

Topologie

Sommersemester 2019, 2021

Catherine Meusburger

(mit Ergänzungen von Karl-Hermann Neeb)

Department Mathematik

Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

(Date: 14. Juli 2021)

Zur Vorbereitung der Vorlesung und der Übungen habe ich die folgende Literatur benutzt, die ich auch den Studierenden empfehle:

- T.-D. Bradley, T. Bryson, J. Terilla: *Topology: A Categorical Approach*, The MIT Press 2020
- G. Laures, M. Szymik, *Grundkurs Topologie*, Spektrum, 2009
- R. Engelking: *General Topology*, Heldermann, 1989
- W. Franz: *Topologie I*, Walter de Gruyter, 1973
- W. Fulton: *Algebraic Topology: A First Course*, Springer Graduate Texts 153, 2013
- Allen Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002
Download: <https://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html>
- B. v. Querenburg, *Mengentheoretische Topologie*, Springer 2001
- Emily Riehl, *Category Theory in Context*, Courier Dover Publications, 2017,
Download: <https://math.jhu.edu/~eriehl/context.pdf>
- L. A. Steen, J. A. Seebach, *Counterexamples in Topology*, Dover, 1995
- R. Stöcker, H. Zieschang, *Algebraische Topologie*, Teubner 1994
- S. Waldmann: *Topology, An Introduction*, Springer, 2014

Zusätzlich habe ich zur Vorbereitung der Vorlesung und der Übungen die folgenden Vorlesungsskripten genutzt und auch Inhalte aus diesen Skripten übernommen:

- Prof. Andreas Knauf, **Topologie**, Sommersemester 2016,
<http://www.min.math.fau.de/fileadmin/min/users/knauf/Skripte/topologieVL.pdf>
- Prof. Karl-Hermann Neeb, **An Introduction to Topology**, Sommersemester 2010,
<http://www.algeo.math.fau.de/fileadmin/algeo/users/neebe/pdf-skript/topo.pdf>
- Prof. Christoph Schweigert, **Topologie**, Wintersemester 2015/16,
<http://www.math.uni-hamburg.de/home/schweigert/ws15/tskript.pdf>

Bitte schicken Sie Kommentare und Bemerkungen zu diesem Skript an:
catherine.meusburger@math.uni-erlangen.de.

Ich bedanke mich bei den Studierenden für ihre Fragen und Kommentare, die mir geholfen haben, Vorlesung und Skript zu verbessern und Fehler zu eliminieren. Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Andreas Knauf für hilfreiche Diskussionen und für die Bilder auf Seiten 5, 6, 15, 16, 26, 56, 57, 58, 80, 91 des Vorlesungsskripts und Herrn Prof. Karl-Hermann Neeb für Ergänzungen und Verbesserungen des Vorlesungsskripts.

Inhaltsverzeichnis

0	Einleitung	5
I	Mengentheoretische Topologie	8
1	Topologische Räume und stetige Abbildungen	8
1.1	Topologien	8
1.2	Vergleich und Erzeugung von Topologien	19
1.3	Stetige Abbildungen	22
2	Zusammenhang und Trennung	32
2.1	Zusammenhang und Wegzusammenhang	32
2.2	Trennung von Punkten in topologischen Räumen	42
3	Konstruktion von topologischen Räumen	50
3.1	Initial und Finaltopologie	50
3.2	Teilräume und Quotienten	52
3.3	Topologische Produkte und Summen	58
3.4	Pullback und Pushout	65
4	Kompaktheit	76
4.1	Kompaktheit	76
4.2	Kompaktheit in metrischen Räumen	81
4.3	Der Satz von Tychonoff	84
4.4	Lokale Kompaktheit und Kompaktifizierungen	88
II	Intermezzo: Kategorien und Funktoren	92
5	Kategorien und Funktoren	92

5.1	Kategorien	92
5.2	Funktoren	96
5.3	Produkte, Koprodukte, Pullbacks und Pushouts	99
III Elementare Homotopietheorie		109
6	Homotopien	109
6.1	Homotopien und Homotopieäquivalenzen	109
6.2	Fundamentalgruppen und Fundamentalgruppoiden	115
6.3	Die Fundamentalgruppe des Kreises	125
7	Der Satz von Seifert und van Kampen	133
7.1	Der Satz von Seifert und van Kampen	133
7.2	Berechnung von Fundamentalgruppen	140
8	Aufgaben	154
8.1	Aufgaben zu Kapitel 1	154
8.2	Aufgaben zu Kapitel 2	160
8.3	Aufgaben zu Kapitel 3	162
8.4	Aufgaben zu Kapitel 4	168
8.5	Aufgaben zu Kapitel 5	172
8.6	Aufgaben zu Kapitel 6	176
8.7	Aufgaben zu Kapitel 7	180

0 Einleitung

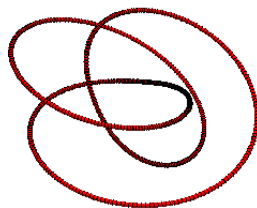
Die Vorlesung *Topologie* befasst sich mit topologischen Räumen, stetigen Abbildungen und Eigenschaften von topologischen Räumen, die invariant unter gewissen stetigen Deformationen sind. Topologische Räume und stetige Abbildungen werden allerdings auf abstraktere und allgemeinere Weise behandelt als in den Vorlesungen *Analysis 1 und 2* und mit anderen Zielsetzungen. Die in der Analysis untersuchten Beispiele wie metrische Räume oder konvergente Folgen im \mathbb{R}^n ergeben sich dann als Spezialfälle.

Die Topologie spielt eine wichtige Rolle in der Geometrie, in der Analysis, der Funktionalanalysis, der Operatortheorie, der Theorie von Lie-Gruppen und besitzt viele Anwendungen in der mathematischen Physik. Sie hängt außerdem eng mit der Mengentheorie und Kategorientheorie zusammen, und viele Konzepte und Methoden, die in der Topologie von Bedeutung sind, spielen auch eine wichtige Rolle in der Algebra. Die Topologie ist damit eines der grundlegendsten mathematischen Gebiete überhaupt und verbindet viele anderen Gebiete der Mathematik.

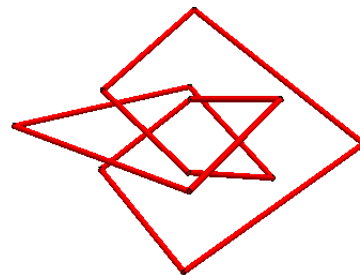
Historisch gesehen ist die Topologie viel jünger als die Differential- und Integralrechnung. Sie hat ihre Anfänge im 20. Jahrhundert - die Axiome des topologischen Raums wurden erst 1925 von Alexandroff formuliert. Dies liegt zum Teil auch daran, dass sie weiter von der Anschauung entfernt ist. Wir visualisieren im Wesentlichen stückweise differenzierbare oder glatte Strukturen im \mathbb{R}^3 , während sich stetige Abbildungen unserer (naiven) Intuition zunächst entziehen.

Deswegen erfordert die Topologie eine abstraktere Herangehensweise als die Analysis. Dies ist notwendig, weil in vielen Zusammenhängen zwar ein Stetigkeitsbegriff aber kein Begriff von Differenzierbarkeit zur Verfügung steht. Außerdem ist die abstraktere Herangehensweise oft einfacher, übersichtlicher und systematischer. In vielen Zusammenhängen interessiert man sich auch einfach nur für Strukturen bis auf stetige Abbildungen oder stetige Deformationen und möchte keine irrelevanten Informationen erfassen, die von dem eigentlichen Problem nur ablenken. Beispiele von topologischen Fragen sind die folgenden:

- Wir betrachten einen Knoten im \mathbb{R}^3 und stellen uns die Frage, ob man ihn zu einem unverknoteten Kreis entwirren kann, ohne ihn durchzuschneiden. Hier ist die genaue Lage des Knotens im Raum offensichtlich irrelevant, genauso wie die Frage, ob man sich einen Knoten als ein Seil - also in etwa eine glatte Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 - vorstellt, oder als ein Gebilde aus starren Stäbchen, die über bewegliche Gelenke miteinander verbunden sind - also als einen Polygonzug.



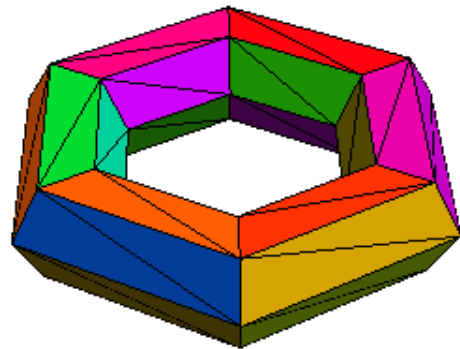
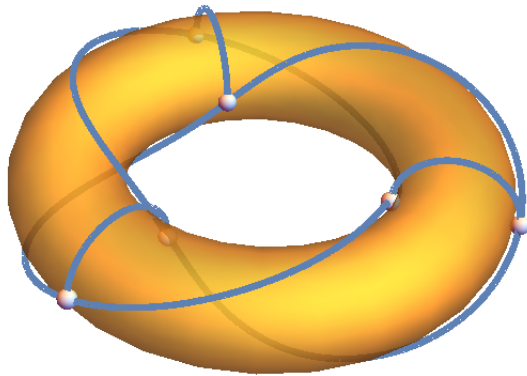
Kleeblattknoten als
Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3



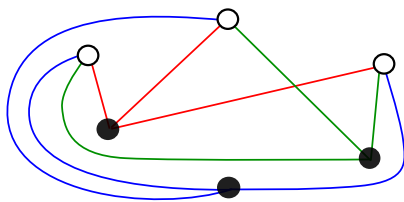
Kleeblattknoten als
Polygonzug im \mathbb{R}^3

- Eine ähnliche Frage stellt sich, wenn man sich Gummibänder auf einer Fläche im \mathbb{R}^3 vorstellt, die die Tendenz haben, sich auf der Fläche möglichst weit zusammenzuziehen.

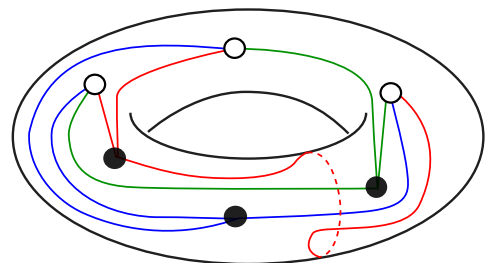
Ob sich ein auf der Fläche angebrachtes Gummiband auf einen Punkt zusammenziehen kann, hängt von der Fläche und von der *ungefähren* Lage des Gummibands ab. Auf der Sphäre ist die beispielsweise immer möglich, auf einem Torus aber nicht in allen Fällen. Es kommt aber wieder nicht auf die Position der Fläche im \mathbb{R}^3 an, auf die *genaue Position* des Gummibands auf der Fläche oder darauf, ob die Fläche eher glatt aussieht oder Ecken und Kanten aufweist.



- Wir fragen uns, ob es möglich ist, drei weiße Punkte auf einer zusammenhängenden Fläche so mit drei schwarzen Punkten zu verbinden, dass jeder weiße mit jedem schwarzen Punkt verbunden ist und sich die Verbindungslinien nicht schneiden. Die Antwort wird nicht von der genauen Position der Punkte, der Größe der Fläche oder ihrer Lage im \mathbb{R}^3 abhängen und auch nicht von der Frage, ob wir die Fläche als glatte Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 realisieren oder als Polyeder.

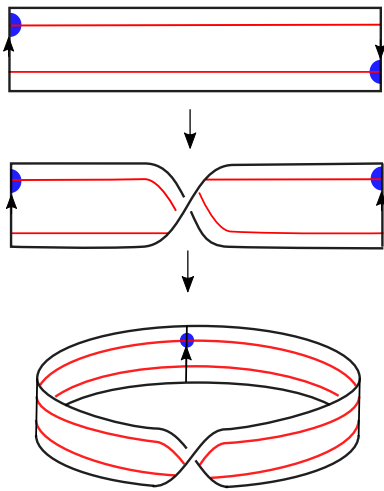


Verbinden von Punkten
in der Ebene

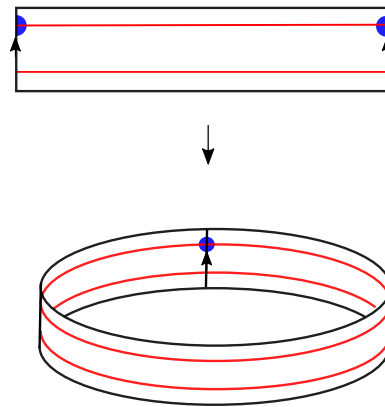


Verbinden von Punkten
auf dem Torus.

- Ein *Möbiusband* entsteht, indem man die Enden eines Papierstreifens um 180° gegeneinander verdreht und dann zusammenklebt. Im Gegensatz zum Zylindermantel, der entsteht wenn man die Enden des Streifens ohne Verdrehen zusammenklebt, ist es beim Möbiusband nicht möglich, eine Innen- und Außenseite zu identifizieren und etwa in verschiedenen Farben zu bemalen. Ebenso bemerkt man, dass im Gegensatz zum Zylinder, die zwei auf dem Streifen abgebildeten Linien zu *einer Linie* auf dem Möbiusband werden, die ohne Abzusetzen auf dem Band eingezeichnet werden kann. Lässt sich die Konstruktion des Möbiusbands und des Zylinders aus dem Streifen durch Verkleben effizient mathematisch erfassen, ohne beide in den \mathbb{R}^3 einzubetten und umständlich durch Koordinaten zu beschreiben? Können wir die Unterschiede zwischen Möbiusband und Zylinder effizient beschreiben? Gibt es höherdimensionale Gegenstücke dieser Konstruktion, die wir nicht mehr visualisieren können?



Konstruktion eines Möbiusbands
aus einem Papierstreifen



Konstruktion eines Zylindermantels
aus einem Papierstreifen

- Intuitiv erscheint es offensichtlich, dass es möglich ist, aus einer Tonkugel einen Teller, eine Schüssel, einen Becher ohne Henkel oder einen Würfel zu formen, ohne sie in zwei Teile zu trennen, Löcher hineinzustechen oder zwei Enden zu verkleben. Ebenso scheint es offensichtlich, dass dies dies für einen Ring, eine Brezel oder einen Becher mit Henkel nicht möglich wäre. Lässt sich diese Intuition präzise mathematisch erfassen? Auch hier sind offensichtlich kleine (stetige) Deformationen der Kugel irrelevant, nicht aber ihre Trennung in zwei Teile, das Erzeugen eines Lochs, oder das Zusammenfügen zweier Tonklumpen.

All dies sind topologische Fragen, die man mathematisch nur dann effizient behandeln kann, wenn man sich von der konkreten Anschauung entfernt. Denn diese enthält zu viel schwer handhabbare und für das Problem irrelevante Information. Abgesehen von dieser problemorientierten Motivation ist die Beschäftigung mit abstrakten Inhalten in der Topologie nützlich, um den systematischen Umgang mit abstrakten mathematischen Strukturen zu lernen und üben. Dies lässt sich dann auch auf andere Gebiete der Mathematik übertragen.

Im ersten Teil der Vorlesung Topologie beschäftigen wir uns systematisch mit topologischen Räumen und stetigen Abbildungen. Hier werden einerseits Konzepte wie Kompaktheit und Konvergenz, die in Spezialfällen schon in der Analysis behandelt wurden, verallgemeinert. Andererseits beschäftigen wir uns systematisch mit der Konstruktion von topologischen Räumen. Da dabei Konstruktionen mit Mengen eine wichtige Rolle spielen, wird dieser Teil der Vorlesung auch als *mengentheoretische* Topologie bezeichnet.

Im zweiten Teil der Vorlesung stellen wir dann einen Zusammenhang mit Strukturen aus der Algebra, insbesondere Gruppen und Gruppenhomomorphismen her und unterscheiden topologische Räume mit Hilfe von algebraischen Strukturen. Dies wird als *algebraische Topologie* bezeichnet, wenn auch nur ein sehr kleiner Teil der algebraischen Topologie in dieser Vorlesung behandelt werden kann. Der Zusammenhang zwischen topologischen und algebraischen Strukturen wird durch Strukturen aus der *Kategorientheorie* beschrieben, die sich oft als nützlich erweist, wenn zwei auf den ersten Blick sehr unterschiedliche Gebiete der Mathematik miteinander verbunden werden sollen.

Teil I

Mengentheoretische Topologie

1 Topologische Räume und stetige Abbildungen

1.1 Topologien

Ausgangspunkt der Topologie ist die abstrakte, mengentheoretische Definition eines topologischen Raums, die die offenen Mengen nicht durch eine Metrik, Norm oder andere Strukturen charakterisiert, sondern sie einfach vorgibt. Offene Mengen werden rein mengentheoretisch charakterisiert, durch ihr Verhalten unter Schnitten und Vereinigungen.

Definition 1.1.1: Sei X eine Menge und $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X . Eine **Topologie** auf X ist eine Teilmenge $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$, die die folgenden Axiome erfüllt:

(T1) Die leere Menge \emptyset und X sind Elemente von \mathcal{O} .

(T2) Jede Vereinigung von Mengen in \mathcal{O} ist in \mathcal{O} enthalten:

$$O_i \in \mathcal{O} \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}.$$

(T3) Jeder endliche Schnitt von Mengen aus \mathcal{O} ist in \mathcal{O} enthalten:

$$O_i \in \mathcal{O} \forall i \in I, I \text{ endlich} \Rightarrow \bigcap_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}.$$

Ein Paar (X, \mathcal{O}) aus einer Menge X und einer Topologie \mathcal{O} auf X heißt **topologischer Raum**, und ein Element eines topologischen Raums heißt **Punkt**. Die Mengen in \mathcal{O} heißen **offene Mengen** und die Mengen $A \in \mathcal{P}(X)$ mit $X \setminus A \in \mathcal{O}$ heißen **abgeschlossene Mengen**.

Bevor wir Beispiele von Topologien betrachten, untersuchen wir einige grundlegende Aspekte der Definition. Zunächst stellen wir fest, dass das Axiom (T1) eigentlich unnötig ist, wenn wir in (T2) und (T3) auch die leere Indexmenge zulassen. Da man diesen Fall aber beim Überprüfen der Axiome leicht vergisst, wird er hier trotzdem separat genannt.

Bemerkung 1.1.2: Das Axiom (T1) ist ein Spezialfall von (T2) und (T3) für $I = \emptyset$, denn

$$\bigcup_{i \in \emptyset} O_i = \{x \in X \mid \exists i \in \emptyset : x \in O_i\} = \emptyset \in \mathcal{O} \quad \bigcap_{i \in \emptyset} O_i = \{x \in X \mid x \in O_i \forall i \in \emptyset\} = X \in \mathcal{O}.$$

Die zweite Frage, die sich direkt aus Definition 1.1.1 ergibt, ist, ob diese symmetrisch bezüglich der Komplementbildung ist. Da jede Teilmenge von X ein Komplement besitzt, könnte man statt der Mengen in \mathcal{O} auch die Komplemente der Mengen in \mathcal{O} betrachten. Das folgende Lemma zeigt, dass man eine Topologie auch durch entsprechende Bedingungen an abgeschlossene Mengen definieren kann, wenn man gleichzeitig Schnitte und Vereinigungen vertauscht.

Lemma 1.1.3: Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum. Dann gilt:

1. Die Mengen \emptyset und X sind abgeschlossen.
2. Jeder Schnitt abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.
3. Jede endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

Beweis:

1. Dies folgt, da $X \setminus X = \emptyset$ und $X \setminus \emptyset = X$ offen sind.
2. Ist I eine Indexmenge und $A_i \subseteq X$ abgeschlossen für alle $i \in I$, so ist $O_i = X \setminus A_i$ offen für alle $i \in I$ und damit auch $\cup_{i \in I} O_i$ nach (T2). Also ist $\cap_{i \in I} A_i = X \setminus \cup_{i \in I} O_i$ abgeschlossen.
3. Ist I eine endliche Indexmenge und $A_i \subseteq X$ abgeschlossen für alle $i \in I$, so ist $O_i = X \setminus A_i$ offen für alle $i \in I$ und nach (T3) auch $\cap_{i \in I} O_i$. Also ist $\cup_{i \in I} A_i = X \setminus \cap_{i \in I} O_i$ abgeschlossen. \square

Wichtige und einfach zu handhabende Beispiele von Topologien, die auch als Werkzeuge zur Überprüfung von Annahmen nützlich sind, sind die folgenden. Sie zeigen auch, dass es für manche Topologien sehr viele Mengen gibt, die gleichzeitig offen und abgeschlossen sind.

Beispiel 1.1.4:

1. Für jede Menge X ist $\mathcal{O}_{dsk} = \mathcal{P}(X)$ eine Topologie auf X , die **diskrete Topologie** auf X . Jede Teilmenge $Y \subseteq X$ ist offen und abgeschlossen bezüglich \mathcal{O}_{dsk} .
2. Für jede Menge X ist $\mathcal{O}_{in} = \{\emptyset, X\}$ eine Topologie auf X , die **Klumpentopologie** oder **indiskrete Topologie** auf X . Die Mengen \emptyset und X sind auch die einzigen abgeschlossenen Teilmengen von X .
3. Für jede Menge X ist $\mathcal{O}_{kof} = \{O \subseteq X \mid X \setminus O \text{ endlich oder } O = \emptyset\}$ eine Topologie, die **kofinite Topologie** auf X .

Denn es gilt $\emptyset \in \mathcal{O}_{kof}$ per Definition und $X \in \mathcal{O}$, da $X \setminus X = \emptyset$ endlich ist (T1). Ist $X \setminus O_i$ endlich für alle $i \in I$, so ist auch $X \setminus (\cup_{i \in I} O_i) = \cap_{i \in I} (X \setminus O_i)$ endlich als Schnitt endlicher Mengen (T2). Ist I endlich und $X \setminus O_i$ endlich für alle $i \in I$, so ist auch $X \setminus (\cap_{i \in I} O_i) = \cup_{i \in I} (X \setminus O_i)$ endlich als endliche Vereinigungen endlicher Mengen (T3).

Ist X endlich, so ist die kofinite Topologie auf X die diskrete Topologie auf X . Ist X unendlich, so sind X und \emptyset die einzigen gleichzeitig abgeschlossenen und offenen Mengen.

4. Analog definiert auch $\mathcal{O}_{koab} = \{O \subseteq X \mid X \setminus O \text{ abzählbar oder } O = \emptyset\}$ eine Topologie auf jeder Menge X , die **koabzählbare Topologie** auf X . Ist X abzählbar, so erhält man wieder die diskrete Topologie auf X .
5. Auf der leeren Menge \emptyset und auf jeder einelementigen Menge $\{m\}$ gibt es jeweils genau eine Topologie, nämlich $\mathcal{O}_\emptyset = \{\emptyset\}$ und $\mathcal{O}_{\{m\}} = \{\emptyset, \{m\}\}$. Man spricht von dem **leeren topologischen Raum** und dem **Einpunktraum**.
6. Ist (X, \mathcal{O}_X) ein topologischer Raum und $M \subseteq X$ eine Teilmenge, so ist

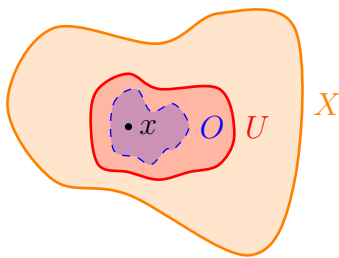
$$\mathcal{O}_{M \subseteq X} = \mathcal{O}_X \cap M = \{U \subseteq M \mid \exists O \in \mathcal{O}_X \text{ mit } U = O \cap M\}$$

eine Topologie auf M , die **Teilraumtopologie** auf M . Offene (abgeschlossene) Mengen in $(M, \mathcal{O}_{M \subseteq X})$ sind die Schnitte offener (abgeschlossener) Mengen in X mit M .

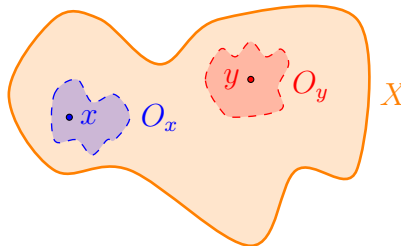
Auch aus der abstrakten Definition der Topologie in Definition 1.1.1 erhält man direkt einen Begriff von *Umgebung*, d. h. Punkten eines topologischen Raums, die einen gegebenen Punkt x umringen oder als Nachbarn des Punktes x betrachtet werden können. Hierzu wird kein Abstandsbegriff benötigt, sondern nur das Konzept einer offenen Menge, die den Punkt x enthält. Allerdings hat man im Allgemeinen keine Kontrolle darüber, wie viele Punkte sonst noch in einer solchen offenen Menge liegen, d. h. man kann Punkte $x, y \in X$ nicht unbedingt voneinander trennen, indem man hinreichend kleine offenen Mengen oder Umgebungen um x und y wählt. Topologische Räume, in denen dies möglich ist, verhalten sich besonders gutartig und werden als *Hausdorffräume* bezeichnet.

Definition 1.1.5: Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum.

1. Eine Menge $U \subseteq X$ heißt **Umgebung** eines Punktes $x \in X$, wenn eine offene Menge $O \subseteq X$ existiert mit $x \in O \subseteq U$. Die Menge der Umgebungen von $x \in X$ wird mit $\mathcal{U}(x)$ bezeichnet.
2. (X, \mathcal{O}) heißt **hausdorffsch** oder **Hausdorffraum**, wenn für je zwei verschiedene Punkte $x, y \in X$ offene Umgebungen O_x, O_y von x und y existieren mit $O_x \cap O_y = \emptyset$.



Umgebung U eines Punktes $x \in X$.



Die Bedingung für einen Hausdorffraum.

Die folgende Bemerkung zeigt, dass sich Umgebungen tatsächlich so verhalten, wie man sich intuitiv eine Umgebung vorstellt. Die Aussagen ergeben sich direkt aus der Definition der Umgebung und der Definition der Topologie (Aufgabe 14).

Bemerkung 1.1.6: Für jeden topologischen Raum (X, \mathcal{O}) und jeden Punkt $x \in X$ gilt:

1. Ist U eine Umgebung von $x \in X$ und $U \subseteq V$, so ist auch V eine Umgebung von x .
2. Ist $O \subseteq X$ offen mit $x \in O$, so ist O eine Umgebung von x .
3. Jede Umgebung eines Punktes $x \in X$ enthält eine offene Umgebung von x .
4. Vereinigungen von Umgebungen eines Punktes $x \in X$ sind Umgebungen von x .
5. Endliche Schnitte von Umgebungen eines Punktes $x \in X$ sind Umgebungen von x .
6. Eine Teilmenge $O \subseteq X$ ist genau dann offen, wenn sie Umgebung aller ihrer Punkte ist.

Dass Umgebungen eines Punktes $x \in X$ für verschiedene Topologien auf einer Menge X sehr unterschiedlich aussehen können, zeigen die Standardbeispiele von Topologien aus Beispiel 1.1.4.

Beispiel 1.1.7:

1. Die diskrete Topologie auf einer Menge X ist hausdorffsch, denn für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ kann man die offenen Mengen $O_x = \{x\}$ und $O_y = \{y\}$ mit $O_x \cap O_y = \emptyset$ wählen. Jede Teilmenge $U \subseteq X$ mit $x \in U$ ist eine Umgebung von $x \in X$.
2. Die indiskrete Topologie auf einer Menge X ist hausdorffsch genau dann, wenn X höchstens ein Element besitzt. Die einzige Umgebung eines Punktes $x \in X$ ist X .
3. Ist X endlich, so ist die kofinite Topologie auf X die diskrete Topologie auf X und damit hausdorffsch. Ist X unendlich, so ist die kofinite Topologie nicht hausdorffsch. Denn sind $O, O' \neq \emptyset$ offen mit $O \cap O' = \emptyset$, so sind $O' \subseteq X \setminus O$ und $X \setminus O'$ endlich und damit auch $X = O' \cup (X \setminus O')$.

Die Umgebungen eines Punktes $x \in X$ bzgl. der kofiniten Topologie sind genau die offenen Mengen $O \subseteq X$ mit $x \in O$. Denn aus $x \in O \subseteq U$ mit O offen, folgt $X \setminus U \subseteq X \setminus O$ endlich, und damit ist U offen.

Besonders wichtige Beispiele topologischer Räume sind die schon aus der Analysis bekannten *metrischen Räume*. Dies sind genau die Räume mit einem *Abstandsbegriff*. Die Axiome für eine Metrik sind genau die Minimalforderungen, die man an ein vernünftiges Konzept von Abstand stellen muss.

Definition 1.1.8: Ein **metrischer Raum** ist ein Paar (X, d) aus einer Menge X und einer Abbildung $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, die **Metrik** oder **Abstandsfunktion**, das die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (M1) **Positivität:** $d(x, y) \geq 0$ für alle $x, y \in X$ und $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
- (M2) **Symmetrie:** $d(x, y) = d(y, x)$ für alle $x, y \in X$.
- (M3) **Dreiecksungleichung:** $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ für alle $x, y, z \in X$.

Verfügt man über einen Begriff von Abstand, so ist es naheliegend, einen Umgebungsbegriff über den Abstand zu definieren, nämlich indem man Punkte betrachtet, deren Abstand von einem gegebenen Punkt x kleiner als eine gegebene Zahl $\epsilon > 0$ ist. Eine Umgebung eines Punktes x sollte dann etwas sein, das alle solchen Punkte für ein hinreichend kleines $\epsilon > 0$ enthält. Da offene Mengen nach Bemerkung 1.1.6, 6. Umgebungen aller darin enthaltenen Punkte sind, müssen sie mit einem Punkt x auch alle Punkte enthalten, deren Abstand von x hinreichend klein ist. Diese Überlegung ergibt die *metrische Topologie*.

Definition 1.1.9: Sei (X, d) ein metrischer Raum.

1. Für $x \in X$ und $r \geq 0$ sind die **offene Kugel** und die **abgeschlossene Kugel** vom Radius r um x definiert als

$$B_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\} \quad \text{und} \quad B_{\leq r}(x) = \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}.$$

2. Die **metrische Topologie** auf X ist die Menge aller Teilmengen $O \subseteq X$, die zu jedem Punkt $x \in O$ auch eine offene Kugel um x enthalten:

$$\mathcal{O}_d = \{O \subseteq X \mid \forall x \in O : \exists \epsilon > 0 \text{ mit } B_\epsilon(x) \subseteq O\}.$$

Dass die metrische Topologie tatsächlich eine Topologie auf X definiert, ergibt sich direkt aus den Axiomen an die Metrik in Definition 1.1.8.

Satz 1.1.10: Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gilt:

1. Die metrische Topologie ist eine Topologie auf X .
2. Für alle $\epsilon > 0$ und $x \in X$ ist $B_\epsilon(x)$ offen.
3. Für alle $\epsilon > 0$ und $x \in X$ ist $B_{\leq \epsilon}(x)$ abgeschlossen.
4. X mit der metrischen Topologie ist ein Hausdorffraum.

Beweis:

1. Wir zeigen, dass die metrische Topologie die Bedingungen aus Definition 1.1.1 erfüllt:

(T1) Aus der Definition der metrischen Topologie folgt, dass \emptyset und X offen sind. Denn die leere Menge enthält keinen Punkt aus X , und somit ist die entsprechende Bedingung leer. Außerdem gilt $B_\epsilon(x) \subseteq X$ für alle $\epsilon > 0$ und $x \in X$.

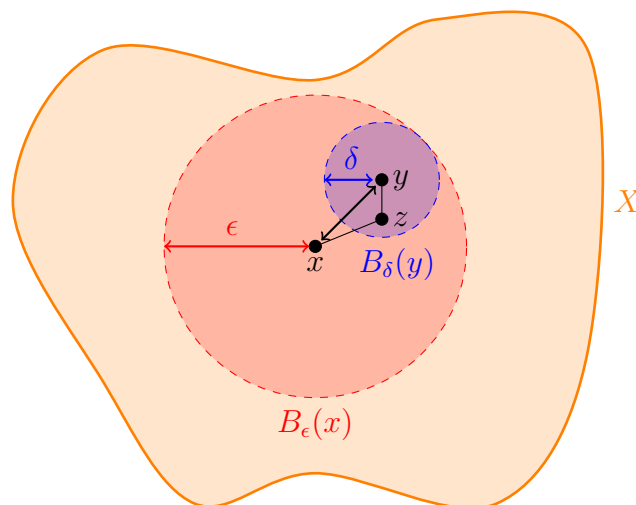
(T2) Sei I eine Indexmenge, $O_i \in \mathcal{O}_d$ für alle $i \in I$ und $x \in \cup_{i \in I} O_i$. Dann existiert ein $j \in I$ mit $x \in O_j$ und wegen $O_j \in \mathcal{O}_d$ ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(x) \subseteq O_j$. Daraus folgt $B_\epsilon(x) \subseteq \cup_{i \in I} O_i$, und damit ist $\cup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}_d$.

(T3) Sei I eine endliche Indexmenge, $O_i \in \mathcal{O}_d$ für alle $i \in I$ und $x \in \cap_{i \in I} O_i$. Da $x \in O_i$ und $O_i \in \mathcal{O}_d$, existieren $\epsilon_i > 0$ mit $B_{\epsilon_i}(x) \subseteq O_i$ für alle $i \in I$. Da I endlich ist, existiert $\epsilon = \min_{i \in I} \epsilon_i$ und $0 < \epsilon \leq \epsilon_i$ für alle $i \in I$. Damit ist $B_\epsilon(x) \subseteq B_{\epsilon_i}(x) \subseteq O_i$ für alle $i \in I$ und damit auch $B_\epsilon(x) \subseteq \cap_{i \in I} O_i$. Also ist $\cap_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}_d$.

2. Sei nun $x \in X$ und $\epsilon > 0$. Zu zeigen ist, dass für jeden Punkt $y \in B_\epsilon(x)$ ein $\delta = \delta(y) > 0$ mit $B_\delta(y) \subseteq B_\epsilon(x)$ existiert. Per Definition von $B_\epsilon(x)$ gilt $\delta := \epsilon - d(x, y) > 0$ für jeden Punkt $y \in B_\epsilon(x)$. Daraus folgt mit der Dreiecksungleichung

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + \delta = \epsilon \quad \forall z \in B_\delta(y)$$

und damit $z \in B_\epsilon(x)$ für alle $z \in B_\delta(y)$. Also gilt $B_\delta(y) \subseteq B_\epsilon(x)$, und $B_\epsilon(x)$ ist offen.

