen* will. In der Schule und teilweise noch im Studium löst man Gleichungen, indem man Lösungen konkret berechnet, oft mithilfe expliziter Lösungsformeln oder Algorithmen. So verfährt man etwa, wenn man eine quadratische Gleichung oder ein lineares Gleichungssystem lösen will.

Für PDEs gibt es nur für sehr einfache, klassische Modelle die Möglichkeit, Lösungen explizit zu berechnen (wir werden dies an einigen Beispielen sehen). Im allgemeinen jedoch findet man keine Lösungsformeln.

1.2.2. Wohlgestelltheit. In der linearen Algebra oder der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen gilt allgemein, grob gesprochen: Ein System von n Gleichungen mit ebenso vielen Unbekannten hat eine eindeutig bestimmte Lösung (sofern die Gleichungen in einem gewissen Sinne unabhängig sind und, im Falle von Differentialgleichungen, Anfangswerte vorgegeben werden). Für PDE ist dies oft ebenfalls zutreffend (aber nicht immer), es gibt darüber jedoch keine allgemeine Theorie. Man muß also jede PDE (oder zumindest jede Klasse von PDE) einzeln untersuchen. Dies gilt auch für die *Stabilität* von Lösungen, also die Frage, ob geringfügige Abweichungen in den Daten auch nur geringfügige Abweichungen in der Lösung zur Folge haben.

HADAMARD hat diese drei Fragen nach Existenz, Eindeutigkeit und Stabilität von Lösungen mit dem Begriff der *Wohlgestelltheit* zusammengefaßt. Ein Anfangs- und/oder Randwertproblem für eine PDE ist also wohlgestellt, wenn es eine eindeutige und stabile Lösung besitzt. Nach HADAMARD ist Wohlgestelltheit eine Grundvoraussetzung für die Anwendbarkeit eines mathematischen Modells auf physikalische Fragestellungen.

Wohlgestelltheit kann nur erwartet werden, wenn geeignete Anfangs- und/oder Randwerte vorgegeben werden. Es ist aber nicht immer offensichtlich, in welcher Art die Anfangs- und Randbedingungen formuliert sein müssen. Wir haben zum Beispiel für die LAPLACE-Gleichung auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ einen Randwert der Form $u = g$ auf $\partial\Omega$ vorgegeben. In gewissen Anwendungen verwendet man aber eine andere Art der Randbedingung, nämlich $\nabla u \cdot n = h$ auf $\partial\Omega$, wobei $n(x)$ der äußere Einheitsnormalenvektor an $x \in \Omega$ ist⁴.

Häufig wird die Formulierung der Anfangs- und Randbedingungen aus der Anwendung heraus motiviert sein. Dann ist es die Aufgabe der Mathematikerin, unter diesen Bedingungen Wohlgestelltheit zu zeigen, um das physikalische Modell zu rechtfertigen. Stellt sich heraus, daß das Modell nicht wohlgestellt ist, so kann dies ein Hinweis darauf sein, daß die Anfangs- und Randbedingungen verändert oder ergänzt werden müssen.

⁴also der – für „vernünftige“ Gebiete $\Omega \in \mathbb{R}^n$ eindeutig bestimmte – Vektor, der im Punkt $x \in \partial\Omega$ senkrecht auf $\partial\Omega$ steht, Länge 1 hat, und von Ω aus gesehen nach außen zeigt.

1.2.3. Regularität. Hat man eine Lösung gefunden, kann man fragen, wie *regulär* diese ist. Ist die Lösung stetig, differenzierbar, beliebig oft differenzierbar, analytisch ...? Und wie hängt diese Regularität von den Anfangs- und Randdaten ab? Es gibt, grob gesprochen, drei Szenarien: Eine Lösung kann regulärer, genauso regulär, oder weniger regulär sein als ihre Daten. Alle drei Szenarien geben wichtige Informationen über das qualitative Lösungsverhalten.

1.2.4. Qualitatives Verhalten. Daß es eine Lösung gibt, ist schön und gut. Aber man möchte natürlich – gerade im Hinblick auf Anwendungen – wissen, *was die Lösung macht*. Da, wie erwähnt, eine explizite Darstellung der Lösung meist nicht zur Verfügung steht, untersucht man sie *qualitativ*.

Wir haben beispielsweise bereits vermutet, daß eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit $t \rightarrow \infty$ gegen eine Lösung der LAPLACE-Gleichung konvergiert. In einem Populationsmodell könnte man sich dafür interessieren, ob eine bestimmte Population mit $t \rightarrow \infty$ wächst, sich vermindert, oder gar ausstirbt. Solche Fragen betreffen die *Langzeitasymptotik* eines Modells.

Wichtige Werkzeuge für das Studium qualitativen Verhaltens sind z.B. *Erhaltungsgrößen* oder *dissipierte Größen* wie Energie, Entropie, Impuls etc. bei physikalischen Problemen. Auch *Maximumsprinzipien* geben Aufschluß über das Verhalten von Lösungen.

Weitere qualitative Eigenschaften von Lösungen können mit *Symmetrie* oder *Periodizität* zusammenhängen.

1.2.5. Numerik und Simulation. Gerade im Hinblick auf Anwendungen kann man PDEs, da man meist keine explizite Lösung zur Hand hat, numerisch berechnen und simulieren. In der Tat spielt die Computersimulation von PDEs in Technologie und Industrie eine enorm wichtige Rolle. In dieser Vorlesung beschränken wir uns auf die Theorie und verweisen für die Numerik von PDE auf die einschlägigen Lehrveranstaltungen. Es soll jedoch erwähnt werden, daß Analysis und Numerik von PDEs eng miteinander verzahnt sind: Analytische Erkenntnisse können dem Numeriker wichtige Informationen über ein numerisches Verfahren geben (z.B. wenn man die Konvergenz des numerischen Verfahrens beweisen kann), und umgekehrt sind viele analytische Beweise über PDE numerisch motiviert.

1.3. Klassifikation

Kann man die Fülle der verschiedenen PDEs irgendwie kategorisieren? Die Antwort lautet im wesentlichen nein, oder genauer: Etwaige Einteilungen sind oft nur von begrenztem Nutzen.

Zunächst kann man zeitabhängige und zeitunabhängige Gleichungen unterscheiden. Diese Unterscheidung ist mathematisch nicht wirklich haltbar, da die Interpretation einer Variablen als Zeit ja nicht mathematischer Natur ist. Diese Interpretation kann aber dennoch sinnvoll sein, um ein Modell anschaulich besser zu verstehen.

Wir haben außerdem gewisse Gleichungen als *elliptisch*, *parabolisch* oder *hyperbolisch* typisiert. Betrachte etwa die Gleichung

$$a\partial_{xx}u + b\partial_{yy}u = 0 \tag{1.10}$$

für gesuchtes $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und gegebene Parameter $a, b \in \mathbb{R}$, und die zugehörige quadratische Form

$$Q(\xi, \eta) = a\xi^2 + b\eta^2.$$

Die Höhenlinien von Q sind Kurven in \mathbb{R}^2 : $\Gamma_c := \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : a\xi^2 + b\eta^2 = c\}$ für $c \in \mathbb{R}$. Sind $a, b > 0$, so ist Γ_c eine Ellipse (sofern $c > 0$), und die Gleichung (1.10) heißt elliptisch; Haben a und b gemischte Vorzeichen, so ist Γ eine Hyperbel, und (1.10) heißt hyperbolisch. Für $(a, b) = (1, 1)$ bzw. $(a, b) = (1, -1)$ erhalten wir die LAPLACE- bzw. Wellengleichung.

Die entsprechenden Kurven für die Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u - \partial_{xx} u = 0$ ist gegeben durch $\xi - \eta^2 = c$, was eine Parabel beschreibt. Die Wärmeleitungsgleichung ist daher parabolisch.

Man kann diese Begriffe in vielfacher Weise verallgemeinern, auch auf Systeme von PDE. Allerdings gibt es wichtige PDE, die in keine der drei Klassen fallen oder von gemischtem Typ sind. Die NAVIER-STOKES-Gleichungen etwa haben teilweise parabolischen Charakter, aber eben nicht ganz; unter anderem daraus resultiert die Schwierigkeit dieser Gleichungen.

Eine weitere Unterscheidung besteht zwischen *linearen* und *nichtlinearen* Gleichungen: Eine PDE heißt linear, wenn die gesuchten Funktionen und deren partielle Ableitungen nur linear in den Gleichungen auftreten. So sind unter den eingangs vorgestellten Gleichungen die Transport-, LAPLACE-, POISSON, Wärmeleitungs- und Wellengleichung linear; die Erhaltungsgleichung (1.8) dagegen ist nichtlinear, falls F nichtlinear ist, und die NAVIER-STOKES-Gleichungen sind wegen des Terms $(u \cdot \nabla)u$ (mit Bestandteilen der Form $u_i \partial_{x_j} u_j$) ebenfalls nichtlinear.

Ganz grob gesprochen ist die Theorie nichtlinearer PDEs schwieriger als die Theorie linearer PDEs. Um zu beschreiben, „wie nichtlinear“ eine Gleichung ist, verwendet man manchmal die Abstufungen *voll nichtlinear*, *quasilinear* und *semilinear*; wir gehen darauf nicht näher ein.

1.4. Notationen

Für eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bezeichne $C(\Omega)$ den Raum der stetigen Funktionen $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und $C(\Omega; \mathbb{R}^m)$ den Raum der stetigen Funktionen $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$. Mit $\bar{\Omega}$ bezeichnen wir den Abschluß und mit $\partial\Omega$ den Rand von Ω . Es gilt also $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.

Die stetigen Funktionen auf $\bar{\Omega}$ werden mit $C(\bar{\Omega})$ bezeichnet. Es gilt $C(\bar{\Omega}) \subset C(\Omega)$, aber nicht umgekehrt: So ist für $\Omega = (0, 1) \subset \mathbb{R}$ zum Beispiel die Funktion $x \mapsto \frac{1}{x}$ in $C((0, 1))$, aber nicht in $C([0, 1])$ (den sie ist nicht stetig „bis zum Rand“).

Für $k \in \mathbb{N}$ schreiben wir $C^k(\Omega)$ für die k -mal stetig differenzierbaren Funktionen und $C^\infty(\Omega)$ für die beliebig oft differenzierbaren Funktionen. Sind die partiellen Ableitungen der Ordnung bis einschließlich k stetig auf den Abschluß $\bar{\Omega}$ fortsetzbar, so heißt die entsprechende Klasse $C^k(\bar{\Omega})$, und analog für $C^\infty(\bar{\Omega})$.

Mit $C_c(\Omega)$ bezeichnen wir den Raum der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger, das bedeutet: $u \in C_c(\Omega)$ genau dann, wenn u stetig ist und es eine kompakte Menge $K \subset \Omega$ gibt, sodaß $u(x) = 0$ für alle $x \in \Omega \setminus K$. Entsprechend ist $C_c^k(\Omega)$ der Raum der k -mal stetig differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger und $C_c^\infty(\Omega)$ der Raum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger.

Mit $|\cdot|$ kennzeichnen wir die euklidische Norm in \mathbb{R}^m , also $|x| = (\sum_{k=1}^m x_k^2)^{1/2}$. Für eine beschränkte Funktion $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ schreiben wir $\|u\|_\infty := \sup_{x \in \Omega} |u(x)|$ für die Supremumsnorm.

Für $R > 0$ und $x \in \mathbb{R}^m$ sei $B_R(x) \subset \mathbb{R}^m$ die m -dimensionale offene Kugel um x mit Radius R , also

$$B_R(x) = \{y \in \mathbb{R}^m : |y - x| < R\}.$$

Die aus der Analysis bekannten Differentialoperatoren Δ und div sind definiert als $\Delta u = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u$ und $\operatorname{div} u = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} u_j$. Man beachte, daß Δ auf Funktionen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und div auf Vektorfelder $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ wirkt. Bei Evolutionsgleichungen wirken beide Operatoren nur auf die Raumvariablen, nicht aber die Zeitvariable.

Gleichungen erster Ordnung

Wir besprechen in der ersten Hälfte dieser Vorlesung einige skalare PDE erster Ordnung: zunächst die Transportgleichung (in \mathbb{R} oder \mathbb{R}^n) und dann nichtlineare skalare Erhaltungssätze. Beiden Gleichungstypen ist gemein, daß man sie mit der Methode der Charakteristiken untersuchen kann und daß sie keinen regularisierenden Effekt haben. Im Gegenteil: Für nichtlineare Erhaltungsgleichungen kann eine anfangs stetige Lösung nach endlicher Zeit unstetig werden.

2.1. Transportgleichungen

2.1.1. Der eindimensionale Fall. Wir betrachten wie im ersten Kapitel die Transportgleichung

$$\partial_t u(x, t) + c \partial_x u(x, t) = 0, \quad (2.1)$$

wobei $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ gesucht und $c \in \mathbb{R}$ gegeben ist. Zusätzlich geben wir einen Anfangswert $u(\cdot, 0) = u^0 \in C^1(\mathbb{R})$ vor. Dann gilt:

SATZ 2.1. Für die Transportgleichung (2.1) mit Anfangswert u^0 ist die eindeutige Lösung gegeben als

$$u(x, t) = u^0(x - ct).$$

Wir geben zwei verschiedene Beweise.

BEWEIS 1. Angenommen, $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ ist eine Lösung von (2.1) mit Anfangswert u^0 . Sei $\chi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, und betrachte $\phi(t) := u(\chi(t), t)$. Dann ist $\phi \in C^1([0, \infty))$, und es gilt

$$\frac{d}{dt} \phi(t) = \frac{d}{dt} u(\chi(t), t) = \partial_t u(\chi(t), t) + \partial_x u(\chi(t), t) \chi'(t).$$

Sei $y \in \mathbb{R}$ gegeben. Die Wahl $\chi(t) := y + ct$ ergibt $\chi'(t) = c$, also (mithilfe der Transportgleichung) $\frac{d}{dt} \phi(t) = 0$ für alle $t \geq 0$. Folglich ist $u(y + ct, t)$ in t konstant für jedes $y \in \mathbb{R}$. Insbesondere gilt für alle $(y, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$

$$u(y + ct, t) = u(y, 0) = u^0(y).$$

Ist nun $x \in \mathbb{R}$, $t \in [0, \infty)$ gegeben, so folgt daraus mit $y := x - ct$:

$$u(x, t) = u^0(x - ct).$$

Diese Wahl von u ist also die einzig mögliche. Daß u tatsächlich eine Lösung des Anfangswertproblems ist, ist offensichtlich. \square

BEWEIS 2. Wir geben diesen Beweis nur unter der zusätzlichen Annahme $u^0 \in C_c^1(\mathbb{R})$, und zeigen, daß es für einen solchen Anfangswert genau eine Lösung u gibt, für die $u(\cdot, t) \in C_c^1(\mathbb{R})$ für alle $t \geq 0$.

Daß das angegebene u eine Lösung des Anfangswertproblems ist, ist klar. Es ist also nur die Eindeutigkeit zu zeigen. Sei dazu v eine weitere Lösung mit demselben Anfangswert

und der Eigenschaft $v(\cdot, t) \in C_c(\mathbb{R})$ für alle $t \geq 0$, und setze $w := u - v$. Dann gilt (wenn die beiden Gleichungen für u und v voneinander subtrahiert werden)

$$\partial_t w + c \partial_x w = 0, \quad w(\cdot, 0) = 0. \quad (2.2)$$

Multipliziere (2.2) mit w und beachte dabei $w \partial_t w = \frac{1}{2} \partial_t (w^2)$, $w \partial_x w = \frac{1}{2} \partial_x (w^2)$. Dies führt auf

$$\partial_t (w^2) + c \partial_x (w^2) = 0, \quad w^2(\cdot, 0) = 0. \quad (2.3)$$

Integrieren wir dies in x , so folgt daraus wegen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \partial_x (w^2) dx = 0$$

(Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung mit der Annahme $w(\cdot, t) \in C_c^1(\mathbb{R})$ für alle t), daß

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} w^2(x, t) dx = 0,$$

also ist $t \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} w^2(x, t) dx$ konstant. Da dieses Integral bei $t = 0$ null ist, ist es für alle Zeiten null. Da das Integral einer nichtnegativen Funktion null ist genau dann, wenn der Integrand identisch null ist, folgt $w = 0$, d.h. $u = v$. \square

BEMERKUNG 2.2. Der erste Beweis ist die einfachste Anwendung der *Methode der Charakteristiken*: Man sucht eine Funktion $\chi_y(t)$ mit $\chi(0) = y$, sodaß $t \mapsto u(t, \chi_y(t))$ konstant ist, falls u eine Lösung der PDE ist. Damit kann man dann, sofern für jedes x genau ein y existiert mit $\chi_y(t) = x$, den Wert von $u(x, t)$ als $u^0(y)$ bestimmen. Die Kurven χ_y heißen *charakteristische Kurven* der Gleichung. Im Falle der Transportgleichung sind die charakteristischen Kurven durch $\chi_y(t) = ct + y$, also durch Geraden, gegeben. Entlang dieser Geraden ist jede Lösung also konstant. Wir werden diese Methode noch häufiger anwenden.

Im zweiten Beweis betrachtet man die Differenz zweier Lösungen, die wegen der Linearität wieder eine Lösung ist. Der Übergang von dieser Differenz w zu ihrem Quadrat in (2.3) heißt *Renormalisierung* und ist der einfachste Fall eines *relativen Energiearguments*, wie wir es auch noch öfter sehen werden. Obzwar wir für diese Methode kompakten Träger der Lösungen voraussetzen mußten (was aber hauptsächlich der Einfachheit halber geschah), ist sie auch dann wertvoll, wenn die Methode der Charakteristiken nicht anwendbar ist.

Beide Methoden können mitunter sogar bei nichtlinearen Gleichungen hilfreich sein.

KOROLLAR 2.3 (Maximumsprinzip und Erhaltungsgrößen). Für die Lösung der Transportgleichung (2.1) mit Anfangsdatum $u(\cdot, 0) = u^0 \in C^1(\mathbb{R})$ gilt:

(1)

$$\sup\{u(x, t) : (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)\} = \sup\{u^0(x) : x \in \mathbb{R}\}$$

sowie

$$\inf\{u(x, t) : (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)\} = \inf\{u^0(x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

(2) Für jede Funktion $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, für die $\beta(u^0)$ integrierbar ist, gilt für alle $t \geq 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \beta(u(x, t)) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \beta(u^0(x)) dx.$$

BEWEIS. Beide Aussagen folgen sofort aus Satz 2.1, da die Werte von u^0 lediglich um eine Konstante verschoben werden. \square

2.1.2. Höhere Dimensionen und variable Koeffizienten. Wir verallgemeinern die bisherige Diskussion in mehrfacher Hinsicht und betrachten dazu das Problem

$$\begin{aligned}\partial_t u(x, t) + b(x, t) \cdot \nabla u(x, t) &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n, \\ u(\cdot, 0) &= u^0,\end{aligned}\tag{2.4}$$

wobei $u : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ die gesuchte Funktion ist und $u^0 \in C^1(\mathbb{R}^n)$ sowie der Koeffizientenvektor $b : C^1(\mathbb{R}^n \times [0, \infty); \mathbb{R}^n)$ gegeben sind. Wir nehmen an, daß b beschränkt ist.

