Seminar im Wintersemester 2023/24 28. Juli 2023

Proseminar Mathematik

Leitung: Gandalf Lechner

Im ersten Jahr Mathestudium haben Sie bereits viele Themen kennengelernt: Algebra und Ableitungen, Beweise und Banachräume, Cauchyfolgen und charakteristische Polynome, Determinanten und Differentiale, Endomorphismen und Extremwerte, ...

Viel gelernt haben Sie, aber sicher mehr Fragen als vorher. Die Klausuren sind rum, was mache ich jetzt mit dem, was ich gelernt habe? Sagt mir Analysis 2, wie ich Planetenbewegungen beschreiben kann? Gibt es interessante Körper jenseits von $\mathbb{C}$? Wie schnell konvergiert das Newton-Verfahren wirklich? Lokale Extrema verstehe ich, aber wie finde ich sie bei 10000 Variablen? Kann mir jemand erklären, was Tensorprodukte mit Quanteninformationstheorie zu tun haben? Sollte ich das Auswahlaxiom akzeptieren? Was ist eine Fourierreihe und was hat das mit JPEG-Kompression zu tun? Wie sind die Primzahlen verteilt? Was habe ich sonst noch alles noch nicht gelernt?

Ausgerüstet mit dem Wissen aus Analysis 1+2 und Linearer Algebra 1+2 wollen wir uns in diesem Seminar aufmachen, einige dieser und anderer Fragen zu klären und Mathematik in diversen Vorträgen neu kennenzulernen. Dieses Seminar wendet sich an Studierende (üblicherweise aus dem dritten Semester), die neugierig sind, mehr zu lernen und Lust haben, über ein mathematisches Thema vorzutragen und zu diskutieren. Diese Lehrveranstaltung unterscheidet sich also in mehrerer Hinsicht stark von den Ihnen bereits bekannten Vorlesungen:

- Der wichtigste Unterschied ist, dass Sie hier eine aktive Rolle einnehmen. Statt in der Vorlesung zuzuhören und gelegentlich eine Frage zu stellen, halten hier nur die Studierenden Vorträge. Sie arbeiten sich in ein (zugängliches) Thema anhand von empfohlener Literatur selbstständig ein, besprechen es ggf. mit mir vor, bereiten ein Handout dazu vor und halten dann einen Vortrag darüber (ca 60 Minuten).
- Sie können in diesem Seminar also nicht nur ihr mathematisches Wissen vertiefen und ergänzen, sondern üben auch, vor einer Gruppe einen Vortrag zu halten und einen kohärenten mathematischen Text dazu zu schreiben.
- An den Terminen, an denen jemand anderes vorträgt, sitzen Sie im Publikum, stellen Fragen, und diskutieren im Anschluss an den Vortrag mit allen.
- Ein weiterer Unterschied zu den Vorlesungen ist, dass wir in diesem Seminar viele völlig unterschiedliche Themen behandeln werden (s.o.). Je nach Geschmack können Sie ein Thema in einer Richtung wählen, die Ihnen gefällt. Sei es mehr algebraisch, mehr analytisch, algorithmisch, physikalisch, eine interessante Anwendung, ein reines Grundlagenthema – es gibt viele Möglichkeiten.
- Im Semester stehen ca. 14 Termine für Vorträge zur Verfügung. Wenn die Anzahl der

verfügbaren Plätze nicht ausreicht, besteht die Möglichkeit, Vorträge zu zweit auszuarbeiten und zu halten.

Wenn Sie Interesse haben, teilzunehmen, schreiben Sie mir bitte eine formlose Email an gandalf.lechner@fau.de.

Organisatorisches

- **Ort und Zeit:** Dienstag, 10:15-11:45, Übung 2.
  Am 3.10. (Feiertag) und am 31.10. (Konferenzreise) findet kein Seminar statt.
- Das Seminar steht allen interessierten Studierenden der Bachelor-Mathematikstudiengänge offen. Die erforderlichen Vorkenntnisse beschränken sich auf Analysis 1+2 und Lineare Algebra 1+2. Insbesondere ist das Seminar für Studierende im dritten Semester geeignet und gedacht.
- Bei erfolgreichem Abschluss des Seminars erhalten Sie 5 ECTS-Punkte.
- Die Studienleistung zum Seminar besteht aus einem Seminarvortrag von 60 Minuten Dauer, an den sich eine Diskussion mit dem Publikum anschließt, und einer schriftlichen Ausarbeitung von maximal 10 Seiten Länge zu Ihrem Vortragsthema.
- Das Seminar ist benotet.