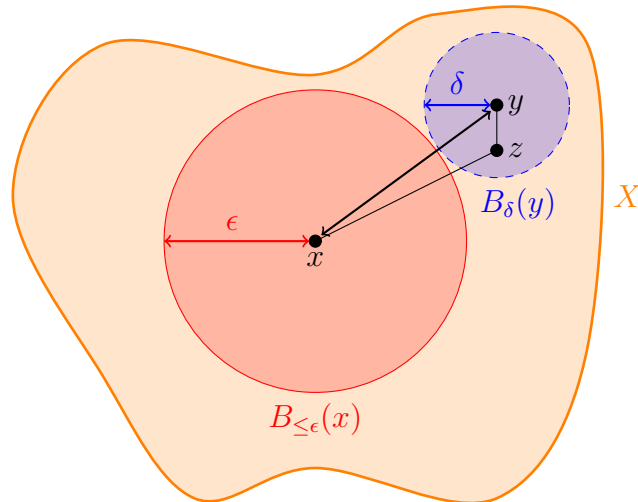


3. Sei $x \in X$ und $\epsilon > 0$. Zu zeigen ist, dass $X \setminus B_{\leq \epsilon}(x)$ offen ist, also dass zu jedem $y \in X \setminus B_{\leq \epsilon}(x)$ ein $\delta = \delta(y) > 0$ mit $B_\delta(y) \subseteq X \setminus B_{\leq \epsilon}(x)$ existiert. Ist $y \in X \setminus B_{\leq \epsilon}(x)$, so ist $d(x, y) > \epsilon$ und

$\delta := d(x, y) - \epsilon > 0$. Für jeden Punkt $z \in B_\delta(y)$ folgt dann mit der Dreiecksungleichung

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < d(x, z) + \delta \Rightarrow d(x, z) > d(x, y) - \delta = \epsilon.$$

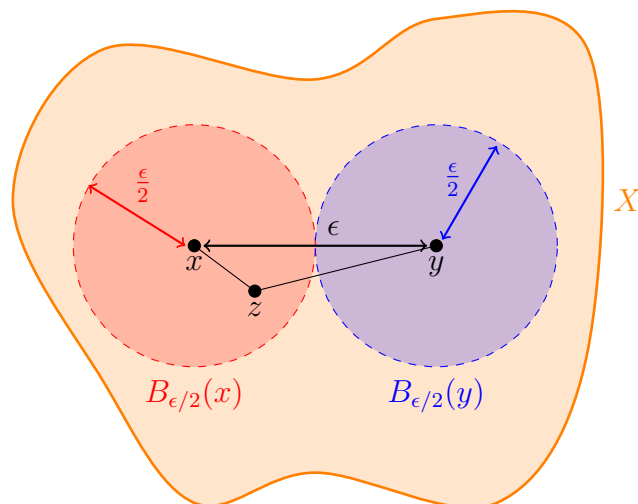
Also ist $B_\delta(y) \subseteq X \setminus B_{\leq \epsilon}(x)$, $X \setminus B_{\leq \epsilon}(x)$ ist offen und $B_{\leq \epsilon}(x)$ abgeschlossen.



4. Sind $x, y \in X$ mit $x \neq y$, so folgt $\epsilon := d(x, y) > 0$ mit der Positivität von d . Die Mengen $B_{\epsilon/2}(x)$ und $B_{\epsilon/2}(y)$ sind offen nach 2., und für jeden Punkt $z \in B_{\epsilon/2}(x)$ folgt

$$\epsilon = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \frac{\epsilon}{2} + d(z, y) \Rightarrow d(z, y) > \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow z \notin B_{\epsilon/2}(y)$$

Also gilt $B_{\epsilon/2}(x) \cap B_{\epsilon/2}(y) = \emptyset$, und (X, d) ist hausdorffsch.



□

Bemerkung 1.1.11: Die Bedingung $d(x, y) > 0$ für $x \neq y$ wird nur im Beweis der Hausdorff-Eigenschaft benötigt. Auch **Semimetriken**, bei denen (M1) in Definition 1.1.8 durch die schwächere Bedingung $d(x, y) \geq 0$ für alle $x, y \in X$ ersetzt wird, definieren also topologische Räume. Sie sind hausdorffsch genau dann, wenn die Semimetrik eine Metrik ist (Übung).

Sehr viele wichtige Beispiele topologischer Räume sind metrische Räume. Einige zum Teil aus den Grundvorlesungen schon bekannte Beispiele sind die folgenden.

Beispiel 1.1.12:

1. Für jede Menge X ist die **diskrete Metrik**

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

eine Metrik auf X . Die zugehörige Topologie ist die diskrete Topologie. Denn für jede Teilmenge $U \subseteq X$ und jeden Punkt $x \in U$ gilt $B_{1/2}(x) = \{x\} \subseteq U$, und somit sind alle Teilmengen von X offen.

2. Jeder normierte Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ über \mathbb{R} oder \mathbb{C} ist ein metrischer Raum mit der Metrik $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $d(x, y) = \|x - y\|$.
3. Insbesondere ist für alle $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [1, \infty)$ der \mathbb{R}^n ein metrischer Raum mit den durch die **p -Norm** $\|\cdot\|_p$ und die **Maximumsnorm** $\|\cdot\|_\infty$ induzierten Metriken:

$$\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p} \quad \|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|.$$

Für $p = 2$ erhält man so die **euklidische Metrik** auf dem \mathbb{R}^n . Die offenen Bälle $B_1(0)$ für diese Metriken sind in Abbildung 1 dargestellt.

4. Ebenso ist nach 2. die Menge $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ der stetigen Abbildungen $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ein metrischer Raum mit der durch die L^p -Norm für $p \in [1, \infty)$ induzierten Metrik und mit der durch die Supremumsnorm induzierten Metrik:

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|.$$

5. Ist (X, d) ein metrischer Raum und $M \subseteq X$ eine Teilmenge, so ist die Einschränkung $d|_{M \times M} : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Metrik auf M . Die resultierende Topologie auf M ist dann gerade die Teilraumtopologie aus Beispiel 1.1.4, 6. (Aufgabe 4).
6. Insbesondere erhält so jede Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ die Struktur eines metrischen Raums mit der Einschränkung der euklidischen Metrik auf dem \mathbb{R}^n . Die zugehörige Topologie nennt man die **Standardtopologie** auf M .
7. Ist (X, d) ein metrischer Raum und $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ monoton mit $f(0) = 0$, $f(x) > 0$ für $x > 0$ und $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ für alle $x, y \geq 0$ (Subadditivität), so ist auch

$$d_f : X \times X \rightarrow \mathbb{R}, \quad d_f(x, y) = f(d(x, y))$$

eine Metrik auf X (Übung). Ein Beispiel einer solchen Abbildung ist $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto x^r$ mit $r \in (0, 1]$. So kann man aus durch Normen induzierten Metriken leicht Metriken konstruieren, die nicht durch Normen induziert werden.

8. Der **Cantor-Raum** ist die Menge $\{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$ der Folgen mit Werten in $\{0, 1\}$ mit der Metrik

$$d : \{0, 1\}^{\mathbb{N}_0} \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}_0} \rightarrow \mathbb{R}, \quad d((x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}) = \frac{1}{2^{\inf\{n \in \mathbb{N}_0 \mid x_n \neq y_n\}}},$$

wobei $\inf \emptyset := \infty$ und $1/2^\infty := 0$.

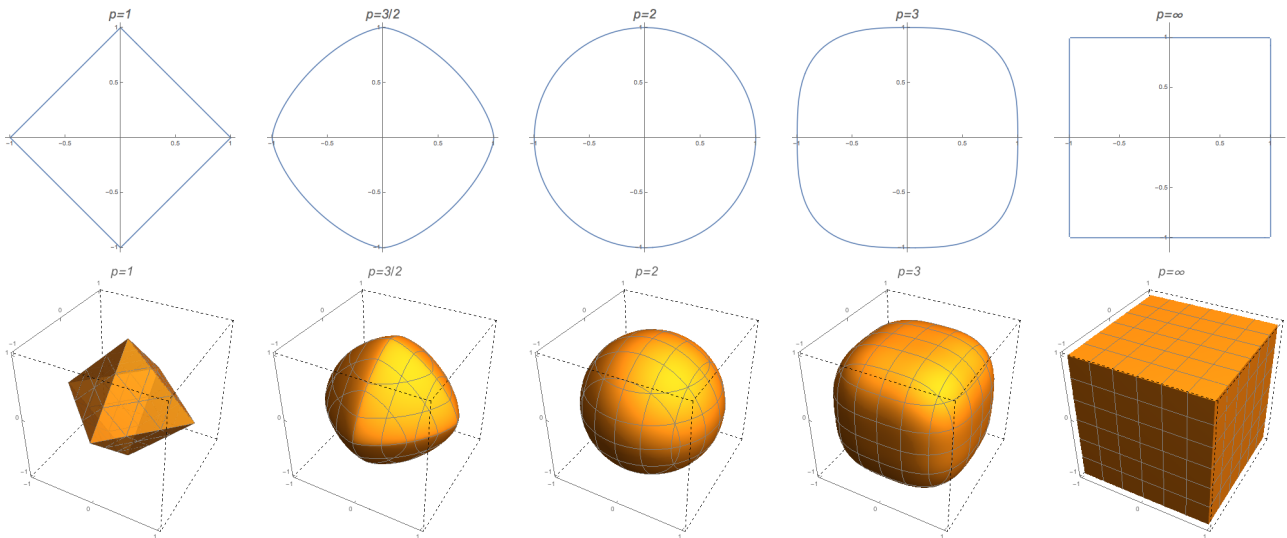


Abbildung 1: Die offenen Bälle $B_1(0)$ für die Metriken d_p und d_∞ aus Beispiel 1.1.12, 3.

Die Beispiele zeigen, dass viele bekannte topologische Räume metrische Räume sind. Existiert für einen gegebenen topologischen Raum (X, \mathcal{O}) eine Metrik $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\mathcal{O} = \mathcal{O}_d$, so nennt man den topologischen Raum (X, \mathcal{O}) **metrisierbar**. Offensichtlich sind nicht alle topologischen Räume metrisierbar. Denn nach Satz 1.1.10, 4. sind metrische Räume Hausdorffräume. Damit können nicht hausdorffsche topologischer Räume wie die aus Beispiel 1.1.7 nicht metrisierbar sein. Wir werden später sehen, dass es weitere notwendige Bedingungen für Metrisierbarkeit gibt, etwa das 1. Abzählbarkeitsaxiom (Beispiel 1.3.18, 2.).

Obwohl die Hausdorffeigenschaft wünschenswert ist, gibt es durchaus interessante und relevante Topologien, die nicht hausdorffsch sind. Ein Beispiel ist das Folgende, das eine wichtige Rolle in der algebraischen Geometrie spielt.

Beispiel 1.1.13: (Zariski-Topologie)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und \mathbb{K} ein unendlicher Körper. Die Nullstellenmenge eines Polynoms $p \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ in n Unbestimmten bezeichnen wir mit

$$N(p) := \{x \in \mathbb{K}^n \mid p(x) = 0\}.$$

Eine **affine algebraische Menge** $A \subseteq \mathbb{K}^n$ ist die Nullstellenmenge einer Familie $(p_j)_{j \in J}$ in $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, die Schnittmenge der Nullstellenmengen der einzelnen Polynome

$$A = N((p_j)_{j \in J}) := \bigcap_{j \in J} N(p_j), .$$

Man kann zeigen, dass zu jeder affinen algebraischen Menge eine *endliche* Familie von Polynomen mit der gleichen Nullstellenmenge existiert (Hilbertscher Basissatz).

Beispiele affiner algebraischer Mengen in \mathbb{R}^2 sind Quadriken, also affine Geraden, Kreise, Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln. Diese sind jeweils die Nullstellenmengen von einem Polynom $p \in \mathbb{R}[x_1, x_2]$ vom Grad ≤ 2 . Daneben gibt es aber noch weitere affine algebraische Mengen, die nicht von dieser Form sind.

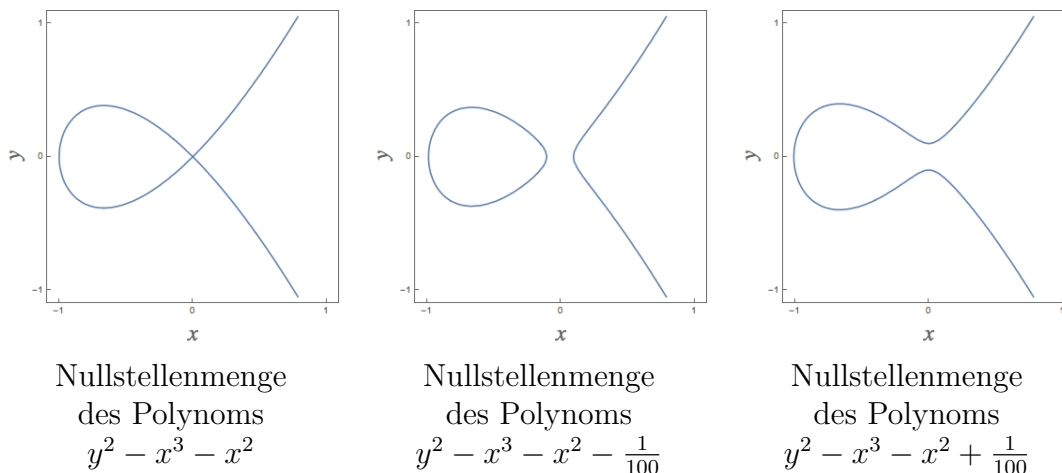
Die **Zariski-Topologie** auf \mathbb{K}^n ist dadurch definiert, dass die abgeschlossenen Mengen genau die affinen algebraischen Mengen sind:

$$\mathcal{O}_Z = \{\mathbb{K}^n \setminus A \mid A \subset \mathbb{K}^n \text{ affine algebraische Menge}\}.$$

Für die leere Menge J erhalten wir insbesondere auch $A = \mathbb{K}^n$ und für das konstante Polynom $p = 1$ ist $N(p) = \emptyset$. Für $n = 1$ ist O_Z die kofinite Topologie auf \mathbb{K} aus Beispiel 1.1.4, denn eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{K}$ ist genau dann Nullstellenmenge eines Polynoms $p \in \mathbb{K}[x]$, wenn sie endlich ist oder ganz \mathbb{K} . Dass es sich tatsächlich um eine Topologie handelt, folgt aus der Identität

$$N((p_j)_{j \in J}) \cup N((q_i)_{i \in I}) = N((p_j q_i)_{(j,i) \in J \times I}).$$

Die Zariski-Topologie auf \mathbb{K}^n ist nicht hausdorffsch, da sich zwei nichtleere offene Teilmengen immer schneiden. Das kommt daher, dass $\mathbb{K}^n \setminus N(p_1) \subseteq N(p_2)$ äquivalent ist zu $p_1 p_2 = 0$, und hieraus folgt $p_1 = 0$ oder $p_2 = 0$, da der Ring $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ nullteilerfrei ist.



Notwendige und hinreichende Bedingungen für Metrisierbarkeit topologischer Räume sind bekannt - sie sind in dem *Metrisierungssatz von Nagata-Smirnov* angegeben, den wir aber mit den bis jetzt zur Verfügung stehenden Begriffen noch nicht formulieren können.

Auch für metrisierbare topologische Räume ist es aber oft besser, abstrakt mit Topologien und Mengen zu argumentieren als mit Metriken zu arbeiten. Dies ist einerseits konzeptioneller. Man erkennt, welche Eigenschaften und Bedingungen benötigt werden, wie sich Aussagen verallgemeinern lassen, und die Beweise werden kürzer und klarer. Außerdem ist es oft einfacher, da keine umständlichen Abschätzungen durchgeführt werden müssen. Ein weiterer Grund, mit Topologien zu arbeiten ist, dass verschiedene Metriken auf einer gegebenen Menge die gleiche Topologie induzieren können. Metriken enthalten also sehr viel zusätzliche Information, die für die Topologie irrelevant ist.

Satz 1.1.14: Zwei Metriken d_1, d_2 auf einer Menge X induzieren genau dann die gleiche Topologie auf X , wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ und jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta = \delta(x, \epsilon) > 0$ gibt mit

$$d_1(x, y) < \delta \Rightarrow d_2(x, y) < \epsilon \quad \text{und} \quad d_2(x, y) < \delta \Rightarrow d_1(x, y) < \epsilon$$

In diesem Fall nennt man die Metriken d_1 und d_2 **äquivalent**.

Beweis:

Sei \mathcal{O}_i die durch die Metrik d_i induzierte Topologie auf X für $i \in \{1, 2\}$. Die Topologien \mathcal{O}_1 und \mathcal{O}_2 sind genau dann gleich, wenn es für jeden Punkt $x \in X$ zu jeder offenen Kugel $B_\epsilon^i(x)$ bezüglich d_i auch eine offene Kugel $B_\delta^j(x)$ bezüglich d_j gibt mit $B_\delta^j(x) \subseteq B_\epsilon^i(x)$ für $i, j \in \{1, 2\}$. Denn dann ist jede Menge $O_i \in \mathcal{O}_i$ auch in \mathcal{O}_j enthalten, und es gilt $\mathcal{O}_i = \mathcal{O}_j$. Dies wird gerade durch die Äquivalenzbedingung für die zwei Metriken garantiert. \square

Wir wenden uns nun wieder allgemeinen topologischer Räume zu. Da eine gegebene Teilmenge $M \subseteq X$ eines topologischen Raums X weder offen noch abgeschlossen sein muss, stellt sich die Frage, wie man aus einer Teilmenge offene und abgeschlossene Teilmengen konstruieren kann. Für abgeschlossene Mengen geschieht dies - ähnlich wie bei der Konstruktion von Untervektorräumen oder Untergruppen - durch Bildung des Schnitts aller abgeschlossenen Mengen, die M enthalten. Da sich beim Übergang zum Komplement Schnitte und Vereinigungen und Ober- und Teilmengen vertauschen, ist die entsprechende Konstruktion für offene Mengen dann die Vereinigung aller in M enthaltenen offenen Mengen. Die Differenz von ersterem und letzterem wird als *Rand* der Menge M bezeichnet.

Definition 1.1.15: Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum.

1. Das **Innere** $\overset{\circ}{M}$ einer Teilmenge $M \subseteq X$ ist die Vereinigung aller offenen Mengen, die in M enthalten sind:

$$\overset{\circ}{M} = \bigcup_{\substack{O \subseteq X \text{ offen} \\ O \subseteq M}} O.$$

2. Der **Abschluss** \overline{M} einer Teilmenge $M \subseteq X$ ist der Schnitt aller abgeschlossenen Mengen, die M enthalten:

$$\overline{M} = \bigcap_{\substack{A \subseteq X \text{ abg.} \\ M \subseteq A}} A.$$

3. Der **Rand** ∂M einer Teilmenge $M \subseteq X$ ist ihr Abschluss ohne ihre Inneres

$$\partial M = \overline{M} \setminus \overset{\circ}{M}.$$

Wir haben also eine disjunkte Zerlegung $X = \overset{\circ}{M} \dot{\cup} \partial M \dot{\cup} (X \setminus \overline{M})$.

4. Eine Teilmenge $M \subseteq X$ heisst **dicht** in X , wenn $\overline{M} = X$, und **nirgends dicht** in X , wenn $\overset{\circ}{\overline{M}} = \emptyset$.

Direkt aus der Definition von Innerem, Abschluss und Rand einer Teilmenge $M \subseteq X$ ergibt sich mit den de Morganschen Regeln (Übung):

$$\overset{\circ}{M} = X \setminus \overline{(X \setminus M)} \quad \partial M = \overline{M} \cap \overline{(X \setminus M)} = \partial(X \setminus M). \quad (1)$$

Außerdem erwartet man, dass sich eine offene (abgeschlossene) Teilmenge eines topologischen Raums auch dadurch charakterisieren lassen sollte, dass sie gleich ihrem Inneren (Abschluss) ist, und dass mehrfaches Bilden eines Inneren oder Abschlusses demnach keine neue Mengen liefern sollte. Dies ist in der Tat der Fall, und verhält sich auch für Ränder ganz ähnlich, nur dass sich hier erst nach *zweifacher* Randbildung nichts mehr ändert.

Satz 1.1.16: Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum und $M \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann gilt:

1. $\overset{\circ}{M}$ ist offen, $\overset{\circ}{M} \subseteq M$, und $\overset{\circ}{M} = M$ genau dann, wenn M offen ist.
2. \overline{M} ist abgeschlossen, $M \subseteq \overline{M}$, und $\overline{M} = M$ genau dann, wenn M abgeschlossen ist.
3. ∂M ist abgeschlossen, $\partial \partial M \subseteq \partial M$ und $\partial \partial \partial M = \partial \partial M$.

Beweis:

1. $\overset{\circ}{M}$ ist offen als Vereinigung offener Mengen nach Definition (T2), und $\overset{\circ}{M} \subseteq M$, da an der

Vereinigung in Definition 1.1.15, 2. nur die offenen Mengen beteiligt sind, die in M enthalten sind. Ist M offen, so ist M selbst an der Vereinigung beteiligt und somit $M \subseteq \overset{\circ}{M} \subseteq M$.

2. \overline{M} ist abgeschlossen als Schnitt abgeschlossener Mengen nach Lemma 1.1.3, und $M \subseteq \overline{M}$, da an dem Schnitt in Definition 1.1.15, 1. nur die abgeschlossenen Mengen beteiligt sind, die M enthalten. Ist M abgeschlossen, so ist M selbst am Schnitt beteiligt, und es folgt $\overline{M} \subseteq M \subseteq \overline{M}$.

3. Da $\partial M = \overline{M} \cap \overline{X \setminus M}$ nach (1), ist ∂M abgeschlossen als Schnitt abgeschlossener Mengen nach Lemma 1.1.3. Mit 2. folgt dann $\overline{\partial M} = \partial M$ und

$$\begin{aligned} \partial \partial M &= \overline{\partial M} \cap \overline{X \setminus \partial M} \subseteq \overline{\partial M} = \partial M \\ \partial \partial M &\supseteq \partial \partial \partial M = \overline{\partial \partial M} \cap \overline{X \setminus \partial \partial M} = \partial \partial M \cap \overline{X \setminus \partial \partial M} = \overline{\partial M} \cap \overline{X \setminus \partial M} \cap \overline{X \setminus \partial \partial M} \\ &= \overline{\partial M} \cap \overline{X \setminus \partial M} = \partial \partial M. \end{aligned}$$

□

Beispiel 1.1.17:

- Wir betrachten \mathbb{R} mit der Standardtopologie und $M = \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Da jedes offene Intervall $B_\epsilon(x) = (x - \epsilon, x + \epsilon)$ um einen Punkt $x \in \mathbb{R}$ sowohl Punkte aus \mathbb{Q} als auch aus $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ enthält, gibt es außer der leeren Menge keine offenen Mengen $O \subseteq \mathbb{Q}$ oder $O \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Also gilt:

$$\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset, \quad \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} = \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}, \quad \partial \mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} \cap \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}, \quad \partial \partial \mathbb{Q} = \partial \mathbb{R} = \emptyset = \partial \emptyset = \partial \partial \partial \mathbb{Q}.$$

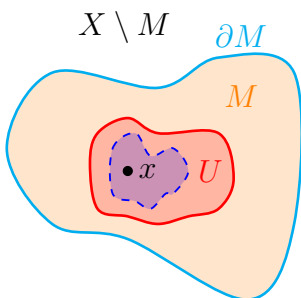
- Sei (X, d) ein metrischer Raum und $x \in X$. Für die offene Kugel $B_r(x)$ erhält man:

$$\overset{\circ}{B}_r(x) = B_r(x) \subseteq B_{\leq r}(x) = \overline{B_{< r}(x)}, \quad \partial B_r(x) \subseteq \{y \in X \mid d(y, x) = r\}.$$

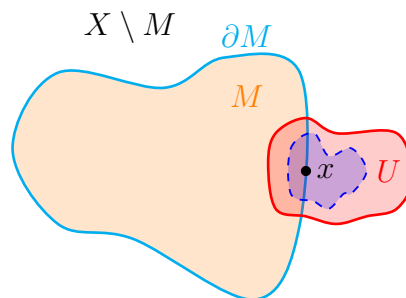
Eine weitere Möglichkeit, das Innere, den Abschluss und den Rand einer Menge zu charakterisieren ergibt sich aus dem Begriff der Umgebung. Schon aufgrund der Benennung ist es naheliegend, dass ein Punkt im Inneren einer Teilmenge $M \subseteq X$ von Punkten aus M umgeben sein sollte und dass ein Randpunkt in ∂M sowohl von Punkten aus M als auch aus $X \setminus M$ umgeben sein sollte. Dies impliziert auch, dass ein Punkt aus dem Abschluss \overline{M} von mindestens einem Punkt aus M und nicht nur Punkten aus $X \setminus M$ umgeben sein sollte.

Satz 1.1.18: Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum und $M \subseteq X$. Dann gilt:

- $x \in \overset{\circ}{M} \Leftrightarrow$ Es gibt eine Umgebung U von x mit $U \subseteq M$. $\Leftrightarrow M$ ist eine Umgebung von x .
- $x \in \overline{M} \Leftrightarrow$ Für jede Umgebung U von x ist $U \cap M \neq \emptyset$. $\Leftrightarrow X \setminus M$ ist keine Umgebung von x .
- $x \in \partial M \Leftrightarrow$ Für alle Umgebungen U von x gilt $U \cap M \neq \emptyset$ und $U \cap (X \setminus M) \neq \emptyset$.



Punkt $x \in \overset{\circ}{M}$ mit Umgebung $U \subseteq M$.



Punkt $x \in \partial M$ mit Umgebung $U \subseteq X$.

Beweis:

Eine Umgebung eines Punktes $x \in X$ ist nach Definition 1.1.5 eine Menge $U \subseteq X$, für die eine offene Menge $O \subseteq X$ existiert mit $x \in O \subseteq U$.

1. Ist $x \in \overset{\circ}{M}$, so ist $\overset{\circ}{M}$ offen mit $x \in \overset{\circ}{M} \subseteq M$, und somit ist M eine Umgebung von x . Gibt es umgekehrt eine Umgebung U von x mit $U \subseteq M$, so existiert eine offene Menge $O \subseteq U \subseteq M$ mit $x \in O$. Da $\overset{\circ}{M}$ die Vereinigung aller offenen Mengen $O' \subseteq M$ ist, folgt daraus $x \in O \subseteq \overset{\circ}{M}$.

2. Ist $x \in \overline{M} = X \setminus (X \setminus M)^\circ$, so kann es nach 1. keine Umgebung U von x mit $U \subseteq X \setminus M$ geben, denn sonst wäre x im Inneren von $X \setminus M$. Also gilt $U \cap M \neq \emptyset$ für jede Umgebung U von x und damit kann $X \setminus M$ keine Umgebung von x sein. Ist umgekehrt $x \in X$ ein Punkt, so dass $X \setminus M$ keine Umgebung von x ist, so liegt x nach 1. nicht im Inneren von $X \setminus M$ und damit nach (1) in \overline{M} .

3. Die letzte Aussage ergibt sich direkt aus 1., 2. und Gleichung (1). □

1.2 Vergleich und Erzeugung von Topologien

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit dem Vergleich von Topologien und der Frage, wie man Topologien überhaupt effizient angeben kann. Schon anhand der diskreten und der indiskreten Topologie auf einer Menge X wird deutlich, dass Topologien auf einer Menge die Teilmengen unterschiedlich gut auflösen können. Die indiskrete Topologie erfasst und trennt nur sehr wenige Teilmengen von X , während die diskrete Topologie alle Teilmengen erfasst. Die Standardtopologie für Teilmengen des \mathbb{R}^n liegt zwischen diesen beiden Extremen. Sie enthält mehr Teilmengen als die indiskrete, aber weniger als die diskrete Topologie. Ausgehend von der Definition einer Topologie ist es naheliegend, eine Topologie \mathcal{O}_1 auf einer Menge X als *feiner* als die Topologie \mathcal{O}_2 auf X aufzufassen, wenn alle Mengen in \mathcal{O}_2 auch in \mathcal{O}_1 enthalten sind.

Definition 1.2.1: Sei X eine Menge und $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{P}(X)$ Topologien auf X . Dann heißt \mathcal{O}_1 **feiner** als \mathcal{O}_2 und \mathcal{O}_2 **gröber** als \mathcal{O}_1 , wenn $\mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{O}_1$ gilt.

Man beachte, dass für zwei gegebene Topologien \mathcal{O}_1 und \mathcal{O}_2 auf X keine der beiden feiner oder gröber als die andere sein muss. In diesem Fall nennt man die Topologien \mathcal{O}_1 und \mathcal{O}_2 **nicht vergleichbar**. Außerdem ist jede Topologie gleichzeitig feiner und gröber als sie selbst. Daher wären *mindestens so fein wie* und *mindestens so grob wie* bessere Bezeichnungen, aber sie sind zu umständlich.

Beispiel 1.2.2:

1. Die diskrete Topologie $\mathcal{P}(X)$ ist die feinste Topologie auf einer Menge X , denn für jede Topologie \mathcal{O} auf X gilt $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$.
2. Die indiskrete Topologie $\{\emptyset, X\}$ ist die grösste Topologie auf einer Menge X , denn für jede Topologie \mathcal{O} auf X gilt $\{\emptyset, X\} \subseteq \mathcal{O}$.
3. Die kofinite Topologie \mathcal{O}_{kof} auf einer Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ aus Beispiel 1.1.4 ist gröber als die Standardtopologie \mathcal{O}_{std} aus Beispiel 1.1.12, 5. Denn für jede endliche Menge $M \subseteq X$ ist $X \setminus M$ offen bezüglich der Standardtopologie, und somit gilt $\mathcal{O}_{kof} \subseteq \mathcal{O}_{std}$.

Topologien auf einer Menge X sind nicht notwendigerweise vergleichbar. Man kann aber eine mit einer gegebenen Familie von Topologien vergleichbare Topologie konstruieren, indem man den Schnitt aller Topologien in der Familie bildet. Ähnlich wie der Schnitt einer Familie von Untervektorräumen einen Untervektorraum liefert, der in allen Untervektorräumen der Familie enthalten ist, liefert dies eine Topologie auf X , die größer als alle Topologien der Familie ist.

Für eine beliebige Teilmenge $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ kann man dann den Schnitt aller Topologien betrachten, die \mathcal{M} enthalten, und erhält so wieder eine Topologie auf X . Dies ist das topologische Gegenstück der linearen Hülle einer Teilmenge eines Vektorraums, die als Schnitt aller Untervektorräume definiert ist, die diese Teilmenge enthalten.

Satz 1.2.3: Sei X eine Menge und I eine Indexmenge. Dann gilt:

1. Ist $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ eine Familie von Topologien auf X , so ist auch $\bigcap_{i \in I} \mathcal{O}_i \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Topologie auf X . Diese Topologie ist größer als jede der Topologien \mathcal{O}_i .
2. Für jede Teilmenge $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ist die von \mathcal{M} erzeugte Topologie

$$\langle \mathcal{M} \rangle = \bigcap_{\substack{\mathcal{M} \subseteq \mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X) \\ \mathcal{O} \text{ Topologie}}} \mathcal{O}$$

eine Topologie auf X . Sie ist die größte Topologie auf X , die \mathcal{M} enthält.

Beweis:

Man weist nach, dass $\bigcap_{i \in I} \mathcal{O}_i$ die Axiome aus Definition 1.1.1 erfüllt. Zunächst gilt für $I = \emptyset$ per Definition $\bigcap_{i \in I} \mathcal{O}_i = \mathcal{P}(X)$. Man erhält also die diskrete Topologie, und es ist nichts mehr zu zeigen. Ansonsten erhält man:

(T1) Da \mathcal{O}_i eine Topologie ist, gilt $\emptyset, X \in \mathcal{O}_i$ für alle $i \in I$ (T1) und damit auch $\emptyset, X \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{O}_i$.

(T2) Sei $U_j \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{O}_i$ für alle $j \in J$. Dann gilt $U_j \in \mathcal{O}_i$ für alle $i \in I, j \in J$. Da \mathcal{O}_i eine Topologie auf X ist, folgt $\bigcup_{j \in J} U_j \in \mathcal{O}_i$ (T2) für alle $i \in I$ und $\bigcup_{j \in J} U_j \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{O}_i$.

(T3) Sei J endlich mit $U_j \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{O}_i$ für alle $j \in J$. Dann gilt $U_j \in \mathcal{O}_i$ für alle $i \in I, j \in J$. Da \mathcal{O}_i eine Topologie auf X ist, folgt mit (T3) $\bigcap_{j \in J} U_j \in \mathcal{O}_i$ für alle $i \in I$ und damit auch $\bigcap_{j \in J} U_j \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{O}_i$.

Damit ist $\bigcap_{i \in I} \mathcal{O}_i$ eine Topologie auf X , und offensichtlich gilt $\bigcap_{i \in I} \mathcal{O}_i \subseteq \mathcal{O}_i$ für alle $i \in I$. Also ist auch die Menge $\langle \mathcal{M} \rangle$ in 2. eine Topologie auf X . Da jede Topologie \mathcal{O} auf X mit $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{O}$ am Schnitt beteiligt ist, gilt $\langle \mathcal{M} \rangle \subseteq \mathcal{O}$ für jede Topologie \mathcal{O} mit $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{O}$. Also ist $\langle \mathcal{M} \rangle$ die größte Topologie auf X , die \mathcal{M} enthält. \square

Die von einer Teilmenge $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ erzeugte Topologie $\langle \mathcal{M} \rangle$ lässt sich auch explizit angeben. Dazu überlegt man sich, welche Mengen außer den Mengen in \mathcal{M} die Topologie $\langle \mathcal{M} \rangle$ noch enthalten muss, um die Axiome in Definition 1.1.1 zu erfüllen.

Lemma 1.2.4: Für jede Menge X und jede Teilmenge $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ gilt

$$\langle \mathcal{M} \rangle = \{\text{beliebige Vereinigungen von endlichen Schnitten von Mengen in } \mathcal{M}\}. \quad (2)$$

Beweis:

Sei $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$ die Menge auf der rechten Seite von (2). Offensichtlich gilt $\mathcal{M} \subseteq \langle \mathcal{M} \rangle$ per Definition von $\langle \mathcal{M} \rangle$. Da $\langle \mathcal{M} \rangle$ eine Topologie auf X ist, muss $\langle \mathcal{M} \rangle$ neben Elementen $M \in \mathcal{M}$ aber auch noch beliebige Vereinigungen (T2) von endlichen Schnitten (T3) von Elementen aus \mathcal{M} enthalten, insbesondere den leeren Schnitt $X = \bigcap_{i \in \emptyset} M_i$ und die leere Vereinigung $\emptyset = \bigcup_{i \in \emptyset} M_i$ (T1). Damit gilt $\langle \mathcal{M} \rangle \supseteq \mathcal{O}$.

Es reicht nun, zu zeigen, dass \mathcal{O} eine Topologie auf X ist. Dann ist \mathcal{O} wegen $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{O}$ beteiligt am Schnitt aller Topologien auf X , die \mathcal{M} als Teilmenge enthalten, und damit $\langle \mathcal{M} \rangle \subseteq \mathcal{O}$.

