Skript zur Vorlesung 13. Juli 2023

Analysis 1

Wintersemester 2022/23

Gandalf Lechner[1]

Diese Vorlesung gibt eine Einführung in die Grundbegriffe der reellen Analysis für Erstsemester-Studierende der Mathematik (Bachelor oder Lehramt), Physik, und verwandter Studiengänge. Wir beginnen bei Grundlagen zur Aussagenlogik, Mengen und Abbildungen, und behandeln dann Zahlenkörper, Folgen/Reihen, stetige und differenzierbare Funktionen einer reellen Variablen, und Riemann-Integrale.

[1]Department Mathematik, FAU Erlangen-Nürnberg, Cauerstr. 11 Erlangen, gandalf.lechner@fau.de

Inhaltsverzeichnis

0 Vorwort

Dieses Skript begleitet die im Wintersemester 2022/23 an der FAU Erlangen-Nürnberg gehaltene Vorlesung *Analysis 1*. Es enthält im Wesentlichen das, was während der Vorlesung an die Tafel geschrieben und erklärt wurde, ersetzt aber keinesfalls die Lektüre passender Lehrbücher. Am Ende des Skripts finden sich einige Buchempfehlungen.

Struktur eines mathematischen Textes

Dieses Skript ist wie jeder mathematische Text stark struktuiert. Ein paar oft auftretende Elemente sind Definitionen, Sätze, Beweise, Lemmata, Korollare, Theoreme, Beispiele, und Aufgaben. Diese sind im Text wie folgt markiert:

> **Definition 0.1.** Eine *Primzahl* ist eine natürliche Zahl größer als 1, die nur durch 1 und sich selbst teilbar ist.

Eine Definition legt eine zuvor nicht als bekannt vorausgesetzte Bezeichnung fest (definiert sie). Anders als im nicht-mathematischen Sprachgebrauch sind mathematische Definitionen so geschrieben, dass Missverständnisse und Ungenauigkeiten ausgeschlossen sind.

Definitionen müssen Sie kennen, damit Sie die Aussagen über die definierten Objekte verstehen können. Eine Definition bedarf keines Beweises, sie muss nur klar und widerspruchsfrei festlegen, was mit einem Begriff gemeint ist.

> **Satz 0.2.** *Es gibt unendlich viele Primzahlen.*

Ein Satz ist eine wahre Aussage über mathematische Objekte. Sätze müssen Sie kennen, sie bilden das Wissen, das MathematikerInnen über ein bestimmtes Gebiet zusammengetragen haben.

Anders als Definitionen müssen Sätze *bewiesen* werden. Ein solcher Beweis ist eine logisch einwandfreie vollständige Argumentation, die nur definierte Begriffe und bereits bewiesene Tatsachen verwendet und erklärt, wieso die in dem Satz behauptete Aussage wahr ist. Im Text werden Beweise so dargestellt:

Beweis. (… Argumentation …) □

Das Symbol □ symbolisiert das Ende des Beweises. Da sich ein Beweis mitunter über mehrere Seiten erstrecken kann, ist dieses Symbol für die Orientierung im Text hilfreich. Während Sie Definitionen und Sätze *kennen* müssen, so müssen Sie Beweise *verstehen*. Beweise sind das Herzstück der Mathematik, und MathematikerInnen haben viele unterschiedliche Beweistechniken entwickelt, die wir im Laufe des Semesters kennenlernen werden.

Ein Lemma ist wie ein Satz eine wahre Aussage, die eines Beweises bedarf. Die Bezeichnung "Lemma" (Plural: Lemmata) wird meist für Hilfsaussagen verwendet, die vor allem dazu dienen, größere/wichtigere Aussagen (Sätze) zu beweisen. Die Unterscheidung zwischen Lemma und Satz ist nicht so wichtig und kann von Kontext zu Kontext variieren.

Im Text sieht ein Lemma so aus:

Lemma 0.3. *(...)*

Ein weiteres ähnliches Element ist ein Korollar. Dies ist eine wahre Aussage, die sich unmittelbar aus einer zuvor bewiesenen Aussage ergibt. Im Text werden Korollare wie Lemmata notiert:

Korollar 0.4. *(...)*

Besonders wichtige Sätze werden manchmal auch Theoreme genannt. Diese Bezeichnung soll nur die Bedeutung dieser Sätze hervorheben. Zusätzlich tragen viele Theoreme Eigennamen:

Theorem 0.5 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, und $a \in I$. Dann ist die Funktion*

$$F : I \to \mathbb{R}, \qquad F(x) := \int_a^x f(y)dy$$

eine Stammfunktion von f.

Der genaue Inhalt dieses Theorems spielt an dieser Stelle noch keine Rolle. Sie sehen aber die typische Struktur von Sätzen/Theoremen/ Lemmata/Korollaren: Zuerst werden präzise einige *Voraussetzungen* augelistet (hier wird erklärt, was unter den Symbolen I, f, und a zu verstehen ist, und welche Eigenschaften sie haben sollen), dann wird die Aussage des Satzes, die unter diesen Voraussetzungen gilt, formuliert.

Viele mathematische Aussagen sind recht abstrakt und behandeln eine große Fülle an möglichen Situationen gleichzeitig. Deshalb sind Beispiele oft hilfreich, um ein Gefühl für die gemachten Aussagen zu bekommen. Beispiele sind bei Studierenden meist sehr beliebt und deshalb in grün markiert:

Beispiel 0.6. Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2 + e^x$. Dann ist f eine differenzierbare Funktion mit Ableitung $f'(x) = 2x + e^x$.

Natürlich sollten auch die Aussagen in den Beispielen bewiesen werden.

Schlussendlich gibt es Aufgaben. Diese Aufgaben dienen Ihrem Training, nur beim Lösen der Aufgaben werden Sie den Vorlesungsstoff richtig verstehen können. Oft fordert Sie eine Aufgabe auf, eine mathematische Aussage zu beweisen. Diese Aufgaben finden Sie auf den die Vorlesung begleitenden Übungsblättern.

Wie jeder mathematische Text ist dieses Skript *aktiv* zu lesen. Das heißt, dass Sie über die eingeführten Begriffe nachdenken sollten (Fällt mir ein eigenes Beispiel dazu ein? Wieso ist diese Definition wohl so gemacht? Kann ich diesen Satz in einem Spezialfall schnell beweisen? Kann ich diesen oder jenen nicht im Detail ausgeführten Argumentationsschritt ganz genau aufschreiben?) und dazu stets Stift und Papier griffbereit haben. Um Sie an diesen Vorgehen zu gewöhnen, gibt es an einigen Stellen kleine Übungen, z.B.

> Geben Sie weitere Beispiele von (*einem gerade eingeführten Begriff*).

Dies sind zumeist Dinge, die Sie sich von selbst fragen sollten. Manchmal gibt es keine eindeutige Antwort (z.B., wenn Sie aufgefordert werden, sich Beispiele auszudenken) und im Gegensatz zu den Präsenz- und Hausaufgaben enthält das Skript keine Lösungen zu diesen Übungsfragen.

An einigen Stellen enthält das Skript auch Zusatzmaterial. Dieses ist durch eine gelbe Markierung bezeichnet und enthält Stoff, der über die Vorlesung hinausgeht oder vorgreift. Dies ist optionales Material, das nicht klausurrelevant ist:

> (Interessante Zusatzinformationen)

Zur Benutzung des Skriptes

Dieses Skript ist eine Hilfestellung für Sie, indem es den wesentlichen Stoff der Vorlesungen zusammenfasst. Es ist aber kein Ersatz für die Lektüre von Lehrbüchern, und sicher kein Ersatz für den Besuch der Vorlesung.

Zur besseren Orientierung sind alle Objekte (Sätze, Definitionen, etc) im Schema $n.m$ durchnummeriert, wobei n die Kapitelnummer ist, und m in jedem Kapitel neu von 1 an zählt. Die Aufgaben auf den Übungsblättern sind in Präsenz- und Hausaufgaben unterteilt und mit P$b.k$ bzw. H$b.k$ nummeriert, wobei b die Nummer des Blattes und k die Nummer der Präsenz/Hausaufgabe auf Blatt b ist. Zum Beispiel bezeichnet Aufgabe H2.3 die dritte Hausaufgabe auf Blatt 2.

Dieses Skript wird während des Semesters geschrieben und fortlaufend aktualisiert. Auf der Titelseite oben rechts finden Sie das Datum der Version, die Sie vor sich haben. Wenn Sie in diesem Skript Tippfehler oder andere Ungereimtheiten finden, kontaktieren Sie mich bitte oder posten Sie eine Frage / einen Kommentar in unserem StudOn-Forum, damit ich diese Fehler ausbessern kann.

Gandalf Lechner

1 Die Sprache der Mathematik

Im ersten Kapitel werden wir die Sprache der Mathematik kennenlernen, die aus Aussagenlogik, Mengen, Relationen und Abbildungen besteht. Dieses Kapitel ist für Mathematik im Allgemeinen relevant und bezieht sich noch nicht speziell auf Analysis, wird aber mit Beispielen aus der Analysis illustriert. Wir werden dabei weder die Logik noch die Mengenlehre in ihrer allgemeinsten Form behandeln, sondern nur einführen, was wir für die Analysis brauchen.

Der Inhalt der Abschnitte 1.1 und 1.2 wird in der parallel laufenden Vorlesung über Lineare Algebra vermittelt, hier der Vollständigkeit halber aber trotzdem wiedergegeben.

1.1 Aussagenlogik

Wir betrachten *Aussagen*, die entweder wahr oder falsch sind. Zum Beispiel sind

- $1 + 1 = 2$,
- $1 + 1 = 1$,
- Es gibt unendlich viele Primzahlen,
- Erlangen ist eine Stadt in Deutschland,
- Wenn wir Analysis-Vorlesung haben, scheint die Sonne,

Aussagen. Wir bezeichnen Aussagen oft mit Buchstaben, meist $P, Q, \ldots$.

Wesentlich ist nun, dass wir aus gegebenen Aussagen neue bilden können.

Definition 1.1. Seien P und Q Aussagen.

a) Die *Negation von P*, bezeichnet als $\neg P$, ist die Aussage, die genau dann wahr ist, wenn P falsch ist.

b) *(Logisches "und", Konjunktion)* $P \wedge Q$ ist die Aussage, die genau dann wahr ist, wenn P wahr ist und Q wahr ist.

c) *(Logisches "oder", Disjunktion)* $P \vee Q$ ist die Aussage, die genau dann wahr ist, wenn P wahr ist oder[a] Q wahr ist.

d) *(Implikation)* $P \Rightarrow Q$ ist die Aussage, die genau dann wahr ist, wenn (falls P wahr ist, so ist auch Q wahr) wahr ist.

e) *(Äquivalenz)* $P \Leftrightarrow Q$ ist die Aussage, die genau dann wahr ist, wenn P und Q beide wahr oder beide falsch sind.

[a] Hier ist mit "oder" immer ein nicht ausschließendes "oder" gemeint, d.h. $P \vee Q$ ist auch wahr, wenn sowohl P als auch Q wahr sind.

Einige einfache Beispiele hierzu: Die Negation von "$1 + 1 = 2$" ist "$1 + 1 \neq 2$". Die Negation von "Erlangen ist eine Stadt in Deutschland" ist "Erlangen ist nicht eine Stadt in Deutschland".

Ist P die Aussage "Klaus hat Hunger" und Q die Aussage "Klaus hat Durst", so ist $P \wedge Q$ die Aussage "Klaus hat Hunger und Durst", und $P \vee Q$ die Aussage "Klaus hat Hunger oder Durst" (oder beides).

Logische Aussagen und Schlussfolgerungen spielen eine große Rolle in mathematischen Beweisen. Machen wir uns klar, dass $P \Rightarrow Q$ ("wenn P, dann Q") immer wahr ist, wenn P falsch ist. Dazu schreiben wir eine kleine Tabelle, in der wir mit W und F markieren, ob eine Aussage wahr (W) oder falsch (F) ist und alle Möglichkeiten durchspielen:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

Sie sehen, dass $P \Rightarrow Q$ genau dann wahr ist, wenn entweder P und Q beide wahr sind oder wenn P falsch ist (und Q beliebig). Aus den falschen Annahmen können Sie also alles folgern! Ein konkretes Beispiel: Wäre $1 = 0$ (Aussage P, ist falsch), so könnten wir per Multiplizieren mit 0 und Anschließendem Addieren von 1 die Aussage $1 = 1$ folgern (wahr).

Äquivalenz $P \Leftrightarrow Q$ ist gleichbedeutend mit $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$, wie Sie auch schnell an einer Wahrheitstafel prüfen können.

Aussagen, die von anderen Aussagen abhängen (wie z.B. $P \Rightarrow Q$ von P und Q abhängt) und unabhängig von der Wahrheit dieser Eingangsaussagen stets wahr ist, nennt man *Tautologien*.

Satz 1.2. *Seien P, Q, L Aussagen. Dann sind die folgenden Aussagen Tautologien:*

a) $P \Leftrightarrow \neg(\neg P)$

b) $P \vee \neg P$

c) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((\neg Q) \Rightarrow (\neg P))$

d) $(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$ *und* $(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$

e) $((P \vee Q) \vee L) \Leftrightarrow (P \vee (Q \vee L))$ *und* $((P \wedge Q) \wedge L) \Leftrightarrow (P \wedge (Q \wedge L))$

f) $(P \vee (Q \wedge L)) \Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee L))$ *und* $(P \wedge (Q \vee L)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge L))$

g) $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow ((\neg P) \wedge (\neg Q))$ *und* $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow ((\neg P) \vee (\neg Q))$

Der Beweis dieses Satzes wird in der Linearen Algebra geführt.

Die Bedeutung ist, dass jeder Teil dieses Satzes eine Regel zum Umgang mit Aussagen liefert. Aussagen sind für uns vor allem in Beweisen wichtig, wo wir gewisse Aussagen aus anderen Aussagen (Voraussetzungen) deduzieren möchten. Zum Beispiel sagt uns Teil c), dass das Folgern von Q aus P gleichbedeutend zum Folgern von $\neg P$ aus $\neg Q$ ist. Typisches Beispiel: "Wenn es regnet, ist die Straße nass" $\Leftrightarrow$ "Wenn die Straße nicht nass ist, regnet es nicht" (für eine nicht überdachte Straße).

Oft werden wir es auch mit Aussagen $P(x)$ zu tun haben, die von Variablen x (Elementen einer Menge X, siehe Abschnitt 1.2) abhängen. Zum Beispiel[2]

[2]Analog zu $:=$ bedeutet das Symbol $:\Leftrightarrow$ zwischen zwei Aussagen, dass die linke Aussage als äquivalent zur

- $P(n) :\Leftrightarrow n < 4$ (wobei n eine natürliche Zahl ist). Dann ist $P(n)$ wahr für $n = 1, 2, 3$ und falsch für $n = 4, 5, \ldots$.
- $P(s)$:⇔(s sitzt in der ersten Reihe), wobei s ein Student in diesem Hörsaal ist.

Wir schreiben

$$(\forall x \in X)\, P(x) \tag{1.1}$$

für die Aussage, die genau dann richtig ist, wenn $P(x)$ für alle $x \in X$ wahr ist. Das Symbol $\forall$ liest sich "für alle" oder "für jede/s" und wird als *Allquantor* bezeichnet.

Wir schreiben

$$(\exists x \in X)\, P(x) \tag{1.2}$$

für die Aussage, die genau dann richtig ist, wenn es ein $x \in X$ gibt, so dass $P(x)$ wahr ist. Das Symbol $\exists$ liest sich "es existiert" oder "es gibt" und wird als *Existenzquantor* bezeichnet. Mit "es existiert ein x so dass ..." ist hier immer "es existiert mindestens ein x so dass ..." gemeint. Wollen wir ausdrücken, dass genau ein x existiert, so dass $P(x)$ wahr ist, so schreiben wir

$$(\exists! x \in X)\, P(x). \tag{1.3}$$

Beispiel 1.3. Sei $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen und $G(n)$ die Aussage "n ist gerade". Dann ist $(\forall n \in \mathbb{N})\, G(n)$ falsch (weil es auch ungerade Zahlen gibt), $(\exists n \in \mathbb{N})\, G(n)$ wahr (weil es gerade Zahlen gibt), und $(\exists! n \in \mathbb{N})\, G(n)$ falsch (weil es mehr als eine gerade Zahl gibt).

Negation verwandelt All- in Existenzquantoren:

Beispiel 1.4. Sei F die Aussage: "Alle Studierenden in diesem Hörsaal haben heute gefrühstückt". Definieren wir S als die Menge aller Studierenden in diesem Hörsaal und $F(s)$ als die Aussage "s hat heute gefrühstückt" (für $s \in S$), so ist $F \Leftrightarrow (\forall s \in S)\, F(s)$.

Die Negation $\neg F$ von F ist die Aussage "Nicht alle Studierenden in diesem Hörsaal haben heute gefrühstückt", oder äquivalent "Es gibt in diesem Hörsaal (mindestens) eine/n Studierenden, der heute nicht gefrühstückt hat". Wir sehen also

$$\neg((\forall s \in S)\, F(s)) \;\Leftrightarrow\; ((\exists s \in S)\, \neg F(s)). \tag{1.4}$$

Diese Regel gilt ganz allgemein (siehe Lineare Algebra).

Die Quantoren $\forall, \exists, \exists!$ sind eine Art mathematisches Steno und werden oft auch ausgeschrieben, also z.B. als "für alle reellen Zahlen x gilt, dass ...". Übermäßiger Gebrauch von Quantoren kann zu schwer lesbaren Texten führen.

Häufig treten auch mehrere Quantoren zusammen auf. Hier kommt es auf die Reihenfolge an, wie das folgende Beispiel zeigt.

---

rechten Aussage definiert wird.

Beispiel 1.5. Sei wieder $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen und für zwei natürliche Zahlen n, m sei $P(n, m)$ die Aussage $n > m$. Also ist z.B. $P(5, 2)$ wahr und $P(2, 5)$ falsch. Betrachten sie die beiden Aussagen P_1 und P_2,

$$P_1 := ((\forall m \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N})\, P(n, m)), \tag{1.5}$$
$$P_2 := ((\exists n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})\, P(n, m)), \tag{1.6}$$

die sich nur durch die Reihenfolge der Quantoren unterscheiden. Augeschrieben sind diese Aussagen

$$P_1 \Leftrightarrow (\text{für jede natürliche Zahl } m \text{ gibt es eine natürliche Zahl } n, \text{ die größer ist als } m)$$
$$P_2 \Leftrightarrow (\text{es gibt eine natürliche Zahl } n, \text{ so dass } n \text{ größer ist als jede natürliche Zahl } m).$$

Offenbar ist P_1 wahr (denn zu $m \in \mathbb{N}$ ist $m + 1 \in \mathbb{N}$ eine größere natürliche Zahl), aber P_2 falsch (denn n müsste "unendlich" sein, was keine natürliche Zahl ist).

1.2 Mengen

Der nächste Grundbaustein der Sprache der Mathematik sind *Mengen*. Ähnlich wie bei der Aussagenlogik werden wir hier nicht sehr tief gehen, sondern eine anschauliche Herangehensweise wählen. Es gibt auch strenge axiomatische Zugänge zur Mengenlehre, aber das würde uns hier zu weit von der Analysis fortführen.

Wir begnügen uns also mit einem naiven Mengenbegriff (keine Definition) und betrachten Mengen als "Zusammenfassung unterscheidbarer Elemente". Ist M eine Menge und m ein Element von M, so schreiben wir $m \in M$. Ist m hingegen kein Element von M, so schreiben wir $m \notin M$.

Elemente einer Menge müssen keinesfalls Zahlen sein, es muss kein Begriff von Addition oder Multiplikation etc. existieren. Das einzige, was wir verlangen, ist Unterscheidbarkeit in dem Sinne, dass wir zu je zwei Elementen a, b einer Menge M sicher sagen können, ob sie gleich sind $(a = b)$ oder nicht $(a \neq b)$. Als Gegenbeispiel würde ich etwa bezweifeln, dass wir eine Menge $\mathscr{G}$ aller Gefühle definieren können, da Gleichheit von zwei Gefühlen wohl nicht zweifelsfrei zu entscheiden ist.

Der Begriff einer Menge ist trotzdem sehr allgemein. Wir illustrieren ihn mit einigen Beispielen.

Beispiel 1.6.

a) $M = \{1, 2, 3, 4\}$ ist eine Menge, hier durch Aufzählung ihrer (endlich vielen) Elemente 1,2,3 und 4 festgelegt. Wir haben also $2 \in M$, aber $5 \notin M$ und auch z.B. $\mathbb{N} \notin M$.

b) Mengen können auch durch Beschreibung festgelegt werden, z.B. können wir die Menge S aller Studierenden in diesem Hörsaal betrachten. Dann sind die hier anwesenden Studierenden die (unterscheidbaren) Elemente von S.

c) Einige wichtige Zahlenmengen, die Sie aus der Schule kennen:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \qquad \text{Menge der natürlichen Zahlen.} \tag{1.7}$$

Bemerken Sie, dass $0 \notin \mathbb{N}$. Wenn wir die Null dabei haben wollen, sprechen wir von der Menge $\mathbb{N}_0$,

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \qquad \text{Menge der natürlichen Zahlen inkl. Null.} \tag{1.8}$$

Weiterhin sind $\mathbb{Z}$ die ganzen Zahlen,

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\} \qquad \text{Menge der ganzen Zahlen.} \tag{1.9}$$

Eine andere wichtige Zahlenmenge ist die Menge $\mathbb{Q}$ der *rationalen Zahlen*. Dies ist die Menge aller Brüche, die Elemente von $\mathbb{Q}$ sind also genau die Zahlen der Form

$$\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}, \qquad a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N}. \tag{1.10}$$

d) Mengen können aber auch ganz unterschiedliche Objekte enthalten. Zum Beispiel hat die Menge

$$W = \{1, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, -5, \text{Apfel}\} \tag{1.11}$$

zwei Elemente, die ganze Zahlen sind (1 und -5), zwei Elemente, die Mengen von Zahlen sind ($\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$), und ein Element, dass ein Obst ist (Apfel). Insbesondere können Mengen ihrerseits Elemente von anderen Mengen sein.

e) Die **leere Menge**. Dies ist die Menge, die keinerlei Elemente hat. Sie wird als $\emptyset$ oder $\{\,\}$ bezeichnet.

In den obigen Beispielen haben wir Mengen oft durch Aufzählung ihrer Elemente festgelegt. Dabei gilt:

- Die Reihenfolge der Element ist irrelevant. Also z.B. $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$.
- Wiederholungen von Elementen ändert die Menge nicht, z.B. $\{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 3, 1\}$.

Sehr oft werden Mengen auch durch vorgeschriebene Eigenschaften ihrer Elemente festgelegt. Ist M eine Menge und ist $P(m)$ eine Aussage, die von $m \in M$ abhängt, so können wir die Menge

$$N = \{m \in M :\ P(m)\} \tag{1.12}$$

betrachten. Dies ist die Menge aller Elemente von M, für die $P(m)$ wahr ist. Man liest den Doppelpunkt ":" in der Definition von N als "so, dass" oder "mit der Eigenschaft, dass". Statt dem Doppelpunkt wird auch oft ein senkrechter Strich verwendet, also $N = \{m \in M \mid P(m)\}$.

Beispiel 1.7.

a) $\{n \in \mathbb{N} : \; n < 5\} = \{1, 2, 3, 4\}$

b) $\{x \in \mathbb{Z} : \; x \text{ ist durch 3 teilbar}\} = \{0, 3, -3, 6, -6, \dots\} = \{3z : \; z \in \mathbb{Z}\}$

c) $S := \{\text{Studierende in diesem Hörsaal}\}$. $L := \{s \in S : \; s \text{ studiert Lehramt}\}$.

Finden Sie eine von $n \in \mathbb{N}$ abhängige Aussage $P(n)$, so dass $\{n \in \mathbb{N} : \; P(n)\} = \{3, 4, 5\}$.

Ist M eine wohldefinierte Menge, so ist die durch die Aussagenfamilie $P(m)$ ausgesuchte Teilmenge N (1.12) ebenfalls eine wohldefinierte Menge. Formal sind Teilmengen wie folgt definiert.

Definition 1.8. Seien N, M Mengen.

a) N heißt *Teilmenge von* M, geschrieben als $N \subset M$, falls jedes Element von N auch ein Element von M ist, also falls

$$x \in N \Rightarrow x \in M. \tag{1.13}$$

Wir schreiben auch

$$(N \not\subset M) :\Leftrightarrow \neg(N \subset M), \tag{1.14}$$

falls N *keine* Teilmenge von M ist.

b) N und M heißen *gleich*, geschrieben als $N = M$, falls $N \subset M$ *und* $M \subset N$. In diesem Fall gilt $x \in N \Leftrightarrow x \in M$.

Wenn eine Aussage die Gleichheit $A = B$ von zwei Mengen A und B behauptet, wird das fast immer in zwei unabhängigen Schritten bewiesen, nämlich dem Beweis von $A \subset B$ und $B \subset A$.

Beispiel 1.9.

a) $\{1, 7\} \subset \mathbb{N}$, aber $\{0, 1, 2, 3\} \not\subset \mathbb{N}$.

b) $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Hier ist $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen (bisher nicht streng definiert, $\mathbb{R}$ enthält auch nicht rationale (irrationale) Zahlen wie z.B. $\sqrt{2}$ und π) und die noch größere Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen (ebenfalls bisher nicht definiert).

c) $\{\text{Städte in Deutschland}\} \subset \{\text{Städte in Europa}\}$.

d) Jede Menge M ist eine Teilmenge von sich selbst, $M \subset M$.
Hier eine Bemerkung zur Notation: Manche Texte schreiben $N \subseteq M$ für Teilmengen, um auszudrücken, dass die Teilmenge N gleich M sein könnte. Wir schreiben stets $N \subset M$ und erlauben dabei auch Gleichheit der Mengen, d.h. $M \subset M$ ist wahr. Wollen wir ausdrücken, dass N eine Teilmenge von M ist und

$N \neq M$, so schreiben wir

$$N \subsetneq M :\Leftrightarrow (N \subset M \ \wedge \ N \neq M). \tag{1.15}$$

e) Die leere Menge $\emptyset$ ist eine Teilmenge jeder Menge M. Denn um $\emptyset \subset M$ zu prüfen, müssen wir zeigen, dass für jedes $x \in \emptyset$ auch $x \in M$ gilt. Da $\emptyset$ keine Elemente hat, gibt es nichts zu prüfen, die Aussage $(x \in \emptyset) \Rightarrow (x \in M)$ ist also wahr, weil $x \in \emptyset$ immer falsch ist.

Eine Menge M hat üblicherweise viele Teilmengen, die wir wieder zu einer Menge zusammenfassen können, der Potenzmenge von M.

Definition 1.10. Die *Potenzmenge* von M, geschrieben $\mathcal{P}(M)$, ist die Menge aller Teilmengen von M.

Es gilt also $x \in \mathcal{P}(M) \Leftrightarrow x \subset M$. Die Potenzmenge ist nie leer, da sie stets die leere Menge und die Menge M enthält.

Beispiel 1.11.

a) $\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

b) $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. Dies ist die Menge, deren einziges Element die leere Menge ist. Dies ist nicht gleich der leeren Menge, die ja gar keine Elemente hat.

Wie viele Teilmengen hat $\{1,2\}$? Was ist die Potenzmenge von $\mathcal{P}(\emptyset)$?

Wenn man mit Mengen von Mengen operiert, die nicht notwendigerweise Teilmengen einer gegebenen Menge sind, kann man auf Widersprüche stoßen. Ein berühmtes Beispiel ist das *Russel'sche Paradoxon*. Dazu betrachten wir die "Menge aller Mengen" R, deren Elemente also alle Mengen sein sollen, und ihre Teilmenge

$$G := \{x \in R : \ x \notin x\}. \tag{1.16}$$

Die Elemente der Menge G sind also alle Mengen, die sich nicht selbst enthalten. Hierbei bedeutet $x \in x$, dass die Menge x sich selbst *als Element* enthält (nicht als Teilmenge, $x \subset x$ gilt ja immer).

Das Paradoxon wird deutlich, wenn man die Aussage $W :\Leftrightarrow (G \in G)$ betrachtet, also fragt, ob G sich selbst enthält. Ist W wahr, also $G \in G$, so würde G sich per Definition von G nicht selbst enhalten, also $G \notin G$, d.h. W ist falsch. Ist W hingegen falsch, so enthält sich G nicht selbst. Nach Definition von G bedeutet dies $G \in G$, d.h. W ist wahr.

Wir sehen also, dass die Wahrheit von W äquivalent zu der Falschheit von W ist. Dies ist das Russel'sche Paradoxon. Es deutet die Unzulänglichkeit unseres naiven Mengenbegriffs an, die Menge G gibt es nicht. Wir werden in dieser Vorlesung aber nicht tiefer in abstrakte Mengenlehre einsteigen; die in der Analysis definierten Mengen werden alle ohne solche Paradoxa existieren und sich nicht selbst enthalten.

Aus gegebenen Mengen kann man aber auch viele neue Mengen definieren, ohne logische Widersprüche aufzuwerfen. Die wichtigsten Konstruktionen sind die Folgenden (siehe Lineare Algebra).

Definition 1.12. Seien A, B Mengen.

a) Der *Schnitt* (oder *Durchschnitt*) von A und B ist die Menge

$$A \cap B := \{x \in A : \ x \in B\} = \{x \in B : \ x \in A\}. \tag{1.17}$$

Die Elemente von $A \cap B$ sind also die Elemente, die in A *und* B enthalten sind. Wir können auch $A \cap B = \{x : \ x \in A \wedge x \in B\}$ schreiben.

b) A und B heißen *disjunkt*, falls $A \cap B = \emptyset$.

c) Die *Vereinigung* von A und B ist die Menge

$$A \cup B := \{x : \ x \in A \vee x \in B\}. \tag{1.18}$$

Die Elemente von $A \cup B$ sind also die Elemente, die in A oder B (oder beiden) enthalten sind.

d) Das *Komplement* von B in A ist die Menge

$$A \backslash B := \{x \in A : \ x \notin B\} \tag{1.19}$$

aller Elemente von A, die nicht in B liegen.

Vereinigungen und Durchschnitte können auch von mehr als zwei Mengen gebildet werden. Sind z.B. $A_1, \dots, A_n$ Mengen (mit $n \in \mathbb{N}$ beliebig), so definieren wir

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k := A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n := \{x : \ (\forall k \in \{1, \dots, n\})\, x \in A_k\} \tag{1.20}$$

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k := A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n := \{x : \ (\exists k \in \{1, \dots, n\})\, x \in A_k\} \tag{1.21}$$

der Durchschnitt bzw. die Vereinigung dieser Mengen. Ganz analog kann man auch noch allgemeinere Durchschnitte und Vereinigungen bilden: Ist I eine beliebige Menge und haben wir zu jedem $i \in I$ eine Menge A_i (I heißt deshalb "Indexmenge"), so definieren wir $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x : \ (\forall i \in I) x \in A_i\}$ und $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : \ (\exists i \in I) x \in A_i\}$.

Beispiel 1.13. Für $i \in \mathbb{N}$ definieren wir $A_i := \{n \in \mathbb{N} : \ n > i\}$. Dann gilt

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \{2, 3, 4, \dots\} = \{n + 1 : \ n \in \mathbb{N}\}, \tag{1.22}$$

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \emptyset. \tag{1.23}$$

Erklären/beweisen Sie die in (1.22) und (1.23) behaupteten Gleichungen.

Besonders wichtig für unsere folgende Diskussion von Abbildungen ist der Begriff des kartesischen (oder: direkten) Produkts von Mengen.

Definition 1.14. Das *kartesische Produkt* $A \times B$ von zwei Mengen A und B ist die Menge aller *geordneten Paare* (a, b) (mit $a \in A$ und $b \in B$),

$$A \times B := \{(a, b) : \; a \in A, b \in B\}. \tag{1.24}$$

Die Betonung *geordnetes* Paar bedeutet, dass es in (a, b) auf die Reihenfolge ankommt. Zwei Paare (a, b) und (a', b') sind genau dann gleich, wenn $a = a'$ und $b = b'$. Im Allgemeinen also $(a, b) \neq (b, a)$.

Das geordnete Paar (a, b) ist nicht mit der zweielementigen Menge $\{a, b\}$ zu verwechseln! Insbesondere gilt $\{a, b\} = \{b, a\}$, aber $(a, b) \neq (b, a)$. Der Unterschied wird in der Notation durch die unterschiedlichen Klammern () bzw {} angedeutet.

Beispiel 1.15.

a) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ enthält alle Paare (n, m) von natürlichen Zahlen n, m; wir können uns $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ als zweidimensionales Koordinatenraster mit dem Punkt $(1, 1)$ in der unteren linken Ecke vorstellen.

b) $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ enthält alle Paare (x, y) rationaler Zahlen. Ein solches Paar (x, y) können wir uns als einen Punkt in der Ebene vorstellen, der die (rationalen) Koordinaten x (auf der "x-Achse)" und y (auf der "y-Achse") hat.

Wir können auch kartesische Produkte von mehr als zwei Mengen bilden. Sind $A_1, A_2, \ldots, A_n$ Mengen (mit $n \in \mathbb{N}$), so ist

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n := \{(a_1, \ldots, a_n) : \; a_i \in A_i, \; i = 1, \ldots, n\} \tag{1.25}$$

die Menge aller *geordneten n-Tupel*. Sind alle Mengen $A_1 = A_2 = \ldots = A_n =: A$ gleich, so schreiben wir auch kürzer

$$A^n := A \times \ldots \times A. \tag{1.26}$$

Diese Notation ist Ihnen aus der Schule bekannt: $\mathbb{R}^2$ ist die reelle Ebene, $\mathbb{R}^3$ der reelle dreidimensionale Raum.

1.3 Relationen und Abbildungen

Wir möchten nun den in der Mathematik zentralen Begriff einer *Abbildung* (oder *Funktion*) definieren (diese beiden Begriffe werden in dieser Vorlesung synonym verwendet). Grob gesprochen sollte das eine "Vorschrift" f sein, die jedem Element a einer Menge A ein eindeutiges Element $f(a)$ einer Menge B "zuordnet". Wir werden diesen Sachverhalt dann als $f : A \to B, a \mapsto f(a)$ notieren.

In konkreten Beispielen wie etwa den in der Orientierungswoche besprochenen reellen Polynomfunktionen ist klar, wie solche Abbildungen definiert werden können. Im Allgemeinen, d.h. für beliebige Mengen A, B, ist allerdings nicht so klar, was mit "zuordnen" gemeint ist. Wir führen deshalb den Begriff einer Relation ein und definieren dann Funktionen (=Abbildungen) als spezielle Relationen.

Definition 1.16. Seien A, B Mengen. Eine *Relation auf* $A \times B$ ist eine Teilmenge $R \subset A \times B$.

Ist $R \subset A \times B$ eine Relation und $(a, b) \in R$, so sagt man auch, dass a und b in Relation (R) stehen. Wenn die Mengen A und B betont werden sollen, bezeichnet man auch das Tripel (A, B, R) als Relation. Falls $A = B$, so heißt eine Relation auf $A \times A$ kurz Relation auf A, obwohl es weiterhin um geordnete Paare von Elementen (aus A) geht.

Beispiel 1.17.

a) $A = \{0, 1\}$, $B = \{2, 3\}$. Dann ist $R = \{(0, 2), (1, 2)\}$ eine Relation. Hier stehen 0 und 1 jeweils in Relation zu 2, aber 0 und 1 stehen beide nicht in Relation zu 3.

b) Sei S die Menge der Studierenden in diesem Hörsaal, und

$$R = \{(a, b) \in S \times S : \ a \text{ sitzt auf dem Platz rechts von } b\}.$$

Dann ist R eine Relation auf S.

Geben Sie weitere Beispiele von Relationen auf S und $\mathbb{N}$.

Es gibt viele unterschiedliche Typen von Relationen, etwa reflexive Relationen, symmetrische Relationen, Äquivalenzrelationen, Ordnungsrelationen. Wir führen diese Begriffe hier noch nicht ein, sondern definieren vorerst nur, was eine Abbildung ist.

Definition 1.18. Seien A, B Mengen. Eine *Abbildung* (oder *Funktion*) ist eine Relation R auf $A \times B$, so dass es zu jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ gibt, so dass $(a, b) \in R$.

Mit Quantoren liest sich die Bedingung in dieser Definition also als

$$(\forall a \in A)(\exists! b \in B) : (a, b) \in R. \tag{1.27}$$

Ist $R \subset A \times B$ eine Abbildung, so können wir eine zugehörige Abbildung im Sinne einer Abbildungsvorschrift definieren, nämlich

$$f : A \to B, \qquad a \mapsto f(a), \tag{1.28}$$

wobei $f(a) \in B$ (für $a \in A$) als das eindeutige Element $b \in B$ definiert ist, so dass $(a, b) \in R$. So wird f eindeutig durch R festgelegt, und der Relationsbegriff gibt der Abbildungsvorschrift f eine zweifelsfreie Bedeutung.

Wir werden im Folgenden die Abbildungsvorschrift-Schreibweise $f : A \to B$ verwenden[3] Die Relation R erhält man aus f als den *Graphen von* f zurück (s.u.).

[3]Ein ebenfalls nützliche Notation ist $A \xrightarrow{f} B$.

Beispiel 1.19. Sei $\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \ldots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen.

a) $R := \{(n, n) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{(2, 3)\}$ ist keine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, da 2 mit *zwei* Elementen (2 und 3) in Relation steht, nicht mit einem eindeutigen.

b) $R = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist keine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Hier gilt $(n, m) \in R$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$, das heißt zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es viele unterschiedliche (alle) $m \in \mathbb{N}$, so dass $(n, m) \in R$.

c) $R = \{(1, 2), (4, 7), (2, 99)\}$ ist keine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, denn nicht zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein m, so dass $(n, m) \in R$ (z.B. für $n = 3$). Aber R *ist* eine Abbildung $\{1, 2, 4\} \to \mathbb{N}$.

d) $R = \{(n, n + 1) : n \in \mathbb{N}\}$ ist eine Abbildung. Die zugehörige Abbildungsvorschrift ist

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad f(n) = n + 1. \tag{1.29}$$

e) Sei M die Menge der (jemals auf dieser Erde lebenden/gelebten) Menschen, und sei $\mathrm{Mu}(a, b)$ (für $a, b \in M$) die Aussage: "b ist die biologische Mutter von a". Die Relation

$$R := \{(k, m) : \mathrm{Mu}(k, m)\} \tag{1.30}$$

ist eine Abbildung (jeder Mensch hat eine eindeutige biologische Mutter)[a]. Die Abbildung ordnet jedem Menschen seine eindeutige Mutter zu. Die umgekehrte Relation

$$R' := \{(m, k) : \mathrm{Mu}(k, m)\} \tag{1.31}$$

ist aber *keine* Abbildung, denn nicht jeder Mensch ist eine Mutter, und nicht jede Mutter hat ein eindeutiges Kind.

[a] Dies ist allerdings nur richtig, wenn wir (unrealistisch) von einer seit aller Ewigkeit lebenden Menschheit ausgehen.

Wir sehen, dass wir eine Abbildung, definiert als eine spezielle Relation auf $A \times B$, als strenge Definition einer Abbildung im Sinne einer Abbildungsvorschrift verstehen können. Wir werden von nun an meistens die Notation $f : A \to B$, $a \mapsto f(a)$ verwenden.

Definition 1.20. Seien A, B Mengen und $f : A \to B$ eine Abbildung.

a) A heißt *Definitionsbereich* von f.

b) B heißt *Bildbereich* von f.

c) Die Relation

$$\Gamma(f) := \{(a, f(a)) : a \in A\} \subset A \times B \tag{1.32}$$

heißt der *Graph* von f.

Punkt c) definiert eine Relation (Abbildung im Sinne von Def. 1.18) durch eine Abbildung im Sinne einer Abbildungsvorschrift. Beide Begriffe sind äquivalent.

Eine weitere übliche Sprechweise ist, dass wir $f(a)$ den *Wert* von f in a nennen. Verwechseln Sie nicht f (Abbildungsvorschrift) mit $f(a)$ (Wert der Abbildung bei a)!

Unser Begriff von Abbildung ist sehr allgemein und nicht auf Abbildungen zwischen Mengen von Zahlen beschränkt. Diese Allgemeinheit und damit einhergehende Flexibilität wird sich als sehr nützlich herausstellen. Wir geben nun einige Beispiele von Abbildungen.

Beispiel 1.21.

a) $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $g(x) := x^2 + 3x$. In diesem Beispiel ist die Abbildung g durch eine Formel gegeben. Beachten Sie, dass die Angabe einer Abbildungsvorschrift $f : A \to B$, $a \mapsto f(a)$ stets die implizite Behauptung macht, dass $f(a)$ tatsächlich in B liegt. Hier ist das der Fall, denn für eine rationale Zahl x ist auch x^2+3x eine rationale Zahl. Aber z.B. $w : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $w(x) = \sqrt{x}$, ist keine Abbildung, denn die Quadratwurzel $\sqrt{x}$ einer rationalen Zahl x ist im Allgemeinen nicht rational.

b) Sei $\mathcal{P}$ die Menge aller reellen Polynome, und $D : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, $D(p) := p'$ (Ableitung). Dies ist auch eine Abbildung, wie in der Orientierungswoche diskutiert.

c) Sei Abb($\mathbb{Q}$) die Menge aller Abbildungen $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, und sei $x \in \mathbb{Q}$ eine rationale Zahl. Dann ist

$$\delta_x : \mathrm{Abb}(\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}\,, \qquad \delta_x(f) := f(x),$$

eine Abbildung. Die Wirkung von δ_x besteht darin, Funktionen bei x auszuwerten.

Dieses Beispiel lehrt Sie, dass Sie zwischen f (einer Abbildung) und $f(x)$ (dem Wert der Abbildung f an der Stelle x) gut unterscheiden sollten.

d) Als nächstes betrachten wir eine "stückweise" definierte Abbildung, nämlich

$$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \qquad f(x) := \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}. \tag{1.33}$$

Dies ist die Betragsfunktion auf den rationalen Zahlen, $f(x) = |x|$.

e) $k : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $k(x) := \frac{1}{x}$ ist keine Abbildung, da $k(0)$ nicht definiert ist. Die Abbildung

$$l : \mathbb{Q}\backslash\{0\} \to \mathbb{Q}, \qquad l(x) := \frac{1}{x} \tag{1.34}$$

ist hingegen wohldefiniert, da sie 0 nicht in ihrem Definitionsbereich hat. Auch

$$m : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \qquad m(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 12 & x = 0 \end{cases} \tag{1.35}$$

ist eine wohldefinierte Abbildung, da hier $m(0) = 12$ klar (wenn auch willkürlich) definiert ist.

f) Noch ein Beispiel einer Abbildung zwischen endlichen Mengen:

$$f : \{1, 2, 3\} \to \mathbb{N}, \qquad f(1) := 1, \quad f(2) := 17, \quad f(3) := 17. \tag{1.36}$$

In diesem Fall sind die Abbildungswerte alle einzeln definiert.

g) Ein wichtiges Beispiel einer Abbildung ist die **Identität**. Gegeben eine beliebige Menge X definieren wir

$$\mathrm{id}_X : X \to X, \qquad \mathrm{id}_X(x) := x, \tag{1.37}$$

dies ist also die Abbildung, die jedes Element $x \in X$ auf sich selbst abbildet.

Zur Definition einer Abbildung gehören drei Dinge: Der Definitionsbereich A, der Bildbereich B, und die Abbildungsvorschrift $A \ni a \mapsto f(a) \in B$. Zwei Abbildungen sind per Definition genau dann gleich, wenn sie in all diesen drei Daten übereinstimmen. Zum Beispiel sind die drei Abbildungen

$$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_+ := \{x \in \mathbb{Q} : \ x \geq 0\}, \qquad f(x) := x^2, \tag{1.38}$$
$$g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \qquad g(x) := x^2, \tag{1.39}$$
$$h : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{Q}, \qquad h(x) := x^2, \tag{1.40}$$

allesamt unterschiedlich, obwohl sie alle die "gleiche" Abbildungsvorschrift haben. Man sollte also eigentlich Abbildungen stets als (A, B, f) oder $f : A \to B$ schreiben. Aber es ist üblich, nur von f zu sprechen, wenn Definitions- und Bildbereich aus dem Kontext klar sind.

Dies führt uns auf den Begriff der Einschränkung einer Abbildung: Ist $f : A \to B$ eine Abbildung und $C \subset A$ eine Teilmenge, so ist

$$f|_C : C \to B, \qquad f|_C(c) := f(c), \tag{1.41}$$

die *Einschränkung von f auf C*. Falls $C \neq A$, so auch $f|_C \neq f$.

Geben Sie ein Beispiel von zwei Abbildungen $f : A \to B$, $g : A' \to B$ mit unterschiedlichen Definitionsbereichen $A \neq A'$, so dass $g|_A = f$.

Bilder und Urbilder

Wir führen jetzt einige weitere wichtige Begriffe und Eigenschaften von Abbildungen ein.

Definition 1.22. Sei $f : A \to B$ eine Abbildung.

a) Sei $M \subset A$ eine Teilmenge. Dann heißt

$$f(M) := \{f(m) : \ m \in M\} \subset B \tag{1.42}$$

das *Bild von M unter f*. Das Bild des ganzen Definitionsbereichs A, also

$$f(A) = \{f(a) : \ a \in A\} = \{b \in B : \ \exists a \in A \text{ so dass } f(a) = b\} \tag{1.43}$$

heißt kurz das *Bild von* f. Wir bezeichnen das Bild von f mitunter auch als $\mathrm{im}(f) := f(A)$ (vom Englischen "image").

b) Sei $N \subset B$ eine Teilmenge des Bildbereichs. Dann heißt

$$f^{-1}(N) := \{a \in A: \ f(a) \in N\} \tag{1.44}$$

das *Urbild von* N *unter* f. Falls N nur ein Element hat, also $N = \{y\}$, so schreibt man häufig kürzer $f^{-1}(y) := f^{-1}(\{y\})$.

Beachten Sie den Unterschied zwischen *Bild* $f(A)$ und *Bildbereich* B einer Abbildung $f : A \to B$! Das Bild von f ist immer eine Teilmenge des Bildbereichs B, muss aber nicht gleich B sein.

Für eine beliebige Abbildung $f : A \to B$ kann man die *Koeinschränkung von* f *auf* $f(A)$ definieren als die Abbildung $f^{f(A)} : A \to f(A)$, $a \mapsto f(a)$. Dann ist das Bild von $f^{f(A)}$ gleich dem Bildbereich von $f^{f(A)}$, nämlich $f(A)$.

Für die *Ur*bilder einer Abbildung $f : A \to B$ tritt diese Asymmetrie nicht auf, hier ist das Urbild des Bildbereichs stets gleich dem Definitionsbereich:

$$f^{-1}(B) = \{a : \ f(a) \in B\} = A. \tag{1.45}$$

Wieso?

Beispiel 1.23.

a) Die Abbildung

$$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \qquad f(q) := q^2, \tag{1.46}$$

hat Bildbereich $\mathbb{Q}$ und Bild

$$\mathrm{im}(f) = f(\mathbb{Q}) = \{q^2 : \ q \in \mathbb{Q}\} \subsetneq \mathbb{Q}_+ \subsetneq \mathbb{Q}. \tag{1.47}$$

Beachten Sie $f(\mathbb{Q}) \neq \mathbb{Q}_+$: Nicht jede rationale Zahl ist das Quadrat einer rationalen Zahl (z.B. 2). Trotzdem ist f wohldefiniert, denn das Quadrat einer rationalen Zahl ist stets rational. Einige Beispiele von Bildern von Teilmengen des Definitionsbereichs:

$$f(\{0,1,2\}) = \{0,1,4\}, \qquad f(\{1,-1\}) = \{1\}.$$

b) Einige Beispiele von Urbildern von Teilmengen des Bildbereichs:

$$f^{-1}(\{1\}) = \{1,-1\}, \qquad f^{-1}(\{0\}) = \{0\}.$$

1.4 Injektivität und Surjektivität

Die folgenden Begriffe sind nicht nur für die Analysis, sondern für die gesamte Mathematik von zentraler Bedeutung und kommen ständig vor.

Definition 1.24. Sei $f : A \to B$ eine Abbildung.

a) f heißt *injektiv*, falls unterschiedliche Elemente des Definitionsbereichs auf unterschiedliche Elemente des Bildbereichs abgebildet werden, d.h. falls gilt:

$$\forall a, a' \in A, a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a'). \tag{1.48}$$

b) f heißt *surjektiv*, falls $\operatorname{im}(f) = B$ (Bild = Bildbereich, d.h. jedes $b \in B$ ist Bild eines $a \in A$ unter f).

c) f heißt *bijektiv*, falls f injektiv und surjektiv ist.

Einige Umformulierungen dieser Begriffe für eine Abbildung $f : X \to Y$ sind die Folgenden:

$$\begin{aligned} f \text{ injektiv} &\Leftrightarrow \text{Jedes Element des Bildbereichs hat höchstens ein Urbild.} \\ f \text{ surjektiv} &\Leftrightarrow \text{Jedes Element des Bildbereichs hat mindestens ein Urbild.} \\ f \text{ bijektiv} &\Leftrightarrow \text{Jedes Element des Bildbereichs hat genau ein Urbild.} \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass diese Umformulierungen äquivalent zu den gegebenen Definitionen sind.

Beispiel 1.25.

a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) := n^2$ ist injektiv aber nicht surjektiv (nicht jede natürliche Zahl ist eine Quadratzahl).

b) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) := n - 1$ für $n > 1$, $f(1) := 10$, ist surjektiv aber nicht injektiv (da 10 zwei Urbilder hat, nämlich 11 und 1).

c) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) := \begin{cases} n+1 & n \text{ ungerade} \\ n-1 & n \text{ gerade} \end{cases}$, ist bijektiv.

d) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) := (n-2)^2 + 1$ ist weder injektiv noch surjektiv. Injektivität ist wegen $f(1) = f(3)$ verletzt, und Surjektivität ist verletzt, da z.B. 3 nicht im Bild von f liegt.

e) Die Identität $\mathrm{id}_X : X \to X$ auf einer beliebigen Menge X ist bijektiv.

Da für eine bijektive Abbildung $f : A \to B$ jedes Element b des Bildbereichs B genau ein Urbild $f^{-1}(\{b\})$ hat, können wir eine bijektive Abbildung $A \to B$ zu einer Abbildung $B \to A$ "umkehren".

Definition 1.26. Sei $f : A \to B$ eine bijektive Abbildung. Dann ist die *Umkehrabbildung* von f die Abbildung

$$f^{-1} : B \to A, \qquad b \mapsto f^{-1}(\{b\}). \tag{1.49}$$

Hierbei identifizieren wir die einelementige Menge $f^{-1}(\{b\}) \subset A$ mit ihrem eindeutigen Element, also dem $a \in A$ mit $f(a) = b$.

Beachten Sie, dass die Definition von f^{-1} Sinn macht: Für jedes $b \in B$ gibt es genau ein Urbild $f^{-1}(\{b\})$, also ist $f^{-1} : B \to A$ wohldefiniert.

Eine Warnung zur Notation: Die Bezeichnung für Urbilder und Umkehrfunktionen sind sehr ähnlich bzw. unter der Kurzschreibweise $f^{-1}(b) := f^{-1}(\{b\})$ sogar identisch. Beachten Sie den Unterschied: Urbilder sind für beliebige Abbildungen definiert, die Umkehrfunktion existiert aber nur für bijektive Abbildungen. Natürlich sind die beiden Begriffe eng verwandt, siehe Def. 1.26. Aus dem Kontext sollte immer klar sein, was gemeint ist.

Beispiel 1.27. Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f(x) := 3x + 2$. Wir wollen zeigen, dass f bijektiv ist und ihre Umkehrfunktion bestimmen.

Sei also $y \in \mathbb{Q}$ ein beliebiges Element im Bildbereich. Wir untersuchen die Urbilder von y unter f, betrachten also $y = f(x) = 3x + 2$ und sehen, dass diese Gleichung für genau ein x erfüllt ist, nämlich für $x = \frac{1}{3}(y-2)$. Also hat jedes Element im Bildbereich genau ein Urbild, d.h. f ist bijektiv. Die Umkehrfunktion ist

$$f^{-1} : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \qquad f^{-1}(y) = \frac{1}{3}(y-2). \tag{1.50}$$

Wie dieses Beispiel illustriert, ist für eine bijektive Abbildung $f : A \to B$ das Element $f^{-1}(b)$ (für ein $b \in B$) die immer existierende, eindeutige Lösung $a \in A$ der Gleichung $f(a) = b$.

Auf einer beliebigen Menge A ist die Identität id_A bijektiv mit Umkehrabbildung

$$\mathrm{id}_A^{-1} = \mathrm{id}_A. \tag{1.51}$$

Verknüpfung (Komposition) von Abbildungen

Wir betrachten nun zwei Abbildungen f, g, wobei der Definitionsbereich von f mit dem Bildbereich von g übereinstimmt, so dass wir die Abbildungen "zusammensetzen" können.

Definition 1.28. Seien A, B, C Mengen und $f : A \to B$, $g : C \to A$ Abbildungen. Die *Verknüpfung* (auch: *Verkettung*, *Zusammensetzung*, *Komposition*) von f und g ist die Abbildung

$$f \circ g : C \to B, \qquad (f \circ g)(c) := f(g(c)). \tag{1.52}$$

Im Allgemeinen machen Ausdrücke der Form $f(g(c))$ keinen Sinn, aber hier liegt $g(c)$ stets im Definitionsbereich A von f, so dass wir $f(g(c))$ bilden können.

Beachten Sie: Das Symbol $\circ$ heißt "nach", $f \circ g$ wird gelesen als "f nach g" oder "f komponiert mit g". Das macht klar, dass zuerst g wirkt, und danach f – entgegen der in Europa üblichen Leserichtung von links nach rechts in dem Symbol $f \circ g$.

Beispiel 1.29. Die Verknüpfung der beiden Abbildungen $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = x^2 + 1$, und $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $g(x) = 2x$, ist

$$f \circ g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \qquad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x)^2 + 1 = 4x^2 + 1. \tag{1.53}$$

In diesem Beispiel existiert auch die umgekehrte Komposition $g \circ f$, sie ist

$$g \circ f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \qquad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2f(x) = 2x^2 + 2. \tag{1.54}$$

Selbst wenn beide Kompositionen $f \circ g$ und $g \circ f$ existieren, müssen sie also nicht gleich sein (Komposition ist nicht kommutativ).

Nach so vielen Definitionen wird es Zeit für einen Satz, in dem wir die wichtigsten Eigenschaften der Komposition von Funktionen zusammentragen.

Satz 1.30. *Seien A, B, C, D Mengen.*

a) Für jede Abbildung $f : A \to B$ gilt

$$id_B \circ f = f = f \circ id_A. \tag{1.55}$$

b) Für beliebige Abbildungen $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ gilt

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \tag{1.56}$$

(Assoziativität der Komposition).

c) Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Abbildungen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f \text{ und } g \text{ injektiv } &\Rightarrow g \circ f \text{ injektiv.} \\ f \text{ und } g \text{ surjektiv } &\Rightarrow g \circ f \text{ surjektiv.} \\ f \text{ und } g \text{ bijektiv } &\Rightarrow g \circ f \text{ bijektiv.} \end{aligned}$$

d) Ist $f : A \to B$ bijektiv, so ist auch die Umkehrabbildung $f^{-1} : B \to A$ bijektiv, und es gilt $(f^{-1})^{-1} = f$ sowie

$$f^{-1} \circ f = id_A, \qquad f \circ f^{-1} = id_B. \tag{1.57}$$

Beweis. a) Für beliebiges $a \in A$ gilt $\mathrm{id}_B(f(a)) = f(a)$ und $f(\mathrm{id}_A(a)) = f(a)$. Da alle drei Abbildungen f, $\mathrm{id}_B \circ f$ und $f \circ \mathrm{id}_A$ den gleichen Definitions- und Wertebereich haben, folgt die Behauptung.

b) Die Definitions- und Wertebereiche von $(h \circ g) \circ f$ und $h \circ (g \circ f)$ stimmen überein, und für beliebiges $a \in A$ gilt

$$((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a))) = h((g \circ f)(a)) = (h \circ (g \circ f))(a).$$

Also gilt $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

c) Seien $a, a' \in A$, $a \neq a'$. Dann gilt $f(a) \neq f(a')$, weil f injektiv ist, und $g(f(a)) \neq g(f(a'))$, weil g injektiv ist. Also ist $g \circ f$ injektiv.

Sei $c \in C$ beliebig. Dann existiert $b \in B$ mit $g(b) = c$, da g surjektiv ist, und $a \in A$ mit $f(a) = b$, da f surjektiv ist. Also gilt $g(f(a)) = c$, d.h. a liegt im Urbild von c unter $g \circ f$. Somit is $g \circ f$ surjektiv.