Teilnahme am Seminar und Verteilung der Vorträge

Erwartungen an die TeilnehmerInnen

Ihre Studienleistung zum Seminar besteht aus einem Seminarvortrag von maximal 90 Minuten Dauer (inklusive Fragen/Diskussion, planen Sie besser mit 60 Minuten) und einer schriftlichen Ausarbeitung von maximal 10 Seiten Länge zu Ihrem Vortragsthema.

Auch an den Terminen, an denen Sie nicht vortragen, wird eine aktive Teilnahme erwartet. Stellen Sie Fragen während der Vorträge, insbesondere wenn etwas unklar ist – das hilft Ihnen, dem Vortragenden und allen TeilnehmerInnen des Seminars ganz entscheidend.

Die Benotung des Seminars glieder sich wie folgt:

- **Vortrag (Gewichtung: 60%)** Kriterien: Richtigkeit, Verständlichkeit, Reaktion/Antworten auf Fragen, sinnvoller Aufbau, Vermittlung des Stoffes, Erreichen der Hörerschaft, Originalität, eigene Ideen
- **Schriftliche Ausarbeitung (Gewichtung: 30%)** Kriterien: Richtigkeit, Präzision, Verständlichkeit, sinnvolle Gliederung, Form, Originalität, eigene Ideen
- **Mitarbeit im Seminar während des Semesters (Gewichtung: 10%)** Kriterien: Ihre Fragen / Diskussionsbeiträge

Tipps für die Vorbereitung und die Vorträge

- Ein Seminarvortrag muss detailliert vorbereitet werden. Das dauert meist viel länger als erwartet, planen Sie also viel Zeit dafür ein.
- In einem ersten Schritt müssen Sie selbst Ihr Seminarthema genau verstehen. In einem zweiten Schritt müssen Sie dann überlegen, wie Sie diese Inhalte am besten vermitteln. Merken Sie sich also, welche Punkte Ihnen beim Literaturstudium zuerst unverständlich vorgekommen sind, und erklären Sie diese Aspekte dann besonders sorgfältig in Ihrem Vortrag.
- Planen Sie im Vorfeld, welche Punkte am wichtigsten sind und auf keinen Fall ausgelassen werden können (z.B. zentrale Definitionen und Ergebnisse), und welche Aspekte Sie vielleicht nur mündlich ohne Tafelanschrieb erwähnen können (z.B. langweilige Rechnungen oder Bemerkungen, die im Rest des Vortrags keine Rolle spielen).
- Sie sollten Ihren Vortrag auf jeden Fall mindestens einmal mit einem/r Kommilitonen/in als Publikum als Probevortrag halten. Das wird Ihnen zeigen, inwiefern Ihre zeitliche Planung realistisch ist und außerdem eventuelle Schwächen/Unklarheiten in der Präsentation offenlegen.
- Bringen Sie in Ihrem Vortrag Beispiele zu den von Ihnen behandelten Konzepten, das hilft für das Verständnis meist sehr.
- Sie alle haben schon eine Menge Vorträge/Vorlesungen gehört und wissen deshalb aus Erfahrung, was einen guten Vortrag ausmacht – orientieren Sie sich für Ihren eigenen Vortrag daran.

Betreuung

Sie haben die Möglichkeit, eventuelle Fragen zu dem Material Ihres Vortrags mit mir in einem Gespräch zu klären. Das ist ein Angebot meinerseits, das Sie wahrnehmen können, aber nicht wahrnehmen müssen. Wenn Sie ein solches Gespräch nutzen wollen, machen Sie bitte spätestens eine Woche vor Ihrem Vortrag einen Termin mit mir aus.