Offensichtlich sind $\emptyset, X \in \mathcal{O}$, als leere Vereinigung und leerer Schnitt von Mengen aus \mathcal{M} (T1). Da Vereinigungen von Vereinigungen endlicher Schnitte aus Mengen aus \mathcal{M} wieder Vereinigungen endlicher Schnitte von Mengen aus \mathcal{M} sind, ist auch (T2) erfüllt. Zu zeigen ist noch, dass endliche Schnitte von Vereinigungen endlicher Schnitte von Mengen aus \mathcal{M} wieder Vereinigungen endlicher Schnitte sind (T3). Seien dazu O_1, \dots, O_n gegeben durch $O_i = \bigcup_{j \in J_i} A_{ij}$ mit endlichen Schnitten A_{ij} von Mengen aus \mathcal{M} . Dann gilt

$$O_1 \cap \dots \cap O_n = \{x \in X \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} \exists j \in J_i \text{ mit } x \in A_{ij}\} = \bigcup_{j_1 \in J_1, \dots, j_n \in J_n} (A_{1,j_1} \cap \dots \cap A_{n,j_n}).$$

Dabei handelt es sich wieder um eine Vereinigung endlicher Schnitte von Mengen aus \mathcal{M} . Also ist (T3) erfüllt und \mathcal{O} eine Topologie auf X . \square

Statt eine Topologie auf einer Menge X durch Nennung der offenen Mengen explizit anzugeben, ist es oft einfacher, eine Menge anzugeben, die diese Topologie erzeugt. Manchmal geht man auch einen Mittelweg und gibt eine Menge an, aus der sich alle Mengen der Topologie als Vereinigungen ergeben. Dies führt auf den Begriff der *Subbasis* und der *Basis* einer Topologie.

Definition 1.2.5: Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt

1. **Subbasis** der Topologie \mathcal{O} , wenn $\mathcal{O} = \langle \mathcal{M} \rangle$ gilt.
2. **Basis** der Topologie \mathcal{O} , wenn $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{O}$ und jede Menge in \mathcal{O} eine Vereinigung von Mengen aus \mathcal{M} ist.

Besitzt \mathcal{O} eine abzählbare Basis, so sagt man der topologische Raum (X, \mathcal{O}) erfülle das **2. Abzählbarkeitsaxiom**.

Bemerkung 1.2.6: Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ist Basis einer Topologie auf X genau dann, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind: (i) zu jedem $x \in X$ gibt es ein $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B$, (ii) für alle $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ und für alle $x \in B_1 \cap B_2$ gibt es ein $B_3 \in \mathcal{B}$ mit $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ (Übung).

Beispiel 1.2.7:

1. Für jede Menge X ist $\mathcal{M} = \{X\}$ eine Basis der indiskreten Topologie auf X und $\mathcal{M}' = \{\{x\} \mid x \in X\}$ eine Basis der diskreten Topologie auf X .
2. Die Menge $\mathcal{M} = \{(a, b) \subseteq \mathbb{R} \mid a < b \in \mathbb{R}\}$ der beschränkten offenen Intervalle ist eine Basis der Standardtopologie auf \mathbb{R} . Da auch die Menge $\mathcal{M}' = \{(a, b) \subseteq \mathbb{R} \mid a < b \in \mathbb{Q}\}$ eine Basis der Standardtopologie auf \mathbb{R} ist, ist das 2. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. (Aufgaben 16 und 18)

3. Die Menge $\mathcal{M} = \{[0, a) \mid a \in (0, 1)\} \cup \{(a, 1] \mid a \in (0, 1)\}$ ist eine Subbasis der Standardtopologie auf $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$, und die Menge $\mathcal{M}' = \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$ ist eine Subbasis der Standardtopologie auf \mathbb{R} . (Aufgabe 16)

Eine wichtige Konsequenz des 2. Abzählbarkeitsaxioms ist die Existenz einer abzählbaren dichten Teilmenge des topologischen Raums. Diese ist in vielen Zusammenhängen nützlich. Beispielsweise ist die Existenz einer abzählbaren Basis der σ -Algebra in der Maßtheorie essentiell. Auch in vielen Zusammenhängen in der Topologie wird dies benötigt, beispielsweise um stetige Abbildungen durch Ihre Werte auf einer dichten Teilmenge zu definieren.

Lemma 1.2.8: (Einbettungssatz von Urysohn)

Erfüllt ein topologischer Raum (X, \mathcal{O}) das 2. Abzählbarkeitsaxiom, so gibt es eine abzählbare dichte Teilmenge $M \subseteq X$.

Beweis:

Sei $\mathcal{M} = \{O_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine abzählbare Basis von (X, \mathcal{O}) . Wir wählen Punkte $x_n \in O_n$ und setzen $M = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$. Dann enthält jede Umgebung U eines Punktes $x \in X$ eine offene Teilmenge $O \in \mathcal{O}$, und da \mathcal{M} eine Basis von \mathcal{O} ist, auch eine der Mengen O_n . Also gibt es einen Punkt $x_n \in O_n \subseteq O \subseteq U$, und somit gilt $M \cap U \neq \emptyset$ für alle Umgebungen U von x . Mit Satz 1.1.18 folgt $x \in \overline{M}$ für alle $x \in X$ und damit M dicht in X . \square

1.3 Stetige Abbildungen

Nachdem wir den Begriff der Topologie untersucht haben, beschäftigen wir uns nun mit Abbildungen, die mit Topologien verträglich sind, den *stetigen Abbildungen*. Da eine Topologie durch ihre offenen Mengen beschrieben wird, müssen dies entweder Abbildungen sein, für die die Bilder offener Mengen offen sind, oder Abbildungen, für die die Urbilder offener Mengen offen sind. Da das System der offenen Mengen durch sein Verhalten bezüglich Vereinigungen und Schnitten axiomatisch festgelegt wurde und nur der Übergang zu Urbildern mit diesen Operationen voll verträglich ist, ist die zweite Forderung die sinnvollere.

Definition 1.3.1: Seien (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) topologische Räume.

1. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **stetig** oder **Homomorphismus von topologischen Räumen**, wenn das Urbild jeder offenen Menge offen ist:

$$O \in \mathcal{O}_Y \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X.$$

2. Eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **Homöomorphismus** oder **Isomorphismus von topologischen Räumen** wenn sie bijektiv und ihre Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \rightarrow X$ stetig ist. Existiert ein Homöomorphismus $f : X \rightarrow Y$, so nennt man die topologischen Räume (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) **homöomorph**.

Die folgenden Bemerkungen liefern äquivalente Charakterisierungen der Stetigkeit und nützliche Kriterien, um die Stetigkeit einer gegebenen Abbildung zu überprüfen.

Bemerkung 1.3.2:

1. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist stetig genau dann, wenn das Urbild $f^{-1}(A) \subseteq X$ jeder abgeschlossenen Menge $A \subseteq Y$ abgeschlossen ist.

Dies ergibt sich direkt aus der Definition einer abgeschlossenen Menge, denn für jede Teilmenge $S \subseteq Y$ gilt $f^{-1}(Y \setminus S) = X \setminus f^{-1}(S)$.

2. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist stetig genau dann, wenn für alle Teilmengen $S \subseteq X$ das Bild des Abschlusses im Abschluss des Bildes enthalten ist:

$$f(\overline{S}) \subseteq \overline{f(S)}. \quad (3)$$

Denn ist f stetig, so ist das Urbild von $\overline{f(S)}$ abgeschlossen nach 1. und enthält S , also auch \overline{S} . Umgekehrt folgt aus (3) auch direkt, dass das Urbild einer abgeschlossenen Menge $A \subseteq Y$ abgeschlossen ist, indem man $S = f^{-1}(A)$ setzt.

Bemerkung 1.3.3: Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung.

1. Ist \mathcal{O}_X eine Topologie auf X , so definiert

$$f_*\mathcal{O}_X := \{O \subseteq Y \mid f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X\}$$

eine Topologie auf Y , da $f^{-1}(\cap_{j \in J} O_j) = \cap_{j \in J} f^{-1}(O_j)$ und $f^{-1}(\cup_{j \in J} O_j) = \cup_{j \in J} f^{-1}(O_j)$. Ist \mathcal{O}_Y eine weitere Topologie auf Y , so ist $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ genau dann stetig, wenn $\mathcal{O}_Y \subseteq f_*\mathcal{O}_X$ gilt. Damit ist $f_*\mathcal{O}_X$ die feinste Topologie auf Y , die f stetig macht.

2. Ist \mathcal{O}_Y eine Topologie auf Y , so definiert

$$f^*\mathcal{O}_Y = \{O \subseteq X \mid \exists O' \in \mathcal{O}_Y \text{ mit } O = f^{-1}(O')\}$$

eine Topologie auf X . Ist \mathcal{O}_X eine weitere Topologie auf X , so ist $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ genau dann stetig, wenn $f^*\mathcal{O}_Y \subseteq \mathcal{O}_X$ gilt. Also ist $f^*\mathcal{O}_Y$ die grösste Topologie auf X bezüglich der f stetig ist.

Bemerkung 1.3.4: Ist \mathcal{M} eine Subbasis von \mathcal{O}_Y , so ist $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ genau dann stetig, wenn $f^{-1}(O)$ offen ist für alle $O \in \mathcal{M}$. Es reicht also, die Offenheit der Urbilder für die Mengen in einer Subbasis der Topologie auf Y nachzuprüfen.

Beweis:

Wir verwenden Bemerkung 1.3.3, 1. Die Stetigkeit von f ist äquivalent zu $\mathcal{O}_Y \subseteq f_*\mathcal{O}_X$. Da $f_*\mathcal{O}_X$ eine Topologie ist und $\mathcal{O}_Y = \langle \mathcal{M} \rangle$, ist dies äquivalent to $\mathcal{M} \subseteq f_*\mathcal{O}_X$. \square

Während eine stetige Abbildung eine Abbildung ist, für die die *Urbilder* offener Mengen offen sind, bezeichnet man Abbildungen, für die die *Bilder* offener Mengen offen sind, als *offene Abbildungen*. Analog gibt es auch das Konzept der *abgeschlossenen Abbildung*, für die die *Bilder* abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind. Anders als im Fall der stetigen Abbildung, wo die Bedingung, dass die Urbilder offener Mengen offen sind äquivalent zur Bedingung ist, dass Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind, stimmen diese zwei Konzepte aber nicht überein. Dies ist ein weiter Hinweis darauf, dass Stetigkeit die fundamentalere Forderung ist.

Definition 1.3.5: Seien (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) topologische Räume.

1. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heisst **offen**, wenn das Bild jeder offenen Teilmenge $O \subseteq X$ offen ist: $O \in \mathcal{O}_X \Rightarrow f(O) \in \mathcal{O}_Y$.
2. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **abgeschlossen**, wenn das Bild jeder abgeschlossenen Teilmenge $A \subseteq X$ abgeschlossen ist: $X \setminus A \in \mathcal{O}_X \Rightarrow Y \setminus f(A) \in \mathcal{O}_Y$.

Man kann das Konzept des Homöomorphismus auch mit Hilfe der Konzepte der offenen und abgeschlossenen Abbildung aus Definition 1.3.5 formulieren. Denn jede bijektive Abbildung $f : X \rightarrow Y$ besitzt eine Umkehrfunktion $f^{-1} : Y \rightarrow X$, und für jede Teilmenge $U \subseteq X$ gilt $f(U) = (f^{-1})^{-1}(U)$. Daraus ergibt sich, dass die Umkehrfunktion f^{-1} stetig ist genau dann, wenn für alle offenen Teilmengen $U \subseteq X$ auch die Menge $f(U) \subseteq Y$ offen ist, also genau dann, wenn f offen ist. Da man nach Bemerkung 1.3.2 die Stetigkeit von $f^{-1} : Y \rightarrow X$ auch durch die Bedingung charakterisieren kann, dass $f(U) = (f^{-1})^{-1}(U)$ abgeschlossen ist für jede abgeschlossene Teilmenge $U \subseteq X$, ist dies auch äquivalent zur Abgeschlossenheit von f .

Bemerkung 1.3.6: Seien (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) topologische Räume. Für eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ sind äquivalent:

- (i) f ist ein Homöomorphismus.
- (ii) f ist bijektiv und offen.
- (iii) f ist bijektiv und abgeschlossen.

Bevor wir uns konkreten Beispielen zuwenden, klären wir die grundlegenden Eigenschaften von stetigen Abbildungen. Hier stellt sich zunächst die Frage, ob die Identitätsabbildung stetig ist, wie sich Stetigkeit unter der Verkettung von Abbildungen verhält, und welche algebraische Struktur man durch Verkettung von Homöomorphismen eines gegebenen topologischen Raums in sich selbst erhält. Die Antworten sind wenig überraschend. Der folgende Satz ist das direkte Gegenstück analoger Sätze für Vektorräume und lineare Abbildungen, Gruppen und Gruppenhomomorphismen, (unitale) Ringe und (unitale) Ringhomomorphismen, die in der Vorlesung *Lineare Algebra* bewiesen wurden.

Satz 1.3.7: Seien (X, \mathcal{O}_X) , (Y, \mathcal{O}_Y) und (Z, \mathcal{O}_Z) topologische Räume. Dann gilt:

1. Die Identitätsabbildung $\text{id}_X : X \rightarrow X$, $x \mapsto x$ ist ein Homöomorphismus.
2. Sind $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ stetig, so ist auch $g \circ f : X \rightarrow Z$, $x \mapsto g(f(x))$ stetig.
3. Die Homöomorphismen $f : X \rightarrow X$ bilden eine Gruppe. Sie heißt $\text{Homöo}(X, \mathcal{O}_X)$.
4. Homöomorphie von topologischen Räumen ist eine Äquivalenzrelation¹.

Beweis:

1. Offensichtlich gilt $\text{id}_X^{-1}(O) = O \in \mathcal{O}_X$ für jede Teilmenge $O \in \mathcal{O}_Y$, und damit ist $\text{id}_X : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ stetig. Da $\text{id}_X^{-1} = \text{id}_X : X \rightarrow X$, ist id_X ein Homöomorphismus.
2. Für beliebige Abbildungen $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ und Teilmengen $M \subseteq Z$ gilt

$$(g \circ f)^{-1}(M) = \{x \in X \mid g(f(x)) \in M\} = \{x \in X \mid f(x) \in g^{-1}(M)\} = f^{-1}(g^{-1}(M)).$$

¹Man beachte, dass die topologischen Räume keine Menge, sondern eine Klasse bilden. Der Begriff der Äquivalenzrelation auf einer Klasse ist aber analog zu dem auf einer Menge definiert.

Ist g stetig und $O \subseteq Z$ offen, so ist auch $g^{-1}(O) \subseteq Y$ offen. Ist f stetig, so ist damit auch $f^{-1}(g^{-1}(O)) \subseteq X$ offen. Also ist dann auch $g \circ f : X \rightarrow Z$ stetig.

3. Sind $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ Homöomorphismen, so ist $g \circ f : X \rightarrow Z$ bijektiv mit Umkehrabbildung $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} : Z \rightarrow X$. Die zueinander inversen Abbildungen $g \circ f$ und $(g \circ f)^{-1}$ sind stetig nach 2. und damit Homöomorphismen. Die Verkettung definiert also eine assoziative Verknüpfung $\circ : \text{Homöo}(X, \mathcal{O}_X) \times \text{Homöo}(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \text{Homöo}(X, \mathcal{O}_X)$ mit neutralem Element $\text{id}_X : X \rightarrow X$. Per Definition eines Homöomorphismus ist für jeden Homöomorphismus $f : X \rightarrow X$ auch $f^{-1} : X \rightarrow X$ ein Homöomorphismus und damit ein Inverses zu f .

4. Homöomorphie von topologischen Räumen ist reflexiv, denn jeder topologische Raum (X, \mathcal{O}_X) ist nach 1. homöomorph zu sich selbst mit $\text{id}_X : X \rightarrow X$. Sie ist symmetrisch, denn für jeden Homöomorphismus $f : X \rightarrow Y$ ist auch $f^{-1} : Y \rightarrow X$ ein Homöomorphismus. Sie ist transitiv, da nach 3. die Verkettung von Homöomorphismen ein Homöomorphismus ist. \square

Stetige Abbildungen spielen also offensichtlich für topologische Räume eine ähnliche Rolle wie lineare Abbildungen für Vektorräume, Gruppenhomomorphismen für Gruppen und Ringhomomorphismen für Ringe. Homöomorphismen sind die Gegenstücke von Vektorraumisomorphismen, Gruppenisomorphismen und Ringisomorphismen. Insbesondere betrachtet man homöomorphe topologische Räume als topologisch äquivalent und unterscheidet sie ebenso wenig, wie man isomorphe Vektorräume, isomorphe Gruppen oder isomorphe Ringe unterscheidet.

Nachdem die grundlegenden Eigenschaften des Stetigkeitsbegriffs und sein Zusammenhang mit anderen Konzepten geklärt sind, betrachten wir nun Beispiele stetiger Abbildungen und Homöomorphismen. Dazu betrachten wir zunächst die abstrakten Standardbeispiele und dann konkrete Beispiele in metrischen Räumen.

Beispiel 1.3.8:

1. Ist (Y, \mathcal{O}_Y) ein topologischer Raum und trägt X die diskrete Topologie $\mathcal{P}(X)$, so ist jede Abbildung $f : X \rightarrow Y$ stetig, denn jede Teilmenge von X ist offen.
2. Ist (X, \mathcal{O}_X) ein beliebiger topologischer Raum und trägt Y die indiskrete Topologie $\{\emptyset, Y\}$, so ist jede Abbildung $f : X \rightarrow Y$ stetig, denn $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ und $f^{-1}(Y) = X$ sind offen für jede Topologie \mathcal{O}_X .
3. Ist $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ stetig und $M \subseteq X$, so ist auch $f|_M : (M, \mathcal{O}_{M \subseteq X}) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ stetig. Denn $(f|_M)^{-1}(O) = f^{-1}(O) \cap M$ für jede offene Teilmenge $O \subseteq Y$, und aus $f^{-1}(O) \subseteq X$ offen folgt $f^{-1}(O) \cap M$ offen in $(M, \mathcal{O}_{M \subseteq X})$.
4. Ist $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ stetig mit $f(X) \subseteq N \subseteq Y$, so ist auch die Koeinschränkung $f|_N : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (N, \mathcal{O}_{N \subseteq Y})$ stetig. Denn es gilt $(f|_N)^{-1}(O \cap N) = f^{-1}(O)$ für jede offene Teilmenge $O \subseteq Y$.
5. Für beliebige topologische Räume (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) sind alle konstanten Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ stetig. Denn ist $f(x) = y$ für alle $x \in X$, so ist $f^{-1}(M) = \emptyset$ falls $y \notin M$ und $f^{-1}(M) = X$ falls $y \in M$, und damit ist das Urbild jeder Teilmenge $M \subseteq Y$ offen (T1).
6. Sind \mathcal{O}_1 und \mathcal{O}_2 zwei Topologien auf einer Menge X , so ist $\text{id}_X : (X, \mathcal{O}_1) \rightarrow (X, \mathcal{O}_2)$ stetig genau dann, wenn \mathcal{O}_1 feiner als \mathcal{O}_2 ist. Denn $O = \text{id}_X^{-1}(O) \in \mathcal{O}_1$ für alle $O \in \mathcal{O}_2$ ist äquivalent zu $\mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{O}_1$.

7. Für jeden topologischen Raum (X, \mathcal{O}) gibt es genau eine stetige Abbildung $f : \emptyset \rightarrow X$ und genau eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow \{m\}$. Man sagt, der leere Raum sei der **initiale** und der Einpunktraum der **terminale** topologische Raum.

8. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die offene Kugel $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1\}$ homöomorph zu \mathbb{R}^n . Ein Homöomorphismus ist beispielsweise die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow B_1(0), \quad x \mapsto \frac{x}{1 + \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}}.$$

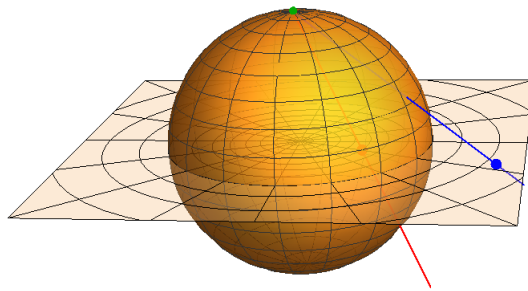
9. Die punktierten n -Sphären

$$S_{\pm}^n = S^n \setminus \{\pm e_{n+1}\} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1, x_{n+1} \neq \pm 1\}$$

sind homöomorph zu \mathbb{R}^n . Ein Homöomorphismus ist die **stereographische Projektion**

$$\phi_{\pm} : S_{\pm}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \left(\frac{x_1}{1 \mp x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 \mp x_{n+1}} \right)$$

Identifiziert man den \mathbb{R}^n mit der Hyperebene $E = \text{span}_{\mathbb{R}}\{e_1, \dots, e_n\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, so ordnet diese einem Punkt $p \in S_{\pm}^n$ den Schnittpunkt der Geraden durch p und $\pm e_{n+1}$ mit E zu.



Die stereographische Projektion $\phi_+ : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

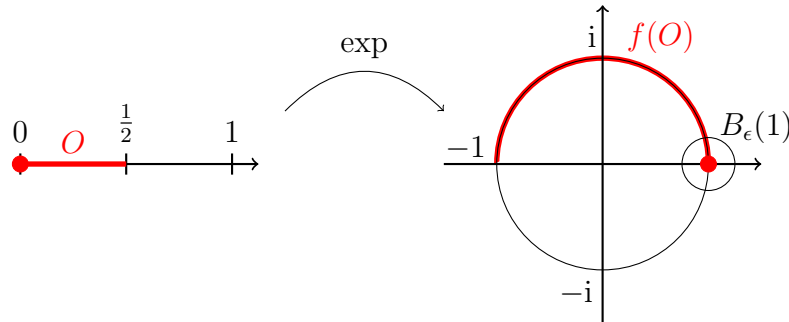
Beispiel 1.3.8, 8. und 9. zeigen, dass die n -dimensionalen euklidische Ebene \mathbb{R}^n , die offene n -Kugel vom Radius 1 und die punktierte n -Sphäre topologisch ununterscheidbar sind, denn sie sind homöomorph.

Allgemein stellt sich die Frage, unter welchen Bedingungen eine stetige bijektive Abbildung ein Homöomorphismus ist. Die folgenden Beispiele zeigen, dass Bijektivität und Stetigkeit alleine dafür im Allgemeinen *nicht ausreichen*, nicht einmal dann, wenn die beteiligten topologischen Räume mit der Standardtopologie ausgestattet sind. Auch die Frage, für welche topologischen Räume (X, \mathcal{O}_X) die Bijektivität einer stetigen Abbildung $f : X \rightarrow X$ garantiert, dass f ein Homöomorphismus ist, ist allgemein schwer zu beantworten. Wir werden später aber zeigen, dass dies in kompakten Hausdorffräumen immer der Fall ist (Satz 4.1.6).

Beispiel 1.3.9:

1. Ist X eine Menge mit mindestens zwei Elementen, so ist die Identitätsabbildung $\text{id}_X : (X, \mathcal{P}(X)) \rightarrow (X, \{\emptyset, X\})$ stetig nach Beispiel 1.3.8, 1. aber kein Homöomorphismus. Die Umkehrabbildung $\text{id}_X^{-1} = \text{id}_X : (X, \{\emptyset, X\}) \rightarrow (X, \mathcal{P}(X))$ ist nicht stetig, denn $\{x\} \in \mathcal{P}(X)$ für alle $x \in X$, aber $\{x\} \notin \{\emptyset, X\}$.

2. Wir betrachten das Intervall $X = [0, 1)$ und den Kreis $Y = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ mit der Standardtopologie. Dann ist die Exponentialabbildung $\exp : [0, 1) \rightarrow S^1$, $x \mapsto e^{2\pi i x} = \cos(2\pi x) + i \sin(2\pi x)$ bijektiv und stetig, aber sie besitzt keine stetige Umkehrfunktion, denn das Bild der offenen Menge $O = [0, \frac{1}{2}) = B_{1/2}(0)$ ist die Menge $f(O) = (f^{-1})^{-1}(O) = \{z \in S^1 \mid \text{Im}(z) > 0\} \cup \{1\}$. Diese ist nicht offen, denn sie enthält keine offene Kugel: $B_\epsilon(1) \not\subseteq f(O)$ für alle $\epsilon > 0$.



3. Sind $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen des \mathbb{R}^n mit der Standardtopologie, so kann man zeigen, dass jede stetige bijektive Abbildung $f : U \rightarrow V$ ein Homöomorphismus ist.

Genauer besagt der **Satz von der Invarianz des Gebiets** von Brouwer, den wir in dieser Vorlesung allerdings nicht beweisen können, dass für jede injektive stetige Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ das Bild offen ist. Wendet man diesen Satz auf offene Teilmenge von U an, so folgt sofort, dass f eine offene Abbildung ist, also ein Homöomorphismus auf die offene Teilmenge $f(U)$.

Eine Frage, die sich direkt aus Definition 1.3.1 ergibt, ist wie der Stetigkeitsbegriff aus Definition 1.3.1 mit der aus der Analysis vertrauten *Stetigkeit in einzelnen Punkten* eines topologischen Raums in Verbindung gebracht werden kann. Denn Stetigkeit ist in Definition 1.3.1 als eine globale Eigenschaft definiert, die nur auf die vorgegebenen offenen Mengen des topologischen Raums, nicht aber auf einzelne Punkte Bezug nimmt.

Das Konzept, das einzelne Punkte eines topologischen Raums mit den offenen Mengen in Verbindung bringt, ist die *Umgebung*. Daher ist es naheliegend, Stetigkeit in einem Punkt eines topologischen Raums zu definieren, indem man in die offenen Mengen in Definition 1.3.1 durch Umgebungen eines Punktes und seines Bildpunkts ersetzt. Dies liefert nicht nur ein brauchbares Konzept von *Stetigkeit in einzelnen Punkten* eines topologischen Raums, sondern auch die Aussage, dass Stetigkeit einer Abbildung äquivalent zu ihrer Stetigkeit in allen Punkten ist.

Definition 1.3.10: Eine Abbildung $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ heißt **stetig in einem Punkt** $x \in X$, wenn das Urbild jeder Umgebung von $f(x)$ eine Umgebung von x ist:

$$U \in \mathcal{U}(f(x)) \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(U) \in \mathcal{U}(x).$$

Satz 1.3.11: Sei (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist stetig genau dann, wenn sie stetig in allen Punkten $x \in X$ ist.

Beweis:

“ \Rightarrow ”: Ist $x \in X$ und $U \subseteq Y$ eine Umgebung von $f(x)$, so gibt es eine offene Menge $O \subseteq Y$ mit $f(x) \in O \subseteq U$. Ist $f : X \rightarrow Y$ stetig, so ist $f^{-1}(O)$ offen, und es gilt $x \in f^{-1}(O) \subseteq f^{-1}(U)$. Also ist $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x , und f ist stetig in x .

“ \Leftarrow ”: Sei nun $f : X \rightarrow Y$ stetig in allen Punkten $x \in X$ und $O \subseteq Y$ offen. Dann ist O eine Umgebung von $f(x)$ für alle $x \in f^{-1}(O)$, und damit ist $f^{-1}(O)$ eine Umgebung von x für alle $x \in f^{-1}(O)$ und somit offen nach Bemerkung 1.1.6, 6. \square

Wir untersuchen nun, wie die Stetigkeit im Sinn von Definition 1.3.1 mit anderen, aus der Analysis bekannten Stetigkeitskonzepten wie dem ϵ - δ -Kriterium und *Folgenstetigkeit* zusammenhängt. Das ϵ - δ -Kriterium ist für metrische Räume definiert, und es folgt direkt aus Definition 1.1.9, dass es eine Konsequenz der Stetigkeitsbedingung aus Definition 1.3.1 ist. Stetigkeit im Sinn von Definition 1.3.1 bedeutet in einem metrischen Raum nämlich, dass das Urbild einer offenen Kugel vom Radius ϵ eine offene Kugel von hinreichend kleinem Radius δ enthält.

Satz 1.3.12: Sind (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, so ist eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ genau dann stetig in $x \in X$, wenn sie das ϵ - δ -Kriterium erfüllt:

Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\epsilon(f(x))$.

Beweis:

Das ϵ - δ -Kriterium ist äquivalent zur Bedingung, dass für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ existiert mit $B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$, also dass $f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$ eine Umgebung von x ist. Da jede Umgebung U von $f(x)$ in Y eine ϵ -Kugel $B_\epsilon(f(x))$ enthält, ist diese Bedingung äquivalent dazu, dass das Urbild $f^{-1}(U)$ für jede Umgebung U von $f(x)$ eine Umgebung von x ist. Das ist genau die Stetigkeit von f in x . \square

Ebenso stellt sich die Frage, inwieweit sich Stetigkeit auch in allgemeinen topologischen Räumen über die Konvergenz von Folgen und ihrer Bildfolgen charakterisieren lässt. Dazu benötigt man zunächst einen Konvergenzbegriff für Folgen, der den bekannten Konvergenzbegriff aus der Analysis verallgemeinert.

Da schon die Stetigkeit in einzelnen Punkten eines topologischen Raums über den Begriff der Umgebung definiert wurde, ist es naheliegend, auch die Konvergenz von Folgen über Umgebungen zu definieren, nämlich über die Forderung, dass jede Umgebung eines Grenzwerts *fast alle* Folgenglieder enthält. Dies liefert auch den Begriff eines Häufungspunkts, den man analog über die Forderung definiert, dass jede Umgebung eines Häufungspunktes *unendlich viele* Folgenglieder enthält. Die Folgenstetigkeit einer Abbildung wird dann zu der Forderung, dass für jede konvergente Folge auch die Bildfolge gegen das Bild des Grenzwerts konvergiert.

Definition 1.3.13: Seien (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) topologische Räume.

1. Ein Punkt $x \in X$ heißt **Häufungspunkt** einer Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ in X , wenn es zu jeder Umgebung U von x unendlich viele $n \in \mathbb{N}_0$ gibt mit $x_n \in U$.
2. Ein Punkt $x \in X$ heißt **Grenzwert** einer Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ in X , wenn für jede Umgebung U von x gilt $x_n \in U$ für fast alle $n \in \mathbb{N}_0$. Besitzt eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ einen Grenzwert $x \in X$, so nennt man sie **konvergent** mit **Grenzwert** x und schreibt $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ oder $x_n \rightarrow x$ mit $n \rightarrow \infty$.
3. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **folgenstetig in einem Punkt** $x \in X$, wenn für alle konvergenten Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit Grenzwert $x \in X$ die Bildfolge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergent mit Grenzwert $f(x) \in Y$ ist. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **folgenstetig**, wenn sie folgenstetig in allen Punkten $x \in X$ ist.

Bemerkung 1.3.14:

1. Der Grenzwert einer Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ in einem topologischen Raum (X, \mathcal{O}_X) ist im allgemeinen *nicht eindeutig*. Versieht man eine Menge X beispielsweise mit der indiskreten Topologie, so konvergiert jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gegen jeden Punkt $x \in X$, denn die einzige Umgebung eines Punktes $x \in X$ ist der ganze topologische Raum X .
2. Folgen in Hausdorffräumen besitzen eindeutige Grenzwerte (Aufgabe 22).

Nun stellt sich die Frage, wie die Folgenstetigkeit einer Abbildung mit ihrer Stetigkeit zusammenhängt, und welches der beiden Konzepte das fundamentalere ist. Diese Frage lässt sich beantworten, indem man sich ins Gedächtnis ruft, dass eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ nichts anderes ist als eine Abbildung $x : \mathbb{N}_0 \rightarrow X$, $n \mapsto x_n$. Formal lässt sich ein Grenzwert $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ erfassen, indem man der Menge \mathbb{N}_0 den zusätzlichen Punkt ∞ hinzuzufügt, und den Grenzwert als den Wert der Abbildung in ∞ ansieht. Indem man die Menge $\overline{\mathbb{N}_0} = \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ dann mit einer geeigneten Topologie versieht, kann man die Konvergenz der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ dann als eine Stetigkeitsbedingung im Punkt ∞ auffassen und auch die Folgenstetigkeit einer Abbildung $f : X \rightarrow Y$ durch die Stetigkeit charakterisieren. Die Topologie auf $\overline{\mathbb{N}_0} = \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ wird gerade so gewählt, dass die offenen Mengen alle Teilmengen von \mathbb{N}_0 und die Mengen sind, die ∞ und fast alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}_0$ enthalten.

Satz 1.3.15: Seien (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) topologische Räume. Dann gilt:

1. Die folgende Menge ist eine Topologie auf $\overline{\mathbb{N}_0} = \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$

$$\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{N}_0}} = \mathcal{P}(\mathbb{N}_0) \cup \{O \subseteq \overline{\mathbb{N}_0} \mid \infty \in O, n \in O \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}_0\}.$$

2. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ in X konvergiert genau dann gegen $x \in X$, wenn die Abbildung $x^* : \overline{\mathbb{N}_0} \rightarrow X$ mit $x^*(n) = x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $x^*(\infty) = x$ stetig ist.
3. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist folgenstetig in $x \in X$ genau dann, wenn die Abbildung $f \circ x^* : \overline{\mathbb{N}_0} \rightarrow Y$ stetig ist für alle stetigen Abbildungen $x^* : \overline{\mathbb{N}_0} \rightarrow X$ mit $x^*(\infty) = x$.

Beweis:

1. Dass $\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{N}_0}}$ eine Topologie auf $\overline{\mathbb{N}_0}$ definiert, folgt durch direktes Nachrechnen der Axiome in Definition 1.1.1 (Übung, Aufgabe 8).

2. Die Abbildung $x^* : \overline{\mathbb{N}_0} \rightarrow X$ ist genau dann stetig in $n \in \mathbb{N}_0$, wenn für jede Umgebung U von x_n das Urbild $x^{*-1}(U)$ eine Umgebung von n ist. Da $\{n\} \in \mathcal{O}_{\overline{\mathbb{N}_0}}$ mit $n \in \{n\} \subseteq x^{*-1}(U)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, ist diese Bedingung für jede Abbildung $x^* : \overline{\mathbb{N}_0} \rightarrow X$ erfüllt. Die Abbildung $x^* : \overline{\mathbb{N}_0} \rightarrow X$ ist genau dann stetig in ∞ , wenn für jede Umgebung U von x das Urbild $x^{*-1}(U)$ eine Umgebung von ∞ ist, also wenn $n \in x^{*-1}(U)$ für fast alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn $x_n \in U$ für fast alle $n \in \mathbb{N}_0$, also wenn die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gegen x konvergiert.

3. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist folgenstetig in x , wenn für jede gegen $x \in X$ konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ die Bildfolge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}_0}$ gegen $f(x)$ konvergiert. Ersteres ist nach 2. äquivalent zur Stetigkeit der Abbildung $x^* : \overline{\mathbb{N}_0} \rightarrow X$ und letzteres zur Stetigkeit der Abbildung $f \circ x^* : \overline{\mathbb{N}_0} \rightarrow Y$ mit $f \circ x^*(n) = f(x_n)$ und $f \circ x^*(\infty) = f(x)$. \square

Dieser Satz zeigt, dass Stetigkeit eine natürlichere und strengere Bedingung ist als Folgenstetigkeit. Arbeitet man mit Folgenstetigkeit, so untersucht man im wesentlichen die Stetigkeit einer Abbildung $f : X \rightarrow Y$ indem man sie mit stetigen Testfunktionen $x^* : \overline{\mathbb{N}}_0 \rightarrow X$ verkettet und sich fragt, ob die resultierende Abbildung $f \circ x^* : \overline{\mathbb{N}}_0 \rightarrow Y$ stetig ist. Dass dies immer der Fall ist, wenn f stetig ist, ergibt sich direkt aus der Tatsache, dass die Verkettung stetiger Abbildungen stetig ist. Damit ist Stetigkeit *hinreichend* für Folgenstetigkeit.

Die Stetigkeit von f ist aber im Allgemeinen nicht *notwendig* für die Folgenstetigkeit. Enthält nämlich ein topologischer Raum (X, \mathcal{O}_X) nur sehr wenige konvergente Folgen, so können auch alle Bilder konvergenter Folgen unter einer Abbildung konvergent sein, ohne dass dies viel über die Stetigkeit der Abbildung aussagt.

Beispiel 1.3.16: Für eine Menge X mit der koabzählbaren Topologie aus Beispiel 1.1.4, 1. und 4. wird jede konvergente Folge in (X, \mathcal{O}_{koab}) ab einem bestimmten Folgenglied konstant. Damit ist *jede* Abbildung $f : (X, \mathcal{O}_{koab}) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ in einen beliebigen topologischen Raum (Y, \mathcal{O}_Y) folgenstetig. Ist X überabzählbar und wird Y mit der diskreten Topologie ausgestattet, so sind aber die einzigen stetigen Abbildungen $f : (X, \mathcal{O}_{koab}) \rightarrow (Y, \mathcal{P}(Y))$ die konstanten Abbildungen. (Aufgabe 24).

Die Stetigkeit einer Abbildung $f : X \rightarrow Y$ lässt sich also nicht für jeden topologischen Raum X durch ihre Folgenstetigkeit, d. h. die Verkettung mit Testfunktionen $x^* : \overline{\mathbb{N}}_0 \rightarrow X$, charakterisieren. Der entscheidende Unterschied zwischen konvergenten Folgen in X und Y und allgemeinen Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ ist offensichtlich die *Abzählbarkeit* der Mengen $\mathbb{N}_0, \overline{\mathbb{N}}_0$.

Da sich beide Konzepte von Stetigkeit mit Hilfe von Umgebungen charakterisieren lassen, muss eine hinreichende Bedingung für die Stetigkeit von folgenstetigen Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ etwas mit der Frage zu tun haben, ob man Umgebungen von Punkten $x \in X$ durch eine *abzählbare* Familie von Umgebungen charakterisieren kann. Dies läuft auf die Frage hinaus, ob es eine abzählbare Familie von Umgebungen gibt, so dass jede Umgebung eine Umgebung aus dieser abzählbaren Familie enthält.

Definition 1.3.17: Ein topologischer Raum (X, \mathcal{O}) erfüllt das **1. Abzählbarkeitsaxiom**, wenn zu jedem Punkt $x \in X$ eine Familie $(U_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ von Umgebungen $U_n \in \mathcal{U}(x)$ existiert, so dass jede Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ eine Umgebung U_n enthält. Eine solche Familie von Umgebungen heißt **Umgebungsbasis** im Punkt x .

Beispiel 1.3.18:

1. Erfüllt ein topologischer Raum (X, \mathcal{O}_X) das 2. Abzählbarkeitsaxiom aus Definition 1.2.5, so erfüllt er auch das 1. Abzählbarkeitsaxiom.

Eine abzählbare Basis $\mathcal{B} = \{O_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ der Topologie \mathcal{O}_X , enthält nämlich eine Umgebungsbasis für alle Punkte $x \in X$. Denn jede Umgebung U von x enthält eine offene Menge $O \in \mathcal{O}_X$ mit $x \in O \subseteq U$. Diese ist eine Vereinigung von Mengen aus \mathcal{B} , und damit gibt es eine Menge $O_n \in \mathcal{B}$ mit $x \in O_n \subseteq U$.

2. Jeder metrische Raum (X, d) erfüllt das 1. Abzählbarkeitsaxiom.

Denn $(B_{1/n}(x))_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist eine Umgebungsbasis von $x \in X$. Jede Umgebung U von x enthält nämlich eine offene Menge $O \subseteq U$, die wiederum eine offene Kugel $B_\delta(x)$ enthält. Wählt man $n > 1/\delta$, so folgt $B_{1/n}(x) \subseteq B_\delta(x) \subseteq O \subseteq U$.

3. Ist X eine überabzählbare Menge und \mathcal{O} die kofinite oder die koabzählbare Topologie auf X aus Beispiel 1.1.4, so erfüllt (X, \mathcal{O}) das 1. Abzählbarkeitsaxiom nicht.

Zu jeder Familie $(U_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ von Umgebungen eines Punktes x kann man eine Umgebung U von x konstruieren, so dass $U_n \not\subseteq U$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Denn zu jeder Umgebung U_n gibt es eine offene Menge O_n mit $x \in O_n \subseteq U_n$. Damit ist die Menge $X \setminus U_n \subseteq X \setminus O_n$ endlich bzw. abzählbar, und die Menge $X \setminus (\bigcap_{n=0}^{\infty} U_n) = \bigcup_{n=0}^{\infty} (X \setminus U_n)$ ist abzählbar als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen. Damit ist die Menge $\bigcap_{n=0}^{\infty} U_n$ überabzählbar, es existiert ein $y \in (\bigcap_{n=0}^{\infty} U_n) \setminus \{x\}$, und $X \setminus \{y\}$ ist eine offene Umgebung von x . Diese enthält keine der Mengen U_n , da $y \in U_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Satz 1.3.19: Für alle topologischen Räume (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) gilt:

1. Stetige Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ sind folgenstetig.
2. Erfüllt (X, \mathcal{O}_X) das 1. Abzählbarkeitsaxiom, so sind folgenstetige Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ auch stetig.

Beweis:

1. Ist $f : X \rightarrow Y$ stetig, so ist nach Satz 1.3.7, 2. auch die Abbildung $f \circ x^* : \bar{\mathbb{N}}_0 \rightarrow Y$ stetig für alle stetigen Abbildungen $x^* : \bar{\mathbb{N}}_0 \rightarrow X$. Nach Satz 1.3.15, 3. ist dies äquivalent zur Folgenstetigkeit von f .

2. Sei nun (X, \mathcal{O}_X) ein topologischer Raum, der das 1. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Wir zeigen zunächst, dass dann jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebungsbasis $(U_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $U_n \subseteq U_m$ für alle $n \geq m$ besitzt. Sei dazu $(V_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Umgebungsbasis von x und $U_n := \bigcap_{j=0}^n V_j \subseteq V_n$. Nach Bemerkung 1.1.6 sind auch die Mengen U_n Umgebungen von x für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und per Definition gilt $U_n \subseteq U_m$ für $n \geq m$. Zu jeder Umgebung U von x gibt es eine Umgebung V_n mit $x \in V_n \subseteq U$, und damit auch $x \in U_n \subseteq U$.

Sei nun $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung, die unstetig in $x \in X$ ist und $(U_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Umgebungsbasis von x mit $U_n \subseteq U_m$ für alle $n \geq m$. Dann gibt es nach Satz 1.3.11 eine Umgebung $V \subseteq Y$ von $f(x)$, deren Urbild $f^{-1}(V)$ keine Umgebung von x ist. Damit kann $f^{-1}(V)$ auch keine der Mengen U_n enthalten, denn jede Teilmenge von X , die eine Umgebung von x enthält, ist eine Umgebung von x . Wir finden also eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $x_n \in U_n \setminus f^{-1}(V)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Da jede Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ eine der Mengen U_m enthält, folgt $x_n \in U_n \subseteq U_m \subseteq U$ für alle $n \geq m$ und damit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Andererseits gilt aber $f(x_n) \notin V$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, und somit ist $f(x)$ kein Grenzwert der Folge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}_0}$. Also ist f auch nicht folgenstetig in x . \square

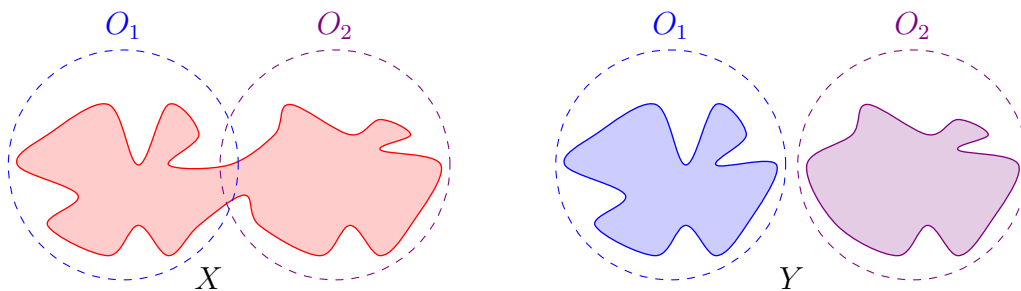
2 Zusammenhang und Trennung

2.1 Zusammenhang und Wegzusammenhang

In diesem Kapitel übersetzen wir die Intuition, dass ein topologischer Raum aus mehreren miteinander nicht-zusammenhängenden *Komponenten* bestehen kann, in zwei mathematische Begriffe. Für die folgenden Teilräume $X, Y \subseteq \mathbb{R}^2$ erscheint es offensichtlich, dass X aus einer und Y aus zwei Komponenten besteht:



Die Frage ist, wie sich dies in ein mathematisches Konzept übersetzen lässt. Hierbei sind zwei prinzipiell verschiedene Zugänge möglich. Der erste geht von der Anschauung in metrischen Räumen aus und beruht auf der Beobachtung, dass sich die zwei Komponenten des topologischen Raums Y durch zwei disjunkte offene Mengen $O_1, O_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ voneinander trennen lassen, während dies für X offensichtlich nicht möglich ist - zwei offene Bälle, die X überdecken schneiden sich immer.



Entscheidend ist dabei, dass die zwei Mengen $O_1, O_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ nicht leer sind, zusammen den ganzen Raum überdecken, und dass O_1, O_2 beide offen oder beide abgeschlossen sind. Denn ohne die letzte Bedingung könnte man für einen topologischen Raum (X, \mathcal{O}) eine Menge $\emptyset \neq O_1 \subsetneq X$ und ihr Komplement $O_2 = X \setminus O_1$ betrachten, wodurch dann die Bedingungen $X = O_1 \cup O_2$ und $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ immer erfüllt wären.

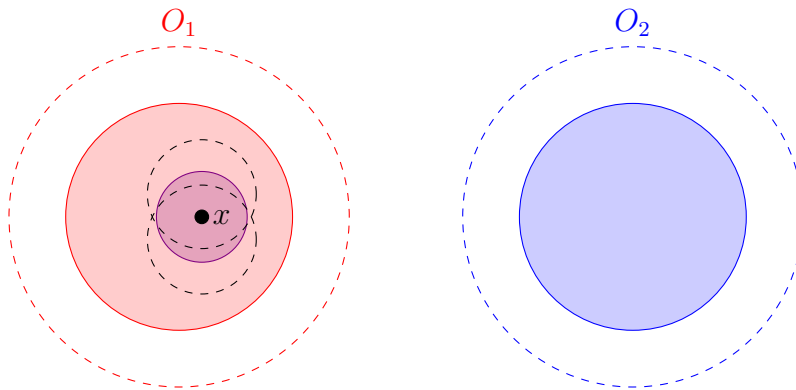
Es ist damit naheliegend, einen Teilraum $X \subseteq \mathbb{R}^2$ als *zusammenhängend* oder *aus einer Komponente bestehend* zu betrachten, wenn es keine zwei disjunkten, nichtleeren offenen Teilmengen $O_1, O_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ gibt mit $X \subseteq O_1 \cup O_2$. Diese Bedingung ergibt auch für allgemeine topologische Räume Sinn. Außerdem ist sie mit der Teilraumtopologie kompatibel, denn die offenen Teilmengen eines Teilraums $M \subseteq X$ sind gerade die Schnitte offener Mengen $O \subseteq X$ mit M . Damit können wir das Konzept auch direkt auf Umgebungen von Punkten in X übertragen, die wir mit der Teilraumtopologie aus Beispiel 1.1.4, 6. ausstatten, und erhalten eine lokale Version dieser Definition.

Definition 2.1.1:

1. Ein topologischer Raum (X, \mathcal{O}) heißt **zusammenhängend**, wenn er keine disjunkte Zerlegung in zwei nichtleere offene Teilmengen besitzt:

$$X = O_1 \cup O_2 \text{ mit } O_1, O_2 \in \mathcal{O}, O_1 \cap O_2 = \emptyset \Rightarrow O_1 = \emptyset \text{ oder } O_2 = \emptyset.$$

2. Ein topologischer Raum (X, \mathcal{O}) heißt **lokal zusammenhängend**, wenn jede Umgebung eines Punktes $x \in X$ eine zusammenhängende Umgebung von x enthält.



Lokal zusammenhängender, aber nicht zusammenhängender topologischer Raum X .

Alternativ lässt sich ein zusammenhängender topologischer Raum auch durch abgeschlossene Teilmengen charakterisieren. Kombiniert man die beiden Bedingungen, so erhält man eine alternative Definition, über Teilmengen, die gleichzeitig offen und abgeschlossen sind.

Bemerkung 2.1.2: Ein topologischer Raum (X, \mathcal{O}) ist genau dann zusammenhängend, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist (Aufgabe 27):

1. X besitzt keine disjunkte Zerlegung in zwei nichtleere abgeschlossene Teilmengen.
2. X und \emptyset sind die einzigen Teilmengen von X , die offen und abgeschlossen sind.

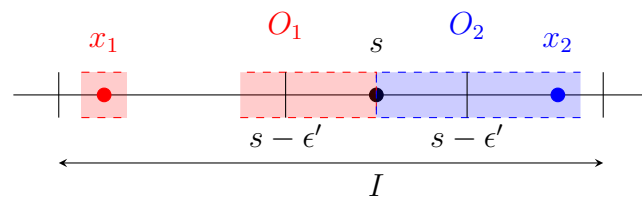
Beispiel 2.1.3:

1. Ist X eine Menge mit mindestens zwei Elementen, so ist X mit der diskreten Topologie nicht zusammenhängend, denn für jeden Punkt $x \in X$ sind $O_1 = \{x\}$ und $O_2 = X \setminus \{x\}$ disjunkte, nichtleere offene Mengen mit $O_1 \cup O_2 = X$.
2. Eine Menge X mit der indiskreten Topologie, der leere topologische Raum und der Einpunktraum aus Beispiel 1.1.4 sind zusammenhängend. Denn in diesen topologischen Räumen gibt es höchstens eine nichtleere offene Menge.
3. $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ mit der Standardtopologie ist nicht zusammenhängend, denn für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sind $O_1 = (-\infty, x) \cap \mathbb{Q}$ und $O_2 = (x, \infty) \cap \mathbb{Q}$ disjunkte, in \mathbb{Q} offene Mengen mit $O_1 \cup O_2 = \mathbb{Q}$.

Beispiel 2.1.4: Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ mit der Standardtopologie ist genau dann zusammenhängend, wenn sie ein Intervall ist, also wenn aus $x_1, x_2 \in M$ mit $x_1 < x_2$ folgt $[x_1, x_2] \subseteq M$.

Beweis:

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Angenommen es existiert eine Zerlegung $I = O_1 \dot{\cup} O_2$ in zwei nichtleere disjunkte offene Teilmengen $O_1, O_2 \subseteq I$. Dann können wir annehmen, dass Punkte $x_1 \in O_1$, $x_2 \in O_2$ mit $x_1 < x_2$ existieren und setzen $s := \sup\{x \in O_1 \mid x \leq x_2\}$. Da O_i offen ist, gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $(x_i - \epsilon, x_i + \epsilon) \cap I \subseteq O_i$, und es folgt $x_1 + \epsilon \leq s \leq x_2 - \epsilon$, also $s \in (x_1, x_2)$. Nun muss s in einer der beiden Mengen O_i enthalten sein, und wegen der Offenheit von O_i gibt es dann ein $\epsilon' > 0$ mit $(s - \epsilon', s + \epsilon') \subseteq O_i$. Dies ist ein Widerspruch zur Definition von s , denn aus $(s - \epsilon', s + \epsilon') \subseteq O_1$ folgt $\sup\{x \in O_1 \mid x \leq x_2\} \geq s + \epsilon' > s$ und aus $(s - \epsilon', s + \epsilon') \subseteq O_2$ folgt $\sup\{x \in O_1 \mid x \leq x_2\} \leq s - \epsilon' < s$. Also ist I zusammenhängend.



Ist umgekehrt $M \subseteq \mathbb{R}$ kein Intervall, so gibt es Punkte $x_1 < x < x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1, x_2 \in M$ und $x \notin M$. Dann sind $O_1 = M \cap (-\infty, x)$ und $O_2 = M \cap (x, \infty)$ offen, $x_i \in O_i$ und $O_1 \cap O_2 = \emptyset$, und somit ist M nicht zusammenhängend. \square

Eine offensichtliche Frage ist, wie sich die Eigenschaft zusammenzuhängen unter der Bildung von Schnitten und Vereinigungen verhält. Schon in unserem ersten Beispiel ist es offensichtlich, dass die Vereinigung zusammenhängender topologischer Räume im allgemeinen nicht zusammenhängend sein muss. Hierfür ist offensichtlich eine Zusatzbedingung nötig. Auch Schnitte zusammenhängender Teilräume eines gegebenen topologischen Raums sind nicht notwendigerweise zusammenhängend (Aufgabe 26). In diesem Fall gibt es aber keine einfach zu formulierende Zusatzbedingung, die dies impliziert.

Ebenso ergibt sich die Frage, ob sich das Konzept des zusammenhängenden topologischen Raums auch durch die Stetigkeit gewisser Abbildungen charakterisieren lässt bzw. wie sich die Eigenschaft *zusammenhängend* unter der Anwendung stetiger Abbildungen verhält. Hier sieht man leicht, dass das *Urbild* eines zusammenhängenden topologischen Raums unter einer stetigen Abbildung nicht zusammenhängend sein muss (Übung). Für das *Bild* ist dies aber immer der Fall.

Satz 2.1.5:

1. Ein topologischer Raum (X, \mathcal{O}_X) ist genau dann zusammenhängend, wenn jede stetige Abbildung $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (\{1, 2\}, \mathcal{P}(\{1, 2\}))$ konstant ist.
2. Ist (X, \mathcal{O}_X) zusammenhängend und $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ stetig, so ist auch das Bild $f(X) \subseteq Y$ zusammenhängend.
3. Ist $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie zusammenhängender Teilräume eines topologischen Raums (X, \mathcal{O}_X) mit $M_i \cap M_j \neq \emptyset$ für alle $i, j \in I$, so ist auch $\cup_{i \in I} M_i \subseteq X$ zusammenhängend.

Beweis:

1. Für jede stetige Abbildung $f : X \rightarrow \{1, 2\}$ sind die beiden Teilmengen $O_j := f^{-1}(\{j\})$ offen als Urbilder offener Mengen und disjunkt. Ist also (X, \mathcal{O}_X) zusammenhängend, so ist eine der beiden Mengen leer und f damit konstant.

Ist X nicht zusammenhängend, so erhält man aus jeder Zerlegung $X = O_1 \cup O_2$ in zwei disjunkte nichtleere offene Teilmengen $O_1, O_2 \subseteq X$ eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow \{1, 2\}$, indem man $f(x) = i$ für $x \in O_i$ setzt. Da beide Mengen O_j nicht leer sind, ist f damit nicht konstant.

2. Sind $O_1, O_2 \subseteq f(X)$ disjunkt und offen in $f(X)$ mit $f(X) = O_1 \cup O_2$, so sind auch die Mengen $f^{-1}(O_i) \subseteq X$ disjunkt mit $X = f^{-1}(O_1) \cup f^{-1}(O_2)$ und wegen der Stetigkeit von f offen. Da (X, \mathcal{O}_X) zusammenhängend ist, folgt $f^{-1}(O_i) = \emptyset$ für ein $i \in \{1, 2\}$, was wegen $O_i \subseteq f(X)$ nur gelten kann, wenn auch $O_i = \emptyset$.

3. Sei $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie zusammenhängender Teilräume $M_i \subseteq X$ mit $M_i \cap M_j \neq \emptyset$ für alle $i, j \in I$ und $f : \cup_{i \in I} M_i \rightarrow \{1, 2\}$ stetig bezüglich der Teilraumtopologie auf $\cup_{i \in I} M_i$. Dann sind nach Beispiel 1.3.8, 3. und Aufgabe 4 auch die Einschränkungen $f|_{M_i} : M_i \rightarrow Y$ stetig. Da die Mengen $M_i \subseteq X$ zusammenhängend sind, folgt $f(x) = f(x') = y_i$ für alle $x, x' \in M_i$ nach 1. Da $M_i \cap M_j \neq \emptyset$ für alle $i, j \in I$ ist, folgt $y_i = y_j$ für alle $i, j \in I$. Damit ist f konstant, und mit 1. folgt, dass auch $\cup_{i \in I} M_i$ zusammenhängend ist. \square

Beispiel 2.1.6:

1. Der Kreis $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ ist zusammenhängend als Bild des Intervalls $[0, 1]$ unter der stetigen Abbildung $\exp : [0, 1] \rightarrow S^1, x \mapsto e^{2\pi i x}$.
2. Sind (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) homöomorphe topologische Räume, so ist nach Satz 2.1.5, 2. (X, \mathcal{O}_X) zusammenhängend genau dann, wenn (Y, \mathcal{O}_Y) zusammenhängend ist.
3. Die Vereinigung aller Geraden durch den Ursprung im \mathbb{R}^2 mit rationaler Steigung

$$M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists q \in \mathbb{Q} : x_2 = qx_1\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

ist zusammenhängend. Denn es gilt $M = \cup_{q \in \mathbb{Q}} M_q$ mit $M_q = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = qx_1\}$. Alle Geraden M_q sind zusammenhängend, da sie homöomorph zu \mathbb{R} sind, und es gilt $(0, 0) \in M_q$ für alle $q \in \mathbb{Q}$.

Die Beispiele zeigen, wie man mit Satz 2.1.5 beweisen kann, dass ein topologischer Raum zusammenhängend ist, ohne explizit die Bedingung in Definition 2.1.1 nachzuweisen. In der Praxis ist dies oft der einfachere Weg. Auch der Zwischenwertsatz aus der Analysis ergibt sich direkt aus der zweiten Aussage in Satz 2.1.5 und der Klassifikation der zusammenhängenden Teilräume von \mathbb{R} in Beispiel 2.1.4.

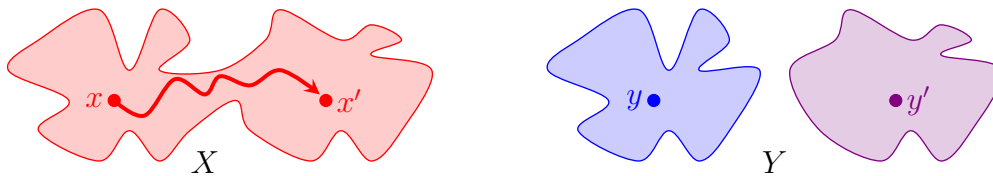
Korollar 2.1.7: (Zwischenwertsatz)

Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es zu jedem $y \in [f(a), f(b)]$ ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$.

Beweis:

Da $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist, ist es nach Beispiel 2.1.4 zusammenhängend, und wegen der Stetigkeit von f ist nach Satz 2.1.5 auch das Bild $f([a, b]) \subseteq \mathbb{R}$ zusammenhängend. Nach Beispiel 2.1.4 ist es damit wieder ein Intervall, und aus $f(a), f(b) \in f([a, b])$ folgt $[f(a), f(b)] \subseteq f([a, b])$. \square

Wir untersuchen nun noch eine zweite Möglichkeit, die intuitive Vorstellung von *Komponenten* eines topologischen Raums in eine mathematische Definition zu übersetzen. Dazu betrachten wir zunächst wieder die am Anfang des Kapitels eingeführten Teilräume $X, Y \subseteq \mathbb{R}^2$. Anstatt die Teilräume $X, Y \subseteq \mathbb{R}^2$ durch offene Bälle zu überdecken, gehen wir aber jetzt von der Beobachtung aus, dass man sich von jedem Punkt $x \in X$ zu jedem anderen Punkt $x' \in X$ bewegen kann, ohne M zu verlassen, während dies für Punkte in Y nicht immer möglich ist.



Um dies mathematisch zu erfassen, stellt man sich ein Zeitintervall $[0, 1]$ vor, so dass man sich zur Zeit $t = 0$ in x und zur Zeit $t = 1$ in x' befindet. Die Bewegung von x nach x' lässt sich dann als eine Abbildung $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$, $t \mapsto \gamma(t)$ auffassen, die einem Zeitpunkt $t \in [0, 1]$ den Ort $\gamma(t) \in X$ zuordnet, an dem man sich zur Zeit t befindet. Da die Bewegung kontinuierlich sein soll, d. h. springen ist verboten, und da wir mit topologischen Räumen arbeiten, fordern wir, dass die Abbildung γ stetig ist. Die Vorstellung, dass es möglich ist, sich von $x \in X$ nach $x' \in X$ zu bewegen, ohne X zu verlassen, übersetzt sich dann in die Aussage, dass es eine stetige Abbildung $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ gibt mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = x'$. Eine solche Abbildung nennt man einen *Weg* von x nach x' .

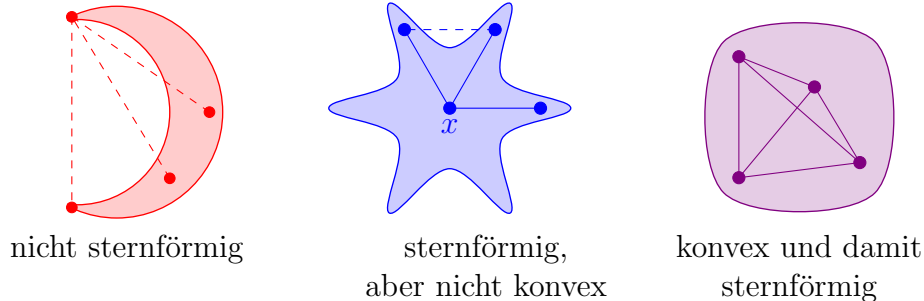
Wie unser erster Zusammenhangsbegriff ist auch dieser Begriff wieder kompatibel mit der Teilraumtopologie. Denn ist $(M, \mathcal{O}_{M \subseteq X}) \subseteq (X, \mathcal{O})$ ein Teilraum eines topologischen Raums (X, \mathcal{O}) , so ist nach Aufgabe 4 eine Abbildung $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$, $t \mapsto \gamma(t)$ stetig genau dann, wenn ihre Verkettung $\iota \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow X$, $t \mapsto \gamma(t)$ mit der Inklusionsabbildung $\iota : M \rightarrow X$, $m \mapsto m$ stetig ist. Durch Anwendung auf Umgebungen, liefert dies auch wieder eine *lokale Version* dieser Definition.

Definition 2.1.8: Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum.

1. Ein **Weg** in X von $x \in X$ nach $x' \in X$ ist eine stetige Abbildung $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = x'$.
2. (X, \mathcal{O}) heißt **wegzusammenhängend**, wenn es zu zwei Punkten $x, x' \in X$ immer einen Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = x'$ gibt.
3. (X, \mathcal{O}) heißt **lokal wegzusammenhängend**, wenn jede Umgebung $U \subseteq X$ eines Punktes $x \in X$ eine wegzusammenhängende Umgebung $V \subseteq X$ von x enthält.

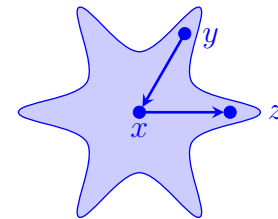
Beispiel 2.1.9:

1. Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **sternförmig** wenn es einen Punkt $x \in X$ gibt, so dass die **Verbindungsstrecke** $\overline{xy} = \{x + t(y - x) \mid t \in [0, 1]\}$ in X enthalten ist für alle $y \in X$. Sie heißt **konvex**, wenn $\overline{xy} \subseteq X$ für alle Punkte $x, y \in X$.



Jeder sternförmige Teilraum $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist wegzusammenhängend, und jeder konvexe Teilraum $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Denn ist $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sternförmig bezüglich $x \in X$, so ist

$$\gamma_{yz} : [0, 1] \rightarrow X, \quad t \mapsto \begin{cases} y + 2t(x - y) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ x + (2t - 1)(z - x) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$



nach Aufgabe 19 stetig mit $\gamma_{yz}(0) = y$ und $\gamma_{yz}(1) = z$ und damit ein Weg von y nach z . Also ist X wegzusammenhängend.

Ist $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex, so ist X auch sternförmig und damit wegzusammenhängend. Außerdem enthält dann jede Umgebung U von $x \in X$ eine offene Menge und damit eine Menge $X \cap B_\epsilon(x)$ für ein $\epsilon > 0$. Diese ist konvex als Schnitt zweier konvexer Mengen und damit wegzusammenhängende Umgebung von x , die in U enthalten ist.

2. Jede offene Teilmenge $O \subseteq \mathbb{R}^n$ ist lokal wegzusammenhängend.

Denn jede Umgebung $U \subseteq O$ von $x \in O$ enthält eine offene Kugel $B_\epsilon(x) \subseteq O \subseteq \mathbb{R}^n$. Die offene Kugel $B_\epsilon(x)$ ist konvex und damit eine wegzusammenhängende Umgebung von x .

Nun stellt sich die Frage nach der Beziehung zwischen den zwei Zusammenhangskonzepten, also den Begriffen des *zusammenhängenden* und des *wegzusammenhängenden* topologischen Raums und ihrer lokalen Gegenstücke. Ausgehend von einem wegzusammenhängenden Raum (X, \mathcal{O}) und dem leicht handhabbaren Zusammenhangskriterium aus Satz 2.1.5, 2. bietet es sich dafür an, die Konstanz von stetige Abbildungen von (X, \mathcal{O}) in einen diskreten Raum zu untersuchen, indem man sie mit Wegen verkettet.

Satz 2.1.10:

1. Wegzusammenhängende topologische Räume sind zusammenhängend.
2. Lokal wegzusammenhängende topologische Räume sind lokal zusammenhängend.
3. Bilder wegzusammenhängender Räume unter stetigen Abbildungen sind wegzusammenhängend.

Beweis:

1. Sei (X, \mathcal{O}_X) wegzusammenhängend und $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (\{1, 2\}, \mathcal{P}(\{1, 2\}))$ stetig. Dann gibt es zu zwei Punkten $x, x' \in X$ einen Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = x'$. Da $f \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow \{1, 2\}$ stetig ist als Verkettung stetiger Abbildungen und $[0, 1]$ zusammenhängend, ist $f \circ \gamma$ nach Satz 2.1.5, 1. konstant. Daraus folgt $f(x) = f \circ \gamma(0) = f \circ \gamma(1) = f(x')$, also f konstant, und nach Satz 2.1.5, 1. ist X zusammenhängend.

2. folgt aus der Anwendung von 1. auf wegzusammenhängende Umgebungen von Punkten in X , die mit der Teilraumtopologie wegzusammenhängende topologische Räume bilden.

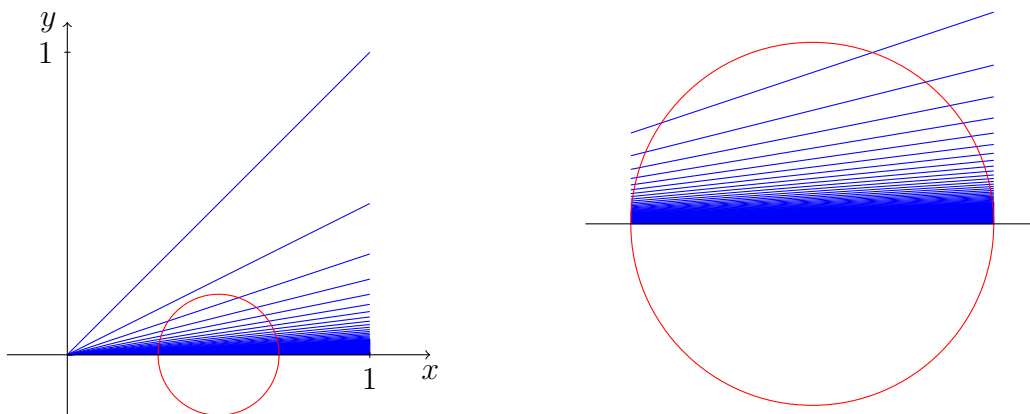
3. Sei $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ stetig und X wegzusammenhängend. Zu zwei Punkten $y_1, y_2 \in f(X)$ existieren dann $x_1, x_2 \in X$ mit $y_1 = f(x_1)$ und $y_2 = f(x_2)$. Da X wegzusammenhängend ist, existiert ein Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ mit $\gamma(0) = x_1$ und $\gamma(1) = x_2$. Dann ist $f \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow f(X)$ ein Weg, der $y_1 = f(x_1)$ mit $y_2 = f(x_2)$ verbindet. Also ist $f(X)$ wegzusammenhängend. \square

Wegzusammenhang ist also eine mindestens so starke Forderung wie Zusammenhang. Um zu verstehen, wann die zwei Zusammenhangsbegriffe und ihren lokalen Varianten übereinstimmen, betrachten wir zunächst zwei Beispiele. Diese zeigen, dass ein *zusammenhängender* topologischer Raum nicht notwendigerweise *wegzusammenhängend* ist, und dass (*weg*)*zusammenhängende* topologische Räume auch nicht *lokal (weg)zusammenhängend* sein müssen.

Beispiel 2.1.11: Der **Besenraum** ist die Teilmenge

$$B = ([0, 1] \times \{0\}) \cup (\cup_{n \in \mathbb{N}} B_n) \quad \text{mit} \quad B_n = \{(t, t/n) \mid t \in [0, 1]\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

mit der Teilraumtopologie. Er ist zusammenhängend und wegzusammenhängend, aber nicht lokal wegzusammenhängend oder lokal zusammenhängend.



Beweis:

Der Besenraum ist sternförmig bezüglich $x = (0, 0)$, also nach Beispiel 2.1.9 wegzusammenhängend und damit nach Satz 2.1.10 auch zusammenhängend.