Das Vektorfeld b kann als ein Geschwindigkeitsfeld interpretiert werden, das eine ursprünglich durch u^0 gegebene Verteilung einer Substanz transportiert. Man stelle sich zum Beispiel eine Wolke vor, die durch die Dichte $u(x, t)$ der Wassertröpfchen am Ort $x \in \mathbb{R}^3$ zur Zeit t beschrieben wird; die Wolke wird dann durch Wind transportiert, dessen Geschwindigkeit am Ort x zur Zeit t durch das Vektorfeld $b(x, t)$ dargestellt ist. (Modelliert man diese Situation mit einer Transportgleichung, muß man allerdings die Trägheit der Wassertröpfchen vernachlässigen.) Während des Transports kann sich durchaus die Form und Ausdehnung der Wolke verändern.

Wir wollen zur Lösung des Problems (2.4) wieder auf die Methode der Charakteristiken zurückgreifen. Sei also für gegebenes $y \in \mathbb{R}^n$ wieder $\chi_y : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Kurve mit $\chi_y(0) = y$. Ist u eine Lösung von (2.4), so haben wir nach Kettenregel

$$\frac{d}{dt}u(\chi_y(t), t) = \partial_t u(\chi_y(t), t) + \chi_y'(t) \cdot \nabla u(\chi_y(t), t).$$

Dies ist gemäß Transportgleichung gleich null genau dann, wenn

$$\chi_y'(t) = b(\chi_y(t), t)\tag{2.5}$$

für alle $t \geq 0$. Dies ist eine *gewöhnliche* Differentialgleichung für χ_y . Wir nehmen folgende Tatsachen aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen zur Kenntnis:

- Für jedes $y \in \mathbb{R}^n$ existiert eine eindeutig bestimmte Lösung $\chi_y : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ von (2.5) mit $\chi_y(0) = y$.
- Für jedes $t \geq 0$ ist die Abbildung $\mathbb{R}^n \ni y \mapsto \chi_y(t)$ invertierbar. Dabei ist für festes t sowohl $y \mapsto \chi_y(t)$ als auch die Umkehrabbildung $x \mapsto \chi_x^{-1}(t)$ stetig differenzierbar¹.

Aus diesen Aussagen folgt sofort das folgende Resultat:

SATZ 2.4. Unter den gemachten Voraussetzungen existiert zu (2.4) eine eindeutige Lösung, nämlich

$$u(x, t) = u^0(\chi_x^{-1}(t)).$$

KOROLLAR 2.5 (Maximumsprinzip). Für die Lösung der Transportgleichung (2.4) mit Anfangsdatum $u(\cdot, 0) = u^0 \in C^1(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\sup\{u(x, t) : (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty)\} = \sup\{u^0(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$$

und

$$\inf\{u(x, t) : (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty)\} = \inf\{u^0(x) : x \in \mathbb{R}^n\}.$$

BEWEIS. Wir behandeln nur das Supremum, das Infimum geht analog. Es ist nur die Ungleichung \leq zu zeigen, da $u^0(x) = u(x, 0)$ ist. Sei also $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ beliebig, dann ist nach Satz 2.4

$$u(x, t) = u^0(\chi_x^{-1}(t)) \leq \sup\{u^0(x) : x \in \mathbb{R}^n\}.$$

□

¹Die Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, y \mapsto \chi_y(t)$ ist für festes t also ein *Diffeomorphismus* von \mathbb{R}^n .

Wie steht es mit Erhaltungssätzen? Gilt eine analoge Aussage zu Korollar 2.3 auch in unserer allgemeineren Situation? Die Antwort ist ja, sofern das Vektorfeld b divergenzfrei ist.

PROPOSITION 2.6. Sei $u^0 \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ und $b \in C^1(\mathbb{R}^n \times [0, \infty); \mathbb{R}^n)$ beschränkt. Es gelte außerdem

$$\operatorname{div} b(x, t) = 0 \quad \text{für alle } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty).$$

Dann gilt für jede Funktion $\beta \in C^1(\mathbb{R})$ mit $\beta(0) = 0$ und für alle $t \geq 0$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \beta(u(x, t)) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \beta(u^0(x)) dx.$$

BEWEIS. Multiplizieren wir die Transportgleichung mit $\beta'(u(x, t))$, so erhalten wir wegen $\partial_t u \beta'(u) = \partial_t \beta(u)$ und $b \cdot \nabla u \beta'(u) = b \cdot \nabla \beta(u)$ (Kettenregel!)

$$\partial_t \beta(u) + b \cdot \nabla \beta(u) = 0 \tag{2.6}$$

(wir haben also die Transportgleichung mit β renormalisiert).

Nach Produktregel ist außerdem

$$b \cdot \nabla \beta(u) = \operatorname{div}(\beta(u)b) - \beta(u) \operatorname{div} b = \operatorname{div}(\beta(u)b),$$

wobei wir im letzten Schritt die Divergenzfreiheit von b verwendet haben. Also lautet die renormalisierte Transportgleichung

$$\partial_t \beta(u) + \operatorname{div}(\beta(u)b) = 0. \tag{2.7}$$

Da $u(\cdot, t)$ für jedes $t \geq 0$ kompakten Träger hat (Übungsblatt 2), gilt dies auch für $\beta(u)b$. Sei der Träger von u zur Zeit t enthalten im Würfel $[-K, K]^n$. Dann haben wir

$$\int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div}(\beta(u)b) dx = \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_j}(\beta(u)b_j) dx,$$

und für jedes j gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_j}(\beta(u)b_j) dx = \int_{-K}^K \dots \left(\int_{-K}^K \partial_{x_j}(\beta(u)b_j) dx_j \right) dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_n = 0,$$

da das innere Integral nach Hauptsatz gleich null ist².

Insgesamt erhalten wir also durch Integration von (2.7) bzgl. x

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} \beta(u(x, t)) dx = 0,$$

also ist das Integral konstant in der Zeit und somit stets gleich $\int_{\mathbb{R}^n} \beta(u^0(x)) dx$, wie behauptet. \square

Man beachte, daß wir in diesem Beweis (der die Methode der Renormalisierung benutzt) nicht auf die Darstellung der Lösung aus Satz 2.4 zurückgreifen mußten.

KOROLLAR 2.7 (Maßerhaltung des Flusses). Sei $b \in C^1(\mathbb{R}^n \times [0, t]; \mathbb{R}^n)$ beschränkt und für jedes $t \geq 0$ divergenzfrei. Dann ist der zugehörige Fluß $\chi_x(t)$ maßerhaltend, das heißt:

$$\lambda(\chi_x(t)(\Omega)) = \lambda(\Omega),$$

wobei λ das n -dimensionale LEBESGUE-Maß bezeichnet.

²Dies ist ein Spezialfall des GAUSSSchen Integrationsssatzes.

BEWEIS. Wir geben keinen rigorosen Beweis, sondern „schummeln“ an einer Stelle³.

Bezeichne mit $\mathbb{1}_\Omega$ die Indikatorfunktion einer meßbaren Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, also $\mathbb{1}_\Omega(x) = 1$ falls $x \in \Omega$ und $\mathbb{1}_\Omega(x) = 0$ sonst. Wir setzen für gegebenes Ω $u^0 := \mathbb{1}_\Omega$ und bezeichnen mit u die zugehörige Lösung der Transportgleichung. (Beachte, daß dieses u^0 nicht stetig differenzierbar ist und wir es daher eigentlich nicht als Anfangsdatum verwenden dürften.) Dann ist nach Satz 2.4

$$u(x, t) = \mathbb{1}_\Omega(\chi_x^{-1}(t)),$$

also haben wir

$$\begin{aligned} \lambda(\chi_*(t)(\Omega)) &= \lambda(\{\chi_x(t) : x \in \Omega\}) \\ &= \lambda(\{y \in \mathbb{R}^n : \chi_y^{-1}(t) \in \Omega\}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_\Omega(\chi_y^{-1}(t)) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u(y, t) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u^0(x) dx = \lambda(\Omega), \end{aligned}$$

wo wir für die vorletzte Gleichheit Proposition 2.6 verwendet haben (mit $\beta(s) = s$). \square

Zur Interpretation: Betrachte ein Teilchen (z.B. ein Wassertröpfchen), das sich zur Zeit $t = 0$ an der Position $x \in \mathbb{R}^n$ befindet und das durch das Vektorfeld b transportiert wird. Das bedeutet, die Geschwindigkeit des Teilchens zur Zeit t ist durch das Vektorfeld b , ausgewertet an der aktuellen Position des Teilchens, gegeben. Sei $\chi_x(t)$ die Position des Teilchens zur Zeit t , dann sagt die Gleichung

$$\chi'_x(t) = b(\chi_x(t), t)$$

genau dies aus.

Für ein festes t betrachte den Diffeomorphismus $\chi_*(t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, der x auf $y := \chi_x(t)$ abbildet. Jeder Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ wird also auf denjenigen Punkt abgebildet, auf das ein bei x startendes Teilchen nach Zeit t transportiert wird.

Angenommen nun, wir betrachten ein Gebiet Ω (etwa das Gebiet, über das sich eine Wolke erstreckt). Dann gibt $\chi_*(t)(\Omega)$ dasjenige Gebiet an, in das Ω nach Zeit t transportiert wurde. Korollar 2.7 besagt dann, daß bei divergenzfreiem Transport das Volumen von Ω in der Zeit erhalten bleibt. Typischerweise ist dies beim Transport durch inkompressible Flüssigkeiten (z.B. Wasser) der Fall, beim Transport durch Gase (z.B. Luft) nicht.

2.1.3. Anwendung: strukturierte Populationsdynamik. Wir besprechen eine Anwendung aus der mathematischen Biologie: die *Erneuerungsgleichung*, bei der es sich um eine eindimensionale Transportgleichung mit inhomogenen Randwerten handelt. Unsere Darstellung lehnt sich an [6] an. Das Modell geht auf MCKENDRICK und VON FOERSTER zurück und lautet

$$\begin{aligned} \partial_t n(x, t) + \partial_x n(x, t) &= 0, \\ n(0, t) &= \int_0^\infty B(y) n(y, t) dy, \\ n(x, 0) &= n^0(x). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Hierbei ist $n : [0, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ die gesuchte Funktion und $n^0 : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sowie $B : [0, \infty)$ gegeben. Wir setzen stets $n^0, B \geq 0$ voraus.

Die Interpretation lautet folgendermaßen: $n(x, t)$ ist die Anzahl der Individuen zur Zeit t , deren Alter x beträgt. Dabei war die Altersverteilung zur Startzeit $t = 0$ durch n^0

³Man kann mit etwas mehr Aufwand natürlich zeigen, daß die Schummelei hier gerechtfertigt ist.

gegeben. Die Transportgleichung (erste Gleichung in (2.8)) besagt schlicht, daß in jeder Zeiteinheit jedes Individuum um eine Zeiteinheit altert. Dazu nehme man zunächst $B = 0$ an, dann wäre die Lösung von (2.8) gegeben durch $n(x, t) = n^0(x - t)$, d.h. wenn ein Individuum zur Zeit t das Alter x hat, so hatte es zur Zeit $t = 0$ das Alter $x - t$.

Nun kommt aber noch ein Vermehrungseffekt hinzu (zweite Gleichung/Randbedingung): Ist $B(y)$ die Anzahl der Nachkommen, die ein Individuum des Alters x während einer Zeiteinheit zeugt, so ist die Gesamtzahl der Neugeborenen zur Zeit t gegeben durch das Integral von $B(y)n(y, t)$ über alle Altersklassen y . Da die Neugeborenen Alter null haben, entspricht dies dem Wert $n(0, t)$.

Es handelt sich hierbei um das einfachste Modell der *strukturierten Populationsdynamik*, wobei die Strukturvariable x hier als Alter interpretiert wird. In ähnlichen Modellen [6] kann x aber auch die Größe einer Zelle oder den Aufenthaltsort eines Individuums bezeichnen.

Unser Ziel ist es, die Langzeitasymptotik, also das Verhalten der Lösung mit $t \rightarrow \infty$, zu untersuchen. Dazu müßten wir zunächst sicherstellen, daß eine Lösung für alle Zeiten $t \in [0, \infty)$ existiert. Dazu zitieren wir ohne Beweis die folgende Existenzaussage (zum Beweis siehe [6, Theorem 3.1]):

SATZ 2.8 (Existenz und Eindeutigkeit). Sei $n^0 \in C_c^1([0, \infty))$ mit $n^0 \geq 0$ und $B \in C_c([0, \infty))$ mit

$$n^0(0) = \int_0^\infty B(y)n^0(y)dy$$

und $B \geq 0$ sowie $\int_0^\infty B(y)dy > 1$.

Dann existiert eine eindeutige Lösung $n \in C^1([0, \infty)^2)$ von (2.8), die für jedes $t \geq 0$ kompakten Träger in x hat. Außerdem ist $n \geq 0$.

Die Bedingung $\int_0^\infty B(y)dy > 1$ stellt sicher, daß die Gesamtpopulation mit der Zeit exponentiell wächst⁴. Für die Langzeitasymptotik müssen wir dieses Wachstum „rausdividieren“, um überhaupt eine Konvergenzaussage erhoffen zu können. Dazu stellen wir zunächst fest, daß ein eindeutig bestimmtes λ_0 existiert (der sogenannte MALTHUS-Parameter), so daß

$$\int_0^\infty B(y)e^{-\lambda_0 y}dy = 1.$$

In der Tat, die Abbildung $\lambda \mapsto \int_0^\infty B(y)e^{-\lambda y}dy$ ist bei $\lambda = 0$ nach Voraussetzung größer als 1 und konvergiert für $\lambda \rightarrow \infty$ gegen null, da der Integrand $B(y)e^{-\lambda y}$ für jedes $y > 0$ monoton fallend gegen null konvergiert. Die Existenz von λ_0 folgt somit aus dem Zwischenwertsatz. Die Eindeutigkeit folgt daraus, daß die Abbildung $\lambda \mapsto \int_0^\infty B(y)e^{-\lambda y}dy$ streng monoton fällt.

Um, wie besprochen, das exponentielle Wachstum wegzuskalieren, definieren wir $\tilde{n}(x, t) := e^{-\lambda_0 t}n(x, t)$. Da n eine Lösung von (2.8) ist, haben wir

$$\partial_t \tilde{n}(x, t) + \partial_x \tilde{n}(x, t) = e^{-\lambda_0 t}(\partial_t n(x, t) + \partial_x n(x, t)) - \lambda_0 \tilde{n}(x, t) = -\lambda_0 \tilde{n}(x, t),$$

$$\tilde{n}(0, t) = e^{-\lambda_0 t} \int_0^\infty B(y)n(y, t)dy = \int_0^\infty B(y)\tilde{n}(y, t)dy,$$

⁴Man beachte, daß in unserem Modell die Individuen nicht sterben können; um diese unrealistische Annahme zu beseitigen, kann man das Modell um eine positive Sterberate ergänzen. Der Einfachheit halber verzichten wir darauf.

und $\tilde{n}(x, 0) = n^0(x)$. Insgesamt erhalten wir für \tilde{n} also das Anfangs- und Randwertproblem

$$\begin{aligned}\partial_t \tilde{n}(x, t) + \partial_x \tilde{n}(x, t) + \lambda_0 \tilde{n}(x, t) &= 0, \\ \tilde{n}(0, t) &= \int_0^\infty B(y) \tilde{n}(y, t) dy, \\ \tilde{n}(x, 0) &= n^0(x).\end{aligned}\tag{2.9}$$

Man kann nun vermuten, daß für $t \rightarrow \infty$ die Lösung \tilde{n} gegen die zeitunabhängige Version von (2.9) konvergiert. Um dies zu zeigen, definieren wir zwei Funktionen auf $[0, \infty)$, nämlich

$$N(x) := \lambda_0 e^{-\lambda_0 x},$$

$$\phi(x) := \gamma \int_x^\infty B(y) e^{\lambda_0(x-y)} dy,$$

wobei $\gamma > 0$ so bestimmt ist, daß $\int_0^\infty N(x) \phi(x) dx = 1$ (man überlege sich, warum das in eindeutiger Weise möglich ist!). Man beachte, daß N die stationäre Version von (2.9) löst, also

$$\begin{aligned}N'(x) + \lambda_0 N(x) &= 0, \\ N(0) &= \int_0^\infty B(y) N(y) dy,\end{aligned}\tag{2.10}$$

und außerdem $\int_0^\infty N(x) dx = 1$. Wir wollen also zeigen, daß \tilde{n} für $t \rightarrow \infty$ gegen (ein konstantes Vielfaches von) N konvergiert.

Die Definition von ϕ dagegen erscheint zunächst recht willkürlich. Entscheidend für den Fortgang unserer Untersuchung ist, daß

$$-\phi'(x) + \lambda_0 \phi(x) = \phi(0) B(x),\tag{2.11}$$

wobei auch $\phi(0) = \gamma$ zu beachten ist.

SATZ 2.9 (relative Entropieungleichung). Gegeben die Voraussetzungen von Satz 2.8. Sei $H : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ stetig differenzierbar und konvex, und es gelte $H(0) = 0$. Dann gilt für alle $t > 0$

$$\int_0^\infty \phi(x) N(x) H\left(\frac{\tilde{n}(x, t)}{N(x)}\right) dx \leq \int_0^\infty \phi(x) N(x) H\left(\frac{n^0(x)}{N(x)}\right) dx,\tag{2.12}$$

und mit $\mu(x) := B(x) e^{-\lambda_0 x} = B(x) \frac{N(x)}{N(0)}$ gilt

$$\begin{aligned}\phi(0) N(0) \int_0^\infty \left[\int_0^\infty H\left(\frac{\tilde{n}(x, t)}{N(x)}\right) \mu(x) dx - H\left(\frac{\tilde{n}(x, t)}{N(x)}\right) \mu(x) dx \right] dt \\ \leq \int_0^\infty \phi(x) N(x) H\left(\frac{n^0(x)}{N(x)}\right) dx.\end{aligned}\tag{2.13}$$

BEWEIS. Es ist $\frac{\tilde{n}}{N} = \frac{1}{\lambda_0} e^{\lambda_0(x-t)} n$, und sowohl $\frac{1}{\lambda_0} e^{\lambda_0(x-t)}$ als auch n erfüllen die Transportgleichung $\partial_t u + \partial_x u = 0$. Mit der Produktregel sieht man dann, daß auch $\frac{\tilde{n}}{N}$ diese Gleichung erfüllt, also

$$\partial_t \frac{\tilde{n}}{N} + \partial_x \frac{\tilde{n}}{N} = 0.$$

Wenn wir diese Gleichung mit H renormalisieren (d.h. auf beiden Seiten mit $H' \left(\frac{\tilde{n}}{N} \right)$ multiplizieren), erhalten wir⁵

$$\partial_t H \left(\frac{\tilde{n}}{N} \right) + \partial_x H \left(\frac{\tilde{n}}{N} \right) = 0.$$

Multiplikation mit $N\phi$ auf beiden Seiten liefert

$$\partial_t \left[N\phi H \left(\frac{\tilde{n}}{N} \right) \right] + \partial_x \left[N\phi H \left(\frac{\tilde{n}}{N} \right) \right] = -(N'\phi + N\phi') H \left(\frac{\tilde{n}}{N} \right) = -\phi(0)BNH \left(\frac{\tilde{n}}{N} \right),$$

wobei wir im letzten Schritt die Gleichungen (2.10) und (2.11) benutzt haben.