Die Bijektivitätsaussage folgt sofort aus den Aussagen zur Injektivität und Surjektivität.

d) Die Umkehrabbildung f^{-1} ist per Definition

$$f^{-1} : B \to A, \qquad f(a) \mapsto a,$$

es gilt also $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$, und insbesondere ist f^{-1} surjektiv (da id_A surjektiv ist: $f^{-1}(B) \supset f^{-1}(f(A)) = \mathrm{id}_A(A) = A$, also $f^{-1}(B) \supset A$ und damit $f^{-1}(B) = A$).

Um $f \circ f^{-1}$ auszuwerten, sei $b \in B$ beliebig. Dann gibt es genau ein $a \in A$, so dass $b = f(a)$, und wir haben

$$(f \circ f^{-1})(b) = f(f^{-1}(f(a))) = f(a) = b.$$

Damit haben wir $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$ gezeigt.

Sind $b, b' \in B$ mit $f^{-1}(b) = f^{-1}(b')$, so ergibt Anwenden von f die Gleichung $b = b'$, d.h. f^{-1} ist injektiv und damit bijektiv.

Die Umkehrabbildung $(f^{-1})^{-1} : A \to B$ von f^{-1} existiert also, und $(f^{-1})^{-1} \circ f^{-1} = \mathrm{id}_A$. Sei $a \in A$ beliebig. Dann gibt es genau ein $b \in B$, so dass $a = f^{-1}(b) \Leftrightarrow f(a) = b$, und wir erhalten

$$(f^{-1})^{-1}(a) = (f^{-1})^{-1}(f^{-1}(b)) = b = f(a).$$

Also haben f und $(f^{-1})^{-1}$ die gleiche Abbildungsvorschrift, den gleichen Definitionsbereich A und den gleichen Bildbereich B, d.h. $f = (f^{-1})^{-1}$. $\square$

Für eine beliebige Menge A können wir die Menge $\mathrm{Bij}(A)$ aller bijektiver Abbildungen $f : A \to A$ betrachten. Diese Menge hat viel interessante Struktur: Sie enthält die Identitätsabbildung id_A, und zu jedem $f \in \mathrm{Bij}(A)$ auch die Umkehrabbildung $f^{-1} \in \mathrm{Bij}(A)$. Für $f, g \in \mathrm{Bij}(A)$ ist auch die Verknüpfung $f \circ g \in \mathrm{Bij}(A)$, und diese Verknüpfung ist assoziativ (im Allgemeinen aber nicht kommutativ). Dies führt auf die Definition einer *Gruppe*, die in Linearer Algebra besprochen wird.

1.5 Mächtigkeit und Abzählbarkeit

In diesem kurzen Abschnitt wollen wir den Begriff einer bijektiven Abbildung verwenden, um Mengen in ihrer “Größe” zu vergleichen, was insbesondere für Mengen mit unendlich vielen Elementen eine interessante Frage ist. Wenn wir später die reellen Zahlen konstruiert haben, werden wir auf diese Methoden zurückgreifen.

Definition 1.31. Seien A, B Mengen.

a) A und B heißen *gleichmächtig*, falls es eine bijektive Abbildung $f : A \to B$ gibt.

b) Falls es $n \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass A gleichmächtig zu $\{1, \ldots, n\}$ (oder zu $\emptyset$) ist, so sagen wir, dass A *endlich* ist. In diesem Fall ist n (oder 0) die Zahl der Elemente von A. Wenn A nicht endlich ist, nennen wir A *unendlich*.

c) Wenn A endlich oder gleich mächtig zu $\mathbb{N}$ ist, so nennen wir A *abzählbar*, ansonsten *überabzählbar*. Unendliche abzählbare Mengen heißen auch *abzählbar* *unendlich.*

Sind zwei Mengen A, B gleichmächtig, so sagen wir auch, dass sie die gleiche *Mächtigkeit* oder *Kardinalität* haben.

Wir bemerken die folgenden drei Eigenschaften von Gleichmächtigkeit.

Lemma 1.32. *Seien A, B, C Mengen.*

a) Jede Menge A ist gleichmächtig zu sich selbst.

b) Ist A gleichmächtig zu B, so ist auch B gleichmächtig zu A.

c) Ist A gleichmächtig zu B und B gleichmächtig zu C, so ist auch A gleichmächtig zu C.

Beweis. a) Die Identität $\mathrm{id}_A : A \to A$ ist bijektiv.

b) A ist gleichmächtig zu B, so gibt es eine bijektive Abbildung $f : A \to B$. Dann ist $f^{-1} : B \to A$ ebenfalls bijektiv (Satz 1.30 d)), also ist auch B gleichmächtig zu A.

c) Ist A gleichmächtig zu B und B gleichmächtig zu C, so gibt es bijektive Abbildungen $f : A \to B$ und $g : B \to C$. Dann ist auch $g \circ f : A \to C$ bijektiv (Satz 1.30 c)), d.h. A ist gleichmächtig zu C. □

Wir werden diese Eigenschaften später im Zusammenhang von sogenannten Äquivalenzrelationen als *Reflexivität*, *Symmetrie*, und *Transitivität* wiedersehen.

Ist eine Menge A gleichmächtig zu $\{1, \ldots, n\}$, so können wir die bijektive Abbildung $f : \{1, \ldots, n\} \to A$ als Durchnummerierung (Abzählung) der Elemente von A ansehen, $A = \{f(1), \ldots, f(n)\}$. Für endliche Mengen bedeutet Gleichmächtigkeit also, dass sie die gleiche Anzahl von Elementen haben.

Analog dazu sind die Elemente einer unendlich abzählbaren Menge A durch die natürlichen Zahlen nummerierbar, denn eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to A$ hat das Bild $A = \{f(1), f(2), \ldots\} = \{f(n) : n \in \mathbb{N}\}$.

Eine überabzählbare Menge A sollten Sie sich hingegen als eine sehr viel größere unendliche Menge vorstellen; so, dass die Elemente von A nicht durch die natürlichen Zahlen nummeriert werden können.

Für unendliche Mengen ist der Begriff der Gleichmächtigkeit also sehr viel interessanter als für endliche Mengen. Das äußert sich zuerst darin, dass eine unendliche Menge A eine echte Teilmenge B haben kann (also $B \subsetneq A$), die gleichmächtig zu A ist[4]. Dies ist für endliche Mengen nicht möglich.

Lemma 1.33.

a) $\mathbb{N}$ ist gleichmächtig zu $\mathbb{N}_> := \{2, 3, \ldots\}$.

b) $\mathbb{N}$ ist gleichmächtig zu $\mathbb{Z}$.

[4] Für eine "anschauliche" Interpretation des folgenden Lemmas suchen Sie nach Hilberts Hotel.

Beweis. a) Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_>$, $f(n) := n + 1$. Offenbar ist f wohldefiniert und surjektiv. Für $n, m \in \mathbb{N}, n \neq m$, ist auch $f(n) = n+1 \neq m+1 = f(m)$. Also ist f auch injektiv und damit bijektiv.

b) Wir definieren

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \qquad f(n) := \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ gerade} \\ -\frac{n-1}{2} & n \text{ ungerade} \end{cases} \tag{1.58}$$

und bemerken, dass f bijektiv ist. □

Geben Sie einen formalen Beweis der Bijektivität von (1.58).

Satz 1.34.

a) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *ist abzählbar unendlich.*

b) $\mathbb{Q}$ *ist abzählbar unendlich.*

Beweis. Wir geben keinen strengen Beweis, sondern nur die Idee.

a) Wir definieren $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$$f(p,q) := p + \sum_{j=1}^{p+q-2} j = \begin{cases} p + 1 + 2 + 3 + \ldots + (p+q-2) & p+q-2 \geq 1 \\ p & p+q-2 < 1 \end{cases} \tag{1.59}$$

Wie in der Vorlesung an einem Diagramm gezeigt wurde, ist f bijektiv.

b) Die Idee ist, $\mathbb{Q}$ als Vereinigung aller Brüche mit festem Nenner zu schreiben, d.h.

$$\mathbb{Q}_n := \left\{ \frac{z}{n} : z \in \mathbb{N} \right\}, \qquad \mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}_n \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} -\mathbb{Q}_n \cup \{0\}. \tag{1.60}$$

Für die Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$ genügt es, die Abzählbarkeit von $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}_n$ zu zeigen. Aber $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}_n$ ist unendlich und "kleiner" als die abzählbare Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (da Brüche gekürzt werden können), also ist auch $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}_n$ abzählbar. [5] □

An dieser Stelle werden Sie sicher fragen, ob es überhaupt überabzählbare Mengen gibt. Wir konstruieren nun ein Beispiel mit Hilfe von Potenzmengen. Das Beweisargument ist analog zu dem bei dem Russel'schen Paradoxon.

Satz 1.35. *Die Potenzmenge* $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ *von* $\mathbb{N}$ *ist überabzählbar.*

Beweis. Angenommen, $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist bijektiv und damit insbesondere surjektiv. Dann ist

$$D_f := \{n \in \mathbb{N} : n \notin f(n)\}$$

[5] Dass eine Menge A "kleiner" ist als eine Menge B heißt hier, dass es eine injektive Abbildung $f : A \to B$ gibt.

eine Teilmenge von $\mathbb{N}$, d.h. es gibt $n \in \mathbb{N}$ so dass $D_f = f(n)$.

Falls $n \in D_f$, so gilt nach Definition von D_f die Aussage $n \notin f(n) = D_f$, ein Widerspruch. Falls $n \notin D_f = f(n)$, so gilt nach Definition von D_f die Aussage $n \in D_f$, ebenfalls ein Widerspruch.

Die surjektive Funktion f gibt es also nicht. $\square$

Wenn wir uns den Beweis genau ansehen, erkennen wir, dass wir $\mathbb{N}$ durch eine beliebige Menge A ersetzen können und allein schon die Annahme der Surjektivität von $f : A \to \mathcal{P}(A)$ zu einem Widerspruch führt. Wir notieren deshalb das folgende Korollar zu dem Beweis von Satz 1.35.

Korollar 1.36. *Sei A eine beliebige Menge. Dann gibt es keine surjektive Funktion $f : A \to \mathcal{P}(A)$.* $\square$

Wir werden später sehen, dass auch die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen überabzählbar ist. Hier skizziere ich das wesentliche Argument dafür, dass sogar das in $\mathbb{R}$ enthaltene Intervall $I := \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ überabzählbar ist, als Vorschau.

Dazu stellen wir uns $x \in I$ in Binärdarstellung $x = 0.x_0x_1x_2x_3\ldots$ vor, z.B. $0.101 = 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} = \frac{5}{8}$. Wie wir später beweisen werden, hat jedes $x \in I$ eine Binärdarstellung (die unendlich sein kann). Dann betrachten wir die Abbildung

$$f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to I, \qquad f(A) = 0.a_1a_2a_3\ldots \qquad \text{mit } a_n := \begin{cases} 1 & n \in A \\ 0 & n \notin A \end{cases}. \tag{1.61}$$

Es ist nicht schwer, zu sehen, dass f eine bijektive Abbildung zwischen $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ und den Folgen $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ definiert; dies ist der Grund für die Überabzählbarkeit von I, da $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nach Satz 1.35 überabzählbar ist. Um einen echten Beweis zu geben, müssen wir a) klären, wie unendliche Binärdarstellungen reelle Zahlen definieren (Konvergenz einer Folge) und wieso jede Zahl in I eine (konvergente) Binärdarstellung hat, und b) eine kleine Nichteindeutigkeit der Binärdarstellung beachten: Ähnlich wie $0.\overline{9} = 1$ im Dezimalsystem, gilt im Binärsystem die Nichteindeutigkeit $0.\overline{1} = 1$.

Mit $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ haben wir eine erste überabzählbare Menge kennengelernt, tatsächlich ist $\mathcal{P}(A)$ für jede unendliche Menge A überabzählbar.

Wir schreiben auch $|A|$ für die *Kardinalität* einer Menge A – dies wird hier nicht formal definiert, aber Sie können sich die Kardinalität als ein Symbol vorstellen, dass die Menge aller Mengen umfasst, die untereinander gleichmächtig sind. Für endliches A können wir $|A|$ mit der Anzahl der Elemente von A identifizieren.

Für unendliche Mengen benutzt man hebräische Buchstaben zum Bezeichnen von Kardinalitäten. So ist per Definition $\beth_0$ die Kardinalität von $\mathbb{N}$, und $\beth_1$ die Kardinalität von $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (gleich der Kardinalität von $\mathbb{R}$), d.h. $\beth_0$ und $\beth_1$ bezeichnen zwei unterschiedliche Begriffe von "Unendlichkeit". Analog definiert man $\beth_2 := |\mathcal{P}(\mathcal{P}((\mathbb{N}))|$, eine noch einmal sehr viel größere Menge als $\mathbb{R}$, und $\beth_3 := |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})))|$, etc.

Cantors *Kontinuumshypothese* besagt, dass es keine Kardinalität "zwischen" $\beth_0$ und $\beth_1$ gibt. Die Hypothese besagt also: Falls A eine Menge ist, so dass es injektive Funktionen $f : \mathbb{N} \to A$ und

$f : A \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ gibt, so ist A gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ oder $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Erstaunlicherweise lässt sich (in einer geeigneten axiomatisierten Mengenlehre) beweisen, dass es unmöglich ist, die Kontinuumshypothese zu beweisen oder zu widerlegen!

2 Zahlen

In diesem Kapitel werden wir die wesentlichen Zahlenmengen der Analysis genauer kennenlernen - die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, die reellen Zahlen $\mathbb{R}$, und die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.

2.1 Die natürlichen Zahlen und vollständige Induktion

Aus der Schule wissen Sie, dass die natürlichen Zahlen die Menge $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ bilden. An dieser "Definition" sind die Punkte "$\dots$" wenig zufriedenstellend - man liest sie als "und so weiter" und verlässt sich darauf, dass dieses "und so weiter" irgendwie eindeutig festgelegt ist.

Wir geben nun eine mathematische Definition.

Definition 2.1. Die natürlichen Zahlen sind eine Menge $\mathbb{N}$ mit einem ausgezeichneten Element 1 und einer Funktion $\mathcal{N} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit den Eigenschaften

a) $\mathcal{N}$ ist injektiv,

b) $1 \notin \mathcal{N}(\mathbb{N})$,

c) Falls für eine Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$ gilt: $1 \in M$ und $\mathcal{N}(M) \subset M$, so gilt $M = \mathbb{N}$.

Diese Definition passt genau zu unserer intuitiven Vorstellung von natürlichen Zahlen, wenn man die Funktion $\mathcal{N}$ (die *Nachfolgerfunktion*) als $\mathcal{N}(n) := n + 1$ ansieht. Wir können nun rekursiv die üblichen Namen der natürlichen Zahlen einführen, indem wir $2 := \mathcal{N}(1)$, $3 := \mathcal{N}(2)$, etc. setzen. Teil a) besagt, dass unterschiedliche Zahlen unterschiedliche Nachfolger haben, b) besagt, dass 1 Nachfolger keiner Zahl ist, und c) besagt, dass eine Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$, die 1 und alle Nachfolger von Elementen aus M enthält, bereits ganz $\mathbb{N}$ sein muss.

An Definition 2.1 fällt auf: Wir haben die Menge $\mathbb{N}$ nicht explizit definiert, sondern durch definierende Eigenschaften (*Peano-Axiome der natürlichen Zahlen*). Der folgende Satz besagt, dass es eine quasi eindeutige Menge mit den in Def. 2.1 geforderten Eigenschaften gibt.

Satz 2.2. *Seien* $(\mathbb{N}, 1, \mathcal{N})$ *und* $(\mathbb{N}', 1', \mathcal{N}')$ *zwei Mengen mit Nachfolgerfunktionen* $\mathcal{N}, \mathcal{N}'$ *und ausgezeichneten Elementen* $1, 1'$*, die den Forderungen von Def. 2.1 genügen. Dann gibt es eine eindeutige bijektive Abbildung* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}'$ *mit* $\varphi(1) = 1'$ *und* $\mathcal{N}' \circ \varphi = \varphi \circ \mathcal{N}$.

Aus Zeitgründen wollen wir Satz 2.2 hier nicht beweisen. Sie finden einen vollständigen Beweis in [Ebb+83, Kapitel 1, §2].

Dieser Eindeutigkeitssatz besagt, dass alle Mengen, die den Forderungen in Def. 2.1 genügen, "gleich" sind in dem Sinne, dass sie alle relevanten Strukturen (die Menge $\mathbb{N}$, das ausgezeichnete Element 1, und die Nachfolgerfunktion $\mathcal{N}$) bijektiv aufeinander abgebildet werden können. Solche Mengen unterscheiden sich also nur durch die Namen, die wir ihren Elementen geben und wir können deshalb von nun an von *der* (eindeutigen) Menge der natürlichen Zahlen sprechen. Von nun an werden wir also die Nachfolgerfunktion $\mathcal{N}$ mit der üblichen Nachfolgerfunktion $n \mapsto n + 1$ identifizieren.

Wir verzichten auf eine axiomatische Einführung der Addition und Multiplikation auf $\mathbb{N}$ und erinnern nur kurz an die Abbildungen

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad (n, m) \mapsto n + m, \tag{2.1}$$
$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad (n, m) \mapsto n \cdot m = nm, \tag{2.2}$$

und ihre wesentlichen Eigenschaften: Kommutativgesetze, Assoziativgesetze, Distributivgesetz.

Satz 2.3 (Das Prinzip der vollständigen Induktion). *Sei $\{P(n) : \ n \in \mathbb{N}\}$ eine durch $\mathbb{N}$ indizierte Menge von Aussagen $P(n)$, so dass*

a) $P(1)$ ist wahr (Induktionsanfang).

b) Falls $P(k)$ für ein $k \in \mathbb{N}$ wahr ist, so ist auch $P(k+1)$ wahr (Induktionsschritt) (in Formeln: $\forall k \in \mathbb{N} : P(k) \Rightarrow P(k+1)$)

Dann ist $P(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr.

Beweis. Sei $M := \{n \in \mathbb{N} : \ P(n)\}$. Dann gilt nach Induktionsanfang $1 \in M$. Sei $m \in M$ beliebig. Nach Induktionsschritt gilt dann $n + 1 \in M$, d.h. $\mathcal{N}(M) \subset M$. Dies impliziert nach Eigenschaft c) in Def. 2.1 $M = \mathbb{N}$. □

In völlig analoger Art und Weise beweist man Satz 2.3, wenn die Eigenschaft b) durch

b') Falls für ein $k \in \mathbb{N}$ die Aussagen $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ wahr sind, so ist auch $P(k+1)$ wahr (Induktionsschritt)

ersetzt wird. Weitere Varianten sind Induktion ab einem anderen Startwert als $n = 1$ (z.B. ab $n = 0$ oder $n = 5$), oder der Beweis einer endlichen Menge $P(1), \ldots, P(N)$ von Aussagen ($N \in \mathbb{N}$). Letzterer Fall folgt wieder aus Satz 2.3, wenn man zusätzliche Aussagen $P(m) := P(N)$ für $m > N$ definiert.

In dieser Variante von Satz 2.3 spricht man auch vom *starken* Prinzip der vollständigen Induktion. Das Prinzip der vollständigen Induktion (in beiden Varianten) ist eine Beweistechnik, die oft nützlich ist, wenn man es mit Mengen von Aussagen zu tun hat, die durch die natürlichen Zahlen nummeriert sind.

Bevor wir einige Beispiele dazu geben, führen wir Summen- und Produktsymbole ein.

Definition 2.4. Für $n \in \mathbb{N}_0$ und[a] $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Q}$ definieren wir

$$\sum_{k=1}^{0} x_k := 0, \qquad \prod_{k=1}^{0} x_k := 1, \tag{2.3}$$
$$\sum_{k=1}^{n} x_k := \left(\sum_{k=1}^{n-1} x_k\right) + x_n, \qquad \prod_{k=1}^{n} x_k := \left(\prod_{k=1}^{n-1} x_k\right) \cdot x_n. \tag{2.4}$$

Wir definieren weiterhin für $n \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mathbb{Q}$,

$$x^n := \prod_{k=1}^{n} x \qquad n\text{-te Potenz von } x, \tag{2.5}$$

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k \qquad \text{Fakultät.} \tag{2.6}$$

[a]Die exakt gleiche Notation wird später auch für reelle und komplexe Zahlen verwendet.

Diese rekursiven Definitionen sind äquivalent zu

$$\sum_{k=1}^{n} x_k := \begin{cases} x_1 + \ldots + x_n & n \geq 1 \\ 0 & n = 0 \end{cases}, \qquad \prod_{k=1}^{n} x_k := \begin{cases} x_1 \cdot \ldots \cdot x_n & n \geq 1 \\ 1 & n = 0 \end{cases}. \tag{2.7}$$

Beachten Sie, dass per Definition gilt:

$$x^0 = 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{Q}, \quad \text{insbesondere } 0^0 = 1, \tag{2.8}$$

$$0! = 1. \tag{2.9}$$

Beispiel 2.5. Einige Beispiele zu Summen- und Produktzeichen und anderer gebräuchlicher Schreibweisen ($k, n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$, $x_{k,l} \in \mathbb{Q}$)

$$\sum_{k=1}^{n} k^n = 1^n + 2^n + \ldots + n^n, \qquad \sum_{k=1}^{n} n^k = n^1 + n^2 + \ldots + n^n,$$

$$\sum_{k=1}^{n} 3 = 3n, \qquad \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k = 0 \quad \text{in } \mathbb{Z},$$

$$\prod_{k=1}^{n} 3 = 3^n,$$

$$\prod_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_{k,l} = (x_{1,1} + \ldots + x_{n,1}) \cdot (x_{1,2} + \ldots + x_{n,2}) \cdot \ldots \cdot (x_{1,n} + \ldots + x_{n,n}),$$

$$\sum_{k=1}^{n} \prod_{l=1}^{n} x_{k,l} = x_{1,1} x_{1,2} \cdots x_{1,n} + \ldots + x_{n,1} x_{n,2} \cdots x_{n,n},$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1+a}^{n+a} x_{k-a} \qquad \text{(Indexverschiebung).}$$

Ein Standardbeispiel für einen Beweis per vollständiger Induktion:

Beispiel 2.6. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1). \tag{2.10}$$

Beweis. Wir führen einen Beweis der vollständiger Induktion in n. Die zu beweisenden

Aussagen $P(n)$ sind die Formeln (2.10). Für den Induktionsanfang setzen wir $n = 1$ und erhalten

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1}{2} 1 \cdot 2,$$

eine wahre Aussage. Also ist $P(1)$ wahr. Nun nehmen wir für den Induktionsschritt an, dass $P(m)$ für ein $m \in \mathbb{N}$ wahr ist. Dann ist

$$\sum_{k=1}^{m+1} k = \sum_{k=1}^{m} k + (m+1) \overset{P(m)}{=} \frac{1}{2} m(m+1) + (m+1) = \frac{1}{2}(m+1)((m+1)+1),$$

also ist $P(m+1)$ wahr. Mit vollständiger Induktion folgt nun die Formel (2.10) für beliebiges $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Sie werden noch viele weitere Beweise per Induktion sehen. Beachten Sie, dass Sie stets Induktionsanfang und Induktionsschritt prüfen müssen. Ein Nachteil an Beweisen mit vollständiger Induktion ist, dass Sie eine Hypothese benötigen (in diesem Fall die Formeln (2.10)), die Sie dann per Induktion beweisen können. Wäre die Ausgangsfrage "Was ist die Summe der ersten n natürlichen Zahlen?" gewesen, so müssten Sie erst diese Hypothese "erraten" (z.B. durch $1 = \frac{1}{2} 1 \cdot 2$, $1 + 2 = 3 = \frac{1}{2} 2 \cdot 3$, $1 + 2 + 3 = 6 = \frac{1}{2} 3 \cdot 4$, $1 + 2 + 3 + 4 = 10 = \frac{1}{2} 4 \cdot 5$) und dann per Induktion beweisen.

Um ein weiteres Beispiel zu geben, das später oft nützlich sein wird, beweisen wir als nächstes das Binomialtheorem, die Verallgemeinerung der aus der Schule bekannten Formel $(x+y)^2 = 1 \cdot x^2 + 2\, x \cdot y + 1 \cdot y^2$ auf allgemeine Potenzen $n \in \mathbb{N}$. Als Vorbereitung dazu definieren wir die Binomialkoeffizienten.

Definition 2.7. Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ definieren wir den *Binomialkoeffizienten*

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & k \leq n \\ 0 & k > n \end{cases} \tag{2.11}$$

Binomialkoeffizienten spielen insbesondere in der Kombinatorik eine große Rolle.

Sei B eine endliche Menge. Überlegen Sie sich, dass

$$|\{A \subset B : \; |A| = k\}| = \binom{|B|}{k}$$

gilt. Zum Beispiel hat $B = \{1, 2, 3\}$ genau $3 = \binom{3}{2}$ Teilmengen mit Kardinalität 2, nämlich $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, und $\{2, 3\}$.

Auf den ersten Blick ist der Formel (2.11) nicht anzusehen, dass $\binom{n}{k}$ stets eine ganze Zahl ist. Dies ist eine Konsequenz des Additionstheorems für Binomialkoeffizienten:

Lemma 2.8 (Additionstheorem für Binomialkoeffizienten). *Für beliebige $k, n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}. \tag{2.12}$$

Der Beweis dieses Lemmas erfolgt in den Übungen. Eine Visualiserung dieses Lemmas liefert das *Pascalsche Dreieck*.

Satz 2.9 (Binomialtheorem). *Für beliebige $x, y \in \mathbb{Q}$ (später auch $x, y \in \mathbb{C}$) und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}. \tag{2.13}$$

Beweis. Wir führen einen Beweis per vollständiger Induktion in $n \in \mathbb{N}_0$.

Induktionsanfang: Für $n = 0$ gilt $(x+y)^0 = 1$ per Definition, und $\sum_{k=0}^{0} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \binom{0}{0} x^0 y^0 = 1$. Die behauptete Formel (2.13) ist für $n = 0$ also wahr.

Induktionsschritt: Wir nehmen nun an, dass (2.13) für ein festes aber beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$ wahr ist, und rechnen

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y) \cdot (x+y)^n \\
&\overset{\text{Ind.Ann.}}{=} (x+y) \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n-(k-1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} \\
\\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^k y^{n-(k-1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) x^k y^{n+1-k} + y^{n+1} \\
&\overset{\text{Lemma 2.8}}{=} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k} + y^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

Also ist die Formel (2.13) unter der Induktionsannahme auch für $n+1$ anstelle von n wahr. Der Beweis des Satzes ist nun abgeschlossen. □

Beispiel 2.10. Sei $x, y \in \mathbb{Q}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2,\\ (x+y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3,\\ (x+y)^4 &= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4.\end{aligned}$$

Merke: $(x+y)^n$ wird als Summe von $n+1$ Termen der Form $x^a y^b$ mit jeweils $a+b=n$ geschrieben, die Vorfaktoren sind gerade die Binomialkoeffizienten.

Nach $\mathbb{N}$ betrachten wir auch die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$,

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N}), \qquad -\mathbb{N} := \{-n : n \in \mathbb{N}\}, \tag{2.14}$$

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}. \tag{2.15}$$

Es ist möglich, diese Mengen streng aus den natürlichen Zahlen zu konstruieren. Wir vermeiden diesen Zugang hier aus Zeitgründen (siehe z.B. [Kna18, Kapitel 4–5]) und verlassen uns auf ihr Schulwissen über ganze und rationale Zahlen.

2.2 Körper

Ein zentraler Gegenstand der Analysis sind die reellen Zahlen $\mathbb{R}$, die durch drei Haupteigenschaften charakterisiert sind: 1) algebraische Eigenschaften (Addition und Multiplikation), 2) Ordnungseigenschaften (kleiner/größer), und 3) topologische Eigenschaften (Vollständigkeit).

Die algebraischen Eigenschaften und Ordnungseigenschaften sind dieselben wie bei den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, und im Begriff eines *Körpers* zusammengefasst.

Definition 2.11. Ein *Körper* ist eine Menge K mit zwei Abbildungen

$$K \times K \to K, \qquad (x, y) \mapsto x + y \qquad \text{(Addition)} \tag{2.16}$$

$$K \times K \to K, \qquad (x, y) \mapsto x \cdot y \qquad \text{(Multiplikation)} \tag{2.17}$$

so dass die folgenden Eigenschaften gelten:

a) $(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe. Das heißt im Detail:
   - Addition ist assoziativ: $(x + y) + z = x + (y + z)$ für alle $x, y, z \in K$.
   - Null: Es gibt ein Element $0 \in K$ mit der Eigenschaft $x + 0 = x = 0 + x$ für alle $x \in K$.
     Notation: Wir schreiben oft $K^\times := K \setminus \{0\}$.
   - Negative Elemente: Zu jedem $x \in K$ gibt es ein Element $-x \in K$ mit der Eigenschaft $x + (-x) = 0 = (-x) + x$.
     Notation: Wir schreiben kürzer $x - y := x + (-y)$.
   - Addition ist kommutativ: $x + y = y + x$ für alle $x, y \in K$.

b) Multiplikation:

- Multiplikation ist assoziativ: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ für alle $x, y, z \in K$.
- Multiplikation ist kommutativ: $x \cdot y = y \cdot x$ für alle $x, y \in K$.
- Eins: Es gibt ein Element $1 \in K$, $1 \neq 0$, mit der Eigenschaft $x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$ für alle $x \in K$.
- Inverse Elemente: Zu jedem $x \in K^\times$ gibt es ein Element $x^{-1} \in K$ mit der Eigenschaft $x \cdot x^{-1} = 1 = x^{-1} \cdot x$.
  Bemerkung: Für $x, y \in K, x \neq 0$ schreiben wir auch $\frac{1}{x} := x^{-1}$, $\frac{y}{x} := y \cdot x^{-1}$, und $xy := x \cdot y$ für beliebige $x, y \in K$.

Diese Axiome implizieren, dass $(K^\times, \cdot)$ eine abelsche Gruppe ist.

c) Distributivgesetz: Für alle $x, y, z \in K$ gilt

$$x(y + z) = xy + xz. \tag{2.18}$$

Diese Eigenschaften sind z.B. für die rationalen Zahlen erfüllt. In diesem Fall sind Addition und Multiplikation gegeben durch

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \qquad \left(\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}\right) \mapsto \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} := \frac{pq' + qp'}{qq'}, \tag{2.19}$$

(Brüche $\frac{p}{q}$ und $\frac{p'}{q'}$ auf den Hauptnenner bringen und addieren) und

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \qquad \left(\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}\right) \mapsto \frac{p}{q} \cdot \frac{p'}{q'} := \frac{pp'}{qq'}, \tag{2.20}$$

d.h. $\mathbb{Q}$ mit diesen Operationen (manchmal der Deutlichkeit halber als $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ geschrieben) ist ein Körper.

Im Unterschied zu $\mathbb{Q}$ sind $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ keine Körper. In $\mathbb{N}$ gibt es zwar eine Addition und Multiplikation, aber z.B. keine inversen Elemente bzgl. Addition (negative Zahlen). In $\mathbb{Z}$ gibt es zwar 0 und negative Zahlen, aber i.A. keine inversen Elemente bzgl. Multiplikation, z.B. $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

Es gibt allerdings noch viele weitere Körper als $\mathbb{Q}$. Wenn Sie mit einem Körper arbeiten, sollten Sie nicht an $\mathbb{Q}$ denken, sondern nur Operationen ausführen, die aufgrund der oben geforderten Eigenschaften und ihrer Konsequenzen gelten.

Einige Konsequenzen der Körper-Axiome sind:

- Die Null 0 ist das *eindeutige* neutrale Element der Addition. Genauer: Falls $0' + x = x$ für zwei beliebige Elemente $0', x \in K$, so gilt $0' = 0$. (Beweis: $0 = x + (-x) = (0' + x) + (-x) = 0' + (x + (-x)) = 0' + 0 = 0'$).
- Die Eins 1 ist das *eindeutige* neutrale Element der Multiplikation. Genauer: Falls $1' \cdot x = x$ für ein $1' \in K$ und ein $x \in K^\times$, so gilt $1' = 1$. (Beweis: $1 = x \cdot x^{-1} = (1' \cdot x) \cdot x^{-1} = 1' \cdot (x \cdot x^{-1}) = 1' \cdot 1 = 1'$).
- Für beliebiges $x \in K$ gilt $0 \cdot x = 0$. (Beweis: $0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$. Dies impliziert durch Addition von $-(0 \cdot x)$ die Gleichung $0 = 0 \cdot x$.)

- Eindeutigkeit der negativen Elemente: Gilt für $x, y \in K$ die Gleichung $x + y = 0$, so folgt $y = -x$. (Beweis: Addition von $-y$ und Assoziativgesetz.)
- Eindeutigkeit der inversen Elemente: Gilt $xy = 1$ für $x, y \in K$, so folgt $x \neq 0$, $y \neq 0$ und $x = y^{-1}$. (Beweis: $x, y \neq 0$ folgt mit $0 \neq 1$ und dem dritten Punkt. Dann liefert Multiplikation mit y^{-1} und das Assoziativgesetz für die Multiplikation die Behauptung.)
- Analog sieht man, dass für $x, y \neq 0$ auch $xy \neq 0$ gilt. Dies beweist, dass sich die Multiplikation auf $K^\times \times K^\times \to K^\times$ einschränkt und $(K^\times, \cdot)$ tatsächlich eine abelsche Gruppe ist.
- $-0 = 0$ und $1^{-1} = 1$ sowie $-(-x) = x$ und $(x^{-1})^{-1} = x$ für $x \in K^\times$ (Folgt wie in allgemeinen Gruppen, siehe Lineare Algebra).

Beachten Sie, dass die Existenz inverser Elemente x^{-1} bzgl. Multiplikation nur für $x \neq 0$ gefordert wird. Tatsächlich hat 0 kein multiplikatives Inverses. Denn angenommen, K enthielte ein Element 0^{-1} mit $0 \cdot 0^{-1} = 1$, so würde nach Punkt drei oben $1 = 0$ folgen, ein Widerspruch zu unserer Forderung $1 \neq 0$. Dies ist der Grund, weshalb man "nicht durch Null teilen darf".

> Was passiert, wenn Sie das Axiom $0 \neq 1$ in Definition 2.11 weglassen?

Sie sehen also, dass Sie in einem Körper "wie gewohnt" rechnen können, was Addition und Multiplikation betrifft. Andere Eigenschaften wie z.B. Ordnung (also größer/kleiner, s.u.)), Konvergenz von Folgen (später), oder Charakteristik (siehe Lineare Algebra, im Körper $\mathbb{F}_2$ gilt $1 + 1 = 0$, in $\mathbb{Q}$ aber nicht), können von Körper zu Körper aber sehr unterschiedlich sein!

In der Analysis sind zwei Körper besonders wichtig, die reellen Zahlen und die komplexen Zahlen, die wir beide später einführen werden.

Beispiel 2.12. Hier einige Äquivalenzumformungen, die in jedem Körper K gelten:

a) Für $x, y, z \in K$ gilt stets $x + y = z \Leftrightarrow x = z - y$.
Beweis: $x + y = z \Rightarrow x = x + (y - y) = (x + y) - y = z - y$ und $x = z - y \Rightarrow x + y = (z - y) + y = z + (y - y) = z + 0 = z$.

b) Für $x, y \in K$, $z \in K^\times$ gilt stets $xz = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{z}$. (Beweis als Übung, analog zum ersten Beispiel.)

c) $-(xy) = (-x)y$ (für beliebige $x, y \in K$). Insbesondere: $-x = -1 \cdot x$.
Beweis: $xy + (-x)y = (x + (-x))y = 0 \cdot y = 0$. Also ist $(-x)y$ das eindeutige inverse Element von xy bzgl. Addition, nämlich $(-x)y = -(xy)$.

Wir übernehmen einige vorher eingeführte Notation aus Def. 2.4 auch für allgemeine Körper K, nämlich Summen- und Produktzeichen und Potenzen x^n (für $x \in K$, $n \in \mathbb{N}_0$).

So gilt z.B. in einem beliebigen Körper

$$(-1)^2 = 1. \tag{2.21}$$

Beweis: $(-1)^2 = (-1) \cdot (-1) = -(1 \cdot (-1)) = -(-1) = 1$, wobei Beispiel 2.12 c) und $-(-x) = x$ verwendet wurde.

2.3 Geordnete Körper und Ungleichungen

Nachdem wir die grundlegenden algebraischen Eigenschaften von Körpern kennengelernt haben, wenden wir uns nun dem Begriff eines *geordneten Körpers* (auch: angeordneter Körper) zu. Die Idee ist, dass wir Ungleichungen wie $2 < 3$ und $0 \geq -1$ formulieren möchten. Dies ist mit den Körperoperationen $+$ und $\cdot$ noch nicht möglich, in der Analysis aber von großer Bedeutung.

Wie Sie aus der Schule wissen, lassen sich Ungleichungen $x < y$ stets als $y - x > 0$ umformulieren. Aus dieser Sicht kommt es nur darauf an, eine Teilmenge eines Körpers als *positive Elemente* zu identifizieren. Damit wir mit Ungleichungen operieren können, wie wir es gewohnt sind, fordern wir, dass Summen und Produkte von positiven Zahlen wieder positiv sind. Dies führt uns auf die folgende Definition.

Definition 2.13. Ein Körper K heißt *geordnet*, falls es eine Teilmenge $K_+ \subset K$ gibt mit den Eigenschaften

a) Für jedes $x \in K$ gilt genau eine der drei Aussagen

$$x \in K_+, \qquad x = 0, \qquad -x \in K_+. \tag{2.22}$$

b) Für alle $x, y \in K_+$ gilt $x + y \in K_+$ und $x \cdot y \in K_+$.

In einem geordneten Körper K (genauer: $(K, +, \cdot, K_+)$) verwenden wir die Notation[6] (für $x, y \in K$)

$$x < y :\Leftrightarrow y - x \in K_+ \Leftrightarrow: y > x \tag{2.23}$$

$$x \leq y :\Leftrightarrow (x < y \vee x = y) \Leftrightarrow: y \geq x \tag{2.24}$$

Die Elemente von K_+ heißen *positiv*, die von $K_- := \{-x : x \in K_+\}$ *negativ*, die von $K_+ \cup \{0\}$ *nicht negativ*, und die von $K_- \cup \{0\}$ *nicht positiv*. Die Menge K_+ heißt *Positivbereich*.

- In einem geordneten Körper gilt stets

$$1 > 0. \tag{2.25}$$

  Beweis: Da $1 \neq 0$ (per Körperaxiom), muss nach Def. 2.13 a) genau eine der Aussagen $1 > 0$ oder $-1 > 0$ gelten. Wäre $-1 > 0$, so würde mit Def. 2.13 b)

$$1 = (-1) \cdot (-1) > 0$$

  folgen. Aber dann hätten wir $-1 > 0$ *und* $1 > 0$, ein Widerspruch zu Def. 2.13 a). Also $1 > 0$. $\square$

- Nicht jeder Körper kann angeordnet werden, d.h. es gibt Körper $(K, +, \cdot)$, so dass keine Teilmenge $K_+ \subset K$ existiert, die die in Def. 2.13 geforderten Eigenschaften hat. Ein Beispiel ist der aus der linearen Algebra bekannte Körper $\mathbb{F}_2$ mit zwei Elementen $\{0, 1\}$, und allgemeiner jeder Körper mit positiver Charakteristik (d.h. Existenz von $p \in \mathbb{N}$, so dass $1 + 1 + \ldots + 1 = \sum_{k=1}^{p} 1 = 0$).

[6] Erinnerung: Gegeben zwei Aussagen P, Q, so bedeutet $P :\Leftrightarrow Q$, dass P der Definition äquivalent zu Q ist.

Beweis: Sei K ein Körper mit Charakteristik $p \in \mathbb{N}$. Angenommen, K kann geordnet werden. Dann gilt $1 > 0$ (s.o.). Aufgrund von Def. 2.13 b) gilt dann auch $1 + 1 > 0$, $1 + 1 + 1 > 0$, und $0 < \sum_{k=1}^{p} 1 = 0$, ein Widerspruch. □

Beispiel 2.14. Im Körper der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ definieren wir den Positivbereich

$$\mathbb{Q}_+ := \left\{ \frac{p}{q} : \; p, q \in \mathbb{N} \right\}. \tag{2.26}$$

Dies definiert eine Ordnung auf $\mathbb{Q}$, und diese Ordnung ist eindeutig (d.h. es gibt keine andere Ordnung auf $\mathbb{Q}$). Der Beweis dieser zwei Behauptungen erfolgt in den Übungen.

Wir stellen nun die Regeln für das Rechnen mit Ungleichungen zusammen, die sich aus den Eigenschaften eines geordneten Körpers ergeben.

Satz 2.15 (Rechenregeln für Ungleichungen). *Sei $(K, +, \cdot, K_+)$ ein geordneter Körper, und $x, y, z, w \in K$.*

a) Für je zwei $x, y \in K$ gilt genau eine der drei Aussagen

$$x < y, \qquad x = y, \qquad y < x. \tag{2.27}$$

*b) Gilt $x < y$ und $y < z$, so gilt auch $x < z$ (*Transitivität*).*

c) Gilt $x < y$ und $z \leq w$, so gilt auch $x + z < y + w$. ("Ungleichungen dürfen addiert werden")

d) Gilt $x < y$ und $z > 0$, so gilt auch $xz < yz$. ("Ungleichungen dürfen mit positiven Zahlen multipliziert werden")

e) Gilt $x < y$, so gilt auch $-x > -y$.

f) Gilt $x < y$ und $z < 0$, so gilt auch $xz > yz$. ("Multiplikation einer Ungleichung mit einer negativen Zahl dreht die Ungleichung um")

g) Für jedes $x \in K^\times$ (d.h. $x \neq 0$) gilt $x^2 > 0$.

h) $x > 0 \Rightarrow x^{-1} > 0$.

Beweis. a) Die drei Aussagen sind äquivalent zu $y - x \in K_+$, $y - x = 0$, $-(y - x) \in K_+$. Nach Def. 2.13 a) gilt genau eine dieser Aussagen.

b) Die beiden angenommenen Ungleichungen sind äquivalent zu $y - x \in K_+$ und $z - y \in K_+$. Dann gilt nach Nach Def. 2.13 b) $z - x = (y - x) + (z - y) \in K_+$, also $x < z$.

c) Die beiden angenommenen Ungleichungen sind äquivalent zu $y - x \in K_+$ und $w - z \in K_+$ (falls $z < w$) bzw. $z = w$. Also gilt auch $y - x + w - z \in K_+$, d.h. $x + z < y + w$.

d) Per Annahme gilt $y - x \in K_+$ und $z \in K_+$, nach Def. 2.13 b) also auch $z(y - x) \in K_+$, d.h. $zx < zy$.

e) Gilt $x < y$, so haben wir $0 < y - x = (-x) - (-y)$, also $-x > -y$.

f) folgt sofort aus d) und e).

g) Da $x \neq 0$, muss $x > 0$ oder $x < 0$ gelten. Falls $x > 0$, so auch $x^2 > 0$ wegen Def. 2.13 b), wie behauptet. Falls $x < 0$, so gilt $-x > 0$ und damit ebenfalls $x^2 = (-x)^2 > 0$.

h) Wir haben $x > 0$ und $(x^{-1})^2 > 0$, also auch $x^{-1} = x(x^{-1})^2 > 0$. □

Oft hat man es mit Ketten von Ungleichungen zu tun, z.B.

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n.$$

Diese bedeuten per Definition $x_1 < x_2$ *und* $x_2 < x_3$ *und* $x_3 < x_4$ etc. Wegen der Transitivität Satz 2.15 b) gilt dann auch $x_1 < x_n$.

Weiterhin ist es üblich, kurz $x, y > 0$ zu schreiben, um die Aussage "$x > 0$ und $y > 0$" auszudrücken.

Beispiel 2.16. Seien x, y, x', y' Elemente eines geordneten Körpers.

a) *"Produkte von Ungleichungen"*. Gilt

$$0 \leq x < y, \qquad 0 \leq x' < y', \tag{2.28}$$

so gilt auch das "Produkt" der Ungleichungen, nämlich

$$0 \leq xx' < yy'. \tag{2.29}$$

Beweis: Die Aussage ist klar, falls $x' = 0$, denn dann gilt $xx' = 0$ und $yy' > 0$, da $y, y' > 0$.

Sei jetzt also $x' \neq 0$. Dann gilt nach Satz 2.15 d) $xx' < yx'$ (durch Multiplikation von $x < y$ mit der positiven Zahl x') und $x'y < y'y$ (durch Multiplikation von $x' < y'$ mit der positiven Zahl y). Per Transitivität (Satz 2.15 b)) folgt aus $xx' < yx'$ und $yx' < yy'$ die behauptete Ungleichung $xx' < yy'$. □

Beachten Sie, dass es hier wesentlich ist, dass x, x' nicht negativ sind.

b) *Positivität und multiplikative Inverse*. Gilt $xy > 0$, so gilt

$$x < y \Longleftrightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{x}. \tag{2.30}$$

Beweis: Per Annahme ist xy positiv, also auch $(xy)^{-1} > 0$ (Satz 2.15 h)). Dann liefert Multiplikation von $x < y$ mit $(xy)^{-1}$ die behauptete Ungleichung $y^{-1} < x^{-1}$. Die andere Implikation folgt durch Vertauschung von x, y mit x^{-1}, y^{-1}. □

Auch hier ist die Positivitätsannahme $xy > 0$ wesentlich. Z.B. gilt in den rationalen Zahlen $2 < 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ und $-3 < -2 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < -\frac{1}{3}$, aber *nicht* $-2 < 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} < -\frac{1}{2}$.

Als weiteres Beispiel für Ungleichungen beweisen wir die *Bernoulli-Ungleichung*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx. \tag{2.31}$$

Um sie in einem allgemeinen geordneten Körper zu formulieren, müssen wir das Symbol nx als n-fache Addition von x zu sich selbst lesen, d.h. $nx = \sum_{k=1}^{n} x$ gemäß der rekursiven Definition 2.4 des Summenzeichens.

Beispiel 2.17 (Bernoulli-Ungleichung). Sei K ein geordneter Körper und $x \in K$ mit $x \geq -1$. Dann gilt die Ungleichung (2.31) für alle $n \in \mathbb{N}$.
Beweis: Wir führen einen Beweis per vollständiger Induktion in n. Für $n = 1$ ist die zu beweisende Aussage $(1+x)^1 \geq 1 + 1x = 1 + x$, eine wahre Aussage.

Für den Induktionsschritt nehmen wir an, dass (2.31) für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt und bemerken, dass $1 + x \geq 0$ per Annahme an x. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x) \cdot (1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) \\ &= 1 + x + nx + nx^2 = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x.\end{aligned}$$

Beim ersten Ungleichungszeichen $\geq$ haben wir benutzt, dass diese Ungleichung als Produkt der angenommenen Ungleichung $(1+x)^n \geq 1+nx$ mit der positiven Zahl $1+x$ gilt, falls $1+x > 0$. Falls $1+x = 0$, so sind beide Seiten der Ungleichung gleich 0, was ebenfalls eine wahre Aussage ist.

Beim zweiten Ungleichungszeichen haben wir benutzt, dass $x^2 \geq 0$ (siehe Satz 2.15 g)), $n > 0$ (denn $n = \sum_{k=1}^{n} 1$ ist eine Summe von Einsen, also positiv), und Produkte von positiven und nicht-negativen Zahlen nicht negativ sind.

Per Transitivität erhalten wir aus obiger Rechnung $(1+x)^{n+1} \geq (1 + (n+1)x)$, also die behauptete Aussage für $n+1$ anstelle von n. Damit folgt die Ungleichung (2.31) für alle $n \in \mathbb{N}$ per vollständiger Induktion.

Zeigen Sie, dass in einem geordneten Körper K die *Ungleichung vom arithmetischen Mittel* gilt: Für alle $x, y \in K$ gilt

$$x < y \Rightarrow x < \frac{x+y}{2} < y. \tag{2.32}$$

Die Vorüberlegung zu diesem Beispiel (wie wir nx als Element von K auffassen) lässt sich verallgemeinern. Wir möchten die natürlichen Zahlen als Elemente eines geordneten Körpers K auffassen, nämlich n mit $\sum_{k=1}^{n} 1_K \in K$ identifizieren. Hier steht 1_K für die Eins in K, um sie von $1 \in \mathbb{N}$ zu unterscheiden. Analog wollen wir die negativen ganzen Zahlen $-n$, $n \in \mathbb{N}$, mit den Körperelementen $-\sum_{k=1}^{n} 1_K$ identifizieren. Das heißt, wir konstruieren eine Abbildung

$$\iota : \mathbb{Q} \to K, \tag{2.33}$$

$$\iota(n) := \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} 1_K & n \in \mathbb{N} \\ 0_K & n = 0 \\ -\sum_{k=1}^{-n} 1_K & n \in -\mathbb{N} \end{cases}, \tag{2.34}$$

$$\iota\left(\frac{p}{q}\right) := \iota(p) \cdot \iota(q)^{-1}, \qquad p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}. \tag{2.35}$$

Man kann nun zeigen:

a) ι ist eine wohldefinierte Abbildung[a]

b) ι ist mit den Körperoperationen verträglich, d.h. für beliebige $x, y \in \mathbb{Q}$ gilt

$$\iota(x+y) = \iota(x) + \iota(y), \qquad \iota(xy) = \iota(x)\iota(y), \tag{2.36}$$

c) ι ist mit der Ordnungsstruktur verträglich, d.h. für beliebige $x \in \mathbb{Q}$ gilt

$$x > 0 \Rightarrow \iota(x) > 0, \tag{2.37}$$

d) ι ist injektiv.

Der Beweis dieser Eigenschaften wird als Übungsaufgabe überlassen.
In diesem Sinne können wir die rationalen Zahlen als Teilmenge eines beliebigen geordneten Körpers auffassen. Da alle Eigenschaften (Körper- und Ordnungseigenschaften) von ι respektiert werden, spricht man von einem *geordneten Unterkörper* $\iota(\mathbb{Q}) \subset K$ und nennt ι einen *Homomorphismus von geordneten Körpern.*

[a] dazu müssen Sie zeigen, dass $\iota(\frac{p}{q})$ nicht von der Darstellung der rationalen Zahl $\frac{p}{q}$ als Bruch abhängt, d.h. $\iota(\frac{p}{q}) = \iota(\frac{p'}{q'})$ falls $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$, und dass die Elemente $\iota(q)$, $q \in \mathbb{N}$, niemals Null sind, so dass $\iota(q)^{-1}$ wohldefiniert ist.

2.4 Minimum/Maximum, Infimum/Supremum

In diesem Abschnitt führen wir weitere Begriffe zu Teilmengen von geordneten Körpern (wie z.B. $\mathbb{Q}$) ein.

Definition 2.18. Sei K ein geordneter Körper und $A \subset K$.

a) Eine *obere Schranke für* A ist eine Zahl $x \in K$, so dass $x \geq a$ für alle $a \in A$ gilt.

b) Eine *untere Schranke für* A ist eine Zahl $x \in K$, so dass $x \leq a$ für alle $a \in A$ gilt.

c) Wenn A eine obere (untere) Schranke besitzt, so heißt A *von oben (von unten) beschränkt*. Wenn A keine obere (untere) Schranke besitzt, so heißt A *von oben (von unten) unbeschränkt*.

d) A heißt *beschränkt*, wenn es von oben und von unten beschränkt ist, ansonsten *unbeschränkt*.

Beispiel 2.19. Die folgenden Beispiele beziehen sich auf $K = \mathbb{Q}$.

a) $A = \{n^{-1} : n \in \mathbb{N}\}$ ist beschränkt. Obere Schranken sind z.B. 1 und 55, untere Schranken sind z.B. 0 und -7.

b) $A = \mathbb{N}$ ist von oben unbeschränkt und von unten beschränkt. Eine untere Schranke ist 0. Eine obere Schranke gibt es nicht (diese Zahl $x \in \mathbb{Q}$ müsste größer als alle natürlichen Zahlen sein), wie später formal bewiesen werden wird.

c) Für die leere Menge $\emptyset$ ist jedes x eine obere und untere Schranke.

Obere/untere Schranken für eine Menge $A \subset K$ sind nie eindeutig: Erfüllen $x, y \in K$ die Ungleichung $x \leq a \leq y$ für alle $a \in A$, so gilt erst recht $x - 1 \leq a \leq y + 1$ für alle $a \in A$, denn $x - 1 \leq x$ und $y \leq y + 1$. Obere/untere Schranken müssen also nicht "optimal" sein.

Um eindeutige obere/untere Schranken zu finden, betrachten wir nun den Begriff eines Maximums/Minimums.

Definition 2.20. Sei $A \subset K$ Teilmenge eines geordneten Körpers K. Dann heißt $x \in A$ *Maximum* (*Minimum*) von A, falls x eine obere (untere) Schranke von A ist.

Ein Maximum/Minimum von A ist also per Definition in A enthalten.

Satz 2.21. *Sei $A \subset K$ Teilmenge eines geordneten Körpers. Wenn A ein Maximum (Minimum) hat, so ist es eindeutig. Wir bezeichnen es dann mit* $\max A$ *bzw.* $\min A$.

Beweis. Nehmen wir an, dass $x \in K$ und $y \in K$ Maxima von A sind. Dann gilt i) $x, y \in A$ und ii) $x, y \geq a$ für alle $a \in A$. Damit folgt $x \geq y$ und $y \geq x$ (setze $a = y$ bzw. $a = x$). Wäre $x \neq y$, so hätten wir $x > y$ und $y > x$, ein Widerspruch zu Def. 2.13 a). Also gilt $x = y$, d.h. das Maximum ist eindeutig. $\square$

Da ein Maximum (Minimum) von A insbesondere eine obere (untere) Schranke von A ist, haben von oben (unten) unbeschränkte Mengen kein Maximum (Minimum). Aber auch beschränkte Mengen müssen kein Maximum oder Minimum haben. Zum Beispiel hat $\mathbb{Q}_+ = \{x > 0 : \; x \in \mathbb{Q}\}$ kein Minimum. Denn angenommen, $q > 0$ sei ein Minimum von $\mathbb{Q}_+$. Dann ist auch $\frac{1}{2}q$ positiv, also in $\mathbb{Q}_+$ enthalten. Wäre q ein Minimum, müsste insbesondere $q < \frac{q}{2}$ gelten. Aber diese Ungleichung ist äquivalent zu $2 < 1$ und damit falsch.

Also hat $\mathbb{Q}_+$ kein Minimum. Nichtdestotrotz hat $\mathbb{Q}_+$ untere Schranken, z.B. 0. Maximum und Minimum werden der Idee einer "optimalen" oberen/unteren Schranke also nicht gerecht. Besser ist der für das Folgende zentrale Begriff des Supremums und Infimums, den wir nun einführen.

Definition 2.22. Sei $A \subset K$ Teilmenge eines geordneten Körpers. Falls es eine kleinste obere (größte untere) Schranke von A gibt, so heißt diese Schranke *Supremum von* A (bzw. *Infimum von* A), und wird mit $\sup A$ bzw. $\inf A$ bezeichnet.

Da $\sup A$ das Minimum aller oberen Schranken von A ist, ist es eindeutig, falls es existiert. Genauso ist $\inf A$ das Maximum aller unteren Schranken von A und damit eindeutig, falls es existiert.

Beispiel 2.23. Wir behaupten, dass $I := \{x \in \mathbb{Q} : \; 0 \leq x < 1\}$ Supremum $\sup I = 1$ und Infimum $\inf I = 0$ hat. Weiterhin gilt $\min I = 0$, und I hat kein Maximum.
Beweis: Nach Definition von I ist klar, dass 0 eine untere und 1 eine obere Schranke ist. Da $0 \in I$, folgt $\min I = 0$.

Wir zeigen nun $\sup I = 1$ und nehmen an, dass es eine noch kleinere obere Schranke $g \in \mathbb{Q}$ von I gibt, also $g < 1$ und $g \geq x$ für alle $x \in I$. Dann muss $g \geq 0$ gelten, und nach der Ungleichung (2.32) vom arithmetischen Mittel

$$0 \leq g < \frac{g+1}{2} < 1. \tag{2.38}$$

Dies zeigt, dass $\frac{g+1}{2}$ ein Element von I ist, wegen $g < \frac{g+1}{2}$ kann g dann keine obere Schranke von I sein. Also ist 1 die kleinste obere Schranke, d.h. $1 = \sup I$.

Das Argument für $0 = \inf I$ ist analog (Übung). $\square$
Wenn in diesem Beispiel I an den Endpunkten 0 und 1 modifiziert wird, z.B. statt I

die Mengen $\tilde{I} := \{x \in \mathbb{Q} : 0 < x < 1\}$ oder $\hat{I} := \{x \in \mathbb{Q} : 0 < x \leq 1\}$ betrachtet werden, so ändern sich Supremum und Infimum (im Gegensatz zu Maximum und Minimum) nicht.

Dieses Beispiel lehrt uns, dass eine Menge ein Supremum besitzen kann, ohne ein Maximum zu besitzen (analog für Infimum/Minimum). *Falls* eine Menge $A \subset K$ aber ein Maximum (Minimum) besitzt muss das Supremum (Infimum) notwendigerweise gleich sein.