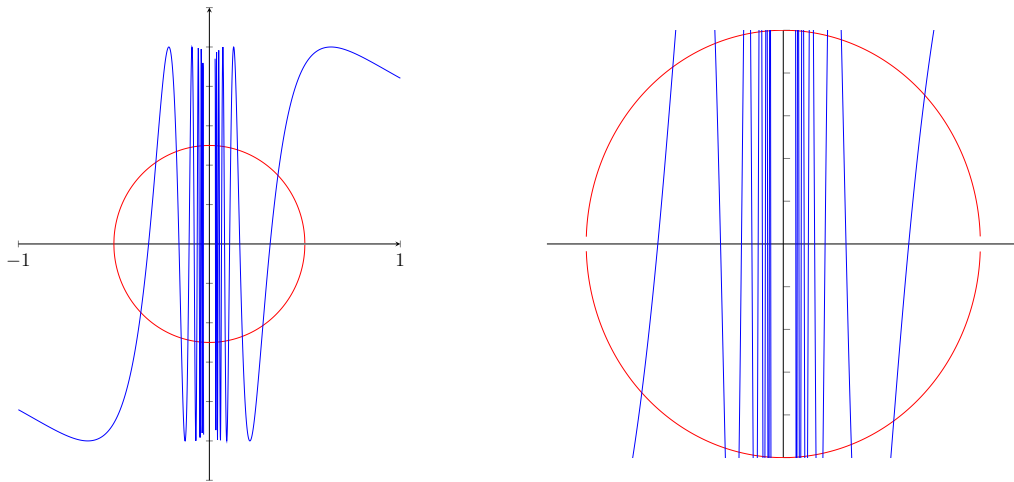
Wir betrachten nun einen Punkt $x = (s, 0) \in B$ mit $0 < s \leq 1$. Dann ist für $0 < \epsilon < s$ $U_x = B_\epsilon(x) \cap B$ eine offene Umgebung von x , die keine zusammenhängende Umgebung von x enthält. Hierzu überlegt man sich zuerst, dass die Teilmengen $B_n \setminus \{(0, 0)\}$ offen in B sind. Wegen $(0, 0) \notin U_x$ sind für jede offene Teilmenge $O \subseteq U_x$ mit $x \in O$ dann auch die Mengen

$B_n \cap O = (B_n \setminus \{(0, 0)\}) \cap O$ offen in B . Für n hinreichend groß ist $O \cap B_n \neq \emptyset$ und somit sind $O_1 = B_n \cap O$ und $O_2 = O \setminus B_n = (O \cap [0, 1] \times \{0\}) \cup (\cup_{m \in \mathbb{N} \setminus \{n\}} O \cap B_m)$ disjunkt, nichtleer und offen mit $O = O_1 \cup O_2$. Damit ist O nicht zusammenhängend für alle offenen Umgebungen $x \in O \subseteq U_x$ und U_x ist eine Umgebung von x , die keine zusammenhängende Umgebung enthält. Also ist B nicht lokal zusammenhängend und damit nach Satz 2.1.10 auch nicht lokal wegzusammenhängend. \square

Beispiel 2.1.12: Der **Sinusraum** ist die Teilmenge

$$S = \{(x, \sin(1/x)) \mid 0 \neq x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

mit der Teilraumtopologie. Er ist zusammenhängend, aber weder lokal zusammenhängend noch wegzusammenhängend noch lokal wegzusammenhängend.



Beweis:

Nach Satz 2.1.5, 2. sind die Mengen $S_{\pm} = \{x \in S \mid \pm x_1 > 0\}$ zusammenhängend als Bilder von $I_- = (-\infty, 0)$ und $I_+ = (0, \infty)$ unter den stetigen Abbildungen $f_{\pm} : I_{\pm} \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto (x, \sin(1/x))$.

Sind $O_1, O_2 \subseteq S$ offen und disjunkt mit $S = O_1 \cup O_2$, so können wir o. B. d. A. $(0, 0) \in O_1$ annehmen. Wegen der Offenheit von O_1 gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $B_{\epsilon}((0, 0)) \cap S \subseteq O_1$, und daraus folgt $O_1 \cap S_{\pm} \supseteq B_{\epsilon}((0, 0)) \cap S_{\pm} \neq \emptyset$. Dann sind $\emptyset \neq O_1 \cap S_{\pm}$ und $S_{\pm} \setminus O_1 = S_{\pm} \cap O_2$ beide offen in S_{\pm} , und da S_{\pm} zusammenhängend ist, folgt $S_{\pm} \cap O_2 = \emptyset$. Da $(0, 0) \notin O_2$ folgt $O_2 = (O_2 \cap S_-) \cup (O_2 \cap S_+) = \emptyset$. Also ist S zusammenhängend.

Ähnlich wie für den Besenraum zeigt man aber, dass für $\epsilon < 1$ die Umgebung $B_{\epsilon}((0, 0)) \cap S$ von $(0, 0)$ keine zusammenhängende Umgebung von $(0, 0)$ enthält. Denn sie enthält nicht die Minima oder Maxima der Sinuskurve. Also ist S nicht lokal zusammenhängend und somit nach Satz 2.1.10 auch nicht lokal wegzusammenhängend. Der Sinusraum S ist auch nicht wegzusammenhängend, denn jede Abbildung $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$ mit $\gamma(0) = (0, 0)$ und $\gamma(1) = (\epsilon, \sin(1/\epsilon))$ für ein $\epsilon > 0$ ist unstetig in 0 (Nachweis: Übung). \square

Nachdem wir zwei intuitive Vorstellungen von Zusammenhang eines topologischen Raums in Definitionen umgewandelt und ihren Zusammenhang geklärt haben, stellt sich nun die Frage, wie man die entsprechenden Vorstellungen von *Komponenten* mathematisch erfasst. Unserer Vorstellung von *Komponente* liegt offensichtlich zugrunde, dass jeder Punkt eines topologischen Raums in genau einer Komponente des topologischen Raums liegen soll, also dass

die verschiedenen Komponenten eines topologischen Raums eine *Partition* und damit eine *Äquivalenzrelation* definieren. Im Fall des Zusammenhangs sollte sie dadurch gegeben sein, dass eine zusammenhängender Teilraum existiert, der zwei gegebene Punkte enthält. Im Fall des Wegzusammenhangs fordert man, dass die Punkte durch einen Weg verbindbar sind.

Satz 2.1.13: Für jeden topologischen Raum (X, \mathcal{O}_X) erhält man Äquivalenzrelationen auf X

$$\begin{aligned} x \sim_C y &\Leftrightarrow \text{es gibt einen zusammenhängenden Teilraum } M \subseteq X \text{ mit } x, y \in M \\ x \sim_W y &\Leftrightarrow \text{es gibt einen Weg } \gamma : [0, 1] \rightarrow X \text{ mit } \gamma(0) = x \text{ und } \gamma(1) = y. \end{aligned}$$

Die Äquivalenzklasse $C(x)$ von $x \in X$ bezüglich \sim_C heißt **Zusammenhangskomponente** von x , die Äquivalenzklasse $W(x)$ von x bezüglich \sim_W **Wegkomponente** von x .

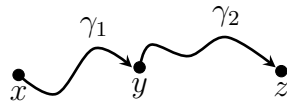
Beweis:

• Reflexiv: Offensichtlich ist $\{x\}$ zusammenhängend mit $x \in \{x\}$ und $\gamma : [0, 1] \rightarrow X, t \mapsto x$ ein Weg mit $\gamma(0) = \gamma(1) = x$. Also gilt $x \sim_C x$ und $x \sim_W x$.

• Symmetrisch: \sim_C ist offensichtlich symmetrisch bezüglich x und y . Für \sim_W betrachtet man zu einem Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$ die Abbildung $\bar{\gamma} : [0, 1] \rightarrow X, t \mapsto \gamma(1 - t)$, die stetig ist als Verkettung stetiger Abbildungen und damit ebenfalls ein Weg mit $\bar{\gamma}(0) = \gamma(1) = y$ und $\bar{\gamma}(1) = \gamma(0) = x$.

• Transitiv: Für die Äquivalenzrelation \sim_C folgt dies aus Satz 2.1.5, 3. Denn ist $x \sim_C y$ und $y \sim_C z$, so gibt es zusammenhängende Teilräume $M, N \subseteq X$ mit $x, y \in M$ und $y, z \in N$. Da $y \in M \cap N$ folgt mit Satz 2.1.5, 3., dass auch $M \cup N$ zusammenhängend ist mit $x, z \in M \cup N$.

Für die Äquivalenzrelation \sim_W folgt dies durch Aneinanderhängen von Wegen. Ist nämlich $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow X$ ein Weg von x nach y und $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow X$ ein Weg von y nach z , so erhält man einen neuen Weg $\gamma_2 \star \gamma_1$, indem man zuerst γ_1 und dann γ_2 jeweils mit der doppelten Geschwindigkeit durchläuft. Dies entspricht der nach Aufgabe 19 stetigen Abbildung

$$\gamma_2 \star \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow X, \quad t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2t - 1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$


mit $\gamma_2 \star \gamma_1(0) = \gamma_1(0) = x$ und $\gamma_2 \star \gamma_1(1) = \gamma_2(1) = z$. Diese ist ein Weg von x nach z . \square

Wie jede Äquivalenzrelation definieren die Äquivalenzrelationen \sim_C und \sim_W Partitionen der Menge X . Für alle Punkte $x, y \in X$ gilt entweder $C(x) = C(y)$ oder $C(x) \cap C(y) = \emptyset$ sowie $X = \cup_{x \in X} C(x)$. Ebenso erhält man entweder $W(x) = W(y)$ oder $W(x) \cap W(y) = \emptyset$ sowie $X = \cup_{x \in X} W(x)$. Jeder topologische Raum ist also die disjunkte Vereinigung seiner Zusammenhangskomponenten und die disjunkte Vereinigung seiner Wegkomponenten. Da wegzusammenhängende Teilräume $M \subseteq X$ nach Satz 2.1.10 auch immer zusammenhängend sind, gilt ausserdem $W(x) \subseteq C(x)$ für alle $x \in X$.

Beispiel 2.1.14:

1. Die Wegkomponenten und Zusammenhangskomponenten des Teilraums $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ sind genau die Mengen $\{q\}$ mit $q \in \mathbb{Q}$. Sie sind abgeschlossen, aber nicht offen.

2. Der Sinusraum S aus Beispiel 2.1.12 besitzt nur eine Zusammenhangskomponente, nämlich S selbst. Seine Wegkomponenten sind genau die Mengen S_+ , S_- und $\{(0,0)\}$. Die Wegkomponente $\{(0,0)\}$ ist abgeschlossen, die Wegkomponenten S_{\pm} sind offen.
3. Für den Teilraum $X = \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ gilt $W(1/n) = C(1/n) = \{1/n\}$ sowie $W(0) = C(0) = \{0\}$. Die Komponenten $W(1/n) = \{1/n\}$ für $n \in \mathbb{N}$ sind offen und abgeschlossen in X , die Komponente $W(0) = \{0\}$ ist abgeschlossen, aber nicht offen.

Aus der Definition und den Beispielen erkennt man, dass Wegkomponenten und Zusammenhangskomponenten, respektive, wegzusammenhängend und zusammenhängend sind. Sie stimmen nicht immer überein. Ebenso sieht man, dass in allen Beispielen die Zusammenhangskomponenten abgeschlossen sind, während dies für die Wegkomponenten nicht unbedingt der Fall ist. In allen betrachteten Beispielen sind genau die lokal (weg)zusammenhängenden (Weg)zusammenhangskomponenten offen. Außerdem stimmen in allen Fällen die lokal wegzusammenhängenden Zusammenhangskomponenten mit den Zusammenhangskomponenten überein. Dies liegt nicht an der Auswahl der Beispiele, sondern gilt allgemein.

Satz 2.1.15: Für jeden topologischen Raum (X, \mathcal{O}_X) und jeden Punkt $x \in X$ gilt:

1. Die Zusammenhangskomponente $C(x)$ ist die Vereinigung aller zusammenhängenden Mengen $M \subseteq X$ mit $x \in M$. Sie ist abgeschlossen und zusammenhängend.
2. Ist (X, \mathcal{O}_X) lokal zusammenhängend, so ist $C(x)$ auch offen.
3. Die Wegkomponente $W(x)$ ist die Vereinigung aller wegzusammenhängenden Mengen $M \subseteq X$ mit $x \in M$. Sie ist wegzusammenhängend.
4. Ist (X, \mathcal{O}_X) lokal wegzusammenhängend, so gilt $W(x) = C(x)$ für alle $x \in X$, und die Wegkomponente $W(x) = C(x)$ ist offen und abgeschlossen.

Beweis:

1. Die erste Behauptung folgt unmittelbar aus der Definition von $C(x)$. Dass $C(x)$ zusammenhängend ist folgt daher aus Satz 2.1.5, 3. Um zu zeigen, dass $C(x)$ abgeschlossen ist, reicht es zu zeigen, dass auch der Abschluss $\overline{C(x)}$ zusammenhängend ist. Dies impliziert dann $\overline{C(x)} \subseteq C(x)$, so dass $C(x)$ nach Satz 1.1.18 abgeschlossen ist.

Sei dazu $f : \overline{C(x)} \rightarrow \{1, 2\}$ stetig. Dann ist nach Beispiel 1.3.8, 3. auch die Einschränkung $f|_{C(x)} : C(x) \rightarrow \{1, 2\}$ stetig und damit nach Satz 2.1.5, 1. konstant mit Wert $j \in \{1, 2\}$. Aus (3) folgt nun $f(\overline{C(x)}) \subseteq \overline{f(C(x))} = \{j\}$. Damit ist also jede stetige Abbildung $f : \overline{C(x)} \rightarrow \{1, 2\}$ konstant, und nach Satz 2.1.5, 1. ist $\overline{C(x)}$ zusammenhängend.

2. Ist (X, \mathcal{O}_X) lokal zusammenhängend, so hat jeder Punkt $x \in X$ eine zusammenhängende Umgebung $U_x \subseteq C(x)$, also ist $C(x)$ eine Umgebung von x . Für alle $y \in C(x)$ ist dann auch $C(x) = C(y)$ eine Umgebung von y und $C(x)$ daher offen nach Bemerkung 1.1.6, 6.

3. Für jeden Punkt $y \in W(x)$ und jeden Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ von x nach y gilt $\gamma([0, 1]) \subseteq W(x)$, denn $\gamma_t : [0, 1] \rightarrow X, s \mapsto \gamma(st)$ ist ein Weg von x nach $\gamma(t)$. Also ist $\gamma : [0, 1] \rightarrow W(x), t \mapsto \gamma(t)$ ein Weg von x nach y in $W(x)$, und somit ist $W(x)$ wegzusammenhängend.

Ist $M \subseteq X$ wegzusammenhängend mit $x \in M$, so sind alle Elemente von M in der Äquivalenzklasse $W(x)$ von x enthalten, also $M \subseteq W(x)$. Da $W(x)$ selbst wegzusammenhängend ist, ist $W(x)$ also die Vereinigung aller wegzusammenhängenden Teilmengen von X , die x enthalten.

4. Ist (X, \mathcal{O}_X) lokal wegzusammenhängend, so besitzt jeder Punkt $x \in X$ eine wegzusammenhängende Umgebung $U_x \subseteq W(x)$. Also ist $W(x)$ eine Umgebung von x . Für alle $y \in W(x)$ ist dann auch $W(x) = W(y)$ eine Umgebung von y und $W(x)$ daher offen (Bemerkung 1.1.6).

Nun ist $C(x) = W(x) \dot{\cup} \cup_{y \in C(x) \setminus W(x)} W(y)$ eine disjunkte Vereinigung offener Teilmengen und $W(x)$ ist nicht leer. Da $C(x)$ zusammenhängend ist, muß daher die zweite Menge leer sein, also $C(x) = W(x)$ gelten. \square

Direkt aus diesen Aussagen erhält man noch zwei Korollare, die einerseits eine hinreichende Bedingung dafür angeben, unter der ein zusammenhängender topologischer Raum auch wegzusammenhängend ist, und andererseits die Aussage aus Bemerkung 2.1.2 verallgemeinern, dass die leere Menge und der Raum selbst die einzigen gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Teilmengen eines zusammenhängenden topologischen Raums sind.

Korollar 2.1.16: Ein lokal wegzusammenhängender topologischer Raum ist wegzusammenhängend genau dann, wenn er zusammenhängend ist.

Beweis:

Ist (X, \mathcal{O}) lokal wegzusammenhängend, so gilt $W(x) = C(x)$ für alle $x \in X$ nach Satz 2.1.15. Der topologische Raum (X, \mathcal{O}) ist zusammenhängend genau dann, wenn $C(x) = X$ für alle $x \in X$ und wegzusammenhängend genau dann, wenn $W(x) = X$ für alle $x \in X$. \square

Korollar 2.1.17: Ist eine Teilmenge eines topologischen Raums (X, \mathcal{O}_X) gleichzeitig offen und abgeschlossen, so ist sie eine Vereinigung von Zusammenhangskomponenten von X .

Beweis:

Übung (Aufgabe 31) \square

2.2 Trennung von Punkten in topologischen Räumen

Nachdem wir zwei Zusammenhangsbegriffe für topologische Räume entwickelt haben, beschäftigen wir uns nun mit *Trennung*, also der Frage, ob zwei Punkte oder Teilmengen eines topologischen Raums durch offene Teilmengen getrennt werden können, die nur eine der beiden Punkte oder Teilmengen enthalten. Ein Beispiel eines solchen Trennungsbegriffs ist der Begriff des Hausdorffraums aus Definition 1.1.5. Neben der Hausdorffeigenschaft sind aber noch andere Trennungssaxiome denkbar, indem man entweder die Forderungen in der Definition des Hausdorffraums abschwächt oder indem man die Definition verallgemeinert und statt Punkten auch abgeschlossene Mengen zulässt. Dies liefert die folgenden Trennungssaxiome, die in Abbildung 2 veranschaulicht werden.

Definition 2.2.1: (Trennungssaxiome)

Ein topologischer Raum (X, \mathcal{O}) heißt:

1. **T_0 -Raum**, wenn zu je zwei verschiedenen Punkten $x_1, x_2 \in X$ eine offene Menge $O \subseteq X$ existiert, die nur einen von beiden enthält.
2. **T_1 -Raum**, wenn zu je zwei verschiedenen Punkten $x_1, x_2 \in X$ eine offene Menge $O \subseteq X$ existiert, die x_1 , aber nicht x_2 enthält.

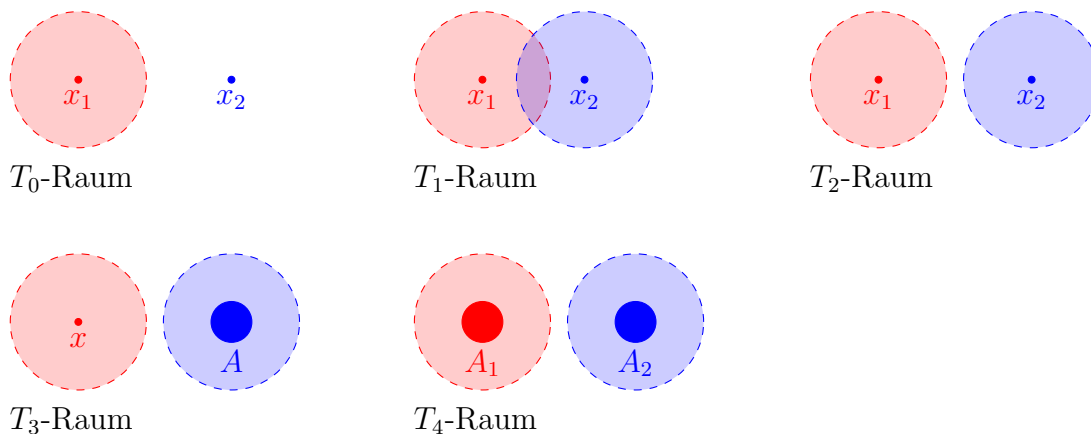


Abbildung 2: Verschiedene Trennungsbegriffe für einen topologischen Raum.

3. **T_2 -Raum** oder **Hausdorffraum**, wenn zu je zwei verschiedenen Punkten $x_1, x_2 \in X$ disjunkte offene Teilmengen $O_1, O_2 \subseteq X$ existieren, mit $x_i \in O_i$ für $i = 1, 2$.
4. **T_3 -Raum**, wenn zu jedem Punkt $x \in X$ und jeder abgeschlossenen Menge $A \subseteq X$ mit $x \notin A$ disjunkte offene Teilmengen $O_x, O_A \subseteq X$ existieren mit $x \in O_x, A \subseteq O_A$.
5. **T_4 -Raum**, wenn zu je zwei disjunkten abgeschlossenen Teilmengen $A_1, A_2 \subseteq X$ disjunkte offene Teilmengen $O_1, O_2 \subseteq X$ existieren mit $A_i \subseteq O_i$ für $i = 1, 2$.
6. **regulärer Raum**, wenn er ein T_1 -Raum und ein T_3 -Raum ist.
7. **normaler Raum**, wenn er ein T_2 -Raum und ein T_4 -Raum ist.

Die Motivation für diese Vielzahl von Trennungsbegriffen ist, dass für unterschiedliche Fragestellungen unterschiedliche Begriffe von Trennbarkeit relevant und notwendig sind. Die wichtigsten Trennungsbegriffe in Definition 2.2.1 sind der Begriff des Hausdorffraums und der Begriff des normalen und regulären topologischen Raums. Die Bezeichnungen T_0, \dots, T_4 für die Trennungssaxiome beziehen sich auf den russischen Topologen *Tychonoff*. Die Trennungssaxiome werden manchmal auch als Tychonoff-Axiome bezeichnet. Bevor wir Beispiele von topologischen Räumen mit diesen Trennungseigenschaften betrachten, klären wir zunächst den Zusammenhang dieser Trennungsbegriffe und leiten einige Aussagen her, die diese Axiome intuitiver machen und sich direkt aus Definition 2.2.1 ergeben.

Bemerkung 2.2.2:

1. In manchen Lehrbüchern wird nicht gefordert, dass ein normaler topologischer Raum die Bedingung T_2 erfüllt. Es gibt also zwei unterschiedliche Konzepte von Normalität.
2. Die Bedingung an einen T_1 -Raum ist äquivalent zu der Forderung, dass einelementige Teilmengen von X abgeschlossen sind.

Denn ist jede einelementige Teilmenge abgeschlossen, so sind für zwei Punkte $x_1 \neq x_2 \in X$ die Menge $O = X \setminus \{x_2\}$ offen mit $x_1 \in O$ und $x_2 \notin O$, und T_1 ist erfüllt. Gilt umgekehrt T_1 , so gibt es zu jedem Punkt $x \in X$ und $y \in X \setminus \{x\}$ eine offene Menge $O_y \subseteq X$ mit $y \in O_y \subseteq X \setminus \{x\}$. Damit ist $X \setminus \{x\} = \cup_{y \in X \setminus \{x\}} O_y$ offen als Vereinigung offener Mengen und $\{x\}$ abgeschlossen.

3. Offensichtlich gilt $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$. Gilt T_1 , so folgt mit 2. auch $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2$. Also gilt insbesondere

- normal $\Rightarrow T_0, T_1, T_2, T_3, T_4$,
- regulär $\Rightarrow T_0, T_1, T_2, T_3$ und
- normal \Rightarrow regulär.

4. Die Bedingung T_3 ist äquivalent zu der Forderung T'_3 : Jede offene Umgebung eines Punktes $x \in X$ enthält eine abgeschlossene Umgebung von x .

Denn für jede abgeschlossenen Teilmenge $A \subseteq X$ mit $x \notin A$ ist $X \setminus A$ eine offene Umgebung von x . Gilt T'_3 , so gibt es eine abgeschlossene Umgebung $V \in \mathcal{U}(x)$ mit $V \subseteq X \setminus A$. Da $V \in \mathcal{U}(x)$, gibt es eine offene Menge $O_x \subseteq X$ mit $x \in O_x \subseteq V$, die dann zusammen mit $O_A := X \setminus V \supseteq A$ die Bedingung in T_3 erfüllt.

Umgekehrt ist für jede offene Umgebung U von $x \in X$ die Menge $A := X \setminus U$ abgeschlossen mit $x \notin A$. Gilt T_3 , so gibt es also disjunkte offene Mengen $O_x, O_A \subseteq X$ mit $x \in O_x$ und $A \subseteq O_A$, und damit ist $X \setminus O_A$ abgeschlossen mit $x \in O_x \subseteq X \setminus O_A \subseteq X \setminus A = U$, also eine abgeschlossene Umgebung von x , die in U enthalten ist.

5. Analog kann man zeigen, dass die Bedingung T_4 äquivalent ist zu der Forderung, dass zu jeder abgeschlossenen Menge $A \subseteq X$ und jeder offenen Menge $O \subseteq X$ mit $A \subseteq O$ eine offene Menge $U \subseteq X$ mit $A \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq O$ existiert (Aufgabe 32).

Beispiel 2.2.3:

1. Jeder metrische Raum (X, d) mit der metrischen Topologie ist normal.

Zunächst ist die metrische Topologie hausdorffsch nach Satz 1.1.10. Zum Nachweis von T_4 betrachten wir abgeschlossene Mengen $A_1, A_2 \subseteq X$. Ist $A_1 = \emptyset$, so kann man $O_1 = \emptyset$ und $O_2 = X$ wählen, und analog für $A_2 = \emptyset$. Sind $A_1, A_2 \neq \emptyset$ disjunkt und abgeschlossen, so sind die Abbildungen

$$d_{A_i} : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto d_{A_i}(x) = \inf\{d(x, y) \mid y \in A_i\}$$

und damit auch die Abbildung $d_{12} = d_{A_1} - d_{A_2} : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig (Übung). Also sind

$$\begin{aligned} O_1 &= d_{12}^{-1}((-\infty, 0)) = \{x \in X \mid d_{A_1}(x) < d_{A_2}(x)\} \\ O_2 &= d_{12}^{-1}((0, \infty)) = \{x \in X \mid d_{A_2}(x) < d_{A_1}(x)\} \end{aligned}$$

offen als Urbilder offener Intervalle, disjunkt, und es gilt $A_i \subseteq O_i$.

2. Eine unendliche Menge X mit der kofiniten Topologie aus Beispiel 1.1.4, 3. erfüllt T_1 , aber nicht T_2 .

Denn für $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ sind $O_1 = X \setminus \{x_2\}$ und $O_2 = X \setminus \{x_1\}$ offene Mengen mit $x_i \in O_i$ und $x_j \notin O_i$ für $i \neq j$. Der topologische Raum (X, \mathcal{O}_{kof}) ist aber nach Beispiel 1.1.7, 3. nicht hausdorffsch.

3. Die Menge \mathbb{R} mit der Topologie $\mathcal{O} = \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ erfüllt T_0 , aber nicht T_1 .

Denn zu $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$ ist $(-\infty, x_2)$ eine offene Menge, die x_1 , aber nicht x_2 enthält. Aber jede offene Menge, die x_2 enthält, enthält auch x_1 .

Die wichtigsten der sieben Trennungsbegriffe in Definition 2.2.1 sind der Begriff des Hausdorffraums bzw. T_2 -Raums und der Begriff des normalen Raums. Der Begriff des regulären Raums ist eng mit dem Begriff des normalen Raums verwandt, und für topologische Räume, die das 2. Abzählbarkeitsaxiom erfüllen, stimmen die beiden Begriffe überein.

Lemma 2.2.4: Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum, der das 2. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Dann ist (X, \mathcal{O}) genau dann regulär, wenn (X, \mathcal{O}) normal ist.

Beweis:

Nach Bemerkung 2.2.2, 3. reicht es, zu zeigen, dass jeder reguläre topologische Raum, der das 2. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, ein T_4 -Raum ist. Sei also (X, \mathcal{O}) regulär, \mathcal{B} eine abzählbare Basis der Topologie und $A_1, A_2 \subseteq X$ disjunkt und abgeschlossen.

Da (X, \mathcal{O}) ein T_3 -Raum ist, gibt es zu jedem Punkt $x \in A_1$ disjunkte offene Mengen $O_x, O_2 \subseteq X$ mit $x \in O_x$ und $A_2 \subseteq O_2$. Da O_2 offen ist und $O_x \subseteq X \setminus O_2$, folgt daraus $x \in O_x \subseteq \overline{O_x} \subseteq X \setminus O_2 = X \setminus A_2$.

Da (X, \mathcal{O}) das 2. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, können wir $O_x \in \mathcal{B}$ wählen. Indem wir dies für jeden Punkt $x \in A_1$ tun, erhalten wir eine abzählbare Familie $(O_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ offener Mengen $O_n \in \mathcal{B}$ mit $\overline{O_n} \subseteq X \setminus A_2$ und $A_1 \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} O_n$. Indem wir das selbe Argument auf Punkte in $x \in A_2$ anwenden, erhalten wir dann auch eine abzählbare Familie $(U_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ offener Mengen $U_n \in \mathcal{B}$ mit $\overline{U_n} \subseteq X \setminus A_1$ und $A_2 \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} U_n$. Damit sind auch die Mengen

$$O'_n = O_n \setminus \bigcup_{i=0}^n \overline{U}_i = O_n \cap (\bigcap_{i=0}^n X \setminus \overline{U}_i) \quad U'_n = U_n \setminus \bigcup_{i=0}^n \overline{O}_i = U_n \cap (\bigcap_{i=0}^n X \setminus \overline{O}_i)$$

offen als endliche Schnitte offener Mengen und damit auch ihre Vereinigungen $O = \bigcup_{n=0}^{\infty} O'_n$ und $U = \bigcup_{n=0}^{\infty} U'_n$. Per Definition der Mengen U'_n und O'_m gilt $O'_n \cap U'_m = \emptyset$ für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$ und damit auch $O \cap U = \emptyset$. Da $A_1 \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} O_n$, $\overline{U}_n \subseteq X \setminus A_1$ und $A_2 \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} U_n$, $\overline{O}_n \subseteq X \setminus A_2$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, gilt außerdem $A_1 \subseteq O$ und $A_2 \subseteq U$, und damit ist T_4 erfüllt. \square

Obwohl die Begriffe des normalen Raums und des regulären Raums eng zusammenhängen, kann man sich nicht auf die Betrachtung normaler Räume beschränken. Der Grund ist, dass sich die Eigenschaft ein T_0 -, T_1 -, T_2 - oder T_3 -Raum zu sein, auf Teilräume topologischer Räume vererbt, während dies für die Eigenschaft, ein T_4 -Raum zu sein, nicht unbedingt der Fall ist.

Lemma 2.2.5: Sei (X, \mathcal{O}) ein T_k -Raum mit $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Dann ist auch jede Teilmenge $M \subseteq X$ mit der Teilraumtopologie ein T_k -Raum.

Beweis:

Wir beweisen die Aussage für T_3 . Die Beweise für die anderen Fälle sind analog. Seien $x \in M$ und $A \subseteq M$ abgeschlossen mit $x \notin A$. Dann gibt es per Definition der Teilraumtopologie eine abgeschlossene Teilmenge $A' \subseteq X$ mit $A' \cap M = A$, und dann ist $x \notin A'$. Da X ein T_3 -Raum ist, gibt es disjunkte offene Mengen $O'_x, O'_A \subseteq X$ mit $x \in O'_x$ und $A' \subseteq O'_A$. Per Definition der Teilraumtopologie sind dann auch $O_A = O'_A \cap M$ und $O_x = O'_x \cap M$ disjunkt, offen bezüglich der Teilraumtopologie mit $x \in O_x$ und $A \subseteq O_A$. \square

Dass Hausdorffräume wichtig sind und viele wünschenswerte Eigenschaften besitzen, hat sich bereits in der Analysis und in dieser Vorlesung gezeigt. Wir konzentrieren uns nun auf normale topologische Räume. Eine wichtige Motivation, normale topologische Räume zu betrachten, ist

die Möglichkeit, stetige reellwertige Abbildungen zu konstruieren, die auf zwei vorgegebenen disjunkten abgeschlossenen Teilmengen die Werte 0 und 1 annehmen, und stetige reellwertige Funktionen auf abgeschlossenen Teilmengen stetig auf den ganzen Raum fortzusetzen.

Dies ist oft dann von Bedeutung, wenn man einzelne Größen wie Abbildungen oder Vektorfelder *lokal*, auf Umgebungen einzelner Punkt definieren kann und die lokalen Größen dann zu einer Größe auf dem ganzen Raum kombinieren möchte. Ebenso sind diese Fortsetzungen nützlich, wenn man zeigen will, dass solche Größen nur von kleinen Umgebungen eines Punktes abhängen. Dazu kann man sie nämlich mit einer reellwertigen stetigen Abbildung multiplizieren, die auf einer vorgegebenen Teilmenge konstant gleich 1 ist und außerhalb auf 0 abfällt. Die zwei wichtigsten Fortsetzungsaussagen über stetige Abbildungen in normalen Räumen sind das *Lemma von Urysohn* und der *Satz von Tietze*.

Satz 2.2.6: (Lemma von Urysohn)

Ein Hausdorffraum (X, \mathcal{O}) ist genau dann normal, wenn zu je zwei disjunkten, abgeschlossenen Mengen $A_1, A_2 \subseteq X$ eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow [0, 1]$ mit $f(x) = 0$ für alle $x \in A_1$ und $f(x) = 1$ für alle $x \in A_2$ existiert. Eine solche Abbildung heißt **Urysohn-Funktion**.

Beweis:

“ \Leftarrow ”: Ist (X, \mathcal{O}) ein Hausdorffraum und $f : X \rightarrow [0, 1]$ eine Urysohn-Funktion für zwei disjunkte, abgeschlossene Mengen $A_1, A_2 \subseteq X$, so kann man die disjunkten Mengen $O_1 = f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$ und $O_2 = f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$ betrachten. Dann sind O_1, O_2 offen als Urbilder der in $[0, 1]$ offenen Mengen $[0, \frac{1}{2})$ und $(\frac{1}{2}, 1]$ unter der stetigen Abbildung f , und es gilt $A_i \subseteq O_i$. Also ist (X, \mathcal{O}) normal.