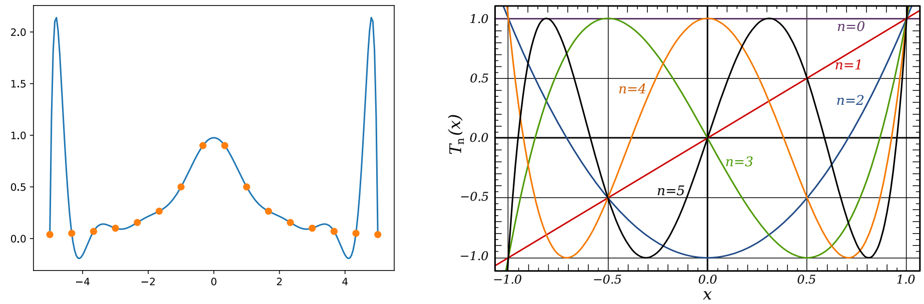
Mögliche Vortragsthemen

Dieses Seminar wird viele unterschiedliche Themen behandeln. Die Vorträge bauen zumeist nicht aufeinander auf. Unten sehen Sie eine Liste von möglichen Themen mit Literaturangaben. Auch eigene Themenvorschläge Ihrerseits sind möglich, müssen aber vorher mit mir abgesprochen werden.

Tschebyscheff–Polynome

#Analysis 1, #Polynome, #Approximation, #Angewandte Mathematik, #leicht zugängliches Thema

In vielen Anwendungen ist man daran interessiert, eine komplizierte Funktion f durch eine einfachere Funktion (ein Polynom) zu approximieren, zB durch Taylorentwicklung oder durch *Interpolation:* Gegeben die N Datenpunkte (x_k, y_k), $k = 1, \ldots, N$, (mit $y_k = f(x_k)$) gibt es ein (eindeutiges?) Polynom p vom Grade höchstens $N-1$, so dass $p(x_k) = f(x_k)$ für alle k gilt? Natürliche Fragen, die in Anwendungen auftreten, sind: Wie groß ist der "Fehler", wenn wir f durch p ersetzen? Wie hängt dieser Fehler von der Wahl der Stützstellen x_k ab?



In diesem Vortrag sollen die sogenannten Tschebyscheff-Polynome und ihre Bedeutung in Interpolationsfragen vorgestellt werden. Dies hat mit der folgenden Optimierungsaufgabe zu tun: Gegeben ein Polynom $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ auf dem Intervall $I = [-2, 2]$, wie müssen die Koeffizienten a_k gewählt werden, damit $\|p\|_I$ möglichst klein wird? Es zeigt sich, dass die Nullstellen der Tschebyscheff–Polynome eine in einem gewissen Sinne optimale Wahl für die Stützstellen der Interpolationsfrage sind.

Die Tschebyscheff–Polynome haben viele unterschiedliche Darstellungen (zB als Determinanten oder als Kettenbrüche) und viele bemerkenswerte Eigenschaften (zB definieren sie eine Orthonormalbasis im Raum aller Polynome von höchstens n-ter Ordnung bzgl eines geeigneten Skalarproduktes).

Anleitung.

- Führen Sie die Idee der Polynominterpolation ein und diskutieren Sie den Interpolationsfehler. Siehe zB Plato. *Numerische Mathematik kompakt*. Vieweg und Teubner. 2010, Abschnitte 1.2, 1.5 (erster Teil), 1.6.
- Ein anderer Zugang zu den Tschebyscheff–Polynomen ist die Minimierung der Supremumsnorm $\|p\|_{[-2,2]}$ für Polynome mit führendem Koeffizienten $= 1$, siehe Kapitel 7 von Fuchs, Tabachnikov. *Ein Schaubild der Mathematik*. Springer. 2011. In diesem Kapitel finden sich auch noch einige weitere interessante Eigenschaften der Tschebyscheff–Polynome.

Verwendete Mathematik:

- Analysis 1 (stetige/differenzierbare Funktionen, Polynome, Supremumsnorm)
- Lineare Algebra 1 (Lineare Gleichungssysteme)

Fourierreihen

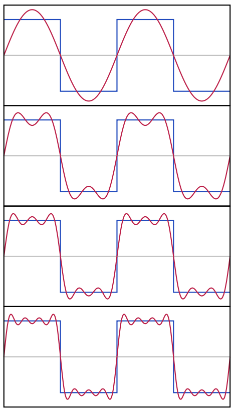
#Analysis 1, #Approximation, #Anwendungen

Die Idee einer Fourierreihe ist, periodische Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch Linearkombinationen der trigonometrischen Funktionen $x \mapsto \sin(2\pi nx)$, $x \mapsto \cos(2\pi nx)$, $n \in \mathbb{N}$ zu approximieren. Meistens arbeitet man günstiger mit den komplexen Exponentialfunktionen $x \mapsto e^{2\pi inx} = \cos(2\pi nx) + i\sin(2\pi nx)$.