Schließlich integrieren wir diese letzte Identität in x und erhalten somit durch partielle Integration

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_0^\infty N\phi H \left(\frac{\tilde{n}}{N} \right) dx \\ &= N(0)\phi(0)H \left(\frac{\tilde{n}(0,t)}{N(0)} \right) - N(0)\phi(0) \int_0^\infty H \left(\frac{\tilde{n}(x,t)}{N(x)} \right) \mu(x) dx \\ &= N(0)\phi(0)H \left(\int_0^\infty \frac{\tilde{n}(x,t)}{N(x)} \mu(x) dx \right) - N(0)\phi(0) \int_0^\infty H \left(\frac{\tilde{n}(x,t)}{N(x)} \right) \mu(x) dx, \end{aligned}$$

wo wir im letzten Schritt die Randbedingung für \tilde{n} und die Definition von μ verwendet haben. Beachten wir, daß $\int_0^\infty \mu(x) dx = 1$ (nach Wahl von λ_0 !) und somit $\mu(x) dx$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $[0, \infty)$ ist, so ist nach der JENSENSchen Ungleichung⁶ die letzte Zeile nichtpositiv, also folgt sofort (2.12). Auch (2.13) folgt daraus nach Integration in t über das Intervall $[0, \infty)$. \square

Damit kann man das gewünschte Resultat zur Langzeitasymptotik zeigen:

KOROLLAR 2.10. Sei $m^0 := \int_0^\infty n^0(x)\phi(x) dx$. Unter den Voraussetzungen von Satz 2.8 gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^\infty |\tilde{n}(x,t) - m^0 N(x)| \phi(x) dx = 0. \quad (2.15)$$

Der Beweis kann unter [6, Theorem 3.4] nachgelesen werden; da er nicht ganz einfach ist, verzichten wir hier darauf. Die Grundidee aber ist die folgende: Aus (2.13) folgt, daß die Abbildung

$$R : t \mapsto \int_0^\infty H \left(\frac{\tilde{n}(x,t)}{N(x)} \right) \mu(x) dx - H \left(\int_0^\infty \frac{\tilde{n}(x,t)}{N(x)} \mu(x) dx \right)$$

nichtnegativ und integrierbar ist; daher existiert eine Folge $t_k \nearrow \infty$ von Zeiten, sodaß $\lim_{k \rightarrow \infty} R(t_k) = 0$. Man kann zeigen, daß diese Konvergenz sogar für $t \rightarrow \infty$ (nicht nur entlang einer spezifischen Folge) Bestand hat. Die JENSEN-Ungleichung besagt dann, daß $R(t) = 0$ genau dann, wenn $\frac{\tilde{n}(x,t)}{N(x)}$ in x konstant ist; man kann sogar zeigen, daß die Konvergenz $R(t) \rightarrow 0$ impliziert, daß $\frac{\tilde{n}(x,t)}{N(x)}$ mit $t \rightarrow \infty$ gegen eine Konstante konvergiert, und daß der Wert dieser Konstanten gerade m^0 ist. Daraus folgt, daß der „finale Zustand“ von n gerade durch $m^0 N(x)$ gegeben ist.

⁵wie in (2.3) oder (2.6).

⁶Die JENSEN-Ungleichung, die Sie vielleicht aus der Maßtheorie oder der Stochastik kennen, besagt: Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μ -integrierbar und $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konvex, so gilt

$$\int_\Omega H(f(x)) d\mu(x) \geq H \left(\int_\Omega f(x) d\mu(x) \right). \quad (2.14)$$

Ist H sogar strikt konvex (z.B. wenn H zweimal differenzierbar ist mit $H'' > 0$), so gilt Gleichheit in (2.14) genau dann, wenn f konstant ist.

2.2. Skalare Erhaltungssätze

Wir betrachten nun eine Klasse *nichtlinearer* PDE, die man als Verallgemeinerungen der Transportgleichung ansehen kann. Es geht im folgenden um Gleichungen der Form

$$\partial_t u(x, t) + \operatorname{div}(f(u(x, t))) = 0, \quad (2.16)$$

wobei

- $u : \mathbb{R}^n \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ gesucht und
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ der gegebene *Flux*⁷ ist.

Wählt man $n = 1$ und f linear, nämlich als $f(u) = bu$ für ein $b \in \mathbb{R}$, so erhält man wieder die eindimensionale Transportgleichung (mit konstantem Koeffizienten). Wir interessieren uns nun aber für den Fall eines nichtlinearen Fluxes.

Das bekannteste Beispiel einer solchen Erhaltungsgleichung ist die BURGERS-Gleichung mit $n = 1$ und $f(u) = \frac{u^2}{2}$, also

$$\partial_t u(x, t) + \frac{1}{2} \partial_x (u(x, t)^2) = 0, \quad (2.17)$$

auf die wir gleich zurückkommen. Sie wurde als ein vereinfachtes Modell („toy model“) der Turbulenztheorie eingeführt, weil sie eine sehr grobe Ähnlichkeit zu den NAVIER-STOKES-Gleichungen aufweist⁸.

Ehrlicherweise muß man zugeben, daß die physikalische Relevanz von *skalaren* Erhaltungssätzen sehr begrenzt ist. Viel wichtiger sind *Systeme* von Erhaltungssätzen, die ebenfalls die Form (2.16) haben, wobei allerdings $u : \mathbb{R}^n \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ ist. Solche Systeme spielen eine entscheidende Rolle in der Gas- und Fluidodynamik. Leider existiert für solche Systeme, im Gegensatz zu skalaren Erhaltungsgleichungen, keine befriedigende mathematische Theorie⁹.

2.2.1. Lokale Wohlgestelltheit. Betrachten wir für den Fall $n = 1$ also eine Erhaltungsgleichung

$$\partial_t u(x, t) + \partial_x (f(u(x, t))) = 0 \quad (2.18)$$

mit Anfangsbedingung $u(x, 0) = u^0(x)$. Hier ist $u : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gesucht. In den Übungen haben Sie im Spezialfall der BURGERS-Gleichung bereits die charakteristischen Kurven dieser Gleichung berechnet. Für allgemeine (stetig differenzierbare) Nichtlinearitäten f geht es ganz genauso: Sei $\chi_y : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differentierbare Kurve mit $\chi_y(0) = y$ und u eine Lösung von (2.18), so gilt

$$\frac{d}{dt} u(\chi_y(t), t) = \partial_t u(\chi_y(t), t) + \partial_x u(\chi_y(t), t) \chi_y'(t).$$

Da nach Kettenregel $\partial_x (f(u)) = f'(u) \partial_x u$, ist u entlang der Kurve χ_y konstant, sofern $\chi_y'(t) = f'(u(\chi_y(t), t)) = f'(u^0(y))$. Die Charakteristiken sind also durch $\chi_y(t) = y + f'(u^0(y))t$ gegeben.

⁷englisch: *flux*. Der englische Begriff *flux* wird meist als *Fluß* übersetzt; ich bevorzuge die Übersetzung *Flux*, um *Fluß* für den englischen Begriff *flow* zu reservieren.

⁸In der Tat: Wenn wir in (1.9) alle interessanten Terme bis auf $(u \cdot \nabla)u$ weglassen und $n = 1$ setzen, erhalten wir BURGERS.

⁹Man hatte in den letzten Jahrzehnten gehofft, die eindrucksvollen Fortschritte aus der skalaren Theorie auf Systeme zu übertragen; dieses Forschungsprogramm muß inzwischen als weitgehend gescheitert angesehen werden. Der Fields-Medaillenträger Peter LAX hat das Fehlen einer Existenz- und Eindeigkeitstheorie für Systeme hyperbolischer Erhaltungssätze als „wissenschaftlichen Skandal“ beklagt.

PROPOSITION 2.11. Sei $u^0 \in C^1(\mathbb{R})$ beschränkt mit beschränkter Ableitung und $f \in C^2(\mathbb{R})$. Dann existiert ein $T > 0$, sodaß für jedes $t \in [0, T)$ die Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y \mapsto \chi_y(t)$ ein Diffeomorphismus¹⁰ ist.

BEWEIS. Für festes $t \geq 0$ ist $y \mapsto \chi_y(t) = y + tf'(u^0(y))$ stetig differenzierbar mit

$$\frac{d}{dy}\chi_y(t) = 1 + tf''(u^0(y))(u^0)'(y).$$

Setze $M := \sup_{y \in \mathbb{R}} |f''(u^0(y))(u^0)'(y)|$, was nach Voraussetzung endlich ist. Ist also $t < T := M^{-1}$, so existiert ein $c > 0$ (abhängig von t), sodaß $\frac{d}{dy}\chi_y(t) \geq c$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Die Abbildung $y \mapsto \chi_y(t)$ ist also streng monoton steigend und die Ableitung ist überall mindestens c . Daher bildet $\chi_y(t)$ nach ganz \mathbb{R} ab und ist dort umkehrbar. Nach dem Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion ist die Umkehrfunktion überall stetig differenzierbar mit

$$\frac{d}{dx}\chi_x^{-1}(t) = \frac{1}{1 + tf''(u^0(y))(u^0)'(y)},$$

wobei $y := \chi_x^{-1}(t)$. Da dies auf ganz \mathbb{R} stetig ist, ist die Proposition bewiesen. \square

KOROLLAR 2.12 (Lokale Wohlgestelltheit). Sei $f \in C^2(\mathbb{R})$ und $u^0 \in C^1(\mathbb{R})$ mit beschränkter Ableitung. Dann existiert $T > 0$, sodaß (2.18) mit Anfangsbedingung $u(\cdot, 0) = u^0$ eine eindeutige Lösung $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0, T))$ hat.

BEWEIS. Es genügt, wie gewohnt $u(x, t) = u^0(\chi_x^{-1}(t))$ mit den oben beschriebenen Charakteristiken zu setzen. \square

Wie sieht es jenseits der Existenzzeit T aus? Kann man vielleicht die Lösung über T hinaus erweitern? Mit der Methode der Charakteristiken jedenfalls kommen wir nicht weiter, denn die Charakteristiken definieren über T hinaus in vielen Fällen keine Bijektion mehr.

Betrachte dazu die BURGERS-Gleichung, deren Charakteristiken durch $\chi_y(t) = y + tu^0(y)$ gegeben sind. Wähle irgendein Anfangsdatum $u^0 \in C^1(\mathbb{R})$ mit der Eigenschaft

$$u^0(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \leq -1, \\ -1 & \text{falls } x \geq 1. \end{cases}$$

Dann gilt einerseits $\chi_{-1}(1) = -1 + u^0(-1) = 0$ und andererseits $\chi_1(1) = 1 + u^0(1) = 0$, also kreuzen sich zum Zeitpunkt $T = 1$ die von -1 und $+1$ startenden charakteristischen Kurven, und die Abbildung $y \mapsto \chi_y(1)$ ist nicht injektiv. Würden wir mit unserer Formel $u(x, t) = u^0(\chi_x^{-1}(t))$ den Wert von $u(0, 1)$ bestimmen wollen, so bekämen wir zwei verschiedene Werte ± 1 heraus, was nicht sein kann.

Für Werte $x < 0$ gibt die Methode der Charakteristiken allerdings (zumindest, wenn u^0 auch im Intervall $(-1, 1)$ angemessen gewählt wird) den eindeutigen Wert $u(x, 1) = 1$, und für $x > 0$ den Wert $u(x, 1) = -1$. Es scheint also, daß die Lösung zum Zeitpunkt $T = 1$ durch die *unstetige* Funktion

$$u(x, 1) = \begin{cases} +1 & \text{falls } x < 0, \\ -1 & \text{falls } x > 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

gegeben ist.

Wie aber kann eine unstetige (und damit erst recht nicht differenzierbare) Funktion die Lösung einer Differentialgleichung sein? Wir könnten nun entweder aufgeben, indem wir sagen, die Lösung existiere nur im Zeitraum $[0, 1)$ und besitze für $t \nearrow 1$ einen unstetigen

¹⁰Erinnerung: Ein Diffeomorphismus ist eine Bijektion, die stetig differenzierbar ist und deren Umkehrfunktion ebenfalls stetig differenzierbar ist. Man überlege sich ein Beispiel einer stetig differenzierbaren Bijektion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, deren Umkehrfunktion nicht differenzierbar ist.

punktweisen Limes; oder wir überlegen uns, ob und in welcher Weise nicht doch eine unstetige Funktion Lösung der BURGERS-Gleichung sein kann, und wie sich diese Lösung dann auch für Zeiten $t > 1$ verhält.

Die zweite Strategie ist nicht zuletzt physikalisch motiviert: Das Phänomen der Überkreuzung zweier charakteristischer Kurven mit der Ausbildung einer Unstetigkeit ist als Entstehung einer *Schockwelle* bzw. *Druckwelle* bekannt und ist z.B. hörbar als Knall, wenn ein Flugzeug die Schallmauer durchbricht. Wenn man die Dynamik der Schockwelle verstehen will, muß man also eine Erhaltungsgleichung auch nach dem kritischen Zeitpunkt irgendwie lösen.

Aus mathematischer Sicht zeigt unsere Diskussion, daß *selbst bei glatten Anfangsdaten* die Lösung einer Erhaltungsgleichung in endlicher Zeit *singulär* (in diesem Falle unstetig) werden kann. Wir sehen später Gleichungen, bei denen es sich genau andersherum verhält.

2.2.2. Schwache Lösungen. Zunächst erinnern wir uns an die eindimensionale Transportgleichung $\partial_t u + \partial_x u = 0$, deren Lösung ja als $u(x, t) = u^0(x - t)$ ermittelt wurde. Nun ist diese Lösungsformel immer noch sinnvoll, wenn u^0 nicht mehr stetig differenzierbar ist; in der Tat könnte man sagen, die Lösung der Transportgleichung sei für eine *beliebige* Anfangsfunktion $u^0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $u^0(x - t)$ gegeben.

Bei den Erhaltungssätzen liegt die Sachlage nicht so einfach, weil die Methode der Charakteristiken eben im allgemeinen keine eindeutige Lösungsformel liefert. Wir gehen stattdessen folgendermaßen vor:

Betrachte die Erhaltungsgleichung (2.16) mit $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ und $u^0 \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Nehmen wir zunächst an, es sei $u \in C^1(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ eine Lösung des Anfangswertproblems. Sei $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ beliebig gewählt (eine sogenannte *Testfunktion*), dann können wir die Gleichung mit ϕ multiplizieren und sodann in x und t integrieren:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} [\phi(x, t) \partial_t u(x, t) + \phi(x, t) \operatorname{div} f(u(x, t))] dx dt = 0.$$

Nach Produktregel gilt $\phi \operatorname{div} f(u) = -\nabla \phi \cdot f(u) + \operatorname{div}(\phi f(u))$. Mit partieller Integration stellt man aber leicht fest¹¹, daß $\int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} w(x) dx = 0$ für alle $w \in C_c^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, und aus beiden Beobachtungen zusammen folgt

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x, t) \operatorname{div} f(u(x, t)) dx dt = - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \nabla \phi(x, t) \cdot f(u(x, t)) dx dt.$$

Partielle Integration in der Zeit ergibt zudem

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x, t) \partial_t u(x, t) dx dt = - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \partial_t \phi(x, t) u(x, t) dx dt - \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x, 0) u^0(x) dx$$

(beachte, daß $\phi(x, T) = 0$ nach Voraussetzung!). Insgesamt haben wir also

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} [\partial_t \phi(x, t) u(x, t) + \nabla \phi(x, t) \cdot f(u(x, t))] dx dt + \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x, 0) u^0(x) dx = 0. \quad (2.20)$$

Erfüllt umgekehrt $u \in C^1(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ die Gleichung (2.20) für alle $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^n \times [0, T])$, so erhält man mit den gleichen Argumenten (partielle Integration)

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x, t) (\partial_t u(x, t) + \operatorname{div} f(u(x, t))) dx dt = 0$$

für alle ϕ , und daraus folgt (Übung) $\partial_t u + \operatorname{div}(f(u)) = 0$ sowie $u(\cdot, 0) = u^0$. Es ist also (2.20) eine äquivalente Formulierung des ursprünglichen Anfangswertproblems.

¹¹Dies ist ein Spezialfall des GAUSSSchen Integralsatzes.

Was nützt uns nun dies? Die entscheidende Beobachtung liegt darin, daß (2.20) immer noch sinnvoll ist, wenn u nicht mehr als differenzierbar vorausgesetzt wird. In der Tat, damit die Integrale in (2.20) wohldefiniert sind, genügen folgende Voraussetzungen:

- u^0 ist lokal integrierbar auf \mathbb{R}^n (das heißt: Auf jeder kompakten Teilmenge von \mathbb{R}^n ist u^0 integrierbar)
- u ist lokal integrierbar auf $\mathbb{R}^n \times [0, T)$.

Den Flux f nehmen wir als stetig an, sodaß mit u auch $f(u)$ lokal integrierbar ist.

DEFINITION 2.13 (Schwache Lösung). Sei $0 < T \leq \infty$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und $u^0: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ lokal integrierbar. Dann heißt eine lokal integrierbare Funktion $u: \mathbb{R}^n \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ *schwache Lösung* des Anfangswertproblems

$$\partial_t u + \operatorname{div}(f(u)) = 0, \quad u(\cdot, 0) = u^0,$$

wenn für jedes $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^n \times [0, T))$ gilt:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} [\partial_t \phi(x, t) u(x, t) + \nabla \phi(x, t) \cdot f(u(x, t))] dx dt + \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x, 0) u^0(x) dx = 0.$$

Diese Idee, eine PDE umzuformulieren, indem man alle Ableitungen durch partielle Integration auf eine Testfunktion schiebt und die so erhaltene Gleichheit zur Grundlage einer Definition der schwachen Lösung macht, ist für die moderne Theorie der partiellen Differentialgleichungen von grundlegender Bedeutung.

BEISPIEL 2.14 (Schockwelle für BURGERS). Betrachte erneut die BURGERS-Gleichung $\partial_t u + \frac{1}{2} \partial_x(u^2) = 0$. Wir zeigen, daß durch

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x < \frac{t}{2}, \\ 0 & \text{falls } x > \frac{t}{2} \end{cases}$$

eine schwache Lösung gegeben ist. Sei dazu $\phi \in C_c^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$, dann ist

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \left[\partial_t \phi u + \frac{1}{2} \partial_x \phi u^2 \right] dx dt = \int_0^\infty \int_{\{x < \frac{t}{2}\}} \left[\partial_t \phi + \frac{1}{2} \partial_x \phi \right] dx dt \\ &= \int_{-\infty}^0 \int_0^\infty \partial_t \phi(x, t) dt dx + \int_0^\infty \int_{2x}^\infty \partial_t \phi(x, t) dt dx + \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\frac{t}{2}} \partial_x \phi(x, t) dx dt \\ &= - \int_{-\infty}^0 \int_0^\infty \phi(x, 0) dx - \int_0^\infty \phi(x, 2x) dx + \frac{1}{2} \int_0^\infty \phi\left(\frac{t}{2}, t\right) dt \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty \phi(x, 0) u^0(x) dx \end{aligned}$$

mit

$$u^0(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x < 0, \\ 0 & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

Hierbei haben sich die letzten beiden Integrale in der vorletzten Zeile gegenseitig gelöscht (die Gleichheit der Integrale erkennt man mit der Substitution $x = \frac{t}{2}$).