Lemma 2.24. *Sei $A \subset K$ Teilmenge eines geordneten Körpers K. Falls A ein Maximum (Minimum) hat, so hat A auch ein Supremum (Infimum), und es gilt* $\sup A = \max A$ *(bzw.* $\inf A = \min A$*).*

Beweis. Das Maximum $\max A$ ist eine obere Schranke von A. Falls s eine obere Schranke von A ist, so muss $s \geq \max A$ gelten, da $\max A \in A$. Also ist $\max A$ die kleinste obere Schranke von A, d.h. $\sup A = \max A$. □

Führen Sie den Beweis des Lemmas für Infimum/Minimum.

Um zu zeigen, dass eine Zahl s das Supremum einer Teilmenge $A \subset K$ ist, müssen Sie zeigen:

- s ist eine obere Schranke von A, und
- ist s' eine beliebige obere Schranke von A, so gilt $s' \geq s$.

Alternativ können Sie zeigen:

- s ist eine obere Schranke von A, und
- ist $x < s$, so ist x keine obere Schranke von A, d.h. es gibt $a \in A$ mit $a > x$.

Die Formulierungen für Infima sind analog.

Wir verabreden noch, für die leere Menge

$$\sup \emptyset = -\infty, \qquad \inf \emptyset = +\infty \tag{2.39}$$

zu setzen. Dies ist sinnvoll, da *jedes* $x \in K$ eine obere und untere Schranke von $\emptyset$ ist.

2.5 Das Vollständigkeitsaxiom und erste Konsequenzen

Das Vollständigkeitsaxiom ist das letzte Axiom, das wir zu den Körper- und Ordnungseigenschaften hinzufügen müssen, um $\mathbb{R}$ zu charakterisieren. Es wird mit Hilfe von Suprema formuliert werden. Wir beginnen mit einem sehr instruktiven Beispiel.

Beispiel 2.25. Die Menge $A := \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\} \subset \mathbb{Q}$ ist von oben beschränkt, hat aber kein Supremum in $\mathbb{Q}$.
Beweis: Wir behaupten, dass $\frac{3}{2}$ eine obere Schranke von A ist, d.h. $x^2 \leq 2 \Rightarrow x \leq \frac{3}{2}$. Sei $x \in \mathbb{Q}$, $x > \frac{3}{2}$. Dann gilt $x^2 > \frac{9}{4} = 2 + \frac{1}{4} > 2$ (hier haben wir Beispiel 2.16 a) benutzt), also $x^2 > 2$ und damit $x \notin A$. Das zeigt $x^2 \leq 2 \Rightarrow x \leq \frac{3}{2}$.

Wir zeigen jetzt, dass A kein Supremum in $\mathbb{Q}$ besitzt und argumentieren per Widerspruch: Angenommen, $s \in \mathbb{Q}$ sei das Supremum von A. Dann gilt $s \geq 1$ (da $1 \in A$), und es gilt genau eine der drei Aussagen: i) $s^2 < 2$, ii) $s^2 > 2$, und iii) $s^2 = 2$.

Um diese Fälle zu untersuchen, bemerken wir zunächst, dass

$$x \in \mathbb{Q}, \qquad 0 < x < s \Rightarrow x \in A. \tag{2.40}$$

In der Tat: Wegen $x < s = \sup A$ ist x keine obere Schranke von A, d.h. es gibt $a \in A$ (also $a^2 \leq 2$) mit $a > x$, und dann $x^2 < a^2 \leq 2$, d.h. $x \in A$.

Wir definieren nun

$$x := \frac{2s+2}{s+2} \in \mathbb{Q}. \tag{2.41}$$

Man prüft leicht nach, dass

$$x = s - \frac{s^2-2}{s+2}, \tag{2.42}$$

$$x^2 = 2 + \frac{2(s^2-2)}{(s+2)^2}. \tag{2.43}$$

Nehmen wir nun Fall i) an, also $s^2 < 2$. Dann gilt $x > s$ wegen (2.42), also $x \notin A$, aber $x^2 < 2$ wegen (2.43), ein Widerspruch. In Fall ii) ist hingegen $s^2 > 2$, also $x < s$ wegen (2.42) und $x > 0$ wegen (2.41), also $x \in A$. Aber aufgrund von (2.43) gilt $x^2 > 2$, dh $x \notin A$, ein Widerspruch.

Bleibt Fall iii), $s^2 = 2$. Diesen Fall schließen wir mit Hilfe des bekannten Beweises, dass es keine rationale Zahl mit Quadrat 2 gibt, aus. Angenommen, $s = \frac{p}{q}$ sei eine solche Zahl, wobei Zähler und Nenner vollständig gekürzt sind. Insbesondere dürfen wir annehmen, dass p und q nicht beide gerade sind.

Dann $s^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2$. Also ist p gerade, $p = 2k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Dann folgt $2q^2 = p^2 = 4k^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$, also ist auch q gerade; ein Widerspruch.

Alle Fälle führen auf Widersprüche, also existiert das Supremum s nicht. $\square$

In den *reellen* Zahlen hat A ein Supremum, nämlich die reelle (aber nicht rationale) Zahl $\sqrt{2}$. Wir können uns das Ergebnis dieses Beispiels deshalb so vorstellen, dass die rationalen Zahlen bei $\sqrt{2}$ eine "Lücke" haben. Die reellen Zahlen sind hingegen so definiert, dass diese Lücke (und viele andere) nicht existiert. Wir werden zur Charakterisierung der reellen Zahlen deshalb fordern, dass jede nicht leere nach oben beschränkte Teilmenge ein Supremum besitzt.

Definition 2.26 (Vollständigkeitsaxiom, Supremumseigenschaft). Ein geordneter Körper K heißt *ordnungsvollständig* oder *vollständig geordnet*, falls jede nicht leere nach oben beschränkte Teilmenge $A \subset K$ ein Supremum $\sup A \in K$ besitzt.

Das Vollständigkeitsaxiom ist über das Supremum definiert, aber wir hätten genausogut das Infimum nehmen können:

Zeigen Sie, dass in einem vollständig geordneten Körper K gilt: Ist $A \subset K$ eine nicht leere von unten beschränkte Menge, so existiert $\inf A \in K$.
Tipp: Multiplikation mit -1.

Wir werden später diskutieren, dass es "bis auf Isomorphie" nur einen einzigen vollständig geordneten Körper gibt. Dies ist der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. In den folgenden Betrachtungen können Sie also stets "vollständig geordneter Körper" durch $\mathbb{R}$ ersetzen.

Wir leiten nun einige Eigenschaften von vollständig geordneten Körpern ab.

Satz 2.27 (Satz von Archimedes). *Sei K ein vollständig geordneter Körper, und $x, y \in K$ mit $y > 0$. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $ny > x$.*

Beweis. Widerspruchsbeweis: Angenommen, die Aussage wäre falsch. Dann gilt $ny \leq x \Leftrightarrow n \leq xy^{-1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, d.h. xy^{-1} ist eine obere Schranke von $\mathbb{N} \subset K$. Da $\mathbb{N}$ nicht leer und K vollständig ist, hat $\mathbb{N}$ ein Supremum $s := \sup \mathbb{N}$. Da dies die kleinste obere Schranke ist, ist $s - 1$ keine obere Schranke, d.h. es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit $n > s - 1$. Aber das ist äquivalent zu $n + 1 > s$. Da $n + 1 \in \mathbb{N}$, ist dies ein Widerspruch dazu, dass s eine obere Schranke von $\mathbb{N}$ ist. □

Dieser Satz besagt insbesondere, dass $\mathbb{N}$ (aufgefasst als Teilmenge eines vollständig geordneten Körpers K) keine obere Schranke hat. Das folgende Korollar dieses Satzes wird in der Analysis sehr oft benutzt.

Korollar 2.28. *Sei $x \geq 0$ ein nicht negatives Element eines vollständig geordneten Körpers K, so dass $x < \varepsilon$ für alle $\varepsilon \in K_+$ gilt. Dann $x = 0$.*

Beweis. Widerspruchsbeweis: Angenommen, $x > 0$. Dann existiert $\frac{1}{x} = x^{-1}$, und wir haben $0 < x < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < \frac{1}{x}$ für alle $\varepsilon > 0$, insbesondere also für $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ergibt sich $\frac{1}{x} > \frac{1}{n^{-1}} = n$. Aber $\mathbb{N}$ hat keine obere Schranke, Widerspruch. □

Eine weitere interessante Konsequenz des Vollständigkeitsaxioms ist, dass die rationalen Zahlen in K "dicht" liegen. Dazu erinnern wir uns zunächst, dass jeder geordnete Körper $\mathbb{Q}$ vermöge der Einbettungsabbildung ι (2.33) enthält.

Zuerst behandeln wir ein kleines Hilfslemma.

Lemma 2.29. *Sei K ein vollständig geordneter Körper und $\emptyset \neq A \subset \mathbb{Z} \subset K$ von oben (bzw. von unten) beschränkt. Dann existiert $\max A$ (bzw. $\min A$).*

Beweis. Da A nicht leer und nach oben beschränkt ist, existiert $s := \sup A$ nach Vollständigkeitsaxiom. Dann ist $s - 1$ keine obere Schranke; es gibt also ein $a \in A$ mit $a > s - 1 \Leftrightarrow s < a + 1$. Für beliebiges $a' \in A$ gilt also $a' \leq s < a + 1$. Da a, a' ganze Zahlen sind, folgt $a' \leq a$. Da $a' \in A$ beliebig war, heißt das, dass a eine obere Schranke von A ist, also $a \geq s \geq a'$ und damit $a \geq a'$. Also gilt $a = s = a'$ und $s = \max A$. □

Lemma 2.30. *Sei K ein vollständiger geordneter Körper und $x < y$. Dann gibt es eine rationale Zahl*[a] *a mit $x < a < y$.*

[a]Genaugenommen: Es gibt $a \in \mathbb{Q}$ mit $x < \iota(a) < y$.

Beweis. Wegen $y - x > 0$ gibt es nach Satz 2.27 ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$n > \frac{1}{y-x} > 0 \Rightarrow ny > nx + 1 \Rightarrow y - \frac{1}{n} > x. \tag{2.44}$$

Wir betrachten nun die Menge $S_n := \{z \in \mathbb{Z} : z < ny\}$. Diese Menge ist nach oben beschränkt (denn ny ist eine obere Schranke) und nicht leer (denn nach dem Satz von Archimedes gibt es ein $z \in \mathbb{N}$ mit $z > -ny \Rightarrow -z < ny \Rightarrow -z \in S_n$). Nach dem Hilfslemma ha S_n also ein Maximum $m = \max S_n$.

Wir betrachten nun die rationale Zahl $a := \frac{m}{n}$ und behaupten $x < a < y$. Wegen $m = \max S_n \in S_n$ gilt $m < ny$, also $a < y$. Da $m = \max S_n$ das Maximum von S_n ist, haben wir $m + 1 \notin S_n$, also $m + 1 \geq ny$. Das ergibt die zweite behauptete Ungleichung

$$a = \frac{m}{n} \geq y - \frac{1}{n} > x. \tag{2.45}$$

□

Sie können sich die Aussage dieses Lemmas so vorstellen, dass sie zwei reelle Zahlen $x < y$ betrachten, die beliebig eng zusammenliegen. Trotzdem gibt es immer rationale Zahlen zwischen x und y. Anschaulich legt das nahe, dass reelle Zahlen beliebig gut durch rationale Zahlen approximiert werden können.

Beispiel 2.25 basierte auf der Tatsache, dass nicht jede (positive) rationale Zahl eine rationale Wurzel hat. Wir zeigen nun, dass in einem vollständig geordneten Körper n-te Wurzeln für alle nicht negativen Elemente existieren. Dies ist ein weiteres Indiz dafür, dass vollständig angeordnete Körper eng mit reellen Zahlen verwandt sind.

Satz 2.31. *Sei K ein vollständig geordneter Körper und $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es zu jedem nicht negativen $x \in K_+ \cup \{0\}$ (also $x \geq 0$) ein eindeutiges nicht negatives $y \geq 0$ mit $y^n = x$.*

Beweis. Wir beweisen zuerst die *Existenz* von y. Im Falle $x = 0$ erfüllt $y = 0$ die Bedingung $y^n = x$; wir dürfen also $x \neq 0$ annehmen. Dann ist die Menge (wie in Beispiel 2.25)

$$A := \{a \in K : a \geq 0, \ a^n \leq x\} \tag{2.46}$$

nicht leer (da $0 \in A$). Wir behaupten, dass $m := \max\{1, x\}$ eine obere Schranke für A ist. In der Tat: Würde $a \in A$ die Ungleichung $a > m$ erfüllen, so hätten wir $a > 1$ und $a > x$. Durch Multiplikation dieser Ungleichungen (siehe Beispiel 2.16) impliziert dies $a^2 > x$ und induktiv $a^n > x$, also den Widerspruch $a \notin A$.

Also ist A nicht leer und von oben beschränkt, hat also ein Supremum $s = \sup A$. Wir behaupten nun $s^n = x$, d.h. das Supremum s ist das gesuchte y.

Für diesen Beweis betrachten wir zunächst ein beliebiges ε mit $0 < \varepsilon < 1$. Dann gilt $\varepsilon^j \leq \varepsilon$

für alle $j \geq 1$ (multiplizieren Sie $\varepsilon < 1$ mit $\varepsilon > 0$) und damit

$$\begin{aligned}
(s+\varepsilon)^n &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} s^{n-j}\varepsilon^j = s^n + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} s^{n-j}\varepsilon^j \\
&\leq s^n + \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} s^{n-j} \right)}_{=:C} \cdot \varepsilon = s^n + C\varepsilon, \\
(s-\varepsilon)^n &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} s^{n-j}(-1)^j\varepsilon^j = s^n + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} s^{n-j}(-1)^j\varepsilon^j \\
&\geq s^n - \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} s^{n-j}\varepsilon^j \geq s^n - \left(\sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} s^{n-j} \right) \varepsilon = s^n - C\varepsilon.
\end{aligned}$$

Nach dieser Vorarbeit machen wir uns an den Beweis von $s^n = x$. Da wir in einem geordneten Körper arbeiten, gilt genau eine der drei Aussagen $s^n < x$, $s^n > x$, $s^n = x$, d.h. wir müssen die ersten beiden Möglichkeiten ausschließen.

Falls $s^n < x$, so wählen wir $0 < \varepsilon < \min\{1, \frac{x-s^n}{C}\}$. Das ist immer möglich, da $\frac{x-s^n}{C} > 0$, wir könnten z.B. $\varepsilon := \frac{1}{2}\min\{1, \frac{x-s^n}{C}\}$ wählen. Aber auf die genaue Wahl von ε kommt es nicht an, es ist nur wichtig, dass $0 < \varepsilon < 1$ und $\varepsilon < \frac{x-s^n}{C}$ gilt. Aus der oberen Abschätzung erhalten wir dann

$$(s+\varepsilon)^n \leq s^n + C\varepsilon < x.$$

Wegen $s + \varepsilon > 0$ folgt $s + \varepsilon \in A$, im Widerspruch dazu, dass s eine obere Schranke von A ist.

Falls $s^n > x$, so wählen wir $0 < \varepsilon < \min\{1, \frac{s^n-x}{C}, s\}$ (also $-\varepsilon > \frac{x-s^n}{C}$) und erhalten aus der unteren Abschätzung

$$(s-\varepsilon)^n \geq s^n - C\varepsilon > x.$$

An der Definition von A sehen wir nun, dass $(s-\varepsilon)^n > x \geq a^n$ für alle $a \in A$ gilt. Das impliziert $s - \varepsilon > a$ (denn $0 < s - \varepsilon \leq a \Rightarrow (s-\varepsilon)^n \leq a^n$), also ist auch $s - \varepsilon$ eine obere Schranke von A. Aber $s - \varepsilon < s$, und s ist die kleinste obere Schranke von A, also erhalten wir auch hier einen Widerspruch.

Das zeigt $s^n = x$.

Nun kommen wir zur *Eindeutigkeit*: Seien $y_1, y_2 \geq 0$ mit $y_1^n = x = y_2^n$. Falls $y_1 < y_2$, so folgt $y_1^n < y_2^n$, und falls $y_1 > y_2$, so folgt $y_1^n > y_2^n$. Also muss $y_1 = y_2$ gelten. □

Wir können nun eine Abbildung "n-te Wurzel" definieren als

$$(\,\cdot\,)^{1/n} : K_+ \cup \{0\} \to K_+ \cup \{0\}, \qquad x \mapsto x^{1/n}, \tag{2.47}$$

die per Definition x^n, $x \geq 0$, auf x abbildet. Wir schreiben auch

$$\sqrt[n]{x} := x^{1/n}, \qquad \sqrt{x} := \sqrt[2]{x} = x^{1/2}. \tag{2.48}$$

Nach unseren obigen Überlegungen ist die n-te Wurzel bijektiv. Beachten Sie, dass wir nur Wurzeln aus nicht negativen Zahlen definiert haben, und dass die Wurzel einer nicht negativen Zahl per Definition wieder eine nicht negative Zahl ist.

Geben Sie einen detaillierten Beweis der Bijektivität der n-ten Wurzel.

Definition 2.32. Sei K ein vollständig geordneter Körper und $p := \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ (mit $n \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{N}$). Die *$p$-te Potenz* ist die Abbildung

$$(\,\cdot\,)^p : K_+ \cup \{0\} \to K_+ \cup \{0\}, \tag{2.49}$$

$$x \mapsto x^p := (x^n)^{1/m}. \tag{2.50}$$

Für $x > 0$ definieren wir auch negative Potenzen (mit $p \in \mathbb{Q}_+$) als

$$x^{-p} := (x^{-1})^p. \tag{2.51}$$

Es gilt also $x^{\frac{n}{m}} := (x^n)^{1/m} = (x^{1/m})^n$, der Beweis der zweiten Gleichheit ist eine Übungsaufgabe. Beachten Sie, dass diese Definition $0^0 = 1$ und $0^p = 0$ für $p > 0$ impliziert, während 0^p für $p < 0$ nicht definiert ist.

Es ergeben sich die gewohnten Potenzrechenregeln.

Satz 2.33. *Seien $x, y > 0$ positive Elemente eines vollständig geordneten Körpers und $p, q \in \mathbb{Q}$. Dann gilt*

$$(xy)^p = x^p y^p, \tag{2.52}$$

$$x^p x^q = x^{p+q}, \tag{2.53}$$

$$(x^p)^q = x^{pq}. \tag{2.54}$$

Der Beweis ist als Übungsaufgabe überlassen.

Auch wenn n-Wurzeln nun zweifelsfrei definiert sind, ist es nicht klar, wie z.B. $\sqrt{2}$ annäherungsweise bestimmt werden kann, z.B. in Dezimaldarstellung. Wir werden auf diesen Punkt bei unserer späteren Diskussion von Folgen zurückkommen.

Eine andere Frage, die die Potenzfunktion $x \mapsto x^p$ aufwirft, ist die Ausdehnung auf *reelle* (anstatt nur rationale) Potenzen p. Diese Frage werden wir später mit Hilfe der Exponentialfunktion beantworten.

2.6 Die reellen Zahlen

Im vorherigen Abschnitt haben wir gesehen, dass vollständig geordnete Körper viele Eigenschaften haben, die wir von reellen Zahlen erwarten - z.B. enthalten sie die rationalen Zahlen, und zu jedem positiven Element existiert eine Wurzel. Wir definieren deshalb die reellen Zahlen wie folgt.

Definition 2.34. Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind ein vollständig geordneter Körper.

Ganz analog zu unserer Definition der natürlichen Zahlen stellen sich bei dieser Definition zwei Fragen, nämlich nach Existenz und Eindeutigkeit. Die Existenzfrage wird später geklärt werden, wenn wir $\mathbb{R}$ als Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ definieren und nachweisen, dass diese Konstruktion tatsächlich einen vollständig geordneten Körper liefert.

Die Eindeutigkeit gilt bis auf Isomorphie, d.h. quasi bis auf das Umbenennen der Elemente von $\mathbb{R}$.

> Um die Eindeutigkeit genau zu formulieren, definieren wir einen *Isomorphismus von geordneten Körpern* K und L als eine bijektive Abbildung $\varphi : K \to L$, die die Körperoperationen erhält, also $(x, y \in K)$
>
> $$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y), \qquad \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \tag{2.55}$$
>
> und Positivität erhält, also
>
> $$\varphi(K_+) = L_+. \tag{2.56}$$
>
> Ein solcher Isomorphismus bildet automatisch 1_K auf 1_L und 0_K auf 0_L ab und erhält negative und inverse, d.h. $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ und $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$, $x \neq 0$.
>
> Liegt ein solcher Isomorphismus $\varphi : K \to L$ vor, kann zwischen K und L eigentlich nicht sinnvoll unterschieden werden. Wir nennen K und L dann *isomorph*.
>
> Der Eindeutigkeitssatz zu den reellen Zahlen besagt nun, dass zwei vollständig geordnete Körper immer isomorph sind. Es gibt also "bis auf Isomorphie" höchstens einen vollständig geordneten Körper, nämlich $\mathbb{R}$.
>
> Wir werden den Eindeutigkeitssatz hier nicht beweisen. Ein Beweis findete sich z.B. in [Art83].

Sie sollten sich die reellen Zahlen so vorstellen, dass es eine Menge $\mathbb{R}$ mit Operationen $+$ und $\cdot$ und einer Teilmenge $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ ist, so dass a) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ein Körper ist, b) $(\mathbb{R}, +, \cdot, \mathbb{R}_+)$ ein geordneter Körper ist, und c) das Vollständigkeitsaxiom gilt. Alle weiteren Eigenschaften der reellen Zahlen und der Analysis ergeben sich aus diesen Axiomen.

Der Deutlichkeit halber halten wir noch fest, dass die rationalen Zahlen eine echte Teilmenge der reellen Zahlen bilden, also $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$. Die Elemente des Komplements $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ heißen *irrational*, z.B. $\sqrt{2} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

2.7 Die komplexen Zahlen

Wir schließen das Kapitel mit einer sehr kurzen Diskussion der komplexen Zahlen ab. Bisher haben wir schon einige Zahlbereiche kennengelernt, nämlich

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}_0 \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}. \tag{2.57}$$

Man kann sich auf den Standpunkt stellen, dass die Vergrößerungen der Zahlbereiche jeweils dadurch motiviert sind, gewisse Gleichungen lösen zu können. Zum Beispiel hat $1 + x = 0$ keine Lösung in $\mathbb{N}$, aber in $\mathbb{Z}$ (negative Zahlen). Die Gleichung $2x = 1$ hat keine Lösung in $\mathbb{Z}$, aber in $\mathbb{Q}$ (Brüche). Die Gleichung $x^2 = 2$ hat keine Lösung in $\mathbb{Q}$, aber in $\mathbb{R}$ (Wurzeln).

Die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat aber auch in $\mathbb{R}$ keine Lösung, da $x^2 + 1 \geq 1 > 0$. Wir werden nun einen Körper $\mathbb{C} \supsetneq \mathbb{R}$ konstruieren, in dem auch diese Gleichung lösbar ist.

Definition 2.35. Die *komplexen Zahlen* $\mathbb{C}$ sind die Menge $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ (geordnete Paare von reellen Zahlen) mit den Operationen

$$(x,y) + (x',y') := (x+x', y+y'), \tag{2.58}$$
$$(x,y)\cdot(x',y') := (xx'-yy', xy'+x'y). \tag{2.59}$$

Es ist eine gute Übung, zu prüfen, dass die so definierten komplexen Zahlen alle Körperaxiome erfüllen. Wir erwähnen hier nur, dass die Null in $\mathbb{C}$ das Paar $(0,0)$ ist, und die Eins in $\mathbb{C}$ das Paar $(1,0)$. Ein weiteres interessantes Element von $\mathbb{C}$ ist die sogenannte *imaginäre Einheit*

$$i := (0,1). \tag{2.60}$$

Aufgrund der Definition der Multiplikation in $\mathbb{C}$ gilt $i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$, d.h. $z = i$ ist eine Lösung der Gleichung $z^2+1=0$. Offenbar bilden die Paare $(x,0)$, $x\in\mathbb{R}$, eine Kopie von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$, denn $(x,0)(x',0) = (xx',0)$ und $(x,0)+(x',0) = (x+x',0)$.

Identifizieren wir eine reelle Zahl x mit dem Paar $(x,0)\in\mathbb{C}$, so können wir jede komplexe Zahl $z=(x,y)$ eindeutig als $z = x\cdot 1 + y\cdot i =: x+iy$ mit $x,y\in\mathbb{R}$ schreiben. Dies ist die übliche Darstellung von komplexen Zahlen.

Geometrisch können Sie sich $\mathbb{C}$ also als den zweidimensionalen reellen Raum $\mathbb{R}^2$ vorstellen, in dem sich die reellen Zahlen als die horizontale Gerade ("x-Achse", auch "reelle Achse") und die rein imaginären Zahlen, d.h. die Zahlen der Form iy, $y\in\mathbb{R}$, als die vertikale Gerade ("y-Achse", auch "imaginäre Achse") wiederfinden. Zwei komplexe Zahlen $z = x+iy$ und $z' = x'+iy'$ (mit $x,x',y,y'\in\mathbb{R}$) sind genau dann gleich, wenn $x = x'$ und $y = y'$.

Allerdings ist $\mathbb{C}$ ein Körper, hat also im Gegensatz zum Vektorraum $\mathbb{R}^2$ eine Multiplikation $\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$. Eine geometrische Interpretation der Multiplikation werden wir erst später entwickeln.

Definition 2.36. Wir definieren die folgenden Abbildungen:

a) Die *komplexe Konjugation*: $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $z = x+iy \mapsto \bar{z} := x-iy$. Hier heißt $\bar{z}$ die zu z komplex konjugierte Zahl.

b) Der *Betrag*: $\mathbb{C}\to\mathbb{R}_+\cup\{0\}$, $z = x+iy\mapsto |z| := \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$.

c) Der *Realteil*: $\mathrm{Re}\,:\mathbb{C}\to\mathbb{R}$, $z = x+iy\mapsto x = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$.

d) Der *Imaginärteil*: $\mathrm{Im}\,:\mathbb{C}\to\mathbb{R}$, $z = x+iy\mapsto y = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$.

Geometrisch entspricht die komplexe Konjugation der Spiegelung an der reellen Achse. Eine komplexe Zahl z ist reell genau dann wenn $\bar{z} = z$, und z ist rein imaginär genau dann wenn $\bar{z} = -z$. Der Betrag $|z|$ einer komplexen Zahl ist eine nicht negative reelle Zahl, die geometrisch den Abstand von z zum Ursprung $0\in\mathbb{C}$ darstellt. Beachten Sie, dass Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl *reelle* Zahlen sind.

Da die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ eine Teilmenge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ sind, haben wir jetzt auch insbesondere den Betrag von reellen Zahlen definiert:

$$|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}. \tag{2.61}$$

Beispiel 2.37.

a) $\bar{i} = -i = i^{-1}$,

b) $|i| = 1$,

c) $|1 + i| = \sqrt{2}$,

d) $(1 + i)(2 - i) = 3 + i$.

e) $i^4 = 1$.

Lemma 2.38. *Sei $z, w \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen.*

a) Die komplexe Konjugation erhält Summen und Produkte, nämlich

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \qquad \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}. \tag{2.62}$$

b) Das Inverse einer von Null verschiedenen Zahl $z \in \mathbb{C}^\times$ ist

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}. \tag{2.63}$$

Beweis. a) wird als leichte Übung überlassen.

b) Da $|z| \neq 0$ für $z \neq 0$ (s.u.), ist $\frac{\bar{z}}{|z|^2}$ wohldefiniert. Die Gleichung folgt aus (mit $z = x + iy$)

$$z^{-1} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

□

Der Betrag (für komplexe und reelle Zahlen) spielt in der Analysis eine wichtige Rolle.

Satz 2.39. *Der Betrag hat die folgenden Eigenschaften:*

a) $|z| \geq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$, und $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

b) $\mathrm{Re}\,(z) \leq |\mathrm{Re}\,(z)| \leq |z|$ und $\mathrm{Im}\,(z) \leq |\mathrm{Im}\,(z)| \leq |z|$ gilt für alle $z \in \mathbb{C}$.

c) Es gilt die Dreiecksungleichung *($z, w \in \mathbb{C}$ beliebig)*

$$|z + w| \leq |z| + |w|, \tag{2.64}$$

d) Es gilt die umgekehrte Dreiecksungleichung *($z, w \in \mathbb{C}$ beliebig)*

$$\Big| |z| - |w| \Big| \leq |z + w|. \tag{2.65}$$

Beweis. a) $|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$ gilt, da $x^2 + y^2 \geq 0$. Weiterhin verschwindet $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ genau dann, wenn $x = y = 0$, d.h. für $z = 0$.

b) Wir haben für $z = x + iy$

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\,(z) &= x \le |x| = |\mathrm{Re}\,(z)| \le \sqrt{x^2+y^2} = |z|, \\ \mathrm{Im}\,(z) &= y \le |y| = |\mathrm{Im}\,(z)| \le \sqrt{x^2+y^2} = |z|. \end{aligned}$$

c) Wir schätzen ab gemäß

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z+w}) = (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) \\ &= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2\mathrm{Re}\,(z\bar{w}) \\ &\le |z|^2 + |w|^2 + 2|\mathrm{Re}\,(z\bar{w})| \\ &\le |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| \\ &= (|z|+|w|)^2, \end{aligned}$$

haben also $|z+w|^2 \le (|z|+|w|)^2$ und damit $|z+w| \le |z| + |w|$.

d) Mit c) gilt $|z| = |z+w-w| \le |z+w| + |w|$, also $|z| - |w| \le |z+w|$. Durch Vertauschung von z und w folgt auch $-|z| + |w| \le |z+w|$, also die Behauptung. $\square$

Die Dreiecksungleichung hat ihren Namen aufgrund der geometrischen Anschauung von $\mathbb{C}$ als Ebene. Beachten Sie, das wegen $|-z| = |z|$ auch gilt: $|z-w| \le |z| + |w|$. Geometrisch bilden die drei Zahlen $0, z, w$ die Ecken eines Dreiecks in der Ebene, und $|z-w|$ ist der Euklidische Abstand zwischen z und w. Anschaulich gesprochen besagt die Dreiecksungleichung, dass der direkte gerade Weg von z nach w höchstens so lang ist wie der Umweg von z nach w über 0.

Die Eigenschaften des Betrags gelten für alle komplexen Zahlen, insbesondere auch für die reellen Zahlen.

Der Körper $\mathbb{C}$ kann *nicht* geordnet werden. Das heißt, dass Ungleichungen zwischen komplexen Zahlen wie z.B. $i < 5 + i$ keinen Sinn haben! Ungleichungen zwischen Beträgen von komplexen Zahlen (z.B. $1 = |i| < |5+i| = \sqrt{26}$) haben aber durchaus Sinn, da die Beträge reelle Zahlen sind, also Elemente des geordneten Körpers $\mathbb{R}$.

Es gibt noch sehr viel mehr zu komplexen Zahlen zu sagen, auch in puncto auf Anwendungen. Wir werden zu $\mathbb{C}$ zurückkehren, wenn wir die dafür notwendigen Hilfsmittel – insbesondere die Exponentialfunktion – entwickelt haben.

3 Folgen und Reihen

Nachdem wir die Sprache der Mathematik und die grundlegenden Eigenschaften der reellen (und komplexen) Zahlen kennengelernt haben, wenden wir uns mit Folgen und Reihen einem Kernthema der Analysis zu. Mit Hilfe von Folgen werden wir auch eine Konstruktion der reellen Zahlen erhalten.

3.1 Folgen. Konvergenz und Grenzwerte.

Definition 3.1. Eine *reelle Folge* (oder *Folge reeller Zahlen*) ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Eine *komplexe Folge* (oder *Folge komplexer Zahlen*) ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$.

Für Folgen schreibt man oft a_n statt $a(n)$ und nennt diese Zahl das *n-te Folgeglied*. Statt $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ schreibt man auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(a_n)_{n\geq 1}$. Sie sollten sich eine Folge als eine unendliche geordnete Abfolge $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ von Zahlen vorstellen. Allgemeiner können wir für eine beliebige Menge X Folgen $a : \mathbb{N} \to X$ betrachten; in diesem Fall sind die Folgenglieder Elemente von X.

Beispiel 3.2. Einige Beispiele von Folgen:

a) Konstante Folge: $a_n = a$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. $(a, a, a, a, \dots)$.

b) Harmonische Folge: $a_n = \frac{1}{n}$ ist die Folge $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$.

c) Geometrische Folge: $a_n = q^n$ (mit festem $q \in \mathbb{C}$) ist die Folge $(q, q^2, q^3, q^4, \dots)$. Zum Beispiel für $q = -1$ ist dies die alternierende Folge $(-1, 1, -1, 1, \dots)$, für $q = i$ hingegen eine Folge mit Periode vier: $(i, -1, -i, 1, i, \dots)$.

d) $a_n = \frac{n^n}{n!}$, also $(1, 2, \frac{9}{2}, \frac{32}{3}, \dots)$

e) Folgen können auch rekursiv definiert sein, z.B. durch $r_1 := 1$ und $r_{n+1} := r_n + n + 1$. Dies gibt die Folge $r_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$.

f) Eine berühmte rekursiv definierte Folge ist die *Fibonacci-Folge:* $f_1 := 1$, $f_2 := 1$, $f_{n+2} := f_n + f_{n+1}$, also $(1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$.

Wir werden uns nun mit der *Konvergenz* von Folgen befassen. Dabei wollen wir die Idee formalisieren, dass sich die Folgeglieder a_n einem Grenzwert x mehr und mehr annähern, wenn n immer größer wird. Das soll heißen, dass der Abstand $|a_n - x|$ mit wachsendem n kleiner und kleiner wird. Die genaue Definition ist die folgende.

Definition 3.3. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle (oder komplexe) Folge. Dann heißt eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ (bzw. $x \in \mathbb{C}$) *Grenzwert* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|a_n - x| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq N. \tag{3.1}$$

Eine Folge heißt *konvergent*, wenn sie einen Grenzwert besitzt, ansonsten *divergent*.

Die Definition lautet mit Quantoren also

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)\, |a_n - x| < \varepsilon. \tag{3.2}$$

Ist diese Bedingung erfüllt, sagt man, dass a_n *gegen* x *konvergiert* und schreibt $\lim_{n\to\infty} a_n = x$ oder $a_n \to x$ für $n \to \infty$.

Beispiel 3.4.

a) Die harmonische Folge $a_n = \frac{1}{n}$ konvergiert gegen 0.
Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es nach dem Satz von Archimedes ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$, gilt dann

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \frac{1}{\varepsilon^{-1}} = \varepsilon.$$

Eine Folge mit Grenzwert Null nennt man auch *Nullfolge*.

b) Die konstante Folge $a_n = a$ konvergiert gegen a.
Beweis: Da in diesem Fall $|a_n - a| = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, können wir für beliebiges $\varepsilon > 0$ beliebiges $N \in \mathbb{N}$ wählen, es gilt dann stets $|a_n - a| < \varepsilon$ $\forall n \geq N$.

c) Die Folge $a_n = \frac{n}{n^2+1}$ konvergiert gegen Null.
Beweis: Wir haben $|a_n - 0| = \frac{1}{n+\frac{1}{n}} < \frac{1}{n}$. Wählen wir N also wie in Beispiel a) so, dass $N > \frac{1}{\varepsilon}$ für ein gegebenes $\varepsilon > 0$, so gilt für alle $n \geq N$ die Ungleichung $|a_n - 0| < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

d) Die Folge $a_n = \frac{4n^2+n}{2n^2+8}$ konvergiert gegen 2.
Beweis: Wir beginnen mit einer Abschätzung:

$$\left|\frac{4n^2+n}{2n^2+8} - 2\right| = \frac{|n-16|}{2n^2+8} \leq \frac{n+16}{2n^2+8} < \frac{n+16}{2n^2} < \frac{9}{n}. \tag{3.3}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann wählen wir $N \in \mathbb{N}$ so, dass $N > \frac{9}{\varepsilon}$ (möglich mit Satz von Archimedes), und es gilt für alle $n \geq N$

$$\left|\frac{4n^2+n}{2n^2+8} - 2\right| < \frac{9}{n} < \frac{9}{N} < \varepsilon.$$

An diesem Beweis sehen Sie, dass es bei Abschätzungen wie (3.3) einigen Spielraum gibt. Zum Beispiel hätten wir bei der letzten Ungleichung $\frac{n+16}{2n^2} < \frac{9}{n}$ auch $\frac{n+16}{2n^2} < \frac{900}{n}$ betrachten können – dies ist auch korrekt und führt ganz analog auf den Konvergenzbeweis. Hätten wir allerdings $\frac{n+16}{2n^2} < \frac{9}{n} \leq \frac{9n}{n} = 9$ abgeschätzt, so wäre das zwar korrekt, aber für den Konvergenzbeweis nicht hilfreich, da 9 nicht kleiner ist als ε für hinreichend kleines ε.

e) Die Folge $a_n = (-1)^n$ divergiert, d.h. diese Folge hat keinen Grenzwert.
Beweis: Wir zeigen, dass kein $x \in \mathbb{R}$ als Grenzwert der Folge in Frage kommt. Zuerst zeigen wir, dass kein $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \neq 1$ Grenzwert sein kann. Setze dazu

$\varepsilon := ||x| - 1| > 0$. Dann gilt mit der umgekehrten Dreiecksungleichung für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|(-1)^n - x| \geq \Big||(-1)^n| - |x|\Big| = \Big||x| - 1\Big| = \varepsilon.$$

Wäre x Grenzwert der Folge, hätten wir aber $|(-1)^n - x| < \varepsilon$. Also ist x nicht Grenzwert der Folge. Nun zeigen wir, dass $x = 1$ nicht Grenzwert ist, und wählen dazu $\varepsilon := 1$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|(-1)^{2n-1} - 1| = |-1 - 1| = 2 > \varepsilon,$$

also $|a_n - 1| > \varepsilon$ für alle ungeraden n. Aber die Definition von Konvergenz verlangt $|a_n - 1| < \varepsilon$ für *alle* n von einem geeigneten Wert N an. Also ist 1 nicht Grenzwert der Folge. Analog zeigt man, dass -1 ebenfalls nicht Grenzwert der Folge ist.

Lemma 3.5. *Eine Folge hat höchstens einen Grenzwert, d.h. der Grenzwert einer Folge ist eindeutig, falls er existiert.*

Beweis. Angenommen, x und y sind Grenzwerte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sei $\varepsilon > 0$ und wähle $N \in \mathbb{N}$ so, dass $|a_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|a_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N$. Für diese n gilt dann $|x - y| = |(a_n - x) - (a_n - y)| \leq |a_n - x| + |a_n - y| < \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $|x - y| = 0$ (siehe Korollar 2.28), also $x = y$ (Satz 2.39 a)). $\square$

Im nächsten Abschnitt werden wir verschiedene Techniken entwickeln, um zu entscheiden, ob eine Folge konvergiert oder nicht. Zunächst führen wir noch einige weitere Begriffe ein.

Definition 3.6. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *beschränkt*, falls das Bild $a(\mathbb{N})$ (als Teilmenge von $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$) beschränkt ist, d.h. falls es $C > 0$ gibt, so dass

$$|a_n| < C, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3.4}$$

Im Falle einer reellen Folge ist Beschränktheit äquivalent zur Existenz einer oberen und unteren Schranke für $a(\mathbb{N}) = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Im Falle einer komplexen Folge bedeutet Beschränktheit die Beschränktheit von $\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Lemma 3.7. *Konvergente Folgen sind beschränkt.*

Beweis. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert x, und sei $\varepsilon := 1$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - x| < 1$ für alle $n \geq N$. Mit umgekehrter Dreiecksungleichung folgt für $n \geq N$ also

$$1 > |a_n - x| \geq \Big||a_n| - |x|\Big| \geq |a_n| - |x|$$
$$\Rightarrow |a_n| \leq 1 + |x|.$$

Wir definieren nun $C := \max\{|a_1|, \ldots, |a_N|, 1 + |x|\}$, was als Maximum einer endlichen Menge existiert. Dann gilt $|a_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. die Folge ist beschränkt. $\square$

Am Beispiel der Folge $a_n = (-1)^n$ haben wir bereits eine beschränkte Folge kennengelernt, die nicht konvergiert. Die Umkehrung des obigen Lemmas ist also falsch.

Beispiel 3.8. Ein Beispiel für eine Anwendung von Lemma 3.7. Wir betrachten die Folge $a_n = n$ und behaupten, dass sie nicht konvergiert. Beweis: Würde $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren, so wäre sie beschränkt. Aber nach dem Satz von Archimedes ist $a(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$ nicht beschränkt, d.h. die Folge kann nicht konvergieren.

In diesem Beispiel wachsen die Folgeglieder a_n für hinreichend großes n über jede vorgegebene Schranke hinaus. Für eine solche Situation vereinbaren wir die folgende Sprechweise.

Definition 3.9. Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert gegen ±unendlich (oder: geht gegen ±unendlich), in Formeln $a_n \to \pm\infty$ oder $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$, falls es für jedes $C > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $a_n > C$ für alle $n \geq N$ (für Divergenz gegen $+\infty$), bzw. falls es für jedes $C > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $a_n < -C$ für alle $n \geq N$ (für Divergenz gegen $-\infty$).

Beispiel 3.10. Für $q \in \mathbb{C}$ betrachten wir die geometrische Folge $a_n := q^n$ und behaupten: Diese Folge divergiert für $|q| > 1$ und für $|q| = 1$, $q \neq 1$, und hat anderenfalls den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & |q| < 1 \\ 1 & q = 1 \end{cases}. \tag{3.5}$$

Beweis: Für $q = 1$ ist $q^n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. wir haben die konstante Folge 1 mit Grenzwert 1.

Für $|q| > 1$ verwenden wir die Bernoulli-Ungleichung (2.31):

$$|q^n| = |q|^n = (1 + (|q| - 1))^n \geq 1 + n(|q| - 1).$$

Wir sehen mit dem Satz von Archimedes, dass die Folge q^n nicht beschränkt ist, und genauer $|q^n| \to \infty$. Also kann q^n in diesem Fall nicht konvergieren.

Für $|q| < 1$ betrachten wir zunächst den Fall $q = 0$ gesondert: Hier haben wir wieder eine konstante Folge $q^n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also Grenzwert 0. Für $0 < |q| < 1$ können wir wieder Bernoulli verwenden:

$$|q^n|^{-1} = |q^{-1}|^n = (1 + (|q|^{-1} - 1))^n \geq 1 + n(|q|^{-1} - 1).$$

Gegeben $\varepsilon > 0$, finden wir $N \in \mathbb{N}$, so dass $1 + n(|q|^{-1} - 1) > \frac{1}{\varepsilon}$ für alle $n \geq N$. Dies impliziert durch Kehrwertbildung $|q^n| < \varepsilon$, also $q^n \to 0$.

Der letzte Fall ist $|q| = 1$, $q \neq 1$. Falls q reell ist, ist dies genau der Fall $q = -1$, aber für komplexes q gibt es viel mehr Möglichkeiten, z.B. $q = i$ oder $q = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$. Dies ist der komplizierteste Fall. Wir argumentieren per Widerspruch und nehmen an, dass q^n gegen x konvergiert. Für $\varepsilon := \frac{1}{2}|q - 1| > 0$ existiert dann ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$|q^n - x| < \frac{1}{2}|q-1|$ für alle $n \geq N$. Das ergibt

$$\begin{aligned} |q-1| &= |q^N||q-1| = |q^{N+1} - q^N| \\ &\leq |q^{N+1} - x| + |x - q^N| < \frac{1}{2}|q-1| + \frac{1}{2}|q-1| = |q-1|, \end{aligned}$$

also den Widerspruch $|q-1| < |q-1|$. Also existiert der Grenzwert x nicht, die Folge ist divergent.

Es ist mitunter recht umständlich, direkt auf Grundlage der Definition von Konvergenz zu argumentieren, dass eine gegebene Folge konvergiert. Leichter geht es oft mit Sätzen über konvergente Folgen, die wir nun herleiten wollen. Der folgende Satz ist oft nützlich.

Satz 3.11. *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (reelle oder komplexe) konvergente Folgen mit Grenzwerten $a_n \to a$, $b_n \to b$. Dann gilt:*

a) *$(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a + b$.*

b) *$(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a \cdot b$.*

c) *Für eine feste (reelle oder komplexe) Zahl λ konvergiert die Folge $(\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\lambda a_n \to \lambda a$.*

d) *Ist $b \neq 0$, so existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $b_n \neq 0$ für alle $n \geq N$, und $(\frac{a_n}{b_n})_{n\geq N}$ konvergiert gegen $\frac{a}{b}$.*

Beachten Sie, dass in jedem der Punkte a)–d) *zwei* Aussagen gemacht werden, nämlich i) Konvergenz der Folge (= Existenz eines Grenzwertes) und ii) Angabe des Grenzwerts.

Bevor wir den Beweis geben, zeigen wir an einigen Beispielen, wie nützlich dieser Satz ist.

Beispiel 3.12.

a) $a_n := \frac{1}{n} + 7$ konvergiert gegen 7.
Beweis: Wir haben schon gezeigt, dass $\frac{1}{n} \to 0$ und $7 \to 7$ (harmonische und konstante Folge). Also folgt mit Satz 3.11 a), dass auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist und Grenzwert $0 + 7 = 7$ hat.

b) $a_n := \frac{4}{n^2}$ konvergiert gegen 0.
Beweis: Wir haben schon gezeigt, dass $\frac{1}{n} \to 0$ und $4 \to 4$ (harmonische und konstante Folge). Also folgt mit Satz 3.11 b), dass auch $a_n = 4 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}$ als Produkt konvergenter Folgen konvergent ist, mit Grenzwert $4 \cdot 0 \cdot 0 = 0$.

c) $a_n := \frac{4n^2+7}{3n^2+2n+1}$ konvergiert gegen $\frac{4}{3}$.
Beweis: Hier können wir nicht sofort die Quotientenregel aus Satz 3.11 d) anwenden, da die Zähler- und Nennerfolgen $Z_n := 4n^2 + 7$ und $N_n := 3n^2 + 2n + 1$ nicht konvergieren. Wir formen deshalb zuerst um gemäß

$$a_n = \frac{4n^2 + 7}{3n^2 + 2n + 1} = \frac{4 + \frac{7}{n^2}}{3 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}.$$

In dieser Form erkennen wir, dass $Z_n' := 4+\frac{7}{n^2}$ gegen 4 und $N_n' := 3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}$ gegen 3 konvergiert (wie in den vorigen Beispielen). Also sind die Voraussetzungen von Satz 3.11 d) erfüllt, und wir erhalten $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{4}{3}$.

d) Allerdings lässt sich Satz 3.11 nicht auf beliebige Folgen anwenden; zum Beispiel $a_n = n^{1/n}$ lässt sich nicht leicht durch Summen und Produkte von bekannten konvergenten Folgen schreiben.

Nun kommen wir zum Beweis von Satz 3.11. Zuerst zwei Vorbemerkungen.

- Eine Folge x_n hat genau dann den Grenzwert x, falls es ein $C > 0$ gibt, so dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|x_n - x| < C\varepsilon$ für alle $n \geq N$. Diese Aussage unterscheidet sich von Definition 3.1 durch die Konstante[7] C. Man kann die Aussage mit C auf die Definition 3.1 (ohne C) zurückführen, indem man $\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{C}$ betrachtet (Übung).
- Bei Konvergenzbeweisen genügt es, kleine $\varepsilon > 0$ zu betrachten, d.h. $0 < \varepsilon < c$ mit einer gegebenen positiven Konstante $c > 0$. Denn wenn Sie $N \in \mathbb{N}$ finden, so dass $|x_n - x| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$, dann gilt diese Ungleichung erst recht für alle größeren ε.

Beweis. a) Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N_a \in \mathbb{N}$ so, dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_a$ (möglich, da $a_n \to a$) und $N_b \in \mathbb{N}$ so, dass $|b_n - b| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_b$ (möglich, da $b_n \to b$). Setze $N := \max\{N_a, N_b\}$. Dann gilt

$$|a_n + b_n - (a+b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < 2\varepsilon, \qquad n \geq N.$$

Nach der Vorbemerkung beendet das den Beweis von a) (mit Konstante $C = 2$ in diesem Fall).

b) Um Ihnen noch einmal zu zeigen, wie solche Beweise gefunden werden, geben wir für diesen Teil einen "nicht polierten" längeren Beweis mit ausführlichen Erklärungen. Es geht darum, zu zeigen, dass $|a_n b_n - ab|$ für $n \to \infty$ gegen 0 geht. Wir wissen bereits, dass $|a_n - a| \to 0$ und $|b_n - b| \to 0$, sollten den Term $|a_n b_n - ab|$ also so umschreiben, dass $|a_n - a|$ und $|b_n - b|$ auftreten. Dazu schätzen wir wie folgt ab:

$$|a_n b_n - ab| = |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)| \leq |a_n - a| \cdot |b_n| + |a| \cdot |b_n - b|.$$

Um zu zeigen, dass $|a_n b_n - ab|$ klein wird, genügt es natürlich, zu zeigen, dass die größere Zahl $|a_n - a| \cdot |b_n| + |a| \cdot |b_n - b|$ klein wird. Der zweite Summand, $|a| \cdot |b_n - b|$, sieht gut aus: $|b_n - b|$ wird beliebig klein für $n \to \infty$, und $|a|$ ist eine feste von n unabhängige Zahl. Der erste Summand, $|a_n - a| \cdot |b_n|$, erscheint zunächst komplizierter: $|a_n - a|$ wird zwar beliebig klein für $n \to \infty$, aber $|b_n|$ hängt von n ab, könnte also vielleicht für $n \to \infty$ wachsen und damit den Abfall von $|a_n - a|$ kompensieren? (Man denke an $\frac{1}{n} \to 0$, aber $\frac{1}{n} \cdot n \nrightarrow 0$.) Tatsächlich kann $|b_n|$ aber nicht beliebig groß werden, weil die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Dazu erinnern wir uns, dass konvergente Folgen beschränkt sind (Lemma 3.7): Es gibt also eine Konstante, sagen wir $M > 0$, so dass $|b_n| < M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Jetzt erkennen wir, dass auch $|a_n - a| \cdot |b_n| \leq M|a_n - a|$ für $n \to \infty$ beliebig klein wird, und können den Beweis formal führen:

[7] Es ist wichtig, dass C *nicht* von ε und nicht von n abhängt! Deshalb haben wir "es gibt ein $C > 0$, so dass für alle $\varepsilon > 0$ ... " geschrieben, und *nicht* "Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $C > 0$ ... ".

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle natürliche Zahlen $N_a, N_b \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_a$ und $|b_n - b| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_b$ (das ist möglich, da $a_n \to a$ und $b_n \to b$). Setze $N := \max\{N_a, N_b\}$. Dann gilt für alle $n \geq N$

$$|a_n b_n - ab| \leq |a_n - a| \cdot |b_n| + |a| \cdot |b_n - b| \leq \varepsilon M + |a|\varepsilon = (M + |a|)\varepsilon,$$

und der Beweis ist beendet.

c) Dies ist ein Spezialfall von b): Betrachte für $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Teil b) die konstante Folge $b_n = \lambda$.

d) Wir betrachten $\varepsilon_0 := \frac{1}{2}|b| > 0$ und wählen $N_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $|b_n - b| < \varepsilon_0$ für $n \geq N_0$. Für diese n gilt dann

$$|b_n| = |(b_n - b) + b| \geq \Big| |b_n - b| - |b| \Big| = |b| - |b_n - b| > |b| - \varepsilon_0 = \frac{1}{2}|b| > 0,$$

also $b_n \neq 0$ wie behauptet. Spätestens ab $n = N_0$ macht die Kehrwertfolge $\frac{1}{b_n}$ dann Sinn (wir teilen nicht durch Null).

Für den Beweis von d) genügt es nun, $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$ zu zeigen, denn die Aussage mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ folgt dann durch Anwendung von b). Wir betrachten jetzt $\varepsilon > 0$ und wählen $N_b \in \mathbb{N}$ so, dass $|b_n - b| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_b$, und setzen $N := \max\{N_0, N_b\}$. Dann haben wir

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| \leq \left| \frac{b - b_n}{b \cdot b_n} \right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n||b|} < \frac{\varepsilon}{\frac{1}{2}|b|^2},$$

und der Beweis ist abgeschlossen. □

> In Teil d) hatten wir es mit einer Folge $\frac{1}{b_n}$ zu tun, die möglicherweise erst ab $n \geq N$ für ein bestimmtes $N \in \mathbb{N}$ existiert. Zeigen Sie, dass dies für Konvergenzfragen keine Rolle spielt. Allgemeiner: Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen, für die *fast alle* Folgenglieder übereinstimmen. “Fast alle” heißt “alle bis auf endlich viele”, d.h. es gibt eine endliche Menge $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$, so dass $x_n = y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}\backslash\mathcal{N}$. Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann konvergiert, wenn $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

3.2 Grenzwerte und Ungleichungen, monotone Folgen

Wir setzen unsere Untersuchungen von konvergenten Folgen mit einigen Beobachtungen zum Zusammenspiel von Grenzwerten und Ungleichungen fort. Da Ungleichungen zwischen komplexen Zahlen nicht definiert sind, betrachten wir hier nur reelle Folgen.

Lemma 3.13. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente reelle Folge mit Grenzwert $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, und $x, y \in \mathbb{R}$.*

a) Falls $x < a$ (bzw. $a < y$), so gibt es $N \in \mathbb{N}$, so dass $x < a_n$ (bzw. $a_n < y$) für alle $n \geq N$ gilt.

b) Falls $x \leq a_n$ (bzw. $a_n \leq y$) für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt auch $x \leq a$ (bzw. $a \leq y$).

Beweis. a) Wir nehmen $a < y$ an. Sei $\varepsilon := \frac{1}{2}(y-a) > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ so, dass $|a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow -\frac{1}{2}(y-a) < a_n - a < \frac{1}{2}(y-a)$ für $n \neq N$. Dann gilt für diese n (durch Addition von a zur rechten Ungleichung)

$$a_n < \frac{1}{2}(a+y) < y,$$

wobei wir im letzten Schritt $a < y$ benutzt haben. Der Beweis für die andere Ungleichung ($x < a \Rightarrow x < a_n$ für fast alle n) verläuft analog.

b) Angenommen, der Grenzwert erfüllt $a > y$. Dann gilt nach Teil a) $a_n > y$ für fast alle n, im Widerspruch zu unserer Annahme. Wieder verläuft das Argument für die untere Schranke analog. □

Wir sehen also, dass sich Ungleichungen von Folgegliedern auf den Grenzwert und andersherum "vererben". Beachten Sie allerdings, dass in Teil a) eine echte Ungleichung (also $<$ bzw. $>$, nicht $\leq$ oder $\geq$) für den Grenzwert angenommen wurde. Nehmen Sie hingegen nur $a \leq y$ an, folgt nicht, dass $a_n \leq y$ für fast alle n gilt. Als Gegenbeispiel betrachten Sie z.B. $a := 0 \leq 0 =: y$ und die Folge $a_n = \frac{1}{n} > 0$.

Nehmen Sie in Teil b) $a_n < y$ (statt nur $a_n \leq y$) an, so folgt nicht $a < y$ (sondern nur $a \leq y$). Gegenbeispiel: $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ erfüllt $a_n < 1$ für alle n, aber der Grenzwert ist 1.

Ein weiteres Zusammenspiel von Grenzwerten und Ungleichungen ist das folgende Ergebnis, in dem es um eine Folge geht, die zwischen zwei anderen liegt[8].

Satz 3.14. *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ drei reelle Folgen, die*

$$a_n \leq b_n \leq c_n \tag{3.6}$$

für fast alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllen. Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen denselben Grenzwert x konvergieren, so konvergiert auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x.

Beweis. Nach Voraussetzung gelten für fast alle n die Ungleichungen $b_n - x \leq c_n - x \leq |c_n - x|$ und $b_n - x \geq a_n - x$, also $-(b_n - x) \leq -(a_n - x) \leq |a_n - x|$. Das impliziert $|b_n - x| \leq \max\{|a_n - x|, |c_n - x|\}$.

Für $\varepsilon > 0$ finden wir $N_a, N_c \in \mathbb{N}$ so, dass $|a_n - x| < \varepsilon$ für $n \geq N_a$ und $|c_n - x| < \varepsilon$ für $n \geq N_c$. Dann gilt für $n \geq \max\{N_a, N_c\}$ auch $|b_n - x| < \varepsilon$. □

Beispiel 3.15. Für dieses Beispiel sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion mit $|f(n)| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (Zum Beispiel $f(n) = \sin(n)$). Wir behaupten, dass die Folge $b_n := \frac{f(n)}{n}$ gegen 0 konvergiert.
Um dies zu beweisen, definieren wir $a_n := -\frac{1}{n}$ und $c_n := \frac{1}{n}$ und erkennen, dass $a_n \leq b_n \leq c_n$ wegen $-1 \leq f(n) \leq 1$ gilt. Da sowohl a_n als auch c_n gegen Null konvergieren, konvergiert auch b_n gegen Null.