Eine Grundfrage der Fourier-Analysis ist: Welche Funktionen f lassen sich als

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\, e^{2\pi inx}$$

schreiben? In welchem Sinne konvergiert diese Reihe? (punktweise? gleichmäßig? In einem anderen Sinne?) Wie lassen sich die Fourierkoeffizienten a_n aus f bestimmen?



Fourierreihen entsprechen einer Zerlegung von f in Frequenzanteile und sind sowohl in Anwendungen (zB bei der Kompression von Bild- und Audio-Daten) als auch in der reinen Mathematik (harmonische Analysis) von großer Bedeutung.

Dieser Vortrag soll die wesentlichen Begriffe der Fourierreihen einführen und erläutern.

Anleitung.

- Die Literatur zu Fourierreihen ist sehr reichhaltig. Ein gutes Buch ist Kapitel 2.1 E. M. Stein, R. Shakarchi. *Fourier Analysis – An Introduction*. Princeton University Press, 2003. Eine Quelle mit einer anderen Schwerpunktsetzung (Konvergenz in einer anderen Norm) ist Kapitel 1 des Buches A. Deitmar. *A First Course in Harmonic Analysis*. Springer, 2005.
- Definieren Sie Fourierkoeffizienten und Fourierreihen und geben Sie einige Beispiele von Fourierreihen.
- Erklären Sie, warum die Fourierreihe einer stückweise stetigen Funktion f im Allgemeinen nicht gegen f konvergiert (z.B. anhand von $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -1$ für $x \leq 0$ und $f(x) = +1$ für $x > 0$). Beweisen Sie, dass die Fourierreihe einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion f gegen f konvergiert (siehe das Argument in Stein/Shakarchi, Cor. 2.4).
- Vergleichen Sie Fourierreihen mit Entwicklungen in einer Orthonormalbasis.

- Wenn noch Zeit ist, können Sie auch auf das Gibbs-Phänomen eingehen.

Verwendete Mathematik:

- Analysis 1: Trigonometrische Funktionen, Reihen, stetige/differenzierbare Funktionen einer reellen Variablen, Konvergenzbegriffe (punktweise, gleichmäßig).
- Etwas Lineare Algebra: Skalarprodukt und zugehörige Norm, Entwicklung in eine Orthonormalbasis.

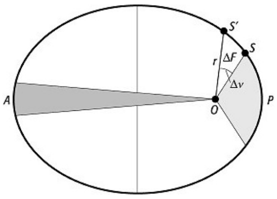
Newtonsche Mechanik

#Analysis 2, #Anwendungen in der Physik, #Differentialgleichungen

Ausgerüstet mit dem Werkzeug der Analysis 2 lässt sich die Newtonsche Mechanik, die parallel zur Analysis entwickelt wurde, mathematisch präzise verstehen. Das Hauptinteresse liegt hier auf der Newtonschen Gleichung

$$x''(t) = m\,F(x(t)),$$

wobei $m > 0$ eine Konstante (Masse), $F \in C(U, \mathbb{R}^3)$ ein gegebenes Vektorfeld auf $U \subset \mathbb{R}^3$ (Kraftfeld) und $x \in C^2(I, \mathbb{R}^3)$ eine gesuchte Kurve (Position eines Teilchens der Masse m zum Zeitpunkt t) ist.



Idealerweise möchte man diese Gleichung für gegebenes $x(0)$ (Ausgangspostion) und $x'(0)$ (Ausgangsgeschwindigkeit) lösen, oder wenigstens qualitative Aussagen über die Lösung machen. Dazu werden konservative Kraftfelder (Gradientenfelder), Zentralkraftfelder (das sind Vektorfelder der Form $F(x) = f(\|x\|_2) \cdot x$) und Erhaltungsgrößen (Energie, Drehimpuls) diskutiert. Auf der mathematischen Seite gibt es Verbindungen zu vielen Themen der Analysis 1 und 2 sowie zu Differentialgleichungen, auf der physikalischen Seite zu interessanten Anwendungen und Beispielen wie Planetenbewegungen und Schwingungen.

Anleitung.