Diese schwache Lösung beschreibt also die Bewegung einer Schockwelle, die ursprünglich bei $x = 0$ loziert war, mit konstanter Geschwindigkeit $\frac{1}{2}$ nach rechts.

Im eben diskutierten Beispiel haben wir die schwache Lösung, insbesondere die Geschwindigkeit der Schockwelle, lediglich erraten. Können wir die Lösung in systematischerer Weise finden?

2.2.3. RANKINE-HUGONIOT-Bedingung. Wir verallgemeinern Beispiel 2.14 nun in folgender Weise: Wir betrachten wieder einen allgemeinen eindimensionalen Erhaltungssatz der Form (2.18) und nehmen an, $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ sei durch eine stetig differenzierbare Kurve $C \subset \mathbb{R} \times [0, \infty)$, $C = \{(\gamma(t), t) : t \geq 0\}$ in zwei Teilgebiete Ω_l und Ω_r geteilt. Auf Ω_l und Ω_r sei eine schwache Lösung u von (2.18) jeweils bis zum Rand stetig differenzierbar, entlang C darf u jedoch unstetig sein. Daß diese Konfiguration nicht völlig willkürlich ist, zeigt Beispiel 2.14 (in diesem Falle ist $C = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty) : x = \frac{t}{2}\}$, und $\gamma(t) = \frac{t}{2}$). Wir wollen nun die Kurve C untersuchen.

Wir verwenden dazu folgende Terminologie: Für jedes $(x, t) \in C$ bezeichne $n(x, t) = (n_1, n_2)(x, t)$ die Einheitsnormale an die Kurve C im Punkt (x, t) , die von Ω_l nach Ω_r weist. Aufgrund der Parametrisierung γ von C gilt

$$n(\gamma(t), t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma'(t)^2}}(1, -\gamma'(t)). \quad (2.21)$$

In einem Punkt $(x, t) \in C$ schreiben wir u_l für den linksseitigen und u_r für den rechtsseitigen Limes von u im Punkt (x, t) . Für $\phi \in C_c^1(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ gelten (als Spezialfälle des GAUSSSchen Integralsatzes) die partiellen Integrationsregeln

$$\int_{\Omega_l} u \partial_t \phi dx dt = - \int_{\Omega_l} \partial_t u \phi dx dt + \int_C u_l \phi n_2 dS \quad (2.22)$$

und

$$\int_{\Omega_l} f(u) \partial_x \phi dx dt = - \int_{\Omega_l} \partial_x f(u) \phi dx dt + \int_C f(u_l) \phi n_1 dS \quad (2.23)$$

mit analogen Formeln für Ω_r . Hierbei sind die Kurvenintegrale wie folgt definiert: Ist g stetig mit kompaktem Träger auf C , so ist

$$\int_C g dS := \int_0^\infty g(\gamma(t), t) \sqrt{1 + \gamma'(t)^2} dt. \quad (2.24)$$

Sei also $\phi \in C_c^1(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ (insbesondere $\phi(\cdot, 0) = 0$), so ist, da ja u schwache Lösung ist, nach Definition 2.13

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} (\partial_t \phi u + \partial_x \phi f(u)) dx dt \\ &= \int_{\Omega_l} (\partial_t \phi u + \partial_x \phi f(u)) dx dt + \int_{\Omega_r} (\partial_t \phi u + \partial_x \phi f(u)) dx dt \\ &= - \int_{\Omega_l} \phi (\partial_t u + \partial_x f(u)) dx dt - \int_{\Omega_r} \phi (\partial_t u + \partial_x f(u)) dx dt \\ &\quad + \int_C \phi (u_l - u_r) n_2 + \phi (f(u_l) - f(u_r)) n_1 dS \\ &= \int_C \phi [(u_l - u_r) n_2 + (f(u_l) - f(u_r)) n_1] dS, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt ausgenutzt haben, daß u auf Ω_l und Ω_r die Gleichung jeweils punktweise löst.

Da ϕ beliebig war, folgt

$$(u_l - u_r) n_2 + (f(u_l) - f(u_r)) n_1 = 0$$

in jedem Punkt aus C . Aus unserer expliziten Darstellung von $n(\gamma(t), t)$ wissen wir $n_2 = -\gamma' n_1$ und daher

$$f(u_l) - f(u_r) = \gamma' (u_l - u_r). \quad (2.25)$$

Man nennt (2.25) die RANKINE-HUGONIOT-Bedingung. Sie wird oft als *Sprungbedingung* verstanden, denn sie setzt die Sprünge der Lösung und ihres Fluxes entlang der Unstetigkeitskurve C miteinander in Beziehung. Man kann aus ihr den Verlauf der Kurve C ermitteln, wie wir gleich an Beispielen sehen werden. Man beachte, daß gemäß obiger Herleitung die RANKINE-HUGONIOT-Bedingung *äquivalent* dazu ist, daß eine stückweise glatte Funktion, die auf beiden Seiten einer glatten Kurve eine (punktweise) Lösung von (2.18) ist, eine schwache Lösung auf ganz $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ ist.

BEISPIEL 2.15. Wir greifen erneut Beispiel 2.14 auf, in der es um die BURGERS-Gleichung mit Anfangswert

$$u^0(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x < 0, \\ 0 & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

ging. Für Ansatz, daß die Lösung weiterhin stückweise konstant mit Werten $u_l \equiv 1$ und $u_r \equiv 0$ ist, wollen wir aus der RANKINE-HUGONIOT-Bedingung die Dynamik des Schocks berechnen. Wir haben $f(u_l) = \frac{1}{2}$, $f(u_r) = 0$, also mit RANKINE-HUGONIOT

$$\gamma'(t) = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r} = \frac{1}{2},$$

also (unter Berücksichtigung von $\gamma(0) = 0$ aus der Anfangsbedingung) $\gamma(t) = \frac{t}{2}$. Dies ergibt genau die Lösung aus Beispiel 2.14.

KOROLLAR 2.16 (Stetiges Verkleben). Sei $0 < T \leq \infty$ und $u \in C(\mathbb{R} \times (0, T])$ eine Funktion, die auf beiden Seiten einer stetig differenzierbaren Kurve $C = \{(\gamma(t), t) : t \in [0, T]\}$ jeweils stetig differenzierbar ist und dort jeweils die Erhaltungsgleichung

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$$

löst. Dann ist u auf ganz $\mathbb{R} \times [0, T]$ eine schwache Lösung.

BEWEIS. Da $u_l = u_r$ (wegen der Stetigkeit von u entlang $C!$), ist die RANKINE-HUGONIOT-Bedingung automatisch erfüllt, unabhängig von der spezifischen Gestalt von C . \square

Es ist anhand unserer Rechnung, die zur RANKINE-HUGONIOT-Bedingung führte, leicht zu erkennen, daß dies auch gültig bleibt, wenn man mehrere Kurven C_j betrachtet, die die Ebene $\mathbb{R} \times [0, T]$ zerschneiden. Im folgenden Beispiel handelt es sich um zwei solcher Kurven:

BEISPIEL 2.17 (Ausdünnungswelle¹²). Betrachte wieder die BURGERS-Gleichung

$$\partial_t u + \frac{1}{2} \partial_x (u^2) = 0$$

mit Anfangsdatum

$$u^0(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0, \\ 1 & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

Es ist nun einfach zu sehen, daß

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0, \\ \frac{x}{t} & \text{falls } 0 \leq x \leq t, \\ 1 & \text{falls } x > t \end{cases} \quad (2.26)$$

¹²engl. rarefaction wave.

eine Lösung dieses Anfangswertproblems ist: In der Tat, u ist offenbar auf $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ stetig und ist auf jedem der drei Gebiete, auf denen es glatt ist, eine Lösung der BURGERS-Gleichung. Für die konstanten Werte 1 und 0 ist dies klar, und auf $\{0 \leq x \leq t\}$ haben wir

$$\partial_t \left(\frac{x}{t} \right) + \frac{1}{2} \partial_x \left(\frac{x}{t} \right)^2 = -\frac{x}{t^2} + \frac{1}{2} \cdot 2 \frac{x}{t^2} = 0.$$

Betrachten wir nun zum selben Anfangswertproblem, als dessen Lösung wir die Ausdünnungswelle (2.26) erkannt haben, die Funktion

$$v(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < \frac{t}{2}, \\ 1 & \text{falls } x > \frac{t}{2}. \end{cases} \quad (2.27)$$

Es ist entlang der Kurve $\gamma(t) = \frac{t}{2}$ die RANKINE-HUGONIOT-Bedingung erfüllt, denn

$$f(v_l) - f(v_r) = -\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(0 - 1) = \gamma'(v_l - v_r).$$

Also ist auch v eine schwache Lösung desselben Anfangswertproblems! Wir haben also zum selben Anfangswertproblem zwei verschiedene Lösungen: Die Ausdünnungswelle (2.26) und die Schockwelle (2.27).

Wir halten fest: *Schwache Lösungen von Anfangswertproblemen für skalare Erhaltungssätze sind nicht immer eindeutig.*

2.2.4. Entropielösungen. Die Nichteindeutigkeitsbeobachtung aus dem vorigen Abschnitt ist beunruhigend: Damit ist für schwache Lösungen von Erhaltungssätzen das Prinzip der Wohlgestelltheit verletzt, das wir in der Einleitung kennengelernt hatten. Die Rettung besteht, wie wir nun sehen wollen, aus der *Entropiebedingung*, einer Zusatzbedingung an schwache Lösungen, die die Eindeutigkeit wiederherstellen wird. Die Entropiebedingung ist aus dem *zweiten Hauptsatz der Thermodynamik* inspiriert; die thermodynamische Interpretation der Erhaltungssätze und die daraus resultierende Verbindung unseres mathematischen Konzepts der Entropie mit der physikalischen Entropie, sowie der Zusammenhang zwischen unserer Entropiebedingung und dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik, sind allerdings äußerst vage und müssen uns in der mathematischen Analysis auch nicht zu sehr interessieren.

Um die Definition der Entropielösung zu motivieren, machen wir uns nun eine Beobachtung aus den Übungen zunutze. Dort hatten wir gezeigt: Ist $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ und $q \in C^1$ dergestalt, daß $q'(u) = u\eta'(u)$, so gilt für jede stetig differenzierbare Lösung der BURGERS-Gleichung:

$$\partial_t \eta(u) + \partial_x q(u) = 0.$$

Wir können dies wie folgt verallgemeinern:

Sei $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ und betrachte die Erhaltungsgleichung (2.16), also

$$\partial_t u(x, t) + \operatorname{div}(f(u(x, t))) = 0,$$

wobei $u \in C^1(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ gesucht und $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ gegeben ist. Sei $q \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ so, daß $q' = \eta' f'$ ist – solches q existiert stets, wir können zum Beispiel

$$q(s) := \int_0^s \eta'(r) f'(r) dr$$

setzen¹³. Nach Kettenregel ist $\operatorname{div} f(u) = f'(u) \cdot \nabla u$. Dies und die Multiplikation der Erhaltungsgleichung auf beiden Seiten mit $\eta'(u)$ liefert

$$0 = \eta'(u) \partial_t u + \eta'(u) f'(u) \cdot \nabla u = \partial_t \eta(u) + \operatorname{div} q(u),$$

wobei wir die Wahl von q sowie die Kettenregel ausgenutzt haben. Wir halten fest:

PROPOSITION 2.18. *Eine stetig differenzierbare Lösung des Erhaltungssatzes (2.16) erfüllt*

$$\partial_t \eta(u) + \operatorname{div} q(u) = 0 \tag{2.28}$$

für jedes $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ und $q(s) := \int_0^s \eta'(r) f'(r) dr$.

Wir bezeichnen die Identität (2.28) als *Entropiegleichung* und (η, q) als *Entropie-Entropiefluss-Paar*. Allerdings interessieren wir uns hauptsächlich für *schwache* Lösungen, für die die Entropiegleichung zunächst keinen Sinn ergibt, da die partiellen Ableitungen im allgemeinen nicht existieren. Ganz analog zur Definition der schwachen Lösung können wir aber definieren:

DEFINITION 2.19. Seien $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ und $q \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$. Wir sagen, eine lokal integrierbare Funktion $u : \mathbb{R}^n \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ erfülle $\partial_t \eta(u) + \operatorname{div} q(u) = 0$ im schwachen Sinne, falls für jedes $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^n \times (0, T))$ gilt:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} [\partial_t \phi(x, t) \eta(u(x, t)) + \nabla \phi(x, t) \cdot q(u(x, t))] dx dt = 0.$$

Ebenso sagen wir, u erfülle $\partial_t \eta(u) + \operatorname{div} q(u) \leq 0$ im schwachen Sinne, wenn für jedes $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^n \times (0, T))$ mit $\phi \geq 0$ gilt:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} [\partial_t \phi(x, t) \eta(u(x, t)) + \nabla \phi(x, t) \cdot q(u(x, t))] dx dt \geq 0.$$

Betrachten wir erneut die Schocklösung zum Anfangswertproblem aus Beispiel 2.14 für die BURGERS-Gleichung, und vergleichen diese Lösung mit der Lösung (2.27). Beide sind, wie wir gesehen haben, schwache Lösungen der BURGERS-Gleichung. Erfüllen sie die Entropiegleichung?

Sei dazu $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ und $q \in C^1(\mathbb{R})$ ein zugehöriger Entropiefluss für die BURGERS-Gleichung, sowie $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^n \times (0, T))$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\eta(0) = q(0) = 0$. Dann gilt für die schwache Lösung

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x < \frac{t}{2}, \\ 0 & \text{falls } x > \frac{t}{2} \end{cases}$$

aus Beispiel 2.14 (mit $\Omega_l := \{x < \frac{t}{2}\}$, $\Omega_r := \{x > \frac{t}{2}\}$ und $C := \{x = \frac{t}{2}\}$) mit einer ähnlichen Rechnung wie bei der RANKINE-HUGONOT-Bedingung:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} [\partial_t \phi(x, t) \eta(u(x, t)) + \partial_x \phi(x, t) q(u(x, t))] dx dt \\ &= \int_{\Omega_l} [\partial_t \phi(x, t) \eta(1) + \partial_x \phi(x, t) q(1)] dx dt \\ &= \int_C [\eta(1) \phi n_2 + q(1) \phi n_1] dS. \end{aligned}$$

¹³Eine höherdimensionale Verallgemeinerung dieser Formel für q ist nicht möglich (s. Übung). Dies ist der Hauptgrund dafür, daß die Theorie von *Systemen* von Erhaltungssätzen so viel schwieriger ist als im skalaren Falle.

Da in diesem Falle C durch $(\frac{t}{2}, t)$ parametrisiert wird, erhalten wir aus (2.21) für den Normalenvektor $n = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1)$ und dann aus der Formel (2.24) für das Kurvenintegral

$$\int_C [\eta(1)\phi n_2 + q(1)\phi n_1] dS = \int_0^\infty \left[-\frac{1}{2}\eta(1) + q(1) \right] \phi \left(\frac{t}{2}, t \right) dt.$$

Dies muß nun keineswegs immer gleich null sein. Wir beobachten aber folgendes: Mit partieller Integration und $\eta(0) = 0$ erhalten wir

$$q(1) = \int_0^1 \eta'(r)r dr = \eta(1) - \int_0^1 \eta(r) dr,$$

also

$$-\frac{1}{2}\eta(1) + q(1) = \frac{1}{2}\eta(1) - \int_0^1 \eta(r) dr.$$

Ist η nun *konvex*, so verläuft der Graph von η im Intervall $(0, 1)$ unterhalb der Sekanten $s \mapsto \eta(1)s$, deren Integral $\frac{1}{2}\eta(1)$ beträgt. Also ist

$$\int_0^1 \eta(r) dr \leq \frac{1}{2}\eta(1)$$

und somit

$$-\frac{1}{2}\eta(1) + q(1) \geq 0.$$

Wir haben also gezeigt: Die Schocklösung aus Beispiel 2.14 erfüllt die *Entropieungleichung* $\partial_t \eta(u) + \partial_x q(u) \leq 0$ im schwachen Sinne für alle Entropie-Entropieflux-Paare (η, q) , für die η konvex ist.

Die Rechnung für (2.27) verläuft exakt analog bis auf ein Vorzeichen; die Schocklösung (2.27) erfüllt also $\partial_t \eta(u) + \partial_x q(u) \geq 0$, wobei für strikt konvexe Entropien und Testfunktionen ϕ , die auf einem Teil der Unstetigkeitskurve C strikt positiv sind, sogar echte Ungleichheit gilt.

Man sagt, der Schock aus Beispiel 2.14 *dissipiert* Entropie (entlang des Schocks), wohingegen der Schock (2.27) Entropie *produziert*. Letzterer Effekt wird als unphysikalisch ausgeschlossen¹⁴, sodaß wir zu folgender Definition kommen:

DEFINITION 2.20 (Entropielösungen). Sei $0 < T \leq \infty$, $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ und $u^0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ lokal integrierbar. Dann heißt eine lokal integrierbare Funktion $u : \mathbb{R}^n \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ *Entropielösung* der Erhaltungsgleichung

$$\partial_t u + \operatorname{div}(f(u)) = 0,$$

wenn für jedes konvexe $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ mit zugehörigem Entropieflux q gilt:

$$\partial_t \eta(u) + \operatorname{div} q(u) \leq 0$$

im schwachen Sinne.

Es ist also der Schock aus Beispiel 2.14 eine Entropielösung, der Schock in (2.27) dagegen nicht. Die Ausdünnungswelle (2.26) ist leicht als Entropielösung erkennbar.

Beachte, daß jede Entropielösung insbesondere eine schwache Lösung ist, denn mit der Wahl $\eta = \pm \operatorname{id}$ und somit $q = f$ erhalten wir sowohl $\partial_t u + \operatorname{div} f(u) \leq 0$ als auch $\partial_t u + \operatorname{div} f(u) \geq 0$, also insgesamt $\partial_t u + \operatorname{div} q(u) = 0$ im schwachen Sinne.

¹⁴Aus der Thermodynamik ist bekannt (zweiter Hauptsatz!), daß die physikalische Entropie in der Zeit *zunimmt*. Wir bezeichnen hier nun aber eine wachsende Entropie als unphysikalisch. Das liegt an einer etwas unglücklichen Vorzeichenkonvention, derzufolge die mathematische Entropie η gerade das Negative der physikalischen Entropie ist. Die mathematische Entropie muß also nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik *abnehmen*.

Was sagt all dies nun über unser Eindeutigkeitsproblem aus? Es erwuchs ja daraus, daß ein und dasselbe Anfangswertproblem zwei verschiedene Lösungen, nämlich (2.26) und (2.27), hat. Eine davon ist aber keine Entropielösung. Wir können also hoffen, daß Anfangswertprobleme für skalare Erhaltungssätze eindeutige Entropielösungen besitzen.

Daß dies tatsächlich der Fall ist, ergibt eine starke mathematische Rechtfertigung für den Begriff der Entropielösung, unabhängig von physikalischen Erwägungen. Das folgende wunderbare Resultat wurde 1970 von KRUZHKOVA bewiesen:

THEOREM 2.21 (KRUZHKOVA [5]). *Sei $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ und $u^0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann existiert genau eine Entropielösung $u \in C([0, \infty); L^1(\mathbb{R}^n)) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ von*

$$\partial_t u + \operatorname{div}(f(u)) = 0$$

mit $u(\cdot, 0) = u^0$.