[8] Dieser Satz trägt verschiedene Namen, z.B. "Einschnürungssatz" im Deutschen, "sandwich theorem" im Englischen, oder "teorema dei due carabinieri" (Satz von den zwei Polizisten) im Italienischen; hierbei stellt man sich vor, dass die zwei Polizisten (Folgen) eine Person in ihre Mitte nehmen und abführen.

Definition 3.16 (monotone Folgen).

a) Eine reelle Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ heißt *monoton wachsend* (bzw. *monoton fallend*), falls $a_{k+1} \geq a_k$ (bzw. $a_{k+1} \leq a_k$) für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

b) Eine reelle Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ heißt *monoton*, falls sie monoton wachsend oder monoton fallend ist.

c) Eine reelle Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ heißt *streng monoton wachsend* (bzw. *streng monoton fallend*), falls $a_{k+1} > a_k$ (bzw. $a_{k+1} < a_k$) für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Weiterhin nennen wir eine reelle Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von oben bzw. von unten beschränkt, falls ihr Bild $a(\mathbb{N}) \subset \mathbb{R}$ von oben bzw. von unten beschränkt ist (d.h., falls es $C \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $a_k \leq C$ bzw. $a_k \geq C$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt).

Wir zeigen nun eine wichtige direkte Verbindung zwischen dem Vollständigkeitsaxiom und der Konvergenz von Folgen auf.

Satz 3.17 (Satz von der monotonen Konvergenz).

a) Jede reelle monoton wachsende und von oben beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $\sup a(\mathbb{N}) = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$.

b) Jede reelle monoton fallende und von unten beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $\inf a(\mathbb{N}) = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$.

Beweis. Wir zeigen den Beweis von Teil a), der Beweis von b) ist ganz analog.

Sei $\varepsilon > 0$. Da $s := \sup a(\mathbb{N})$ die kleinste obere Schranke von $a(\mathbb{N})$ ist, ist $s - \varepsilon$ keine obere Schranke, d.h. es gibt $N \in \mathbb{N}$ mit $a_N > s - \varepsilon$. Da a_n monoton wachsend ist, gilt dann auch $a_n > s - \varepsilon \Rightarrow s - a_n < \varepsilon$ für alle $n \geq N$, also $s - a_n < \varepsilon$.

Da s eine obere Schranke von $a(\mathbb{N})$ ist, gilt $s \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $a_n - s \leq 0 < \varepsilon$. Damit gilt $|s - a_n| < \varepsilon$. □

Beispiel 3.18. Wir betrachten die rekursiv definierte Folge

$$a_1 := 2, \qquad a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right), \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{3.7}$$

und behaupten, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.
Um dies zu zeigen, zeigen wir, dass die Folge monoton fallend und von unten beschränkt ist. Um monoton fallend zu zeigen, sehen wir zuerst, dass die Ungleichung $a_{n+1} \leq a_n$ äquivalent ist zu $\frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n}) \leq a_n \Leftrightarrow \frac{2}{a_n} \leq a_n \Leftrightarrow \sqrt{2} \leq a_n$.

Falls wir also $a_n \geq \sqrt{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zeigen können, folgt die Beschränktheit von unten und die Monotonie, also die Konvergenz der Folge.

Dazu formen wir um gemäß

$$a_{n+1}^2 - 2 = \frac{1}{4}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)^2 - 2 = \frac{1}{4}\left(a_n^2 + \frac{4}{a_n^2} - 4\right) = \frac{1}{4}\left(a_n - \frac{2}{a_n}\right)^2 \geq 0,$$

also $a_n^2 \geq 2$ für alle n. Da $a_n > 0$ (folgt leicht per Induktion aus der rekursiven Definition), erhalten wir $a_n \geq \sqrt{2}$ wie gewünscht.

An diesem Beispiel ist interessant, dass wir die Konvergenz der Folge nachweisen konnten, ohne den Grenzwert zu kennen. Nach dem Satz über monotone Konvergenz ist $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Später werden wir sehen, dass der Grenzwert $\sqrt{2}$ ist.

3.3 Teilfolgen und Häufungspunkte

Eine *Teilfolge* einer gegebenen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erhält man, indem man einige Folgeglieder auslässt, also z.B. $(a_5, a_6, a_9, a_{11}, \dots)$. Die formale Definition ist die folgende.

Definition 3.19. Eine *Teilfolge* einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge der Art $t_k := a_{n_k}$, wobei $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen ist.

Beispiel 3.20. Häufig auftretende Teilfolgen einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind gegeben durch $n_k := k + 1$ (oder $n_k := k + \ell$ mit einem $\ell \in \mathbb{N}$), also $t_k = a_{k+1}$ (oder $t_k = a_{k+\ell}$). Diese Teilfolgen unterscheiden sich von der ursprünglichen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch das Auslassen des ersten (bzw. der ersten ℓ) Folgeglieder.

Andere Beispiele von Teilfolgen sind durch $n_k := 2k$ oder $n_k := 2k - 1$ gegeben, dann durchläuft $t_k = a_{2k}$ bzw. $t_k = a_{2k-1}$ nur die geraden bzw. ungeraden Folgeglieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Als konkretes Beispiel hat die Folge $a_n := (-1)^n$ die beiden konstanten Folgen $t_k = (-1)^{2k} = 1$ und $t_k = (-1)^{2k-1} = -1$ als Teilfolgen.

Jede Folge ist eine Teilfolge von sich selbst.

Eine einfache aber nützliche Beobachtung ist:

Lemma 3.21. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert x, und $t_k := a_{n_k}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann konvergiert auch $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$, und zwar gegen denselben Grenzwert x.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ so, dass $|a_n - x| < \varepsilon$ für $n \geq N$. Da n_k streng monoton wachsend ist, gilt $n_k \geq k$ und damit auch $|a_{n_k} - x| < \varepsilon$ für alle $k \geq N$. □

Beispiel 3.22. Wenn Sie eine Folge (a_n) mit zwei Teilfolgen (t_k) und (t'_k) haben, die gegen unterschiedliche Grenzwerte konvergieren, kann (a_n) also nicht konvergieren. Dies liefert einen weiteren Beweis, dass $a_n = (-1)^n$ nicht konvergiert, da es die beiden konstanten Folgen 1 und -1 als Teilfolgen hat, die unterschiedliche Grenzwerte haben.

Beispiel 3.23. Wir gucken uns Beispiel 3.18 noch einmal an. Wir hatten bereits gesehen, dass die dort definierte Folge konvergiert, aber noch nicht ihren Grenzwert x bestimmt. Per Definition erfüllt sie

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right). \tag{3.8}$$

Auf der linken Seite der Gleichung steht die Teilfolge $(a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, die nach Lemma 3.21 ebenfalls gegen x konvergiert. Nach Satz 3.11 konvergiert auch die rechte Seite, und zwar gegen $\frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$. Also gilt

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}.$$

Im letzten Schritt haben wir benutzt, dass $a_n \geq \sqrt{2}$, also kommt die Lösung $-\sqrt{2}$ von $x^2 = 2$ nicht in Frage.
Die rekursive Folge approximiert also $\sqrt{2}$. Diese Methode heißt Heron-Methode, sie war schon im alten Babylon bekannt.

Die Heron-Methode kann dazu verwendet werden, rationale Approximationen von $\sqrt{2}$ zu berechnen: $a_1 = 2$,

$$a_2 = \frac{3}{2} = 1{,}5, \quad a_3 = \frac{17}{12} = 1{,}41\bar{6}, \quad a_4 = \frac{577}{408} = 1{,}414\overline{2156862745098039},$$

im Vergleich zu $\sqrt{2} \approx 1{,}41421356237309504 88\ldots$. Als irrationale Zahl hat $\sqrt{2}$ eine unendliche nicht-periodische Dezimaldarstellung; dazu später mehr.

Um $\sqrt{2}$ bis auf eine vorgegebene Genauigkeit $\varepsilon > 0$ zu bestimmen (also eine rationale Zahl r mit $|\sqrt{2} - r| < \varepsilon$ zu finden), benötigen wir auch eine untere Schranke. Sie können sich überlegen, dass für alle n

$$\frac{2}{a_n} \leq \sqrt{2} \leq a_n \tag{3.9}$$

gilt. Das führt auf die Fehlerabschätzung (Übung)

$$|a_n - \sqrt{2}| \leq \frac{(a_{n-1}a_n - 2)^2}{2a_{n-1}a_n^2}. \tag{3.10}$$

Zum Beispiel für $n = 4$ erhalten wir durch Einsetzen der obigen Werte für a_3 und a_4

$$|a_4 - \sqrt{2}| \leq 10^{-5}, \tag{3.11}$$

d.h. $a_4 = \frac{577}{408}$ stimmt mit $\sqrt{2}$ bis auf Abweichungen ab der sechsten Nachkommastelle überein.

Wir haben in Lemma 3.7 gesehen, dass konvergente Folgen stets beschränkt sind. Andererseits haben wir auch gesehen, dass die Umkehrung dieses Satzes nicht gilt, d.h. beschränkte Folgen müssen nicht konvergent sein. Der folgende Satz besagt, dass die Umkehrung aber in einem gewissen Sinne für Teilfolgen gilt.

Satz 3.24.

a) Jede reelle Folge besitzt eine monotone Teilfolge.

b) **Satz von Bolzano-Weierstraß***:*
Jede reelle beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis. a) Wir betrachten die Menge

$$S := \{n \in \mathbb{N} : \ a_n \leq a_m \ \text{für alle} \ m > n\}.$$

Falls S endlich ist, betrachten wir $n_1 := \max(S) + 1$. (Das Maximum existiert, falls S nicht leer ist – ist S leer, so setzen wir $n_1 := 1$.) Da $n_1 \notin S$, gibt es $n_2 > n_1$ mit $a_{n_2} < a_{n_1}$. Da n_2 ebenfalls nicht in S liegt, gibt es $n_3 > n_2$ mit $a_{n_3} < a_{n_2}$. Auf diese Weise finden wir rekursiv eine monoton fallende Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

Ist S hingegen unendlich, so ist es abzählbar unendlich, und wir können es als $S = \{l_k : \ k \in \mathbb{N}\}$ mit einer monoton wachsenden Folge l_k schreiben. Dann ist $(a_{l_k})_{k\in\mathbb{N}}$ per Definition von S eine monoton wachsende Teilfolge.

b) Nach Teil a) besitzt jede reelle Folge (a_n) eine monotone Teilfolge. Da (a_n) beschränkt ist, ist auch die Teilfolge beschränkt. Nach dem Satz über monotone Konvergenz folgt nun, dass die Teilfolge konvergiert. □

Der Satz von Bolzano-Weierstraß gilt auch für komplexe Folgen in der Form: *Jede komplexe beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge.* Das mag zuerst überraschend wirken, da wir für den Beweis monotone Folgen verwendet haben; ein Begriff, der uns für komplexe Folgen nicht zur Verfügung steht. Hier eine Anleitung, wie Sie den komplexen Satz von Bolzano-Weierstraß beweisen können.

Überlegen Sie sich zuerst : i) eine komplexe Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn die beiden reellen Folgen $(\mathrm{Re}\,(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\mathrm{Im}\,(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren, und ii) wenn $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, sind auch $(\mathrm{Re}\,(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\mathrm{Im}\,(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

Konstruieren Sie dann eine Teilfolge von $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass $(\mathrm{Re}\,(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Was müssen Sie nun noch tun, um auch die Konvergenz von $(\mathrm{Im}\,(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ zu erreichen?

Eng verwandt mit dem Begriff einer Teilfolge ist der Begriff eines *Häufungspunktes* einer Folge.

Definition 3.25. Ein *Häufungspunkt* einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (reell oder komplex) ist eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ (bzw. $x \in \mathbb{C}$), die Grenzwert einer Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

Der Satz von Bolzano-Weierstraß besagt, dass jede beschränkte Folge (mindestens) einen Häufungspunkt hat. Mit Hilfe von Lemma 3.21 sehen wir, dass eine *konvergente* Folge genau einen Häufungspunkt hat, nämlich ihren Grenzwert. Ein Beispiel einer nicht konvergenten Folge mit mehreren Häufungspunkten ist $a_n = (-1)^n$; diese Folge hat die zwei Häufungspunkte 1 und -1.

Satz 3.26.

a) *Ein Punkt $x \in \mathbb{R}$ (bzw. $x \in \mathbb{C}$) ist ein Häufungspunkt einer Folge $(a_n)_n$ genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ die "ε-Umgebung" $U_\varepsilon(x) = \{g \in \mathbb{R} : |g - x| < \varepsilon\}$ (bzw. $U_\varepsilon(x) = \{g \in \mathbb{C} : |g - x| < \varepsilon\}$) unendlich viele Folgeglieder a_n enthält.*

b) *Eine beschränkte Folge konvergiert genau dann, wenn sie genau einen Häufungspunkt hat.*

Beweis. a) Die Definition von Konvergenz besagt, dass für jeden Grenzwert x einer Teilfolge (a_{n_k}) die Menge $\{g : |g - x| < \varepsilon\}$ unendlich viele Folgeglieder a_{n_k} enthält.

Wir nehmen nun an, dass x die Eigenschaft hat, dass für alle $\varepsilon > 0$ die Menge $\{g : |g - x| < \varepsilon\}$ unendlich viele Folgeglieder a_n enthält, und konstruieren eine Teilfolge mit Grenzwert x. Dazu wählen wir a_{n_k} so, dass $a_{n_k} \in \{g : |g - x| < \frac{1}{k}\}$. Dies ist möglich, da diese Mengen unendlich sind – haben wir $a_{n_1}, \ldots, a_{n_N}$ bereits gewählt (mit $n_1 < n_2 < \ldots < n_N$), enthält $\{g : |g - x| < \frac{1}{N+1}\}$ immer noch (unendlich viele) Folgeglieder a_j mit $j > n_N$, aus denen wir $a_{n_{N+1}}$ auswählen können. Für die so konstruierte Teilfolge gilt $|a_{n_k} - x| < \frac{1}{k}$, d.h. sie konvergiert gegen x.

b) Wir haben schon gesehen, dass konvergente Folgen genau einen Häufungspunkt haben. Nun nehmen wir an, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist und genau einen Häufungspunkt h hat und wollen zeigen, dass dann $a_n \to h$ konvergiert. Wir argumentieren per Widerspruch: Angenommen, a_n würde nicht gegen h konvergieren. Dann finden wir ein $\varepsilon > 0$, so dass unendlich viele Folgeglieder a_n nicht $|a_n - h| < \varepsilon$ erfüllen. Wir können also eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ wählen, die $a_{n_k} \geq h+\varepsilon$ oder $a_{n_k} \leq h-\varepsilon$ erfüllt. Diese Teilfolge ist auch beschränkt, hat nach Bolzano-Weierstraß eine Teilfolge $(a_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$, die konvergiert. Wir nennen den Grenzwert x. Da $(a_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge der ursprünglichen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist, ist x ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Aber wegen Lemma 3.13 gilt $x \geq h + \varepsilon > h$ bzw. $x \leq h - \varepsilon < h$, also in jedem Fall $x \neq h$. Das ist ein Widerspruch zu unserer Annahme, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau einen Häufungspunkt besitzt. □

Einige Beispiele:

a) Die Menge der Häufungspunkte von $a_n = (-1)^n$ ist $\{1, -1\}$.

b) Die Menge der Häufungspunkte von $a_n = \frac{1}{n}$ ist $\{0\}$.

c) Die Menge der Häufungspunkte von $a_n = n$ ist $\emptyset$.

d) Sei $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ eine bijektive Abbildung (gibt es, da $\mathbb{Q}$ abzählbar ist). Die Menge der Häufungspunkte von $a_n = \varphi(n)$ ist $\mathbb{R}$.

Geben Sie ein Beispiel einer divergenten Folge mit genau einem Häufungspunkt.

3.4 Cauchy-Folgen

Ein Nachteil unserer Definition von Konvergenz $a_n \to a$ ist, dass man bereits einen Kandidaten für den Grenzwert a benötigt, um $|a_n - a| < \varepsilon$ zu überprüfen. Bei einer komplizierten Folge ist es aber nicht leicht, den Grenzwert zu erraten – was ist z.B. der Grenzwert von $(1 + \frac{1}{n})^n$? In diesem Abschnitt geben wir deshalb eine Umformulierung von Konvergenz, die auf dem Begriff einer *Cauchy-Folge* beruht.

Definition 3.27. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *Cauchy-Folge*, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n, m \geq N$

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \tag{3.12}$$

gilt.

Auch wenn Teile dieser Definition unserer Definition von Konvergenz ähneln, gibt es einen wesentlichen Unterschied: In Def. 3.27 wird kein Grenzwert erwähnt. Statt nahe an einem Grenzwert sollen die Folgeglieder nahe beieinander liegen (für große n, m).

Lemma 3.28. *Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.*

Beweis. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a, und sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ so, dass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N$. Dann gilt für $n, m \geq N$

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Also ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. $\square$

Beispiel 3.29.

a) Wir betrachten zuerst die Nullfolge $a_n = \frac{1}{n}$. Dann gilt für $n, m \in \mathbb{N}$ (oBdA $n \geq m$)

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| = \frac{n-m}{nm} < \frac{n}{nm} = \frac{1}{m}.$$

Gegeben $\varepsilon > 0$, finden wir also $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$, d.h. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge.

b) Nun betrachten wir die rekursiv definierte Folge $r_1 := 1$, $r_{n+1} := r_n + \frac{1}{n+1}$, also $r_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Diese Folge heißt *harmonische Reihe* und wir wollen zeigen, dass sie *keine* Cauchy-Folge ist.
Zuerst sehen wir $|r_{n+1} - r_n| = \frac{1}{n+1}$, diese Differenz geht gegen Null für $n \to \infty$. Aber das ist nicht genug – um Cauchy-Folge zu sein, müsste $|r_n - r_m|$ für beliebig weit voneinander entfernte Indizes n, m (ab einem Startwert N) kleiner ε werden. Um zu sehen, dass dies im vorliegenden Beispiel nicht der Fall ist, betrachten wir

$$|r_{2n} - r_n| = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Die Ungleichung im letzten Schritt folgt aus Zählen der Summanden ($2n - n = n$ Summanden) und Abschätzen von $\frac{1}{k}$ durch den kleinsten Term $\frac{1}{2n}$.

Wir sehen also, dass $|r_{2n} - r_n|$ nie kleiner als $\frac{1}{2}$ wird. Deshalb ist $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine

Cauchy-Folge, und nach Lemma 3.28 damit nicht konvergent. Da r_n monoton wächst, wächst diese Folge über alle Grenzen, d.h. $r_n \to \infty$ für $n \to \infty$.

Noch interessanter als die obige Beobachtung ist, dass in $\mathbb{R}$ (und $\mathbb{C}$) die Umkehrung von Lemma 3.28 auch gilt.

Satz 3.30. *Jede reelle oder komplexe Cauchy-Folge konvergiert.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass jede Cauchy-Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt sind. Sei dazu $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$. Dann gilt $|a_n| \leq |a_n - a_N| + |a_N| < \varepsilon + |a_N|$ für $n \geq N$. Exakt wie im Beweis von Lemma 3.7 folgt nun, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist.

Wir verwenden nun den Satz von Bolzano-Weierstraß, den wir für reelle Folgen bewiesen haben, der aber auch für komplexe Folgen gilt (siehe S. 61)[9], d.h. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Sei a der Grenzwert dieser Teilfolge und $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wählen $K, N \in \mathbb{N}$ so, dass $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ für alle $k \geq K$ (möglich wegen der Konvergenz der Teilfolge gegen a) und $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$ (möglich, da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy ist.)

Für $k, n \geq \max\{N, K\}$ gilt dann $n_k \geq k$ und somit

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < 2\varepsilon,$$

was den Beweis von $a_n \to a$ abschließt. $\square$

Wir fassen zusammen: Eine reelle oder komplexe Folge konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist. So können Sie Konvergenz prüfen, ohne einen Grenzwert erraten zu müssen. Da wir Bolzano-Weierstraß und damit das Vollständigkeitsaxiom verwendet haben, gilt diese Aussage für die rationalen Zahlen nicht.

Definition 3.31. Ein Körper K heißt *vollständig*, falls jede Cauchy-Folge $a : \mathbb{N} \to K$ konvergiert (in K).

Die reellen und komplexen Zahlen sind vollständig, die rationalen Zahlen nicht: Zum Beispiel die rationale Folge aus Beispiel 3.18 ist eine Cauchy-Folge, da sie in $\mathbb{R}$ konvergiert. Der Grenzwert $\sqrt{2}$ ist aber irrational, d.h. in $\mathbb{Q}$ konvergiert diese Folge nicht, obwohl sie natürlich auch in $\mathbb{Q}$ eine Cauchy-Folge ist.

Bzgl der komplexen Zahlen bemerken wir noch, dass sie zwar nicht *vollständig geordnet* (weil es auf $\mathbb{C}$ gar keine Ordnung gibt), aber dennoch vollständig sind.

[9] Da wir nun die komplexe Version von Bolzano-Weierstraß verwenden, hier ein Beweis: Ist $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte komplexe Folge, so sind die beiden reellen Folgen $(\mathrm{Re}\,(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\mathrm{Im}\,(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls beschränkt. Mit der reellen Version von Bolzano-Weierstraß finden wir also eine Teilfolge $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, so dass $(\mathrm{Re}\,(z_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Natürlich ist $(\mathrm{Im}\,(z_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ weiterhin beschränkt. Nun wählen wir eine Teilfolge $(z_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ so, dass $(\mathrm{Im}\,(z_{n_{k_l}}))_{l\in\mathbb{N}}$ konvergiert (geht nach der reellen Version von Bolzano-Weierstraß). Dann konvergiert $(\mathrm{Re}\,(z_{n_{k_l}}))_{l\in\mathbb{N}}$ als Teilfolge von $(\mathrm{Re}\,(z_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ ebenfalls, d.h. Real- und Imaginärteil von $(z_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ konvergieren. Damit konvergiert die komplexe Folge $(z_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$, und der Beweis ist beendet.

3.5 Reihen: Grundlegende Definitionen und Eigenschaften

Gegeben eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, können wir stets die zugehörige aufsummierte Folge betrachten, nämlich

$$s_1 := a_1, \qquad s_{n+1} := s_n + a_{n+1}, \tag{3.13}$$

was zu

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \tag{3.14}$$

äquivalent ist. Dies gibt eine neue Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die die *Folge der Partialsummen* genannt wird. Folgen, die in einer solchen Summenform gegeben sind, heißen *Reihen*. In diesem und den folgenden Abschnitten werden wir uns mit dem Konvergenzverhalten von Reihen befassen und einige zugehörige Begriffe einführen.

Der erste Punkt betrifft die Notation, die für Reihen etwas gewöhnungsbedürftig ist. Falls die Partialsummenfolge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, so bezeichnen wir ihren Grenzwert mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n. \tag{3.15}$$

Es ist allerdings auch üblich, das Symbol $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ für die Reihe (=Folge der Partialsummen) selbst zu verwenden. Man sagt dann z.B. “die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert” um “die Folge der Partialsummen $(\sum_{k=1}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$” auszudrücken.

Auch wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Folge ist, die nur auf Grundlage der Folge (a_n) gebildet wird, so kann sich das Konvergenzverhalten von $\sum_n a_n$ (dies ist eine gängige Kurzschreibweise für $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$) stark vom Konvergenzverhalten von (a_n) unterscheiden, wie wir im Folgenden sehen werden.

Es ist oft bequem, die Summation bei einem anderen Index als 1 zu starten, z.B. bei 0 wie im nächsten Beispiel.

Beispiel 3.32 (Die geometrische Reihe). Analog zur geometrischen Folge (Beispiel 3.10) betrachten wir nun die zugehörige Reihe. Sei also $q \in \mathbb{C}$ beliebig, und betrachte

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

(als Symbol für die Folge $s_N := \sum_{n=0}^{N} q^n$, d.h. $s = (1, 1+q, 1+q+q^2, \ldots)$. Für welche q konvergiert diese Reihe?

Zuerst beobachten wir, dass $|s_{N+1} - s_N| = \left|\sum_{n=0}^{N+1} q^n - \sum_{n=0}^{N} q^n\right| = |q|^{N+1}$ genau dann gegen 0 konvergiert (für $N \to \infty$), falls $|q| < 1$ (siehe Beispiel 3.10). Falls $(s_N)_N$ konvergiert, so wäre es eine Cauchy-Folge, und dann gilt $|s_{N+1} - s_N| \to 0$ für $N \to \infty$. Also konvergiert die geometrische Reihe für $|q| \geq 1$ nicht.

Für $|q| < 1$ erinnern wir uns, dass

$$s_N = \sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} \tag{3.16}$$

gilt (Aufgabe P2.2 b), diese Formel gilt für alle $q \neq 1$). Da wir für $|q| < 1$ eine konvergente geometrische Folge $q^{N+1} \to 0$ (für $N \to \infty$) haben, sehen wir nun, dass in diesem Fall die geometrische Reihe konvergiert und den Grenzwert

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \qquad |q| < 1, \tag{3.17}$$

hat.

Die geometrische Reihe und ihr Grenzwert (3.17) treten an vielen Stellen in der Mathematik auf. Es empfiehlt sich, sich diesen Grenzwert zu merken, zusammen mit der Tatsache, dass $\sum_n q^n$ für $|q| \geq 1$ divergiert.

Der erste Teil des Arguments in diesem Beispiel verallgemeinert sich auf allgemeine Reihen, was wir hier als Korollar notieren.

Korollar 3.33. *Wenn eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, so ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge.*

Beweis. Angenommen, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. Dann ist die Folge der Partialsummen eine Cauchy-Folge. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\left|\sum_{n=1}^{M} a_n - \sum_{n=1}^{M-1} a_n\right| = |a_M| < \varepsilon$ für alle $M \geq N$, d.h. $a_M \to 0$ wie behauptet. □

Beachten Sie, dass die Umkehrung von diesem Korollar falsch ist: Wenn (a_n) eine Nullfolge ist, muss die zugehörige Reihe $\sum_n a_n$ nicht konvergieren. Ein Beispiel dazu liefert die harmonische Reihe (Beispiel 3.29 b)).

Geben Sie ein weiteres Beispiel einer Nullfolge (a_n) von positiven Zahlen, so dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert.

Sie können Korollar 3.33 wie folgt verwenden: Falls (a_n) nicht gegen Null konvergiert (also entweder gegen einen anderen Grenzwert konvergiert, oder divergiert), dann konvergiert $\sum_n a_n$ nicht.

Beispiel 3.34. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ konvergiert nicht, da die Folge $(-1)^n$ nicht gegen Null konvergiert (diese Folge divergiert). Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{1+n}$ konvergiert nicht, da die Folge $\frac{n}{1+n}$ nicht gegen Null konvergiert (sondern gegen 1).

Einen genaueren Zusammenhang zwischen der Konvergenz der Folge (a_n) und der Reihe $\sum_n a_n$ erhalten wir in der folgenden Situation, in der die Konvergenz der Reihe aus ihrem alternierenden Charakter (abwechselnde Vorzeichen) kommt.

Satz 3.35 (Leibniz-Kriterium). *Sei $(a_n)_n$ eine monoton fallende Folge nicht-negativer reeller Zahlen. Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ genau dann, wenn (a_n) gegen Null konvergiert.*

Beweis. Da (a_n) genau dann gegen Null konvergiert, wenn $(-1)^n a_n$ gegen Null konvergiert, wissen wir bereits aus Korollar 3.33, dass $a_n \to 0$ für die Konvergenz von $\sum_n (-1)^n a_n$ *notwendig* ist.

Um zu zeigen, dass diese Eigenschaft zusammen mit der Monotonie auch *hinreichend* ist, betrachten wir Partialsummen $s_N := \sum_{n=1}^{N}(-1)^n a_n$. Da (a_n) monoton fällt, haben wir

$$\begin{aligned} s_{2(N+1)} &= \sum_{n=1}^{2N}(-1)^n a_n - a_{2N+1} + a_{2N+2} \leq s_{2N}, \\ s_{2(N+1)+1} &= \sum_{n=1}^{2N+1}(-1)^n a_n + a_{2N+2} - a_{2N+3} \geq s_{2(N+1)}, \end{aligned}$$

Die Teilfolge $g_N := s_{2N}$ ist also monoton fallend, während die Teilfolge $u_N := s_{2N+1}$ monoton wachsend ist. Wegen $a_k \geq 0$ haben wir auch

$$s_{2N} \geq s_{2N} - a_{2N+1} = s_{2N+1} \geq s_1 = -a_1,$$

d.h. die Teilfolge (s_{2N}) ist von unten beschränkt. Nach dem Satz über monotone Konvergenz konvergiert $(s_{2N})_{N\in\mathbb{N}}$ also; nennen wir den Grenzwert x.

Nun betrachten wir die ungerade durchnummerierte Teilfolge s_{2N+1}. Wir haben $s_{2N+1} = s_{2N} - a_{2N+1}$. Da $a_k \to 0$ nach Voraussetzung, konvergiert auch die Teilfolge $a_{2N+1} \to 0$ für $N \to \infty$, nach Satz 3.11 also $s_{2N+1} = s_{2N} - a_{2N+1} \to x - 0 = x$.

Wir sind also in der Situation, dass die beiden Teilfolgen $(s_{2N})_N$ und $(s_{2N+1})_N$ gegen denselben Grenzwert konvergieren. Dann konvergiert auch $(s_N)_N$, wie in Aufgabe H5.4 gezeigt wurde. $\square$

Beispiel 3.36. Wir haben bereits gesehen, dass die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergiert. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ konvergiert hingegen, da das Leibniz-Kriterium erfüllt ist: $a_n = \frac{1}{n}$ ist eine monoton fallende Nullfolge positiver Zahlen. Das heißt aber nicht, dass wir angeben können, was der Grenzwert dieser Reihe ist. Später werden wir sehen, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$$

(natürlicher Logarithmus) gilt.

Als Abschluss dieses einführenden Abschnitts zu Reihen erwähnen wir noch, dass *jede* Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als Reihe geschrieben werden kann, d.h. wir finden immer eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass $a_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, und zwar $b_1 = a_1$, $b_{k+1} = a_{k+1} - a_k$, $k \in \mathbb{N}$.

Prüfen Sie, dass mit dieser Folge tatsächlich $a_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)$ gilt.

Diese Idee führt uns auf das folgende Ergebnis.

Beispiel 3.37 (Teleskopsummen). *Eine Reihe der Form* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1} - a_n)$ *konvergiert genau dann, wenn die Folge* $(a_n)_n$ *konvergiert, und der Grenzwert der Reihe ist*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1} - a_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - a_1 .$$

Beweis: Nach der obigen Bemerkung gilt $\sum_{n=1}^{N-1}(a_{n+1} - a_n) = a_N - a_1$, was die Aussage sofort beweist. □

Als ein explizites Beispiel betrachten wir die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$. Wir bemerken, dass $a_n := \frac{n}{n+1}$ die Gleichung $a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ erfüllt. Also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Mit Indexverschiebung haben wir auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Wir halten also fest, dass Folgen und Reihen an sich ein und dasselbe sind: Per Definition ist jede Reihe eine Folge, und umgekehrt lässt sich jede Folge als eine Reihe schreiben. Nichtdestotrotz ist es nützlich, Reihen gesondert zu betrachten, da sich in Reihenform einige wichtige und bequeme Resultate zur Konvergenz ergeben.

Der Vollständigkeit halber geben wir noch zwei unmittelbar aus der Definition einer Reihe folgende Aussagen an.

Korollar 3.38. *Seien* (a_n), (b_n) *beliebige Folgen, und* λ, μ *beliebige (reelle oder komplexe) Zahlen.*

a) Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *und* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergieren, so konvergiert auch* $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n)$, *und der Grenzwert ist*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n .$$

b) Die (reelle oder komplexe) Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergiert genau dann, wenn es für jedes* $\varepsilon > 0$ *ein* $N \in \mathbb{N}$ *gibt, so dass*

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| < \varepsilon \tag{3.18}$$

für alle $m \geq n \geq N$ gilt.

Beweis. a) Dies ergibt sich sofort aus Satz 3.11.

b) Da $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ vollständig sind, konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ genau dann, wenn die Folge der Partialsummen eine Cauchy-Folge ist. Die Behauptung entspricht dann genau dem Cauchy-Kriterium aus Def. 3.27. $\square$

Geben Sie einen detaillierten Beweis von Korollar 3.38.

3.6 Absolut konvergente Reihen

Bei unserer Diskussion des Leibniz-Kriteriums (Satz 3.35) haben wir bereits gesehen, dass bei reellen Folgen die Vorzeichen der aufsummierten Folgenglieder a_n einen starken Einfluss auf die Konvergenz der Reihe $\sum_n a_n$ haben können. In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit einem Konvergenzbegriff, der die Vorzeichen der Folgeglieder ignoriert. Die allgemeine auch im Komplexen gültige Definition ist wie folgt.

Definition 3.39. Eine (reelle oder komplexe) Reihe $\sum_n a_n$ heißt *absolut konvergent*, falls die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Für *positive* Reihen (also solche mit $a_n \geq 0$ für alle n) ist absolute Konvergenz natürlich dasselbe wie Konvergenz. Im Allgemeinen gilt:

Satz 3.40. *Absolut konvergente Reihen konvergieren.*

Beweis. Sei $\sum_n a_n$ eine absolut konvergente Reihe, und sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m \geq n \geq N$ die Ungleichung $\sum_{k=n}^{m} |a_k| < \varepsilon$ gilt (Cauchy-Kriterium). Dann gilt nach Dreiecksungleichung

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k| < \varepsilon,$$

also konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. $\square$

Die Umkehrung dieses Satzes ist falsch: Konvergente Reihen müssen nicht absolut konvergent sein. Wir haben bereits gesehen, dass $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$ konvergiert, aber nicht absolut konvergiert, da $\sum_n \frac{1}{n}$ divergiert.

Absolut konvergente Reihen haben bessere Eigenschaften als Reihen, die wir im Folgenden erarbeiten wollen. Zuerst betrachten wir aber noch allgemein das Konvergenzverhalten von positiven Reihen.

Satz 3.41. *Sei (a_n) eine reelle Folge nicht-negativer Zahlen. Dann sind äquivalent:*

a) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

b) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist beschränkt, d.h. es gibt $C > 0$, so dass $\sum_{n=1}^{N} a_n \leq C$ für alle $N \in \mathbb{N}$.

In diesem Fall ist der Grenzwert

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sup\left\{\sum_{n=1}^{N} a_n \,:\, N \in \mathbb{N}\right\}.$$

Falls die Reihe nicht konvergiert, so geht sie gegen unendlich, d.h.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty.$$

Beweis. $a) \Rightarrow b)$ Falls die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, so ist sie beschränkt (Lemma 3.7).

$b) \Rightarrow a)$ Da $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, ist die Folge $s_N := \sum_{n=1}^{N} a_n$ der Partialsummen monoton wachsend. Ist die Reihe nun auch noch beschränkt (d.h. die Folge der Partialsummen ist beschränkt), so konvergiert sie nach dem Satz über monotone Konvergenz (Satz 3.17) gegen $\sup\{s_N : N \in \mathbb{N}\}$, wie behauptet.

Falls die Reihe nicht konvergiert, ist sie also unbeschränkt. Da sie monoton wächst, muss sie über jede Grenze wachsen, d.h. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ im Sinne von Def. 3.9. □

Positive Reihen sind also genau dann konvergent, wenn sie beschränkt sind (Dies ist für nicht positive Reihen nicht richtig!). Insbesondere konvergiert eine Reihe $\sum_n a_n$ genau dann *absolut*, wenn die Reihe $\sum_n |a_n|$ beschränkt ist, da die Beträge $|a_n|$ immer nicht-negative reelle Zahlen sind.

Kommen wir zu den Eigenschaften, die absolut konvergente von nur "normal" konvergenten aber nicht absolut konvergenten Reihen unterscheiden. Der erste Punkt betrifft *Umordnungen*. Für endliche Summen $a_1 + \ldots + a_N$ gilt aufgrund des Kommutativ- und Assoziativgesetzes $\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N} a_{\varphi(n)}$ für jede bijektive Abbildung $\varphi : \{1, \ldots, N\} \to \{1, \ldots, N\}$, da die Zahlen a_n nur in einer geänderten Reihenfolge addiert werden. Dies ist für Reihen ("Summen mit unendlich vielen Termen") im Allgemeinen nicht mehr richtig, für absolut konvergente Reihen aber schon.

Satz 3.42.

a) Sei $\sum_k a_k$ eine absolut konvergente Reihe, und $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv. Dann ist auch $\sum_k a_{\varphi(k)}$ absolut konvergent, und $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$.

b) **(Riemann'scher Umordnungssatz)** *Sei $\sum_k a_k$ eine reelle bedingt konvergente Reihe (also konvergent, aber nicht absolut konvergent), und $x \in \mathbb{R}$. Dann gibt es eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ so, dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = x$.*

Beweis. a) Seien $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ und $s'_n := \sum_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)}$ die Teilsummen der Reihe und ihrer Umordnung, und $x = \lim_n s_n$ der Grenzwert der Reihe.

Da diese Reihe absolut konvergiert, gibt es nach dem Cauchykriterium zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index $K \in \mathbb{N}$, so dass $\sum_{k=K+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon$. Aufgrund der Bijektivität von φ finden wir nun einen Index $N \in \mathbb{N}$, so dass $\{1, \ldots, K\} \subset \{\varphi(1), \ldots, \varphi(N)\}$ (es gilt dann natürlich $N \geq K$). Für $n \geq N$ treten die Zahlen $a_1, \ldots, a_K$ also sowohl in der Summe $\sum_{k=1}^{K} a_k$ als auch in der Summe $\sum_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)}$ auf, d.h. die Differenz $s'_n - s_K$ ist die Summe aller Zahlen

$a_{\varphi(k)}$, $k = 1, \dots, n$, in der die Terme mit $\varphi(k) \in \{1, \dots, K\}$ fehlen. Wir können also abschätzen gemäß

$$|s'_n - s_K| \leq \sum_{k=K+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon.$$

Somit erhalten wir

$$|x - s'_n| \leq |x - s_K| + |s_K - s'_n| \leq \sum_{k=K+1}^{\infty} |a_k| + \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| < 2\varepsilon,$$

was den Beweis der Behauptung $s'_n \to x$ für $n \to \infty$ abschließt. □

Der Riemannsche Umordnungssatz (Teil b)) besagt, dass das Konvergenzverhalten von bedingt konvergenten Reihen unter Umordnungen instabil ist – mit geeigneten Umordnungen kann ein beliebig vorgegebener Grenzwert erreicht werden. Aus Zeitgründen werden wir den Beweis von Teil b) nicht führen. Siehe z.B. [Heu91, Satz 32.3 und 32.4], und das nächste Übungsblatt für ein Beispiel.

Eine wichtige Anwendung von Teil a) dieses Satz ist die sogenannte Cauchy-Produktformel für absolut konvergente Reihen. Nachdem wir uns in Korollar 3.38 schon mit Linearkombinationen von konvergenten Reihen beschäftigt haben, geht es jetzt um Produkte von Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{l=0}^{\infty} b_l$. Als Produkt $(\sum_{k=0}^{\infty} a_k) \cdot (\sum_{l=0}^{\infty} b_l)$ erwarten wir eine Reihe, in der alle Produkte $x_{(k,l)} := a_k b_l$, $(k, l) \in \mathbb{N}_0^2$, summiert werden. Da $\mathbb{N}_0^2$ abzählbar ist, gibt es eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0^2$, und wir können die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} x_{\varphi(n)}$ betrachten. Im absolut konvergenten Fall wird der Wert dieser Reihe nicht von φ abhängen.

Satz 3.43 (Cauchy-Produktformel). *Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{l=0}^{\infty} b_l$ zwei* absolut *konvergente Reihen. Setze $c_n := \sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ auch absolut, und es gilt*

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n. \tag{3.19}$$

Beweis. Für jede beliebige *endliche* Doppelsumme $\sum_{k,l} a_k b_l$ (d.h. die Summe läuft über eine endliche Menge von Paaren $(k, l) \in M \subset \mathbb{N}^2$) gibt es immer ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $M \subset \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, N\}$. Per Dreiecksungleichung ergibt das aufgrund der angenommenen absoluten Konvergenz

$$\left|\sum_{k,l} a_k b_l\right| \leq \sum_{k,l} |a_k b_l| \leq \sum_{k=0}^{N} |a_k| \cdot \sum_{l=0}^{N} |b_l| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot \sum_{l=0}^{\infty} |b_l| < \infty.$$

Ordnen wir die Produktreihe $\sum_{(k,l)\in\mathbb{N}^2} a_k b_l$ nun in einer beliebigen Reihenfolge an, so erhalten wir aus Satz 3.41, dass diese Reihe absolut konvergiert. Nach Satz 3.42 ist der Grenzwert der Reihe dann unabhängig von der Anordnung der Terme, so dass wir die angegebene Anordnung wählen können. □

Die Cauchy-Produktformel gilt nicht für bedingt konvergente Reihen! Wir werden später Anwendungen dieser Formel auf die Exponentialfunktion sehen.

3.7 Konvergenzkriterien für Reihen

In diesem Abschnitt diskutieren wir einige wichtige Konvergenzkriterien für Reihen. Das erste Kriterium ist eine Verallgemeinerung der Dreiecksungleichung.

Satz 3.44 (Majorantenkriterium). *Seien (a_n), (b_n) Folgen, wobei die b_n reelle nicht-negative Zahlen sind, und*

$$|a_n| \leq b_n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

gilt. Dann gilt: Konvergiert $\sum_n b_n$, so konvergiert auch $\sum_n a_n$, und zwar absolut. Für die Grenzwerte gilt dann $|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Beweis. Für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt nach Dreiecksungleichung

$$\left|\sum_{n=1}^{N} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{N} |a_n| \leq \sum_{n=1}^{N} b_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Wir sehen: Die monoton wachsende Folge $N \mapsto \sum_{n=1}^{N} |a_n|$ ist von oben beschränkt, also konvergiert $\sum_n |a_n|$. Die Ungleichung für den Grenzwert folgt aus Lemma 3.13 b). □

Die nach oben beschränkende Reihe $\sum_n b_n$ heißt *Majorante* von $\sum_n a_n$.

Beispiel 3.45. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert gegen einen Grenzwert ≤ 2.
Beweis: Aus Beispiel 3.37 wissen wir $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$. Also konvergiert auch die doppelte Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = 2$. Aber für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n(n+1)}$ (leicht nachzurechnen). Also folgt per Majorantenkriterium die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ gegen einen Grenzwert ≤ 2.

Dieses Beispiel liefert uns also die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, während wir bereits in Beispiel 3.29 gesehen haben, dass die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert. Wie sieht es mit allgemeinen Potenzen von $\frac{1}{n}$ aus, d.h. für welche $p \in \mathbb{Q}$ konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$? Wir beantworten diese Frage weiter unten mit folgender Anwendung des Majorantenkriteriums.

Satz 3.46 (Cauchy-Verdichtungskriterium). *Sei (a_n) eine monoton fallende Folge nicht-negativer reeller Zahlen. Dann konvergiert die Reihe $\sum_n a_n$ genau dann, wenn die "verdichtete Reihe" $\sum_n 2^n a_{2^n}$ konvergiert.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Nehmen wir an, dass $\sum_n a_n$ konvergiert, mit Grenzwert x. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \geq \sum_{k=1}^{2^n} a_n = a_1 + a_2 + \underbrace{a_3 + a_4}_{\geq 2a_4} + \underbrace{a_5 + a_6 + a_7 + a_8}_{\geq 4a_8} + \ldots + \underbrace{a_{2^{n-1}+1} + \ldots + a_{2^n}}_{\geq 2^{n-1} a_{2^n}}$$
$$\geq \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} a_{2^k},$$

also $\sum_{k=1}^{n} 2^k a_{2^k} \leq 2x$. Per monotoner Konvergenz folgt nun die Konvergenz der verdichteten Reihe.

($\Leftarrow$) Nehmen wir nun an, dass $\sum_k 2^k a_{2^k}$ konvergiert, mit Grenzwert y. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} y + a_1 &= a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} \geq a_1 + \sum_{k=1}^{n} 2^k a_{2^k} \\ &= a_1 + \underbrace{2a_2}_{\geq a_2+a_3} + \underbrace{4a_4}_{\geq a_4+a_5+a_6+a_7} + \ldots + \underbrace{2^n a_{2^n}}_{\geq a_{2^n}+\ldots+a_{2^{n+1}-1}} \\ &\geq \sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} a_k. \end{aligned}$$

Nun folgt per monotoner Konvergenz die Konvergenz von $\sum_k a_k$. $\square$

Beispiel 3.47. Sei $p \in \mathbb{Q}$. Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ genau dann, wenn $p > 1$.
Beweis: Für $p \leq 0$ ist die Folge $(\frac{1}{n^p})_n$ keine Nullfolge, also kann $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ nicht konvergieren (Korollar 3.33). Für $p > 0$ ist $(\frac{1}{n^p})_n$ eine monoton fallende Folge nicht-negativer reeller Zahlen, so dass das Verdichtungskriterium anwendbar ist. Die verdichtete Reihe ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^p} = \sum_{n=1}^{\infty} (2^{1-p})^n,$$

dies ist die geometrische Reihe mit $q = 2^{1-p}$. Die Reihe konvergiert also genau dann, wenn $2^{1-p} < 1$ gilt, was genau für $1 - p < 0 \Leftrightarrow p > 1$ der Fall ist.

In diesem Beweis haben wir die folgenden Ungleichungen verwendet:

a) Für $x, y > 0$ gilt $x < y \Leftrightarrow x^p < y^p$ für $p \in \mathbb{Q}_+$ und $x < y \Leftrightarrow x^p > y^p$ für $p \in \mathbb{Q}_-$.

b) Für $x \in \mathbb{R}_+$ und $p, q \in \mathbb{Q}$ gilt $p < q \Leftrightarrow x^p < x^q$ für $x > 1$ und $p < q \Leftrightarrow x^p > x^q$ für $0 < x < 1$.

Zeigen Sie diese Ungleichungen, ähnlich zu Aufgabe P3.2.

Die am häufigsten verwendeten Konvergenzkriterien sind das Quotienten- und Wurzelkriterium, die wir nun besprechen.

Die Idee des Quotientenkriteriums ist, eine geometrische Reihe als Majorante zu verwenden.

Satz 3.48 (Quotientenkriterium). *Sei (a_n) eine Folge (reell oder komplex). Falls es eine Zahl $0 \leq q < 1$ gibt, so dass*

$$|a_{n+1}| \leq q|a_n|$$

für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so konvergiert die Reihe $\sum_n a_n$ absolut. Gilt hingegen $a_n \neq 0$ und

$|a_{n+1}| \geq |a_n|$ *für fast alle* n*, so divergiert* $\sum_n a_n$.

Beweis. Es gibt $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_{n+1}| \leq q|a_n|$ für alle $n \geq N$ gilt. Dann haben wir für alle $k \in \mathbb{N}$

$$|a_{N+k}| \leq q|a_{N+k-1}| \leq \ldots \leq q^k|a_N|,$$

also

$$\sum_{n=1}^{N+k} |a_n| = \sum_{n=1}^{N-1} |a_n| + \sum_{n=N}^{N+k} |a_n| \leq \sum_{n=1}^{N-1} |a_n| + \sum_{j=0}^{k} q^j|a_N|.$$

Für $k \to \infty$ konvergiert die rechte Seite (geometrische Reihe mit $|q| < 1$). Also ergibt sich die Behauptung aus dem Majorantenkriterium.

Falls $|a_{n+1}| \geq |a_n|$ für fast alle n (und $a_n \neq 0$), so ist (a_n) keine Nullfolge. Also divergiert die Reihe in diesem Fall. □

Bemerkungen:

- Beim Quotientenkriterium ist es wichtig, dass $q < 1$ gilt, nicht nur $q \leq 1$. Zum Beispiel gilt für die (divergente) harmonische Reihe (also $a_n = \frac{1}{n}$) die Ungleichung $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} < 1$, aber wegen $\frac{n}{n+1} \to 1$ gibt es kein $q < 1$ mit $\frac{n}{n+1} \leq q$ für fast alle n.
- Gilt für die Quotienten sogar, dass der Grenzwert $\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ existiert und $\leq q < 1$ ist, so folgt die Konvergenz von $\sum_n a_n$ nach Lemma 3.13 a).
- Mit Limes superior und limes inferior (siehe Aufgabe H6.2) lässt sich folgende Variante beweisen: Falls $\limsup_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, so konvergiert $\sum_n a_n$ (absolut), und falls $\liminf_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$, so divergiert $\sum_n a_n$.
- Das Quotientenkriterium hat seinen Namen von der umformulierten Bedingung

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q < 1$$

  für fast alle n. Für diese Formulierung ist es natürlich Voraussetzung, dass $a_n \neq 0$ gilt.

Zeigen Sie, dass das Quotientenkriterium eine hinreichende, aber nicht notwendige Bedingung für die Konvergenz einer Reihe ist, indem Sie es auf $\sum_n \frac{1}{n^2}$ anwenden.

Das Quotientenkriterium erlaubt es uns, die wichtigste Funktion der Analysis einzuführen:

Beispiel 3.49. Für beliebige $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die *Exponentialreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{3.20}$$

absolut.
Beweis: Wir wenden das Quotientenkrit. an: Es gilt $\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\left(\frac{|z|^n}{n!}\right)^{-1} = \frac{|z|}{n+1} \to 0 < 1$.

Definition 3.50. Wir definieren die *Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (und ihre reelle Einschränkung $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) durch

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \tag{3.21}$$

Die *Eulersche Zahl* ist

$$e := \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}. \tag{3.22}$$

Wir zeigen hier, dass e eine irrationale Zahl ist, die $2 < e < 3$ erfüllt. Als untere Schranken an e haben wir $\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} < e$ für alle $N \in \mathbb{N}$, insbesondere also

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 2 + \frac{2}{3} < e.$$

Für eine obere Schranke benutzen wir die Ungleichung $2^n < n!$, die für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$ gilt (leichte Übung). Das ergibt per geometrischer Reihe

$$e \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \sum_{n=4}^{\infty} 2^{-n} = 2 + \frac{2}{3} + 2 - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}) < 3.$$

Die zeigt bereits $2.\overline{6} < e < 2.791\overline{6}$.

Wir wollen nun per Widerspruchsbeweis zeigen, dass e irrational ist: Angenommen, $e = \frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{N}$. Da $2 < e < 3$, muss $b > 1$ sein. Dann ist $b!e = (b-1)!a \in \mathbb{N}$, andererseits aber

$$b!e = \sum_{n=0}^{b} \frac{b!}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b!}{(b+n)!}.$$

Die erste Summe ist eine natürliche Zahl. Die zweite Summe (Reihe) kann abgeschätzt werden durch $\frac{b!}{(b+n)!} = \frac{1}{(b+1)\cdots(b+n)} < \frac{1}{(b+1)^n}$, per Majorantenkriterium also

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b!}{(b+n)!} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(b+1)^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{b+1}} - 1 = \frac{1}{b} < 1.$$

Also ist $x := b!e - \sum_{n=0}^{b} \frac{b!}{n!}$ einerseits eine ganze Zahl, andererseits $0 < x < 1$, ein Widerspruch.

Die Eulersche Zahl lässt sich auch noch auf viele andere Weisen definieren. Zum Beispiel gilt auch

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

In einer Hausaufgabe werden Sie zeigen: Die Exponentialfunktion erfüllt für alle $x, y \in \mathbb{C}$ die Funktionalgleichung

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y).$$

Weiterhin gilt für alle $x \in \mathbb{Q}$

$$\exp(x) = e^x.$$

Diese Gleichung gilt sogar für alle $x \in \mathbb{R}$, doch das zeigen wir erst später.

Nach dieser kleinen Exkursion zur Exponentialfunktion besprechen wir das Wurzelkriterium. Als Vorbereitung erinneren wir uns an den Limes superior aus Aufgabe H6.2, der per Definition der größte Häufungspunkt einer reellen Folge ist (das ist gleich dem Grenzwert der Folge, falls er existiert.)

Satz 3.51. *Sei (a_n) eine Folge (reell oder komplex). Falls* $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, *so konvergiert $\sum_n a_n$ absolut. Falls hingegen $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, so divergiert $\sum_n a_n$ (das ist insbesondere für* $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ *der Fall).*

Beweis. Falls $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, so gibt es $0 < q < 1$ und $N \in \mathbb{N}$, so dass $\sqrt[n]{|a_n|} < q$ für alle $n \geq N$. Diese Ungleichung ist äquivalent zu $|a_n| < q^n$. Also gilt für $k \geq N$

$$\sum_{n=1}^{k} |a_n| \leq \sum_{n=1}^{N-1} |a_n| + \sum_{n=N}^{k} q^n,$$

und wegen $0 < q < 1$ erhalten wir wieder eine geometrische Reihe als Majorante, was die absolute Konvergenz von $\sum_n a_n$ beweist.

Gilt hingegen $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für unendlich viele n, so ist (a_n) keine Nullfolge; die Reihe divergiert also. $\square$

Genau wie das Quotientenkriterium ist das Wurzelkriterium eine hinreichende aber nicht notwendige Bedingung für die Konvergenz einer Folge.

Beispiel 3.52. Sei $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} nq^n$ absolut.
Beweis mit Wurzelkriterium: Wir zeigen zuerst den auch sonst interessanten Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Da $\sqrt[n]{n} \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, müssen wir nur zeigen, dass für jedes $\varepsilon > 0$ die Ungleichung $\sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon$ für fast alle n stimmt. Diese Ungleichung ist äquivalent zu $\frac{n}{(1+\varepsilon)^n} < 1$; sie gilt also sicher, falls $\frac{n}{(1+\varepsilon)^n} \to 0$ eine Nullfolge ist.

Um das zu zeigen, verwenden wir die Binomische Formel (Satz 2.9): Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$(1+\varepsilon)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varepsilon^k > \binom{n}{2} \varepsilon^2 = \frac{n(n-1)\varepsilon^2}{2}.$$

Aus dieser Abschätzung erhalten wir $\frac{n}{(1+\varepsilon)^n} < \frac{2}{(n-1)\varepsilon^2} \to 0$, was den Beweis von $\sqrt[n]{n} \to 1$ abschließt.

Nun wenden wir das Wurzelkriterium auf die Reihe $\sum_n a_n$ mit $a_n = nq^n$ an: Es gilt $\sqrt[n]{n|q|^n} = \sqrt[n]{n}|q| \to |q| < 1$, was per Wurzelkriterium die absolute Konvergenz von $\sum_n nq^n$ beweist.

Eine wichtige Anwendung des Wurzelkriteriums gibt es bei der Diskussion der Konvergenz von sogenannten *Potenzreihen*.

Definition 3.53. Eine *Potenzreihe* ist eine Reihe der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n$, wobei (a_n) eine beliebige (reelle oder komplexe) Folge ist, und z eine reelle oder komplexe Zahl.

Die a_n nennt man die *Koeffizienten* der Potenzreihe. Für $z = 0$ konvergiert die Potenzreihe trivialerweise. Je größer $|z|$, desto "schwieriger" ist es für die Potenzreihe, zu konvergieren, denn z.B. muss ja $|a_n||z|^n$ eine Nullfolge sein. Der folgende Satz klärt das Konvergenzverhalten.

Satz 3.54. *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe. Der* Konvergenzradius R *ist definiert als*

$$R := \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

mit den Konventionen $R = \infty$ für $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ und $R = 0$ für $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ verwendet werden.

Dann gilt: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergiert absolut für $|z| < R$ und divergiert für $|z| > R$.

Beweis. Wir verwenden das Wurzelkriterium und betrachten $\sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \sqrt[n]{|a_n|}$. Ist nun $|z| < R$, so haben wir $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n z^n|} < 1$, also absolute Konvergenz. Ist $|z| > R$, so haben wir $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n z^n|} > 1$, also Divergenz. □

Beachten Sie, dass für $|z| = R$ keine Aussage getroffen wird. In diesem Fall kann die Potenzreihe konvergieren oder divergieren.

Der Begriff *Konvergenzradius* wird durch diesen Satz gerechtfertigt: Für z innerhalb der komplexen Kreisscheibe mit Radius R (ohne Rand) liegt Konvergenz der Potenzreihe vor, außerhalb Divergenz.

Beispiel 3.55. Wir betrachten noch einmal die Exponentialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, die ein Beispiel einer Potenzreihe ist. Da diese Reihe für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergiert, hat sie Konvergenzradius $R = \infty$. Also gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0.$$

Viele spezielle Funktionen werden wir später als Potenzreihen einführen (zB Sinus, Kosinus). Potenzreihen werden auch beim Approximieren von geeigneten Funktionen durch Taylorreihen auftreten.

3.8 Die reellen Zahlen: Konstruktion und Reihendarstellungen

Zum Abschluss von Kapitel 3 wenden wir uns der Struktur der reellen Zahlen zu.

Zuerst diskutieren wir Reihendarstellungen von reellen Zahlen, die Sie für Dezimaldarstellungen z.B. in der Form

$$3{,}125 = 3 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3}$$

natürlich kennen. Genau so gut können wir reelle Zahlen in Binär- oder Hexadezimalform darstellen, zB

$$(3{,}125)_{\text{dez}} = 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-3} = (11{,}001)_{\text{bin}}.$$

Allgemeiner betrachten wir Reihendarstellungen mit einer beliebigen Basis $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$, also zB auch Binärdarstellungen $b = 2$.