- Führen Sie die Newtonsche Bewegungsgleichung und damit zusammenhängende Begriffe ein: konservatives Kraftfeld, Zentralkraftfeld, Energie, Drehimpuls.
- Beweisen Sie den Energieerhaltungssatz für konservative Kraftfelder und den Drehimpulserhaltungssatz für Zentralkraftfelder.
- Zeigen Sie, wie sich die Bewegung in einem Zentralkraftfeld auf ein eindimensionales Problem vereinfacht, und diskutieren Sie die Lösung dieses Problems für das Kepler-Problem.

Literatur:

- Es gibt eine Unmenge an Literatur zu Newtonscher Mechanik. Das Buch V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer (Kapitel 2) hat den Vorteil, dass es mathematisch recht präzise geschrieben und damit für MathematikerInnen gut zugänglich ist.

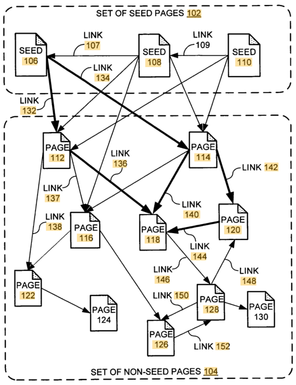
Verwendete Mathematik:

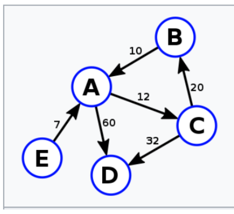
- Analysis 1 und 2: Stetige und differenzierbare Funktionen, Gradienten, Integrale, C^2-Wege im $\mathbb{R}^3$.
- Lineare Algebra: Vektorprodukt $x \times y$ im $\mathbb{R}^3$.

Der Satz von Perron-Frobenius und Googles PageRank-Algorithmus

#Lineare Algebra (Eigenwertprobleme), #Algorithmische Anwendungen

Suchen per Suchmaschinen im Internet führen meist zu einer Liste von sehr vielen Seiten (bei der Suche nach "Mathematik" auf ca. 108.000.000), so dass die Nützlichkeit einer Suchmaschine stark darauf basiert, die Ergebnisse in eine vernünftige Reihenfolge zu bringen. Wie lässt sich die "Wichtigkeit" einer Webseite messen? Googles PageRank-Algorithmus verwendet dazu die Anzahl von eingehenden und ausgehenden Links von einer Seite und erstellt eine Link-Matrix A, eine quadratische Matrix mit nicht-negativen Einträgen $A_{ij} \geq 0$.





$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 & 60 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Das Sortierungsproblem führt dann auf ein Eigenwertproblem für A. Diese $(n \times n)$-Matrix ist sehr groß, $n > 10^9$. Andererseits ist sie speziell, da alle Einträge nicht negative Zahlen sind, und A extrem viele Nullen enthält.

Da solche Matrizen oft auftreten (zum Beispiel als Nachbarschaftsmatrizen von Graphen, siehe Abbildung oben rechts), lohnt es sich, mit ihnen etwas näher zu beschäftigen. Der Satz von Perron über eintragsweise positive Matrizen und die Verallgemeinerung von Frobenius über gewisse eintragsweise nicht-negative Matrizen sind hier die zentralen Aussagen.

In diesem Vortrag soll der Satz von Perron-Frobenius vorgestellt und bewiesen werden. Als Anwendung sollen dann (einige einfache Varianten des) PageRank-Algorithmus besprochen werden.

Anleitung.

- Zum Satz von Perron-Frobenius können Sie Shapiro. *Linear Algebra and Matrices. Topics for a Second Course*. AMS. 2015., Kapitel 17 folgen.
- Einige Erklärungen des PageRank-Algorithmus sind Austin. *How Google Finds Your Needle in the Web's Haystack*. AMS Feature Column `www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-pagerank` und Bryan, Leise. *The $25,000,000,000 eigenvector. The linear algebra behind google.* `www.rose-hulman.edu/~bryan/googleFinalVersionFixed.pdf`

Verwendete Mathematik:

- Lineare Algebra (Eigenwertprobleme).
- Matrixnormen. Etwas Konvergenz von Matrixfolgen.