Hierbei bedeutet $u \in C([0, \infty); L^1(\mathbb{R}^n))$, daß für jede Folge $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$, die in $[0, T]$ gegen ein t konvergiert, gilt $u(\cdot, t_k) \rightarrow u(\cdot, t)$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$. Ein Beweis des Eindeigkeitsteils für $n = 1$, der für Sie verständlich sein sollte, findet sich in [2, Kap. 11].

Der Begriff der Entropielösung läßt sich problemlos auf Systeme von Erhaltungssätzen übertragen (wenn also $u : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$ gesucht ist), allerdings ist dann die Existenz von Entropielösungen im allgemeinen nicht bekannt, und – schlimmer noch – es existieren rezente Gegenbeispiele für die Eindeutigkeit von Entropielösungen [1].

KAPITEL 3

Gleichungen zweiter Ordnung

In diesem Kapitel befassen wir uns mit den drei paradigmatischen linearen PDEs zweiter Ordnung, die jeweils den hyperbolischen, elliptischen und parabolischen Typ repräsentieren: Die Wellengleichung, deren qualitative Eigenschaften an die im ersten Kapitel besprochenen Transport- und Erhaltungsgleichungen gemahnen; die LAPLACE- und POISSON-Gleichungen und schließlich die Wärmeleitungsgleichung.

3.1. Die Wellengleichung

3.1.1. Physikalische Herleitung. Wir denken uns eine elastische Saite an den beiden Punkten $0, 1 \in \mathbb{R}$ fest eingespannt, sodaß die Länge der Saite $L = 1$ beträgt. Falls keine zu großen Auslenkungen auftreten, wird die Länge während der Schwingung annähernd konstant bleiben. Die Massendichte der Saite sei ebenfalls gleich eins. Wenn wir die Auslenkung der Saite am Punkt $x \in [0, 1]$ zur Zeit t mit $u(x, t)$ bezeichnen, so hat das Stück der Saite zwischen den Punkten x und $x + dx$ die Masse dx . Die Beschleunigung des Saitenstücks bei x ist durch $\partial_{tt}u$ gegeben, also lautet das zweite NEWTONSche Gesetz

$$dx \partial_{tt}u(x, t) = F,$$

wobei wir noch die Kraft F bestimmen müssen. Wir verwenden das HOOKESche Gesetz, demzufolge die Rückstellkraft proportional zur Auslenkung relativ zu den benachbarten Punkten im Raum ist. Sie ist also proportional zur Summe aus $u(x + dx, t) - u(x, t)$ (Auslenkung relativ zum rechten Nachbarpunkt) und $u(x - dx, t) - u(x, t)$ (linker Nachbar). Die Proportionalitätskonstante hängt wiederum von der Härte der Saite ab und skaliert mit dx^{-1} ; insgesamt erhalten wir also

$$\partial_{tt}u(x, t) = \frac{u(x + dx, t) - 2u(x, t) + u(x - dx, t)}{dx^2} = \partial_{xx}u(x, t).$$

In höheren Dimensionen lautet die Wellengleichung $\partial_{tt}u - \Delta u = 0$ und beschreibt z.B. eine schwingende Membran (in zwei Dimensionen) oder einen vibrierenden elastischen Festkörper (drei Dimensionen). Wir beschränken uns hier allerdings auf den eindimensionalen Fall und führen noch einen Parameter c mit, der, wie wir gleich sehen werden, als Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wellen interpretiert werden kann.

Für eine an zwei Punkten eingespannte Saite erwarten wir *stehende Wellen*, für ein in beide Richtungen unendlich ausgedehntes Medium werden Wellen dagegen mit konstanter Geschwindigkeit fortschreiten.

Die Analyse von Wellenphänomenen ist in der Physik ubiquitär, sodaß die Grundgleichungen der Quantenmechanik (SCHRÖDINGER) und der allgemeinen Relativitätstheorie (EINSTEIN) jeweils wellenartigen Charakter aufweisen. Aber auch die Ausbreitung von Schall- oder Wasserwellen kann durch Gleichungen vom Typ der Wellengleichung modelliert werden.

3.1.2. Die Wellengleichung auf \mathbb{R} . Betrachten wir also zuerst die Wellengleichung

$$\partial_{tt}u - c^2 \partial_{xx}u = 0, \tag{3.1}$$

wobei $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ gesucht und $c > 0$ gegeben ist. Wir transformieren die Koordinaten (x, t) durch

$$\begin{aligned}\xi &:= x + ct, \\ \eta &:= x - ct\end{aligned}$$

bzw. nach Inversion

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{2}(\xi + \eta), \\ t &= \frac{1}{2c}(\xi - \eta).\end{aligned}$$

Sei u eine Lösung von (3.1), dann setzen wir

$$v(\xi, \eta) := u(x, t) = u\left(\frac{1}{2}(\xi + \eta), \frac{1}{2c}(\xi - \eta)\right).$$

Nach Kettenregel ist nun

$$\partial_\xi v(\xi, \eta) = \partial_x u(x, t) \frac{dx}{d\xi} + \partial_t u(x, t) \frac{dt}{d\xi} = \frac{1}{2} \partial_x u(x, t) + \frac{1}{2c} \partial_t u(x, t)$$

und

$$\begin{aligned}\partial_\eta \partial_\xi v(\xi, \eta) &= \partial_\eta \left[\frac{1}{2} \partial_x u(x, t) + \frac{1}{2c} \partial_t u(x, t) \right] \\ &= \frac{1}{4} \partial_{xx} u - \frac{1}{4c} \partial_{tx} u + \frac{1}{4c} \partial_{xt} u - \frac{1}{4c^2} \partial_{tt} u \\ &= \frac{1}{4} \partial_{xx} u - \frac{1}{4c^2} \partial_{tt} u = 0,\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Wellengleichung benutzt haben.

Das folgende Lemma charakterisiert die Funktionen mit dieser Eigenschaft:

LEMMA 3.1. Sei $v \in C^2(\mathbb{R}^2)$ mit $\partial_{\eta\xi} v(\xi, \eta) = 0$ für alle $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$. Dann gibt es Funktionen $g, h \in C^2(\mathbb{R})$, sodaß

$$v(\xi, \eta) = g(\xi) + h(\eta)$$

für alle $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$.

BEWEIS. Wegen $\partial_\eta(\partial_\xi v) = 0$ ist $\partial_\xi v$ von η unabhängig, d.h. es gibt ein $f \in C^1(\mathbb{R})$, sodaß $\partial_\xi v(\xi, \eta) = f(\xi)$. Integration in ξ für festes η ergibt dann

$$v(\xi, \eta) = \int_0^\xi f(\xi') d\xi' + C(\eta).$$

Damit ist mit $h = C$ und $g = \int f d\xi'$ das Lemma gezeigt. \square

Wir wissen nun also $u(x, t) = v(\xi, \eta) = g(\xi) + h(\eta) = g(x + ct) + h(x - ct)$. Insgesamt ergibt sich

SATZ 3.2 (Lösung der Wellengleichung in \mathbb{R}). Die Lösungen $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ der Wellengleichung (3.1) sind genau die Funktionen der Gestalt

$$u(x, t) = g(x + ct) + h(x - ct)$$

mit $g, h \in C^2(\mathbb{R})$.

Man kann dies so interpretieren: Jede Lösung der Wellengleichung besteht aus zwei „Wellen“ $g(x + ct)$, $h(x - ct)$, die sich mit konstanter Geschwindigkeit nach links bzw. rechts ausbreiten. Man beachte die enge Verwandtschaft zur Transportgleichung, bei der die Lösung nur aus *einer* Welle bestand. Diese Verwandtschaft zeigt sich auch in der alternativen Formulierung (1.7).

Wie steht es nun mit dem Anfangswertproblem? Der eben bewiesene Satz suggeriert, daß wir *zwei* Freiheitsgrade (in Form von g und h) haben. Üblicherweise gibt man Anfangswerte für u und für $\partial_t u$ vor¹, stellt also das Problem

$$\begin{aligned}\partial_{tt}u - c^2\partial_{xx}u &= 0, \\ u(\cdot, 0) &= u^0, \\ \partial_t u(\cdot, 0) &= v^0.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Mithilfe von Satz 3.2 können wir dieses Problem leicht lösen, denn mit $u(x, t) = g(x + ct) + h(x - ct)$ gilt

$$u(x, 0) = g(x) + h(x) = u^0(x)\tag{3.3}$$

sowie

$$\partial_t u(x, 0) = c(g'(x) - h'(x)) = v^0(x).$$

Integration der letzten Gleichung gibt

$$g(x) - h(x) = \frac{1}{c} \int_0^x v^0(y) dy + C,$$

also haben wir zusammen mit (3.3)

$$\begin{aligned}g(x) &= \frac{1}{2} \left[u^0(x) + \frac{1}{c} \int_0^x v^0(y) dy + C \right], \\ h(x) &= \frac{1}{2} \left[u^0(x) - \frac{1}{c} \int_0^x v^0(y) dy - C \right].\end{aligned}$$

Mit der Formel aus Satz 3.2 kürzt sich die Integrationskonstante weg und wir erhalten

SATZ 3.3 (Formel von d'ALEMBERT). Seien $u^0 \in C^2(\mathbb{R})$ und $v^0 \in C^1(\mathbb{R})$, dann lautet die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (3.2)

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [u^0(x + ct) + u^0(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v^0(y) dy.$$

KOROLLAR 3.4 (endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit). Sind die Träger von u^0 und v^0 im Intervall $[-R, R]$ enthalten, so ist der Träger von $u(\cdot, t)$ im Intervall $[-R - c|t|, R + c|t|]$ enthalten.

Der Beweis ist eine Übung. Eine Störung der Lösung zum Anfangszeitpunkt kann sich also maximal mit Geschwindigkeit c ausbreiten.

Eine weitere qualitative Eigenschaft der Wellengleichung ist die *Reversibilität* – mit $u(x, t)$ ist auch $u(x, -t)$ eine Lösung.

3.1.3. Die Wellengleichung mit Randbedingungen. Wir wollen nun die Wellengleichung auf einem kompakten Intervall untersuchen und wählen dazu ohne Einschränkung $[0, \pi]$. Gesucht sind also Funktionen $u : [0, \pi] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die das Problem

$$\begin{aligned}\partial_{tt}u - c^2\partial_{xx}u &= 0, \\ u(0, \cdot) &= u(\pi, \cdot) = 0\end{aligned}\tag{3.4}$$

lösen. Aus physikalischer Beobachtung (z.B. einer an beiden Enden fest eingespannten Saite) kennt man Lösungen in Form *stehender Wellen*, die die Form $u(x, t) = v(x)w(t)$ haben (vergleiche auch Aufgabe 1, Blatt 8 für stehende Wellen auf ganz \mathbb{R}).

¹Dies ist in Analogie zu gewöhnlichen Differentialgleichungen: Denken Sie an die harmonische Oszillatorgleichung $x'' + x = 0$, die zweiter Ordnung ist und für die wir daher die Anfangswerte von x und x' festlegen müssen.

Mit diesem Ansatz wird unsere Gleichung

$$v(x)w''(t) = c^2v''(x)w(t)$$

bzw.

$$\frac{v(x)}{v''(x)} = c^2 \frac{w(t)}{w''(t)}.$$

Da dies für alle x und t der Fall sein soll, müssen die linke und die rechte Seite konstant sein; es soll also ein $C \in \mathbb{R}$ geben mit

$$v''(x) = Cv(x), \quad w''(t) = Cc^2w(t).$$

Dies sind zwei (ungekoppelte) *gewöhnliche* Differentialgleichungen, deren Lösungen im Falle $C \leq 0$ bekanntlich

$$v(x) = M_1 \sin / \cos(\sqrt{-C}x), \quad w(t) = M_2 \sin / \cos(\sqrt{-C}ct) \quad (3.5)$$

lauten, im Falle $C > 0$ aber

$$v(x) = M_1 \exp(\sqrt{C}x), \quad w(t) = M_2 \exp(\sqrt{C}ct).$$

Der zweite Fall $C > 0$ wird allerdings durch die Randbedingung $u(0, \cdot) = u(\pi, \cdot) = 0$ ausgeschlossen, da die Exponentialfunktion stets positive Werte liefert (allenfalls die triviale Lösung $u \equiv 0$ kommt hier in Frage; diese Lösung erhält man jedoch auch im Falle $C \leq 0$).

Für (3.5) erhalten wir aber ebenfalls eine Einschränkung aus der Randbedingung: Wir fordern ja $v(0) = v(\pi) = 0$, was (außer im trivialen Fall $M_1 = 0$) impliziert, daß wir für v einerseits den Sinus wählen müssen (und nicht den Kosinus) und andererseits nur die Frequenzen mit $\sqrt{-C} \in \mathbb{N}$ in Betracht ziehen dürfen.

Somit erhalten wir folgende Familie von Lösungen:

PROPOSITION 3.5. *Seien $\lambda \in \mathbb{N}$ und $A, B \in \mathbb{R}$, dann ist*

$$u(x, t) = \sin(\lambda x) (A \sin(\lambda ct) + B \cos(\lambda ct))$$

eine Lösung des Randwertproblems (3.4).

Da die Wellengleichung linear ist, ist jede Linearkombination von Lösungen von (3.4) wieder eine Lösung desselben Problems. Wir erhalten also Lösungen der Form

$$u(x, t) = \sum_{\lambda=1}^N \sin(\lambda x) (A_\lambda \sin(\lambda ct) + B_\lambda \cos(\lambda ct)),$$

und man braucht nicht viel Phantasie, um auch *unendliche* Überlagerungen einfacher Sinusschwingungen als Lösungen zu erraten, also Funktionen der Form

$$u(x, t) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sin(\lambda x) (A_\lambda \sin(\lambda ct) + B_\lambda \cos(\lambda ct)). \quad (3.6)$$

Das müssen wir nun noch näher beleuchten, insbesondere die Frage, wie der (durch die obere Summationsgrenze ∞ ausgedrückte) Limes zu verstehen ist und ob der Limes dann tatsächlich eine Lösung der Wellengleichung ist.

Angenommen, die Amplituden A_λ und B_λ erfüllen $\sum_{\lambda=1}^{\infty} (|A_\lambda| + |B_\lambda|) < \infty$. Dann gilt

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \sup_{(x,t) \in [0,\pi] \times \mathbb{R}} |\sin(\lambda x) (A_\lambda \sin(\lambda ct) + B_\lambda \cos(\lambda ct))| \leq \sum_{\lambda=1}^{\infty} (|A_\lambda| + |B_\lambda|) < \infty,$$

und nach dem Konvergenzkriterium von WEIERSTRASS² konvergiert die Reihe in (3.6) dann absolut und gleichmäßig.

²Das haben Sie vermutlich in der Analysis im Zusammenhang mit Potenzreihen gelernt, ansonsten bitte nachschlagen.

Ähnlich zeigt man: Ist sogar $\sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda^2(|A_\lambda| + |B_\lambda|) < \infty$, so konvergieren u und seine ersten beiden Ableitungen absolut und gleichmäßig. Da der gleichmäßige Limes stetiger Funktionen selbst stetig ist, folgt $u \in C^2([0, \pi] \times \mathbb{R})$, und aus der Vertauschbarkeit von gleichmäßigen Limites und Ableitung folgt $\partial_{tt}u - c^2\partial_{xx}u = 0$. Wir erhalten also

SATZ 3.6. Seien $A_\lambda, B_\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda^2(|A_\lambda| + |B_\lambda|) < \infty$. Dann ist

$$u(x, t) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sin(\lambda x) (A_\lambda \sin(\lambda ct) + B_\lambda \cos(\lambda ct))$$

eine zweimal stetig differenzierbare Lösung des Randwertproblems (3.4).

Können wir damit alle Anfangswertprobleme lösen? Angenommen, wir ergänzen (3.4) um die beiden Anfangsbedingungen $u(\cdot, 0) = u^0 \in C^2([0, \pi])$ und $\partial_t u(\cdot, 0) = v^0 \in C^1([0, \pi])$. Damit die Anfangs- mit den Randbedingungen konsistent sind, verlangen wir zusätzlich $u^0(0) = u^0(\pi) = v^0(0) = v^0(\pi) = 0$. Um dieses Problem durch eine Funktion der Gestalt (3.6) zu lösen, müßten A_λ und B_λ so gewählt sein, daß

$$u^0(x) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} B_\lambda \sin(\lambda x), \quad v^0(x) = c \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda A_\lambda \sin(\lambda x). \quad (3.7)$$

Man kann zeigen, daß dies unter den gegebenen Voraussetzungen stets möglich ist. Man zerlegt also eine (weitgehend beliebige) Funktion in Sinusfunktionen verschiedener ganzzahliger Frequenzen; dieses Verfahren wird als *FOURIER-Entwicklung* bezeichnet.

Wir werden jetzt nicht zeigen, daß die Darstellung (3.7) stets existiert, sondern wir überlegen uns, wie man die Koeffizienten A_λ und B_λ findet, sofern sie (3.7) erfüllen. Dazu verwenden wir folgendes Lemma:

LEMMA 3.7 (Orthogonalität der Sinusfunktionen). *Für $\lambda, \mu \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\int_0^\pi \sin(\lambda x) \sin(\mu x) dx = \begin{cases} 0 & \text{falls } \lambda \neq \mu, \\ \frac{\pi}{2} & \text{falls } \lambda = \mu. \end{cases}$$

BEWEIS. Der Beweis geht, wie aus der Analysis bekannt, durch partielle Integration. Wir verzichten auf Details. \square

Ist also $u^0(x) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} B_\lambda \sin(\lambda x)$, so können wir mit $\sin(\mu x)$ multiplizieren und über $[0, \pi]$ integrieren und erhalten so

$$\begin{aligned} \int_0^\pi u^0(x) \sin(\mu x) dx &= \int_0^\pi \sum_{\lambda=1}^{\infty} B_\lambda \sin(\lambda x) \sin(\mu x) dx \\ &= \sum_{\lambda=1}^{\infty} B_\lambda \int_0^\pi \sin(\lambda x) \sin(\mu x) dx \\ &= B_\mu \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

wobei wir die Reihe mit dem Integral wegen der gleichmäßigen Konvergenz vertauschen durften und im letzten Schritt Lemma 3.7 benutzt haben.

Wir erhalten damit

$$B_\lambda = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u^0(x) \sin(\lambda x) dx \quad (3.8)$$

und mit einer analogen Rechnung

$$A_\lambda = \frac{2}{c\lambda\pi} \int_0^\pi v^0(x) \sin(\lambda x) dx. \quad (3.9)$$

Damit haben wir folgendes Ergebnis:

SATZ 3.8 (Lösung des Anfangs- und Randwertproblems). Seien $u^0 \in C^2([0, \pi])$ und $v^0 \in C^1([0, \pi])$ mit $u^0(0) = u^0(\pi) = v^0(0) = v^0(\pi) = 0$. Dann lautet die eindeutige Lösung des Anfangs- und Randwertproblems (3.4) mit $u(\cdot, 0) = u^0$ und $\partial_t u(\cdot, 0) = v^0$:

$$u(x, t) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sin(\lambda x) (A_{\lambda} \sin(\lambda ct) + B_{\lambda} \cos(\lambda ct)),$$

wobei A_{λ} und B_{λ} durch (3.9) und (3.8) gegeben sind.