Satz 3.56. *Sei $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$. Jede reelle Zahl $x \geq 0$ hat eine Darstellung als konvergente Reihe der Form*

$$x = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k \cdot b^{-k} \tag{3.23}$$

mit Koeffizienten $a_k \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$, und jede Reihe der Form (3.23) stellt eine reelle Zahl dar.

Negative reelle Zahlen x stellt man dann natürlich als $x = -\sum_{n=-m}^{\infty} a_k \cdot b^{-k}$ dar.

Der Beweis dieses Satzes erfolgt in den Hausaufgaben. Beachten Sie, dass die Darstellung (3.23) nicht ganz eindeutig ist, so ist z.B. im Dezimalsystem

$$0{,}\bar{9} = \sum_{n=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-n} = 9 \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} - 1 \right) = 1{,}0.$$

Dies ist allerdings quasi die einzige Nichteindeutigkeit der Reihendarstellung (3.23): Sind $\sum_{k=-m}^{\infty} a_k \cdot b^{-k} = x = \sum_{k=-m}^{\infty} a'_k \cdot b^{-k}$ zwei Dezimaldarstellungen derselben reellen Zahl x, und gilt $a_k \neq b-1$, $a'_k \neq b-1$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$, so folgt $a_k = a'_k$ für alle k.

Um das zu beweisen, gehen wir per Widerspruch vor und nehmen an, dass $a_n < a'_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Weiterhin dürfen wir annehmen, dass diese Zahl n die minimale Zahl mit der Eigenschaft $a_n \neq a'_n$ ist. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\, b^{-k} < \sum_{k=n+1}^{\infty} (b-1)\, b^{-k} &= \sum_{k=n+1}^{\infty} b^{-(k-1)} - \sum_{k=n+1}^{\infty} b^{-k} \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} b^{-k} - \sum_{k=n+1}^{\infty} b^{-k} = b^{-n}
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
x = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k \cdot b^{-k} &= \sum_{k=-m}^{n-1} a_k \cdot b^{-k} + a_n b^{-n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k b^{-k} \\
&< \sum_{k=-m}^{n-1} a'_k \cdot b^{-k} + (a'_n - 1) b^{-n} + b^{-n} = \sum_{k=-m}^{n} a'_k\, b^{-k} \leq x,
\end{aligned}$$

ein Widerspruch.

Wir halten noch folgende Beobachtung fest: Sind $x = \sum_{k=-m}^{\infty} x_k \, b^{-k}$ und $y = \sum_{k=-m}^{\infty} y_k \, b^{-k}$ zwei reelle Zahlen mit $x_k = y_k$ für $k = -m, \dots, n-1$ für ein $n \in \mathbb{Z}$, und $x_n \neq y_n$, so gilt

$$\begin{aligned} |x-y| &= \left| \sum_{k=-m}^{\infty} (x_k - y_k) b^{-k} \right| = \left| (x_n - y_n) b^{-n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} (x_k - y_k) b^{-k} \right| \\ &\geq \left| |x_n - y_n| b^{-n} - \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (x_k - y_k) b^{-k} \right| \right| . \end{aligned}$$

Die Reihe in der letzten Zeile kann abgeschätzt werden durch

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (x_k - y_k) b^{-k} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} (b-1) b^{-k} = b^{-n},$$

so dass wir erhalten:

$$|x-y| \geq (|x_n - y_n| - 1) b^{-n}. \tag{3.24}$$

Wir kommen jetzt zu der Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ zurück (vgl. Seite 24).

Satz 3.57. *Das Intervall $I = \{x \in \mathbb{R} : \ 0 < x < 1\}$ ist überabzählbar. Insbesondere ist $\mathbb{R}$ überabzählbar.*

Beweis. Wir verwenden das sogenannte Cantorsche Diagonalverfahren. Angenommen, I ist abzählbar, d.h. es gibt eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to I, n \mapsto x_n$, also $I = \{x_n : \ n \in \mathbb{N}\}$. Dann lässt sich jedes x_n in Dezimaldarstellung schreiben,

$$x_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(n)} 10^{-k}.$$

Nun betrachten wir die Zahl

$$u := \sum_{k=1}^{\infty} u_k \, 10^{-k} \in I, \qquad u_k := \begin{cases} a_k^{(k)} + 2 & a_k^{(k)} < 5 \\ a_k^{(k)} - 2 & a_k^{(k)} \geq 5 \end{cases}.$$

Damit ist sichergestellt, dass sich u in der k-ten Nachkommastelle von x_k unterscheidet, für alle $k \in \mathbb{N}$. Da die Dezimaldarstellung nicht ganz eindeutig ist, argumentieren wir noch genauer. Mit der obigen Abschätzung (3.24) erhalten wir dann $|u - x_n| \geq 10^{-n}$, da sich u und x_n spätestens in der n-ten Nachkommastelle unterscheiden, und zwar um 2.

Also ist $u \neq x_n$ für alle n, d.h. die Zahl u kommt nicht in der Liste $\{x_k : \ k \in \mathbb{N}\}$ vor, was ein Widerspruch zu unserer Annahme ist. $\square$

Die Konstruktion von $\mathbb{R}$

In diesem Abschnitt umreißen wir kurz, wie die reellen Zahlen, die wir bisher nur durch Axiomatik kennen, konstruiert werden können.

Wenn wir $\mathbb{R}$ *konstruieren* möchten, müssen wir allein auf Grundlage der rationalen Zahlen argumentieren. Wir betrachten deshalb rationale Folgen, für die die Begriffe Konvergenz und Cauchyfolge sinnvoll[10], aber im Allgemeinen unterschiedlich sind, da $\mathbb{Q}$ nicht vollständig ist. Beachten Sie, dass Konvergenz Existenz eines *rationalen* Grenzwertes bedeutet, wenn wir nur in $\mathbb{Q}$ arbeiten und $\mathbb{R}$ noch nicht kennen.

Natürlich ist jede konvergente Folge eine Cauchyfolge, aber eine rationale Cauchyfolge muss nicht konvergent sein, da der Grenzwert nur in dem vergrößerten Zahlenkörper $\mathbb{R} \supsetneq \mathbb{Q}$ existieren kann, den wir erst konstruieren möchten.

Die Idee ist, reelle Zahlen durch rationale Cauchyfolgen (a_n) zu beschreiben. Falls (a_n) konvergiert (gegen eine rationale Zahl a), so soll die Cauchyfolge die rationale (insbesondere also reelle) Zahl a beschreiben. Diese Beschreibung ist hochgradig redundant, da viele konvergente Folgen den gleichen Grenzwert haben. Wir gehen deshalb wie folgt vor:

Sei C die Menge aller rationalen Cauchyfolgen. Wir definieren eine Relation G auf $C \times C$ durch

$$G := \{((a_n), (b_n)) : \lim_n (a_n - b_n) = 0\}.$$

Das heißt: Zwei Folgen stehen in Relation genau dann wenn ihre Differenz eine Nullfolge ist. Wir schreiben in diesem Fall auch kurz $(a_n) \sim (b_n)$ anstelle von $((a_n), (b_n)) \in G$.

Diese Relation ist ein Beispiel einer *Äquivalenzrelation* – ein Begriff, den Sie in der Linearen Algebra näher kennenlernen. Das bedeutet die drei Eigenschaften

- Für alle $(a_n) \in C$ gilt $(a_n) \sim (a_n)$ (Reflexivität)
- Falls $(a_n) \sim (b_n)$, so auch $(b_n) \sim (a_n)$ (Symmetrie)
- Falls $(a_n) \sim (b_n)$ und $(b_n) \sim (c_n)$, so auch $(a_n) \sim (c_n)$ (Transitivität)

Zu jeder Folge (a_n) betrachten wir ihre *Äquivalenzklasse*

$$[(a_n)] := \{(b_n) \in C : (b_n) \sim (a_n)\}.$$

Aus den Eigenschaften einer Äquivalenzrelation folgt, dass je zwei Äquivalenzklassen entweder gleich oder disjunkt (leerer Schnitt) sind. Die Menge aller Äquivalenzklassen, geschrieben als

$$C/\sim \ := \{[(a_n)] : (a_n) \in C\},$$

ist unser Modell für den Körper der rellen Zahlen $\mathbb{R}$. Die rationalen Zahlen finden Sie dabei in $C/\sim$ wieder, indem Sie die Abbildung $[(a_n)] \mapsto \lim_n a_n$ betrachten: Ist (a_n) konvergent, so ist dieser Grenzwert eine rationale Zahl, die nicht von der Wahl des Repräsentanten der Äquivalenzklasse abhängt.

[10] In diesem Fall wählen wir auch unser $\varepsilon > 0$ nur rational, was aber kein Problem ist.

Um $C/\sim$ zu einem vollständig angeordneten Körper zu machen, müssen wir die Körperoperationen definieren:

$$[(a_n)] + [(b_n)] := [(a_n + b_n)], \qquad [(a_n)] \cdot [(b_n)] := [(a_n \cdot b_n)]$$

Es zeigt sich, dass dies ein Körper ist mit dem Nullelement $[(0)]$ (die Äquivalenzklasse der konstanten Nullfolge).

Eine Ordnung definieren wir dann durch

$$[(a_n)] > 0 :\Leftrightarrow (\exists \varepsilon \in \mathbb{Q}_+) : \{n \in \mathbb{N} : \ a_n \leq \varepsilon\} \text{ endlich.}$$

Auf Grundlage dieser Definitionen lässt sich nachprüfen, dass $C/\sim$ die Struktur eines geordneten Körpers hat, der außerdem vollständig ist. Gemäß Def. 2.34 handelt es sich dann notwendigerweise um einen zu $\mathbb{R}$ isomorphen Körper.

Wir werden den Beweis, dass $C/\sim$ ein vollständig geordneter Körper ist, hier allerdings nicht führen. Für mehr Informationen zu Äquivalenzrelationen verweisen wir auf Lineare Algebra, für die Details der Konstruktion auf $\mathbb{R}$ auf die Lehrbücher.

4 Stetige Funktionen

Dieses Kapitel eröffnet einen weiteren Themenblock der Vorlesung, in dem wir uns nicht mehr mit Folgen und Reihen, sondern stetigen und differenzierbaren Funktionen befassen werden. Sehr grob gesprochen sind dies Abbildungen $f : X \to Y$ zwischen Mengen X, Y, auf denen ein Abstandsbegriff definiert ist und die die Eigenschaft haben, dass kleine Änderungen in $x \in X$ nur kleine Änderungen in $f(x) \in Y$ nach sich ziehen (dies bedarf natürlich einer Präzisierung!)

Häufig werden X, Y Teilmengen von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ sein, aber auch andere Mengen spielen eine Rolle. Wir führen deshalb in einem einführenden Abschnitt einige allgemeinere Begriffe ein.

4.1 Metrische Räume und topologische Grundbegriffe

Definition 4.1. Ein *metrischer Raum* ist eine Menge X zusammen mit einer *Metrik*, das ist eine Abbildung

$$d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

mit den Eigenschaften (für beliebige $x, y \in X$)

a) $d(x, y) = 0$ ist äquivalent zu $x = y$.

b) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)

c) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung)

Die Idee ist, dass $d(x, y)$ den Abstand zwischen x und y angibt.

Wie sehr oft in der Mathematik haben wir hier eine Struktur, die aus einer Menge X und zusätzlichen Daten (hier: die Abstandsfunktion d) besteht. Streng genommen sollte man also von dem Paar (X, d) als einem metrischen Raum sprechen. Häufig wird stattdessen kurz "Sei X ein metrischer Raum" gesagt, was bedeutet, dass X mit einer Metrik ausgestattet ist, die wir aber namentlich nicht näher erwähnen. Auf einer Menge X kann es mehrere Metriken geben.

Beispiel 4.2.

a) $X = \mathbb{R}$ mit $d(x, y) = |x - y|$ ist ein metrischer Raum. Die Verifikation der Metrik-Eigenschaften ist hier sehr einfach, tatsächlich stellen die in Def. 4.1 geforderten Eigenschaften von d eine Verallgemeinerung der Eigenschaften des Abstands zwischen reellen Zahlen dar.

b) $X = \mathbb{C}$ mit $d(z, w) = |z - w|$ ist ebenfalls ein metrischer Raum. Auch für dieses Beispiel haben wir alle Metrik-Eigenschaften bereits geprüft.

c) Jede Teilmenge X von $\mathbb{R}$ (oder von $\mathbb{C}$, oder von $\mathbb{Q}$) ist mit der von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ auf $X \times X$ eingeschränkten Metrik $d(x, y) = |x - y|$ ebenfalls ein metrischer Raum.

d) Eine beliebige Menge X wird mit Hilfe der *diskreten Metrik*

$$d(x,y) := \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

zu einem metrischen Raum. Die Verifikation der Metrikeigenschaften ist hier als leichte Übung überlassen.

e) Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann sind auch die Vektorräume $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ metrische Räume. Schreiben wir $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_k \in \mathbb{R}$ (bzw. $x_k \in \mathbb{C}$), so ist eine mögliche Metrik

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2}.$$

Wir sehen sofort, dass $d(x,y) = 0$ zu $x = y$ äquivalent ist, und dass $d(x,y) = d(y,x)$ gilt. Der Beweis der Dreiecksungleichung erfolgt in den Übungen.

In einem metrischen Raum (X,d) machen die Begriffe konvergente Folge und Cauchy-Folge mit minimalen Änderungen gegenüber unseren bisherigen Definitionen Sinn. Wir müssen nur Abstände der Art $|x-y|$ durch $d(x,y)$ ersetzen.

Definition 4.3. Sei (X,d) ein metrischer Raum.

a) Eine Folge $a : \mathbb{N} \to X$ heißt konvergent, falls es $x \in X$ gibt, so dass für jede positive reelle Zahl $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$d(a_n, x) < \varepsilon$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ gilt.
Bemerkung: Dies ist äquivalent dazu, dass die reelle Folge der Abstände $(d(a_n,x))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Null konvergiert. Wir schreiben dann wie gewohnt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$ oder $a_n \to x$; bemerken aber, dass diese Ausdrücke von der verwendeten Metrik abhängen.

b) Eine Folge $a : \mathbb{N} \to X$ heißt *Cauchy-Folge*, falls es für jede positive reelle Zahl $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$d(a_n, a_m) < \varepsilon$$

für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n, m \geq N$ gilt.

c) X heißt *vollständig*, falls jede Cauchy-Folge in X konvergiert.

Aufgrund der sehr großen Ähnlichkeit zu unseren bisherigen Begriffen übertragen sich viele Aussagen, die wir im vorherigen Kapitel über komplexe Folgen bewiesen haben, auf metrische Räume. Beachten Sie aber, dass ein metrischer Raum kein Körper oder Vektorraum zu sein braucht.

Gehen Sie alle blau markierten Elemente von Kapitel 3 durch (also alle Lemmata, Sätze, Korollare) und prüfen Sie, ob sie auch in einem allgemeinen metrischen Raum oder zumindest in einem allgemeinen vollständigen metrischen Raum gelten.
Beispiele dazu: Lemma 3.5 gilt in jedem metrischen Raum, da der Beweis nur die Dreiecksungleichung benutzt. Satz 3.11 macht in einem allgemeinen metrischen Raum X hingegen keinen Sinn, da es keinen Begriff von Addition oder Multiplikation in X zu geben braucht. Satz 3.30 gilt per Definition in jedem vollständigen metrischen Raum.

Im allgemeinen Rahmen von metrischen Räumen führen wir nun noch einige topologische Grundbegriffe ein.

Definition 4.4. Sei (X, d) ein metrischer Raum.

a) Für $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ heißt

$$U_\varepsilon(x) := \{y \in X : \; d(x, y) < \varepsilon\}$$

ε-Umgebung von x.

b) Eine Teilmenge $O \subset X$ heißt *offen*, falls es für jedes $x \in O$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $U_\varepsilon(x) \subset O$.

c) Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt *abgeschlossen*, falls $X \backslash A$ offen ist.

d) Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt *Umgebung von einem Punkt* $x \in X$, falls $U_\varepsilon(x) \subset U$ für ein $\varepsilon > 0$.

Einige oft auftretende Beispiele sind hier zusammengestellt:

Beispiel 4.5.

a) Für reelle Zahlen $a < b$ ist das *offene Intervall*

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : \; a < x < b\} \tag{4.1}$$

eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$.
Beweis: Sei $x \in (a, b)$. Wähle $\varepsilon < \min\{x - a, b - x\}$. Dann ist

$$U_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset (a, b).$$

b) Für reelle Zahlen $a < b$ ist das *abgeschlossene Intervall*

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : \; a \leq x \leq b\} \tag{4.2}$$

eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$.
Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}\backslash[a, b] = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$. Wähle $\varepsilon < \min\{|a - x|, |b - x|\}$. Dann gilt $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset (-\infty, a) \cup (b, \infty)$. Also ist $\mathbb{R}\backslash[a, b]$ offen und damit $[a, b]$ abgeschlossen.

c) Die halboffenen Intervalle $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : \; a \leq x < b\}$ und $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : \; a < x \leq b\}$ sind weder offen noch abgeschlossen.

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass $[a, b)$ nicht offen ist. Dies ist so, weil der Randpunkt a in $[a, b)$ enthalten ist: Für beliebiges $\varepsilon > 0$ enthält die ε-Umgebung $U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ Punkte, die nicht in $[a, b)$ liegen. Also ist $[a, b)$ nicht offen.

Das Komplement $\mathbb{R} \backslash [a, b) = (-\infty, a) \cup [b, \infty)$ enthält den Randpunkt b. Wir können also genau wie eben argumentieren, dass $(-\infty, a) \cup [b, \infty)$ nicht offen und damit $[a, b)$ nicht abgeschlossen ist.

d) In einem beliebigen metrischen Raum (X, d) sind ε-Umgebungen offen.
Beweis: Für $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ betrachten wir die ε-Umgebung $U_\varepsilon(x)$. Sei $y \in U_\varepsilon(x)$ und wähle $\varepsilon' := \varepsilon - d(x, y) > 0$. Dann gilt für alle $z \in U_{\varepsilon'}(y)$

$$d(z, x) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + \varepsilon' = \varepsilon.$$

Also gilt $z \in U_\varepsilon(x)$, d.h. $U_{\varepsilon'}(y) \subset U_\varepsilon(x)$.

Die Intervalle $(a, b), [a, b], [a, b), (a, b]$ treten sehr häufig auf, auch in der erweiterten Form wie z.B. $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x\}$. In der Notation ist das offene Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$ nicht von dem geordneten Paar $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ zu unterscheiden, aber aus dem Kontext ist immer klar, welche Bedeutung gemeint ist.

Eine andere verbreitete Notation ist $]a, b[:= (a, b)$, $[a, b[:= [a, b)$, etc.

Die offenen Teilmengen eines metrischen Raumes haben einige Eigenschaften, die wir im nächsten Satz notieren. Diese Eigenschaften bilden die Grundlage der *Topologie*.

Satz 4.6. *Sei (X, d) ein metrischer Raum.*

a) $\emptyset$ und X sind sowohl offen als auch abgeschlossen.

b) Endliche Schnitte von offenen Mengen sind offen: Sind $U_1, \ldots, U_n \subset X$ offen, so ist auch $U_1 \cap \ldots \cap U_n = \bigcap_{k=1 \ldots n} U_k \subset X$ offen.

c) Beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen: Ist I eine Menge und $(U_i)_{i \in I}$ eine Menge offener Mengen, so ist $\bigcup_{i \in I} U_i \subset X$ auch offen.

Beweis. a) Die leere Menge $\emptyset$ und der ganze Raum X sind trivialerweise offen. Da sie Komplemente voneinander sind ($X \backslash X = \emptyset$), sind sie auch abgeschlossen.

b) Sei $x \in U_1 \cap \ldots \cap U_n$, also $x \in U_k$ für alle $k = 1, \ldots, n$. Dann gibt es $\varepsilon_k > 0$ so, dass $U_{\varepsilon_k}(x) \subset U_k$, $k = 1, \ldots, n$. Wähle $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$. Dann gilt $U_\varepsilon(x) \subset U_k$ für alle $k = 1, \ldots, n$, also $U_\varepsilon(x) \subset U_1 \cap \ldots \cap U_n$.

c) Sei $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$, d.h. es gibt ein $i_0 \in I$ mit $x \in U_{i_0}$. Dann gibt es $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. □

Geben Sie ein Beispiel einer unendlichen Menge von offenen Mengen, deren Schnitt nicht offen ist.

4.2 Stetige Abbildungen zwischen metrischen Räumen

Wir führen nun den für die ganze Analysis zentralen Begriff einer *stetigen Funktion* ein. Dazu betrachten wir eine Abbildung (=Funktion) $f : X \to Y$ zwischen zwei metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y) und möchten formalisieren, dass "kleine Änderungen von $x \in X$ nur kleine Änderungen in $f(x) \in Y$ nach sich ziehen". Genauer gesagt soll das heißen, dass $d_Y(f(x_1), f(x_2))$ beliebig klein ist, wenn nur $d_X(x_1, x_2)$ hinreichend klein ist. Was "klein" heißt, können wir mit Hilfe der Metriken d_X und d_Y ausdrücken.

Definition 4.7. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, und $p \in X$. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *stetig in* p, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in X$ mit $d_X(x, p) < \delta$ stets $d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$ gilt. Formal logisch notiert also:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) : \quad d_X(x, p) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon.$$

Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt *stetig*, falls sie in jedem Punkt $p \in X$ stetig ist.

Genau wie bei der Definition der Konvergenz einer Folge ist die Reihenfolge der Quantoren hier wichtig. Insbesondere kann δ von dem Punkt p und ε abhängen.

Einige Beispiele werden diesen wichtigen Begriff illustrieren.

Beispiel 4.8. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, und $f : X \to Y$ eine Abbildung.

a) Konstante Funktionen ($f(x) = c$ für alle $x \in X$) sind stetig: Hier können wir zu jedem $\varepsilon > 0$ ein beliebiges $\delta > 0$ wählen, da wir immer $d_Y(f(x), f(p)) = d_Y(c, c) = 0$ haben.

b) Für $X = Y$ ist die Identitätsabbildung $f : X \to X$, $f(x) = x$ stetig: Hier können wir zu jedem $\varepsilon > 0$ unser δ als $\delta := \varepsilon$ wählen. Gilt dann $d(x, p) < \delta$, so haben wir $d(f(x), f(p)) = d(x, p) < \delta = \varepsilon$.

c) Sei $X = Y = \mathbb{R}$ und $f(x) = x^2$. Dann ist f stetig.
Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Wir betrachten zuerst den Punkt $p = 0$ gesondert. Dann wählen wir $\delta := \sqrt{\varepsilon}$ und erhalten für $|x - 0| < \sqrt{\varepsilon}$ die gewünschte Ungleichung $|x^2 - 0^2| = |x|^2 < \varepsilon$.

Falls $p \neq 0$, so betrachten wir zunächst $\delta < |p|$. Dann gilt für $|x - p| < \delta$ zunächst die Ungleichung $|x + p| \leq |x - p| + 2|p| < \delta + 2|p| < 3|p|$, und damit

$$|x^2 - p^2| = |x - p| \cdot |x + p| < 3|p|\delta.$$

Wählen wir also $\delta < \min\{|p|, \frac{\varepsilon}{3|p|}\}$, so gilt für alle x mit $|x - p| < \delta$ die gewünschte Ungleichung $|x^2 - p^2| < \varepsilon$.

d) Sei $X = Y = \mathbb{R}$ und

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

Dann ist f bei $p = 0$ unstetig.
Jede δ-Umgebung $U_\delta(0) = (-\delta, \delta)$ von 0 enthält positive und negative Zahlen. Aber für positives x gilt $f(x) = 1$, also $|f(x) - f(0)| = 1$. Wählen wir also $\varepsilon < 1$, so gibt es kein $\delta > 0$, so dass für $|x| < \delta$ stets $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$ gilt. Also ist f in $p = 0$ unstetig.
In diesem Beispiel hat f eine Sprungstelle bei 0, dies ist der Grund für die Unstetigkeit bei 0.

a) Zeigen Sie, dass

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} x^2 & x \geq 1 \\ -x^2 & x < 1 \end{cases}$$

unstetig ist.

b) Sei (X, d) ein metrischer Raum und $y \in X$. Zeigen Sie, dass $f : X \to \mathbb{R}$, $f(x) := d(x, y)$, stetig ist.

Unsere Definition von Stetigkeit wird auch als "ε-δ-Kriterium für Stetigkeit" bezeichnet. Wir geben nun ein äquivalentes Kriterium an, dass eine Verbindung zu Folgen herstellt.

Satz 4.9 (Folgenkriterium für Stetigkeit). *Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen zwei metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y). Dann ist f stetig in einem Punkt $p \in X$ genau dann, wenn für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} x_n = p$*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(p)$$

gilt.

Beweis. ($\Leftarrow$) Wir nehmen an, dass f bei p unstetig ist. Das heißt nach Negation der ε-δ-Definition:

$$(\exists \varepsilon > 0)\,(\forall \delta > 0)\,(\exists x \in X) \;:\; d_X(x, p) < \delta \text{ und } d_Y(f(x), f(p)) \geq \varepsilon.$$

Für dieses $\varepsilon > 0$ existiert also für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Punkt $x_n \in X$ mit $d_X(x_n, p) < \frac{1}{n}$ (d.h. wir betrachten $\delta = \frac{1}{n}$), aber $d_Y(f(x_n), f(p)) \geq \varepsilon$. Die so gewählte Folge erfüllt $x_n \to p$, aber $f(x_n) \not\to f(p)$. Im Umkehrschluss heißt dass, das $(x_n \to p \Rightarrow f(x_n) \to f(p))$ für alle Folgen (x_n) die Stetigkeit von f in p impliziert.

($\Rightarrow$) Angenommen, f ist stetig in p. Sei $\varepsilon > 0$, und sei $x_n \to p$ eine konvergente Folge. Da f bei p stetig ist, gibt es $\delta > 0$ so, dass für $d_X(x_n, p) < \delta$ stets $d_Y(f(x_n), f(p)) < \varepsilon$ gilt. Da $x_n \to p$ konvergiert, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für $n \geq N$ stets $d_X(x_n, p) < \delta$ gilt. Das heißt also, dass wir für $n \geq N$ stets $d_Y(f(x_n), f(p)) < \varepsilon$ haben, d.h. $f(x_n) \to f(p)$. $\square$

Gut merken lässt sich diese Charakterisierung der Stetigkeit als

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n).$$

In diesem Sinne dürfen stetige Funktionen also mit Grenzwerten vertauscht werden.

Beispiel 4.10. Mit dem Folgenkriterium sehen wir einfacher ein, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$, stetig ist: Sei (x_n) eine reelle Folge mit $x_n \to p$. Dann gilt nach Satz 3.11 auch $x_n^2 \to p^2$. Also ist f stetig.

Mit dem Folgenkriterium sehen wir auch, dass die Beispielfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

bei $p = 0$ nicht stetig ist: Denn die Folge $x_n = \frac{1}{n}$ konvergiert gegen 0, aber $f(\frac{1}{n}) = 1 \to 1 \neq 0 = f(0)$.

Die Beobachtung aus dem ersten Beispiel ist viel allgemeiner als das Beispiel:

Satz 4.11. *Sei X ein metrischer Raum, $f, g : X \to \mathbb{C}$ stetige Funktionen, und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.*

a) Die Funktion $\lambda f + \mu g : X \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \lambda f(x) + \mu g(x)$, ist stetig.

b) Die Funktion $fg : X \to \mathbb{C}$, $x \mapsto f(x)g(x)$, ist stetig.

c) Ist $f(x) \neq 0$ für alle $x \in X$, so ist auch $X \ni x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ stetig.

Beweis. Die Behauptungen ergeben sich sofort aus Satz 3.11 und der Folgencharakterisierung (Satz 4.9) von Stetigkeit. Als Beispiel geben wir den Beweis von b): Ist $x_n \to p$ eine gegen p konvergierende Folge in X, so gilt wegen der Stetigkeit von f und g auch $f(x_n) \to f(p)$, $g(x_n) \to g(p)$. Nach Satz 3.11 b) gilt $f(x_n)g(x_n) \to f(p)g(p)$, was nach Satz 4.9 die Stetigkeit der Produktfunktion fg impliziert. □

Mit dem Begriff eines Vektorraums (siehe Lineare Algebra) sehen wir, dass Teil a) besagt, dass die Menge aller stetiger Funktionen von einem metrischen Raum X nach $\mathbb{C}$ (oder auch nach $\mathbb{R}$) ein Vektorraum ist, da diese Menge unter Linearkombinationen abgeschlossen ist (insbesondere enthält sie als Nullvektor die Nullfunktion $x \mapsto 0$ für alle $x \in X$). Dieser Vektorraum wird mit

$$C(X) := \{f : X \to \mathbb{C} : \ f \text{ stetig}\}$$

bezeichnet (C für "continuous" = stetig) und uns noch oft begegnen.

Beispiel 4.12.

a) Eine *Polynomfunktion* ist eine Funktion der Form

$$P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad P(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n \, z^n,$$

mit $N \in \mathbb{N}$, $a_0, \ldots, a_N \in \mathbb{C}$ fest[a].

Polynomfunktionen sind stetig.
Beweis: Wir wissen bereits, dass die konstante Funktion $z \mapsto 1$ und die Identität $z \mapsto z$ stetig sind. Ein allgemeines Polynom entsteht aus diesen Funktionen durch

Produkte und Linearkombinationen, ist nach Satz 4.9 also stetig.

b) Sind P, Q zwei Polynomfunktionen, so können wir die neue Funktion

$$\frac{P}{Q} : \{z \in \mathbb{C} : \; Q(z) \neq 0\} \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto \frac{P(z)}{Q(z)}$$

betrachten[b]. Funktionen dieser Art heißen *rational*. Rationale Funktionen sind stetig.
Beweis: Nach Satz 4.11 c) ist $\frac{1}{Q}$ auf $\{z \in \mathbb{C} : \; Q(z) \neq 0\}$ stetig, wo P als Polynom ebenfalls stetig ist. Nach Satz 4.11 b) ist dann auch das Produkt dieser Funktionen stetig.

c) Explizites Beispiel: Die Funktion

$$f(z) := \frac{z^3 - 1}{(z+1)(z-7)}$$

ist als Abbildung von $\mathbb{C}\backslash\{-1, 7\}$ nach $\mathbb{C}$ stetig.

[a]Wie in der Orientierungswoche erklärt, heißt $\text{grad}(P) := \max\{n : \; a_n \neq 0\}$ *Grad* von P, falls $P \neq 0$ und $\text{grad}(0) := -\infty$. Der Koeffizient $a_{\text{grad}(P)}$ heißt *Leitkoeffizient* von P.

[b]Wie in der Orientierungswoche erklärt wurde, hat ein Polynom n-ten Grades höchstens n Nullstellen.

Wir sprechen in diesem Beispiel und auch sonst oft von komplexwertigen Funktionen, d.h. Funktionen $f : X \to \mathbb{C}$. Dies beinhaltet als Spezialfall immer reellwertige Funktionen, d.h. $f : X \to \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Eine weitere Art und Weise, stetige Funktionen zu bilden, ist Komposition (Def. 1.28).

Satz 4.13. *Seien (X, d_X), (Y, d_Y), (Z, d_Z) metrische Räume und $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ stetig. Dann ist auch $g \circ f : X \to Z$ stetig.*

Beweis. Sei $p \in X$ and $x_n \to p$ eine gegen p konvergente Folge. Dann gilt $f(x_n) \to f(p)$ aufgrund der Stetigkeit von f, und $(g \circ f)(x_n) = g(f(x_n)) \to g(f(p)) = (g \circ f)(p)$ aufgrund der Stetigkeit von g. Also ist $g \circ f$ stetig. □

Beispiel 4.14. Wir können an dieser Stelle noch keine guten Beispiele geben, da wir noch nicht über hinreichend viele interessante stetige Funktionen verfügen. Sobald wir aber wissen, dass z.B. die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist (das ist richtig, Beweis kommt später), wissen wir dann auch, dass z.B. die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \exp(-x^2)$ stetig ist.

Neben dem Folgenkriterium für Stetigkeit gibt es noch ein "topologisches Kriterium" für Stetigkeit, das durch offene Mengen formuliert ist. Dies ist die allgemeinste Form der Stetigkeit, die sich auch auf Situationen jenseits von metrischen Räumen verallgemeinert.

Satz 4.15. *Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, $p \in X$, und $f : X \to Y$ eine Abbildung.*

a) f ist genau dann stetig in p, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $f(U_\delta(p)) \subset U_\varepsilon(f(p))$.

b) f ist genau dann stetig, wenn für jede offene Menge $V \subset Y$ das Urbild $f^{-1}(V) \subset X$ offen ist.

Beweis. a) Falls f in p stetig ist, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so, dass für $d_X(x, p) < \delta$ stets $d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$ gilt. Das ist gleichbedeutend mit $f(U_\delta(p)) \subset U_\varepsilon(f(p))$.

b) ($\Rightarrow$) Sei f stetig und $V \subset Y$ offen. Um zu zeigen, dass das Urbild $f^{-1}(V) \subset X$ offen ist, betrachten wir $p \in f^{-1}(V)$, also $f(p) \in V$. Da V offen ist, gibt es eine ε-Umgebung von $f(p)$, die in V liegt: $U_\varepsilon(f(p)) \subset V$. Nach Teil a) gibt es $\delta > 0$, so dass $f(U_\delta(p)) \subset U_\varepsilon(f(p)) \subset V$, also $U_\delta(p) \subset f^{-1}(V)$. Damit haben wir eine offene Umgebung von p gefunden, die in $f^{-1}(V)$ liegt. Also ist $f^{-1}(V)$ offen.

($\Leftarrow$) Sei nun f so, dass Urbilder offener Mengen stets offen sind. Wir müssen zeigen, dass f dann stetig ist. Sei also $p \in X$, und betrachte die offene Menge $U_\varepsilon(f(p)) \subset Y$ (für beliebiges $\varepsilon > 0$). Dann ist das Urbild $f^{-1}(U_\varepsilon(f(p)))$ eine offene Menge, die p enthält. Wir finden also $\delta > 0$ so, dass $U_\delta(p) \subset f^{-1}(U_\varepsilon(f(p)))$ und damit $f(U_\delta(p)) \subset U_\varepsilon(f(p))$. Dies bedeutet nach Teil a), dass f stetig ist. □

Beispiel 4.16. Der obige Satz (Teil b)) bezieht sich auf *Urbilder* und gilt nicht für Bilder: Zum Beispiel ist das Intervall $(-1, 1) \subset \mathbb{R}$ offen, aber das Bild unter der stetigen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, ist $f((-1, 1)) = [0, 1)$, also nicht offen.

Diese Asymmetrie in Bild und Urbild deutet bereits an, dass die Umkehrfunktion f^{-1} einer stetigen bijektiven Funktion nicht stetig zu sein braucht. Wir kommen auf diesen Punkt später zurück.

Ein weiterer Zusammenhang zwischen offenen/abgeschlossenen Mengen und Konvergenz ergibt sich in folgendem Satz. Dazu nennen wir eine Teilmenge $A \subset X$ eines metrischen Raumes *abgeschlossen unter Grenzwerten*, falls für jede konvergente Folge $(x_n) \subset X$, deren Folgeglieder alle in A liegen (also $x_n \in A \forall n \in \mathbb{N}$), auch der Grenzwert $\lim_n x_n$ in A liegt.

Satz 4.17. *Sei X ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Dann ist A genau dann abgeschlossen unter Grenzwerten, wenn A abgeschlossen im Sinne von Def. 4.4 c) ist.*

Der Beweis dieses Satzes erfolgt in den Hausaufgaben. Wir illustrieren ihn hier kurz an einem Spezialfall: Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und $x_n \in [a, b]$ eine konvergente Folge. Dann folgt mit Lemma 3.13 a), dass der Grenzwert dieser Folge $a \leq \lim_n x_n \leq b$ erfüllt, d.h. $\lim_n x_n \in [a, b]$. Also ist das abgeschlossene Intervall $[a, b]$ abgeschlossen unter Grenzwerten.

Beispiel 4.18. Zur Diskussion der verschiedenen Charakterisierungen von Stetigkeit betrachten wir einen metrischen Raum (X, d) und eine stetige Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ (wobei wir $\mathbb{C}$ mit der üblichen Metrik $d_\mathbb{C}(x, y) = |x - y|$ ausstatten). Wir behaupten, dass die Nullstellenmenge von f, also

$$N(f) := \{x \in X : f(x) = 0\}$$

abgeschlossen ist. Diese Behauptung ist äquivalent dazu, dass das Komplement $X \backslash N(f) = \{x \in X : f(x) \neq 0\} \subset X$ offen ist. Das bedeutet also: *Hat eine stetige Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ bei $p \in X$ einen nicht-verschwindenden Funktionswert $f(p) \neq 0$, so gibt es eine ε-Umgebung $U_\varepsilon(p)$ von p, so dass f in $U_\varepsilon(p)$ keine Nullstellen hat.*
Wir geben drei Beweise dieser Aussage.

Beweis 1 (via Satz 4.15, topologische Charakterisierung von Stetigkeit): Die Teilmenge $\mathbb{C}\backslash\{0\} \subset \mathbb{C}$ ist offen: Liegt $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, also $|z| > 0$, so gibt es eine ε-Umgebung von z, die ganz in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ liegt, z.B. für $\varepsilon = |z|/2$. Nun sehen wir, dass $X\backslash N(f) = f^{-1}(\mathbb{C}\backslash\{0\})$ das Urbild von $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ unter f, nach Satz 4.15 also offen ist. $\square$

Beweis 2 (via Satz 4.9, Folgen-Charakterisierung von Stetigkeit): Sei $(x_n) \subset N(f)$ eine in X konvergente Folge, d.h. $f(x_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da f stetig ist, konvergiert auch die $0 = f(x_n) \subset \mathbb{C}$, und zwar gegen $f(\lim x_n)$. Da dies die konstante Nullfolge ist, ist auch der Grenzwert Null, d.h. $\lim_n x_n \in N(f)$. Also ist $N(f)$ abgeschlossen nach Satz 4.17. $\square$

Beweis 3 (via Definition 4.7, ε-δ-Charakterisierung von Stetigkeit): Sei $p \in X$ mit $f(p) \neq 0$, und $\varepsilon := |f(p)| > 0$. Dann finden wir $\delta > 0$ so, dass für alle $x \in X$ mit $d(x,p) < \delta$ stets $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$ gilt. Für diese x gilt also $\varepsilon = |f(p)| \leq |f(p) - f(x)| + |f(x)|$, d.h. $|f(x)| \geq \varepsilon - |f(x) - f(p)| > 0$. Also haben wir um $p \in X\backslash N(f)$ eine offene Umgebung gefunden, die noch ganz in $X\backslash N(f)$ liegt, d.h. $X\backslash N(f)$ ist offen. $\square$

Zeigen Sie (als Variante des vorigen Beispiels) die folgende Aussage: Ist $f : X \to \mathbb{R}$ stetig und $f(p) > 0$ für ein $p \in X$, so gibt es $\delta > 0$, so dass $f(x) > 0$ für alle $x \in (p - \delta, p + \delta)$.

Zum Abschluss dieses Abschnitts betrachten wir noch kurz *isolierte Punkte*: Ein Element x eines metrischen Raumes X heißt *isolierter Punkt*, falls es eine ε-Umgebung von x gibt, so dass $U_\varepsilon(x) = \{x\}$.

Beispiel 4.19.

a) In $[0,1] \cup \{2\}$ (mit der üblichen Metrik von $\mathbb{R}$) ist 2 ein isolierter Punkt.

b) In $\mathbb{Z}$ (mit der üblichen Metrik von $\mathbb{R}$) ist jeder Punkt isoliert.

Wir bemerken, dass *jede* Abbildung $f : X \to Y$ (mit Y einem beliebigen metrischen Raum) in jedem isolierten Punkt von x stetig ist: Denn ist $x \in X$ isoliert und $\varepsilon > 0$ beliebig, so gibt es nach Definition von Isoliertheit ein $\delta > 0$, so dass $U_\delta(x) = \{x\}$. Dann gilt trivialerweise $d_Y(f(x), f(x')) = 0 < \varepsilon$ für alle $x' \in U_\delta(x)$.

4.3 Stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$

Nachdem wir stetige Funktionen im allgemeinen Rahmen von metrischen Räumen kennengelernt haben, konzentrieren wir uns nun auf stetige Funktionen, die auf Teilmengen $D \subset \mathbb{R}$

der reellen Zahlen definiert sind. Als Hilfsmittel dafür definieren wir zunächst Grenzwerte von Funktionen.

Definition 4.20. Sei $D \subset \mathbb{R}$ eine beliebige Teilmenge, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, und $x' \in \mathbb{R}$ so, dass es eine Folge $(x_n) \subset D$ gibt, die gegen x' konvergiert. Dann schreiben wir

$$\lim_{x \to x'} f(x) = y,$$

falls für *jede* Folge $(x_n) \subset D$, die gegen x' konvergiert, $f(x_n)$ gegen y konvergiert.

Bemerkungen:

- Ein Punkt x' mit den in Def. 4.20 geforderten Eigenschaften heißt *Berührpunkt* von D. Beachten Sie, dass x' nicht in D zu liegen braucht.
- Liegt x' in D, so können wir die konstante Folge $x_n = x'$ betrachten. Also muss der Limes $\lim\limits_{x \to x'} f(x)$ (falls er existiert) in diesem Fall mit $f(x')$ übereinstimmen.
- Wir werden Def. 4.20 auch für uneigentliche Grenzwerte im Sinne von Def. 3.9 verwenden; in diesem Fall schreiben wir $\lim\limits_{x \to x'} f(x) = \pm\infty$. Auch x' kann $\pm\infty$ sein, z.B. bedeutet $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$, dass für jede Folge x_n im Definitionsbereich D von f, die $x_n \to \pm\infty$ erfüllt, stets $f(x_n) \to 1$ konvergiert. Die Existenz solcher Folgen setzt natürlich voraus, dass D von oben bzw. unten unbeschränkt ist.
- Beachten Sie, dass die Bedingung, dass die betrachteten Folgen in D liegen müssen, in der Notation $\lim_{x \to x'} f(x)$ nicht direkt sichtbar ist – diese Bedingung ist darin versteckt, dass D der Definitionsbereich von f ist.

Während sich Def. 4.20 ganz analog auch für Abbildungen zwischen beliebigen metrischen Räumen formulieren lässt, benutzt der nächste Begriff die Ordnungsstruktur von $\mathbb{R}$.

Definition 4.21 (links-/rechtsseitige Grenzwerte). Sei $D \subset \mathbb{R}$ eine beliebige Teilmenge, $x' \in \mathbb{R}$ ein Berührpunkt von D, und $y \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Wir schreiben

$$\lim_{x \nearrow x'} f(x) := \lim_{x \uparrow x'} f(x) := \lim_{x \to x'-} f(x) := y,$$

falls $f(x_n) \to y$ für jede in D liegende gegen x' konvergente Folge *mit* $x_n < x'$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ gilt (Linksseitiger Grenzwert).

Analog schreiben wir

$$\lim_{x \searrow x'} f(x) := \lim_{x \downarrow x'} f(x) := \lim_{x \to x'+} f(x) := y,$$

falls $f(x_n) \to y$ für jede in D liegende gegen x' konvergente Folge *mit* $x_n > x'$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ gilt (Rechtsseitiger Grenzwert).

Lemma 4.22. *Sei $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung und $p \in D$. Dann ist f stetig in p genau dann, wenn der links- und rechtsseitige Grenzwerte von f in p existieren und beide mit $f(p)$ übereinstimmen, also*

$$f \text{ stetig in } p \iff \left(\lim_{x \uparrow p} f(x) = \lim_{x \downarrow p} f(x) = f(p) \right).$$

Beweis. Es ist klar, dass die Stetigkeit von f in p äquivalent ist zu $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$ (siehe Satz 4.9). Insbesondere existieren dann auch die links- und rechtsseitigen Grenzwerte und stimmen mit $f(p)$ überein.

Für die Richtung ($\Leftarrow$) betrachten wir eine Folge $(x_n) \subset D$, die gegen p konvergiert. Wir müssen zeigen, dass $f(x_n) \to p$. Angenommen, dies ist nicht der Fall, d.h. es gibt $\varepsilon > 0$, so dass die Menge $N_\varepsilon := \{n \in \mathbb{N} : |f(x_n) - f(p)| \geq \varepsilon\}$ unendlich ist. Dann ist entweder $N_\varepsilon^+ := \{n \in N_\varepsilon : x_n > p\}$ oder $N_\varepsilon^- := \{n \in N_\varepsilon : x_n < p\}$ (abzählbar) unendlich. Geben wir $N_\varepsilon^\pm$ in einer Abzählung $N_\varepsilon^\pm = \{n_k^\pm : k \in \mathbb{N}\}$ an. Da die links- und rechtsseitigen Grenzwerte existieren und mit $f(p)$ übereinstimmen, haben wir $f(x_{n_k^+}) \to f(p)$ und $f(x_{n_k^-}) \to f(p)$ für $k \to \infty$. Also kann weder N_ε^+ noch N_ε^- unendlich sein, Widerspruch. $\square$

Beispiel 4.23. Einige Beispiele zu Grenzwerten von Funktionen:

a) Die Stufenfunktion (auch *Heaviside*-Funktion genannt)

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

hat die halbseitigen Grenzwerte $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 1$. Diese beiden Grenzwerte existieren zwar, sind aber unterschiedlich. Also ist f bei 0 unstetig.

b) Die *Dirichlet-Funktion*

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g(x) := \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist an jedem Punkt $p \in \mathbb{R}$ unstetig. Denn für jedes $p \in \mathbb{R}$ gibt es eine rationale Folge (x_n) mit $x_n \to p$ und eine irrationale Folge (y_n) mit $y_n \to p$ (z.B. $y_n := x_n + \frac{e}{n}$). Es gilt $g(x_n) = 1 \to 1$ und $g(y_n) = 0 \to 0$. Da diese Grenzwerte nicht übereinstimmen, ist g bei p unstetig.

c) Wir betrachten die reelle Exponentialfunktion

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

und behaupten für beliebiges $k \in \mathbb{N}_0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\exp(x)}{x^k} = \infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} x^k \exp(x) = 0.$$

Die Funktion $x \mapsto \frac{\exp(x)}{x^k}$ ist hier auf $\mathbb{R}^\times$ definiert. Der Grenzwert $\frac{\exp(x)}{x^k} \to \infty$ für $x \to \infty$ besagt, dass die Exponentialfunktion stärker gegen ∞ geht als jede Potenzfunktion x^k.

Beweis: Durch Abbrechen der Exponentialreihe sehen wir $\exp(x) \geq \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$ für $x \geq 0$, also $\frac{\exp(x)}{x^k} \geq \frac{x}{(k+1)!}$. Für $x \to \infty$ geht $\frac{x}{(k+1)!} \to \infty$, also folgt der erste behauptete Grenzwert.

Die Exponentialfunktion erfüllt die Funktionalgleichung $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ (sogar für alle $x, y \in \mathbb{C}$). Also $1 = \exp(0) = \exp(x)\exp(-x)$, d.h. $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.

Ist x_n eine reelle Folge mit $x_n \to -\infty$, so gilt $y_n := -x_n \to \infty$. Also

$$\lim_{x\to-\infty} x^k \exp(x) = \lim_{y\to\infty} (-y)^k \exp(-y) = \lim_{y\to\infty} \frac{(-1)^k y^k}{\exp(y)} = 0.$$

Im letzten Schritt haben wir benutzt, dss $\frac{\exp(y)}{y^k} \to \infty$ für $y \to \infty$, also geht der Kehrwert gegen Null.

d) Noch ein Beispiel mit der Exponentialfunktion: Wir behaupten

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1.$$

Beweis: Wegen $\exp(x) - 1 = \sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n!}$ gilt für $x \neq 0$

$$\begin{aligned}\left|\frac{\exp(x)-1}{x} - 1\right| &= \left|\sum_{n=2}^\infty \frac{x^{n-1}}{n!}\right| = \left|\sum_{n=0}^\infty \frac{x^{n+1}}{(n+2)!}\right| \\ &= |x| \left|\sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{(n+2)!}\right| \leq |x| \sum_{n=0}^\infty \frac{|x|^n}{(n+2)!}.\end{aligned}$$

Für $|x| \leq 1$ können wir die letzte Reihe abschätzen, $\sum_{n=0}^\infty \frac{|x|^n}{(n+2)!} \leq \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+2)!} =: C < \infty$, eine endliche Konstante (da die Reihe per Quotientenkriterium konvergiert).

Wir haben also gezeigt: Es gibt $0 < C < \infty$ so, dass für alle $|x| \leq 1$

$$\left|\frac{\exp(x)-1}{x} - 1\right| \leq C|x|$$

gilt. Für den Limes $x \to 0$ sind nur die Werte $|x| \leq 1$ interessant, und die rechte Seite $C|x|$ geht gegen Null für $x \to 0$. Also folgt die Behauptung.

Dies ist ein Beispiel eines Differenzialquotienten und einer Ableitung. Mit wenig extra Arbeit (Funktionalgleichung) können Sie nun zeigen, dass die Exponentialfunktion differenzierbar ist, und die Ableitung von exp gleich exp ist. Diese Themen werden wir uns in Kapitel 5 genauer ansehen.

e) Die Funktion

$$\mathbb{R}^\times \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{1}{x},$$

ist stetig (aufgrund von Satz 4.11) und erfüllt:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to 0\pm} \frac{1}{x} = \pm\infty.$$

Geben Sie ein Beispiel einer Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass bei $x = 0$ der linksseitige Grenzwert existiert, aber der rechtsseitige nicht.

Wir leiten nun einige wichtige Sätze über stetige Funktionen her.

Satz 4.24 (Zwischenwertsatz). *Eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nimmt jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an: Ist $f(a) \leq y \leq f(b)$ (oder $f(b) \leq y \leq f(a)$), so existiert $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$.*

Beweis. Wir betrachten den Fall $f(a) < f(b)$, der Fall $f(a) > f(b)$ folgt analog (und der Fall $f(a) = f(b)$ ist trivial). Sei also $f(a) < y < f(b)$. Wir setzen $M := \sup\{t \in [a, b] : f(t) \leq y\}$ und $x := \sup M$. Das Supremum existiert, da M nicht leer ist (enthält a) und nach oben beschränkt ist (durch b). Wir behaupten $f(x) = y$.

Angenommen, $f(x) < y$. Dann gibt es aufgrund der Stetigkeit von f ein $\delta > 0$, so dass für alle $t \in (x - \delta, x + \delta)$ stets $f(t) < y$ gilt (siehe Beispiel 4.18), also $t \in M$. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass x eine obere Schranke von M ist.

Angenommen, $f(x) > y$. Dann gibt es aufgrund der Stetigkeit von f ein $\delta > 0$, so dass für alle $t \in (x - \delta, x + \delta)$ stets $f(t) > y$ gilt. Aber dann ist auch $x - \delta$ eine obere Schranke von M, im Widerspruch zu der Supremumseigenschaft von x. □

Beispiel 4.25.

a) Wir können den Zwischenwertsatz verwenden, um die Existenz n-ter Wurzeln ($n \in \mathbb{N}$) in $\mathbb{R}$ zu zeigen: Sei $u > 0$, und betrachte $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^n - u$. Dann gilt $f(0) = -u < 0$ und $f(u+1) = (u+1)^n - u \geq 1 + nu - u > 0$ (mit Bernoulli-Ungleichung). Eingeschränkt auf das abgeschlossene Intervall $[0, u+1]$ haben wir also eine stetige Funktion $f : [0, u + 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(0) < 0$ und $f(u + 1) > 0$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $x \in [0, u + 1] \subset \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$, d.h. $x^n = u$.

b) Da die Supremumseigenschaft (Vollständigkeit) von $\mathbb{R}$ wesentlich verwendet wurde, gilt der Zwischenwertsatz nicht in den rationalen Zahlen. (Geben Sie ein Gegenbeispiel an.)

c) Jedes Polynom ungeraden Grades hat mindestens eine reelle Nullstelle.
Beweis: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, wobei n ungerade und $a_n \neq 0$ ist. Dann gilt

$$f(x) = x^n \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^{k-n}, \qquad x \neq 0.$$

Die in der Summe auftretenden Potenzen x^{k-n} sind x^0 (für $k = n$), alle anderen Potenzen $k - n$ sind negativ. Deshalb haben wir $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^{k-n} = a_n \neq 0$. Da $x^n \to \pm\infty$ für $x \to \pm\infty$ (hier geht ein, dass n ungerade ist), haben wir $f(x) \to \pm\infty$ für $x \to \pm\infty$ (falls $a_n > 0$) oder $f(x) \to \mp\infty$ für $x \to \pm\infty$ (falls $a_n < 0$). In jedem Fall finden wir $x_1 < x_2$ in $\mathbb{R}$, so dass $f(x_1)$ und $f(x_2)$ unterschiedliche Vorzeichen haben. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es dann ein $x \in [x_1, x_2]$ mit $f(x) = 0$.

Eine weitere nützliche Folgerung des Zwischenwertsatzes ist die folgende Intervalleigenschaft. Dazu nennen wir eine Teilmenge $I \subset \mathbb{R}$ *Intervall*, falls sie die Eigenschaft

$$x, y \in I \Rightarrow [x, y] \subset I \tag{4.3}$$

hat. Die bisher betrachteten Intervalle $[a, b]$, $[a, b)$, (a, b), $(a, b]$ inklusive ihrer unbeschränkten Versionen (a und/oder b ist gleich $\pm\infty$) sind Intervalle in diesem Sinne. Dies beinhaltet auch die einelementigen Mengen $[a, a] = \{a\}$.

Korollar 4.26. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist auch $f(I) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.*

Beweis. Seien $y_1, y_2 \in f(I)$, d.h. es existieren $x_1, x_2 \in I$ mit $f(x_1) = y_1$ und $f(x_2) = y_2$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es zu jedem $y \in [y_1, y_2]$ ein $x \in I$ mit $f(x) = y$. Also $[y_1, y_2] \subset f(I)$, d.h. $f(I)$ ist ein Intervall. □

Ein weiterer wichtiger Satz ist der folgende Satz vom Maximum. Zuerst einige Vokabeln: Wir nennen eine Abbildung $f : D \to \mathbb{R}$ *beschränkt*, falls ihr Bild beschränkt ist, d.h. falls es $C > 0$ gibt, so dass $|f(x)| \leq C$ für alle $x \in D$ gilt. Wir sagen, dass eine solche Abbildung ihr *Maximum (Minimum) annimmt*, falls es $x \in D$ gibt, so dass $f(x) = \max f(D)$ bzw. $f(x) = \min f(D)$. Dies bedeutet insbesondere, dass $\max f(D)$ bzw. $\min f(D)$ existiert.

Satz 4.27. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f beschränkt und nimmt ihr Maximum und Minimum an.*

Beweis. Wir geben den Beweis für das Maximum, der Beweis für das Minimum verläuft analog. Sei $s := \sup f([a, b]) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, d.h. entweder $f([a, b])$ ist nach oben beschränkt und hat damit ein endliches Supremum, oder $f([a, b])$ ist nach oben unbeschränkt, d.h. $\sup f([a, b]) = \infty$. Dann gibt es eine Folge $x_n \in [a, b]$ mit $f(x_n) \to s$. Da die Folge (x_n) beschränkt ist, hat sie nach Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_k$. Sei $p := \lim_k x_{n_k}$ der Limes der Teilfolge. Nun folgt aus der Folgencharakterisierung der Stetigkeit von f, dass $f(p) = f(\lim_k x_{n_k}) = \lim_k f(x_{n_k}) = s$, da die Teilfolge $(f(x_{n_k}))_k$ gegen den gleichen Grenzwert s konvergiert wie $(f(x_n))_n$.

Also haben wir $s = \sup f([a, b]) = f(p)$, d.h. $f(p) = \max f([a, b])$. $\square$

Beispiel 4.28. Für den Satz vom Maximum ist es wichtig, dass das Definitionsbereichs-Intervall $[a, b]$ abgeschlossen und beschränkt ist (solche Intervalle nennt man auch *kompakt*). Ist zB $D = [0, \infty)$ unbeschränkt, so nimmt die stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, kein Maximum an. Ist $D = (0, 1]$ beschränkt aber nicht abgeschlossen, so liefert $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-1}$ ein Beispiel einer stetigen aber unbeschränkten Funktion.

Der Satz vom Maximum ist an dieser Stelle eine reine Existenzaussage, d.h. er liefert keine Methode, das Maximum oder Minimum von f zu berechnen. Dies wird uns erst mit Methoden der Differentialrechnung (Kapitel 5) möglich sein.

4.4 Monotonie und Stetigkeit der Umkehrfunktion

Analog zu unserer Def. 3.16 für Folgen definieren wir jetzt Monotonie von Funktionen.