Die logistische Abbildung und chaotische dynamische Systeme

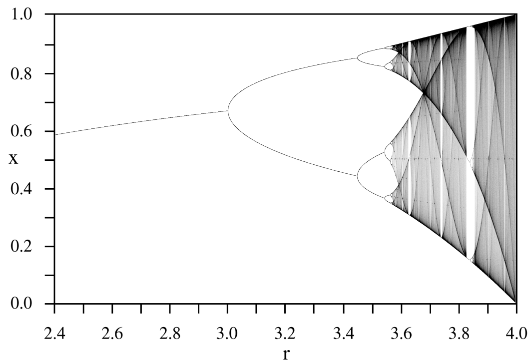
#Analysis 1 (Folgen, Häufungspunkte), #Dynamische Systeme, #Chaos, #leicht zugängliches Thema

Ein einfaches Modell der zeitlichen Entwicklung einer Population sieht folgendermaßen aus: Sei x_n die Größe der Population (z.B. gemessen als Anzahl der Individuen in Bruchteilen einer Million) zum Zeitpunkt n (die Zeit wird hier in diskreten Schritten gemessen) und $\lambda \geq 0$ ein Parameter, der die Fortpflanzungsrate modelliert. Wenn die Maximalgröße der Population, bei der eine Sättigung des Wachstums stattfindet, auf 1 normiert ist, so ist das Modell

$$x_{n+1} = f(x_n), \qquad f(x) := \lambda x(1-x).$$

Die Hauptfrage ist, wie sich die Folge (x_n) für $n \to \infty$ entwickelt. Gibt es einen Grenzwert? Gibt es ein periodisches Verhalten, und wenn ja, mit welcher Periodenlänge? Wie hängen diese Aussagen von dem Parameter λ und dem Startwert x_1 ab?

Was zuerst nach einer kleinen Analysis-1-Übung aussieht, entpuppt sich als als ein erstaunliches System mit komplexem Verhalten. Für kleines λ ist die Dynamik einfach (die Population stirbt aus), aber für größeres λ gibt es mehr und mehr Häufungspunkte; die Anzahl der Häufungspunkte verdoppelt sich an vielen bestimmten Werten von λ, und das System weißt chaotisches Verhalten auf. Das *Feigenbaumdiagramm* veranschaulicht das (auf der horizontalen Achse ist λ, auf der vertikalen Achse die Häufungspunkte von (x_n) aufgetragen):



In diesem Vortrag soll die Dynamik der logistischen Gleichung besprochen werden, dies ist ein Beispiel eines *dynamischen Systems* mit *chaotischer Dynamik*. Nur in einfachen Fällen hilft hier der Banachsche Fixpunktsatz weiter, meist muss man zwischen mehreren (anziehenden oder abstoßenden) Fixpunkten unterscheiden und einige neue Begriffe einführen.

Anleitung.

- Als Literatur können Sie zB B. Hasselblatt, A. Katok. *A First Course in Dynamics*. Cambridge University Press. 2003 (Kapitel 2.5 und Kapitel 11) verwenden. Auch das Buch M. Denker *Einführung in die Analysis dynamischer Systeme*. Springer. 2005 enthält relevant Information, und es gibt im Internet jede Menge Computervisualisierungen zu diesem System.

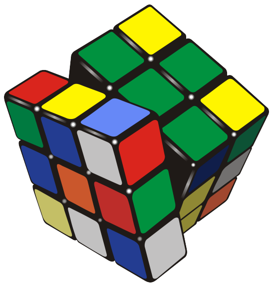
Verwendete Mathematik:

- Analysis 1 (Folgen, Grenzwerte, Häufungspunkte)
- Etwas Banachscher Fixpunktsatz (in elementarer Form).

Rubiks Würfel und die symmetrische Gruppe

#Gruppen, #symmetrische Gruppe

Vermutlich kennen Sie den "Zauberwürfel" (Rubik's cube):



Ziel ist es, durch Verdrehungen alle Seiten einfarbig zu machen.

Als mathematisch gesinnte Person fallen einem sofort einige interessante Fragen zum Zauberwürfel ein, zum Beispiel: Wie viele unterschiedliche Konfigurationen gibt es? Ist es aus jeder Ausgangspostion möglich, den Würfel zu lösen (alle Seiten einfarbig)? Wie viele Züge benötige ich dafür (mindestens)? Wie ist es möglich, dass Speedcuber den Würfel in 3,13 Sekunden (einhändig in 6,2 Sekunden, mit verbundenen Augen in 12,78 Sekunden) lösen können, da muss es doch eine Strategie geben?