Man beachte, daß wir keinen vollständigen Beweis gegeben haben, da wir nicht gezeigt haben, daß die Darstellungen (3.7) überhaupt existieren. Dazu bedürfte es weitergehender Ausführungen zur FOURIER-Analysis. Wir verweisen auf Analysis III.

Kommen wir kurz auf die Interpretation zurück, derzufolge die Wellengleichung die Dynamik einer schwingenden Saite beschreibt: Wie wir nun gesehen haben, ist diese Schwingung eine Überlagerung von Sinusschwingungen mit Frequenzen $1, 2, 3, \dots$. Die ersten zwei Schwingungen stehen also im Frequenzverhältnis $2 : 1$, d.h. in einem Oktavintervall; die dritte Mode steht zur zweiten im Verhältnis $3 : 2$, bildet mit dieser also eine Quinte; $4 : 3$ ist das Quartverhältnis, dann folgen große und kleine Terz usw. Man nennt die erste Schwingungsmode den *Grundton*, die weiteren die *Obertöne*. Da bei einem realen Musikinstrument nicht nur die Saite selbst schwingt, sondern auch der jeweilige Resonanzkörper, kommt es zu geringfügig unterschiedlichen Obertonspektren, die die spezifische Klangfarbe des Instruments bestimmen. Bei Blasinstrumenten schwingt natürlich keine Saite, sondern eine Luftsäule. Bei der Pauke schwingt kein annähernd eindimensionales Objekt, sondern eine zweidimensionale (annähernd kreisförmige) Membran, deren mathematische Beschreibung die zweidimensionale Wellengleichung erfordert.

3.1.4. Energieerhaltung. Wir definieren die *Energie* einer Lösung u der Wellengleichung auf $[0, \pi]$ mit Randwerten $u(0, \cdot) = u(\pi, \cdot) = 0$ durch

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (\partial_t u(x, t)^2 + c^2 \partial_x u(x, t)^2) dx$$

und erhalten mit der Kettenregel und partieller Integration

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(t) &= \int_0^{\pi} (\partial_t u \partial_{tt} u + c^2 \partial_x u \partial_{tx} u) dx \\ &= \int_0^{\pi} (\partial_t u \partial_{tt} u - c^2 \partial_{xx} u \partial_t u) dx = 0, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Wellengleichung benutzt haben. Für die partielle Integration beachten wir, daß aufgrund der Randbedingungen auch $\partial_t u(0, \cdot) = \partial_t u(\pi, \cdot) = 0$ und daher die Randterme null sind.

Eine ähnliche Rechnung läßt sich auch auf \mathbb{R} durchführen, sofern man annimmt, daß die Lösung für $x \rightarrow \pm\infty$ hinreichend schnell abfällt.

3.1.5. Dispersion. Nur ganz kurz sei auf das Phänomen der *Dispersion* eingegangen, das in wellenartigen Gleichungen häufig auftritt. Es geht dabei um den Zusammenhang zwischen Frequenz und Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wellen.

Betrachte erneut die Wellengleichung auf ganz \mathbb{R} , dann wissen wir bereits, daß insbesondere jede Sinuskurve der Frequenz λ , also $x \mapsto \sin(\lambda x)$, zu einer Lösung der Wellengleichung führt, indem sie sich mit Geschwindigkeit $\pm c$ fortbewegt: $u(x, t) = \sin(\lambda(x \pm ct))$ ist also eine Lösung. Lassen wir komplexe Werte zu – was manchmal die Rechnungen übersichtlicher macht – so können wir als Wellen Funktionen der Gestalt $e^{i\lambda(x \pm ct)}$ wählen. Für dieses c , das von λ unabhängig ist, erhalten wir in dieser Weise Lösungen der Wellengleichung.

Führen wir uns den Beweis nochmal vor Augen: Mit dem Ansatz $u(x, t) = e^{i\lambda(x + \omega t)}$ erhalten wir nach Einsetzen in die Wellengleichung

$$0 = \partial_{tt} u - c^2 \partial_{xx} u = -\lambda^2 (\omega^2 - c^2) u,$$

also die Bedingung $\omega^2 = c^2$ bzw.

$$\omega = \pm c.$$

Dies ist die *Dispersionsrelation für die lineare Wellengleichung*. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ω muß also $+c$ oder $-c$ sein, in Übereinstimmung mit unseren bisherigen Untersuchungen.

Im allgemeinen wird die Ausbreitungsgeschwindigkeit allerdings von der Frequenz λ abhängen. Betrachte dazu die freie SCHRÖDINGERGleichung auf \mathbb{R} , die die Evolution der Wellenfunktion eines quantenmechanischen Teilchens ohne äußere Kräfte beschreibt:

$$i\partial_t\psi(x, t) + \partial_{xx}\psi(x, t) = 0.$$

Auch diese Gleichung für die Unbekannte $\psi: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ zählt zur Klasse der wellenartigen Gleichungen. Versuchen wir auch hier den Ansatz $\psi(x, t) = e^{i\lambda(x+\omega t)}$, so erhalten wir

$$0 = i\partial_t\psi(x, t) + \partial_{xx}\psi(x, t) = (i^2\lambda\omega + i^2\lambda^2)\psi(x, t),$$

und es resultiert die Dispersionsrelation

$$\omega = -\lambda.$$

Die Welle breitet sich also mit einer Geschwindigkeit proportional zu ihrer Frequenz aus.

Zur Interpretation: Die triviale Dispersionsrelation der Wellengleichung ermöglicht z.B. den Konzertgenuß, da alle gleichzeitig gespielten Töne, egal welcher Tonhöhe, gleichzeitig bei der Hörerin ankommen. Für die SCHRÖDINGERGleichung beschreibt die Wellenfunktion $\psi(x, t) = e^{i\lambda(x+\omega t)}$ ein Teilchen mit Impuls exakt gleich $-\lambda$, und ein solches Teilchen bewegt sich (da der Impuls proportional zur Geschwindigkeit ist) dementsprechend mit einer Geschwindigkeit proportional zur Frequenz seiner Wellenfunktion fort.

3.2. LAPLACE- und POISSON-Gleichung

Wir wenden uns nun zum ersten Mal einer *zeitunabhängigen* Gleichung zu, die unter anderem der Beschreibung von physikalischen Gleichgewichtszuständen dient, nämlich der LAPLACE- Gleichung

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega$$

bzw. ihrer inhomogenen Version, der POISSON-Gleichung

$$\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega.$$

Hierbei ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, und $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gesucht.

Wir wenden uns zunächst der LAPLACE-Gleichung zu und erinnern dafür an den GAUSSschen Integralsatz:

SATZ 3.9 (GAUSSscher Integralsatz). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen mit C^1 -Rand. Sei $f \in C^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ und $n: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ das äußere Normalenvektorfeld an $\partial\Omega$. Dann gilt

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} f(x) dx = \int_{\partial\Omega} (f \cdot n)(x) dS(x).$$

Einige Begriffe sind hier erklärungsbedürftig: Daß Ω einen C^1 -Rand hat, bedeutet, daß $\partial\Omega$ lokal als Graph einer stetig differenzierbaren Funktion $\mathbb{R}^{n-1} \supset U \rightarrow \mathbb{R}$ darstellbar ist; die äußere Normale an $\partial\Omega$ im Punkt $x \in \partial\Omega$ ist derjenige Vektor in \mathbb{R}^n , der am Punkt x senkrecht auf $\partial\Omega$ steht und von Ω aus nach außen zeigt; das Maß dS auf $\partial\Omega$ ist das *Oberflächenmaß* auf $\partial\Omega$, also das eindeutig bestimmte Maß, das einer (meßbaren) Teilmenge von $\partial\Omega$ ihr $(n-1)$ -dimensionales Volumen zuordnet. Für eine genauere Entwicklung dieser Begriffe und einen Beweis des Satzes von GAUSS sei auf die Vorlesung Analysis III verwiesen.

Der Satz von GAUSS ist eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung: Diesen erhält man aus GAUSS, indem man $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$ wählt, dann ist

nämlich $\partial\Omega = \{a, b\}$, das Normalenfeld ist gegeben durch $n(a) = -1$ und $n(b) = 1$, und dS ist das Zählmaß auf $\{a, b\}$.

3.2.1. Harmonische Funktionen. Lösungen der LAPLACE-Gleichung, d.h. Funktionen $u \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$ mit $\Delta u(x) = 0$ für alle $x \in \Omega$, heißen *harmonisch*. Sie haben besonders gute Eigenschaften, wie wir gleich sehen werden³. Fundamental für alles Weitere ist die Mittelwerteigenschaft:

SATZ 3.10 (Mittelwerteigenschaft). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C^2(\Omega)$. Dann ist u harmonisch auf Ω genau dann, wenn für jede Kugel $B_R(x)$ mit $\overline{B_R(x)} \subset \Omega$ gilt:

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B_R(x)|} \int_{\partial B_R(x)} u(y) dS(y) = \frac{1}{|B_R(x)|} \int_{B_R(x)} u(y) dy. \quad (3.10)$$

Hierbei bezeichnet $|\partial B_R(x)|$ das $(n-1)$ -dimensionale Volumen des Randes einer Kugel vom Radius R , und $|B_R(x)|$ bezeichnet das n -dimensionale Volumen einer Kugel vom Radius R .

BEWEIS. Es gilt für $u \in C^2(\Omega)$ und $\overline{B_R(x)} \subset \Omega$:

$$\begin{aligned} u(x) - \frac{1}{|\partial B_R(x)|} \int_{\partial B_R(x)} u(y) dS(y) &= \frac{1}{|\partial B_R(x)|} \int_{\partial B_R(x)} (u(x) - u(y)) dS(y) \\ &= \frac{1}{|\partial B_R(x)|} \int_{\partial B_R(x)} \int_0^1 \nabla u(x + t(y-x)) \cdot (x-y) dt dS(y) \\ &= -\frac{R}{|\partial B_R(x)|} \int_0^1 \int_{\partial B_R(x)} \nabla u(x + t(y-x)) \cdot n(y) dS(y) dt \\ &= -\frac{R}{|\partial B_R(x)|} \int_0^1 \int_{B_R(x)} \operatorname{div} \nabla u(x + t(y-x)) dy dt \\ &= -\frac{R}{|\partial B_R(x)|} \int_0^1 \int_{B_R(x)} \Delta u(x + t(y-x)) dy dt. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Da x und R beliebig waren, ist die rechte Seite gleich null genau dann, wenn $\Delta u(x) = 0$ für alle $x \in \Omega$. In (3.11) haben wir folgendes verwendet: Für die erste Gleichheit die Tatsache, daß $\frac{1}{|\partial B_R(x)|} \int_{\partial B_R(x)} 1 dS(y) = 1$; für die zweite Gleichheit den höherdimensionalen Mittelwertsatz der Integralrechnung aus der Analysis II; für die dritte Gleichheit die Tatsache, daß die äußere Einheitsnormale an $\partial B_R(x)$ im Punkt y durch $\frac{y-x}{R}$ gegeben ist; für die vierte Identität den GAUSSSchen Integralsatz; und schließlich die Identität $\Delta = \operatorname{div} \nabla$.

Es verbleibt noch die zweite Gleichheit in (3.10) zu zeigen. Es gilt aber

$$\frac{1}{|B_R(x)|} \int_{B_R(x)} (u(y) - u(x)) dy = \frac{1}{|B_R(x)|} \int_0^R \int_{\partial B_\rho(x)} (u(y) - u(x)) dS(y) d\rho,$$

und somit ist $u(x) = \frac{1}{|\partial B_R(x)|} \int_{\partial B_R(x)} u(y) dS(y)$ für alle Kugeln $\overline{B_R(x)} \subset \Omega$ genau dann, wenn auch $u(x) = \frac{1}{|B_R(x)|} \int_{B_R(x)} u(y) dy$ für alle solchen Kugeln. \square

Wir ziehen daraus nun diverse Konsequenzen.

³Sie werden sich im folgenden vielleicht an die Eigenschaften *holomorpher* Funktionen (die Sie in der Funktionentheorie kennenlernen) erinnert fühlen. Daß dies kein Zufall ist, sehen wir in den Übungen.

SATZ 3.11 (starkes Maximumsprinzip). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und zusammenhängend⁴, und $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ harmonisch in Ω . Dann gilt

$$\max_{x \in \Omega} u(x) = \max_{x \in \partial\Omega} u(x), \quad (3.12)$$

und wenn ein $x_0 \in \Omega$ existiert, sodaß $u(x_0) = \max_{x \in \overline{\Omega}} u(x)$, so ist u konstant.

Durch Übergang zu $-u$ erhalten wir analoge Aussagen über das Minimum.

BEWEIS. Angenommen, es existiert ein $x_0 \in \Omega$ mit $u(x_0) = M := \max_{x \in \overline{\Omega}} u(x)$. Sei $R > 0$ dergestalt, daß $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$ (ein solches R existiert, da Ω offen ist). Nach der Mittelwerteigenschaft gilt dann

$$M = u(x_0) = \frac{1}{|B_R(x_0)|} \int_{B_R(x_0)} u(y) dy.$$

Da aber M das Maximum aller Werte von u ist, ist dies nur möglich, wenn u in $B_R(x_0)$ konstant gleich M ist. Damit ist also das Urbild $u^{-1}(\{M\}) = \{x \in \Omega : u(x) = M\}$ offen in Ω .

Andererseits ist aber, da u in Ω stetig ist, das Urbild der abgeschlossenen Menge $\{M\}$ unter u auch abgeschlossen. Da aber $u^{-1}(M)$ nach Voraussetzung nichtleer ist, folgt $u^{-1}(\{M\}) = \Omega$, weil ja Ω zusammenhängend ist.

Die Aussage (3.12) folgt daraus sofort: Nimmt nämlich u sein Maximum M im Innern, also in Ω an, so ist u konstant gleich M , und (3.12) ist trivial erfüllt; nimmt u aber sein Maximum nicht im Innern, sondern auf dem Rand von Ω an, so folgt (3.12) ebenfalls. \square

Als nächste Anwendung der Mittelwerteigenschaft zeigen wir die Regularität harmonischer Funktionen. Sei dazu $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

- $\eta \geq 0$,
- der Träger von η ist in $B_1(0)$ enthalten,
- η ist radialsymmetrisch, d.h. $\eta(x) = \tilde{\eta}(|x|)$ für ein $\tilde{\eta} \in C_c^\infty(\mathbb{R})$,
- $\int_{B_1(0)} \eta(x) dx = 1$.

Man bezeichnet eine solche Funktion als *Standard-Glättungskern* auf \mathbb{R}^n . Wir setzen zudem $\eta^\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon^n} \eta\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$, und man prüft leicht nach, daß der Träger von η^ϵ in $B_\epsilon(0)$ enthalten ist, und daß $\int_{B_\epsilon(0)} \eta^\epsilon(x) dx = 1$.

Sei nun $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ auf Ω lokal integrierbar (d.h. u ist integrierbar auf jeder kompakten Teilmenge von Ω). Ist $x \in \Omega$ und $\epsilon > 0$ so klein, daß $\overline{B_\epsilon(x)} \subset \Omega$, so ist die *Glättung*

$$u^\epsilon(x) := \int_{B_\epsilon(x)} u(y) \eta^\epsilon(x-y) dy \quad (3.13)$$

wohldefiniert. Durch diese Formel ist die Funktion u^ϵ auf der offenen Menge

$$\Omega^\epsilon := \{x \in \Omega : \inf\{|x-y| : y \in \partial\Omega\} > \epsilon\}$$

wohldefiniert, und $u^\epsilon \in C^\infty(\Omega^\epsilon)$, denn alle Ableitungen fallen auf den glatten Term $\eta^\epsilon(x-y)$.

Mit dieser Vorbereitung zeigen wir nun:

SATZ 3.12 (Regularität harmonischer Funktionen). Sei $u \in C^2(\Omega)$ harmonisch. Dann ist sogar $u \in C^\infty(\Omega)$.

BEWEIS. Es genügt zu zeigen, daß $u \in C^\infty(\Omega^\epsilon)$ für jedes $\epsilon > 0$. Die Strategie besteht darin, auf Ω^ϵ zu zeigen $u = u^\epsilon$ und auszunutzen, daß $u^\epsilon \in C^\infty(\Omega^\epsilon)$.

⁴Wir erinnern uns aus der Analysis II: Eine Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt *zusammenhängend*, wenn Ω und \emptyset die einzigen Teilmengen von Ω sind, die bzgl. Ω sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

Dazu führen wir für fixes $\epsilon > 0$ und $x \in \Omega^\epsilon$ folgende Rechnung aus:

$$\begin{aligned}
u^\epsilon(x) &= \int_{B_\epsilon(x)} u(y) \eta^\epsilon(x-y) dy \\
&= \frac{1}{\epsilon^n} \int_{B_\epsilon(x)} u(y) \tilde{\eta}\left(\frac{|x-y|}{\epsilon}\right) dy \\
&= \frac{1}{\epsilon^n} \int_0^\epsilon \tilde{\eta}\left(\frac{\rho}{\epsilon}\right) \left[\int_{\partial B_\rho(x)} u(y) dS(y) \right] d\rho \\
&= \frac{1}{\epsilon^n} \int_0^\epsilon \tilde{\eta}\left(\frac{\rho}{\epsilon}\right) |\partial B_\rho(x)| u(x) d\rho \\
&= \frac{1}{\epsilon^n} u(x) \int_0^\epsilon \tilde{\eta}\left(\frac{\rho}{\epsilon}\right) n \omega_n \rho^{n-1} d\rho \\
&= u(x) \int_{B_1(0)} \eta(y) dy = u(x),
\end{aligned}$$

wobei wir nacheinander benutzt haben: die Definition der Glättung; die Definition von η^ϵ ; die Integration in Polarkoordinaten; die Mittelwerteigenschaft; die Formel für das $(n-1)$ -dimensionale Volumen der Kugeloberfläche mit Radius ρ ; die Formel für die Integration radialsymmetrischer Funktionen; und schließlich die Eigenschaft von η , Integral eins zu haben. \square

- BEMERKUNG 3.13.** (1) Der Satz besagt also, daß eine harmonische Funktion, die a priori nur zweimal stetig differenzierbar sein muß, automatisch sogar beliebig oft differenzierbar ist. Die LAPLACE-Gleichung hat also nur reguläre Lösungen.
- (2) Je näher x am Rand von Ω liegt, desto kleiner muß ϵ gewählt werden, und desto größer werden die Ableitungen von η^ϵ und damit von u^ϵ . Im allgemeinen ist daher zwar $u \in C^\infty(\Omega)$, aber *nicht* $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$, d.h. die Regularität von u besteht nicht gleichmäßig bis zum Rand.
- (3) Zwei Verschärfungen unseres Regularitätssatzes seien genannt: Zum einen kann man zeigen, daß harmonische Funktionen nicht nur C^∞ , sondern sogar *analytisch* sind (also lokal in eine Potenzreihe entwickelt werden können). Dies hängt mit der oben bereits angedeuteten Verwandtschaft zwischen harmonischen und holomorphen Funktionen zusammen.