Definition 4.29. Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt f

a) *monoton wachsend*, falls $f(x) \leq f(y)$ für alle $x, y \in D$ mit $x < y$.

b) *streng monoton wachsend*, falls $f(x) < f(y)$ für alle $x, y \in D$ mit $x < y$.

c) *monoton fallend*, falls $f(x) \geq f(y)$ für alle $x, y \in D$ mit $x < y$.

d) *streng monoton fallend*, falls $f(x) > f(y)$ für alle $x, y \in D$ mit $x < y$.

Genau wie bei Folgen nennen wir f *(streng) monoton*, falls f (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist.

Beispiel 4.30.

a) Die Funktion $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto x^2$, ist streng monoton wachsend.
In der Tat: Für $0 < x < y$ gilt $x^2 < xy < y^2$ (da $x, y > 0$). Es ist aber wichtig, dass wir uns hier auf positive Argumente beschränken, da die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, nicht monoton wachsend ist. Zum Beispiel gilt $-2 < 1$, aber $(-2)^2 = 4 > 1 = 1^2$.

b) Die reelle Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \exp(x)$, ist streng monoton wachsend. Es gilt $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Um dies einzusehen, erinnern wir uns einerseits an die Funktionalgleichung

$$\exp(a) \exp(b) = \exp(a + b)$$

(gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}$) und an die Definition der Exponentialfunktion, nämlich $\exp(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$. Diese Definition besagt insbesondere $\exp(t) \geq 1$ für $t \geq 0$, da dann alle Terme $\frac{t^n}{n!}$ unter der Summe nicht negativ sind. Insbesondere haben wir $\exp(x) > 0$ für $x \geq 0$. Für $x < 0$ bemerken wir $1 = \exp(0) = \exp(x - x) = \exp(x) \exp(-x)$, also $\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)}$. Da $-x > 0$, gilt $\exp(-x) > 0$ und damit $\frac{1}{\exp(-x)} > 0$. Also gilt $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Nun zur Monotonie: Sei $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$. Wir müssen $\exp(x) < \exp(y)$ zeigen. Wir haben

$$1 < \exp(y - x) \iff \exp(x) < \exp(x)\exp(y - x) = \exp(y),$$

die behauptete Monotonie der reellen Exponentialfunktion.

Streng monotone Funktionen sind automatisch injektiv: Ist $f : D \to \mathbb{R}$ streng monoton (sagen wir, wachsend) und $x \neq y$ zwei Punkte in D, so gilt entweder $x < y$ oder $y < x$. In dem ersten Fall bekommen wir $f(x) < f(y)$, im zweiten $f(y) < f(x)$; in jedem Fall also $f(x) \neq f(y)$.

Wir betrachten nun *Umkehrfunktionen* von stetigen bijektiven Funktionen (siehe Def. 1.26). Wir beginnen mit einem Beispiel.

Beispiel 4.31. Die Funktion

$$f : [-1, 0] \cup (1, 2] \to [-1, 1], \qquad f(x) := \begin{cases} x & -1 \leq x \leq 0 \\ x - 1 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

ist stetig und bijektiv. Die Stetigkeit ist klar, da f auf beiden Intervallen $[-1, 0]$ und $(1, 2]$ durch ein Polynom gegeben ist, und sich die Intervalle nicht berühren. Die Funktion f ist surjektiv: $f([-1, 0]) = [-1, 0]$ und $f((1, 2]) = (0, 1]$, also hat jedes $y \in [-1, 1]$ ein Urbild. Außerdem ist f injektiv, da sie streng monoton wachsend ist.

Die Umkehrfunktion von f ist (Übung)

$$f^{-1} : [-1, 1] \to [-1, 0] \cup (1, 2], \qquad f^{-1}(y) := \begin{cases} y & -1 \leq y \leq 0 \\ y + 1 & 0 < y \leq 1 \end{cases}$$

Nun sehen wir, dass f^{-1} nicht stetig ist: Wir haben

$$\lim_{y \to 0-} f^{-1}(y) = 0 \neq 1 = \lim_{y \to 0+} f^{-1}(y).$$

Der nächste Satz sagt, dass diese Unstetigkeit der Umkehrfunktion für stetige streng monotone Funktionen auf Intervallen nicht auftreten kann.

Satz 4.32. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton (damit injektiv). Dann ist die Umkehrfunktion von $f : I \to f(I)$, also*

$$f^{-1} : f(I) \to I, \qquad f(x) \mapsto x,$$

streng monoton und stetig.

Beweis. Da f injektiv ist, ist die Abbildung $f : I \to f(I)$ injektiv und surjektiv, also bijektiv, und hat damit eine Umkehrabbildung $f^{-1} : f(I) \to I$.

Wir nehmen an, dass f streng monoton wachsend ist, der streng monoton fallende Fall geht analog. Für x, y in I haben wir dann $x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$, also (durch Anwenden von f^{-1}) $f^{-1}(x) < f^{-1}(y) \Leftrightarrow x < y$. Also ist auch f^{-1} streng monoton wachsend.

Zur Stetigkeit von f^{-1}: Sei $y \in f(I)$ und $x \in I$ die eindeutige Zahl mit $f(x) = y$. Wir zeigen, dass f^{-1} in y stetig ist. Da $f(I)$ ein Intervall ist (siehe Korollar 4.26), könnte x entweder ein Randpunkt von I sein (z.B. $x = a$ für $I = [a, b)$), oder nicht. Wir betrachten zuerst den Fall, dass x kein Randpunkt ist. Sei $\varepsilon > 0$, wobei wir annehmen dürfen, dass ε so klein ist, dass $[x - \varepsilon, x + \varepsilon] \subset I$ gilt (das ist der Fall für hinreichend kleines ε, weil x kein Randpunkt ist). Dann gilt wegen der Monotonie von f

$$f(x - \varepsilon) < y < f(x + \varepsilon),$$

und f bildet $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ bijektiv auf $[f(x - \varepsilon), f(x + \varepsilon)]$ ab. Sei $\delta := \min\{y - f(x - \varepsilon), f(x + \varepsilon) - y\}$. Dann gilt

$$f^{-1}((y - \delta, y + \delta)) \subset (x - \varepsilon, x + \varepsilon);$$

dies heißt nach ε-δ-Kriterium, dass f^{-1} bei y stetig ist. Der Fall, dass x ein Randpunkt von I ist, kann analog argumentiert werden (verwende dann $[x, x + \varepsilon]$ bzw $[x - \varepsilon, x]$ statt $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$). □

Dieser Satz gibt uns die Möglichkeit, einige interessante neue Funktionen einzuführen bzw. auszudehnen.

Beispiel 4.33 (Potenzfunktionen und Wurzeln).

a) Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \qquad x \mapsto x^n$$

streng monoton wachsend (siehe Aufgabe P3.2 a)), also injektiv. Wegen $0^n = 0$ und $\lim\limits_{x \to \infty} x^n = \infty$ ist diese Funktion auch surjektiv, also bijektiv. Details zum Argument für die Surjektivität: Sei $y > 0$ und sei $x > 0$. Wir wählen x so groß, dass $x^n > y$. Dann liegt y zwischen 0 und x^n, ist nach Korollar 4.26 also auch im Bild der Potenzfunktion enthalten.

Mit dem Satz über die Umkehrfunktion erhalten wir nun, dass die Wurzelfunktion

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \qquad x \mapsto x^{1/n}$$

streng monoton wachsend und stetig ist.

b) Für beliebiges $q \in \mathbb{Q}_+$ ist die Funktion

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \qquad x \mapsto x^q,$$

streng monoton wachsend und stetig. Die Stetigkeit folgt, da wir $q = \frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ schreiben können, so dass wir $x \mapsto x^q = (x^a)^{1/b}$ als Komposition stetiger Funktionen erkennen können. Nach Satz 4.13 ist diese Funktion also stetig.

Beispiel 4.34 (Logarithmus). Wir betrachten noch einmal die reelle Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$. Aus Beispiel 4.30 wissen wir bereits, dass exp streng monoton wachsend ist, und dass tatsächlich $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Wir zeigen nun, dass exp surjektiv ist. In Beispiel 4.23 haben wir bereits gesehen, dass $\exp(x) \to \infty$ für $x \to \infty$ und $\exp(x) \to 0$ für $x \to -\infty$. Also folgt wie im vorigen Beispiel, dass exp surjektiv ist.

Es gibt also eine Umkehrfunktion

$$\ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \qquad \exp(x) \mapsto x,$$

der *natürliche Logarithmus* $\ln = \exp^{-1}$. Da Sie in einer Hausaufgabe auf Blatt 9 auch gezeigt haben, dass exp stetig ist, folgt per Satz 4.32, dass auch ln stetig ist.

Wir führen hier einige wichtige Eigenschaften des natürlichen Logarithmus auf:

a) $\ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend und stetig (wegen Satz 4.32).

b) $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ (wegen $\ln(\exp(a)\exp(b)) = \ln(\exp(a+b)) = a + b = \ln(x) + \ln(y)$, wobei wir $a := \ln(x)$ und $b := \ln(y)$ betrachtet haben)

c) $\ln(1) = 0$ (wegen $\exp(0) = 1$)

d) $\ln(x^n) = n\ln(x)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ (folgt direkt aus den vorigen beiden Eigenschaften)

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$ (wegen $\lim\limits_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$)

f) $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ (wegen $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$)

Eine weitere verbreitete Schreibweise ist $\log(x)$ anstelle von $\ln(x)$.

Wir diskutieren an dieser Stelle auch noch die Definition der *allgemeinen Potenzfunktion* mit reellem oder sogar komplexen (nicht notwendigerweise rationalem) Exponenten.

Beispiel 4.35 (Die allgemeine Potenzfunktion). Für $x > 0$ und $a \in \mathbb{C}$ definieren wir

$$x^a := e^{a \ln x} = \exp(a\ln(x)).$$

a) Zuerst bemerken wir, dass diese Definition mit unserer bisherigen Definition 2.32 für $a \in \mathbb{Q}$ übereinstimmt: Ist $a = \frac{p}{q}$ mit $q \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{N}$, so haben wir

$$x^{\frac{p}{q}} = e^{\frac{p}{q}\ln(x)} = (e^{\ln x})^{\frac{p}{q}} = x^{\frac{p}{q}},$$

was mit der bisherigen Definition übereinstimmt.

b) Als Komposition von stetigen Funktionen erkennen wir $\mathbb{R}_+ \ni x \mapsto x^a$ als stetig.

c) Weiterhin ist für festes $x > 0$

$$\mathbb{C} \ni a \mapsto x^a = e^{a\ln(x)}$$

als Verkettung stetiger Funktionen stetig.

d) Die Potenzrechenregeln übertragen sich auch auf allgemeine reelle Potenzen:

$$x^a x^b = x^{a+b}, \qquad (x^a)^b = x^{ab}, \qquad x > 0,\ a, b \in \mathbb{R}.$$

Auf komplexe Potenzen kommen wir später noch einmal zurück.

e) Für $a > 0$ bzw. $a < 0$ ist die Potenzfunktion $x \mapsto x^a$ streng monoton wachsend bzw. streng monoton fallend. Dies folgt aus der strengen Monotonie von exp und ln.

f) Es gilt $\exp(x) = e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Diese Gleichung kennen wir bisher nur für $x \in \mathbb{Q}$ (Aufgabe H7.1). Nun ist aber e^x auch für beliebige reelle Zahlen x definiert, und sowohl $x \mapsto \exp(x)$ als auch $x \mapsto e^x$ sind stetig. Sei nun $p \in \mathbb{R}$ und (x_n) eine rationale Folge, die gegen p konvergiert. Dann gilt

$$\exp(p) = \exp(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} \exp(x_n) = \lim_{n\to\infty} e^{x_n} = e^{\lim_{n\to\infty} x_n} = e^p.$$

Die Umkehrfunktion von $\mathbb{R}_+ \ni x \mapsto b^x \in \mathbb{R}_+$, $b > 0$, ist $y \mapsto \frac{\ln(y)}{\ln(b)} =: \log_b(y)$ und wird als *Logarithmus zur Basis* b bezeichnet. Da diese Funktionen aber bis auf einen Faktor mit dem natürlichen Logarithmus $\ln = \log_e$ übereinstimmen, wird fast immer mit dem natürlichen Logarithmus gearbeitet.

4.5 Konvergente Folgen stetiger Funktionen

Eine Hauptidee der Analysis ist es, interessante Begriffe oder Objekte durch Grenzwertprozesse zu definieren. Dabei ist es oft wichtig, zu verstehen, wie sich Eigenschaften der approximierenden Objekte auf den Grenzwert übertragen.

Wir möchten jetzt die Idee verfolgen, neue Funktionen f als Grenzwerte einer gegebenen Folge f_n von (zumeist stetigen) Funktionen zu definieren. Unser erster Begriff von Konvergenz für Funktionenfolgen ist die sogenannte *punktweise Konvergenz*.

Definition 4.36. Sei D eine Menge. Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$ *konvergiert punktweise* gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, falls

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \qquad x \in D.$$

Beispiel 4.37.

a) Sei $D = [0, 1]$ und $f_n : D \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := \frac{1+nx^2}{2n+nx}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert (f_n) punktweise gegen $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{2+x}$.
Beweis: Sei $x \in [0, 1]$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + nx^2}{2n + nx} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} + x^2}{2 + x} = \frac{x^2}{2 + x}.$$

b) Sei $D = [0,1]$ und $g_n : D \to \mathbb{R}$, $g_n(x) := x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Dann haben wir $\lim_n x^n = 0$ für $0 \le x < 1$ (siehe Beispiel 3.10) und $\lim_n x^n = 1$ für $x = 1$. In diesem Fall konvergiert die Funktionenfolge (g_n) also gegen die Funktion

$$g : D \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}.$$

Die Funktionen f_n, g_n in diesen beiden Beispielen sind stetig (es sind Polynome bzw. rationale Funktionen ohne Nullstellen des Nenners im Definitionsbereich). In Beispiel a) ist auch die Grenzfunktion f stetig (als rationale Funktion ohne Nullstellen des Nenners im Definitionsbereich), aber in Beispiel b) ist die Grenzfunktion g unstetig, da bei $x = 1$ ein Sprung vorliegt: $\lim\limits_{x \to 1-} g(x) = 0 \neq 1 = g(1)$.

Wir sehen also, dass ein punktweiser Grenzwert einer Folge stetiger Funktionen im Allgemeinen nicht stetig ist. Mit punktweiser Konvergenz werden wir also keine neuen stetigen Funktionen durch Grenzwertbildung definieren können. Wir führen deshalb einen neuen, stärkeren Konvergenzbegriff für Funktionenfolgen ein, der den Vorteil hat, dass sich Stetigkeit der Folgeglieder auf die Stetigkeit des Grenzwertes überträgt.

Definition 4.38. Sei D eine Menge. Eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$ *konvergiert gleichmäßig* gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \ge N$ stets $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ gilt.

Diese Definition ist *nicht* zur Definition von punktweiser Konvergenz äquivalent. Zur Deutlichkeit noch einmal in logischer Schreibweise:

$$\begin{aligned} f_n \to f \text{ punktweise:} \quad &\Leftrightarrow ((\forall x \in D)(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \ge N) : \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon) \\ f_n \to f \text{ gleichmäßig:} \quad &\Leftrightarrow ((\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \ge N)(\forall x \in D) : \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon) \end{aligned}$$

Der Unterschied zwischen den beiden Definitionen besteht also "nur" in der Reihenfolge der Quantoren. Gleichmäßige Konvergenz $f_n \to f$ bedeutet, dass der Abstand zwischen $f_n(x)$ und $f(x)$ gleichmäßig klein wird in dem Sinn, dass das N unabhängig von x gewählt werden kann. Wir können gleichmäßige Konvergenz alternativ so charakterisieren: $f_n \to f$ gleichmäßig bedeutet

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

An dieser Formulierung sehen wir besonders deutlich, dass gleichmäßige Konvergenz $f_n \to f$ die punktweise Konvergenz $f_n \to f$ impliziert.

Beispiel 4.39.

a) Wir betrachten $D = (0,1)$ und $f_n : D \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $f_n \to 0$ punktweise (da $\lim_n x^n = 0$ für $0 < x < 1$, siehe voriges Beispiel). Wir behaupten, dass f_n aber nicht gleichmäßig gegen 0 konvergiert.

   Für jedes $n \in \mathbb{N}$ haben wir $x^n \to 1$ für $x \nearrow 1$, also $\sup\limits_{0<x<1} |x^n - 0| = 1$. Also ist der Limes $\lim_{n\to\infty} \sup_{0<x<1} |x^n - 0| = 1$, und nicht $= 0$.

b) Wir betrachten $D = (0,1)$ mit $g_n : D \to \mathbb{R}$, $g_n(x) = (x(1-x))^n$ und behaupten, dass $g_n \to 0$ gleichmäßig (also insbesondere punktweise).
Beweis: Wir behaupten $0 < x(1-x) < \frac{1}{4}$ für alle $x \in D$. Die linke Ungleichung ist klar und die rechte ist äquivalent zu

$$0 < x^2 + \frac{1}{4} - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Wir haben also $|g_n(x)| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ für alle $x \in D$, d.h.

$$\sup_{0<x<1} |g_n(x) - 0| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \to 0$$

für $n \to \infty$.

Satz 4.40. *Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f_n : D \to \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen, und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Konvergiert $f_n \to f$ gleichmäßig, so ist f stetig.*

Beweis. Sei $p \in D$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es $N \in \mathbb{N}$ so, dass $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $n \geq N$. Da f_N stetig ist, gibt es $\delta > 0$, so dass $|f_N(x) - f_N(p)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle x mit $|x - p| < \delta$.

Wir verwenden die Dreicksungleichung und schätzen ab

$$|f(x) - f(p)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(p)| + |f_N(p) - f(p)| < \varepsilon.$$

Also gilt für alle $x \in D$ mit $|x - p| < \delta$ die Ungleichung $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$, d.h. f ist stetig. $\square$

Das hier gezeigte Argument verallgemeinert sich (praktisch wortwörtlich) auf den Fall von Funktionen $f : D \to \mathbb{C}$, wobei D eine Teilmenge eines beliebigen metrischen Raumes ist. Wegen dem Auftreten der $\frac{\varepsilon}{3}$-Terme heißt es "$\frac{\varepsilon}{3}$-Argument".

Eine interessante Sichtweise auf gleichmäßige Konvergenz ist die Folgende: Für eine Menge $D \subset \mathbb{R}$ und eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ definieren wir die sogenannte *Supremumsnorm* durch

$$\|f\|_D := \sup_{x \in D} |f(x)| \in [0, \infty],$$

wobei die rechte eckige Klammer in $[0, \infty]$ andeutet, dass dieses Supremum auch unendlich sein kann. Die Funktionen f, für die $\|f\|_D < \infty$ gilt, sind genau die *beschränkten* Funktionen

$$B(D) := \{f : D \to \mathbb{R} : \ \|f\|_D < \infty\}.$$

Es ist ersichtlich, dass $B(D)$ ein Vektorraum ist. Dies hängt eng zusammen mit den folgenden Eigenschaften der Supremumsnorm.

Definition 4.41. Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Eine Abbildung

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

heißt *Norm*, falls für beliebige $v, w \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$, die folgenden drei Eigenschaften gelten:

a) $\|v\| = 0$ ist äquivalent zu $v = 0$.

b) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$

c) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (Dreiecksungleichung)

Ein Vektorraum mit Norm heißt *normierter Raum* $(V, \|\cdot\|)$.

Beispiel 4.42. Sei $D \subset \mathbb{R}$. Dann ist $(B(D), \|\cdot\|_D)$ ein normierter Raum.
Die Supremumsnorm ist eine Abbildung $\|\cdot\|_D : B(D) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Wir sehen, dass $0 = \|f\|_D = \sup\{|f(x)| : x \in D\}$ zu $f(x) = 0$ für alle $x \in D$, d.h. zu $f = 0$ äquivalent ist. Weiterhin gilt

$$\|\lambda f\|_D = \sup_{x \in D} |\lambda f(x)| = |\lambda| \sup_{x \in D} |f(x)| = |\lambda| \|f\|_D$$

und wegen $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_D + \|g\|_D$ auch

$$\|f + g\|_D = \sup_{x \in D} |f(x) + g(x)| \leq \|f\|_D + \|g\|_D,$$

also ist $\|\cdot\|_D$ eine Norm.

Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so können wir für $v, w \in V$

$$d(v, w) := \|v - w\|$$

betrachten. Dies ist offenbar eine Metrik, d.h. normierte Vektorräume sind insbesondere metrische Räume, denn die Dreiecksungleichung gilt,

$$d(v, w) = \|v - w\| = \|v - u + u - w\| \leq \|v - u\| + \|u - w\| = d(v, u) + d(u, w),$$

und die anderen Metrik-Eigenschaften sind sofort ersichtlich.

Bemerken Sie auch, dass $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ und $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ normierte Räume sind – eine Norm ist eine Verallgemeinerung der Betragsfunktion auf Vektorräume.

Lemma 4.43. *Eine Folge von beschränkten Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$ konvergiert genau dann gleichmäßig, wenn sie als Folge in dem metrischen Raum $B(D)$ konvergiert, d.h. falls es $f \in B(D)$ gibt, so dass*

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_D = 0.$$

Beweis. Angenommen, $f_n \to f$ konvergiert gleichmäßig. Sei $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\|f - f_N\|_D < \varepsilon$. Dann $\|f\|_D \leq \|f - f_N\|_D + \|f_N\|_D \leq \varepsilon + \|f_N\|_D < \infty$, also ist f beschränkt, d.h. $f \in B(D)$. Der Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Folge beschränkter Funktionen muss also beschränkt sein. Nun bemerken wir nur, dass gleichmäßige Konvergenz $f_n \to f$ bedeutet, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq N$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

für alle $x \in D$ gilt. Dann gilt aber auch $\|f_n - f\|_D = \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$, also $f_n \to f$ in dem metrischen Raum $B(D), d(f, g) = \|f - g\|_D$. Andersherum impliziert $\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ auch $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in D$, also die gleichmäßige Konvergenz $f_n \to f$. □

Ein normierter Raum $(V, \|\cdot\|)$ heißt *Banachraum*, wenn er bzgl der von der Norm induzierten Metrik $d(v, w) = \|v - w\|$ vollständig ist, d.h. wenn jede Cauchy-Folge bzgl dieser Metrik einen Grenzwert in V hat.

Wir wissen bereits, dass $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ und $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ Banachräume sind. Als Vorgeschmack auf abstrakte (Funktional-)analysis können Sie zeigen, dass auch die folgenden Räume Banachräume sind:

a) $(B(X), \|\cdot\|_X)$ (beschränkte Funktionen $X \to \mathbb{C}$ mit der Supremumsnorm), wobei X eine beliebige Menge ist.

b) $C_b(X) := B(X) \cap C(X)$ (stetige beschränkte Funktionen $X \to \mathbb{C}$) mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_X$, wobei X ein metrischer Raum ist.

c) $(C([a, b]), \|\cdot\|_{[a,b]})$ (stetige Funktionen $[a, b] \to \mathbb{C}$ auf dem kompakten Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$).

Als wichtige Anwendung von gleichmäßiger Konvergenz betrachten wir nun Potenzreihen (Def. 3.53). Etwas allgemeiner als in Def. 3.53 betrachten wir Potenzreihen mit einem allgemeinen Entwicklungspunkt p, d.h. Abbildungen der Form

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - p)^n,$$

wobei $a_n \in \mathbb{C}$ die *Koeffizienten* und $p \in \mathbb{C}$ der *Entwicklungspunkt* der Potenzreihe sind. Unsere vorige Definition (Def. 3.53) entspricht dem Fall $p = 0$.

Die obige Funktion ist definiert für all die $z \in \mathbb{C}$, für die die Reihe konvergiert. Für $z = p$ konvergiert die Reihe trivialerweise (alle Terme bis auf den Term mit $n = 0$ verschwinden) gegen a_0. Aus Satz 3.54 erinnern wir, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - p)^n$ für $|z - p| < R$ (absolut) konvergiert, und für $|z - p| > R$ divergiert, wobei der *Konvergenzradius* R definiert ist als

$$R := \frac{1}{\limsup\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

mit den Konventionen $R = \infty$ für $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ und $R = 0$ für $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ verwendet werden.

Potenzreihen definieren also Funktionen

$$f : U_R(p) = \{z \in \mathbb{C} : |z-p| < R\} \to \mathbb{C}, \qquad f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-p)^n.$$

Ein wichtiges Beispiel ist die Exponentialfunktion ($a_n = \frac{1}{n!}$, $p = 0$, $R = \infty$).

Wenn wir die Reihe bei $n = N$ abbrechen, erhalten wir die endliche Summe

$$f_N(z) := \sum_{n=0}^{N} a_n(z-p)^n = a_0 + a_1(z-p) + \ldots + a_N(z-p)^N,$$

ein Polynom in z. Als Polynom ist f_N stetig. Der Grenzwert f ist im Allgemeinen kein Polynom, ist aber stets eine stetige Funktion, wie wir nun mit gleichmäßiger Konvergenz zeigen.

Satz 4.44. *Sei*

$$f : U_R(p) \to \mathbb{C}, \qquad f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-p)^n$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \in [0,\infty]$, und sei $0 < r < R$. Dann konvergiert die Funktionenfolge

$$f_N : U_{\leq r}(p) \to \mathbb{C}, \qquad f(z) := \sum_{n=0}^{N} a_n(z-p)^n$$

für $N \to \infty$ absolut und gleichmäßig, und f ist stetig.

Beweis. Da $0 < r < R$, ist der Radius r endlich und wir finden einen Zwischenradius $r < r' < R$. Da $r' < R$, konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r')^n$ absolut, insbesondere ist $(a_n(r')^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge (Korollar 3.33), insbesondere also beschränkt: Es gibt $C > 0$ so, dass $|a_n|(r')^n \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Auf der abgeschlossenen Kreisscheibe $U_{\leq r}(p)$ mit Radius $r < \infty$ können wir den n-ten Term der Potenzreihe abschätzen durch

$$|a_n(z-p)^n| \leq |a_n| r^n = |a_n|(r')^n \left(\frac{r}{r'}\right)^n \leq C\left(\frac{r}{r'}\right)^n.$$

Diese Abschätzung gilt für alle $z \in U_{\leq r}(p)$, also

$$\sup_{z\in U_{\leq r}(p)} |a_n(z-p)^n| \leq C\left(\frac{r}{r'}\right)^n.$$

Wegen $r < r'$ ist $\frac{r}{r'} < 1$, so dass wir mit Hilfe der geometrischen Reihe und dem Majorantenkriterium sehen, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{z\in U_{\leq r}(p)} |a_n(z-p)^n| \leq C\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r'}\right)^n = \frac{C}{1-\frac{r}{r'}} < \infty.$$

Soweit ist das genau wie bei unserer früheren Diskussion über Konvergenz von Potenzreihen. Sei nun $z \in U_{\leq r}(p)$ und $N \in \mathbb{N}$. Dann haben wir

$$\begin{aligned} |f_N(z) - f(z)| &= \left| \sum_{n=0}^{N} a_n(z-p)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-p)^n \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(z-p)^n \right| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n(z-p)^n| \leq C \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{r}{r'}\right)^n. \end{aligned}$$

Für $N \to \infty$ geht die rechte Seite $\sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{r}{r'}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{r}{r'}} - \sum_{n=N}^{\infty} \left(\frac{r}{r'}\right)^n$ gegen Null. Weiterhin hängt $\sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{r}{r'}\right)^n$ nicht von der genauen Wahl von z ab, sondern gilt für alle $z \in U_{\leq r}(p)$. Das heißt

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{z \in U_{\leq r}(p)} |f_N(z) - f(z)| = 0.$$

Auf der Kreisscheibe $U_{\leq r}(p)$ konvergiert die Funktionenfolge f_N also gleichmäßig gegen f. Daraus folgt, dass f auf $U_{\leq r}(p)$ stetig ist (Satz 4.40).

Ist nun $z \in U_R(p)$ beliebig, so finden wir $r < R$, so dass $z \in U_{\leq r}(p)$. Also ist f bei z stetig, d.h. auf ganz $U_R(p)$ stetig. $\square$

4.6 Sinus und Kosinus

In diesem Abschnitt definieren und diskutieren wir die Sinus- und Kosinusfunktionen. Der ganze Abschnitt ist also ein Beispiel, wird aber nicht extra als solches markiert.

Definition 4.45. Wir definieren zwei Funktionen cos, sin : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$\cos(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sin(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Diese Definition ist sinnvoll, da beide Reihen für alle $z \in \mathbb{C}$ (absolut) konvergieren - der Beweis dazu verläuft per Quotientenkriterium genau analog zu Beispiel 3.49[a].

Oft betrachten wir auch die Einschränkungen dieser Funktionen auf die reelle Achse, die gemäß obiger Definition reelle Werte annehmen, d.h. cos, sin : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

[a] Um den Konvergenzradius R der Kosinusreihe zu bestimmen, verwenden wir das Quotientenkriterium (Satz 3.48). Der Quotient

$$\left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{z^{2(n+1)}}{(2(n+1)!)}}{(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}} \right| = \frac{|z|^2}{(2n+1)(2n+2)}$$

konvergiert für $n \to \infty$ gegen Null, und zwar für alle $z \in \mathbb{C}$. Also ist der Konvergenzradius $R = \infty$, d.h. die Kosinusreihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ und stellt damit eine stetige Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dar. Das Argument für die Sinusreihe ist analog.

Lemma 4.46 (Elementare Eigenschaften von Sinus und Kosinus).
Die Funktionen $\cos, \sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *sind stetig. Es gilt* $\cos(0) = 1$, $\sin(0) = 0$, *und für alle* $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \cos(-z) &= \cos(z), & \sin(z) &= -\sin(-z), \\ \cos(z) &= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), & \sin(z) &= \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), \\ e^{iz} &= \cos(z) + i\sin(z), & \sin^2(z) + \cos^2(z) &= 1. \end{aligned}$$

Beweis. Bei $z = 0$ haben wir $\cos(0) = 1$ und $\sin(0) = 0$, wie man durch Einsetzen von $z = 0$ in die beiden Reihen sieht. Da die Kosinusreihe nur gerade Potenzen z^{2n} enthält, gilt $\cos(-z) = \cos(z)$. Da die Sinusreihe nur ungerade Potenzen z^{2n+1} enthält, gilt $\sin(-z) = -\sin(z)$.

Für den Zusammenhang mit der komplexen Exponentialfunktion betrachten wir

$$\frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n z^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n i^n z^n}{n!}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{((1 + (-1)^n) i^n z^n}{n!}.$$

Da beide Reihen absolut konvergieren, können wir sie zu einer Reihe zusammenfassen (Korollar 3.38).

Ist n ungerade, so verschwindet $1 + (-1)^n = 0$. In der Reihe müssen wir also nur gerades n berücksichtigen, und für $n = 2k$ erhalten wir $(1 + (-1)^{2k}) i^{2k} = 2(-1)^k$, also

$$\frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cos(z).$$

Das Argument für Sinus ist analog.

Wir erhalten so

$$e^{iz} = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) + i \cdot \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = \cos(z) + i\sin(z)$$

und

$$\begin{aligned} \sin^2(z) + \cos^2(z) &= \frac{1}{(2i)^2}(e^{iz} - e^{-iz})^2 + \frac{1}{4}(e^{iz} + e^{-iz})^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(-e^{2iz} + 2 - e^{-2iz} + e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}\right) = 1. \end{aligned}$$

□

Führen Sie die oben ausgelassenen Argumente für Sinus.

Die Gleichung $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$ gilt für alle komplexen Zahlen, insbesondere also für alle $z = x \in \mathbb{R}$. Für reelles x sind auch $\sin(x)$ und $\cos(x)$ reell und deshalb $\sin^2(x) = |\sin(x)|^2$ und $\cos^2(x) = |\cos(x)|^2$ (dies ist für allgemeine komplexe Zahlen falsch). Wir sehen also:

$$\begin{aligned} &\sin(x), \cos(x) \in [-1, 1] \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ &\sin(z) = 0 \Leftrightarrow \cos(z) = \pm 1, \qquad \cos(z) = 0 \Leftrightarrow \sin(z) = \pm 1. \end{aligned}$$

Dies bringt uns zu Nullstellen von Sinus und Kosinus und damit zur Definition der Kreiszahl π. Zuerst zeigen wir $\cos(2) < 0$. Dazu verwenden wir die für $n \geq 1$ gültige Ungleichung $\frac{2^n}{n!} > \frac{2^{n+2}}{(n+2)!}$ und schätzen ab

$$\begin{aligned}\cos(2) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^4}{24} \underbrace{- \frac{2^6}{6!} + \frac{2^8}{8!}}_{<0} \underbrace{- \frac{2^{10}}{10!} + \frac{2^{12}}{12!}}_{<0} + \dots \\ &< 1 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^4}{24} = -\frac{1}{3} < 0.\end{aligned}$$

Wir haben also $\cos(0) = 1 > 0$ und $\cos(2) < 0$. Da cos stetig ist, gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $x \in (0,2)$ mit $\cos(x) = 0$. Wir definieren nun $\frac{\pi}{2}$ als die kleinste Nullstelle von cos in dem Intervall $(0,2)$,

$$\pi := 2 \min\{x \in (0,2) : \ \cos(x) = 0\}.$$

Das Infimum $\inf\{x \in (0,2) : \ \cos(x) = 0\}$ existiert, da die Menge nicht leer und nach unten beschränkt ist. Es ist ein Minimum (Übung: Benutzen Sie, dass cos stetig ist).

Somit haben wir π definiert. Es gilt per Definition $0 < \pi < 4$ und $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, also $\sin \frac{\pi}{2} = \pm 1$.

> Zeigen Sie $\sin(x) > 0$ für alle $x \in (0,2)$.
> *Hinweis:* Gehen Sie ähnlich wie bei dem Beweis von $\cos 2 < 0$ vor.

Daraus erhalten wir

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \qquad \cos\frac{\pi}{2} = 0, \qquad \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

Durch Quadrieren der ersten Gleichung erhalten wir daraus die bemerkenswerte *Euler'sche Formel*

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

in der die wichtigsten Zahlen der Analyis, nämlich 0, 1, i, e, π, versammelt sind.

> Zeigen Sie: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gelten die Additionstheoreme
>
> $$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y),\\ \sin(x+y) &= \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y),\end{aligned}$$
>
> insbesondere sind Sinus und Kosinus (2π)-periodisch, d.h. für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt
>
> $$\cos(x + 2\pi) = \cos(x), \qquad \sin(x+2\pi) = \sin(x).$$
>
> *Hinweis:* Drücken Sie sin, cos durch exp aus und verwenden Sie Eigenschaften der Exponentialfunktion.

Wir halten zwei wichtige Konsequenzen für die komplexe Exponentialfunktion fest.

Lemma 4.47. *Die komplexe Exponentialfunktion ist $(2\pi i)$-periodisch, d.h.*

$$\exp(z + 2\pi i) = \exp(z), \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Es gilt

$$\exp(z) = 1 \iff z = 2\pi i n, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Beweis. Wir haben $e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z(e^{i\pi})^2 = e^z(-1)^2 = e^z$. Sei nun $z \in \mathbb{C}$ so, dass $e^z = 1$. Dann gilt $|e^z|^2 = e^z\overline{e^z} = e^z e^{\bar{z}} = e^{z+\bar{z}} = e^{2\operatorname{Re} z}$, und deshalb $\operatorname{Re} z = 0$ (denn die reelle Exponentialfunktion ist injektiv und erfüllt $e^0 = 1$). Wir haben also $z = ix$ mit $x \in \mathbb{R}$, und es gilt $e^{ix} = 1 \Leftrightarrow (\cos(x) = 1$ und $\sin(x) = 0)$.

Wir müssen also die Nullstellen der reellen Sinus- und Kosinusfunktionen bestimmen. Da Kosinus gerade ist ($\cos(-x) = \cos(x)$) und $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$, erhalten wir aus der Definition von π, dass $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ die einzigen Nullstellen von cos in dem Intervall $[0, 2\pi]$ sind. Aufgrund der 2π-Periodizität von cos haben wir also

$$\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Aufgrund von $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$ erhalten wir auch

$$\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

An den Sinus-Nullstellen $x = \pi(2n + 1)$, $n \in \mathbb{Z}$, gilt $\cos(\pi(2n + 1)) = \cos\pi = -\cos 0 = -1$, an den Sinus-Nullstellen $x = 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, hingegen $\cos(2n\pi) = \cos(0) = 1$. Das beweist die Behauptung. $\square$

Wir schlagen nun die Brücke zur geometrischen Definition von Sinus und Kosinus Funktionen über Dreiecke und betrachten noch einmal die komplexen Zahlen.

Für $x \in \mathbb{R}$ besagen $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ und $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, dass

$$\cos(x) = \operatorname{Re}(e^{ix}), \quad \sin(x) = \operatorname{Im}(e^{ix}), \quad |e^{ix}| = 1. \qquad x \in \mathbb{R},$$

Die komplexe Zahl e^{ix} liegt also auf dem Einheitskreis in $\mathbb{C}$ und $\cos(x)$, $\sin(x)$ sind die Katheten des rechtwinkligen Dreiecks mit den Eckpunkten 0, e^{ix}, $\cos(x)$.

Satz 4.48 (Polardarstellung komplexer Zahlen). *Zu jeder komplexen Zahl $z \neq 0$ gibt es einen eindeutigen Winkel $\varphi \in (-\pi, \pi]$, so dass*

$$z = |z|e^{i\varphi}.$$

Beweis. Da $z \neq 0$, gilt auch $|z| \neq 0$, also existiert $\frac{z}{|z|} = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a^2 + b^2 = 1$. Wir behaupten, dass es eindeutiges $-\pi < \varphi \leq \pi$ gibt, so dass $a = \cos\varphi$ und $b = \sin\varphi$.

Wir betrachten zunächst den Fall $a, b \geq 0$ (also z im ersten Quadranten von $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$). Wegen $a^2 + b^2 = 1$ gilt dann $0 \leq a, b \leq 1$. Da Kosinus stetig ist und $\cos(0) = 1$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ erfüllt, gibt es $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ mit $\cos\varphi = a$. Wir haben dann auch

$$\sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \sqrt{1 - a^2} = \sqrt{b^2} = b$$

(wegen $b \geq 0$).

Wir betrachten nun die Fälle, wo a und/oder b negativ sind. Wegen $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$ und $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$ ergeben die Winkel $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi < 0$ die Zahlen mit $a \geq 0$ und $b < 0$.

Die Zahlen mit $a < 0$ erhalten wir unter Beachtung von $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$ und $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$ (Übung).

Es bleibt die Eindeutigkeit von φ zu zeigen. Angenommen, $-\pi < \varphi, \varphi' \leq \pi$ erfüllen $z = |z|e^{i\varphi} = |z|e^{i\varphi'}$ für ein $z \neq 0$. Dann folgt $e^{i(\varphi-\varphi')} = 1$, mit Lemma 4.47 also $\varphi - \varphi' \in 2\pi\mathbb{Z}$. Da $-\pi < \varphi, \varphi' \leq \pi$, folgt $\varphi = \varphi'$. $\square$

Dieses Ergebnis besagt insbesondere, dass der Einheitskreis $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ in der Ebene genau durch $(\cos(t), \sin(t))$ beschrieben wird;

$$(-\pi, \pi] \ni t \mapsto \cos(t) + i\sin(t) \in \mathbb{T}$$

ist bijektiv.

Wir können komplexe Zahlen also statt durch Real- und Imaginärteil (kartesische Koordinaten auf $\mathbb{C}$) ebensogut durch Betrag und Winkel (Polarkoordinaten auf $\mathbb{C}$) beschreiben, $z = |z|e^{it}$ heißt *Polardarstellung* von z. Während sich die kartesische Beschreibung gut für Addition von komplexen Zahlen eignet, eignet sich die Polardarstellung gut für Multiplikation: Es gilt für $z = |z|e^{it}$ und $z' = |z'|e^{it'}$

$$z \cdot z' = |z||z'|\, e^{i(t+t')},$$

also "Beträge multiplizieren, Winkel addieren". Sie müssen dabei nur beachten, dass $z = 0$ keinen Winkel hat, und dass Sie beim Addieren von Winkeln $t + t'$ modulo 2π rechnen müssen.

> Bestimmen Sie die Polardarstellungen der komplexen Zahlen 1, i, $1 + i$ und $(1 + i)^6$.

Der Winkel φ einer komplexen Zahl ist nur eindeutig, weil wir $-\pi < \varphi \leq \pi$ verlangt haben: Gilt $z = |z|e^{i\varphi}$, so gilt auch $z = |z|e^{i(\varphi+2\pi n)}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Statt des Winkelbereichs $(-\pi, \pi]$ könnte man z.B. auch $[0, 2\pi)$ verwenden.

> Im Reellen ist die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ bijektiv und definiert damit den natürlichen Logarithmus als Umkehrfunktion. Wie sieht das im Komplexen aus?
>
> Wir bezeichnen mit $\mathrm{S} := \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \mathrm{im}(z) \leq \pi\} = \mathbb{R} + i(-\pi, \pi]$ und behaupten, dass
>
> $$\exp : \mathrm{S} \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$$
>
> bijektiv ist. In der Tat ist diese Funktion wegen Lemma 4.47 injektiv: $\exp(z) = \exp(w) \Leftrightarrow \exp(z - w) = 1 \Leftrightarrow z - w \in 2\pi i\mathbb{Z}$, für $z, w \in \mathrm{S}$ folgt dann $z = w$. Wegen Satz 4.48 ist diese Funktion auch surjektiv, also bijektiv.
>
> Wir bezeichnen die Umkehrfunktion mit
>
> $$\mathrm{Log} : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathrm{S},$$
>
> sie wird der *Hauptzweig des komplexen Logarithmus* genannt. Man berechnet Log am besten in

Polardarstellung, denn es gilt für $z \neq 0$

$$\mathrm{Log}(z) = \mathrm{Log}(|z|e^{i\varphi}) = \mathrm{Log}(e^{\ln|z|+i\varphi}) = \ln|z| + i\varphi,$$

wenn der Winkel φ in $(-\pi, \pi]$ gewählt wird. Hier bezeichnet ln den natürlichen Logarithmus, d.h. die Umkehrfunktion von $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$.

Allerdings ist Log an jedem Punkt $z \in \mathbb{R}_-$ unstetig: Sei $z \in \mathbb{R}_-$ (also Winkel $\varphi = \pi$) und betrachte die Winkelfolge $\varphi_n := \pi + \frac{1}{n}$. Dann haben wir $|z|e^{i\varphi_n} \to |z|e^{i\pi} = -|z| = z$. Um $\mathrm{Log}(|z|e^{i\varphi_n})$ zu bestimmen, müssen wir erst den zugehörigen Winkel in $(-\pi, \pi]$ bestimmen, nämlich $z = |z|e^{i(\pi+\frac{1}{n})} = |z|e^{i(-\pi+\frac{1}{n})}$ (beachten Sie $\pi + \frac{1}{n} \notin (-\pi, \pi]$ und $-\pi + \frac{1}{n} \in (-\pi, \pi]$). Also

$$\begin{aligned}\mathrm{Log}(|z|e^{i\varphi_n}) &= \mathrm{Log}(|z|e^{i(-\pi+\frac{1}{n})}) = \ln|z| - i\pi + \frac{i}{n} \longrightarrow \ln|z| - i\pi \\ &\neq \mathrm{Log}(z) = \mathrm{Log}(|z|e^{i\pi}) = \ln|z| + i\pi.\end{aligned}$$

Die komplexen Exponentialfunktion und der Logarithmus sind wichtige Funktionen der komplexen Analysis, über die Sie mehr in einer Funktionentheorie-Vorlesung lernen können.

Zum Abschluss dieses Abschnitts berechnen wir noch zwei oft verwendete Grenzwerte.

Lemma 4.49.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Beweis. Wir zeigen den ersten Grenzwert und überlassen den zweiten als (ähnliche) Übung:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = \lim_{x\to 0} x^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} - 1 \right) = \lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n)!} = 0.$$

Hier haben wir im letzten Schritt verwendet, dass eine durch eine konvergente Potenzreihe definierte Funktion im Inneren ihrer Konvergenzkreisscheibe stetig ist (Satz 4.44), so dass wir den Grenzwert $\lim_{x\to 0}$ in die Reihe $\sum_n$ ziehen können. $\square$

Beweisen Sie $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

5 Differentialrechnung

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit differenzierbaren Funktionen $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, also Funktionen, die eine Ableitung besitzen. Viele Aspekte dieses Kapitels werden Ihnen aus der Schule bekannt sein, hier aber streng bewiesen.

5.1 Ableitungen und Differentiationsregeln

Für $m, b \in \mathbb{R}$ beschreibt die affine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := mx + b$, eine Gerade. Der Zuwachs $f(x+h) - f(x) = m \cdot h$ ist linear in h und unabhängig von x. Wir nennen deshalb m die *Steigung* der Geraden.

Die Idee der Ableitung ist, eine beliebige Funktion lokal (d.h. in der Nähe eines Punktes) durch eine affine Funktion zu approximieren. Der Begriff der Ableitung wird mit Hilfe von Grenzwerten für Funktion (Def. 4.20) formuliert.

Definition 5.1. Sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge und $x \in D$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *in x differenzierbar*, falls der Grenzwert

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existiert. Die Zahl $f'(x)$ heißt dann *Ableitung von f in x*.

Existiert $f'(x)$ für alle $x \in D$, so heißt f *differenzierbar*, und die Funktion $f' : D \to \mathbb{R}, x \mapsto f'(x)$ heißt die *Ableitung von f*.

Bemerkungen:

a) Für $h = 0$ ist der Quotient $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ nicht definiert. In dem Grenzwert $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ werden also nur Folgen $x + h_n \in D$, $h_n \neq 0$, betrachtet. Insbesondere muss $x \in D$ ein Berührpunkt von $D \backslash \{x\}$ sein, damit solche Folgen überhaupt existieren.

b) Die geometrische Anschauung der Ableitung ist, dass $f'(x)$ die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x, f(x))$ angibt. Die Quotienten $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, $h \neq 0$, heißen *Differenzenquotienten*, sie geben die Steigung der eindeutigen Geraden durch die Punkte $(x, f(x))$ und $(x+h, f(x+h))$ (Sekante) an. Der Grenzwert $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ wird auch *Differentialquotient* genannt.

c) Eine äquivalente Formulierung der Ableitung ist

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x},$$

wie man durch Einführung der Variablen $y = x + h$ sieht.

d) Auch die Notation $\frac{df}{dx}(p) := f'(p)$ ist verbreitet.

Beispiel 5.2.

a) Konstante Funktionen sind differenzierbar und haben Ableitung Null: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so gilt $f(x+h) - f(x) = 0$ und deshalb

$f'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Die Identität ist differenzierbar mit Ableitung 1: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, so gilt für alle $h \neq 0$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h) - x}{h} = 1$$

und deshalb $f'(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

c) Für eine affine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx + b$, gilt $f'(x) = m$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

d) Die Exponentialfunktion ist differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$ mit $\exp' = \exp$: Für $h \neq 0$ gilt

$$\frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \exp(x) \cdot \frac{\exp(h) - 1}{h}.$$

Nach Beispiel 4.23 d) geht dieser Term für $h \to 0$ gegen $\exp(x) \cdot 1 = \exp(x)$.

e) Die Betragsfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, ist bei $x = 0$ nicht differenzierbar. Beweis: Wir betrachten für h die beiden Nullfolgen $\frac{1}{n}$ und $-\frac{1}{n}$. Es gilt

$$\frac{|0 + \frac{1}{n}| - |0|}{\frac{1}{n}} = 1, \qquad \frac{|0 - \frac{1}{n}| - |0|}{-\frac{1}{n}} = -1.$$

Nach Lemma 4.22 bedeutet das, dass der Grenzwert $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ nicht existiert. (In diesem Fall existieren die links- und rechtsseitigen Grenzwerte, aber sie sind unterschiedlich.)

f) Sinus und Kosinus $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind differenzierbar, mit

$$\sin' = \cos, \qquad \cos' = -\sin.$$

Um dies zu beweisen, verwenden wir die Additionstheoreme für Sinus und Kosinus: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y), \\ \sin(x+y) &= \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y), \end{aligned}$$

und die Grenzwerte aus Lemma 4.49. Somit erhalten wir für beliebiges $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \cos'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h} \\ &= \cos(x) \lim_{h \to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(x) \lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} = -\sin(x) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\sin'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x)\sin(h)+\sin(x)\cos(h)-\sin(x)}{h}\\ &= \cos(x)\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h} + \sin(x)\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h} = \cos(x).\end{aligned}$$

Nach diesen Beispielen vergleichen wir Differenzierbarkeit und Stetigkeit.

Lemma 5.3. *Sei $D \subset \mathbb{R}$, $x \in D$, und $f : D \to \mathbb{R}$ in x differenzierbar. Dann ist f in x stetig.*

Beweis. Wir haben

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) - f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot h = f'(x)\cdot \lim_{h\to 0} h = 0,$$

also $f(x+h) \to f(x)$ für $h \to 0$. Also ist f in x stetig (Lemma 4.22). □

Wir sehen also, dass Differenzierbarkeit eine stärkere Eigenschaft als Stetigkeit ist: Differenzierbare Funktionen sind insbesondere stetig, aber stetige Funktionen müssen nicht differenzierbar sein (siehe Beispiel 5.2 e)).

Ein weiterer Zusammenhang zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit ist das folgende Lemma, das in Beweisen oft praktisch ist.

Lemma 5.4 (Affine Approximierbarkeit). *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann in einem Punkt $x \in D$ differenzierbar, wenn es eine in 0 stetige Funktion φ auf $D - x := \{h \in \mathbb{R} : \ x + h \in D\}$ gibt, so dass*

$$f(x+h) - f(x) = \varphi(h)\cdot h, \qquad h \in D - x.$$

In diesem Fall gilt $f'(x) = \varphi(0)$.

Beweis. Angenommen, f ist in x differenzierbar. Dann definieren wir

$$\varphi(h) := \begin{cases} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} & h \neq 0 \\ f'(x) & h = 0 \end{cases}.$$

Dann ist φ in $h = 0$ stetig, denn per Definition von φ gilt $\lim_{h\to 0}\varphi(h) = f'(x) = \varphi(0)$.

Existiert hingegen eine in $h = 0$ stetige Funktion φ, so dass $f(x+h) - f(x) = h\varphi(h)$ für alle h, so haben wir für $h \neq 0$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \varphi(h).$$

Der Grenzwert $h \to 0$ existiert dann wegen der Stetigkeit von φ, und stimmt mit $f'(x) = \varphi(0)$ überein. □

Die Funktion φ hängt im Allgemeinen von x ab, diese Abhängigkeit ist in unserer Notation aber unterdrückt, da wir den Punkt x fixiert haben und h als Variable betrachten.

Es ist instruktiv, sich dieses Lemma als *affine Approximierbarkeit* zu merken: Schreiben wir $\varphi(h) = \varphi(0) + \gamma(h)$, so erhalten wir

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \gamma(h)h$$

und $\lim_{h\to 0} \gamma(h) = 0$. Hier ist $h \mapsto f(x) + f'(x)h$ eine affine Funktion (Gerade) und $h \mapsto \gamma(h)h$ eine Funktion, die bei $h = 0$ zu mindestens zweiter Ordnung verschwindet (h und $\gamma(h)$ verschwinden für $h \to 0$). Für $h \to 0$ wird f also durch eine affine Funktion approximiert (Tangente).

Wir beweisen nun einige Regeln für die Ableitung.

Satz 5.5 (Ableitungsregeln). *Sei $D \subset \mathbb{R}$, $x \in D$, und $f, g : D \to \mathbb{R}$ in x differenzierbar. Dann sind auch die Linearkombinationen $\lambda f + \mu g$ (mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$) und das Produkt $f \cdot g$ in x differenzierbar. Ist $f(x) \neq 0$, so ist auch die (in einer Umgebung von x wohldefinierte) Kehrwertfunktion $\frac{1}{f}$ in x differenzierbar. Die Ableitungen sind*

$$\begin{aligned} (\lambda f + \mu g)'(x) &= \lambda f'(x) + \mu g'(x) && \textit{(Linearität der Ableitung)},\\ (f \cdot g)'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) && \textit{(Produkt- oder Leibnizregel)},\\ \left(\frac{1}{f}\right)'(x) &= -\frac{f'(x)}{f(x)^2} && \textit{(Quotientenregel)}. \end{aligned}$$

Beweis. Wir verwenden Lemma 5.4. Nach Voraussetzung gibt es in 0 stetige Funktionen φ_f, φ_g mit $\varphi_f(0) = f'(x)$ und $\varphi_g(0) = g'(x)$, so dass $f(x+h) - f(x) = h\varphi_f(h)$ und $g(x+h) - g(x) = h\varphi_g(h)$. Dann ist auch $\varphi(h) := \lambda\varphi_f(h) + \mu\varphi_g(h)$ in $h = 0$ stetig, und es gilt

$$\begin{aligned} (\lambda f + \mu g)(x+h) - (\lambda f + \mu g)(x) &= \lambda(f(x+h) - f(x)) + \mu(g(x+h) - g(x))\\ &= \lambda h\varphi_f(h) + \mu h\varphi_g(h) = h\varphi(h). \end{aligned}$$

Also ist $\lambda f + \mu g$ in x differenzierbar mit Ableitung $\varphi(0) = \lambda\varphi_f(0) + \mu\varphi_g(0) = \lambda f'(x) + \mu g'(x)$.

Für die Produktregel betrachten wir

$$\begin{aligned} (fg)(x+h) - (fg)(x) &= f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)\\ &= (f(x+h) - f(x))g(x+h) + f(x)(g(x+h) - g(x))\\ &= h\varphi_f(h) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot h\varphi_g(h)\\ &= h\varphi_f(h) \cdot (g(x) + h\varphi_g(h)) + f(x) \cdot h\varphi_g(h)\\ &= h\Big(\varphi_f(h) \cdot (g(x) + h\varphi_g(h)) + f(x)\varphi_g(h)\Big). \end{aligned}$$

Der Term in Klammern, $\psi(h) := \varphi_f(h) \cdot (g(x) + h\varphi_g(h)) + f(x)\varphi_g(h)$, ist in $h = 0$ stetig und erfüllt $\psi(0) = \varphi_f(0)g(x) + f(x)\varphi_g(0) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, was die Produktregel beweist.

Für die Quotientenregel bemerken wir zunächst, dass $f(x+h) \neq 0$ für hinreichend kleines h: Denn f ist als in x differenzierbare Funktion insbesondere bei x stetig, so dass wir Beispiel 4.18 verwenden können. Für diese hinreichend kleinen h gilt dann

$$\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)} = -\frac{f(x+h)-f(x)}{f(x+h)f(x)} = -h\frac{\varphi_f(h)}{f(x+h)f(x)}.$$

Da $h \mapsto -\frac{\varphi_f(h)}{f(x+h)f(x)}$ in 0 stetig ist und dort den Wert $-\varphi_f(0)/f(x)^2 = -f'(x)/f(x)^2$ annimmt, ist der Beweis abgeschlossen. □

Beispiel 5.6.

a) Die Hyperbelfunktionen sinh, cosh sind differenzierbar; ihre Ableitungen sind

$$\sinh' = \cosh, \qquad \cosh' = \sinh .$$

Beweis: Wir erkennen $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2}(e^x - \frac{1}{e^x})$ als differenzierbar – $x \mapsto \frac{1}{e^x}$ ist differenzierbar, da $e^x \neq 0$ für alle x, und Linearkombinationen differenzierbarer Funktionen sind differenzierbar. Für die Ableitung berechnen wir zunächst mit Quotientenregel

$$\left(\frac{1}{\exp}\right)'(x) = -\frac{\exp(x)}{\exp(x)^2} = -\exp(-x),$$

und dann per Linearität und $\exp' = \exp$

$$\sinh'(x) = \frac{1}{2}(\exp'(x) - (-\exp(-x))) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh(x).$$

Das Argument für cosh ist analog.

b) Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist die Potenzfunktion $f_n : x \mapsto x^n$ auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar mit Ableitung $f_n'(x) = nx^{n-1}$.
Beweis per Induktion in n: Für $n = 0$ ist f_0 eine konstante Funktion und wir haben $f_0' = 0$ bereits gesehen. Für den Induktionsschritt $n \to n+1$ schreiben wir $f_{n+1}(x) = xx^n = f_1(x) \cdot f_n(x)$ als Produkt der differenzierbaren Funktionen f_1 und f_n. Per Produktregel ist die Ableitung

$$f_{n+1}'(x) = f_1'(x)f_n(x) + f_1(x)f_n'(x) = x^n + xnx^{n-1} = (n+1)x^n.$$

c) Jedes Polynom $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar, mit Ableitung

$$p'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k k x^{k-1}.$$

Das ergibt sich sofort aus der Ableitung der Potenzfunktionen und der Linearität der Ableitung.

d) Für $n \in \mathbb{N}$ sind die inversen Potenzfunktionen $\mathbb{R}\backslash\{0\} \ni x \mapsto x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ differenzierbar, mit Ableitung $x \mapsto -nx^{-n-1}$.