In diesem Vortrag werden wir einen gruppentheoretischen Blick auf den Zauberwürfel werfen. Nennen wir F die Drehung der vorderen Ebene um $90°$ im Uhrzeigersinn (also F^2 die Drehung der vorderen Ebene und $180°$ im Uhrzeigersinn, F^{-1} die Drehung der vorderen Ebene und $90°$ im Gegenuhrzeigersinn), R die Drehung der rechten Ebene um $90°$ im Uhrzeigersinn, etc, so sehen wir, dass die möglichen Bewegungen eine Gruppe G bilden. Da jede Drehung einem Vertauschen der 48 Plättchen (6 Seiten $\times$ 9 Plättchen -6 feste Mittelplättchen) entspricht, ist G eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_{48}. Die Gruppe G hat ca. $42 \cdot 10^{36}$ Elemente, ist im Vergleich zu S_{48} mit $48! \approx 12 \cdot 10^{60}$ Elementen also eher klein.

In diesem Seminar wird eine gruppentheoretische Beschreibung des Zauberwürfels gegeben, dazu gehören symmetrische Gruppen, Konjugationen in Gruppen, und dann ein Beweis der Lösbarkeit des Würfels und eine Bestimmung der Anzahl aller möglichen Kombinationen.

Anleitung.

- Empfohlene Literatur: C. Bandelow. *Einführung in die Cubologie*. Vieweg Verlag. 1981. (Warnung: Die Notation der Gruppenkomposition ist in diesem Buch falsch herum, d.h. gh heißt dort h nach g statt g nach h), U. Görtz. *Vorlesungsskript Lineare Algebra I* (Uni Duisburg-Essen). WS 2020/21, §8.3, `https://math.ug/la1-ws2021/pdf/LA1-WS2021-Goertz-20220123.pdf`, und O. Riemenschneider. *Elemente der Gruppentheorie (mit Anwendungen auf Mathematische Puzzles)*. Studienprobe 1981. Universität Hamburg, `https://www.math.uni-hamburg.de/home/riemenschneider/RubiksCube.pdf`.

Verwendete Mathematik:

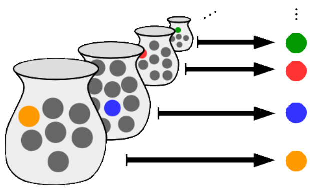
- Lineare Algebra 1: Gruppen, die symmetrischen Gruppen, Konjugation in Gruppen, Gruppenhomomorphismen.

Axiomatische Mengenlehre und das Auswahlaxiom

#Logik, #Mengentheoretische Grundlagen, #abstrakt, #anspruchsvoller Vortrag

Die Grundlage aller Mathematik ist die Logik und die Mengenlehre. In einführenden Vorlesungen ist aber meist keine Zeit für eine eingehende Diskussion von axiomatischen Mengenlehren wie der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre und man muss sich mit einem Hinweis auf das Russelsche Paradoxon (die Menge aller Mengen ist nicht wohldefiniert) begnügen.

In diesem abstrakten Vortrag sollen einige Aspekte der Grundlagen besprochen werden, insbesondere das sogenannte *Auswahlaxiom*. Eine Formulierung besagt: Sei M eine Menge von nichtleeren Mengen mit der Eigenschaft, dass je zwei Elemente von M keine gemeinsamen Elemente haben. Dann gibt es eine Menge X, die genau ein Element aus jedem Element von M enthält. (X entsteht durch "Auswahl" je eines Elementes von jedem Element von M.)



Interessanterweise kann gezeigt werden, dass sowohl das Auswahlaxiom als auch die Negation des Auswahlaxioms jeweils auf keinen logischen Widerspruch zu den anderen Axiomen der Mengenlehre führen. Aus dieser Perspektive können Sie das Auswahlaxiom akzeptieren oder nicht, ohne in Widersprüche zu geraten.

Einige Anwendungen des Auswahlaxioms sind das Lemma von Zorn und der Beweis, dass jeder Vektorraum (auch unendlichdimensionale) eine Basis besitzt.

Anleitung.