Zum anderen ist eine harmonische Funktion selbst dann C^∞ -regulär (und sogar analytisch), wenn sie nicht anfänglich als C^2 , sondern lediglich als lokal integrierbar vorausgesetzt wird (WEYLSches Lemma). In diesem Falle kann man die LAPLACE-Gleichung schwach interpretieren, ähnlich wie in unserer Definition 2.13 für Erhaltungsgleichungen.

LEMMA 3.14. *Es existiert ein $C > 0$, das nur von der Dimension n abhängt, mit folgender Eigenschaft: Sei u auf Ω harmonisch und $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$, dann gilt*

$$|\nabla u(x_0)| \leq \frac{C}{R^{n+1}} \int_{B_R(x_0)} |u(y)| dy.$$

BEWEIS. Beachte zunächst, daß jede partielle Ableitung einer harmonischen Funktion wieder harmonisch ist und somit die Mittelwerteigenschaft erfüllt. Für jedes $j = 1, \dots, n$

haben wir deshalb gemäß der Mittelwerteigenschaft

$$\begin{aligned} |\partial_{x_j} u(x_0)| &= \frac{1}{|B_{R/2}(x_0)|} \left| \int_{B_{R/2}(x_0)} \partial_{x_j} u(y) dy \right| \\ &= \frac{1}{|B_{R/2}(x_0)|} \left| \int_{\partial B_{R/2}(x_0)} u(y) n_j(y) dS(y) \right| \\ &\leq \frac{|\partial B_{R/2}(x_0)|}{|B_{R/2}(x_0)|} \sup_{y \in \partial B_{R/2}(x_0)} |u(y)| \\ &= \frac{C_1}{R} \sup_{y \in \partial B_{R/2}(x_0)} |u(y)|. \end{aligned}$$

Hier haben wir beim Übergang von der ersten auf die zweite Zeile den GAUSSSchen Integralsatz (bzw. die höherdimensionale partielle Integration, vgl. (2.22), (2.23)) verwendet und in der letzten Zeile die Tatsache, daß die n - bzw. $(n-1)$ -dimensionalen Volumina der Kugel und ihres Randes proportional zu R^n bzw. R^{n-1} sind. Wir haben außerdem mit C_1 eine nur von n abhängige Zahl bezeichnet.

Sei nun $y \in \partial B_{R/2}(x_0)$ beliebig, dann liegt $B_{R/2}(y)$ nach Dreiecksungleichung immer noch in Ω , und nach Mittelwerteigenschaft ist

$$|u(y)| = \frac{1}{|B_{R/2}(y)|} \left| \int_{B_{R/2}(y)} u(z) dz \right| \leq \frac{C_2}{R^n} \int_{B_{R/2}(y)} |u(z)| dz \leq \frac{C_2}{R^n} \int_{B_R(x_0)} |u(z)| dz,$$

da $B_{R/2}(y) \subset B_R(x_0)$. Die Behauptung folgt nun sofort aus der Kombination dieser beiden Abschätzungen. \square

SATZ 3.15 (LIOUVILLE). Sei $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch auf ganz \mathbb{R}^n . Ist u beschränkt, so ist es konstant.

BEWEIS. Ist u auf \mathbb{R}^n durch $M > 0$ beschränkt, so haben wir nach Lemma 3.14 für jedes $x \in \mathbb{R}^n$

$$|\nabla u(x)| \leq \frac{C}{R^{n+1}} \int_{B_R(x)} |u(y)| dy \leq \frac{CM}{R^{n+1}} |B_R(x)| = \frac{CM\omega_n}{R},$$

und da dies für alle $R > 0$ gilt (denn jedes $B_R(x)$ ist in $\Omega = \mathbb{R}^n$ enthalten), folgt $\nabla u(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Daher ist u auf \mathbb{R}^n konstant. \square

Man beachte unbedingt, daß der Satz von LIOUVILLE nur harmonische Funktionen betrifft, die auf dem ganzen Raum definiert sind. Selbstverständlich gibt es auf beschränkten Gebieten harmonische Funktionen, die beschränkt, aber nicht konstant sind (z.B. $u(x, y) = x^2 - y^2$ auf $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$).

Der Satz von LIOUVILLE begegnet uns auch in der Funktionentheorie, wo er besagt, daß eine auf ganz \mathbb{C} holomorphe und beschränkte Funktion konstant ist. Daraus läßt sich unter anderem ein Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra bauen.

3.2.2. Die POISSON-Gleichung auf \mathbb{R}^n . Wir betrachten nun die POISSON-Gleichung $\Delta u = f$ auf \mathbb{R}^n , wobei f vorgegeben ist. Da diese Gleichung linear ist, ist unsere Strategie, zunächst eine Lösung für sehr einfaches f zu finden und dann die Lösung für allgemeines f als Superposition⁵ der „einfachen“ Lösungen darzustellen. Eine „einfache“ rechte Seite

⁵Das Prinzip der *Superposition*, also der Überlagerung, besagt für die POISSON-Gleichung: Ist $\Delta u_1 = f_1$ und $\Delta u_2 = f_2$, so ist auch $\Delta(u_1 + u_2) = f_1 + f_2$. Das Superpositionsprinzip haben wir bereits bei der Wellengleichung verwendet, als wir Lösungen in Form von Linearkombinationen einfacher Wellen erhalten haben.

in unserem Sinne ist das DIRAC-Maß δ_0 ; Jede stetige Funktion $f \in C(\mathbb{R}^n)$ kann dann als Überlagerung von DIRAC-Maßen geschrieben werden in der Form

$$f(x) = (f * \delta_0)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) d\delta_0(y)$$

(dies ist gewissermaßen der Fall $\epsilon = 0$ in (3.13)). Haben wir also eine Lösung von $\Delta\Phi = \delta_0$ gefunden, so wird

$$u(x) := (\Phi * f)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) f(x-y) dy$$

eine Lösung von $\Delta u = f$ sein.

Natürlich stellt sich die Frage, was $\Delta\Phi = \delta_0$ genau bedeutet. Man kann diese Gleichung wiederum im schwachen Sinne interpretieren, so wie wir es in Definition 2.13 getan haben: Eine lokal integrierbare Funktion $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt schwache Lösung von $\Delta\Phi = \delta_0$, wenn für alle $\psi \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x) \Delta\psi(x) dx = \psi(0) \quad (3.14)$$

(beachte $\psi(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) d\delta_0(x)$). Wählt man speziell Testfunktionen ψ , deren Träger nicht die Null enthalten, so sieht man sofort, daß jede solche Lösung Φ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ harmonisch ist.

Als weitere Beobachtung stellen wir fest, daß sowohl δ_0 als auch Δ rotationssymmetrisch sind (in dem Sinne, daß $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(Tx) d\delta_0(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) d\delta_0(x)$ und $\Delta(\psi \circ T) = (\Delta\psi) \circ T$ für jedes $\psi \in C^2(\mathbb{R}^n)$ und jede orthogonale Abbildung $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$). Es liegt also nahe, für die Gleichung $\Delta\Phi = \delta_0$ eine rotationssymmetrische Lösung zu suchen, die für $r = |x| > 0$ harmonisch ist.

Wie aus der Analysis II bekannt, lautet der LAPLACE-Operator einer rotationssymmetrischen Funktion

$$\Delta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{n-1}{r} \frac{d}{dr}, \quad (3.15)$$

genauer: Ist $\Phi(x) = v(|x|) = v(r)$, so ist

$$\Delta\Phi(x) = v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r).$$

Mit dem Ansatz $\Phi(x) = v(|x|) = v(r)$ und $\Delta\Phi(x) = 0$ für $|x| > 0$ erhalten wir also die gewöhnliche Differentialgleichung

$$v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r) = 0,$$

die sich (mit Trennung der Variablen oder integrierendem Faktor) durch

$$\Phi(x) = v(r) = \begin{cases} C_1 \log r + C_2 & \text{für } n = 2, \\ \frac{C_1}{r^{n-2}} + C_2 & \text{für } n \geq 3 \end{cases}$$

lösen läßt. Wir setzen jeweils $C_2 = 0$. Aus dem Beweis des nächsten Satzes erhalten wir den Wert von C_1 , den wir aber jetzt schon angeben:

DEFINITION 3.16 (Fundamentallösung). Die *Fundamentallösung der POISSON-Gleichung* lautet

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log |x| & \text{für } n = 2, \\ -\frac{1}{n(n-2)\omega_n} \frac{1}{r^{n-2}} & \text{für } n \geq 3, \end{cases}$$

wobei ω_n das Volumen der n -dimensionalen Einheitskugel bezeichnet.

SATZ 3.17. (1) Die Fundamentallösung aus Definition 3.16 erfüllt $\Delta\Phi = \delta_0$ im Sinne von (3.14).

(2) Ist $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$, so ist $\Phi * f \in C^2(\mathbb{R}^n)$, und $\Delta(\Phi * f) = f$.

BEWEIS. (1) Sei $\psi \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$, dann wollen wir (3.14) zeigen. Sei dazu $\epsilon > 0$, dann ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x) \Delta \psi(x) dx = \int_{B_\epsilon(0)} \Phi(x) \Delta \psi(x) dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(0)} \Phi(x) \Delta \psi(x) dx =: I_1 + I_2.$$

Man beachte hierbei, daß beide Integrale wohldefiniert sind, da Φ lokal integrierbar ist (warum?) und ψ kompakten Träger hat.

Betrachten wir zuerst I_2 . Wir wissen bereits (aus der Rechnung vor Definition 3.16), daß Φ in $\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(0)$ harmonisch ist; mit dem Integralsatz von GAUSS folgt damit

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(0)} \Phi(x) \Delta \psi(x) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(0)} \nabla \Phi(x) \cdot \nabla \psi(x) dx + \int_{\partial B_\epsilon(0)} (\nabla \psi \cdot n) \Phi dS(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(0)} \Delta \Phi(x) \psi(x) dx - \int_{\partial B_\epsilon(0)} \psi(\nabla \Phi \cdot n) dS(x) + \int_{\partial B_\epsilon(0)} (\nabla \psi \cdot n) \Phi dS(x) \\ &= - \int_{\partial B_\epsilon(0)} \psi(\nabla \Phi \cdot n) dS(x) + \int_{\partial B_\epsilon(0)} (\nabla \psi \cdot n) \Phi dS(x). \end{aligned}$$

Hier ist n die äußere Einheitsnormale an $\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(0)$, also $n(x) = -\frac{x}{|x|}$. Für das zweite Integral schätzen wir ab

$$\left| \int_{\partial B_\epsilon(0)} (\nabla \psi \cdot n) \Phi dS(x) \right| \leq C \|\nabla \psi\|_\infty \epsilon^{n-1} \begin{cases} |\log(\epsilon)| & \text{falls } n = 2, \\ \epsilon^{2-n} & \text{falls } n \geq 3, \end{cases}$$

was in jedem Falle mit $\epsilon \rightarrow 0$ gegen null konvergiert. Für das andere Randintegral berechnen wir

$$\nabla \Phi(x) = \frac{1}{n\omega_n} \frac{x}{|x|^n},$$

sodaß auf $\partial B_\epsilon(0)$ gilt

$$(\nabla \Phi \cdot n)(x) = -\frac{1}{n\omega_n} \frac{x}{\epsilon^n} \cdot \frac{x}{\epsilon} = -\frac{1}{n\omega_n} \epsilon^{1-n} = -\frac{1}{|\partial B_\epsilon(0)|}$$

und daher

$$\int_{\partial B_\epsilon(0)} \psi(\nabla \Phi \cdot n) dS(x) = -\frac{1}{|\partial B_\epsilon(0)|} \int_{\partial B_\epsilon(0)} \psi dS(x),$$

was (da ψ stetig ist) mit $\epsilon \rightarrow 0$ gegen $-\psi(0)$ konvergiert. Insgesamt erhalten wir also

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_2 = \psi(0).$$

Es ist aber $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_1 = 0$, da der Integrand $\Phi \Delta \psi$ lokal integrierbar ist und der Integrationsbereich $B_\epsilon(0)$ mit $\epsilon \rightarrow 0$ immer kleiner wird. Da $\epsilon > 0$ beliebig war, erhalten wir wie behauptet

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x) \Delta \psi(x) dx = \psi(0).$$

(2) Sei nun $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$, dann ist

$$\partial_{x_k x_l} (\Phi * f)(x) = \partial_{x_k x_l} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) f(x-y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \partial_{x_k x_l} f(x-y) dy.$$

Da aber nach Voraussetzung $\partial_{x_k x_l} f$ stetig ist, so auch $\partial_{x_k x_l} (\Phi * f)$, also ist $\Phi * f \in C^2(\mathbb{R}^n)$.

Wenden wir nun (3.14) an auf $\psi(y) := f(x - y)$, so erhalten wir in der Tat für jedes $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \psi(0) = f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \Delta_y f(x - y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \Delta_x f(x - y) dy \\ &= \Delta \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) f(x - y) dy = \Delta(\Phi * f)(x). \end{aligned}$$

□

BEMERKUNG 3.18. (1) Die Voraussetzung $f \in C_c^2$ kann deutlich abgeschwächt werden. Die heuristische Überlegung ist die folgende: Will man $\Delta u = f$ lösen, sollte u zwei Ableitungen mehr haben als f ; man würde also $u \in C^2$ bereits dann erwarten, wenn f nur stetig ist. Dies ist nicht ganz korrekt, aber „fast“; die einschlägigen elliptischen Regularitätstheorien tragen die Namen SCHAUDER und CALDERÓN-ZYGMUND, siehe [4] (die „Bibel“ für elliptische PDE).

(2) Die Faltung $\Phi * f$ heißt *NEWTON-Potential* der Funktion f . Der Grund dafür ist wie folgt: Ist f die Verteilung einer Masse, so gibt nach dem NEWTONSchen Gravitationsgesetz $\Phi * f(x)$ bis auf eine Konstante das Gravitationspotential an, also die potentielle Energie eines Massepunkts (der Masse 1) in dem durch f gegebenen Gravitationsfeld. Ist speziell $f = \delta_0$, so kann man sich die das Gravitationsfeld erzeugende Masse als punktförmig vorstellen (z.B. näherungsweise die Sonne), und im Fall $n = 3$ erhält man aus Definition 3.16 die bekannte Tatsache, daß die potentielle Energie eines Planeten mit Abstand r von der Sonne proportional ist zu $-\frac{1}{r}$.

3.2.3. Die POISSON-Gleichung auf beschränkten Gebieten. Sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und zusammenhängend mit glattem Rand⁶. Wir haben zunächst

SATZ 3.19 (Eindeutigkeit). Seien $f \in C(\Omega)$ und $g \in C(\partial\Omega)$. Sind $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ zwei Lösungen von

$$\begin{aligned} \Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

so gilt $u = v$.

BEWEIS. Dies folgt einfach aus dem Maximumsprinzip: Unter den genannten Voraussetzungen ist $w := u - v$ eine harmonische Funktion mit Nullrandwerten; nach Maximumsprinzip für harmonische Funktionen (Satz 3.11) ist dann w identisch null. □

Dieses Argument läßt sich, mutatis mutandis, auch auf die POISSON-Gleichung in \mathbb{R}^n anwenden: Zwei Lösungen der POISSON-Gleichung mit der gleichen rechten Seite f , die beide mit $|x| \rightarrow \infty$ gegen null konvergieren, sind identisch (nämlich gleich $\Phi * f$, falls $n \geq 3$). Details sind Gegenstand der Übungen.

Die Existenz von Lösungen ist schwieriger. Klassisch arbeitet man mit GREEN-Funktionen. Eine elegante Alternative besteht in einem *variationellen* Vorgehen. Zwar können wir im Rahmen dieser Vorlesung nicht den variationellen Existenzbeweis geben, aber die grundlegende Umformulierung ist dennoch erhellend: Für ein $g \in C^2(\partial\Omega)$ sei

$$\mathcal{A} := \{u \in C^2(\overline{\Omega}) : u \upharpoonright_{\partial\Omega} = g\}$$

und für $u \in \mathcal{A}$ und $f \in C(\overline{\Omega})$ setze

$$I[u] := \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 + f(x)u(x) \right) dx.$$

Man bezeichnet den Wert $I[u] \in \mathbb{R}$ als die *DIRICHLET-Energie* der Funktion u .

⁶Der Rand muß nur regulär genug sein, daß der GAUSSSche Integralsatz gilt.

SATZ 3.20 (Variationelle Formulierung der POISSON-Gleichung). Seien $f \in C(\bar{\Omega})$ und $g \in C^2(\partial\Omega)$. Dann sind äquivalent:

- (1) $u \in C^2(\bar{\Omega})$ ist eine Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned}\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega;\end{aligned}$$

- (2) u ist ein Minimierer von I in \mathcal{A} , d.h.

$$I[u] \leq I[v] \quad \text{für alle } v \in \mathcal{A}.$$

BEWEIS. Sei zunächst $u \in C^2(\bar{\Omega})$ eine Lösung des Randwertproblems (sodaß insbesondere $u \in \mathcal{A}$) und $v \in \mathcal{A}$ beliebig. Nach Voraussetzung und mit dem Satz von GAUSS gilt

$$0 = \int_{\Omega} (f - \Delta u)(u - v) dx = \int_{\Omega} (f(u - v) + \nabla u \cdot \nabla(u - v)) dx,$$

wobei das Oberflächenintegral über $\partial\Omega$ wegen $(u - v)|_{\partial\Omega} = 0$ verschwindet. Nun ist aber mit der Ungleichung von CAUCHY-SCHWARZ und der Ungleichung $ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$:

$$\nabla u \cdot \nabla(u - v) = |\nabla u|^2 - \nabla u \cdot \nabla v \geq |\nabla u|^2 - |\nabla u| |\nabla v| \geq \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \frac{1}{2} |\nabla v|^2$$

und deshalb

$$0 \geq \int_{\Omega} \left(f(u - v) + \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \frac{1}{2} |\nabla v|^2 \right) dx = I[u] - I[v],$$

wie behauptet.

Sei nun umgekehrt $u \in \mathcal{A}$ ein Minimierer von I . Nach Voraussetzung erfüllt u die Randbedingung. Sei $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, dann ist die Funktion $u + \epsilon\phi \in \mathcal{A}$ für jedes $\epsilon \in \mathbb{R}$. Wegen Minimalität ist aber $I[u + \epsilon\phi] \geq I[u]$ für alle $\epsilon \in \mathbb{R}$, und da die Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\epsilon \mapsto I[u + \epsilon\phi]$ differenzierbar ist⁷, folgt

$$\begin{aligned}0 &= \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} I[u + \epsilon\phi] = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} |\nabla u + \epsilon \nabla \phi|^2 + f(u + \epsilon\phi) \right] dx \\ &= \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \epsilon^2 |\nabla \phi|^2 + \epsilon \nabla u \cdot \nabla \phi + \epsilon f \phi \right] dx \\ &= \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \phi + f \phi) dx \\ &= \int_{\Omega} \phi (-\Delta u + f) dx,\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt unter Beachtung von $\phi|_{\partial\Omega} = 0$ partiell integriert haben. Da ϕ beliebig war, folgt in der Tat $\Delta u = f$. \square

Man sagt, die POISSON-Gleichung sei die EULER-LAGRANGE-Gleichung⁸ der DIRICHLET-Energie. Die Formulierbarkeit einer PDE als Minimierungsproblem reflektiert die große Bedeutung, die Minimierungsprobleme in der Physik und Geometrie haben. So kann man etwa eine Seifenhaut durch das Prinzip der Energieminimierung modellieren und erhält als zugehörige EULER-LAGRANGE-Gleichung die *minimale Oberflächengleichung*, deren lineare Approximation für kleine Auslenkungen genau die LAPLACE-Gleichung ist.