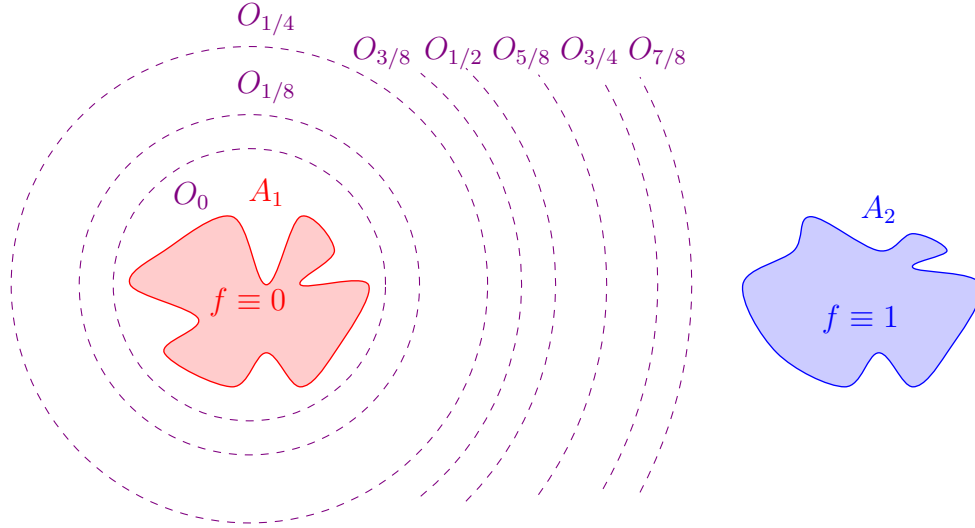
“ \Rightarrow ”: Sei (X, \mathcal{O}) ein normaler topologischer Raum und $A_1, A_2 \subseteq X$ disjunkt und abgeschlossen. Ist $A_1 = \emptyset$ ($A_2 = \emptyset$), so kann man $f \equiv 1$ ($f \equiv 0$) als Urysohn-Funktion wählen. Sind $\emptyset \neq A_1, A_2$, so konstruiert man eine Urysohn-Funktion mit der Menge $D \subseteq [0, 1]$ der **dyadischen Zahlen**:

$$D = \cup_{n \in \mathbb{N}_0} D_n \subseteq [0, 1] \quad \text{mit} \quad D_n = \{k \cdot 2^{-n} \mid k = 0, 1, 2, 3, \dots, 2^n\} \subseteq [0, 1]$$

Die Idee ist es, jedem Element $r \in D$ eine offene Menge $O_r \subseteq X$ zuzuordnen, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (i) $A_1 \subseteq O_r$ für alle $r \in D$
- (ii) $A_2 \subseteq O_1 := X$ und $A_2 \cap \overline{O_r} = \emptyset$ für alle $r \in D \setminus \{1\}$
- (iii) $\overline{O_s} \subseteq O_r$ für alle $s < r \in D$.

Die offenen Mengen O_r sollen als Niveaumengen dienen, auf denen die Abbildung $f : X \rightarrow [0, 1]$ den Wert r annimmt. Um so tatsächlich eine stetige Abbildung zu erhalten ist es zentral, auch die Kontrolle über die Abschlüsse der Mengen O_r zu behalten, da dort sonst Sprungstellen der Abbildung f entstehen können, die ihre Stetigkeit zerstören. Aus diesem Grund fordert man in (iii), dass nicht nur $O_s \subseteq O_r$ für $s \leq r$ gilt, sondern auch $\overline{O_s} \subseteq O_r$.



Dann definiert man $f : X \rightarrow [0, 1]$ durch $f(x) = \inf\{r \in D \mid x \in O_r\} \in [0, 1]$. Die Abbildung f ist dann wegen $O_1 = X$ definiert, aus (i) folgt $f(x) = 0$ für alle $x \in A_1$ und aus (ii) folgt $f(x) = 1$ für $x \in A_2$. Zu zeigen ist nun, dass (a) solche offene Mengen $O_r \subseteq X$ existieren und dass (b) die zugehörige Abbildung f stetig ist.

(a) Wir konstruieren die Mengen O_r induktiv mit Hilfe von T_4 , in der Form von Bemerkung 2.2.2, 5. Da A_1, A_2 abgeschlossen und disjunkt sind, ist $X \setminus A_2$ eine offene Umgebung von A_1 . Nach T_4 existiert eine offene Menge O_0 mit

$$A_1 \subseteq O_0 \subseteq \overline{O_0} \subseteq X \setminus A_2.$$

Dann sind (i)-(iii) für O_0 und $O_1 := X$ erfüllt.

Seien nun für alle $s \in D_{n-1}$ offene Mengen $O_s \subseteq X$ konstruiert, die (i)-(iii) erfüllen, und sei $r \in D_n \setminus D_{n-1}$. Dann gilt $r_{\pm} := r \pm 2^{-n} \in D_{n-1}$. Ist $r_+ = 1$, so ist $X \setminus A_2$ eine offene Umgebung von $\overline{O_{r_-}}$, und wir finden mit T_4 eine offene Menge O_r mit

$$\overline{O_{r_-}} \subseteq O_r \subseteq \overline{O_r} \subseteq X \setminus A_2.$$

Ist $r_+ < 1$, sind sind beide Mengen $O_{r_{\pm}}$ offen mit $A_1 \subseteq O_{r_-} \subseteq \overline{O_{r_-}} \subseteq O_{r_+} \subseteq X \setminus A_2$, und wir finden mit T_4 eine offene Menge O_r mit

$$\overline{O_{r_-}} \subseteq O_r \subseteq \overline{O_r} \subseteq O_{r_+}.$$

Da die Mengen $(O_s)_{s \in D_{n-1}}$ (i)-(iii) erfüllen, folgt aus der Konstruktion der Mengen O_r für $r \in D_n \setminus D_{n-1}$ sofort, dass auch die Mengen $(O_r)_{r \in D_n}$ auch (i)-(iii) erfüllen.

(b) Um zu zeigen, dass $f : X \rightarrow [0, 1]$ stetig ist, benutzen wir die Aussagen

$$f(x) > s \Rightarrow x \in X \setminus \overline{O_s} \quad \text{und} \quad f(x) < r \Rightarrow x \in O_r \quad \forall r, s \in D. \quad (4)$$

Diese verifiziert man wie folgt: Ist $f(x) = \inf\{r \in D \mid x \in O_r\} > s$, so gibt es ein $r \in D$ mit $s < r < f(x)$. Mit der Definition von f und mit (iii) folgt $x \in X \setminus O_r \subseteq X \setminus \overline{O_s}$. Gilt $f(x) < r$, so gibt es ein $s \in D$ mit $f(x) < s < r$, und mit der Definition von f und (iii) folgt $x \in O_s \subseteq O_r$.

Da die Intervalle $[0, a)$ und $(a, 1]$ für $a \in (0, 1)$ nach Beispiel 1.2.7 eine Subbasis der Topologie auf $[0, 1]$ bilden, ist nach Lemma 1.3.4 nur noch zu zeigen, dass die Mengen $f^{-1}([0, a))$ und

$f^{-1}((a, 1])$ offen sind für alle $a \in (0, 1)$. Sei dazu zunächst $x \in f^{-1}((a, 1])$. Dann gibt es ein $r \in D$ mit $a < r < f(x)$, und mit (4) folgt $x \in X \setminus \overline{O_r}$. Die offene Menge $U_x := X \setminus \overline{O_r}$ ist eine Umgebung von x , und für alle $y \in U_x$ gilt $f(y) \geq r > a$ nach (4) und damit $U_x \subseteq f^{-1}((a, 1])$. Also gibt es zu jedem Punkt $x \in f^{-1}((a, 1])$ auch eine offene Umgebung $U_x \subseteq f^{-1}((a, 1])$. Also ist $f^{-1}((a, 1])$ offen als Vereinigung dieser offenen Umgebungen.

Ist $x \in f^{-1}([0, a))$, so gibt es ein $r \in D$ mit $f(x) < r < a$, und mit (4) folgt $x \in O_r$. Die offene Menge $U_x := O_r$ ist eine Umgebung von x , und für jeden Punkt $y \in U_x$ gilt $f(y) \leq r < a$ nach (4) und somit $U_x \subseteq f^{-1}([0, a))$. Also gibt es zu jedem Punkt $x \in f^{-1}([0, a))$ eine offene Umgebung $U_x \subseteq f^{-1}([0, a))$, und $f^{-1}([0, a))$ ist offen als Vereinigung dieser offenen Umgebungen. \square

Mit Hilfe des Lemmas von Urysohn kann man nun für *jede* stetige reellwertige Funktion auf einer abgeschlossenen Teilmenge eines normalen topologischen Raums eine stetige Fortsetzung auf dem ganzen Raum konstruieren. Dazu konstruiert man mit Hilfe von Urysohn-Funktionen eine Folge von auf dem ganzen Raum definierten Treppenfunktionen, die die Funktion auf dem Teilraum approximieren und eine gleichmäßig konvergente Reihe bilden.

Satz 2.2.7: (Fortsetzungssatz von Tietze)

Sei (X, \mathcal{O}) ein normaler topologischer Raum, $A \subseteq X$ abgeschlossen und $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es eine stetige Abbildung $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F|_A = f$.

Beweis:

1. Wir nehmen zunächst an, dass $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist mit $f(A) \subseteq [-1, 1]$ und konstruieren eine stetige Abbildung $F : X \rightarrow [-1, 1]$ mit $F|_A = f$, indem wir $f : A \rightarrow [-1, 1]$ durch eine Reihe approximieren. Dazu konstruieren wir eine Folge $(F_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ stetiger Abbildungen

$$F_n : X \rightarrow [-\frac{1}{2}(\frac{2}{3})^n, \frac{1}{2}(\frac{2}{3})^n] \quad \text{mit} \quad |f(a) - \sum_{k=1}^n F_k(a)| \leq (\frac{2}{3})^n \quad \forall a \in A, n \in \mathbb{N}_0 \quad (5)$$

mit $F_0 \equiv 0$. Da $\sup_{x \in X} |F_n(x) - F_m(x)| \leq (\frac{2}{3})^{\min(m,n)}$, konvergiert $F = \sum_{k=0}^{\infty} F_k$ gleichmäßig mit

- $|F(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |F_k(x)| \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{2}{3})^k = 1$ für $x \in X$ und
- $F(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n F_k(a) = f(a)$ für $a \in A$.

Zur Konstruktion der Folge $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ setzen wir $F_0 \equiv 0$, was die Bedingungen in (5) erfüllt. Sind bereits Abbildungen F_0, F_1, \dots, F_n konstruiert, die die Bedingungen in (5) erfüllen, so betrachten wir zur Konstruktion von F_{n+1} die disjunkten Mengen

$$A_1^n := \{a \in A \mid f(a) - \sum_{k=1}^n F_k(a) \in [\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n, (\frac{2}{3})^n]\}$$

$$A_2^n := \{a \in A \mid f(a) - \sum_{k=1}^n F_k(a) \in [-\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n, -\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n]\},$$

die wegen der Stetigkeit der Abbildungen f und $F_k|_A$ abgeschlossen in A und wegen der Abgeschlossenheit von A damit auch abgeschlossen in X sind. Nach dem Lemma von Urysohn gibt es eine Urysohn-Funktion $h_n : X \rightarrow [0, 1]$ mit $h_n|_{A_1^n} \equiv 0$ und $h_n|_{A_2^n} \equiv 1$, und wir setzen

$$F_{n+1} : X \rightarrow [-\frac{1}{2}(\frac{2}{3})^{n+1}, \frac{1}{2}(\frac{2}{3})^{n+1}], \quad x \mapsto (\frac{2}{3})^{n+1}(\frac{1}{2} - h_n).$$

Dann ist F_{n+1} offensichtlich stetig mit

$$F_{n+1}(a) = \frac{1}{2}(\frac{2}{3})^{n+1} \quad \text{für} \quad a \in A_1^n \quad \text{und} \quad F_{n+1}(a) = -\frac{1}{2}(\frac{2}{3})^{n+1} \quad \text{für} \quad a \in A_2^n.$$

Außerdem gilt $|f(a) - \sum_{k=1}^{n+1} F_k(a)| \leq (\frac{2}{3})^{n+1}$, denn für $a \in A_1^n \cup A_2^n$ erhält man aus der Induktionsannahme und der Definition von F_{n+1}

$$\begin{aligned} |f(a) - \sum_{k=0}^{n+1} F_k(a)| &= |f(a) - \sum_{k=0}^n F_k(a) - \frac{2^n}{3^{n+1}}| \leq (\frac{2}{3})^n - \frac{2^n}{3^{n+1}} = (\frac{2}{3})^{n+1} & \forall a \in A_1^n \\ |f(a) - \sum_{k=0}^{n+1} F_k(a)| &= |f(a) - \sum_{k=0}^n F_k(a) + \frac{2^n}{3^{n+1}}| \leq (\frac{2}{3})^n + \frac{2^n}{3^{n+1}} = (\frac{2}{3})^{n+1} & \forall a \in A_2^n. \end{aligned}$$

Für $a \in A \setminus (A_1^n \cup A_2^n)$ gilt $f(a) - \sum_{k=0}^n F_k(a) \in [-\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n, \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n]$ per Induktionsannahme (5) und per Definition von A_1^n, A_2^n . Daraus folgt

$$|f(a) - \sum_{k=0}^{n+1} F_k(a)| \leq |f(a) - \sum_{k=0}^n F_k(a)| + |F_{n+1}(a)| \leq \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n + \frac{1}{2}(\frac{2}{3})^{n+1} = (\frac{2}{3})^{n+1}.$$

Damit ist die Aussage für stetige Abbildungen $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(A) \subset [-1, 1]$ bewiesen.

2. Sei nun $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige stetige Abbildung. Dann gibt es nach Beispiel 1.3.8, 8. einen Homöomorphismus $\phi : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$. Anwendung von 1. auf die stetige Abbildung $f' = \phi \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f'(A) \subseteq (-1, 1)$ liefert eine stetige Abbildung $F' : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F'|_A = f'$ und $F'(X) \subseteq [-1, 1]$. Um mit ϕ^{-1} verketteten zu können, muss man den Bildbereich auf das Intervall $(-1, 1)$ verkleinern. Durch Multiplikation von F' mit einer Urysohn-Funktion $h : X \rightarrow [0, 1]$ für die abgeschlossenen und wegen $F'(A) = f(A) \subseteq (-1, 1)$ disjunkten Mengen $A_1 = F'^{-1}(\{\pm 1\})$ und $A_2 = A$ erhält man eine stetige Abbildung $F'' = h \cdot F' : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F''|_A = f'$ und $F''(X) \subseteq (-1, 1)$. Dann ist $F = \phi^{-1} \circ F'' : X \rightarrow \mathbb{R}$ die gesuchte stetige Abbildung mit $F|_A = f$. \square

3 Konstruktion von topologischen Räumen

3.1 Initial und Finaltopologie

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der systematischen Konstruktion von Topologien und dem Transport einer gegebenen Topologie durch Abbildungen. Mit dieser Methode kann man bekannte Konstruktionen mit Mengen, wie die Bildung von Teilmengen, Quotientenmengen bezüglich Äquivalenzrelationen, disjunkte Vereinigungen und kartesische Produkte von Mengen auf topologische Räume erweitern. Dabei muss man sich auch nicht auf eine einzelne Abbildung beschränken, sondern kann Familien von Abbildungen in eine oder aus einer gegebenen Menge betrachten.

Ist eine Familie $(f_i)_{i \in I}$ von Abbildungen $f_i : X \rightarrow Y_i$ aus einer Menge X in topologische Räume (Y_i, \mathcal{O}_i) gegeben, so ist es naheliegend die Topologie auf X durch die Forderung zu definieren, dass die Urbilder $f_i^{-1}(O)$ aller offenen Mengen $O \in \mathcal{O}_i$ für $i \in I$ offen sind. Diese Forderung macht die Abbildungen f_i stetig. Dabei geht man sparsam vor und nimmt nur so viele Mengen in die Topologie auf X auf, wie für die Stetigkeit der Abbildungen f_i erforderlich. In anderen Worten, man betrachtet die von allen Urbildern $f_i^{-1}(O)$ offener Mengen $O \in \mathcal{O}_i$ erzeugte Topologie auf X . Für jede Verfeinerung dieser Topologie sind ebenfalls alle Abbildungen f_i stetig, während jede echte Vergrößerung mindestens eine dieser Abbildungen unstetig macht.

Ist umgekehrt eine Familie $(g_i)_{i \in I}$ von Abbildungen $g_i : Y_i \rightarrow X$ aus topologischen Räumen (Y_i, \mathcal{O}_i) in eine Menge X gegeben, so ist es naheliegend zu fordern, dass genau die Teilmengen $O \subseteq X$ offen sind, für die alle Urbilder $g_i^{-1}(O) \subseteq Y_i$ offen sind. Dass man so tatsächlich eine Topologie auf X erhält, folgt aus den Bedingungen $g_i^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $g_i^{-1}(X) = Y_i$ sowie $g_i^{-1}(\cup_{j \in J} O_j) = \cup_{j \in J} g_i^{-1}(O_j)$ und $g_i^{-1}(\cap_{j \in J} O_j) = \cap_{j \in J} g_i^{-1}(O_j)$ für alle Familien $(O_j)_{j \in J}$ von Teilmengen $O_j \subseteq X$. Jede Vergrößerung dieser Topologie ändert nichts an der Stetigkeit der Abbildungen $g_i : Y_i \rightarrow X$, während jede echte Verfeinerung mindestens eine unstetig macht.

Definition 3.1.1: Sei X eine Menge, I eine Indexmenge und $(Y_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ eine durch I indizierte Familie topologischer Räume.

1. Die durch eine Familie $(f_i)_{i \in I}$ von Abbildungen $f_i : X \rightarrow Y_i$ induzierte **Initialtopologie** auf X ist die von den Urbildern aller offenen Mengen in Y_i erzeugte Topologie auf X

$$\mathcal{O}_{ini} = \langle \cup_{i \in I} \{f_i^{-1}(O) \mid O \in \mathcal{O}_i\} \rangle = \langle \cup_{i \in I} f_i^* \mathcal{O}_i \rangle.$$

2. Die durch eine Familie $(g_i)_{i \in I}$ von Abbildungen $g_i : Y_i \rightarrow X$ induzierte **Finaltopologie** auf X besteht aus den Mengen, deren Urbilder offen sind

$$\mathcal{O}_{fin} = \{O \subseteq X \mid g_i^{-1}(O) \in \mathcal{O}_i \forall i \in I\} = \cap_{i \in I} g_{i*} \mathcal{O}_i.$$

Die Definition der Initial- und Finaltopologie impliziert nicht nur, dass alle Abbildungen $f_i : X \rightarrow Y_i$ oder $g_i : Y_i \rightarrow X$ stetig sind, sondern auch, dass die Initial- und Finaltopologie gerade so viele Mengen enthält wie sie enthalten kann und enthalten muss, ohne diese Bedingung zu verletzen. Dies erlaubt es einem, die Stetigkeit einer Abbildung $f : W \rightarrow X$ aus einem topologischen Raum (W, \mathcal{O}_W) oder einer Abbildung $g : X \rightarrow W$ in einen topologischen Raum (W, \mathcal{O}_W) durch die Stetigkeit der Abbildungen $f_i \circ f : W \rightarrow Y_i$ oder $g \circ g_i : Y_i \rightarrow W$ zu charakterisieren.

Satz 3.1.2: Sei X eine Menge, $(Y_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume und $(f_i)_{i \in I}, (g_i)_{i \in I}$ Familien von Abbildungen $f_i : X \rightarrow Y_i$ und $g_i : Y_i \rightarrow X$.

1. Die durch die Familie $(f_i)_{i \in I}$ induzierte Initialtopologie auf X ist die größte Topologie auf X , für die alle Abbildungen f_i stetig sind.
2. Sie ist die einzige Topologie auf X mit der folgenden **charakteristischen Eigenschaft**: Eine Abbildung $f : (W, \mathcal{O}_W) \rightarrow (X, \mathcal{O}_{ini})$ ist stetig genau dann, wenn die Abbildungen $f_i \circ f : (W, \mathcal{O}_W) \rightarrow (Y_i, \mathcal{O}_i)$ stetig sind für alle $i \in I$.

$$\begin{array}{ccc} (W, \mathcal{O}_W) & \xrightarrow{f} & (X, \mathcal{O}_{ini}) \\ & \searrow f_i \circ f & \downarrow f_i \\ & & (Y_i, \mathcal{O}_i). \end{array}$$

3. Die durch die Familie $(g_i)_{i \in I}$ induzierte Finaltopologie auf X ist die feinste Topologie auf X , für die alle Abbildungen g_i stetig sind.
4. Sie ist die einzige Topologie auf X mit der folgenden **charakteristischen Eigenschaft**: Eine Abbildung $g : (X, \mathcal{O}_{fin}) \rightarrow (W, \mathcal{O}_W)$ ist stetig genau dann, wenn die Abbildungen $g \circ g_i : (Y_i, \mathcal{O}_i) \rightarrow (W, \mathcal{O}_W)$ stetig sind für alle $i \in I$.

$$\begin{array}{ccc} (W, \mathcal{O}_W) & \xleftarrow{g} & (X, \mathcal{O}_{fin}) \\ & \swarrow g \circ g_i & \uparrow g_i \\ & & (Y_i, \mathcal{O}_i). \end{array}$$

Beweis:

1. Als die von der Menge $\mathcal{M} = \cup_{i \in I} \{f_i^{-1}(O) \mid O \in \mathcal{O}_i\}$ erzeugte Topologie ist die Initialtopologie nach Satz 1.2.3 die größte Topologie auf X , die alle Urbilder $f_i^{-1}(O)$ von Mengen $O \in \mathcal{O}_i$ für $i \in I$ enthält, und damit die größte Topologie, für die alle Abbildungen f_i stetig sind.

2. Da \mathcal{M} eine Subbasis von \mathcal{O}_{ini} ist, ist nach Lemma 1.3.4 eine Abbildung $f : W \rightarrow X$ stetig genau dann, wenn $f^{-1}(O)$ offen für alle $O \in \mathcal{M}$ gilt. Dies ist äquivalent zu $(f_i \circ f)^{-1}(O) = f^{-1}(f_i^{-1}(O))$ offen für alle $i \in I$ und $O \in \mathcal{O}_i$, also zur Stetigkeit von $f_i \circ f : W \rightarrow Y_i$.

Ist \mathcal{O}' eine weitere Topologie auf X mit der charakteristischen Eigenschaft der Initialtopologie, so sind alle Abbildungen $f_i = f_i \circ \text{id}_X : (X, \mathcal{O}') \rightarrow (Y_i, \mathcal{O}_i)$ stetig, denn $\text{id}_X : (X, \mathcal{O}') \rightarrow (X, \mathcal{O}')$ ist stetig nach Satz 1.3.7. Ebenso ist die Abbildung $\text{id}_X : (X, \mathcal{O}_{ini}) \rightarrow (X, \mathcal{O}')$ stetig, denn $f_i = f_i \circ \text{id}_X : (X, \mathcal{O}_{ini}) \rightarrow (Y_i, \mathcal{O}_i)$ ist stetig für alle $i \in I$. Nach Beispiel 1.3.8, 6. ist dann \mathcal{O}_{ini} feiner als \mathcal{O}' , und da \mathcal{O}_{ini} die größte Topologie auf X ist, die alle Abbildungen f_i stetig macht, gilt $\mathcal{O}_{ini} = \mathcal{O}'$.

3. Per Definition der Finaltopologie sind alle Abbildungen $g_i : Y_i \rightarrow X$ stetig, und \mathcal{O}_{fin} ist die feinste Topologie auf X mit dieser Eigenschaft. Eine Abbildung $g : X \rightarrow W$ ist stetig genau dann, wenn $g^{-1}(O) \in \mathcal{O}_{fin}$ für alle $O \in \mathcal{O}_W$, was gleichbedeutend ist zu $(g \circ g_i)^{-1}(O) = g^{-1}(g_i^{-1}(O)) \in \mathcal{O}_i$ für alle $i \in I$ und damit zur Stetigkeit von $g \circ g_i : Y_i \rightarrow W$ für alle $i \in I$.

4. Ist \mathcal{O}' eine weitere Topologie auf X mit dieser charakteristischen Eigenschaft, so sind alle Abbildungen $g_i = \text{id}_X \circ g_i : (Y_i, \mathcal{O}_i) \rightarrow (X, \mathcal{O}')$ stetig, denn $\text{id}_X : (X, \mathcal{O}') \rightarrow (X, \mathcal{O}')$ ist stetig nach Satz 1.3.7. Auch die Abbildung $\text{id}_X : (X, \mathcal{O}') \rightarrow (X, \mathcal{O}_{fin})$ ist stetig, denn $g_i = \text{id}_X \circ g_i : (Y_i, \mathcal{O}_i) \rightarrow (X, \mathcal{O}_{fin})$ ist stetig für alle $i \in I$. Nach Beispiel 1.3.8, 5. ist dann \mathcal{O}' feiner als \mathcal{O}_{fin} . Da \mathcal{O}_{fin} die feinste Topologie auf X ist, die alle Abbildungen g_i stetig macht, gilt $\mathcal{O}_{fin} = \mathcal{O}'$. \square

Beispiel 3.1.3:

1. Betrachtet man in Definition 3.1.1 eine einzige Abbildung $f : X \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ oder $g : (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow X$, so ist $\mathcal{O}_{ini} = f^*\mathcal{O}_Y$ und $\mathcal{O}_{fin} = g_*\mathcal{O}_Y$ aus Bemerkung 1.3.3.
2. Insbesondere ist für konstante Abbildungen $f : X \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ und $g : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow Y$ die von f induzierte Initialtopologie die indiskrete Topologie auf X und die von g induzierte Finaltopologie die diskrete Topologie auf Y :

$$\mathcal{O}_{ini} = \{f^{-1}(O) \mid O \in \mathcal{O}_Y\} = \{\emptyset, X\} \quad \mathcal{O}_{fin} = \{O \subseteq Y \mid g^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X\} = \mathcal{P}(Y).$$

3. Die von der Standardtopologie \mathcal{O} auf $S^1 \subseteq \mathbb{C}$ und der stetigen Abbildung

$$f : S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^2$$

induzierte Initialtopologie auf S^1 ist echt gröber als \mathcal{O} . Denn für $M \subseteq S^1$ ergibt sich $z \in f^{-1}(M) \Leftrightarrow -z \in f^{-1}(M)$ und damit $f^{-1}(M) = -f^{-1}(M)$. Damit enthält die Initialtopologie nur die offenen Mengen der Standardtopologie auf S^1 , die invariant unter einer Punktspiegelung am Ursprung sind:

$$\mathcal{O}_{ini} = \{f^{-1}(O) \mid O \in \mathcal{O}\} = \{O \in \mathcal{O} \mid O = -O\}.$$

4. Die von der Standardtopologie \mathcal{O} auf $S^1_+ = \{z \in S^1 \mid \text{Im}(z) > 0\}$ und der Abbildung $g : S^1_+ \rightarrow S^1, z \mapsto z^2$ induzierte Finaltopologie auf S^1 ist echt feiner als die Standardtopologie. Denn es gilt $g^{-1}(\{1\}) = \emptyset$ und damit ist die Menge $\{1\} \subseteq S^1$ offen bezüglich der Finaltopologie, aber nicht bezüglich der Standardtopologie.

3.2 Teilräume und Quotienten

Wir untersuchen jetzt systematisch weitere Beispiele von Initial- und Finaltopologien, die uns Konstruktionen topologischer Räume liefern. Zunächst definieren wir damit Topologien auf Teilmengen und Quotientenmengen eines topologischen Raums (X, \mathcal{O}_X) .

Um eine Teilmenge $M \subseteq X$ über Definition 3.1.1 mit einer Topologie zu versehen, müssen wir sie durch eine Abbildung charakterisieren. Dies ist die *Inklusionsabbildung* $\iota : M \rightarrow X, m \mapsto m$, und die zugehörige Initialtopologie auf M ist gerade die *Teilraumtopologie*. Da man sich auch für topologische Räume interessiert, die homöomorph zu Teilräumen sind, betrachten wir auch das allgemeinere Konzept der *Einbettung*.

Definition 3.2.1: Seien $(X, \mathcal{O}_X), (W, \mathcal{O}_W)$ topologische Räume, $M \subseteq X$ eine Teilmenge und $\iota : M \rightarrow X, m \mapsto m$ die Inklusionsabbildung.

1. Die **Teilraumtopologie** $\mathcal{O}_{M \subseteq X}$ ist die von ι induzierte Initialtopologie $\iota^*\mathcal{O}_X$ auf M .
2. Eine Abbildung $f : W \rightarrow X$ heißt **Einbettung** von (W, \mathcal{O}_W) in (X, \mathcal{O}_X) , wenn sie injektiv ist und \mathcal{O}_W die von f induzierte Initialtopologie $f^*\mathcal{O}_X$ auf W ist.

Bemerkung 3.2.2:

1. Die Teilraumtopologie $\mathcal{O}_{M \subseteq X}$ auf M ist die größte Topologie auf M , für die die Inklusionsabbildung $\iota : M \rightarrow X$ stetig ist, und es gilt $\mathcal{O}_{M \subseteq X} = \{O \cap M \mid O \in \mathcal{O}_X\} = \mathcal{O}_X \cap M$.
2. Eine injektive Abbildung $f : W \rightarrow X$ ist eine Einbettung genau dann, wenn ihre Einschränkung $f|^{f(W)} : W \rightarrow f(W), w \mapsto f(w)$ ein Homöomorphismus ist.

Beweis:

Die erste Aussage folgt direkt aus Definition 3.2.1, Satz 3.1.2, 1. und Definition 3.1.1, denn für jede Teilmenge $O \subseteq X$ ist $\iota^{-1}(O) = O \cap M$. Für eine injektive Abbildung $f : W \rightarrow X$ ist die bijektive Abbildung $f|^{f(W)} : W \rightarrow f(W)$ ein Homöomorphismus genau dann, wenn $f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_W$ für $O \in \mathcal{O}_{f(W) \subseteq X}$ und $f(O') \in \mathcal{O}_{f(W) \subseteq X}$ für alle $O' \in \mathcal{O}_W$. Dies ist äquivalent zu $\mathcal{O}_W = \{f^{-1}(O) \mid O \in \mathcal{O}_{f(W) \subseteq X}\} = \{f^{-1}(O \cap f(W)) \mid O \in \mathcal{O}_X\} = \{f^{-1}(O) \mid O \in \mathcal{O}_X\} = f^* \mathcal{O}_X$. \square

Da es sich bei der Teilraumtopologie um einen Spezialfall der Initialtopologie aus Definition 3.1.1 handelt, besitzt auch die Teilraumtopologie eine *charakteristische Eigenschaft*. Die Teilraumtopologie $\mathcal{O}_{M \subseteq X}$ auf einer Teilmenge $M \subseteq X$ ist die einzige Topologie auf M , die die folgende Bedingung erfüllt: Eine Abbildung $f : (W, \mathcal{O}_W) \rightarrow (M, \mathcal{O}_{M \subseteq X})$ ist stetig genau dann, wenn die Abbildung $\iota \circ f : (W, \mathcal{O}_W) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ stetig ist.

Für die Teilraumtopologie lässt sich aber mehr aussagen, da man wegen der Injektivität der Inklusionsabbildung mehr Kontrolle über die Urbilder hat. Jede Abbildung $f : W \rightarrow X$ mit $f(W) \subseteq M$ definiert nämlich durch Koeinschränkung eine Abbildung $f' : W \rightarrow M$, $w \mapsto f(w)$, und jede Abbildung $f' : W \rightarrow M$ definiert eine Abbildung $f = \iota \circ f' : W \rightarrow X$, $w \mapsto f'(w)$ mit $f(W) \subseteq M$. Abbildungen $f : W \rightarrow X$ mit $f(W) \subseteq M$ stehen also in Bijektion mit Abbildungen $f' : W \rightarrow M$. Mit der charakteristischen Eigenschaft der Initialtopologie kann man in dieser Aussage *Abbildungen* durch *stetige Abbildungen* ersetzen.

Satz 3.2.3: (Universelle Eigenschaft des Teilraums)

Sei (X, \mathcal{O}_X) ein topologischer Raum und $M \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann ist die Teilraumtopologie auf M die einzige Topologie auf M mit der folgenden **universellen Eigenschaft**: Die Inklusionsabbildung $\iota : (M, \mathcal{O}_{M \subseteq X}) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ ist stetig. Zu jeder stetigen Abbildung $f : (W, \mathcal{O}_W) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ mit $f(W) \subseteq M$ gibt es genau eine stetige Abbildung $\tilde{f} : (W, \mathcal{O}_W) \rightarrow (M, \mathcal{O}_{M \subseteq X})$ mit $\iota \circ \tilde{f} = f$.

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\exists! \tilde{f}} & M \\ & \searrow f & \downarrow \iota \\ & & X. \end{array}$$

$f(W) \subseteq M$

Beweis:

Die Inklusionsabbildung ist stetig per Definition der Initialtopologie. Für jede stetige Abbildung $f : W \rightarrow X$, $w \mapsto f(w)$ mit $f(W) \subseteq M$ können wir die Koeinschränkung $f|^{f(W)} : W \rightarrow M$, $y \mapsto f(y)$ betrachten, die nach Beispiel 1.3.8, 4. stetig ist und die Bedingung $\iota \circ f|^{f(W)} = f$ erfüllt. Wegen der Injektivität von ι folgt aus $\iota \circ f|^{f(W)} = \iota \circ f'$ auch $f|^{f(W)} = f'$, und somit ist $f|^{f(W)} : W \rightarrow M$ die einzige Abbildung, die diese Bedingung erfüllt.

Die Eindeutigkeit der Teilraumtopologie folgt aus der Eindeutigkeit der Initialtopologie (Satz 3.1.2). Wir wiederholen noch einmal das Argument: Ist \mathcal{O}' eine weitere Topologie auf M mit der universellen Eigenschaft, so sind sowohl $\text{id}_M : (M, \mathcal{O}_{M \subseteq X}) \rightarrow (M, \mathcal{O}')$ als auch $\text{id}'_M : (M, \mathcal{O}') \rightarrow (M, \mathcal{O}_{M \subseteq X})$ stetig, da $\iota \circ \text{id}_M : (M, \mathcal{O}_{M \subseteq X}) \rightarrow (X, \mathcal{O})$ und $\iota \circ \text{id}'_M : (M, \mathcal{O}') \rightarrow (X, \mathcal{O})$ stetig sind. Damit ist $\mathcal{O}_{M \subseteq X}$ gleichzeitig gröber und feiner als \mathcal{O}' , und die beiden Topologien stimmen überein. \square

Wichtige Beispiele von Teilraumtopologien wurden bereits in Beispiel 1.1.4 und Beispiel 1.1.12 betrachtet, und ihre Eigenschaften in Aufgabe 4, Lemma 2.2.5 und Aufgabe 26 untersucht. Ihre

Charakterisierung durch Definition 3.2.1 und Satz 3.2.3 gibt uns aber einen anderen Blick auf die Teilraumtopologie, die ihren Zusammenhang mit anderen Konstruktionen deutlich macht.

Um dies zu sehen, betrachten wir Quotienten von topologischen Räumen. Ist X eine Menge und \sim eine Äquivalenzrelation auf X , so bezeichnen wir mit $[x] = \{y \in X \mid y \sim x\}$ die *Äquivalenzklasse* eines Elements $x \in X$. Die Menge $X/\sim = \{[x] \mid x \in X\}$ der Äquivalenzklassen heißt die *Quotientenmenge*. Um eine Quotientenmenge über Definition 3.1.1 mit einer Topologie zu versehen, müssen wir sie durch eine Abbildung charakterisieren. Dies ist die *kanonische Surjektion* $\pi : X \rightarrow X/\sim, x \mapsto [x]$. Wir versehen nun die Quotientenmenge mit der zugehörigen Finaltopologie. Wie im Fall des Teilraums interessiert man sich aber nicht nur für Quotientenräume eines topologischen Raums, sondern auch für topologische Räume, die homöomorph zu solchen Quotientenräumen sind. Dies liefert das Konzept der *Identifizierung*.