- Eine zugängliche Zusammenstellung der ZFC-Axiome findet sich in C. Meusburger. *Lineare Algebra 1 und 2* (FAU Skript). 2022, `https://faubox.rrze.uni-erlangen.de/getlink/fiUX4ARvRDKBdZ9cgxzRLb/LA_2122_revised.pdf`. Eine Besprechung Auswahlaxiom vs. Lemma von Zorn gibt es in K.-H. Neeb *Höhere Axiome der Mengenlehre* `https://wwwevs.mathematik.tu-darmstadt.de/index.php?evsid=32&evsver=95&evsdir=162&evsfile=auswahl.pdf`, siehe auch O. Deiser *Einführung in die Mathematik 2.2 – Mathematische Strukturen und Mengenlehre*, `https://www.aleph1.info/?call=Puc&permalink=ema22`
- Beschränken Sie sich auf eine kurze Besprechung der ZF Axiome und konzentrieren Sie sich dann auf das Auswahlaxiom. Beweisen Sie das Lemma von Zorn (mit Beispielen) und die Existenz von Basen.

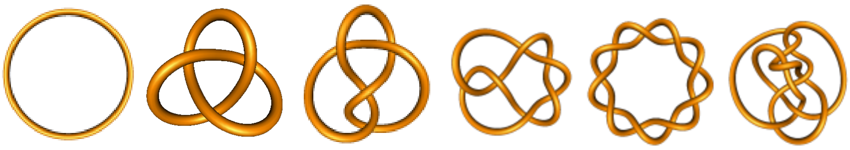
Verwendete Mathematik:

- Mengen, Logik, Ordnungen.

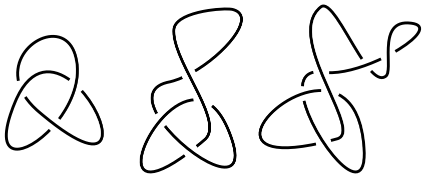
Knotentheorie: Färbbarkeitsinvarianten und die Knotendeterminante

#Knotentheorie, #visuelle Mathematik, #Lineare Algebra über $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

In mathematischer Idealisierung ist ein Knoten eine geschlossene (glatte) Kurve im $\mathbb{R}^3$, die sich nicht selbst schneidet:



Man stellt sich den "Faden" als beliebig dünn und beliebig elastisch, aber unzerreißbar vor, und betrachtet zwei Knoten als identisch, wenn sich der eine Knoten durch Verbiegen, Verwickeln, Verknoten (aber nicht Zerschneiden/Verkleben) in den anderen Knoten transformieren lässt. Zum Beispiel sind diese drei Knoten gleich:



Wie kann man entscheiden, ob zwei Knoten gleich bzw verschieden sind? Dazu benötigt man Eigenschaften von Knoten, die sich unter "Verknotungen" nicht ändern, sogenannte Invarianten.

In diesem ungewöhnlichen Vortrag sollen zwei solche Invarianten besprochen werden: Die elementare Dreifärbbarkeitseigenschaft und die Determinante eines Knotens. Letztere ist eine ganze Zahl, die einem Knoten mit Hilfe von Methoden der Linearen Algebra zugeordnet werden kann und sich unter Verknotungen nicht ändert.

Anleitung.

- Eine gute Quelle ist Kapitel 3 (Abschnitt 1–4) von Livingston: *Knot Theory* (Math. Association of America).
- Als untechnische Einführung ist auch Kapitel 1 von Adams: *Das Knotenbuch. Einführung in die mathematische Theorie der Knoten* (Springer) geeignet.
- Sie können auch einen Blick in das Skript Lechner: *Knots* (Lecture 6+7) `https://www.math.fau.de/wp-content/uploads/2023/07/knots.pdf` werfen.
- Führen Sie Knotendiagramme und Reidemeister-Bewegungen ein und besprechen Sie den Satz von Reidemeister (ohne Beweis). Definieren Sie, was eine Knoteninvariante ist.
- Beschreiben Sie die Dreifärbbarkeitseigenschaft und beweisen Sie, dass es eine Invariante ist.
- Definieren Sie Färbbarkeit bzgl. einer Primzahl p und die Knotendeterminante. In dem Beweis der Invarianzeigenschaft der Determinante gibt es einen schwierigeren Schritt, der ausgelassen werden kann (siehe Livingston Seite 44).

Verwendete Mathematik:

- Geometrische Vorstellungskraft (siehe Knotendiagramme).
- Kongruenz modulo einer Primzahl p.
- Lineare Algebra über dem endlichen Körper $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.