Beweis per Quotientenregel: Da die Potenzfunktionen $f_n(x) = x^n$ für $x \neq 0$ nicht verschwinden, ist $\frac{1}{f_n}$ auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ wohldefiniert und differenzierbar. Die Ableitung ist

$$\left(\frac{1}{f_n}\right)'(x) = -\frac{f_n'(x)}{f_n(x)^2} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -n\,x^{-1-n}.$$

Eine weitere wichtige Differentiationsregel ist die Kettenregel.

Satz 5.7 (Kettenregel). *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : D' \to \mathbb{R}$ mit $f(D) \subset D'$. Ist f in $x \in D$ differenzierbar und g in $f(x) \in D'$ differenzierbar, so ist auch $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ in x differenzierbar, mit Ableitung*

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \cdot g'(f(x)).$$

Beweis. Da f bzw. g in x bzw. $f(x)$ differenzierbar sind, gibt es nach Lemma 5.4 in $h = 0$ stetige Funktionen φ_f und φ_g, so dass $f(x+h) - f(x) = h\varphi_f(h)$ und $g(f(x)+u) - g(f(x)) = u\varphi_g(u)$ mit $\varphi_f(0) = f'(x)$ und $\varphi_g(0) = g'(f(x))$ gilt.

Dann haben wir

$$g(f(x+h)) - g(f(x)) = g(f(x) + h\varphi_f(h)) - g(f(x)) = h\varphi_f(h) \cdot \varphi_g(h\varphi_f(h)).$$

Da $\varphi : h \mapsto \varphi_f(h) \cdot \varphi_g(h\varphi_f(h))$ in $h = 0$ stetig ist, ist $g \circ f$ in x differenzierbar, mit Ableitung

$$(g \circ f)'(x) = \varphi(0) = \lim_{h \to 0} \varphi_f(h) \cdot \varphi_g(h\varphi_f(h)) = \varphi_f(0)\varphi_g(0) = f'(x) \cdot g'(f(x)).$$

□

Beispiel 5.8.

a) $\frac{de^{x^2}}{dx} = 2xe^{x^2}$.

b) $\frac{d}{dx}(2x+1)^4 = 2 \cdot 4(2x+1)^3$. Hier ist die Kettenregel zum Berechnen der Ableitung zwar nicht nötig, aber doch hilfreich, da wir nicht erst $(2x+1)^4$ ausmultiplizieren müssen.

Das Standard-Repertoire von Differentiationsregeln wird durch den nun folgenden Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion vervollständigt. Wir erinnern, dass eine auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierte Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ genau dann injektiv ist, wenn sie streng monoton ist (siehe Kapitel 4.4 und Hausaufgabe H10.3). Die Umkehrfunktion einer stetigen bijektiven Funktion auf einem Intervall ist ebenfalls stetig (Satz 4.32). Wir zeigen nun ein analoges Ergebnis für Differenzierbarkeit.

Satz 5.9 (Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion). *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein (aus mehr als einem Punkt bestehendes) Intervall, $f : I \to f(I) \subset \mathbb{R}$ stetig und bijektiv, und in $x \in I$ differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to I$ in $y :=$*

$f(x)$ differenzierbar, mit Ableitung

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Beweis. Sei $y_n \in f(I)$ eine Folge mit $y_n \neq y$, $y_n \to y$ für $n \to \infty$. Da f^{-1} stetig ist, gilt $f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y) = x$ für $n \to \infty$. Außerdem gilt $f^{-1}(y_n) \neq x$ für alle n, da f^{-1} injektiv ist. Für den Differentialquotienten erhalten wir unter Verwendung von Satz 3.11 und der Differenzierbarkeit von f

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)}{y_n - y} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(y_n)) - f(f^{-1}(y))}{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)}} \\ &= \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(f^{-1}(y_n)) - f(f^{-1}(y))}{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)}} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.\end{aligned}$$

□

Sie können sich dieses Ergebnis leicht folgendermaßen merken: Wenn Sie wissen, dass f und f^{-1} differenzierbar sind, erhalten sie per Kettenregel aus $f^{-1}(f(x)) = x$ die Identität $f'(x)(f^{-1})'(f(x)) = 1$, also $f'(x) \neq 0$ und

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Die Hauptaussage von Satz 5.9 ist also die Differenzierbarkeit von f^{-1}; die Formel für die Ableitung ergibt sich dann leicht.

Beispiel 5.10.

a) Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ ist bijektiv und differenzierbar mit $\exp' = \exp$. Da $\exp(x) \neq 0$ für alle x, ist ihre Umkehrfunktion $\log : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ (der natürliche Logarithmus) ebenfalls differenzierbar, mit

$$\log'(x) = \frac{1}{\exp'(\log(x))} = \frac{1}{x}.$$

b) Wir betrachten die Potenzfunktion $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^a$ für allgemeine Potenz $a \in \mathbb{R}$ und behaupten, dass diese Funktion differenzierbar ist mit Ableitung $x \mapsto ax^{a-1}$.
Beweis: Es gilt $x^a = e^{a \log x}$, als Komposition differenzierbarer Funktionen ist $x \mapsto x^a$ also differenzierbar. Die Ableitung ist per Kettenregel

$$\frac{dx^a}{dx} = \frac{de^{a\log x}}{dx} = \frac{a}{x} e^{a \log x} = ax^{a-1}.$$

c) Sinus Hyperbolicus $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist bijektiv (H10.1) und differenzierbar mit Ableitung $\sinh' = \cosh$. Da $\cosh(x) \geq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, ist $\sinh'(x) \neq 0$ für alle x, d.h. die Umkehrfunktion Area Sinus Hyperbolicus $\operatorname{arsinh} := \sinh^{-1}$ ist differenzierbar. Die Ableitung ist

$$\operatorname{arsinh}'(x) = \frac{1}{\sinh'(\operatorname{arsinh}(x))} = \frac{1}{\cosh(\operatorname{arsinh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Im letzten Schritt haben wir verwendet, dass $\cosh(x) = \sqrt{1+\sinh^2(x)}$ (leichte Übung).

Überprüfen Sie, dass Sie die gleiche Formel für arsinh' erhalten, wenn Sie die Formel für arsinh aus H10.1 verwenden. Können Sie auch die Ableitungen von arcosh, artanh berechnen?

Was ist die Ableitung von $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^x$ (falls sie existiert)?

Stetige Differenzierbarkeit und höhere Ableitungen

Eine differenzierbare Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ hat eine Ableitungsfunktion $f' : D \to \mathbb{R}$. Die Ableitung muss im Allgemeinen nicht stetig sein:

Beispiel 5.11. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

Aufgrund der Differentiationsregeln ist es klar, dass f an jedem Punkt $x \neq 0$ differenzierbar ist. Bei $x = 0$ erhalten wir

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} h \sin \frac{1}{h} = 0,$$

da $|\sin \frac{1}{h}| \leq 1$. Also ist f differenzierbar mit Ableitung

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

Da Kosinus periodisch ist, existiert $\lim_{x \to 0} f'(x)$ nicht, die Ableitung ist also nicht stetig.

Definition 5.12. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *stetig differenzierbar*, wenn f differenzierbar und $f' : D \to \mathbb{R}$ stetig ist. Die Menge aller stetig differenzierbaren Funktionen $D \to \mathbb{R}$ wird mit $C^1(D)$ bezeichnet.

Die Ableitung einer stetig differenzierbaren Funktion ist per Definition stetig, muss aber nicht differenzierbar sein (zum Beispiel $x \mapsto x|x|$ ist differenzierbar mit der stetigen Ableitung $x \mapsto 2|x|$, die aber bei $x = 0$ nicht differenzierbar ist).

Ist f' allerdings differenzierbar, so können wir die Ableitung

$$f'' := f^{(2)} := (f')'$$

der Ableitung bilden, die wir die *zweite Ableitung von* f nennen. Induktiv definieren wir so höhere Ableitungen

$$f^{(n+1)} := (f^{(n)})',$$

falls sie existieren. Die Menge der n-mal stetig differenzierbaren Funktionen (d.h. die Ableitungen $f', f'', \dots, f^{(n)}$ existieren und sind stetig) wird mit $C^n(D)$ bezeichnet.

Definition 5.13. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *glatt*, wenn sie n-mal stetig differenzierbar für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Die Menge aller glatten Funktionen $D \to \mathbb{R}$ ist

$$C^\infty(D) := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C^n(D).$$

Beispiel 5.14. Die Funktionen $\exp, \sin, \cos, \sinh, \cosh \in C^\infty(\mathbb{R})$ und alle Polynome sind Beispiele glatter Funktionen.

5.2 Mittelwertsätze und lokale Extrema

In diesem Abschnitt verwenden wir Ableitungen, um das lokale Verhalten von differenzierbaren Funktionen zu diskutieren. Insbesondere werden wir *lokale Extrema* betrachten.

Definition 5.15. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall[a] und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Ein Punkt $x \in I$ heißt *lokales Maximum (Minimum)*, falls es $\varepsilon > 0$ gibt, so dass die Einschränkung $f|_{(x-\varepsilon,x+\varepsilon)}$ in x ein Maximum (Minimum) hat, also $f(x) \geq f(t)$ (bzw. $f(x) \leq f(t)$) für alle $t \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ erfüllt.

[a] Also $I = (a, b)$ für zwei reelle Zahlen $a < b$.

Ein grundlegender Zusammenhang zwischen lokalen Extrema und Ableitungen ist, dass an einem lokalen Extremum x einer differenzierbaren Funktion f die Ableitung verschwindet, $f'(x) = 0$. Das Argument dazu ist einfach: Wir haben

$$f'(x) = \lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \lim_{y\downarrow x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \lim_{y\uparrow x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}.$$

Ist x ein lokales Maximum, so gilt $f(y) - f(x) \leq 0$ für alle hinreichend nah bei x liegenden y. Der rechtsseitige Grenzwert ($\lim_{y\downarrow x} \dots$) ist also ≤ 0, und der linksseitige Grenzwert ($\lim_{y\uparrow x} \dots$) ist ≥ 0. Da beide übereinstimmen, folgt $f'(x) = 0$. Für ein lokales Minimum argumentiert man analog.

Wir bemerken, dass $f'(x) = 0$ eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung für ein lokales Extremum ist. Zum Beispiel verschwindet die Ableitung von $f(x) = x^3$ bei $x = 0$, obwohl dort kein lokales Extremum vorliegt.

Weiterhin bemerken wir, dass eine Funktion auf einem *abgeschlossenen Intervall* $[a, b]$ ein Extremum am Rand (also bei $x = a$ oder $x = b$) annehmen kann, ohne dort verschwindende Ableitung zu haben, siehe z.B. $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$.

Satz 5.16. *Sei $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so dass $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist.*

a) **(Satz von Rolle)** *Gilt $f(a) = f(b)$, so gibt es $x \in (a, b)$ mit $f'(x) = 0$.*

b) **(Mittelwertsatz der Differentialrechnung)** *Es existiert $x \in (a, b)$ mit*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x).$$

Beweis. a) Wir wissen aus Satz 4.27, dass die Funktion f ihr Maximum und Minimum annimmt. Falls f konstant ist, ist die Aussage des Satzes von Rolle trivial (denn dann gilt $f'(x) = 0$ für alle x). Ist f nicht konstant, so gibt es $x \in (a, b)$ mit $f(x) \neq f(a)$, d.h. das Maximum oder Minimum von f wird im offenen Intervall (a, b) angenommen. Nach der obigen Bemerkung (vor dem Satz) verschwindet an dieser Stelle die Ableitung von f.

b) Um den Mittelwertsatz aus dem Satz von Rolle herzuleiten, definieren wir eine Hilfsfunktion

$$H : [a, b] \to \mathbb{R}, \qquad H(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Offenbar ist H stetig und auf (a, b) differenzierbar. Nach Konstruktion gilt $H(a) = f(a) = H(b)$, so dass nach Teil a) $x \in (a, b)$ existiert mit

$$0 = H'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Sie können sich den Satz von Rolle so merken: Zwischen zwei Nullstellen von f (einer Funktion, die den im Satz von Rolle geforderten Bedingungen genügt) liegt stets eine Nullstelle der Ableitung f'. Die geometrische Bedeutung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung ist, dass die Steigung der Geraden durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ (Sekante) gleich der Steigung der Tangente an f in einer Stelle $a < x < b$ ist.

Mit dem Mittelwertsatz können wir nun Monotonie von f mit Eigenschaften von f' in Verbindung setzen.

Korollar 5.17. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein (aus mehr als einem Punkt bestehendes) Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar.*

a) *f ist genau dann monoton wachsend, wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$.*

b) *f ist genau dann monoton fallend, wenn $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in I$.*

c) *f ist genau dann konstant, wenn $f' = 0$.*

d) *Falls $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$, so ist f streng monoton wachsend.*

e) *Falls $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$, so ist f streng monoton fallend.*

Beweis. a) Falls f monoton wachsend und $x \in I$ beliebig ist, so haben wir für $h > 0$

$$h^{-1}(f(x + h) - f(x)) \geq 0.$$

Für $h \to 0$ konvergiert dieser Differenzenquotient gegen $f'(x)$, was $f'(x) \geq 0$ impliziert.

Gilt hingegen $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$, so betrachten wir beliebige $u, v \in I$ mit $u < v$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $w \in (u, v)$ so, dass

$$0 \leq f'(w) = \frac{f(u) - f(v)}{u - v} \Rightarrow f(u) \leq f(v).$$

Also ist f monoton wachsend.

b) Analog zu a).

c) f ist genau dann konstant, wenn es monoton wachsend und monoton fallend ist. Nach a),b) ist das zu $f'(x) \geq 0$ und $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in I$ äquivalent, also zu $f' = 0$.

d), e) Der Beweis verläuft analog zu dem Beweis des zweiten Teils von a). □

Geben Sie ein Beispiel, das zeigt, dass in d) und e) die Umkehrung der Aussage nicht gilt.

Beispiel 5.18. Als Anwendung betrachten wie eine (gewöhnliche) *Differentialgleichung*: Gegeben $a \in \mathbb{R}$ fragen wir uns, was all die differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind, die für alle $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = af(x)$$

erfüllen. Dazu bemerken wir zuerst, dass $f(x) = ce^{ax}$ (mit $c \in \mathbb{R}$ einer Konstante) eine Lösung ist, wie man leicht durch Ableiten per Kettenregel verifiziert. Um zu zeigen, dass es keine weiteren Lösungen gibt, nehmen wir nun an, dass f eine beliebige Lösung der Differentialgleichung ist, und betrachten $g(x) := \frac{f(x)}{e^{ax}} = f(x)e^{-ax}$. Dann ist auch g differenzierbar, mit Ableitung

$$g'(x) = f'(x)e^{-ax} + f(x)(-ae^{-ax}) = af(x)e^{-ax} - af(x)e^{-ax} = 0.$$

Also ist g konstant, d.h. es gibt $c \in \mathbb{R}$ mit $g(x) = c$ für alle $x \in \mathbb{R}$. In anderen Worten: $f(x) = ce^{ax}$.

Wir betrachten nun lokale Extrema. Wir hatten bereits gesehen, dass für eine differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall I (um Randextrema auszuschließen) $f'(x) = 0$ in jedem lokalen Extremum x gilt. Andererseits ist $f'(x) = 0$ nicht ausreichend um zu schließen, dass f bei x ein lokales Extremum hat. Haben wir zusätzliche Information über höhere Ableitungen, können wir allerdings auf Extrema schließen.

Angenommen, wir haben $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$ für eine zweimal differenzierbare Funktion f, an einem Punkt x im Definitionsbereich von f. Dann gilt $0 < f''(x) = \lim_{h\to 0} h^{-1}(f'(x+h) - 0)$, aufgrund der Stetigkeit von f' gibt es dann $\delta > 0$, so dass $0 < h^{-1}f'(x+h)$ für alle $|h| < \delta$. Für $h \in (0, \delta)$ folgt dann $f'(x+h) > 0$, d.h. $f|_{[x,x+\delta]}$ ist streng monoton wachsend, und für $h \in (-\delta, 0)$ folgt $f'(x+h) < 0$, d.h. $f|_{[x-\delta,x]}$ ist streng monoton fallend. Es gilt also $f(x-t) > f(x) < f(x+t)$ für $0 < t < \delta$, d.h. x ist ein lokales Minimum von f. Analog impliziert $f'(x) = 0$, $f''(x) < 0$ ein lokales Maximum bei x.

Verschwindet aber auch $f''(x) = 0$, muss man noch höhere Ableitungen betrachten. Die allgemeinen Verhältnisse sind in dem folgenden Satz erklärt.

Satz 5.19 (Lokale Extrema). *Sei $I \subset \mathbb{R}$ offen, $f : I \to \mathbb{R}$ eine n-mal differenzierbare Funktion, und $x_0 \in I$ mit*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

a) Falls n gerade und $f^{(n)}(x_0) > 0$, so ist x ein lokales Minimum.

b) Falls n gerade und $f^{(n)}(x_0) < 0$, so ist x ein lokales Maximum.

c) Falls n ungerade ist, so hat f kein lokales Extremum bei x (sondern einen Sattelpunkt). In diesem Fall gilt: Ist $f^{(n)}(x_0) > 0$ bzw. $f^{(n)}(x_0) < 0$, so wächst bzw. fällt f streng monoton in einer offenen Umgebung von x_0.

Die Aussage des Satzes für $n = 2$ wurde bereits oben erläutert. Für $n = 3$ betrachten wir als Beispiel die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ und $x_0 = 0$. Dann gilt $f'(0) = f''(0) = 0$ und $f'''(0) = 6 > 0$, und tatsächlich liegt bei $x = 0$ kein Extremum vor, sondern f wächst in einer Umgebung von 0 streng monoton.

Aktuell könnten wir nur einen wenig instruktiven induktiven Beweis von Satz 5.19 führen. Wir werden den Beweis deshalb erst etwas später führen, wenn uns weitere Methoden zur Verfügung stehen.

Sie können sich die Aussage von Satz 5.19 folgendermaßen merken: Statt der Funktion f (die die Voraussetzungen des Satzes erfüllt) betrachten Sie die polynomiale Funktion

$$g : x \mapsto f^{(n)}(x_0) \cdot (x - x_0)^n.$$

Dann hat f ein lokales Minimum/Maximum bei $x = x_0$ genau dann, wenn g bei $x = x_0$ ein lokales Minimum/Maximum hat.

Beispiel 5.20. Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Funktion $f(x) = x^3 \sin(x)$ ist glatt und erfüllt (Übung)

$$f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0, \qquad f^{(4)}(0) = 24 > 0.$$

Also liegt bei $x_0 = 0$ ein lokales Minimum vor. Der Wert des Minimums ist $f(0) = 0$.

Für die Bestimmung der Extrema einer genügend oft differenzierbaren Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ (mit $I \subset \mathbb{R}$ einem Intervall) kann man also folgendermaßen vorgehen: Zuerst bestimmt man die *kritischen Punkte*, d.h. alle $x \in I$ mit $f'(x) = 0$. Dann berechnet man für jeden kritischen Punkt x die höheren Ableitungen $f''(x), f'''(x)$ und verwendet Satz 5.19, um zu prüfen, ob bei x ein Extremum vorliegt. Den Extremwert der Funktion erhält man dann als $f(x)$.

Einige Bemerkungen zu diesem Vorgehen:

a) Ist f nicht differenzierbar, so ist diese Methode natürlich nicht anwendbar.

b) Hat I Randpunkte (z.B. für $I = [0, 1]$ die Punkte $x = 0$ und $x = 1$), so kann dort ein Extremum vorliegen, ohne dass die Ableitung von f verschwindet. An den Randpunkten ist also ggf. separat auf Extrema zu prüfen.

Beispiel 5.21. Als Beispiel einer Anwednung der Differentialrechnung diskutieren wir das *Wien'sche Verschiebungsgesetz* aus der Physik.

Nach dem Planck'schen Strahlungsgesetz ist das Emissionsvermögen eines schwarzen Körpers proportional zu

$$E_T(\lambda) = \frac{1}{\lambda^5}(e^{\frac{a}{\lambda T}} - 1)^{-1}.$$

Hierbei ist $a > 0$ eine Naturkonstante (d.h. eine feste positive reelle Zahl), $T > 0$ die absolute Temperatur des Körpers, und $\lambda > 0$ die Wellenlänge der Strahlung. Wir fragen, für welche Wellenlänge λ das Emissionsvermögen $E_T(\lambda)$ (bei fester Temperatur T) maximal wird.

Dazu betrachten wir die Funktion $E_T : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, die wir als differenzierbar erkennen. Ihre Ableitung ist

$$\begin{aligned} E_T'(\lambda) &= -\frac{5}{\lambda^6}(e^{\frac{a}{\lambda T}} - 1)^{-1} + \frac{1}{\lambda^5}\frac{a}{\lambda^2 T}e^{\frac{a}{\lambda T}}(e^{\frac{a}{\lambda T}} - 1)^{-2} \\ &= -\lambda^{-6}(e^{\frac{a}{\lambda T}} - 1)^{-2}\left(\frac{a}{\lambda T}e^{\frac{a}{\lambda T}} - 5(e^{\frac{a}{\lambda T}} - 1)\right). \end{aligned}$$

Zum Berechnen der Nullstellen der Ableitung setzen wir zur Abkürzung $x := \frac{a}{\lambda T} > 0$. Dann gilt $E_T'(\lambda) = 0$ genau dann, wenn

$$f(x) := -xe^x + 5(e^x - 1) = 0$$

gilt. Wegen $f'(x) = (4 - x)e^x$ wächst f streng von $f(0) = 0$ bis $f(4) = e^4 - 5 > 2^4 - 5 > 0$, und für $x > 4$ fällt $f(x)$ streng monoton mit $f(x) \to -\infty$ für $x \to \infty$. Nach dem Zwischenwertsatz (den wir verwenden dürfen, da f stetig ist) gibt es also ein $x_0 > 4$ mit $f(x_0) = 0$, aufgrund der strengen Monotonie von f für $x > 4$ ist dies die einzige Nullstelle von f.

Die zugehörige Wellenlänge $\lambda_0 := \frac{a}{x_0 T}$ ist dann die eindeutige Nullstelle von E_T'. Wegen $E_T''(\lambda_0) < 0$ handelt es sich um ein lokales Maximum. Liegt eventuell ein Maximum am Rand (bei $\lambda = 0$) vor? Dazu bestimmen wir $\lim_{\lambda \downarrow 0} E_T(\lambda)$:

$$\frac{1}{\lambda^5}(e^{\frac{a}{\lambda T}} - 1)^{-1} = \frac{1}{\lambda^5}\frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{\lambda^n T^n}} = \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{T^n}\lambda^{5-n}} \to 0 \text{ für } \lambda \to 0+ .$$

An dem gleichen Ausdruck sehen wir auch $E_T(\lambda) \to 0$ für $\lambda \to \infty$. Also ist λ_0 sogar das globale Maximum von E_T, d.h. $\max_{\lambda > 0} E_T(\lambda) = E_T(\lambda_0)$.

Das Wien'sche Verschiebungsgesetz besagt, dass das Produkt von Temperatur T und der Wellenlänge λ_0, bei der die Emission maximal ist, konstant ist: $\lambda_0 T = \frac{a}{x_0}$. Um die Konstante x_0 zu bestimmen, muss man die Nullstelle von f numerisch berechnen, es ergibt sich ein ungefährer Wert von $x_0 = 4,9651$.

5.3 Taylorentwicklungen

Die Idee einer Taylorentwicklung ist es, eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, die genügend oft differenzierbar ist, in der Nähe eines Punktes $x_0 \in I$ durch ein Polynom n-ten Grades anzunähern.

In nullter Ordnung nähern wir f durch die konstante Funktion

$$T_{f,x_0,0}(x) := f(x_0),$$

die mit f an der Stelle $x = x_0$ übereinstimmt. In erster Ordnung nähern wir f durch die affine Funktion (Gerade)

$$T_{f,x_0,1}(x) := f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Diese Funktion stimmt mit f an der Stelle $x = x_0$ überein, außerdem hat sie in $x = x_0$ die gleiche Ableitung $f'(x_0)$ wie f; es handelt sich um die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$.

In zweiter Ordnung möchten wir f durch ein Polynom zweiten Grades annähern, dass mit f im Funktionswert sowie in den Werten der ersten beiden Ableitungen in $x = x_0$ übereinstimmt. Dieses Polynom ist

$$T_{f,x_0,2}(x) := f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2$$

und erfüllt $T_{f,x_0,2}(x_0) = f(x_0)$, $T'_{f,x_0,2}(x_0) = f'(x_0)$, $T''_{f,x_0,2}(x_0) = f''(x_0)$.

Dies motiviert die folgende Definition:

Definition 5.22. Sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $x_0 \in D$, und $f : D \to \mathbb{R}$ in x_0 n-mal differenzierbar. Dann ist das *Taylor-Polynom n-ten Grades von f mit Entwicklungspunkt* x_0 das Polynom

$$T_{f,x_0,n}(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Ist f bei x_0 beliebig oft differenzierbar, so heißt die Potenzreihe

$$T_{f,x_0}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

die *Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt* x_0.

Per Konstruktion erfüllen die Taylorpolynome

$$T^{(k)}_{f,x_0,n}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Hier und im Folgenden steht $f^{(0)}$ für die “nullte Ableitung von f”, also für f selbst.

Die Taylorreihe kann konvergieren oder nicht, wir werden diesen Punkt später genauer besprechen.

Beispiel 5.23.

a) Sei $f = \exp$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann gilt $f^{(k)}(x_0) = e^{x_0}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Also ist die

Taylorreihe der Exponentialfunktion mit Entwicklungspunkt x_0

$$T_{f,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{x_0}}{k!}(x-x_0)^k = e^{x_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(x-x_0)^k = e^{x_0} e^{x-x_0} = e^x.$$

In diesem Fall konvergiert die Taylorreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ und stimmt mit der Funktion exp überein.

b) Sei f ein Polynom n-ten Grades. Dann gilt $f^{(k)} = 0$ für $k > n$, die Taylorreihe von f ist also ein Polynom von Grad $\le n$. Auch in diesem Fall gilt $f = T_{f,x_0}$, wie Sie in einer Übung zeigen werden.

c) Für den natürlichen Logarithmus $\log : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ gilt

$$\log'(x) = \frac{1}{x}, \qquad \log''(x) = -\frac{1}{x^2}, \qquad \log^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3},$$

was induktiv auf $\log^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{x^k}$ führt. Bei Entwicklung um $x_0 = 1$ erhalten wir also als Taylorreihe (beachten Sie $\log(1) = 0$)

$$T_{\log,1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot (x-1)^k.$$

Diese Reihe konvergiert für $0 < x < 2$ (denn dann gilt $|x-1| < 1$, so dass wir eine geometrische Reihe als Majorante verwenden können) und divergiert für $x > 2$, da dann $k \mapsto \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot (x-1)^k$ keine Nullfolge ist. Für $x \le 0$ divergiert die Reihe ebenfalls.

Bestimmen Sie für die Funktion $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = \sqrt{1+x}$ die Taylorpolynome $T_{f,0,n}$ mit Entwicklungspunkt x_0 und beliebiger Ordnung $n \in \mathbb{N}$.

Diese Beispiele werfen die Frage auf, wie gut / in welchem Sinne die Polynome $T_{f,x_0,n}$ die gegebene Funktion f (zumindest in der Nähe von $x = x_0$) approximieren.

Satz 5.24 (Satz von Taylor). *Sei I ein (aus mehr als einem Punkt bestehendes) Intervall, $x_0 \in I$, und $f \in C^{n+1}(I)$. Dann existiert zu jedem $x \in I$ ein ξ zwischen x_0 und x (d.h. $\xi \in (x_0, x)$ falls $x_0 \le x$ und $\xi \in (x, x_0)$ falls $x \le x_0$), so dass*

$$f(x) = T_{f,x_0,n}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Bemerkungen zum Satz:

a) Ein Punkt ξ, der zwischen x_0 und x liegt, ist genau von der Form $\xi = x_0 + \theta \cdot (x - x_0)$ mit einer Zahl $0 \le \theta \le 1$. Hierbei spielt es keine Rolle, ob der Fall $x_0 \le x$ oder der Fall $x_0 \ge x$ vorliegt.

b) Beachten Sie, dass der Punkt ξ im Allgemeinen von x, von x_0, und von n abhängt.

c) Der Term

$$R_{f,n,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

heißt das *(Lagrangesche) Restglied* der Taylorentwicklung, er gibt die Differenz zwischen Funktionswert $f(x)$ und approximierendem Taylorpolynom $T_{f,x_0,n}(x)$ an und misst damit den "Fehler" der Approximation. Es gibt einige weitere Formulierungen des Restglieds, insbesondere durch Integrale, die wir später kennenlernen werden.

Beweis. Wir betrachten zwei Punkte $x, x_0 \in I$. Falls $x = x_0$, so ist die Aussage des Satzes wegen $T_{f,x_0,n}(x_0) = f(x_0)$ trivial. Für $x \neq x_0$ ist die zu zeigende Aussage äquivalent dazu, dass

$$Q := \frac{f(x) - T_{f,n,x_0}(x)}{(x-x_0)^{n+1}}$$

gleich $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$ für ein geeignetes ξ zwischen x und x_0 ist. Wir betrachten nun x, x_0 als fest und definieren auf dem abgeschlossenen Intervall mit Endpunkten x und x_0 (d.h. $[x, x_0]$ bzw. $[x_0, x]$) die Hilfsfunktion

$$\begin{aligned}\varphi(t) &:= f(x) - T_{f,t,n}(x) - Q \cdot (x-t)^{n+1} \\ &= f(x) - \left(f(t) + f'(t)\cdot(x-t) + \frac{1}{2}f''(t)\cdot(x-t)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(t)\cdot(x-t)^n \right) \\ &\quad - Q\cdot(x-t)^{n+1}.\end{aligned}$$

Beachten Sie, dass wir x fixiert haben und die Variable nun t ist, nicht x. Insbesondere hängt Q nicht von t ab. Die Funktion φ ist stetig differenzierbar (da $f \in C^n(I)$), und wir haben

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= 0 \qquad (\text{wegen } T_{f,x,n}(x) = f(x)), \\ \varphi(x_0) &= 0 \qquad (\text{nach Definition von } Q).\end{aligned}$$

Wir können also den Satz von Rolle anwenden (Satz 5.16): Es gibt ein ξ zwischen x_0 und x, so dass $\varphi'(\xi) = 0$.

Die Ableitung von φ (nach t!) ist nach den Ableitungsregeln

$$\begin{aligned}\varphi'(t) = 0 - \Big(& f'(t) + f''(t)(x-t) - f'(t) + \frac{1}{2}f'''(t)(x-t)^2 - f''(t)(x-t) + \ldots \\ & \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n - \frac{n}{n!}f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} \Big) + (n+1)Q\cdot(x-t)^n.\end{aligned}$$

Die meisten Terme heben sich paarweise weg, wir erhalten

$$\varphi'(t) = -\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n + (n+1)Q\cdot(x-t)^n = \left(Q - \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}\right)\cdot(n+1)(x-t)^n.$$

Die Gleichung $\varphi'(\xi) = 0$ ist somit äquivalent zu der behaupteten Aussage, da der zweite Faktor $(n+1)(x-\xi)^n$ nicht verschwindet (wegen $x \neq \xi$). □

Beispiel 5.25. Als Beispiel betrachten wir noch einmal die Taylorentwicklung des Logarithmus aus Beispiel 5.23 c). Sei $x > 0$ und $x_0 = 1$. Dann sehen wir mit Hilfe des Satzes von Taylor, dass es ein ξ zwischen x und 1 gibt, so dass

$$\log(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(x-1)^k + \frac{(-1)^n}{n+1}\frac{(x-1)^{n+1}}{\xi^{n+1}}.$$

Im Fall $1 < x < 2$ haben wir also $1 < \xi < x$, was zu $\left|\frac{x-1}{\xi}\right| < x - 1 < 1$ führt. In diesem Fall können wir den Restterm also abschätzen durch

$$\left|\frac{(-1)^n}{n+1}\frac{(x-1)^{n+1}}{\xi^{n+1}}\right| < \frac{|x-1|^{n+1}}{n+1},$$

was für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert (wegen $|x-1| < 1$). Das impliziert

$$\log(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(x-1)^k, \qquad 1 \le x < 2.$$

In diesem Bereich stimmt der Logarithmus also mit seiner Taylorreihe überein! Dies ist einerseits von praktischer Bedeutung, z.B. wenn man $\log\frac{3}{2}$ näherungsweise berechnen möchte. Das Restglied bei Entwicklung bis zu n-ter Ordnung bei $x = \frac{3}{2}$ ist nach obiger Abschätzung kleiner als $(n+1)^{-1}2^{-(n+1)}$. Für $n = 7$ ist der Fehler also kleiner als $\frac{1}{8\cdot 2^8} = \frac{1}{2048} < 10^{-3}$. Das bedeutet, dass die Taylorentwicklung $T_{\log,1,7}(\frac{3}{2})$ von $\log\frac{3}{2}$ um weniger als 10^{-3} abweicht, also in den ersten drei Nachkommastellen korrekt ist. So erhält man die Näherung

$$\begin{aligned} T_{\log,1,7}(\tfrac{3}{2}) &= \sum_{k=1}^{7} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\frac{1}{2^k} = \frac{909}{2240} = 0{,}405803\overline{571428}, \\ \log\frac{3}{2} &= 0{,}40546510810816438\ldots \end{aligned}$$

Wie Sie sehen, stimmt die Näherung in den ersten drei Nachkommastellen mit $\log\frac{3}{2}$ überein. Auf diese Weise können Sie $\log(x)$ für $1 < x < 2$ mit beliebiger Präzision berechnen.

Andererseits ist das Übereinstimmen von $\log(x)$ mit seiner Taylorreihe für gewisse x auch von theoretischem Interesse: Wir können die Funktionswerte von $\log(x)$ in einem gewissen Intervall einzig und allein auf Basis der Kenntnis von $\log(x)$ in einem beliebig kleinen Intervall um 1 bestimmen.

Abschließend ist zu diesem Beispiel zu sagen, dass auch für $x \in (0,2]$ die Identität $\log(x) = T_{\log,1}(x)$ gilt (hier ohne Beweis, man verwendet eine andere Form des Restglieds). Bei $x = 2$ beweist dies insbesondere die in Beispiel 3.36 behauptete Formel für $\log(2)$.

Außerhalb des Intervalls $(0,2]$ *divergiert* die Taylorreihe des Logarithmus, insbesondere gilt für $x > 2$ *nicht* $\log(x) = T_{\log,1}(x)$.

Berechnen Sie per Taylorentwicklung $\sin(1)$ mit einer Genauigkeit von mindestens drei Nachkommastellen. Als Entwicklungspunkt können Sie hier $x_0 = 0$ verwenden.

Die Untersuchungen in diesem Beispiel werfen die Frage auf, unter welchen Umständen die Taylorpolynome eine gute Approximation der betrachteten Funktion darstellen. Analog zu dem Vorgehen in dem Beispiel erhalten wir problemlos den folgenden Satz.

Satz 5.26. *Seien $x, x_0 \in \mathbb{R}$ Enpunkte eines kompakten Intervalls I (also $I = [x_0, x]$ bzw. $I = [x, x_0]$) und $f : I \to \mathbb{R}$ glatt. Dann konvergiert die Taylorreihe $T_{f,x_0}(x)$ genau dann gegen $f(x)$, also*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k,$$

falls $\lim_{n\to\infty} R_{f,n,x_0}(x) = 0$. Dies ist insbesondere der Fall, falls es $a, C \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\sup_{t\in I} |f^{(n)}(t)| \leq a \cdot C^n.$$

Beweis. Die erste Aussage ist eine Umformulierung der Definition des Restgliedes $R_{f,n,x_0}(x) = f(x) - T_{f,x_0,n}(x)$. Für die zweite Aussage schätzen wir das Restglied ab gemäß

$$|R_{f,x_0,n}(x)| \leq \frac{a\,C^{n+1}}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1}.$$

Die rechte Seite konvergiert gegen Null für $n \to \infty$, z.B. da die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a\,C^{n+1}}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1} = a(\exp(C|x - x_0|) - 1) < \infty$. □

Dieser Satz sollte aber nicht darüber hinwegtäuschen, dass das Konvergenzverhalten von Taylorreihen üblicherweise schlecht ist – im Allgemeinen stellt die Taylorreihe einer glatten Funktion *nicht* die Funktion dar. Bei näherer Betrachtung mag es überraschend erscheinen, dass die Taylorreihe von f gegen f konvergieren sollte: Denn in die Taylorreihe von f gehen nur der Funktionswert $f(x_0)$ und die Werte der Ableitungen $f^{(n)}(x_0)$, $n \in \mathbb{N}$, ein. Diese Werte sind bereits durch das Verhalten von f in einer beliebig kleinen offenen Umgebung von x_0 festgelegt. Haben wir also zwei glatte Funktionen f und g, die auf dem Intervall $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ für ein $\delta > 0$ übereinstimmen, so stimmen ihre Taylorreihen überein, $T_{f,x_0} = T_{g,x_0}$. Aber außerhalb des Intervalls $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ können f und g vollkommen unterschiedlich sein – die Taylorreihe kann also höchstens gegen eine der beiden Funktionen konvergieren.

Dieses Argument belegt, dass es passieren kann, dass die Taylorreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ konvergiert, aber gegen einen anderen Wert als $f(x)$. Das explizite Standardbeispiel zu diesem Effekt ist das folgende.

Beispiel 5.27. Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

ist glatt und erfüllt

$$f^{(n)}(0) = 0, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

(siehe Hausaufgabe auf Blatt 12). Alle Ableitungen von f verschwinden bei $x = 0$. Also ist die Taylorreihe Null, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = 0$ für alle x. Das ist sicherlich verschieden von $f(x)$.

Zum Abschluss dieses Abschnitts über Taylorentwicklungen holen wir den Beweis von Satz 5.19 über lokale Extrema nach.

Beweis von Satz 5.19. Sei $x, x_0 \in I$ und $f \in C^n(I)$ mit $f^{(k)}(x_0) = 0$ für $k = 1, \ldots, n-1$ und $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

Nach dem Satz von Taylor gibt es ξ zwischen x und x_0, so dass

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Beachten Sie, dass ξ von x (und x_0) abhängt, aber stets zwischen x und x_0 liegt. Da $f^{(n)}$ stetig ist, hat $f^{(n)}$ in einer genügend kleinen Umgebung von x_0 keine Nullstellen (Beispiel 4.18), hat dort also stets das gleiche Vorzeichen wie $f^{(n)}(x_0)$. Gilt $f^{(n)}(x_0) > 0$, haben wir auf einer genügend kleinen Umgebung $U_\delta(x_0)$ von x_0 also die Darstellung

$$f(x) = f(x_0) + p(x) \cdot (x-x_0)^n,$$

wobei $p(x) = n!^{-1} f^{(n)}(\xi(x,x_0)) > 0$ für alle $x \in U_\delta(x_0)$. Daraus folgt sofort, dass im Falle von geradem n bei $x = x_0$ ein lokales Minimum vorliegt. Ist n hingegen ungerade, so ist $f(x) > f(x_0)$ für $x > x_0$ und $f(x) < f(x_0)$ für $x < x_0$, d.h. bei $x = x_0$ liegt kein lokales Extremum vor.

Der Fall $f^{(n)}(x_0) < 0$ ist analog. □

5.4 Die Regeln von de l'Hospital

Die Regeln von de l'Hospital erlauben die Berechnung von Grenzwerten von Quotienten von Funktionen mit Hilfe von Differentialrechnung. Als Vorbereitung besprechen wir zunächst den verallgemeinerten Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Im Gegensatz zum Mittelwertsatz (Satz 5.16 b)) treten hier zwei Funktionen auf.

Satz 5.28 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz). *Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, die im offenen Intervall (a,b) differenzierbar sind. Zusätzlich gelte $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Dann existiert $\xi \in (a,b)$, so dass*

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Bemerkungen:

a) Setzen Sie $g = \mathrm{id}$, so erhalten Sie den Mittelwertsatz (Satz 5.16 b)).

b) Auf der rechten Seite teilen wir durch $g(b)-g(a)$. Diese Zahl ist nie Null: Wäre $g(a) = g(b)$, so gäbe es nach dem Satz von Rolle (Satz 5.16 a)) einen Punkt $\xi \in (a,b)$ mit $g'(\xi) = 0$, im Widerspruch zu unserer Annahme $g'(x) \neq 0$ für alle $a < x < b$.

Beweis. Wir definieren eine Hilfsfunktion $h : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$h(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)),$$

die auf $[a,b]$ stetig und auf (a,b) differenzierbar ist. Per Konstruktion gilt $h(a) = 0 = h(b)$. Wir können also den Satz von Rolle anwenden: Es gibt $\xi \in (a,b)$ mit

$$0 = h'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(\xi).$$

Dies beweist die Behauptung. $\square$

Nach dieser Behauptung wenden wir uns den Sätzen von l'Hospital zu. Als Motivation betrachten wir den Grenzwert

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1}.$$

Existenz und Wert dieses Grenzwertes sind nicht ganz offensichtlich, da formales Einsetzen von $x = 1$ den undefinierten Bruch "$\frac{0}{0}$" liefert. Mit etwas Trickserei können wir ihn berechnen:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} = \lim_{a\to 0} \frac{\log e^a}{e^a - 1} = \lim_{a\to 0} \frac{a}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}} = \lim_{a\to 0} \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{n!}} = \frac{1}{\lim_{a\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{n!}} = 1.$$

Das ist allerdings vergleichsweise kompliziert – mit dem Satz von l'Hospital wird es viel einfacher gehen.

Satz 5.29 (Erster Satz von l'Hospital). *Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige und auf (a,b) differenzierbare Funktionen mit*

$$f(b) = g(b) = 0 \qquad \textit{und} \qquad g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b).$$

Dann gilt

$$\lim_{x\uparrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\uparrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls der rechte Grenzwert in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ existiert. Der Satz gilt auch für $b = \infty$: In diesem Fall setzen wir

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0 \qquad \textit{und} \qquad g'(x) \neq 0 \ \forall x > a$$

voraus, und erhalten

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls der rechte Grenzwert in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ existiert.

Bemerkungen:

a) Existenz von $\lim_{x\uparrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ bedeutet, dass entweder der Grenzwert existiert (als eine reelle Zahl), oder dass $\frac{f'(x)}{g'(x)} \to \pm\infty$ für $x \uparrow b$. In beiden Fällen gilt dann $\lim_{x\uparrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\uparrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

b) Der Satz gilt analog für $x \downarrow a$ anstelle von $x \uparrow b$ bzw. für $x \to -\infty$ anstelle von $x \to \infty$.

Beweis. Nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz gibt es zu jedem $x \in (a, b)$ ein $\xi_x \in (x, b)$ mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(b) - f(x)}{g(b) - g(x)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}.$$

Wegen $x < \xi_x < b$ geht für $x \uparrow b$ auch $\xi_x \uparrow b$. Daraus folgt $\lim_{x\uparrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\uparrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Die Variante für $b = \infty$ (also Grenzwerte für $x \to \infty$) führen wir folgendermaßen auf die erste Variante zurück: Wir nehmen $a > 0$ an (es interessiert ja nur das asymptotische Verhalten für $x \to \infty$) und definieren die Hilfsfunktionen

$$\tilde{f} : [0, \tfrac{1}{a}] \to \mathbb{R}, \qquad \tilde{f}(x) := \begin{cases} f(\frac{1}{x}) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases},$$

$$\tilde{g} : [0, \tfrac{1}{a}] \to \mathbb{R}, \qquad \tilde{g}(x) := \begin{cases} g(\frac{1}{x}) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

Wegen $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ sind diese Funktionen stetig, und auf $(0, \frac{1}{a})$ differenzierbar, wie man per Kettenregel sieht. Also können wir die erste Variante des Satzes benutzen, nämlich

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{y\downarrow 0} \frac{-\frac{1}{y^2} f'(\frac{1}{y})}{-\frac{1}{y^2} g'(\frac{1}{y})} = \lim_{y\downarrow 0} \frac{\tilde{f}'(y)}{\tilde{g}'(y)} = \lim_{y\downarrow 0} \frac{\tilde{f}(y)}{\tilde{g}(y)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

□

Beweisen Sie den Satz für Grenzwerte $x \downarrow a$.

Beispiel 5.30.

a) Das vorher diskutierte Beispiel noch einmal: Sowohl $f : x \mapsto \log x$ als auch $g : x \mapsto x - 1$ sind auf z.B. $[\frac{1}{2}, 1]$ stetige und im Inneren differenzierbare Funktionen, die bei $x = 1$ verschwinden. Die Ableitung von g verschwindet in diesem Intervall nirgendwo. Also können wir den Satz von l'Hospital anwenden, und erhalten

$$\lim_{x\uparrow 1} \frac{\log x}{x - 1} = \lim_{x\uparrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1.$$

Der Grenzwert von rechts geht völlig analog.

b) Auch der bereits bekannte Grenzwert $\sin(x)/x \to 1$ für $x \to 0$ ist jetzt einfacher zu zeigen: Wieder sind die Voraussetzungen des Satzes von l'Hospital erfüllt, und

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos(0) = 1.$$

Prüfen Sie für die folgenden Beispiele, dass die Voraussetzungen von l'Hospital erfüllt sind und die formale Rechnung deshalb stimmt:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{nx^{n-1}}{1} = n, \qquad n \in \mathbb{N}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos(x)}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Satz 5.31 (Zweiter Satz von l'Hospital). *Sei $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit*

$$\lim_{x\uparrow b} g(x) = \infty \qquad \textit{und} \qquad g'(x) \neq 0 \;\forall x > a.$$

Dann gilt

$$\lim_{x\uparrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\uparrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls der rechte Grenzwert in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ existiert.

Aus Zeitgründen bringen wir den Beweis dieses Satzes nicht. Siehe zum Beispiel [Heu91, §50].

Beispiel 5.32. Auch hier geben wir zuerst Beispiele an, die Sie schon kennen, jetzt aber einfacher berechnen können: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{nx^{n-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} = \ldots = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{n!} = \infty,$$

d.h. für $x \to \infty$ "wächst die Exponentialfunktion schneller als jede (noch so große) Potenz".

Analog gilt für jedes $\varepsilon > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^\varepsilon} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{-1}}{\varepsilon x^{\varepsilon-1}} = \varepsilon^{-1} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^\varepsilon} = 0,$$

d.h. für $x \to \infty$ "wächst der Logarithmus langsamer als jede (noch so kleine positive) Potenz".

Eine weitere häufige Anwendung bezieht sich auf Polynome: Sind $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ und $g(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k$ zwei Polynome von Grad n bzw. m, d.h. $a_n \neq 0$ und $b_m \neq 0$, so gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 & m > n \\ \infty & m < n \\ \frac{a_n}{b_n} & m = n \end{cases}$$

Der Beweis per l'Hospital ist als Übung überlassen.

Beachten Sie, dass Sie in all diesen Beispielen, und überhaupt bei jeder Anwendung von l'Hospital, prüfen müssen, dass die Voraussetzungen der Sätze erfüllt sind.

6 Integralrechnung

In diesem letzten Abschnitt des Analysis-1-Skriptes beschäftigen wir uns mit (Riemann-) Integralen[11]. Eine Motivation des Integralbegriffes ist es, der zwischen der x-Achse und dem Graph einer (genügend regulären) Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ eingeschlossenen Fläche einen sinnvollen Flächeninhalt zuzuordnen. Eine andere Motivation ist die Frage, eine Funktion f aus ihrer Änderungsrate, also ihrer Ableitung f', zu rekonstruieren. Wir werden dann auf den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung stoßen, der beide Gesichtspunkte vereint und Integration mit Differentiation verbindet. Einige Integrationstechniken schließen das Kapitel ab.

6.1 Treppenfunktionen und Definition des Riemann-Integrals

Sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Ist f positiv, d.h. $f(x) \geq 0$ für alle $x \in I$, so fragen wir uns, wie groß der Flächeninhalt der Menge

$$M_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \leq x \leq b, \ 0 \leq y \leq f(x)\} \subset \mathbb{R}^2$$

ist bzw. wie wir diesen Flächeninhalt sinnvoll definieren können.

Ist $f(x) = c$ konstant, soll dieser Flächeninhalt unser geometrischen Anschauung entsprechend $c \cdot (b - a)$ (Fläche eines Rechtecks) sein. Etwas interessanter ist der Fall, dass f konstant bis auf endlich viele Sprungstellen ist. Das führt uns auf die Begriffe der Zerlegung eines Intervalls und einer Treppenfunktion.

Definition 6.1. Sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall (mit $a < b$).

a) Eine *Zerlegung von I* ist eine endliche Menge

$$Z = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \qquad \text{mit} \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

b) Eine Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ heißt *Treppenfunktion*, wenn es eine Zerlegung $Z = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ von I gibt, so dass $\varphi|_{(x_{j-1}, x_j)}$, $j = 1, \ldots, n$ konstant sind. Das ist genau dann der Fall, wenn es Zahlen $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ gibt, so dass[a]

$$\varphi(x) = c_j \qquad \text{für} \quad x_{j-1} < x < x_j.$$

Die Menge aller Treppenfunktionen $I \to \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $T(I)$.

[a]Die Werte von φ an den Sprungstellen x_j sind beliebig.

Bemerkungen:

a) Eine Zerlegung $Z = (x_0, \ldots, x_n)$ heißt *feiner* als eine andere Zerlegung $Z' = (x'_0, \ldots, x'_m)$, falls jeder Unterteilungspunkt x'_j von Z' auch ein Unterteilungspunkt von Z ist, also falls $\{x'_0, \ldots, x'_m\} \subset \{x_0, \ldots, x_n\}$ gilt.

b) Gegeben zwei Zerlegungen Z, Z' von I, so bezeichnen wir mit $Z \cup Z'$ die Zerlegung von I, die wir durch Vereinigung der Mengen der Unterteilungspunkte von Z und Z' erhalten. Offenbar ist $Z \cup Z'$ feiner als Z und Z'.

[11]Der allgemeinere Begriff des Lebesgue-Integrals wird im Rahmen der Maßtheorie in Analysis 3 besprochen.

c) In Teil b) der obigen Definition sprechen wir von einer *Treppenfunktion zur Zerlegung* Z.

Ist $\varphi \in T(I)$ eine positive Treppenfunktion zur Zerlegung $(x_0, \ldots, x_n)$ (d.h. φ hat keine Sprungstellen außer höchstens bei den x_j), so möchten wir entsprechend unserer geometrischen Intuition den Flächeninhalt von M_φ als $\sum_{j=1}^n c_j(x_j - x_{j-1})$ definieren. Diese Definition hängt nicht von der gewählten Zerlegung ab; auch nicht, wenn einige der c_j negativ sind. Wir definieren deshalb für beliebige Treppenfunktionen das Integral wie folgt.

Definition 6.2. Sei $I = [a, b]$ und $\varphi \in T(I)$ eine Treppenfunktion mit Zerlegung $(x_0, \ldots, x_n)$. Dann definieren wir das *Riemann-Integral* von φ als

$$\int_a^b \varphi := \int_a^b \varphi(x)dx := \sum_{j=1}^n c_j(x_j - x_{j-1}) \in \mathbb{R}.$$

Beachten Sie, dass der Name der Integrationsvariable keine Rolle spielt, d.h. $\int_a^b \varphi(x)dx = \int_a^b \varphi(\xi)d\xi$ etc. Das Integral einer Treppenfunktion ist eine Zahl, keine Funktion.

Wir formulieren nun die wesentlichen Eigenschaften des Integrals von Treppenfunktionen.

Satz 6.3. *Sei $I = [a, b]$ ein Intervall (mit $a < b$).*

a) $T(I)$ ist ein Vektorraum und $\int_a^b : T(I) \to \mathbb{R}$, $\varphi \mapsto \int_a^b \varphi$ ist linear. Das heißt:

$$\int_a^b (\varphi(x) + \psi(x))dx = \int_a^b \varphi(x)dx + \int_a^b \psi(x)dx,$$
$$\int_a^b \lambda\varphi(x)dx = \lambda \int_a^b \varphi(x)dx$$

für alle $\varphi, \psi \in T(I)$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) Das Integral ist monoton: Erfüllen $\varphi, \psi \in T(I)$ die Ungleichung $\varphi \leq \psi$ (das bedeutet $\varphi(x) \leq \psi(x)$ für alle $x \in I$), dann gilt $\int_a^b \varphi(x)dx \leq \int_a^b \psi(x)dx$.

c) Intervalladditivität: Für $a \leq b \leq c$ und $\varphi \in T([a, c])$ gilt

$$\int_a^c \varphi(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx + \int_b^c \varphi(x)dx.$$

Beweis. a) Wir zeigen zunächst, dass $T(I)$ ein Untervektorraum des Vektorraums aller Funktionen $I \to \mathbb{R}$ ist. Ist $\varphi \in T(I)$, so ist $\lambda \cdot \varphi$ offensichtlich auch eine Treppenfunktion (alle Werte c_j sind mit λ zu multiplizieren). Sind $\varphi, \psi \in T(I)$ Treppenfunktionen bzgl Zerlegungen Z und Z', so sind sie jeweils auch Zerlegungen zur gemeinsamen Verfeinerung $Z \cup Z'$. Dann ist klar, dass auch $\varphi + \psi$ eine Treppenfunktion zu $Z \cup Z'$ ist.

Für das Integral gilt bzgl der Verfeinerung $Z \cup Z' = (w_0, \ldots, w_m)$ (mit $\varphi(x) = c_j$ und

$\psi(x) = d_j$ für $w_{j-1} < x < w_j$)

$$\int_a^b (\varphi(x) + \psi(x))dx = \sum_{j=1}^m (c_j + d_j)(w_j - w_{j-1})$$
$$= \sum_{j=1}^m c_j(w_j - w_{j-1}) + \sum_{j=1}^m d_j(w_j - w_{j-1}) = \int_a^b \varphi(x)dx + \int_a^b \psi(x)dx$$

und

$$\int_a^b \lambda\varphi(x)\,dx = \sum_{j=1}^m (\lambda c_j)(w_j - w_{j-1}) = \lambda \sum_{j=1}^m c_j(w_j - w_{j-1}) = \lambda \int_a^b \varphi(x)dx.$$

b) Aufgrund von Teil a) ist nur zu zeigen, dass positive Treppenfunktionen nicht-negatives Integral haben. Aber das ist aufgrund von Definition 6.2 klar.

c) Wir wählen eine Zerlegung von $Z = (x_0, \ldots, x_n)$ von $[a, c]$, die den Punkt b als einen Unterteilungspunkt enthält, d.h. $x_k = b$ für ein k. Dann gilt

$$\int_a^c \varphi(x)\,dx = \sum_{j=1}^n c_j(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^k c_j(x_j - x_{j-1}) + \sum_{j=k+1}^n c_j(x_j - x_{j-1})$$
$$= \int_a^b \varphi(x)dx + \int_b^c \varphi(x)dx.$$

□

Wir möchten den Integralbegriff natürlich auf eine größere Klasse von Funktionen als nur Treppenfunktionen ausdehnen. Die Idee ist dabei, wie meistens in der Analysis, ein geeigneter Grenzwertprozess. In diesem Fall wollen wir eine zu integrierende Funktion durch Treppenfunktionen approximieren. Wir beginnen mit einigen Vorüberlegungen.

Sei $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ eine *beschränkte* Funktion auf einem kompakten Intervall, d.h. $c := \inf_{x\in I} f(x) > -\infty$ und $C := \sup_{x\in I} f(x) < +\infty$. Wir betrachten nun Treppenfunktionen $\varphi, \psi \in T(I)$, die f von unten bzw. von oben beschränken, nämlich

$$\varphi \le f \le \psi, \qquad \varphi, \psi \in T(I).$$

Solche Funktionen gibt es, z.B. erfüllen die konstanten Treppenfunktionn $\varphi : x \mapsto c$ und $\psi : x \mapsto C$ die Ungleichungen $\varphi \le f \le \psi$. Für jedes solche Paar von Treppenfunktionen haben wir aufgrund der Monotonie des Integrals $\int_a^b \varphi \le \int_a^b \psi$. Die Menge der Integrale der Treppenfunktionen, die kleiner (größer) sind als f, ist also von oben (unten) beschränkt. Somit können wir das Supremum bzw. Infimum betrachten:

Definition 6.4 (Ober- und Unterintegrale). Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann ist das Ober- bzw. Unterintegral von f definiert als

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx := \inf\left\{\int_a^b \psi(x)dx : \psi \in T(I), \quad \psi \geq f\right\},$$
$$\underline{\int_a^b} f(x)dx := \sup\left\{\int_a^b \varphi(x)dx : \varphi \in T(I), \quad \varphi \leq f\right\}.$$

Man kann per Widerspruchsbeweis leicht zeigen, dass stets

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

gilt. Für *Treppenfunktionen* gilt sogar

$$\underline{\int_a^b} \varphi = \overline{\int_a^b} \varphi, \qquad \varphi \in T([a,b]). \tag{6.1}$$

Diese Eigenschaft (Oberintegral = Unterintegral) erheben wir zu unserer Definition von Integrierbarkeit.