Definition 3.2.4: Seien $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume, \sim eine Äquivalenzrelation auf X und $\pi : X \rightarrow X/\sim, x \mapsto [x]$ die kanonische Surjektion.

1. Die **Quotiententopologie** \mathcal{O}_\sim auf X/\sim ist die von π induzierte Finaltopologie auf X/\sim .
2. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **Identifizierung**, wenn sie surjektiv ist und \mathcal{O}_Y die von f induzierte Finaltopologie auf Y ist.

Bemerkung 3.2.5:

1. Die Quotiententopologie \mathcal{O}_\sim auf X/\sim ist die feinste Topologie auf X/\sim , für die die kanonische Surjektion $\pi : X \rightarrow X/\sim$ stetig ist. Es gilt $\mathcal{O}_\sim = \{O \subseteq X/\sim \mid \pi^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X\}$.
2. Eine surjektive Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist eine Identifizierung genau dann, wenn die Abbildung $f' : X/\sim \rightarrow Y, [x] \mapsto f(x)$ mit der Äquivalenzrelation $x \sim x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$ ein Homöomorphismus ist.

Beweis:

Die erste Aussage folgt direkt aus Definition 3.2.4, Satz 3.1.2, 2. und Definition 3.1.1.

Ist $f : X \rightarrow Y$ surjektiv, so ist die Abbildung $f' : X/\sim \rightarrow Y, [x] \mapsto f(x)$ bijektiv. Sie ist ein Homöomorphismus genau dann, wenn $f'^{-1}(O) \in \mathcal{O}_\sim$ für alle $O \in \mathcal{O}_Y$ und $f'(O') \in \mathcal{O}_Y$ für alle $O' \in \mathcal{O}_\sim$ gilt. Dies ist wegen $f' \circ \pi = f$ und per Definition der Quotiententopologie äquivalent zu $f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X$ für alle $O \in \mathcal{O}_Y$ und $f(O) \in \mathcal{O}_Y$ für alle $O' \in \mathcal{O}_X$, und somit zu $\mathcal{O}_Y = \{O \subseteq Y \mid f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X\}$. \square

Ähnlich wie die Initialtopologie im Fall der Teilraumtopologie liefert die charakteristische Eigenschaft der Finaltopologie aus Satz 3.1.2 direkt eine entsprechende charakteristische Eigenschaft der Quotiententopologie: Die Quotiententopologie auf X/\sim ist die einzige Topologie auf X/\sim , für die eine Abbildung $g : (X/\sim, \mathcal{O}_\sim) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ stetig ist genau dann, wenn die Abbildung $g \circ \pi : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ stetig ist. Da man hier aber wegen der Surjektivität der kanonischen Surjektion Kontrolle über das Bild der Abbildung $\pi : X \rightarrow X/\sim$ hat, lässt sich mehr aussagen. Denn jede auf den Äquivalenzklassen konstante Abbildung $f : X \rightarrow Y$ definiert eine Abbildung $f' : X/\sim \rightarrow Y, [x] \mapsto f(x)$. Umgekehrt liefert jede Abbildung $f' : X/\sim \rightarrow Y$ durch Verkettung mit der kanonischen Surjektion eine auf den Äquivalenzklassen konstante Abbildung $f = f' \circ \pi : X \rightarrow Y, x \mapsto f'([x])$. Abbildungen $f' : X/\sim \rightarrow Y$ stehen also in Bijektion mit Abbildungen $f : X \rightarrow Y$, die auf Äquivalenzklassen konstant sind. Mit der charakteristischen Eigenschaft der Finaltopologie kann man nun *Abbildungen* durch *stetige Abbildungen* ersetzen.

Satz 3.2.6: (Universelle Eigenschaft des Quotientenraums)

Sei (X, \mathcal{O}_X) ein topologischer Raum und \sim eine Äquivalenzrelation auf X . Dann ist die Quotiententopologie die einzige Topologie auf X/\sim mit der folgenden **universellen Eigenschaft**:

Die kanonische Surjektion $\pi : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (X/\sim, \mathcal{O}_\sim)$ ist stetig. Zu jeder stetigen Abbildung $g : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$, die auf den Äquivalenzklassen konstant ist, existiert genau eine stetige Abbildung $\tilde{g} : (X/\sim, \mathcal{O}_\sim) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ mit $\tilde{g} \circ \pi = g$:

$$\begin{array}{ccc}
 & Y & \xleftarrow{\exists! \tilde{g}} X/\sim \\
 & \swarrow g & \uparrow \pi \\
 g|_{[x]} \text{ konstant} & & X
 \end{array}$$

Beweis:

Die kanonische Surjektion ist stetig per Definition der Finaltopologie. Zu einer stetigen Abbildung $g : X \rightarrow Y$ mit $g|_{[x]} : [x] \rightarrow Y$ konstant für alle $x \in X$, definieren wir eine Abbildung $\tilde{g} : X/\sim \rightarrow Y$ durch $\tilde{g}([x]) := g(x)$ für alle $x \in X$. Diese ist wohldefiniert, da $g(x') = g(x)$ für alle $x' \in [x]$, und erfüllt die Bedingung $\tilde{g} \circ \pi = g$. Wegen der Surjektivität von π gilt $\tilde{g} \circ \pi = g' \circ \pi$ genau dann, wenn $\tilde{g} = g'$, und somit ist $\tilde{g} : X/\sim \rightarrow Y$ die einzige Abbildung, die diese Bedingung erfüllt. Für jede offene Menge $O \subseteq Y$ ist $g^{-1}(O) \subseteq X$ offen wegen der Stetigkeit von g und damit auch $\tilde{g}^{-1}(O) = \pi^{-1}(g^{-1}(O))$ wegen der Stetigkeit von π . Also ist \tilde{g} stetig.

Die Eindeutigkeitsaussage über die Quotiententopologie ergibt sich aus der Eindeutigkeit der Finaltopologie (Satz 3.1.2). Wir wiederholen noch einmal das Argument: Ist \mathcal{O}' eine weitere Topologie auf X/\sim mit der universellen Eigenschaft, so sind sowohl $\text{id}_{X/\sim} : (X/\sim, \mathcal{O}_\sim) \rightarrow (X/\sim, \mathcal{O}')$ als auch $\text{id}'_{X/\sim} : (X/\sim, \mathcal{O}') \rightarrow (X/\sim, \mathcal{O}_\sim)$ stetig, da $\text{id}_{X/\sim} \circ \pi : (X, \mathcal{O}) \rightarrow (X/\sim, \mathcal{O}_\sim)$ und $\text{id}'_{X/\sim} \circ \pi : (X, \mathcal{O}) \rightarrow (X/\sim, \mathcal{O}')$ stetig sind. Damit ist \mathcal{O}_\sim gleichzeitig gröber und feiner als \mathcal{O}' , und die beiden Topologien stimmen überein. \square

Der Nutzen der universellen Eigenschaft besteht darin, dass man statt stetigen Abbildungen $\tilde{g} : X/\sim \rightarrow Y$ stetige Abbildungen $g : X \rightarrow Y$ betrachten kann, die auf den Äquivalenzklassen konstant sind. Man kann sich eine *universelle Eigenschaft* als eine Unteroutine in einem Beweisprogramm vorstellen, die es einem erspart, immer wieder Abbildungen auf den Äquivalenzklassen zu definieren, dann ihre Wohldefiniertheit und schließlich ihre Stetigkeit nachzuweisen. Stattdessen ruft man die Unteroutine *universelle Eigenschaft* auf, die die entsprechenden Nachweise bereits enthält. Dies ist besonders nützlich, wenn man Homöomorphie zwischen Quotientenräumen und Teilmengen des \mathbb{R}^n beweisen möchte.

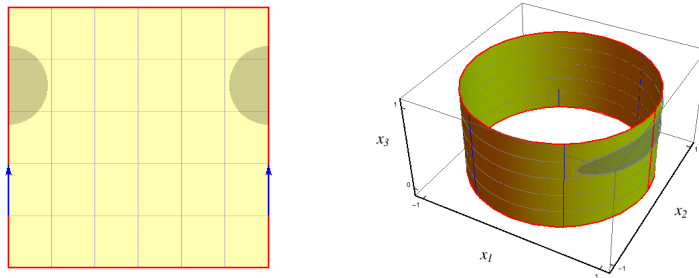
Wir illustrieren dies mit konkreten Beispielen von Quotientenräumen. Dabei stellt sich zunächst die Frage, wie man Äquivalenzrelationen auf einer Menge X möglichst effizient beschreibt. Es hat sich als Konvention eingebürgert, dabei nur den *erzeugenden* Teil der Äquivalenzrelation explizit anzugeben, während alle Relationen zwischen Elementen aus X , die sich daraus durch Reflexivität, Symmetrie und Transitivität ergeben, nicht explizit aufgeschrieben werden.

Beispiel 3.2.7: Wir betrachten das Einheitsquadrat $X = [0, 1]^{\times 2} = [0, 1] \times [0, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$ mit der Standardtopologie und verschiedenen Äquivalenzrelationen, die Punkte auf seinem Rand identifizieren:

1. Der Quotient X/\sim mit $(0, y) \sim (1, y)$ für alle $y \in [0, 1]$ heißt **Zylindermantel**. Eine

Einbettung in den \mathbb{R}^3 ist gegeben durch $\tilde{g} : X/\sim \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\tilde{g} : [(x, y)] \mapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x), y).$$



Denn zu der stetigen Abbildung $g : [0, 1]^2 \rightarrow Z$, $(x, y) \mapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x), y)$ gibt es nach der universellen Eigenschaft des Quotienten genau eine stetige Abbildung $\tilde{g} : X/\sim \rightarrow Z$ mit $\tilde{g} \circ \pi = g$. Sie ist bijektiv mit Umkehrabbildung

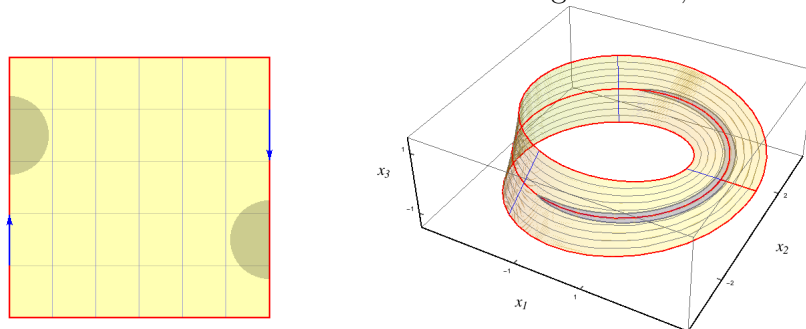
$$\tilde{g}^{-1}(x, y, z) = \begin{cases} [(\frac{1}{2\pi} \arccos x, z)] & y \geq 0 \\ [(1 - \frac{1}{2\pi} \arccos x, z)] & y \leq 0 \end{cases}$$

Da $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ und $\pi : X \rightarrow X/\sim$ stetig sind, sind auch die Einschränkungen $\tilde{g}^{-1}|_{Z_{\pm}} : Z_{\pm} = \{(x, y, z) \in Z \mid \pm y \geq 0\} \rightarrow X/\sim$ stetig als Verkettung stetiger Abbildungen. Da die Mengen Z_{\pm} abgeschlossen sind, ist \tilde{g}^{-1} nach Aufgabe 19 stetig.

2. Der Quotient X/\sim mit $(0, y) \sim (1, 1 - y)$ für alle $y \in [0, 1]$ heißt **Möbiusband**. Eine Einbettung in den \mathbb{R}^3 ist gegeben durch $\tilde{g} : X/\sim \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

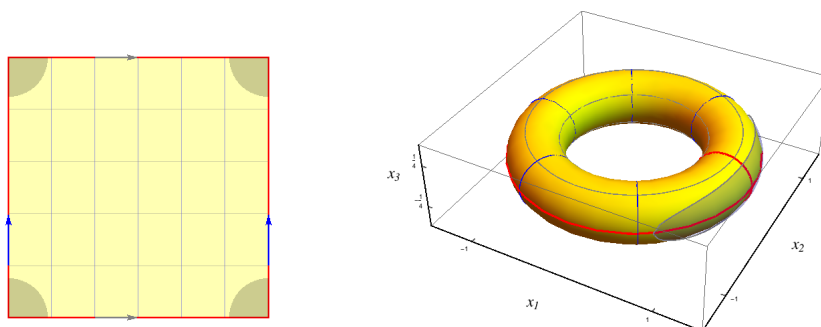
$$\tilde{g} : [(x, y)] \mapsto \left(\cos(2\pi x) \left(3 + (y - \frac{1}{2}) \cos(\pi x)\right), \sin(2\pi x) \left(3 + (y - \frac{1}{2}) \cos(\pi x)\right), (y - \frac{1}{2}) \sin(\pi x) \right).$$

Der Beweis, dass es sich tatsächlich um eine Einbettung handelt, ist analog zu 1.

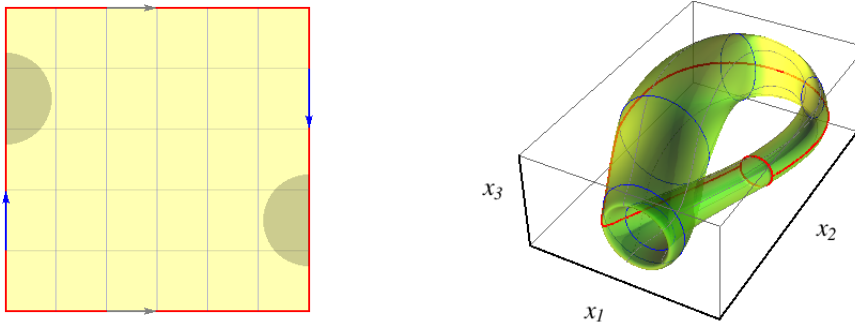


3. Der Quotient X/\sim mit $(0, y) \sim (1, y)$ und $(x, 0) \sim (x, 1)$ für alle $x, y \in [0, 1]$ heißt **Torus**. Für alle $r \in (0, 1)$ ist eine Einbettung in den \mathbb{R}^3 gegeben durch $\tilde{g} : X/\sim \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\tilde{g} : [(x, y)] \mapsto \left(\cos(2\pi x) (1 + r \cos(2\pi y)), \sin(2\pi x) (1 + r \cos(2\pi y)), r \sin(2\pi y) \right).$$

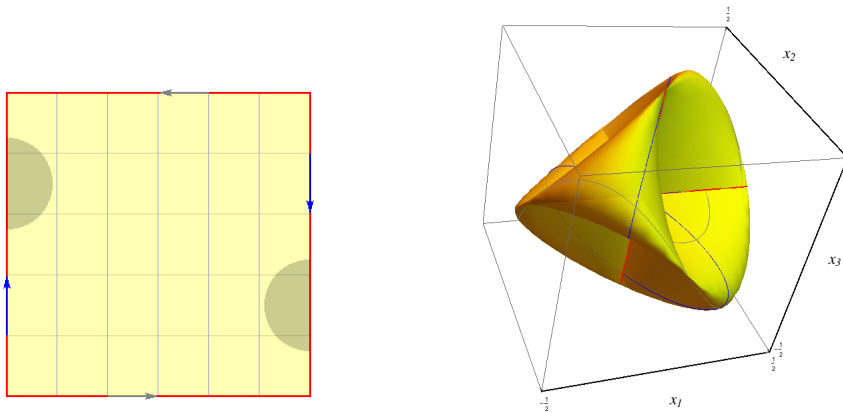


4. Der Quotient X/\sim mit $(0, y) \sim (1, 1 - y)$ und $(x, 0) \sim (x, 1)$ für alle $x, y \in [0, 1]$ heißt **Kleinsche Flasche**. Man kann zeigen, dass es keine Einbettung der Kleinschen Flasche in den \mathbb{R}^3 mit der Standardtopologie gibt².



Einen Film, der die Konstruktion einer Kleinschen Flasche als Quotientenraum eines Rechtecks visualisiert, finden sie auf http://www.josleys.com/show_gallery.php?galid=366.

5. Der Quotient X/\sim mit $(0, y) \sim (1, 1 - y)$ und $(x, 0) \sim (1 - x, 1)$ für alle $x, y \in [0, 1]$ heißt **reell projektiver Raum** und wird mit $\mathbb{R}P^2$ bezeichnet. Man kann zeigen, dass es keine Einbettung des $\mathbb{R}P^2$ in den \mathbb{R}^3 mit der Standardtopologie gibt³.



Beispiel 3.2.8: Sei (X, \mathcal{O}_X) ein topologischer Raum, $M \subseteq X$ eine Teilmenge und \sim die durch $m \sim m'$ für alle $m, m' \in M$ definierte Äquivalenzrelation. Dann sagt man der Quotientenraum X/\sim entstehe durch **Kollabieren** des Teilraums $M \subseteq X$ und schreibt $X/M := X/\sim$.

Beispiel 3.2.9: Sei $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$ der Zylindermantel. Der topologische Raum Z/M , der durch Kollabieren des oberen Randes $M = S^1 \times \{1\} \subseteq Z$ entsteht, ist homöomorph zum **Kegel** K und zur abgeschlossenen Halbsphäre $S_{\geq 0}^2$

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times [0, 1] \mid z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

$$S_{\geq 0}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}.$$

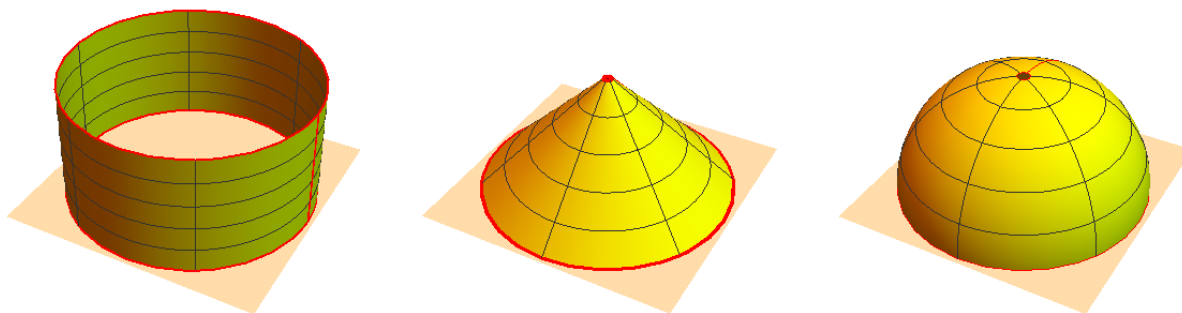
²Bei der dargestellten Fläche handelt es sich nicht um eine Einbettung, da die Fläche sich selbst schneidet. Entfernt man jedoch eine Kreisscheibe aus der Kleinschen Flasche, so wird sie zu einer Einbettung.

³Bei der dargestellten Fläche, der sogenannten **Steinerschen Fläche** oder **römischen Fläche** von Steiner, handelt es sich nicht um eine Einbettung, da die Fläche sich selbst schneidet.

Letztere sind Graphen stetiger Funktionen auf der abgeschlossenen Kreisscheibe

$$B_{\leq 1}(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\},$$

also homöomorph hierzu.



Kollabieren des oberen Randes des Zylindermantels.

Allgemein beobachtet man, dass Aussagen über die Initialtopologie in Aussagen über die Finaltopologie übergehen, wenn man die Richtung aller Abbildungen und aller Pfeile in kommutierenden Diagrammen umkehrt. Dies gilt insbesondere für die Spezialfälle der Teilraumtopologie und der Quotiententopologie. Kehrt man die Richtungen aller Abbildungen und aller Pfeile in kommutierenden Diagrammen um und vertauscht entsprechend die Eigenschaften *injektiv* und *surjektiv* und *gröber* und *feiner*, so überführt man Bemerkung 3.2.2 in Bemerkung 3.2.5 und Satz 3.2.3 in Satz 3.2.6. Man sagt, die zwei Konstruktionen seien zueinander *dual*.

Diese Dualität führt dazu, dass sich die Quotiententopologie bezüglich Zusammenhang und Trennung genau umgekehrt verhält wie die Teilraumtopologie. Während die Teilraumtopologie über gute Trennungs- aber schlechte Zusammenhangeigenschaften verfügt, besitzt die Quotiententopologie gute Zusammenhange- und schlechte Trennungseigenschaften.

Bemerkung 3.2.10:

1. Ist (X, \mathcal{O}) ein (weg)zusammenhängender topologischer Raum und \sim eine Äquivalenzrelation auf X , so ist auch $(X/\sim, \mathcal{O}_{\sim})$ (weg)zusammenhängend.
2. Quotientenräume haben im allgemeinen keine guten Trennungseigenschaften. Insbesondere müssen Quotienten von Hausdorffräumen nicht hausdorffsch sein.

Beweis:

1. Da $\pi : X \rightarrow X/\sim$ surjektiv und stetig ist, folgt dies aus Satz 2.1.5, 2. und Satz 2.1.10, 3.
2. Übung (Aufgabe 40). □

3.3 Topologische Produkte und Summen

Zwei weitere wichtige Beispiele von Initial- und Finaltopologie ergeben sich aus *kartesischen Produkten* und *disjunkten Vereinigungen* von Mengen. Sie versehen kartesische Produkte und disjunkte Vereinigungen von topologischen Räumen mit Topologien.

Ist $(M_i)_{i \in I}$ eine durch eine Indexmenge I indizierte Familie von Mengen, so ist die **disjunkte Vereinigung** der Mengen M_i die Menge

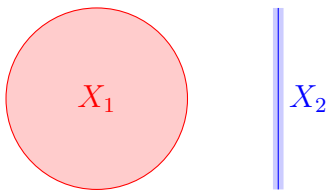
$$\dot{\cup}_{i \in I} M_i := \cup_{i \in I} M_i \times \{i\}.$$

Elemente von $\dot{\cup}_{i \in I} M_i$ sind also Paare der Form (m, i) mit $i \in I$ und $m \in M_i$. Der Grund für den Namen *disjunkte* Vereinigung ist, dass $(M_i \times \{i\}) \cap (M_j \times \{j\}) = \emptyset$ für alle $i \neq j$ gilt, auch wenn $M_i \cap M_j \neq \emptyset$. Durch Hinzufügen des Index i ersetzt man die Mengen M_i also durch paarweise disjunkte Mengen $M_i \times \{i\}$, die jeweils in Bijektion mit den Mengen M_i stehen. Im Umgang mit disjunkten Vereinigungen unterdrückt man in der Regel die aufwändigere Notation und denkt sich die M_i als Teilmengen der disjunkten Vereinigung.

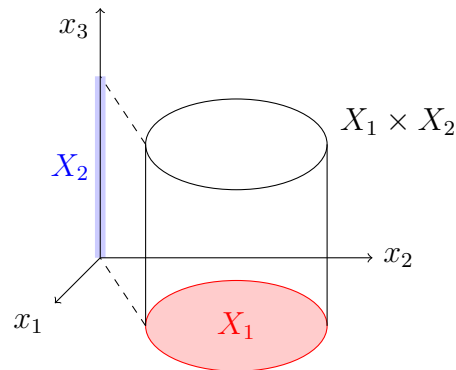
Das **kartesische Produkt** einer Mengenfamilie $(M_i)_{i \in I}$ ist die Menge

$$\times_{i \in I} M_i = \{f : I \rightarrow \dot{\cup}_{i \in I} M_i \mid f(i) \in M_i \times \{i\} \forall i \in I\}.$$

Elemente des kartesischen Produkts sind also Abbildungen $f : I \rightarrow \dot{\cup}_{i \in I} M_i$, $i \mapsto (m_i, i)$ mit $m_i \in M_i$. In Anlehnung an Folgen in M , die dem Spezialfall $I = \mathbb{N}_0$ und $M_i = M$ für alle $i \in I$ entsprechen, notiert man sie $f = (m_i)_{i \in I}$, ohne die Bedingung $m_i \in M_i$ explizit zu nennen.



Disjunkte Vereinigung der Mengen
 $X_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$, $X_2 = [-1, 1]$.



Kartesisches Produkt der Mengen
 $X_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$, $X_2 = [-1, 1]$.

Zu der disjunkten Vereinigung und zum kartesischen Produkt einer Familie $(M_i)_{i \in I}$ von Mengen gibt es jeweils eine kanonische Familie von Abbildungen, nämlich die **Inklusionsabbildungen** und die **Projektionsabbildungen**

$$\iota_j : M_j \rightarrow \dot{\cup}_{i \in I} M_i, m \mapsto (m, j) \qquad \pi_j : \times_{i \in I} M_i \rightarrow M_j, (m_i)_{i \in I} \mapsto m_j. \quad (6)$$

Die Inklusionsabbildung ι_j bildet also ein Element $m \in M_j$ auf das Element $(m, j) \in M_j \times \{j\}$ ab, und die Projektionsabbildung π_j ordnet einer Abbildung $f = (m_i)_{i \in I} : I \rightarrow \dot{\cup}_{i \in I} M_i$ ihren Wert $f(j) = m_j$ an der Stelle $j \in I$ zu. Indem wir die von diesen Abbildungen induzierte Initial- und Finaltopologie auf den Mengen $\dot{\cup}_{i \in I} M_i$ und $\times_{i \in I} M_i$ betrachten, können wir diese Mengen mit Topologien versehen.

Definition 3.3.1: Sei $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume.

1. Die **Produkttopologie** auf der Menge $\times_{i \in I} X_i$ ist die von den Projektionsabbildungen $\pi_j : \times_{i \in I} X_i \rightarrow X_j, (x_i)_{i \in I} \mapsto x_j$ induzierte Initialtopologie auf $\times_{i \in I} X_i$. Man bezeichnet diesen topologischen Raum als das **Produkt** der Räume (X_i, \mathcal{O}_i) und mit $\prod_{i \in I} X_i$.

2. Die **Summentopologie** auf der Menge $\dot{\cup}_{i \in I} X_i$ ist die von den Inklusionsabbildungen $\iota_j : X_j \rightarrow \dot{\cup}_{i \in I} X_i$, $x \mapsto (x, j)$ induzierte Finaltopologie auf $\dot{\cup}_{i \in I} X_i$. Man bezeichnet diesen topologischen Raum als die **Summe** der Räume (X_i, \mathcal{O}_i) und mit $\amalg_{i \in I} X_i$.

Ist $I = \{1, \dots, n\}$, so schreibt man auch $X_1 \times \dots \times X_n := \amalg_{i \in I} X_i$ und $X_1 + \dots + X_n := \amalg_{i \in I} X_i$.

Aus Definition 3.3.1 und Definition 3.1.1 der Initial- und Finaltopologie erhält man direkt (Sub)basen der Produkt- und Summentopologie.

Bemerkung 3.3.2:

1. Die Menge $\mathcal{S} = \cup_{i \in I} \{\pi_i^{-1}(O) \mid O \in \mathcal{O}_i\}$ ist eine Subbasis der Topologie auf $\amalg_{i \in I} X_i$ und die Menge $\mathcal{B} = \{\amalg_{i \in I} O_i \mid O_i \in \mathcal{O}_i \forall i \in I, O_i = X_i \text{ für fast alle } i \in I\}$ eine Basis.

Ersteres gilt per Definition der Initialtopologie. Nach Lemma 1.2.4 sind die offenen Mengen in $\amalg_{i \in I} X_i$ damit Vereinigungen von endlichen Schnitten von Mengen der Form $\pi_i^{-1}(O)$ mit $O \in \mathcal{O}_i$, also Vereinigungen von Mengen der Form $O = \amalg_{i \in I} O_i$ mit $O_i \subseteq X_i$ offen und $O_i = X_i$ für fast alle $i \in I$.

2. Die Topologie auf $\amalg_{i \in I} X_i$ ist gegeben durch $\mathcal{O} = \{O \in \dot{\cup}_{i \in I} X_i \mid \iota_i^{-1}(O) \in \mathcal{O}_i \forall i \in I\}$.

Da $\iota_j^{-1}(O \times \{i\}) = O$ für $j = i$ und $\iota_j^{-1}(O \times \{i\}) = \emptyset$ für $j \neq i$, sind die offenen Mengen in $\amalg_{i \in I} X_i$ gerade die Vereinigungen von Mengen $O_i \times \{i\}$ mit offenen Mengen $O_i \subseteq X_i$.

Beispiel 3.3.3:

1. Ist $I = \emptyset$, so ist $\amalg_{i \in I} X_i$ der leere topologische Raum und $\amalg_{i \in I} X_i$ der Einpunktraum. Denn $\dot{\cup}_{i \in I} X_i \times \{i\}$ ist eine leere Vereinigung und damit leer. Damit enthält $\times_{i \in I} X_i = \text{Abb}(\emptyset, \emptyset)$ genau ein Element, die leere Abbildung.
2. Ist $X_j = \emptyset$ für ein $j \in I$, so ist $\amalg_{i \in I} X_i = \amalg_{i \in I, i \neq j} X_i$ und $\amalg_{i \in I} X_i = \emptyset$. Denn dann gilt $X_j \times \{j\} = \emptyset$ und damit $\dot{\cup}_{i \in I} X_i \times \{i\} = \dot{\cup}_{i \in I, i \neq j} X_i \times \{i\}$, und die Menge der Abbildungen $f : I \rightarrow \dot{\cup}_{i \in I} M_i$ mit $f(j) \in X_j \times \{j\} = \emptyset$ ist leer.
3. Sind (X_1, d_1) und (X_2, d_2) metrische Räume, so ist $d : (X_1 \times X_2) \times (X_1 \times X_2) \rightarrow \mathbb{R}$

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}$$

eine Metrik auf $X_1 \times X_2$, die sogenannte **Produktmetrik**. Die von der Produktmetrik induzierte metrische Topologie auf $X_1 \times X_2$ ist genau die Produkttopologie auf $X_1 \times X_2$, die aus den metrischen Topologien auf X_1 und X_2 entsteht. (Aufgabe 46).

Auch für *abzählbare* Folgen metrischer Räume $(X_n, d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ findet man Metriken, die die Produkttopologie liefern. In diesem Fall erhalten wir auf $\amalg_{n \in \mathbb{N}} X_n$ eine Metrik durch

$$d((x_n), (y_n)) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}.$$

Dass dies eine Metrik ist, zeigt man mit der Konstruktion der Metriken d_f in Beispiel 1.1.12, 6. Auch in diesem Fall kann man (mit etwas mehr Aufwand) zeigen, dass die Metrik d genau die Produkttopologie liefert.

Ist $(X_j, d_j)_{j \in J}$ allerdings eine *überabzählbare* Familie metrischer Räume, die alle mindestens zwei Punkte enthalten, so ist die Produkttopologie of $\prod_{j \in J} X_j$ nicht metrisierbar, da sie nicht das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Um das einzusehen, reicht es im Wesentlichen, den topologischen Raum $\{1, 2\}^J$ zu betrachten.

4. Insbesondere ergibt sich aus 3., dass $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ mit der Produkttopologie homöomorph ist zu \mathbb{R}^{n+m} mit der Standardtopologie. Dazu kann man beispielsweise die von der Norm $\|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$ induzierte Metriken betrachten (vgl. Aufgabe 9).

Wie auch Teilräume und Quotientenräume erben topologische Produkte und Summen die charakteristische Eigenschaft der Initial- und Finaltopologie. Auch hier sind aber weitergehende Aussagen möglich, da die Projektionsabbildungen und Inklusionsabbildungen, respektive, surjektiv und injektiv sind, und man daher Kontrolle über deren Bilder und Urbilder hat. Dies führt auf die folgenden universellen Eigenschaften.

Satz 3.3.4: (Universelle Eigenschaft von Produkt- und Summentopologie)

Sei $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume. Dann sind die Produkttopologie und die Summentopologie die einzigen Topologien auf $\times_{i \in I} X_i$ und $\dot{\cup}_{i \in I} X_i$ mit den folgenden **universellen Eigenschaften**:

1. Die Projektionsabbildungen $\pi_i : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow (X_i, \mathcal{O}_i)$ sind stetig für alle $i \in I$. Zu jeder Familie $(f_i)_{i \in I}$ stetiger Abbildungen $f_i : (W, \mathcal{O}_W) \rightarrow (X_i, \mathcal{O}_i)$ gibt es genau eine stetige Abbildung $f : (W, \mathcal{O}_W) \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ mit $\pi_i \circ f = f_i$ für alle $i \in I$:

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\exists! f} & \prod_{i \in I} X_i \\ & \searrow f_i & \downarrow \pi_i \\ & & X_i. \end{array}$$

2. Die Inklusionsabbildungen $\iota_i : (X_i, \mathcal{O}_i) \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ sind stetig für alle $i \in I$. Zu jeder Familie $(g_i)_{i \in I}$ stetiger Abbildungen $g_i : (X_i, \mathcal{O}_i) \rightarrow (W, \mathcal{O}_W)$ gibt es genau eine stetige Abbildung $g : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow (W, \mathcal{O}_W)$ mit $g \circ \iota_i = g_i$ für alle $i \in I$:

$$\begin{array}{ccc} W & \xleftarrow{\exists! g} & \prod_{i \in I} X_i \\ & \swarrow g_i & \uparrow \iota_i \\ & & X_i \end{array}$$

Beweis:

1. Die Projektionsabbildungen $\pi_j : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j$ sind stetig per Definition der Initialtopologie. Ist $(f_i)_{i \in I}$ eine Familie stetiger Abbildungen $f_i : W \rightarrow X_i$, so betrachten wir die Abbildung $f : W \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$, $w \mapsto (f_i(w))_{i \in I}$, die die Bedingung $\pi_j \circ f(w) = \pi_j((f_i(w))_{i \in I}) = f_j(w)$ für alle $w \in W$ und damit $\pi_j \circ f = f_j$ für alle $j \in I$ erfüllt. Ist auch $f' : W \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ eine Abbildung mit $\pi_j \circ f' = f_j$ für alle $j \in I$, so gilt $\pi_j \circ f'(w) = f_j(w) = \pi_j \circ f(w)$ für alle $w \in W$ und damit $f \equiv f'$. Da die Abbildungen f_i stetig sind, ist nach der charakteristischen Eigenschaft der Initialtopologie auch f stetig.

Dass die Produkttopologie die einzige Topologie auf $\times_{i \in I} X_i$ mit dieser Eigenschaft ist, folgt aus der Eindeutigkeit der Initialtopologie in Satz 3.1.2. Denn ist \mathcal{O}' eine weitere Topologie auf $\times_{i \in I} X_i$ mit der universellen Eigenschaft, so sind sowohl $\text{id} : (\times_{i \in I} X_i, \mathcal{O}_\pi) \rightarrow (\times_{i \in I} X_i, \mathcal{O}')$ und auch $\text{id}' : (\times_{i \in I} X_i, \mathcal{O}') \rightarrow (\times_{i \in I} X_i, \mathcal{O}_\pi)$ stetig, da $\pi_i \circ \text{id}' : (\times_{i \in I} X_i, \mathcal{O}') \rightarrow (X_i, \mathcal{O}_i)$ und

$\pi_i \circ \text{id} : (\times_{i \in I} X_i, \mathcal{O}_\pi) \rightarrow (X_i, \mathcal{O}_i)$ stetig sind. Damit ist \mathcal{O}_π gleichzeitig gröber und feiner als \mathcal{O}' , und die beiden Topologien stimmen überein.