Es kann nützlich sein, ein Minimierungsproblem (man sagt auch *Variationsproblem*) auf diese Weise in eine PDE zu überführen, aber ebenso hilfreich ist es bisweilen, umgekehrt eine PDE als Variationsproblem zu formulieren.

⁷Es handelt sich bei dieser Abbildung, wie man leicht sieht, um ein quadratisches Polynom in ϵ .

⁸Wenn Sie bei mir Analysis II gehört haben, kennen Sie den Begriff der EULER-LAGRANGE-Gleichung bereits für Funktionen einer Variablen.

3.3. Die Wärmeleitungsgleichung

Zuletzt befassen wir uns mit der Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u - \Delta u = 0,$$

die als zeitabhängige Version der LAPLACE-Gleichung aufgefaßt werden kann.

3.3.1. Die Wärmeleitungsgleichung auf \mathbb{R}^n . Unser Vorgehen ähnelt dem für die POISSON-Gleichung: Wir lösen zunächst das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \partial_t \Phi - \Delta \Phi &= 0, \\ \Phi(\cdot, 0) &= \delta_0 \end{aligned} \tag{3.16}$$

und erhalten anschließend die Lösung zu beliebigem Anfangsdatum u^0 durch Faltung mit der Fundamentallösung Φ .

Der Weg zur Fundamentallösung führt wieder über Symmetriebetrachtungen und Reduktion auf eine gewöhnliche Differentialgleichung. Zunächst bemerken wir, daß die Wärmeleitungsgleichung *skalierungsinvariant* ist in dem Sinne, daß für jedes $\lambda > 0$ mit $u(x, t)$ auch

$$u_\lambda(x, t) := \lambda^n u(\lambda x, \lambda^2 t)$$

eine Lösung ist. Wir suchen nun eine *selbstähnliche* Lösung bezüglich dieser (parabolischen) Skalierung, d.h. wir nehmen den Ansatz

$$u(x, t) = \lambda^n u(\lambda x, \lambda^2 t) \quad \text{für alle } \lambda > 0$$

und erhalten daraus, indem wir speziell $\lambda = t^{-1/2}$ einsetzen,

$$u(x, t) = t^{-n/2} u\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right) =: t^{-n/2} v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$$

für eine Funktion $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Wir nehmen an, motiviert durch die Rotationssymmetrie des LAPLACE-Operators und des DIRAC-Maßes, daß v selbst rotations-symmetrisch ist, also $v(y) = w(r) = w(|y|)$.

Setzen wir nun unseren Ansatz $u(x, t) = t^{-n/2} w\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right)$ in die Wärmeleitungsgleichung ein, so folgt mit $\rho := \frac{r}{\sqrt{t}}$

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_t \left[t^{-n/2} w\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right) \right] - \Delta \left[t^{-n/2} w\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right) \right] \\ &= -\frac{1}{2} t^{-(n+3)/2} r w'(\rho) - \frac{n}{2} t^{-(n+2)/2} w(\rho) - t^{-1-\frac{n}{2}} w''(\rho) - \frac{n-1}{r\sqrt{t}} t^{-n/2} w'(\rho) \\ &= -t^{-\frac{n}{2}-1} \left(\frac{1}{2} \rho w'(\rho) + \frac{n}{2} w(\rho) + w''(\rho) + \frac{n-1}{\rho} w'(\rho) \right), \end{aligned}$$

wobei wir beim Übergang von der ersten zur zweiten Zeile die Formel (3.15) für den LAPLACE-Operator in Polarkoordinaten benutzt haben. Wir erhalten daraus die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{1}{2} \rho w' + \frac{n}{2} w + w'' + \frac{n-1}{\rho} w' = 0,$$

die sich nach Multiplikation mit ρ^{n-1} und mithilfe der Produktregel als

$$(\rho^{n-1} w')' + \frac{1}{2} (\rho^n w)' = 0$$

schreiben läßt. Daraus folgt zunächst für eine Konstante $C_1 \in \mathbb{R}$

$$\rho^{n-1} w' + \frac{1}{2} \rho^n w = C_1.$$

Wählen wir $C_1 = 0$, so folgt

$$w' = -\frac{1}{2}\rho w,$$

was mithilfe von Trennung der Variablen in

$$w(\rho) = Ce^{-\rho^2/4}$$

resultiert. Eingedenk der Identität $u(x, t) = t^{-n/2}w\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right)$ definieren wir deshalb (die Wahl von C erklärt sich im Beweis des nächsten Satzes):

DEFINITION 3.21 (Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung). Die Funktion $\Phi : \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

heißt *Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung* in \mathbb{R}^n .

Die Fundamentallösung ist also die Dichtefunktion einer Normalverteilung mit Erwartung null und Standardabweichung proportional zu \sqrt{t} . Für $t \searrow 0$ konvergiert diese Verteilung schwach gegen das DIRAC-Maß. Mit wachsender Zeit wird also die Temperaturverteilung, die ursprünglich bei $x = 0$ konzentriert war, immer flacher⁹. Die Temperatur *diffundiert* also.

Um zu zeigen, daß dieses Φ tatsächlich das Problem (3.16) löst, müssen wir diesem eine klare Bedeutung verleihen:

DEFINITION 3.22. Eine Funktion $\Phi : \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ heißt *schwache Lösung* von (3.16), wenn sie in $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ lokal integrierbar ist, und wenn für alle $\psi \in C_c^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ gilt

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} [\partial_t \psi(x, t)\Phi(x, t) + \Delta \psi(x, t)\Phi(x, t)] dx dt + \psi(0, 0) = 0.$$

Die Motivation für diese Definition erwächst wieder durch Multiplikation von (3.16) mit ψ und partieller Integration (Übung).

Für eine Funktion $u^0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist mit $\Phi * u^0$ die Faltung bezüglich der x -Variablen gemeint, also

$$(\Phi * u^0)(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t)u^0(y) dy.$$

SATZ 3.23. (1) Die Fundamentallösung aus Definition 3.21 ist eine schwache Lösung von (3.16).

(2) Ist $u^0 \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, so ist

$$\Phi * u^0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty)) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, \infty)),$$

und $\Phi * u^0$ ist eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\partial_t u - \Delta u = 0,$$

$$u(\cdot, 0) = u^0.$$

BEWEIS. (1) Zunächst ist klar, daß Φ auf $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ lokal integrierbar ist, denn man sieht leicht, daß $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, t) dx = 1$ für jedes $t > 0$, und daher ist $\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, t) dx dt = T < \infty$ für jedes $0 < T < \infty$.

⁹Es ist kein Zufall, daß die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Position eines ursprünglich bei $x = 0$ lozierten Partikels, das einer BROWNSchen Bewegung unterworfen ist, zur Zeit t genau durch eine solche Normalverteilung gegeben ist. Man sagt, die Wärmeleitungsgleichung sei die *generierende PDE* der BROWNSchen Bewegung. Diese Beobachtung läßt sich in der stochastischen Analysis wesentlich verallgemeinern.

Sei nun $\psi \in C_c^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$. Dann ist für jedes $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} [\partial_t \psi(x, t) \Phi(x, t) + \Delta \psi(x, t) \Phi(x, t)] dx dt \\ &= \int_0^\epsilon (\dots) dt + \int_\epsilon^\infty (\dots) dt =: I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Für I_2 verwenden wir die bereits bewiesene Tatsache, daß Φ auf $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ die Wärmeleitungsgleichung löst, sodaß mit partieller Integration folgt

$$I_2 = \int_\epsilon^\infty \int_{\mathbb{R}^n} [-\partial_t \Phi \psi - \Delta \Phi \psi] dx dt - \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, \epsilon) \psi(x, \epsilon) dx = - \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, \epsilon) \psi(x, \epsilon) dx,$$

was mit $\epsilon \rightarrow 0$ gegen $\psi(0, 0)$ konvergiert (Übung).

Das Integral I_1 konvergiert mit $\epsilon \rightarrow 0$ gegen null, da das Maß des Integrationsbereichs gegen null konvergiert. Insgesamt folgt, da $\epsilon > 0$ beliebig war, daß Φ tatsächlich eine schwache Lösung von (3.16) ist.

(2) Da $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$, so auch $\Phi * u^0$, da man alle partiellen Ableitungen unter das Faltungsintegral ziehen kann, wo sie nur Φ treffen (vgl. Beweis zu Satz 3.17(2)). Außerdem gilt für jedes $x^0 \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{(x,t) \rightarrow (x^0,0)} (\Phi * u^0)(x, t) = u^0(x^0)$$

(dies zeigt man ähnlich wie $I_2 \rightarrow \psi(0, 0)$ in Teil (1)). Damit ist $\Phi * u^0$ (mit der Konvention $(\Phi * u^0)(\cdot, 0) = u^0$) sogar auf ganz $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ stetig.

Es bleibt zu zeigen, daß $\Phi * u^0$ die Wärmeleitungsgleichung löst. Dies ist aber klar, da man alle Ableitungen unter dem Integral ziehen kann:

$$\partial_t (\Phi * u^0)(x, t) - \Delta (\Phi * u^0)(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_t \Phi(x - y, t) - \Delta \Phi(x - y, t)) u^0(y) dy = 0.$$

□

BEMERKUNG 3.24. Wir können an der Lösungsformel $u = \Phi * u^0$ mehrerlei ablesen: Anders als die Wellengleichung ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wärmeleitungsgleichung unendlich. Man sieht dies folgendermaßen: Für $u^0 = \delta_0$ ist die gesamte Wärme im Punkt $x = 0$ konzentriert, aber für jedes $t > 0$ und jedes $x \in \mathbb{R}^n$ ist $(\Phi * \delta_0)(x, t) = \Phi(x, t) > 0$. Das bedeutet, daß sogar an sehr weit entfernten Punkten im Raum die Wärmeleitung instantan zu beobachten ist. Insbesondere ist die Wärmeleitungsgleichung nicht mit der Relativitätstheorie kompatibel.

Zweitens bemerken wir eine *instantane Regularisierung*: Wie wir gezeigt haben, wird eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung, selbst wenn sie nur von stetigen Anfangsdaten (oder sogar von δ_0 !) ausgeht, für alle $t > 0$ C^∞ -glatt sein. Die Wärmeleitungsgleichung wirkt also regularisierend. Auch dies stellt einen Gegensatz zur Wellengleichung dar.

Damit verwandt ist die Beobachtung, daß die Wärmeleitungsgleichung – wieder im Gegensatz zur Wellengleichung – nicht reversibel ist: Ist u eine Lösung, so ist $(x, t) \mapsto u(x, -t)$ keine Lösung mehr. Physikalisch läßt sich dies mit dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik begründen: Die (physikalische) Entropie nimmt im Laufe der Zeit zu, d.h. die Wärmeverteilung wird immer diffuser; anders gesagt: Wärme breitet sich aus, anstatt an einem Ort zu konzentrieren.

3.3.2. Die Wärmeleitungsgleichung auf beschränkten Gebieten. Sei wieder $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Um ein Maximumsprinzip für die Wärmeleitungsgleichung zu formulieren, müssen wir den Begriff des *parabolischen Randes* einführen: Schreibe dazu zunächst für eine Zeit $T > 0$

$$\Omega_T := \Omega \times (0, T],$$

dann ist der Abschluß von Ω_T in \mathbb{R}^{n+1} gegeben durch $\overline{\Omega_T} = \overline{\Omega} \times [0, T]$, und wir setzen

$$\partial^* \Omega_T := \overline{\Omega_T} \setminus \Omega_T.$$

Äquivalent kann man auch $\partial^* \Omega_T = (\overline{\Omega} \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times (0, T])$ schreiben. Stellt man sich Ω_T also als Zylinder vor (die t -Achse wäre dann vertikal aufzutragen), so umfaßt $\partial^* \Omega_T$ also den Boden und die Seite, aber nicht den Deckel des Zylinders. Man nennt $\partial^* \Omega_T$ den *parabolischen Rand* von Ω_T .

SATZ 3.25 (schwaches Maximumsprinzip). Sei $u : C(\overline{\Omega_T})$ eine Funktion, sodaß $\partial_t u$ und $D^2 u$ in Ω_T stetig sind, und die in Ω_T die Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u - \Delta u = 0$$

erfüllt. Dann gilt

$$\max_{(x,t) \in \overline{\Omega_T}} u(x,t) = \max_{(x,t) \in \partial^* \Omega_T} u(x,t),$$

d.h. u nimmt sein Maximum auf dem parabolischen Rand an. Dasselbe gilt für das Minimum.

BEWEIS. Wir behandeln nur das Maximum, da die Aussage zum Minimum durch Übergang zu $-u$ folgt. Zunächst ist klar, daß u als stetige Funktion auf der kompakten Menge $\overline{\Omega_T}$ sein Maximum annimmt.

Betrachte für $\epsilon > 0$ die Hilfsfunktion $v(x,t) := u(x,t) - \epsilon t$, die ebenfalls stetig auf $\overline{\Omega_T}$ ist und deren Ableitungen ebenso die Voraussetzungen des Satzes erfüllen. Es gilt

$$\partial_t v - \Delta v = -\epsilon + \partial_t u - \Delta u = -\epsilon < 0 \quad (3.17)$$

nach Voraussetzung.

Angenommen, v hätte bei $(x^*, t^*) \in \Omega_T$ ein lokales Maximum. Ist $t^* \in (0, T)$, so gilt also $\partial_t v(x^*, t^*) = 0$ sowie $D^2 v(x^*, t^*) \leq 0$ im Sinne der Matrix-Definitheit. Da $\Delta v(x^*, t^*)$ die Spur von $D^2 v(x^*, t^*)$ ist, haben wir deshalb $\Delta v(x^*, t^*) \leq 0$ und somit

$$\partial_t v(x^*, t^*) - \Delta v(x^*, t^*) \geq 0,$$

im Widerspruch zu (3.17).

Ist dagegen $t^* = T$, so ist, da (x^*, t^*) lokale Maximalstelle ist, $\partial_t v(x^*, t^*) \geq 0$ und wieder $\Delta v(x^*, t^*) \leq 0$, also ebenfalls

$$\partial_t v(x^*, t^*) - \Delta v(x^*, t^*) \geq 0$$

im Widerspruch zu (3.17). Damit ist gezeigt, daß v kein lokales Maximum in Ω_T besitzt und sein globales Maximum daher auf $\partial^* \Omega_T$ annimmt.

Wir haben daher (da $v \leq u$)

$$\begin{aligned} \max_{(x,t) \in \overline{\Omega_T}} u(x,t) &= \max_{(x,t) \in \overline{\Omega_T}} (v(x,t) + \epsilon t) \\ &\leq \max_{(x,t) \in \overline{\Omega_T}} v(x,t) + \epsilon T \\ &= \max_{(x,t) \in \partial^* \Omega_T} v(x,t) + \epsilon T \\ &\leq \max_{(x,t) \in \partial^* \Omega_T} u(x,t) + \epsilon T, \end{aligned}$$

und da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt

$$\max_{(x,t) \in \overline{\Omega_T}} u(x,t) \leq \max_{(x,t) \in \partial^* \Omega_T} u(x,t).$$

Die andere Ungleichung ist trivial. □

- BEMERKUNG 3.26.** (1) Es gibt auch ein *starkes* Maximumsprinzip für die Wärmeleitungsgleichung, analog zu Satz 3.11: Ist Ω offen, beschränkt und zusammenhängend, und nimmt eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung sein globales Maximum in Ω_T an, so ist die Lösung bereits konstant. Man mache sich klar, warum das starke Maximumsprinzip stärker ist als das schwache. Zum Beweis der starken Version benützt man, wie für harmonische Funktionen, eine Mittelwert-eigenschaft für die Wärmeleitungsgleichung. Aus Zeitgründen müssen wir hier auf eine genauere Darstellung verzichten und verweisen auf [2, Abschnitt 2.3].
- (2) Zur Interpretation: Man stelle sich eine metallene Kugel vor, deren Wärmeverteilung zur Zeit $t = 0$ gegeben ist und deren Temperatur am Rand festgehalten wird. Dann kann die Kugel im Inneren an keinem Punkt heißer sein als die maximale Temperatur zu Beginn oder als die Randtemperatur. Auch dies steht im Zusammenhang mit dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik.

SATZ 3.27 (Eindeutigkeit). Seien $f \in C(\Omega_T)$ und $g \in C(\partial^*\Omega_T)$. Dann existiert höchstens eine Funktion $u \in C(\overline{\Omega_T})$ mit $\partial_t u$ und $D^2 u$ stetig in Ω_T , die das Anfangs- und Randwertproblem

$$\begin{aligned}\partial_t u - \Delta u &= f && \text{in } \Omega_T, \\ u &= g && \text{auf } \partial^*\Omega_T\end{aligned}$$

löst.

BEWEIS. Seien u, v zwei solche Lösungen und $w := u - v$. Dann ist w eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung, die auf dem parabolischen Rand identisch null ist. Nach dem Maximumsprinzip ist daher sowohl das Maximum als auch das Minimum von w auf $\overline{\Omega_T}$ gleich null, also ist $w \equiv 0$ und somit $u = v$. \square

Ein alternativer Beweis (unter der geringfügig stärkeren Voraussetzung, daß $\partial_t u$ und Δu auf $\overline{\Omega_T}$ stetig sind) kommt ohne das Maximumsprinzip aus, sondern bedient sich einer *Energiemethode*: Seien also wieder u, v zwei Lösungen und $w = u - v$, und setze

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} w(x, t)^2 dx.$$

Dann ist

$$\frac{d}{dt} E(t) = \int_{\Omega} w \partial_t w dx = \int_{\Omega} w \Delta w dx = - \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \leq 0,$$

wobei wir ausgenutzt haben, daß w die Wärmeleitungsgleichung löst und auf $\partial\Omega$ null ist. Da aber nach Annahme w für $t = 0$ identisch null ist, gilt $E(0) = 0$, und da E eine monoton fallende, offensichtlich nichtnegative Funktion mit $E(0) = 0$ ist, folgt $E(t) = 0$ für alle $t \geq 0$. Dies zeigt aber, daß $w \equiv 0$, also $u = v$.

Literaturverzeichnis

- [1] C. DE LELLIS und L. SZÉKELYHIDI, Jr. On admissibility criteria for weak solutions of the Euler equations. *Arch. Ration. Mech. Anal.* **195** (1) (2010), 225–260.
- [2] L. C. EVANS. Partial Differential Equations (= Graduate Studies in Mathematics **19**). *American Mathematical Society, Providence, RI*, 2. Aufl. 2010.
- [3] C. L. FEFFERMAN. Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation. *The millennium prize problems*, 57–67, *Clay Math. Inst., Cambridge, MA*, 2006.
- [4] D. GILBARG und N. S. TRUDINGER. Elliptic partial differential equations of second order. Reprint of the 1998 edition. *Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin*, 2001.
- [5] S. N. KRUKHKOVA. First order quasilinear equations with several independent variables. *Mat. Sb. (N.S.)* **81** (123) (1970), 228–255.
- [6] B. PERTHAME. Transport Equations in Biology. *Frontiers in Mathematics. Birkhäuser Verlag, Basel*, 2007.