Definition 6.5. Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt *(Riemann)-integrabel*, falls ihr Ober- und Unterintegral übereinstimmen, d.h. falls

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

In diesem Fall definieren wir das *(Riemann)-Integral* von f als

$$\int_a^b f(x)dx := \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Dies liest man als "Integral über f von a bis b". Die Punkte a und b werden auch als die untere bzw. obere Intergrationsgrenze bezeichnet.

Die Menge aller Riemann-integrablen Funktionen auf I bezeichnen wir als $\mathcal{R}(I)$.

Beispiel 6.6.

a) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ die Dirichlet-Funktion, also

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ rational} \\ 0 & x \text{ irrational} \end{cases}.$$

Seien $\varphi, \psi \in T([0,1])$ Treppenfunktionen mit $\varphi \leq f \leq \psi$. Da jedes endliche Intervall sowohl rationale als auch irrationale Punkte enthält, impliziert das $\varphi \leq 0$

und $1 \leq \psi$. Daraus folgt

$$\underline{\int_0^1} f(x)dx \leq 0 < 1 \leq \overline{\int_0^1} f(x)dx.$$

Hier sind also Ober- und Unterintegral unterschiedlich; die Dirichlet-Funktion ist nicht Riemann-integrierbar.

b) Wir betrachten $b > 0$ und die Funktion $f : [0, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) := x$, die speziellen Zerlegungen $Z_n = (0, \frac{b}{n}, \ldots, \frac{(n-1)b}{n}, b)$ (mit $n \in \mathbb{N}$), und die Treppenfunktionen

$$\varphi_n(x) := \frac{(j-1)b}{n}, \qquad \frac{(j-1)b}{n} < x < \frac{jb}{n},$$
$$\psi_n(x) := \frac{jb}{n}, \qquad \frac{(j-1)b}{n} < x < \frac{jb}{n}.$$

Dann gilt $\int_a^b \varphi_n(x)dx = \sum_{j=1}^n \frac{(j-1)b}{n}\frac{b}{n} = \frac{b^2}{2}(1-\frac{1}{n})$ und $\int_a^b \psi_n(x)dx = \sum_{j=1}^n \frac{jb}{n}\frac{b}{n} = \frac{b^2}{2}(1+\frac{1}{n})$ sowie $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$. Deshalb

$$\underline{\int_0^b} x\,dx \geq \sup\left\{\frac{b^2}{2}(1-\frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\right\} = \frac{b^2}{2},$$
$$\overline{\int_0^b} x\,dx \leq \inf\left\{\frac{b^2}{2}(1+\frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\right\} = \frac{b^2}{2}.$$

Wegen $\underline{\int_0^b} f \leq \overline{\int_0^b} f$ folgt $\underline{\int_0^b} f = \overline{\int_0^b} f = \frac{b^2}{2}$. Also ist f Riemann-integrabel, und

$$\int_0^b x\,dx = \frac{b^2}{2}.$$

Es ist kein Zufall, dass $F : b \mapsto \int_0^b x\,dx$ differenzierbar ist und die Ableitung nach der oberen Grenze $F'(b) = b$ genau der Integrand des Integrals ist. Dieser Zusammenhang gilt viel allgemeiner, wie wir im Hauptsatz kennenlernen werden.

Berechnen Sie das Riemann-Integral $\int_1^2 x^2\,dx$ analog zu dem vorigen Beispiel.

Nachdem wir das Riemann-Integral definiert haben, stellen sich einige natürliche Fragen: Welche Eigenschaften hat das Riemann-Integral? Verallgemeinert sich Satz 6.3 geeignet? Können wir Klassen von Riemann-integrierbaren Funktionen angeben? Gibt es Techniken, mit denen Riemann-Integrale effizient bestimmt werden können?

Diese Fragen klären wir im nächsten Abschnitt.

6.2 Integrierbare Funktionen

Das folgende Lemma wird hilfreich sein:

Lemma 6.7. *Eine beschränkte Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem kompakten Intervall $I = [a, b]$ ist genau dann Riemann-integrabel, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen $\varphi, \psi \in T(I)$ gibt, die*

$$\varphi \le f \le \psi$$

und

$$\int_a^b \psi - \int_a^b \varphi < \varepsilon$$

erfüllen.

Beweis. Der Beweis ergibt sich direkt aus der Definition des Ober-/Unterintegrals und von sup/inf. □

Wir möchten mit diesem Kriterium als Nächstes zeigen, dass auf einem kompakten Intervall I jede stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist, d.h. $C(I) \subset \mathcal{R}(I)$ (Gleichheit gilt nicht, z.B. sind die unstetigen Treppenfunktionen integrierbar). Dazu behaupten wir zunächst, dass es für $f \in C(I)$ zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon \qquad \text{für alle } x, x' \in I \text{ mit } |x - x'| < \delta.$$

Dies ist stärker als Stetigkeit (man spricht von *gleichmäßiger Stetigkeit*), da hier δ nur von ε, aber nicht vom betrachteten Punkt $x \in I$ abhängt. Wir müssen also zunächst zeigen, dass stetige Funktionen auf kompakten Intervallen automatisch gleichmäßig stetig sind. Angenommen, dies wäre nicht der Fall, d.h. es gibt $\varepsilon > 0$, so dass es zu jedem $\delta > 0$ stets Punkte $x, x' \in I$ mit $|x - x'| < \delta$ und $|f(x) - f(x')| \ge \varepsilon$ gibt. Betrachten wir hier insbesondere $\delta = \frac{1}{n}$ so erhalten wir Folgen $(x_n), (x'_n) \subset I$ mit $|x_n - x'_n| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(x'_n)| \ge \varepsilon$. Da die Folgen beschränkt sind, können wir mit Bolzano-Weierstraß konvergente Teilfolgen $(x_{n_k}), (x'_{n_k})$ auswählen. Dann gilt $x_{n_k} \to g$, $x'_{n_k} \to g$ für $k \to \infty$, wegen der Stetigkeit von f also $|f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| \to |f(g) - f(g)| = 0$, ein Widerspruch.

Satz 6.8. *Sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und $f \in C(I)$ stetig (damit automatisch gleichmäßig stetig).*

a) Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt Treppenfunktionen $\varphi, \psi \in T(I)$ mit $\varphi \le f \le \psi$ und $|\varphi(x) - \psi(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in I$, d.h. $\|\varphi - \psi\|_I < \varepsilon$.

b) f ist Riemann-integrabel.

Beweis. a) Aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit von f finden wir zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für $|x - x'| < \delta$ stets $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ gilt. Nun wählen wir $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\frac{b-a}{n} < \delta$, und betrachten die (äquidistante) Zerlegung $Z = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ mit

$$x_k = a + k\,\frac{b-a}{n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Zur Konstruktion der Treppenfunktionen setzen wir

$$C_k := \sup\{f(x) :\ x_{k-1} \le x \le x_k\}, \qquad c_k := \inf\{f(x) :\ x_{k-1} \le x \le x_k\}.$$

Da eine stetige Funktion auf einem kompakten Intervall ihr Maximum und Minimum annimmt, gilt $C_k = f(\xi_k)$, $c_k = f(\xi_k')$ für gewisse $x_{k-1} \leq \xi_k, \xi_k' \leq x_k$. Aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit von f gilt also $0 \leq C_k - c_k \leq \varepsilon$.

Definieren wir nun die Treppenfunktionen φ, ψ durch die Werte c_k bzw. C_k auf dem Intervall (x_{k-1}, x_k), so sind die behaupteten Eigenschaften erfüllt.

b) Wir verwenden Lemma 6.7. Sei also $\varepsilon > 0$. Dann finden wir mit Teil a) Treppenfunktionen $\varphi, \psi \in T(I)$ mit $\varphi \leq f \leq \psi$ und $0 \leq \psi(x) - \varphi(x) < \frac{\varepsilon}{b-a}$ für alle $x \in I$. Mit der Monotonie des Integrals für Treppenfunktionen folgt

$$\int_a^b \psi - \int_a^b \varphi = \int_a^b (\psi - \varphi) < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon.$$

□

Mit einem ähnlichen Argument lässt sich zeigen, dass auch beliebige (nicht notwendigerweise stetige) monotone Funktionen integrierbar sind (siehe z.B. [For16, S. 210]).

Zu diesem Zeitpunkt kennen wir also schon viele Riemann-integrable Funktionen. Wir wenden uns nun Eigenschaften beliebiger (nicht notwendigerweise stetiger oder monotoner) Riemann-integrabler Funktionen zu.

Satz 6.9. *Die Menge $\mathcal{R}(I)$ aller Riemann-integrablen Funktionen auf einem kompakten Intervall $I = [a, b]$ ist ein Vektorraum, und*

$$\mathcal{R}(I) \ni f \longmapsto \int_a^b f(x)dx \in \mathbb{R}$$

ist linear. Weiterhin ist das Riemann-Integral monoton, d.h. für $f, g \in \mathcal{R}(I)$ mit $f \leq g$ gilt $\int_I f \leq \int_I g$.

Beweis. Seien $f_1, f_2 \in \mathcal{R}(I)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir haben zu zeigen, dass $f_1 + \lambda f_2$ in $\mathcal{R}(I)$ liegt und

$$\int_a^b (f_1 + \lambda f_2) = \int_a^b f_1 + \lambda \int_a^b f_2$$

gilt. Dazu verwenden wir wieder das Kriterium aus Lemma 6.7. Sei also $\varepsilon > 0$. Wir finden Treppenfunktionen $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ mit $\varphi_i \leq f_i \leq \psi_i$, $i = 1, 2$, und

$$\int_a^b \psi_i - \int_a^b \varphi_i < \varepsilon, \qquad i = 1, 2.$$

Wir betrachten zunächst $\lambda \geq 0$. Durch Addition erhalten wir $\varphi_1 + \lambda\varphi_2 \leq f_1 + \lambda f_2 \leq \psi_1 + \lambda\psi_2$ und

$$\int_a^b (\psi_1 + \lambda\psi_2) - \int_a^b (\varphi_1 + \lambda\varphi_2) = \int_a^b (\psi_1 - \varphi_1) + \lambda \int_a^b (\psi_2 - \varphi_2) < \varepsilon(1 + \lambda).$$

Also ist $f_1 + \lambda f_2$ integrierbar.

Für das Oberintegral haben wir

$$\overline{\int_a^b}(f_1 + \lambda f_2) \le \int_a^b \psi_1 + \lambda \int_a^b \psi_2,$$

und durch Übergang zu den Infima $\inf\{\int_a^b \psi_i :\ f_i \le \psi_i \in T(I)\}$ (erinnern Sie, dass $\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B)$ für nichtleere beschränkte Teilmengen $A, B \subset \mathbb{R}$ gilt, siehe Aufgabe H3.3) ergibt sich

$$\int_a^b (f_1 + \lambda f_2) = \overline{\int_a^b}(f_1 + \lambda f_2) \le \int_a^b f_1 + \lambda \int_a^b f_2.$$

Für das Unterintegral erhalten wir analog

$$\int_a^b (f_1 + \lambda f_2) = \underline{\int_a^b}(f_1 + \lambda f_2) \ge \int_a^b f_1 + \lambda \int_a^b f_2.$$

Die Kombination dieser Ungleichungen ergibt die behauptete Gleichung $\int_a^b (f_1 + \lambda f_2) = \int_a^b f_1 + \lambda \int_a^b f_2$. Um diese Gleichung auch für $\lambda < 0$ zu zeigen, bemerken wir, dass $\varphi \le f \le \psi$ äquivalent ist zu $\lambda\psi \le \lambda f \le \lambda\varphi$. Der Rest des Arguments ist dann analog zu dem vorigen Teil des Beweises.

Für die Monotonie ist wegen $\int_a^b f \le \int_a^b g \Leftrightarrow \int_a^b (g - f) \ge 0$ nur zu zeigen, dass positive Funktionen positives Integral haben. Aber wenn $h \ge 0$ eine positive integrable Funktion ist, so ist $\varphi = 0$ eine Treppenfunktion mit $\varphi \le h$. Also gilt

$$\int_a^b h = \sup\left\{\int_a^b \varphi :\ T(I) \ni \varphi \le h\right\} \ge \int_a^b 0 = 0.$$

□

Bemerkungen:

a) Auch die Intervalladditivität (Satz 6.3 c)) überträgt sich von $T(I)$ auf $\mathcal{R}(I)$. Genauer gesagt: Ist $\xi \in (a, b)$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so gilt $f \in \mathcal{R}([a, b])$ genau dann, wenn $f|_{[a,\xi]} \in \mathcal{R}([a, \xi])$ und $f|_{[\xi,b]} \in \mathcal{R}([\xi, b])$ gilt. In diesem Fall ist

$$\int_a^b f = \int_a^\xi f + \int_\xi^b f.$$

Wir geben hier keinen formalen Beweis, die Argumente sind sehr ähnlich zu denen im vorigen Beweis.

b) Zu diesem Zeitpunkt haben wir zum einen ein Verständnis einiger Eigenschaften von $\mathcal{R}(I)$ und des Riemann-Integrals (Vektorraum, Integral ist linear und monoton), und Kenntnis über Teilmengen von $\mathcal{R}(I)$ (stetige und monotone Funktionen sind enthalten). Allerdings enthält $\mathcal{R}(I)$ sicher auch nicht stetige und nicht monotone Funktionen (z.B. Treppenfunktionen). Wir haben derzeit kein einfach prüfbares Kriterium um zu entscheiden, ob eine allgemeine vorgegebene Funktion integrierbar ist. In Analysis 3 werden wir ein solches Kriterium kennenlernen, das im Wesentlichen besagen wird, dass eine beschränkte Funktion genau dann Rimann-integrierbar ist, wenn sie an "nicht zu vielen Stellen unstetig ist". "Nicht zu viele Stellen" können aber durchaus unendlich viele Stellen sein; die genaue Formulierung benutzt Begriffe der Maßtheorie.

Da wir kein allgemeines Kriterium zum Prüfen von Integrierbarkeit haben (außer der Definition) betrachten wir jetzt einige oft auftretende Konstruktionen. Dazu verabreden wir die folgenden Schreibweisen für Funktionen $f, g : I \to \mathbb{R}$:

$$\max\{f, g\} : x \mapsto \max\{f(x), g(x)\}, \qquad \min\{f, g\} : x \mapsto \min\{f(x), g(x)\}.$$

Ein häufiger Spezialfall dieser Konstruktion ist:

$$f_+ := \max\{f, 0\} \geq 0 \qquad \text{(Positivteil)},$$
$$f_- := \max\{-f, 0\} \geq 0 \qquad \text{(Negativteil)}.$$

Achtung, der Negativteil einer Funktion ist keine negative Funktion!

Zeigen Sie

$$f = f_+ - f_-, \qquad |f| = f_+ + f_-,$$
$$\max\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g) + \frac{1}{2}|f - g|, \quad \min\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g) - \frac{1}{2}|f - g|$$

Lemma 6.10. *Sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und $f, g \in \mathcal{R}(I)$ integrabel. Dann sind auch alle der folgenden Funktionen integrabel:*

$$f_+, \quad f_-, \quad \max\{f, g\}, \quad \min\{f, g\}, \quad |f|, \quad f \cdot g.$$

Beweis. Da wir bereits wissen, dass $\mathcal{R}(I)$ ein Vektorraum ist, implizieren die Identitäten in der obigen Übung, dass die Integrabilität von $f_-, \max\{f, g\}, \min\{f, g\}$ und $|f|$ aus der Integrabilität von f_+ folgt.

Für das Produkt gilt $f \cdot g = \frac{1}{2}((f + g)^2 - f^2 - g^2)$, d.h. die Integrabilität von fg folgt aus der Integrabilität von f^2.

Wir haben also zu zeigen, dass f_+ und f^2 integrabel sind. Wir beginnen mit f_+ und verwenden Lemma 6.7.

Sei $\varepsilon > 0$. Aufgrund der Integrabilität von f finden wir Treppenfunktionen $\varphi, \psi \in T(I)$ mit $\varphi \leq f \leq \psi$ und

$$\int_a^b \psi - \int_a^b \varphi < \varepsilon.$$

Die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x_+ = \max\{x, 0\}$ ist monoton wachsend und für $x \leq y$ gilt $y_+ - x_+ \leq y - x$ (Übung). Also haben wir

$$\varphi_+ \leq f_+ \leq \psi_+, \qquad \psi_+ - \varphi_+ \leq \psi - \varphi,$$

wobei φ_+ und ψ_+ ebenfalls Treppenfunktionen sind. Damit bekommen wir

$$\int_a^b \psi_+ - \int_a^b \varphi_+ \leq \int_a^b \psi - \int_a^b \varphi < \varepsilon,$$

und mit Lemma 6.7 folgt die Integrabilität von f_+.

Nun betrachten wir f^2. Wegen $f^2 = |f|^2$ dürfen wir $f \geq 0$ annehmen. Mit Lemma 6.7 finden wir Treppenfunktionen $\varphi \leq f \leq \psi$ und $\int_a^b \psi - \int_a^b \varphi < \varepsilon$. Wir setzen $c := \sup_{x \in I} f(x)$ und betrachten die Treppenfunktionen

$$\varphi_+, \qquad \tilde{\psi} := \min\{c, \psi\}.$$

Es gilt

$$0 \leq \varphi_+ \leq f \leq \tilde{\psi} \leq c, \qquad \int_a^b (\tilde{\psi} - \varphi_+) \leq \int_a^b (\psi - \varphi) < \varepsilon,$$

wobei wir die Monotonie des Integrals benutzt haben. Wir haben also Treppenfunktionen $\varphi_+^2, \tilde{\psi}^2 \in T(I)$ mit $\varphi_+^2 \leq f^2 \leq \tilde{\psi}^2$. Nun erhalten wir für das Quadrat (mit Hilfe von $\tilde{\psi} + \varphi_+ \leq 2\tilde{\psi} \leq 2c$)

$$\int_a^b (\tilde{\psi}^2 - \varphi_+^2) = \int_a^b (\tilde{\psi} + \varphi_+)(\tilde{\psi} - \varphi_+) \leq 2c \int_a^b (\tilde{\psi} - \varphi_+) < 2c\varepsilon.$$

Die Integrabilität von f^2 folgt also wieder aus Lemma 6.7. $\square$

Mit den Konstruktionen in diesem Lemma können Sie viele integrable Funktionen konstruieren.

Wir geben hier zwei wichtige Anwendungen an. Die erste verallgemeinert die Dreiecksungleichung auf Integrale; sie ist sehr oft zum Abschätzen von Integralen nützlich.

Satz 6.11. *Sei $I = [a, b]$, $a < b$, ein kompaktes Intervall, und $f \in \mathcal{R}(I)$. Dann gilt*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Bemerken Sie, dass die rechte Seite der Ungleichung wohldefiniert ist, da $|f|$ integrabel ist (Lemma 6.10).

Beweis. Wir haben offenbar $-|f| \leq f \leq |f|$. Die Monotonie und Linearität des Integrals besagt

$$-\int_a^b |f| = \int_a^b (-|f|) \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|,$$

also $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$. $\square$

Beispiel 6.12.

$$\left| \int_1^4 \sin(x) dx \right| \leq \int_1^4 \underbrace{|\sin(x)|}_{\leq 1} dx \leq \int_1^4 1 \, dx = 3.$$

Allgemeiner: Erfüllt $f \in \mathcal{R}(I)$ die Ungleichung $|f(x)| \leq c$ für alle $x \in I$, so haben wir

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq c \cdot |b - a|.$$

Die zweite Anwendung ist der Mittelwertsatz der Integralrechnung.

Satz 6.13 (Mittelwertsatz der Integralrechnung). *Sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall, $f \in C(I)$ (stetig) und $0 \leq g \in \mathcal{R}(I)$. Dann gibt es $\xi \in [a, b]$, so dass*

$$\int_a^b (f \cdot g) = f(\xi) \cdot \int_a^b g.$$

Bemerken Sie, dass die linke Seite der Gleichung wohldefiniert ist, da Produkte von integrablen Funktionen integrabel sind (Lemma 6.10).

Oft wird der Mittelwertsatz für die konstante Funktion $g = 1$ benutzt: In dieser Form besagt er: Es gibt $\xi \in [a, b]$, so dass

$$\int_a^b f = f(\xi) \cdot (b - a).$$

Die geometrische Anschauung dieser Variante (für positives f) ist die Folgende: Die Fläche $\int_a^b g$ zwischen I und dem Graphen von g ist gleich der Fläche eines Rechtsecks mit den Kanten I und $[0, f(\xi)]$.

Beweis. Da f stetig ist, können wir den Satz vom Maximum annehmen (Satz 4.27): $M := \max_{x \in I} f(x)$ und $m := \min_{x \in I} f(x)$ existieren, und es gibt $x_1, x_2 \in I$ mit $f(x_1) = M$ und $f(x_2) = m$. Natürlich gilt $m \leq f \leq M$, und wegen $g \geq 0$ auch $mg \leq fg \leq Mg$. Die Monotonie und Linearität des Integrals liefert also die Ungleichung

$$m \int_a^b g \leq \int_a^b (fg) \leq M \int_a^b g.$$

Falls $\int_a^b g = 0$, so folgt aus diesen Ungleichungen $\int_a^b (fg) = 0$ und die Aussage ist trivialerweise richtig. Im Fall $\int_a^b g \neq 0$ erhalten wir $m \leq \mu := \frac{\int_a^b (fg)}{\int_a^b g} \leq M$. Da f stetig mit Maximum M und Minimum m ist, gibt es nach dem Zwischenwertsatz einen Punkt $\xi \in I$, an dem $f(\xi) = \mu$ gilt, d.h.

$$f(\xi) = \mu = \frac{\int_a^b (fg)}{\int_a^b g}.$$

Multiplikation mit $\int_a^b g$ liefert dann die Behauptung. □

Beispiel 6.14. Wir behaupten

$$\lim_{a \to \infty} \int_1^3 e^{-ax} dx = 0.$$

Nach dem Mittelwertsatz gibt es $1 \leq \xi \leq 3$ mit $\int_1^3 e^{-ax} dx = 2e^{-a\xi}$. Da die Exponentialfunktion monoton wachsend und $a > 0$ ist (wir betrachten ja $a \to \infty$), haben wir $e^{-a\xi} \leq e^{-a}$. Aber $e^{-a} \to 0$ für $a \to \infty$, was die Behauptung beweist.

6.3 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und Integrationstechniken

Wir kommen nun zu einem der wichtigsten Resultate der Analysis 1, nämlich dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, der Differentiation und Integration miteinander verbindet und uns effektive Möglichkeiten zum Berechnen von Integralen liefern wird.

Zuerst eine Vorbemerkung zur Notation: Bisher hatten wir Integrale $\int_a^b f$ über kompakte Intervalle $[a, b]$, also für $a < b$, betrachtet. Wir verabreden nun

$$\int_b^a f := -\int_a^b f, \qquad \int_a^a f = 0$$

für integrables f.

Beachten Sie, dass Abschätzungen wie aus Satz 6.11 für $a > b$ modifiziert werden müssen: $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$ kann nicht gelten, da die rechte Seite negativ sein kann. Stattdessen gilt aber $|\int_a^b f| \leq \left|\int_a^b |f|\right| = \int_{\min\{a,b\}}^{\max\{a,b\}} |f|$.

Definition 6.15. Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine Funktion $F : D \to \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion von* f, falls F differenzierbar ist und $F' = f$ gilt.

Beispiel 6.16. Einige einfache Beispiele von Stammfunktionen sind:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ (Polynom) hat $F(x) = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \ldots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ als Stammfunktion, wie man sofort durch Differenzieren prüft.

b) Die Exponentialfunktion exp hat exp als Stammfunktion.

c) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = xe^{x^2}$, hat $F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2}$ als Stammfunktion, wie man sofort durch Differenzieren prüft (Kettenregel).

Diese Beispiele zeigen, dass es wenigstens einfach ist, zu prüfen, ob eine Funktion F Stammfunktion von f ist (Ableiten). Das Auffinden von F muss aber nicht einfach sein.

Weiterhin ist zu bemerken, dass Stammfunktionen nicht eindeutig sind: Ist F Stammfunktion von f, so auch $F + c$ für jedes $c \in \mathbb{R}$. Dies ist genau die Menge aller Stammfunktionen von f (siehe Aufgabe H13.3).

Theorem 6.17 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall (mit mehr als einem Punkt), $a \in \mathbb{R}$, und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig.*

a) Die Funktion

$$F : I \to \mathbb{R}, \qquad F(x) := \int_a^x f = \int_a^x f(t)dt$$

ist eine Stammfunktion von f.

b) Ist $F : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f, so gilt für alle $x \in I$

$$\int_a^x f = F(x) - F(a).$$

Zur Abkürzung schreibt man auch oft

$$[F]_a^x := F(x) - F(a),$$

auch Notationen wie $[F(x)]_{x=v}^{x=u} = F(u) - F(v)$ finden sich in der Literatur.

Beweis. a) Sei $x \in I$ und $h \neq 0$ so, dass auch $x + h \in I$. Dann haben wir

$$\begin{aligned}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) &= \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f - \int_a^x f\right) - f(x) \\ &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f - f(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(t) - f(x))dt.\end{aligned}$$

Um den Limes $h \to 0$ zu bestimmen, wählen wir $\varepsilon > 0$. Da f auf dem kompakten Intervall $[x, x+h]$ (bzw. $[x+h, x]$) gleichmäßig stetig ist, gibt es $\delta > 0$, so dass $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ für alle t in diesem Intervall mit $|t - x| < \delta$. Für $|h| \leq \delta$ erhalten wir so mit Hilfe der Dreiecksungleichung für Integrale

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| \leq \frac{1}{|h|}\left|\int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|\right| dt \leq \frac{1}{|h|}\left|\int_x^{x+h} \varepsilon\right| dt = \varepsilon.$$

(Die Betragsstriche um die Integrale sind hier notwendig, da $\int_x^{x+h} dt < 0$ für $h < 0$). Das zeigt $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \to f(x)$ für $h \to 0$, also $F' = f$.

b) Ist G eine beliebige Stammfunktion von f, so gilt $G = F + c$ mit der in Teil a) definierten Stammfunktion und einer Konstante c. Also

$$G(x) - G(a) = F(x) - F(a) = \int_a^x f - F(a) = \int_a^x f,$$

wobei wir $F(a) = \int_a^a f = 0$ benutzt haben. □

Der Hauptsatz erlaubt es uns, viele Integrale über elementare Funktionen leicht zu berechnen. Wir geben einige Beispiele.

Beispiel 6.18. Sei $a, b \in \mathbb{R}$, $t > 0$.

a) Für $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ ist $\int_a^b x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}(b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1})$.

b) $\int_1^t \frac{1}{x}\, dx = \log(t)$.

c) $\int_a^b \sin(x) dx = -\cos(b) + \cos(a)$.

d) $\int_a^b e^p\, dp = e^b - e^a$.

Im Zusammenhang mit Stammfunktion ist folgende Sprechweise verbreitet (auch wenn wir sie in diesen Vorlesungen kaum verwenden werden): Das Symbol $\int f(x)dx$ (*ohne* Integralgrenzen) wird das *unbestimmte Integral von* f genannt und symbolisiert eine oder die Menge aller Stammfunktionen von f. Es finden sich dann Ausdrücke wie z.B. "$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + c$", wobei $c \in \mathbb{R}$ eine unbestimmte Konstante ist. Wir werden diese Notation weitgehend vermeiden.

Wir wenden uns nun Integrationstechniken zu, also der Frage, wie in bestimmten Situationen Stammfunktionen gefunden werden können. Zum Beispiel: Was sind Stammfunktionen von $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log(x)$, oder von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := e^{-x^2}$? Da dies stetige Funktionen sind, ist in beiden Fällen $F(x) := \int_a^x f(y)dy$ eine Stammfunktion. Aber können wir diese Stammfunktion explizit bestimmen? Wir werden sehen, dass dies in einigen, aber nicht allen Fällen möglich ist. Z.B. gibt es keine Stammfunktion von $x \mapsto e^{-x^2}$, die durch elementare Funktionen ausgedrückt werden kann.

Beispiel 6.19. Was ist eine Stammfunktion von $f : x \mapsto x^2 \cos(x^3)$? Wir erkennen, dass x^2 "fast" die innere Ableitung $3x^2$ der inneren Funktion x^3 ist. Schreiben wir $f(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 \cos(x^3)$, so erkennen wir die Stammfunktion $F(x) = \frac{1}{3}\cos(x^3)$ (Kettenregel).

Dieses Beispiel zeigt, dass die Kettenregel der Differentialrechnung zu einer Integrationsregel der Integralrechnung wird.

Satz 6.20 (Substitutionsregel). *Sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall, $g : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar (also $g \in C^1(I)$), und $f : g(I) \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $g' \cdot (f \circ g) \in \mathcal{R}(I)$ Riemann-integrabel, und es gilt*

$$\int_a^b g'(t) f(g(t))\, dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(s) ds.$$

Beweis. Wegen $g \in C^1(I)$ ist g' stetig, und $f \circ g$ ist als Komposition stetiger Funktionen ebenfalls stetig. Also ist $g' \cdot (f \circ g)$ stetig und insbesondere integrabel. Ist F eine Stammfunktion von f, so gilt nach dem Hauptsatz

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(s) ds = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Andererseits ist nach der Kettenregel $G : I \to \mathbb{R}$, $G(x) := F(g(x))$, differenzierbar mit Ableitung $G'(x) = g'(x) f(g(x))$. Also ist G eine Stammfunktion von $g' \cdot (f \circ g)$, und wir erhalten mit dem Hauptsatz

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)dt = G(b) - G(a) = F(g(b)) - F(g(a)).$$

$\square$

Die Substitutionsregel ist ein wichtiges Werkzeug zum Berechnen von Integralen.

Beispiel 6.21.

a) Sei $f \in C(\mathbb{R})$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt (mit $u(t) := t + t_0$, $t_0 \in \mathbb{R}$)

$$\int_a^b f(t+t_0)dt = \int_a^b f(u(t))u'(t)dt = \int_{a+t_0}^{b+t_0} f(s)ds.$$

b) Sei $f \in C(\mathbb{R})$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt (mit $u(t) := \alpha t$, $\alpha \neq 0$)

$$\int_a^b f(\alpha t)dt = \frac{1}{\alpha}\int_a^b f(u(t))u'(t)dt = \frac{1}{\alpha}\int_{\alpha a}^{\alpha b} f(s)ds.$$

c) Sei $[a, b] \subset (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Dann gilt (mit $f(x) = \frac{1}{x}$)

$$\begin{aligned}\int_a^b \tan(t)dt &= \int_a^b \frac{\sin(t)}{\cos(t)}dt = -\int_a^b f(\cos(t))\cos'(t)dt \\ &= -\int_{\cos(a)}^{\cos(b)} \frac{1}{s}ds = -\log(\cos(b)) + \log(\cos(a)).\end{aligned}$$

In diesen Beispiel lässt sich Satz 6.20 leicht anwenden, weil der Integrand bereits (evtl. bis auf konstante Faktoren) von der Form $F'(g(t))g'(t)$ ist, so dass $F \circ g$ als Stammfunktion verwendet werden kann.

Eine typischere Situation ist allerdings, dass der Integrand nicht in offensichtlicher Art und Weise von dieser Form ist. Betrachten wir zum Beispiel das Integral $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}dx$. Wir können z.B. $f(t) = \sqrt{t}$ und $g(t) = 1 - t^2$ oder $f(t) = \sqrt{1-t}$ und $g(t) = t^2$ wählen; in beiden Fällen ist das Integral dann $\int_{-1}^1 f(g(t))dt$, aber die innere Ableitung $g'(t)$ tritt nicht auf.

In solchen Fällen kann man oft wie folgt vorgehen: Zuerst schreibt man den Integranden als eine Komposition $f \circ u$, und zwar mit einer streng monotonen Funktion u (d.h. $u'(x) \neq 0$). Dann können wir mit $u'(x)$ erweitern und erhalten

$$\int_a^b f(u(x))dx = \int_a^b f(u(x))\frac{u'(x)}{u'(x)}dx.$$

Da u streng monoton ist, ist u injektiv, also bijektiv auf das Bild. Wir haben deshalb die Umkehrfunktion u^{-1} zur Verfügung. Erinnern wir uns nun noch an $(u^{-1})'(y) = \frac{1}{u'(u^{-1}(y))}$, so erhalten wir

$$\int_a^b f(u(x))\,\frac{u'(x)}{u'(x)}\,dx = \int_a^b f(u(x))\,\frac{u'(x)}{u'(u^{-1}(u(x)))}\,dx$$
$$= \int_{u(a)}^{u(b)} \frac{f(t)}{u'(u^{-1}(t))}dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\,(u^{-1})'(t)\,dt.$$

Diese Technik ist oft sehr hilfreich. Wir illustrieren sie an einem Beispiel

Beispiel 6.22. Wir betrachten das Integral $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$ und substituieren $x = \sin(t)$. Das heißt: Wir schreiben $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))} = |\cos(\arcsin(x))|$ und betrachten $f = |\cos|$ und $u = \arcsin$, was eine streng monotone Funktion $[-1,1] \to [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ ist. Dann ist $u^{-1}(t) = \sin(t)$ und $(u^{-1})'(t) = \cos(t)$. Da $\cos(x) \geq 0$ für $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, können wir die Betragstriche in f auch weglassen. Dann ergibt sich

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)dt.$$

Wir haben also per Substitution das gesuchte Integral in ein anderes Integral umgeformt. Letzteres ist leicht zu berechnen: Da $\cos^2(t) = \frac{1}{4}(e^{it}+e^{-it})^2 = \frac{1}{2}(1+\cos(2t))$, gilt

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)dt = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t)dt = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\left[\sin(2t)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Dieses Ergebnis ist nicht überraschend, da $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$ der Flächeninhalt einer Halbkreisscheibe mit Radius 1 ist.

Merkregel: Für Integration mit dieser Technik realisieren Sie den Integranden in der Form $f(u(x))$, wobei u streng monoton ist. Das bedeutet, dass die neue Integrationsvariable u ist. Nun drücken Sie x durch u aus (d.h. Sie bilden die Umkehrfunktion) und differenzieren, d.h. ersetzen formal $dx = \frac{dx}{du}du$, wobei $\frac{dx}{du}$ für die Ableitung von x nach u steht (Ableitung der Umkehrfunktion). Wenn Sie dann noch die Integrationsgrenzen a, b durch $u(a), u(b)$ ersetzen, erhalten Sie das umgeformte Integral.

Genau wie die Kettenregel der Differentiation zur Integration per Substitution führt, führt auch die Produktregel $(fg)' = f'g + fg'$ der Differentiation zu einer Integrationstechnik, die partielle Integration genannt wird.

Satz 6.23 (Partielle Integration). *Sei $I = [a,b]$ ein Intervall und $f, g \in C^1(I)$. Dann gilt*

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Beweis. Zuerst bemerken wir, dass $f'g$ und fg' integrabel sind, da f, g und die Ableitungen f', g' stetig sind. Per Produktregel haben wir dann

$$[f(x)g(x)]_a^b = \int_a^b (fg)'(x)dx = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

□

Beispiel 6.24.

a) Für $a > 0$ haben wir

$$\int_1^a \log(x)dx = \int_1^a 1\cdot\log(x)dx = [x\log(x)]_1^a - \int_1^a x\cdot\frac{1}{x}dx = [x\log(x)]_1^a - (a-1).$$

Eine Stammfunktion des Logarithmus ist also durch $x \mapsto x(\log(x)-1)$ gegeben.

b) Noch ein Beispiel mit unbestimmten Integralen:

$$\int x\sin(x)dx = -x\cos(x) + \int \cos(x)dx = -x\cos(x) + \sin(x).$$

Sei $I = [-a, a]$ ein um 0 symmetrisches Intervall, $g : I \to \mathbb{R}$ gerade und $u : I \to \mathbb{R}$ ungerade (d.h. $g(x) = g(-x)$, $u(x) = -u(-x)$ für alle $x \in I$). Zeigen Sie:

$$\int_{-a}^a g(x)dx = 2\int_0^a g(x)dx, \qquad \int_{-a}^a u(x)dx = 0.$$

6.4 Vertauschung von Grenzwerten mit Integration und Differentiation

In der Analysis sind wir sehr oft in der Situation, dass eine interessante Funktion f als Grenzwert einer Folge (f_n) von einfacheren Funktionen gegeben ist, z.B. ist

$$\sin(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Grenzwert einer Folge von Polynomfunktionen. Wenn wir nun die Integrale (oder Ableitungen) von f_n, sagen wir $\int_a^b f_n$, bestimmen können, approximieren sie dann das Integral $\int_a^b f$?

In diesem Abschnitt wollen wir untersuchen, unter welchen Bedingungen

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n = \int_a^b f \qquad \text{oder} \qquad \lim_{n\to\infty} f_n' = f'$$

gilt.

Wir beginnen mit der Integration und einem Beispiel, das zeigt, dass diese Frage nicht trivial ist.

Beispiel 6.25. Sei $\rho : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $\rho(0) = \rho(1) = 0$ und $\int_0^1 \rho \neq 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir

$$f_n(x) := \begin{cases} n\rho(nx) & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

(Skizze!). Dann gilt $\lim_n f_n(x) = 0$ für alle $0 \leq x \leq 1$: Denn für jedes $x > 0$ gibt es $N_x \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N_x} < x$, und für $n \geq N_x$ gilt $f_n(x) = 0$. Für $x = 0$ haben wir ohnehin $f_n(x) = 0$ für alle n.

Wir sehen also, dass $f_n \to 0$ im Sinne der *punktweisen* Konvergenz (Def. 4.36).

Für die Integrale haben wir (Substitution)

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^{1/n} n\rho(nx)dx + \int_{1/n}^1 0dx = \int_0^1 \rho(x)dx,$$

d.h. $\int_0^1 f_n$ stimmt für alle n mit $\int_0^1 \rho \neq 0$ überein. Die punktweise Grenzfunktion $f = 0$ erfüllt natürlich $\int_0^1 f = 0$.

Wir halten also fest: Für eine *punktweise* konvergente Folge von integrablen Funktionen gilt im allgemeinen *nicht* $\lim_{n\to\infty} \int_I f_n = \int_I \lim_n f_n$.

In Def.4.38 haben wir den stärkeren Begriff der *gleichmäßigen* Konvergenz kennengelernt.

Wir zeigen nun, dass gleichmäßige Grenzwerte mit Riemann-Integralen über kompakte Intervalle vertauschen.

Satz 6.26. *Sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und $f_n : I \to \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen, die gleichmäßig gegen eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f stetig (Satz 4.40) und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

Beweis. Nach dem Mittelwertsatz (Satz 6.13) gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $\xi_n \in [a, b]$ mit

$$\left| \int_a^b (f_n - f) \right| \leq |f_n(\xi_n) - f(\xi_n)| \cdot (b - a).$$

Nach der Definition der Supremumsnorm können wir weiter abschätzen durch

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b (f_n - f) \right| &\leq |f_n(\xi_n) - f(\xi_n)| \cdot (b - a) \\ &\leq \|f_n - f\|_I \cdot (b - a) \to 0 \quad \text{für } \ n \to \infty. \end{aligned}$$

□

Der Satz ist auch für allgemeine (nicht notwendigerweise stetige) Riemann-integrable Funktionen richtig.

Für die Vertauschung von Grenzwert und Ableitung ist gleichmäßige Konvergenz nicht ausreichend, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 6.27. Wir betrachten die Funktionenfolge

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(n^2 x^2).$$

Dann konvergiert $f_n \to 0$ gleichmäßig:

$$\|f_n\|_{\mathbb{R}} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{n} \sin(n^2 x^2) \right| = \frac{1}{n} \to 0.$$

Weiterhin ist jedes f_n stetig differenzierbar, mit Ableitung

$$f_n'(x) = 2nx \cos(n^2 x^2).$$

Die Funktionenfolge f_n' konvergiert noch nicht einmal punktweise: Betrachten wir z.B. $x = \sqrt{2\pi}$, so haben wir $f_n'(\sqrt{2\pi}) = 2\sqrt{2\pi} n \cos(2\pi n^2) = 2\sqrt{2\pi} n \to \infty$.

Insbesondere gilt für gleichmäßig konvergente Folgen $f_n \to f$ differenzierbarer Funktionen im Allgemeinen *nicht* $f_n' \to f'$.

Es gibt auch Beispiele gleichmäßig konvergenter Folgen differenzierbarer Funktionen $f_n \to f$, so dass die Grenzfunktion f zwar stetig, aber an keinem Punkt x differenzierbar ist.

Betrachten Sie die Funktionenfolge $f_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$. Konvergiert diese Folge? (punktweise? gleichmäßig? gegen welchen Grenzwert?) Wie sieht es mit der Folge der Ableitungen und der Differenzierbarkeit des Grenzwertes aus?

Wir zeigen nun, dass die Vertauschbarkeit von Grenzwerten und Ableitungen unter einer modifizierten Annahme gewährleistet ist.

Satz 6.28. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f_n : I \to \mathbb{R}$ eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen, so dass*

a) die Folge der Ableitungen $(f_n')_n$ gleichmäßig konvergiert, und

b) es gibt $x_0 \in I$, so dass $(f_n(x_0))_n$ konvergiert.

Dann konvergiert $(f_n)_n$ punktweise gegen eine stetig differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n' = (\lim_{n\to\infty} f_n)' = f'.$$

Beweis. Da f_n' stetig ist, können wir den Hauptsatz verwenden (mit Stammfunktion f_n) und erhalten für beliebiges $x \in I$

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)dt.$$

Die Folge $(f_n(x_0))_n$ konvergiert per Annahme. Da f_n' gleichmäßig konvergiert, konvergiert auch die Folge der Integrale: Nach Satz 6.26 gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f_n'(t)dt = \int_{x_0}^{x} (\lim_{n\to\infty} f_n'(t))dt.$$

Also konvergiert $(f_n(x))_n$ für jedes x. Nennen wir die Grenzfunktion $f := \lim_{n\to\infty} f_n$, d.h.

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} (\lim_{n\to\infty} f_n'(t))dt.$$

Hier ist die Grenzfunktion der Ableitungen, $\lim_{n\to\infty} f_n'$, als gleichmäßiger Grenzwert stetiger Funktion ebenfalls stetig. Also ist f nach dem Haupsatz differenzierbar, mit Ableitung $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$. $\square$

Es mag überraschend erscheinen, dass wir bei diesem Satz nicht gleichmäßige Konvergenz von (f_n) gefordert haben. Tatsächlich konvergiert diese Funktionenfolge automatisch lokal gleichmäßig, d.h. gleichmäßig auf jedem kompakten Intervall $[a,b]$: Für jedes $x \in [a,b]$ gilt

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| \int_{x_0}^{x} (f_n' - f') + f_n(x_0) - f(x_0) \right| \\ &\leq |f_n(x_0) - f(x_0)| + |x - x_0| \cdot \|f_n' - f'\|_{[a,b]} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Beispiel 6.29 (Ableitung und Integration von Potenzreihen).

Wir betrachten eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ mit positivem Konvergenzradius R und Entwicklungspunkt x_0. Sei $0 < r < R$. Dann ist $f : [x_0 - r, x_0 + r] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, und die Folge der Partialsummen

$$f_n : [x_0 - r, x_0 + r] \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k,$$

konvergiert gleichmäßig gegen f (vgl. Satz 3.54).

Die Ableitung bzw. eine Stammfunktion von f_n ist

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= \sum_{k=1}^{n} k a_k (x - x_0)^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} (x - x_0)^k, \\ F_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{k} (x - x_0)^k, \end{aligned}$$

die im Limes $n \to \infty$ zwei weitere Potenzreihen $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x - x_0)^k$ bzw. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1}$ definieren.

Um die Konvergenzradien R_1, R_2 dieser beiden Reihen zu bestimmen, betrachten wir zunächst

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k+1} = \lim_{k\to\infty} e^{\frac{\log(k+1)}{k}} = e^{\lim_{k\to\infty} \frac{\log(k+1)}{k}} = e^{\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1}} = e^0 = 1.$$

Diesen Grenzwert kennen wir eigentlich schon, hier nur eine vereinfachte Herleitung mit l'Hospital. Analog sehen wir $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = 1$.

Damit erhalten wir

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{|a_k|}{k}} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}, \qquad \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{(k+1)|a_k|} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|},$$

d.h. $R_1 = R_2 = R$; die Konvergenzradien stimmen beide mit dem Konvergenzradius R der ursprünglichen Potenzreihe überein.

Nach Satz 6.26 gilt für $|x - x_0| < r$

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x} f(t)dt &= \int_{x_0}^{x} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (t-x_0)^k \, dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_{x_0}^{x} (t-x_0)^k \, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x-x_0)^{k+1}.\end{aligned}$$

Also: Konvergente Potenzreihen können gliedweise integriert werden; eine Stammfunktion von $x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ ist $x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x-x_0)^{k+1}$ (gleicher Konvergenzradius).

Betrachten wir nun die Ableitungen: Da die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}(x-x_0)^k$ auf $[x_0-r, x_0+r]$ gleichmäßig konvergiert, können wir Satz 6.28 anwenden und schließen, dass f differenzierbar ist, mit Ableitung

$$\frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{d}{dx}(x-x_0)^k = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1}.$$

Also: Konvergente Potenzreihen können gliedweise differenziert werden.

Korollar 6.30. *Potenzreihen sind glatte Funktionen. Das heißt: Jede Funktion der Art* $f : (x_0 - R, x_0 + R) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$, *wobei* $R > 0$ *der Konvergenzradius der Potenzreihe ist, ist beliebig oft differenzierbar.*

Beweis. Wir haben oben gesehen, dass f differenzierbar ist und die Ableitung wieder eine konvergente Potenzreihe mit dem gleichen Potenzradius ist. Iteration dieses Arguments gibt den Beweis. □

Korollar 6.31. *Sei* $f : (x_0 - R, x_0 + R) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ *eine Potenzreihenfunktion wie im vorigen Beispiel. Dann stimmt* f *mit seiner Taylorreihe überein, d.h.* $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ *für alle* $k \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. Wir haben $f(0) = a_0$ und

$$f^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k k \cdot (k-1) \cdots (k-(m-1)) \, (x-x_0)^{k-m},$$

also $f^{(m)}(x_0) = m! \cdot a_m$. □

Beispiel 6.32.

a) Arkustangens $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ hat die Ableitung

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k},$$

wobei wir im zweiten Schritt nur $|x| < 1$ betrachten und die geometrische Reihe verwendet haben. Da arctan die Stammfunktion von $\arctan'$ mit $\arctan(0) = 0$, erhalten wir

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1},$$

die Taylorreihe von arctan mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Diese Formel gilt innerhalb des Konvergenzintervalls, also für $|x| < 1$.

b) Auch die Taylorreihe des Logarithmus erhalten wir so einfacher: Für $|x| < 1$ gilt

$$\log'(1+x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k,$$

also

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k,$$

6.5 Anwendungsbeispiel: Das mathematische Pendel

Die Analysis wurde in engem Zusammenhang mit ihren Anwendungen, insbesondere in der Physik, entwickelt. Leider ist in einer Analysis-Vorlesung meist keine Zeit, diese sehr interessanten Anwendungen zu besprechen – siehe z.B. Kapitel 5.6 und Kapitel 6.4 im Buch [Zor06] von Zorich.

Wir besprechen hier zum Abschluss ein Beispiel, das sogenannte mathematische Pendel. Dies wird auch eine Gelegenheit sein, bisher nicht diskutierte Fragestellungen zu motivieren.

Wir betrachten ein idealisiertes Pendel, das aus einer festen Stange der Länge $L > 0$ besteht, deren eines Ende fixiert ist, und an derem anderen Ende eine kleine Masse befestigt ist. Das Pendel kann in der Ebene schwingen. Wir bezeichnen mit $\varphi(t)$ den Winkel, den die Stange mit der Ruheposition (Pendel hängt gerade nach unten) zur Zeit t einschließt (Skizze!)

Das Pendel soll reibungsfrei schwingen, unterliegt aber einer konstanten Gravitationskraft mit Stärke $g > 0$. Unsere KollegInnen aus der Physik verraten uns, dass in diesem Fall die Bewegung des Pendels durch die *gewöhnliche Differentialgleichung*[12]

$$\varphi''(t) + c \cdot \sin(\varphi(t)) = 0, \qquad c := \frac{g}{L} > 0$$

[12] Siehe Vorlesung über gewöhnliche Differentialgleichungen.

charakterisiert ist. Wir suchen also eine zweimal differenzierbare Funktion φ, die diese Gleichung erfüllt. Die Interpretation von $\varphi'(t)$ ist die Änderungsrate des Winkels (Geschwindigkeit) zur Zeit t. Zur Zeit $t = 0$ wollen wir weiterhin die Bedingung stellen, dass das Pendel in Ruhe ist, also $\varphi'(0) = 0$. Der Auslenkungswinkel $\varphi(0)$ zur Zeit $t = 0$ soll aber beliebig vorgegeben sein.

Für eine Diskussion dieser Differentialgleichung verwenden wir zuerst einen Trick: Multiplizieren wir die Gleichung mit der Ableitung $\varphi'(t)$, so sehen wir per Kettenregel

$$0 = \varphi'(t) \cdot (\varphi''(t) + c \cdot \sin(\varphi(t))) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\varphi'(t)^2 - c\cos(\varphi(t))\right).$$

Das bedeutet also, dass die Funktion

$$E(t) := \frac{1}{2}\varphi'(t)^2 - c\cos(\varphi(t))$$

konstant ist, d.h. für alle t gilt

$$E(t) = \frac{1}{2}\varphi'(t)^2 - c\cos(\varphi(t)) = E(0) = -c\cos(\varphi(0)).$$

Dies ist in der Physik als Energieerhaltung bekannt. Wir schreiben nun der Kürze halber $E := E(0)$ und $\varphi_0 := \varphi(0)$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \pm\sqrt{2(E + c\cos\varphi(t))} = \pm\sqrt{2c}\sqrt{\cos\varphi(t) - \cos\varphi_0} \\ \Rightarrow \pm\sqrt{2c} &= \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\cos\varphi(t) - \cos\varphi_0}}, \end{aligned}$$

und nach Integration über $[0, t]$ (mit $t > 0$)

$$\pm\sqrt{2c}t = \pm\sqrt{2c}\int_0^t 1\,dt' = \int_0^t \frac{\varphi'(t')}{\sqrt{\cos\varphi(t') - \cos\varphi_0}}\,dt' = \int_{\varphi_0}^{\varphi(t)} \frac{1}{\sqrt{\cos x - \cos\varphi_0}}\,dx,$$

wobei wir die Substitutionsregel verwendet haben. Dies gibt die Gleichung

$$t = \pm\frac{1}{\sqrt{2c}}\int_{\varphi_0}^{\varphi(t)} \frac{1}{\sqrt{\cos x - \cos\varphi_0}}\,dx,$$

die die Lösung $t \mapsto \varphi(t)$ indirekt beschreibt. Nicht alle Schritte der Herleitung wurden hier rigoros begründet. Zum Beispiel haben wir die Wahl des Vorzeichens $\pm$ nicht geklärt. Weiterhin ist der Integrand $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\cos x - \cos\varphi_0}}$ unbeschränkt, denn für $x \to \varphi_0$ geht er gegen unendlich. Wir sollten unsere Integrationstheorie also auf (geeignete) unbeschränkte Funktionen erweitern; das werden wir in Analyis 2 tun (Stichwort: *uneigentliche Integrale*).

Es ist nicht so klar, wie wir Eigenschaften von $\varphi(t)$ aus dieser Gleichung ablesen können. In Analysis 2 werden wir uns eingehender mit sogenannten *impliziten Funktionen* beschäftigen. An dieser Stelle wollen wir nur diskutieren, wie lange die Periodendauer des Pendels ist, d.h. wie lange es dauert, bis das Pendel von dem Ausgangswinkel φ_0 bis $-\varphi_0$ geschwungen ist.

Dazu zuerst eine Bemerkung: Angenommen, $\varphi_0 > 0$. Da φ zweimal stetig differenzierbar sein soll, ist φ insbesondere stetig. D.h. es gibt $\delta > 0$, so dass $\varphi(t) > 0$ für alle $0 \leq t < \delta$.

An unserer grundlegenden Differentialgleichung $\varphi''(t) = -c\sin(\varphi(t))$ sehen wir dann, dass die rechte Seite für kleine t negativ ist, also ist $\varphi''(t)$ (die Ableitung von $\varphi'(t)$) für kleine t ebenfalls negativ. Da $\varphi'(0) = 0$, heißt das, das $\varphi'(t) \le 0$ für kleine t, d.h. das Pendel schwingt zurück, in Einklang mit der Erwartung aus der physikalischen Anschauung.

Kommt das Pendel zu bestimmten Zeiten wieder zur Ruhe, d.h. gibt es $t \in \mathbb{R}$ mit $\varphi'(t) = 0$? Aus unserer obigen Rechnung nach der Energieerhaltung ist

$$\varphi'(t) = 0 \Longleftrightarrow \cos(\varphi(t)) = \cos\varphi_0.$$

Dies ist offensichtlich für $\varphi(t) = \varphi_0$ und $\varphi(t) = -\varphi_0$ der Fall; da der Winkel auf den Bereich $[-\pi, \pi]$ eingeschränkt ist, sind dies auch die einzigen Möglichkeiten. Dies passt genau zu unserer Vorstellung, dass das Pendel bei maximalem Ausschlag (Winkel $\pm\varphi_0$) seine Richtung umkehrt und zurückschwingt; im Umkehrpunkt ist die Geschwindigkeit $\varphi'(t) = 0$.

Sei $T > 0$ der kleinste Zeitpunkt, zu dem $\varphi(t) = -\varphi_0$ gilt. Dann haben wir (unter der Wahl des richtigen Vorzeichens)

$$T = \frac{1}{\sqrt{2c}} \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \frac{1}{\sqrt{\cos x - \cos\varphi_0}} dx = \sqrt{\frac{2}{c}} \int_0^{\varphi_0} \frac{1}{\sqrt{\cos x - \cos\varphi_0}} dx.$$

Verwenden der Identität $\cos(x) = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$ und die Substitution $\sin\frac{x}{2} = k \cdot \sin u$ (wobei wir stillschweigend annehmen, dass dies auch für uneigentliche Integrale funktioniert; mehr dazu in Analysis 2), mit der Abkürzung $k := \sin\frac{\varphi_0}{2}$, führt auf

$$T = \frac{2}{\sqrt{c}} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 u}} du.$$

Dies ist ein sogenanntes *elliptisches Integral*, die rechte Seite der Gleichung stellt in Abhängigkeit von k eine nicht elementare Funktion dar. Um dies genauer zu verstehen, könnte man nun versuchen, die rechte Seite als Funktion von k in eine Taylorreihe zu entwickeln, z.B. um $k = 0$ (Näherung für kleine Auslenkungswinkel φ_0). Verschiedene Fragen treten auf: Hängt das elliptische Integral stetig, differenzierbar, glatt von k ab? "Darf" man zur Berechnung von Ableitungen nach k unter dem Integral differenzieren, d.h. gilt $\frac{d}{dk}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}} du = \int_0^{\pi/2} \frac{d}{dk} \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}} du$?

Ein anderer interessanter Grenzfall ist $\varphi_0 \to \pi$, d.h. die Situation, in der das Pendel zu Anfang fast auf dem Kopf steht. Dies entspricht $k \to 1$, und das Integral $\int_0^{\pi/2}(1 - \sin^2 u)^{-1} du = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\cos u} := \lim_{r\uparrow\frac{\pi}{2}} \int_0^r \frac{du}{\cos u} = \infty$ divergiert (Übung). Das bedeutet, dass ein anfangs um fast π ausgelenktes Pendel beliebig lange für eine Schwingungsperiode braucht.

Man sieht auch, dass wir es hier automatisch mit Funktionen zu tun haben, die von mehreren Veränderlichen abhängen, zB k und u. Eine allgemeine Frage wird also sein, wie es mit Differential- und Integralrechnung in mehreren Variablen aussieht, d.h. für Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ aussieht. Diese Fragen werden in der Analysis 2 und 3 besprochen werden.

Literatur

[Art83] B. Artmann. *Der Zahlbegriff*. Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht, 1983.

[Ebb+83] H.-D. Ebbinghaus u. a. *Zahlen*. Springer, 1983.

[For16] O. Forster. *Analysis 1*. 12. Aufl. Springer, 2016. URL: https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-658-11545-6.

[Heu91] H. Heuser. *Lehrbuch der Analysis I*. Teubner, 1991. URL: https://link.springer.com/book/9783834807779.

[Hil06] S. Hildebrandt. *Analysis 1*. Springer, 2006. URL: https://link.springer.com/book/10.1007/3-540-29285-3.

[Kna18] A. Knauf. "Vorlesungsskript Analysis 1". 2018. URL: https://www.math.fau.de/wp-content/uploads/2019/05/knauf_analysis_I_2018-19.pdf.

[Kön04] K. Königsberger. *Analysis 1*. Springer, 2004. URL: https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-18490-1.

[Zor06] V. Zorich. *Analysis 1*. Springer, 2006. URL: https://link.springer.com/book/10.1007/3-540-33278-2.

Die Lehrbücher [Zor06; For16; Hil06; Kön04; Heu91] sind als Begleitlektüre für die ganze Vorlesung empfehlenswert. Auf die anderen Bücher wird nur an einigen Stellen im Skript verwiesen.