2. Analog zu 1. (Übung). □

Der Nutzen der universellen Eigenschaft ist wieder, dass sie als eine Unteroutine dient, die es einem erspart, Abbildungen in Produkträume oder aus topologischen Summen umständlich durch die Verkettung mit Projektionen und Inklusionen zu definieren und dann immer wieder ihre Wohldefiniertheit und Stetigkeit nachzuweisen. Der folgende Satz illustriert dieses Prinzip.

Satz 3.3.5: Für jeden topologischen Raum (X, \mathcal{O}) und jede Indexmenge I gilt

$$X^I := \prod_{i \in I} X = \text{Abb}(I, X).$$

Eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ von Abbildungen $f_n : I \rightarrow X$ konvergiert genau dann gegen $f : I \rightarrow X$ in $\prod_{i \in I} X$, wenn sie punktweise konvergiert.

Beweis:

Wir betrachten den topologischen Raum $(\overline{\mathbb{N}}_0, \mathcal{O}_{\overline{\mathbb{N}}_0})$ aus Satz 1.3.15. Dann entsprechen nach Satz 1.3.15 Funktionenfolgen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, die bezüglich der Produkttopologie gegen $f : I \rightarrow X$ konvergieren, stetigen Abbildungen $f^* : \overline{\mathbb{N}}_0 \rightarrow X^I$ mit

$$f^*(n) = \begin{cases} f_n & n \in \mathbb{N}_0 \\ f & n = \infty. \end{cases}$$

Eine punktweise gegen $f : I \rightarrow X$ konvergente Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ entspricht einer Familie $(f_i^*)_{i \in I}$ von stetigen Abbildungen $f_i^* : \overline{\mathbb{N}}_0 \rightarrow X$ mit

$$f_i^*(n) = \begin{cases} f_n(i) & n \in \mathbb{N}_0 \\ f(i) & n = \infty. \end{cases}$$

Die Projektionsabbildungen $\pi_i : \prod_{i \in I} X \rightarrow X$, $f \mapsto f(i)$ entsprechen der Auswertung einer Abbildung in Elementen $i \in I$.

Ist also $f^* : \overline{\mathbb{N}}_0 \rightarrow X^I$ stetig, so sind auch die Abbildungen $f_i^* = \pi_i \circ f^* : \overline{\mathbb{N}}_0 \rightarrow X$ stetig als Verkettung stetiger Abbildungen, und damit ist jede bezüglich der Produkttopologie konvergente Funktionenfolge auch punktweise konvergent. Umgekehrt definiert jede punktweise gegen f konvergente Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Familie $(f_i^*)_{i \in I}$ stetiger Abbildungen $f_i^* : \overline{\mathbb{N}}_0 \rightarrow X$. Nach der universellen Eigenschaft der Produkttopologie existiert genau eine stetige Abbildung $f^* : \overline{\mathbb{N}}_0 \rightarrow X^I$, für die alle Diagramme

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathbb{N}}_0 & \xrightarrow{f^*} & X^I \\ & \searrow f_i^* & \downarrow \pi_i \\ & & X \end{array}$$

kommutieren. Also konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ bezüglich der Produkttopologie gegen $f : I \rightarrow X$. □

Nachdem wir die universelle Eigenschaften von topologischen Produkten und Summen hergeleitet und ihre Anwendungen illustriert haben, untersuchen wir noch das Verhalten der Produkt- und Summentopologie bezüglich Zusammenhang und Trennung.

Satz 3.3.6: (Eigenschaften der Produkt- und Summentopologie)

Sei $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume, $\prod_{i \in I} X_i$ ihr Produkt, $\coprod_{i \in I} X_i$ ihre Summe und $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Dann gilt:

1. Ist (X_i, \mathcal{O}_i) ein T_k -Raum für alle $i \in I$, so sind auch $\prod_{i \in I} X_i$ und $\coprod_{i \in I} X_i$ T_k -Räume.
2. Ist (X_i, \mathcal{O}_i) (weg)zusammenhängend für alle $i \in I$, so ist auch $\prod_{i \in I} X_i$ (weg)zusammenhängend.
3. Gibt es $i \neq j \in I$ mit $X_i, X_j \neq \emptyset$, so ist $\prod_{i \in I} X_i$ nicht zusammenhängend.

Die T_4 -Eigenschaft vererbt sich im allgemeinen nicht auf topologische Produkte. Gegenbeispiele findet man in Steens Buch [S].

Beweis:

1. Wir beweisen die Aussage für T_3 -Räume. Die Beweise für $k \in \{0, 1, 2\}$ sind ähnlich (Übung). Nach Bemerkung 2.2.2, 4. reicht es, zu zeigen, dass jede Umgebung eines Punktes $x \in \prod_{i \in I} X_i$ oder $x \in \coprod_{i \in I} X_i$ eine abgeschlossene Umgebung von x enthält.

(a) Seien (X_i, \mathcal{O}_i) T_3 -Räume für alle $i \in I$, $\prod_{i \in I} X_i$ ihr Produktraum und U eine Umgebung von $x = (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$. Dann enthält U eine offene Basismenge O , die x enthält. Dann ist $O = \prod_{i \in I} O_i$ mit $x_i \in O_i \in \mathcal{O}_i$ für alle $i \in I$ und $O_i = X_i$ für fast alle $i \in I$. Da X_i ein T_3 -Raum ist, gibt es nach Bemerkung 2.2.2, 4. abgeschlossene Umgebungen $A_i \in \mathcal{U}(x_i)$ mit $x_i \in A_i \subseteq O_i$, wobei wir $A_i = X_i$ setzen, wenn $O_i = X_i$ ist. Wegen der Stetigkeit von π_i ist $\pi_i^{-1}(A_i)$ eine abgeschlossene Umgebung von x für alle $i \in I$. Damit ist auch der Schnitt $\prod_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} \pi_i^{-1}(A_i) = \bigcap_{i \in I, O_i \neq X_i} \pi_i^{-1}(A_i)$ eine abgeschlossene Umgebung von x als endlicher Schnitt abgeschlossener Umgebungen mit $x \in \prod_{i \in I} A_i \subseteq \prod_{i \in I} O_i \subseteq U$.

(b) Sei nun $x \in \prod_{i \in I} X_i$ und $U \subseteq \prod_{i \in I} X_i$ eine Umgebung von x . Dann gibt es ein $i \in I$ mit $x = (x', i) \in X_i \times \{i\}$ und $U' = \iota_i^{-1}(U)$ ist wegen der Stetigkeit von ι_i eine Umgebung von x' . Da X_i ein T_3 -Raum ist, gibt es eine abgeschlossene Umgebung A' von x' mit $A' \subseteq U'$. Dann gilt $x \in A := A' \times \{i\} \subseteq U$, und A ist abgeschlossen, da $\iota_i^{-1}(A) = A'$ und $\iota_j^{-1}(A) = \emptyset$ für alle $i \neq j \in I$ abgeschlossen sind. Da A' eine Umgebung von x' ist, gibt es eine offene Menge $O' \subseteq A'$ mit $x \in O' \subseteq A'$, und $O = O' \times \{i\}$ mit $\iota_i^{-1}(O) = O'$ und $\iota_j^{-1}(O) = \emptyset$ für $i \neq j \in I$ ist eine offene Menge mit $x \in O \subseteq A$. Damit ist $A \subseteq U$ eine abgeschlossene Umgebung von x .

2. (a) Wir beweisen zuerst, dass das Produkt von zwei zusammenhängenden topologischen Räumen zusammenhängend ist. Daraus folgt induktiv, dass jedes *endliche* Produkt zusammenhängender topologischer Räume zusammenhängend ist.

Seien (X_1, \mathcal{O}_1) und (X_2, \mathcal{O}_2) zusammenhängend. Ist $x_2 \in X_2$, so ist der Teilraum $Y_1 = X_1 \times \{x_2\}$ homöomorph zu X_1 , also zusammenhängend. Für jedes $x_1 \in X_1$ gilt daher für die Zusammenhangskomponenten $C(x_1, x_2) = C(y_1, x_2)$ für alle $y_1 \in X_1$. Analog folgt $C(x_1, x_2) = C(x_1, y_2)$ für $x_1 \in X_1, x_2, y_2 \in X_2$. Daher ist $C(x) = X_1 \times X_2$ für jedes $x \in X_1 \times X_2$, d.h. $X_1 \times X_2$ ist zusammenhängend.

Sei nun I beliebig und $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ zusammenhängende topologische Räume. Wir zeigen, dass für jeden Punkt $x \in X := \prod_{i \in I} X_i$ die Zusammenhangskomponente $C(x)$ mit X übereinstimmt. Da $C(x)$ abgeschlossen ist (Satz 2.1.15), reicht es einzusehen, dass $C(x)$ dicht in X ist.

Dazu sei $y \in X$ und $U \subseteq X$ eine Umgebung von y . Dann gibt es eine Menge $O = \prod_{i \in I} O_i$ aus der Basis der Produkttopologie, also mit $O_i \in \mathcal{O}_i$ für alle $i \in I$ und mit $J := \{i \in I \mid O_i \neq X_i\}$

endlich, so dass $y \in O \subseteq U$. Der Teilraum $V = \prod_{i \in I} V_i$ mit $V_j = X_j$ für $j \in J$ und $V_i = \{x_i\}$ für $i \in I \setminus J$ ist dann homöomorph zu $\prod_{j \in J} X_j$ und damit zusammenhängend nach dem ersten Beweisteil. Da $x \in V$ und V zusammenhängend ist, folgt $V \subseteq C(x)$. Da der Punkt $z = (z_i)_{i \in I}$ mit $z_j = y_j$ für $j \in J$ und $z_i = x_i$ für $i \in I \setminus J$ in $O \cap V$ liegt, gilt $\emptyset \neq O \cap V \subseteq O \cap C(x) \subseteq U \cap C(x)$. Damit ist $C(x)$ dicht in X und X zusammenhängend.

(b) Seien nun (X_i, \mathcal{O}_i) wegzusammenhängend für alle $i \in I$. Seien nun $(x_i)_{i \in I}, (x'_i)_{i \in I}$ in $\prod_{i \in I} X_i$. Da (X_i, \mathcal{O}_i) wegzusammenhängend ist, gibt es einen Weg $\gamma_i : [0, 1] \rightarrow X_i$ von x_i nach x'_i für alle $i \in I$. Nach der universellen Eigenschaft der Produkttopologie existiert damit eine eindeutig bestimmte stetige Abbildung $\gamma : [0, 1] \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ mit $\pi_i \circ \gamma = \gamma_i$ für alle $i \in I$. Diese ist ein Weg von $(x_i)_{i \in I}$ nach $(x'_i)_{i \in I}$, und damit ist $\prod_{i \in I} X_i$ wegzusammenhängend.

3. Sind $i \neq j \in I$ mit $X_i, X_j \neq \emptyset$, so sind die Mengen $U_1 = X_i \times \{i\}$ und $U_2 = \cup_{k \in I \setminus \{i\}} X_k \times \{k\}$ nichtleer, disjunkt und offen, denn $\iota_k^{-1}(X_j \times \{j\}) = X_j$ für $k = j$ und $\iota_k^{-1}(X_j \times \{j\}) = \emptyset$ für $k \neq j$ sind offen in X_k . Außerdem gilt $\prod_{k \in I} X_k = U_1 \cup U_2$ und damit ist $\prod_{i \in I} X_i$ nicht zusammenhängend. \square

Eine wichtige Anwendung der Produkttopologie ergibt sich daraus, dass algebraische Strukturen wie Gruppen, Ringe und Körper über Verknüpfungen definiert sind, also Abbildungen $\circ : X \times X \rightarrow X$ auf einer Menge X . Ist eine Topologie auf X gegeben, so können wir die Menge $X \times X$ mit der Produkttopologie ausstatten und fordern, dass die Verknüpfung *stetig* ist. Fordert man Stetigkeit für alle in der Definition auftretenden Abbildungen, so erhält man topologische Versionen dieser Strukturen. Dies ist vor allem im unendlichen bzw. unendlich-dimensionalen Fall wichtig, da Klassifikationsprobleme dort oft nur unter zusätzlichen Annahmen wie Stetigkeit gelöst werden können. Andererseits wird Stetigkeit auch in vielen Anwendungen benötigt.

Definition 3.3.7: Eine **topologische Gruppe** ist eine Gruppe (G, \circ) , zusammen mit einer Topologie \mathcal{O} auf G , so dass die Gruppenmultiplikation $\circ : G \times G \rightarrow G$ und die Inversion $i : G \rightarrow G, g \mapsto g^{-1}$ stetig sind.

Beispiel 3.3.8:

1. Jeder normierte reelle oder komplexe Vektorraum V ist eine topologische Gruppe mit der Vektoraddition und der durch die Norm induzierten metrischen Topologie. Dies ergibt sich aus der Dreiecksungleichung, der Homogenität der Norm und der Tatsache, dass die Produkttopologie auf $V \times V$ durch die Produktmetrik gegeben ist. (Übung).
2. Die Gruppe $(\mathbb{C}^\times, \cdot)$ und die Untergruppe (S^1, \cdot) sind topologische Gruppen bezüglich der Standardtopologie auf \mathbb{C} und der Teilraumtopologie auf $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.
3. Die Gruppe $GL(n, \mathbb{C})$ der invertierbaren komplexen $n \times n$ -Matrizen ist eine topologische Gruppe. Denn man kann $GL(n, \mathbb{C})$ als eine Teilmenge des reellen Vektorraums \mathbb{R}^{2n^2} auffassen, wodurch die Matrixmultiplikation und nach der Cramerschen Regel auch die Inversion stetige Abbildungen werden.
4. Jede Untergruppe einer topologischen Gruppe ist eine topologische Gruppe mit der Teilraumtopologie. Insbesondere gilt dies für Untergruppen von $GL(n, \mathbb{C})$ und $GL(n, \mathbb{R})$.
5. Jede Gruppe wird zu einer topologischen Gruppe, wenn sie mit der diskreten Topologie ausgestattet wird. Man spricht dann von einer **diskreten Gruppe**.

Analog zum Begriff der topologischen Gruppe erhält man auch den Begriff eines topologischen Vektorraums. Hier wird zusätzlich die Stetigkeit der Skalarmultiplikation gefordert und daher auch eine Topologie auf dem zugrundeliegenden Körper benötigt. Aus diesem Grund betrachtet man hier hauptsächlich die Körper \mathbb{R} und \mathbb{C} mit der Standardtopologie.

Definition 3.3.9: Ein **topologischer Vektorraum** ist ein Vektorraum $(V, +, \cdot)$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ mit einer Topologie \mathcal{O} , so dass die Vektoraddition $+ : V \times V \rightarrow V$ und die Skalarmultiplikation $\cdot : \mathbb{K} \times V \rightarrow V$ stetig sind bezüglich \mathcal{O} , der Produkttopologie auf $V \times V$ und der durch \mathcal{O} und die Standardtopologie auf \mathbb{K} induzierten Produkttopologie auf $\mathbb{K} \times V$.

Beispiel 3.3.10:

1. Jeder normierte reelle oder komplexe Vektorraum ist ein topologischer Vektorraum. Dies folgt aus Beispiel 3.3.8, der Homogenität der Norm und der Tatsache, dass sich die Topologie auf $\mathbb{K} \times V$ durch eine Produktmetrik beschreiben lässt.
2. Besonders wichtige Beispiele sind **Banachräume**, normierte Vektorräume, in denen jede Cauchyfolge konvergiert, und **Hilberträume**, komplexe Vektorräume mit Skalarprodukten, die mit den zugehörigen Normen zu Banachräumen werden. Alle endlich-dimensionalen normierten Vektorräume über \mathbb{C} oder \mathbb{R} sind Banachräume und alle endlich-dimensionalen unitären Vektorräume sind Hilberträume.
3. Der **Schwartz-Raum** ist der Vektorraum

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{|x^\alpha \partial^\beta f(x)|\} < \infty \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n\}$$

wobei für Multi-Indizes $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}_0^n$

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, \quad \partial^\beta := \partial_{x_1}^{\beta_1} \cdots \partial_{x_n}^{\beta_n}.$$

Für jede Familie $(c_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^n}$ positiver Konstanten, für die die Reihe $\sum_{\alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^n} c_{\alpha,\beta}$ konvergiert, ist die Abbildung $d : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$d(f, g) = \sum_{\alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^n} c_{\alpha,\beta} \frac{\|f - g\|_{\alpha,\beta}}{1 + \|f - g\|_{\alpha,\beta}}$$

eine Metrik auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und verleiht $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ die Struktur eines topologischen Vektorraums. Dieser topologische Vektorraum ist nicht normiert.

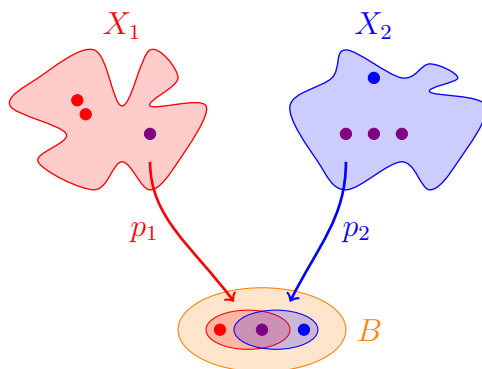
3.4 Pullback und Pushout

In diesem Abschnitt betrachten wir zwei weitere wichtige Konstruktionen für topologische Räume, die durch Kombinieren zweier Initial- oder Finaltopologien entstehen. Der *Pullback* ergibt sich aus einer Kombination zweier Initialtopologien, nämlich der Produkt- und Teilraumtopologie, das *Pushout* aus einer Kombination zweier Finaltopologien, nämlich der Summen- und Quotiententopologie. Beide besitzen wichtige Anwendungen in der Topologie und Geometrie und erlauben es uns, geometrische Konstruktionen, wie das Verdrehen von Möbiusbändern oder das Verkleben topologischer Räume abstrakt und effizient zu erfassen, also ohne Koordinaten, Einbettungen in den \mathbb{R}^n oder Metriken zu benutzen.

Definition 3.4.1: Seien (X_1, \mathcal{O}_1) , (X_2, \mathcal{O}_2) und (B, \mathcal{O}_B) topologische Räume und $p_i : X_i \rightarrow B$ für $i \in \{1, 2\}$ stetige Abbildungen. Dann heißt der topologische Raum

$$X_1 \times_B X_2 = \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 \mid p_1(x_1) = p_2(x_2)\} \subseteq X_1 \times X_2$$

mit der von der Produkttopologie auf $X_1 \times X_2$ induzierten Teilraumtopologie **Pullback** oder **Faserprodukt** von X_1 und X_2 entlang der Abbildungen $p_i : X_i \rightarrow B$.



Das Konzept des Pullbacks enthält als Spezialfälle bekannte Begriffe aus der Analysis und Topologie wie den Produktraum, den Graphen einer Abbildung und ihr Urbild. Er zeigt also, dass diese Teil eines allgemeineren Konzeptes sind.

Beispiel 3.4.2:

1. Der Pullback des Einpunktraums $B = \{p\}$ ist der Produktraum: $X_1 \times_{\{p\}} X_2 = X_1 \times X_2$.
2. Ist $(B, \mathcal{O}_B) = (X_2, \mathcal{O}_2)$ und $p_2 = \text{id}_{X_2} : X_2 \rightarrow X_2$, so ist der Pullback der Graph der Abbildung $p_1 : X_1 \rightarrow X_2$

$$X_1 \times_B X_2 = \{(x_1, p_1(x_1)) \mid x_1 \in X_1\} = \text{graph}(p_1).$$

3. Ist $X_2 = \{x\}$ der Einpunktraum und $p_2 : X_2 \rightarrow B$, $x \mapsto b$, so ist der Pullback $X_1 \times_B X_2 = p_1^{-1}(b) \times \{x\}$ homöomorph zum Urbild $p_1^{-1}(b)$.

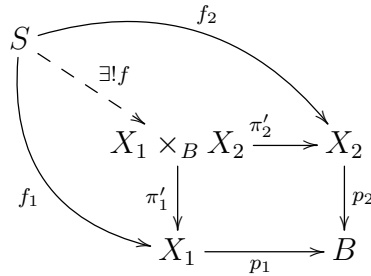
Da der Pullback ein Teilraum eines Produktraums ist, liefert das Kombinieren der universellen Eigenschaften von Produkt- und Teilraumtopologie direkt eine universelle Eigenschaft für den Pullback. Bezeichnet man mit $\pi_i : X_1 \times X_2 \rightarrow X_i$ die Projektionsabbildungen für den Produktraum, mit $\iota : X_1 \times_B X_2 \rightarrow X_1 \times X_2$ die Inklusionsabbildung und setzt $\pi'_i := \pi_i \circ \iota : X_1 \times_B X_2 \rightarrow X_i$, so erhält man den folgenden Satz.

Satz 3.4.3: (universelle Eigenschaft des Pullbacks)

Seien (X_1, \mathcal{O}_1) , (X_2, \mathcal{O}_2) und (B, \mathcal{O}_B) topologische Räume und $p_i : X_i \rightarrow B$ stetige Abbildungen. Das folgende Diagramm von stetigen Abbildungen kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} X_1 \times_B X_2 & \xrightarrow{\pi'_2} & X_2 \\ \pi'_1 \downarrow & & \downarrow p_2 \\ X_1 & \xrightarrow{p_1} & B \end{array}$$

Für alle Paare (f_1, f_2) von stetigen Abbildungen $f_i : (S, \mathcal{O}_S) \rightarrow (X_i, \mathcal{O}_i)$ mit $p_1 \circ f_1 = p_2 \circ f_2$ existiert genau eine stetige Abbildung $f : (S, \mathcal{O}_S) \rightarrow X_1 \times_B X_2$, so dass das folgende Diagramm kommutiert



Beweis:

Das erste Diagramm kommutiert, da per Definition des Pullbacks $p_1 \circ \pi'_1 = p_2 \circ \pi'_2$ gilt. Die Existenz und Eindeutigkeit der Abbildung f ergibt sich aus der universellen Eigenschaft des Teilraums und des Produktraums. Sind $f_i : S \rightarrow X_i$ stetige Abbildungen, so existiert nach der universellen Eigenschaft des Produktraums genau eine stetige Abbildung $f' : S \rightarrow X_1 \times X_2$ mit $\pi_i \circ f' = f_i$. Gilt $p_1 \circ f_1 = p_2 \circ f_2$, so folgt $p_1 \circ \pi_1 \circ f' = p_1 \circ f_1 = p_2 \circ f_2 = p_2 \circ \pi_2 \circ f'$, und somit gilt $f'(S) \subseteq X_1 \times_B X_2$. Also existiert nach der universellen Eigenschaft des Teilraums genau eine stetige Abbildung $f : S \rightarrow X_1 \times_B X_2$ mit $\iota \circ f = f'$. Daraus folgt $\pi'_i \circ f = \pi_i \circ \iota \circ f = \pi_i \circ f' = f_i$, und somit kommutieren die zwei Dreiecke im Diagramm. Das Kommutieren des äußeren Vierecks ergibt sich aus dem Kommutieren des inneren Vierecks und der zwei Dreiecke. \square

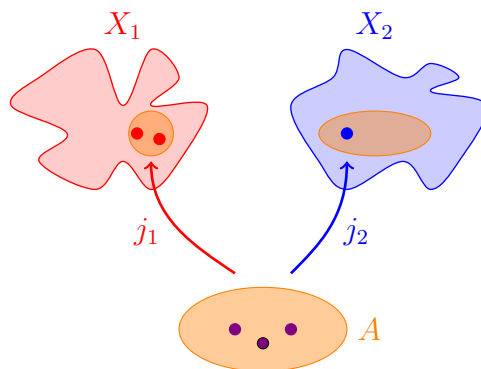
Betrachtet man Finaltopologien statt Initialtopologien, so erhält man eine zum Pullback duale Konstruktion, in der der Produktraum durch eine topologische Summe $X_1 + X_2$ mit zugehörigen Inklusionsabbildungen $\iota_i : X_i \rightarrow X_1 + X_2$ und der Teilraum durch einen Quotientenraum $(X_1 + X_2) / \sim$ mit der zugehörigen kanonischen Surjektion $\pi : X_1 + X_2 \rightarrow (X_1 + X_2) / \sim$ ersetzt wird. Dies ist der sogenannte *Pushout*.

Definition 3.4.4: Seien (X_1, \mathcal{O}_1) , (X_2, \mathcal{O}_2) und (A, \mathcal{O}_A) topologische Räume und $j_i : A \rightarrow X_i$ stetige Abbildungen für $i \in \{1, 2\}$. Dann heißt der topologische Raum

$$X_1 +_A X_2 = (X_1 + X_2) / \sim \text{ mit der Äquivalenzrelation } \iota_1 \circ j_1(a) \sim \iota_2 \circ j_2(a) \forall a \in A, \quad (7)$$

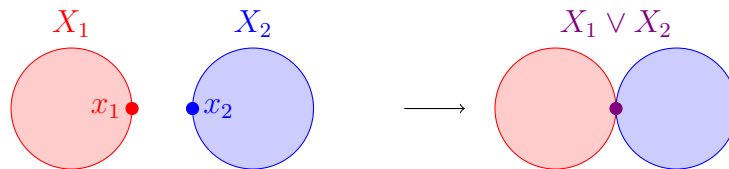
und der von der Summentopologie auf $X + Y$ induzierten Quotiententopologie das **Pushout** von X_1 und X_2 entlang $j_i : A \rightarrow X_i$.

Bemerkung 3.4.5: Die Topologie auf dem Pushout $X_1 +_A X_2$ ist gerade die von den Abbildungen $\iota'_i = \pi \circ \iota_i : X_i \rightarrow X_1 \dot{\cup} X_2 / \sim$ induzierte Finaltopologie auf $X_1 \dot{\cup} X_2 / \sim$ (Aufgabe 37). Eine Teilmenge $O \subseteq X_1 +_A X_2$ ist also offen (abgeschlossen) genau dann, wenn die Mengen $\iota'^{-1}_i(O) \subseteq X_i$ offen (abgeschlossen) sind für $i = 1, 2$.



Beispiel 3.4.6:

1. Wählt man $A = \emptyset$, so sind $j_i : A \rightarrow X_i$ die leeren Abbildungen. Die resultierende Äquivalenzrelation auf $X_1 + X_2$ ist die triviale Äquivalenzrelation, und man erhält die topologische Summe $X_1 +_{\emptyset} X_2 = X_1 + X_2$.
2. Sind $A = \{a\}$ der Einpunktraum und $x_i \in X_i$ ausgewählte Punkte, so heißt das Pushout $X_1 +_{\{a\}} X_2$ entlang der Abbildungen $j_i : \{a\} \rightarrow X_i, a \mapsto x_i$ das **Wedge-Produkt** von X_1 und X_2 in x_1 und x_2 und wird mit $X_1 \vee X_2$ bezeichnet.



Wie auch der Pullback besitzt der Pushout eine universelle Eigenschaft, die sich direkt aus den universellen Eigenschaften von topologischen Summen und Quotienten ergibt. Bezeichnen wir mit $\iota_i : X_i \rightarrow X_1 + X_2, x \mapsto (x, i)$ die Inklusionsabbildungen, mit $\pi : X_1 + X_2 \rightarrow X_1 +_A X_2$ die kanonische Surjektion und setzen $\iota'_i = \pi \circ \iota_i : X_i \rightarrow X_1 +_A X_2$, so erhalten wir den folgenden Satz der dual zu Satz 3.4.3 ist, also aus Satz 3.4.3 entsteht, indem die Richtungen aller Pfeile in kommutierenden Diagrammen umgedreht werden. Der Beweis ist völlig analog zum Beweis von Satz 3.4.3 (Übung).

Satz 3.4.7: (Universelle Eigenschaft des Pushouts)

Seien $(X_1, \mathcal{O}_1), (X_2, \mathcal{O}_2)$ und (A, \mathcal{O}_A) topologische Räume und $j_i : A \rightarrow X_i$ stetige Abbildungen für $i \in \{1, 2\}$. Das folgende Diagramm von stetigen Abbildungen kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
 X_1 +_A X_2 & \xleftarrow{\iota'_2} & X_2 \\
 \iota'_1 \uparrow & & \uparrow j_2 \\
 X_1 & \xleftarrow{j_1} & A
 \end{array}$$

Für alle Paare (g_1, g_2) von stetigen Abbildungen $g_i : (X_i, \mathcal{O}_i) \rightarrow (T, \mathcal{O}_T)$ mit $g_1 \circ j_1 = g_2 \circ j_2$ existiert genau eine stetige Abbildung $g : X_1 +_A X_2 \rightarrow (T, \mathcal{O}_T)$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

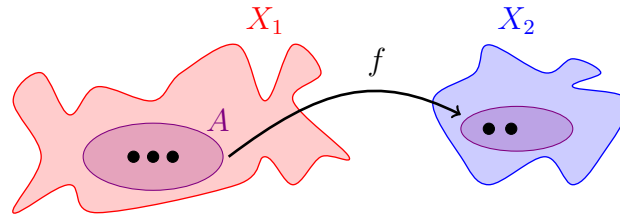
$$\begin{array}{ccc}
 T & & \\
 \uparrow & \xleftarrow{g_2} & \\
 X_1 +_A X_2 & \xleftarrow{\iota'_2} & X_2 \\
 \uparrow \iota'_1 & & \uparrow j_2 \\
 X_1 & \xleftarrow{j_1} & A
 \end{array}$$

$\exists! g$ (indicated by a dashed arrow from T to $X_1 +_A X_2$)
 g_1 (indicated by a curved arrow from X_1 to T)

Ein wichtiger Spezialfall des Pushouts ist das sogenannte *Anheften* oder *Ankleben* eines topologischen Raums an einen anderen. Dies erfasst abstrakt den Anklebevorgang, wie man ihn etwa mit Papier kennt. Einzelne Punkte des anzuklebenden Raums werden mit Klebstoff bestrichen

und einzeln oder zu mehreren auf die Punkte des anderen topologischen Raums aufgedrückt. Dabei können auch mehrere topologische Räume gleichzeitig angeklebt werden, indem man ihre topologische Summe anklebt.

Definition 3.4.8: Sind (X_1, \mathcal{O}_1) und (X_2, \mathcal{O}_2) topologische Räume, $A \subseteq X_1$ ein Teilraum, $j_1 = \iota_A : A \rightarrow X_1, a \rightarrow a$ die Inklusionsabbildung und $j_2 = f : A \rightarrow X_2$, so sagt man der Pushout $X_1 +_A X_2$ entstehe durch **Anheften** oder **Ankleben** von X_1 an X_2 mit der **Anheftungsabbildung** f und schreibt $X_1 +_f X_2 := X_1 +_A X_2$.



Bemerkung 3.4.9:

1. Entsteht $X_1 +_f X_2 = (X_1 + X_2) / \sim$ durch Anheften von X_1 an X_2 mit der Anheftungsabbildung $f : A \rightarrow X_2$ so sind die Äquivalenzklassen eines Punkts in $z \in X_1 + X_2$

$$[z] = \begin{cases} \{z\} & z \notin \iota_1(A) \cup \iota_2 \circ f(A) \\ \{z\} \cup \{\iota_1(a') \mid a' \in A, f(a') = z\} & z = (z', 2) \in \iota_2 \circ f(A) \\ \{\iota_2 \circ f(a)\} \cup \{\iota_1(a') \mid a' \in A, f(a') = f(a)\} & z = (a, 1) \in \iota_1(A) \end{cases}$$

wobei $\iota_i : X_i \rightarrow X_1 + X_2, x \mapsto (x, i)$ die Inklusionsabbildungen für die Summe bezeichnen. Das Anheften von X_1 an X_2 identifiziert also Punkte $a \in A \subseteq X_1$ mit ihren Bildern $f(a) \in X_2$ und damit auch mit allen Punkten $a' \in A$ mit $f(a) = f(a')$.

Unterdrücken wir die aufwändigere Notation und denken uns X_1 und X_2 einfach als Teilmengen von $X = X_1 + X_2$, so sind alle Äquivalenzklassen in $X \setminus (A \dot{\cup} f(A))$ einelementig und die anderen von der Form $\{z\} \dot{\cup} f^{-1}(z), z \in f(A)$.

2. Es folgt, dass die Abbildung $\iota'_2 = \pi \circ \iota_2 : X_2 \rightarrow X_1 +_f X_2$ injektiv ist. Die Abbildung $\iota'_1 = \pi \circ \iota_1 : X_1 \rightarrow X_1 +_f X_2$ ist injektiv genau dann, wenn f injektiv ist.
3. Die universelle Eigenschaft des Pushouts besagt, dass zu allen Paaren von stetigen Abbildungen $g_1 : X_1 \rightarrow T$ und $g_2 : X_2 \rightarrow T$ mit $g_1|_A = g_2 \circ f$ genau eine stetige Abbildung $g : X_1 +_f X_2 \rightarrow T$ existiert mit $g \circ \pi \circ \iota_1 = g_1$ und $g \circ \pi \circ \iota_2 = g_2$.

Beispiel 3.4.10:

1. Ist $X_1 = \emptyset$ und X_2 beliebig, so ist die leere Abbildung $f : \emptyset \rightarrow X_2$ die einzig mögliche Anheftungsabbildung. Man erhält $\emptyset +_f X_2 = X_2$.
2. Ist $X_2 = \{x\}$ der Einpunktraum, so gibt es nur eine stetige Abbildung $f : A \rightarrow X_2, a \mapsto x$. Die Äquivalenzrelation auf $X_1 + \{x\}$ ist gegeben durch $(a, 1) \sim (a', 1)$ und $(x, 2) \sim (a, 1)$ für alle $a, a' \in A$. Damit ist das Pushout $X_1 +_f X_2$ homöomorph zu dem Raum X_1/A , der durch Kollabieren des Teilraums $A \subseteq X_1$ entsteht (Beispiel 3.2.8).

Möchte man durch Ankleben systematisch topologische Räume konstruieren, so bietet es sich an, mit möglichst einfachen Grundbausteinen zu arbeiten. Dies sind beispielsweise abgeschlossene n -Bälle $D^n = B_{\leq 1}(0) \subseteq \mathbb{R}^n$ für $n \geq 1$, die entlang ihrer Ränder $S^{n-1} = \partial B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^n$ angeklebt werden. Indem man mit einem diskreten topologischen Raum X_0 beginnt und schrittweise X_k durch Anheften von k -Bällen an X_{k-1} entlang ihrer Ränder an konstruiert, kann man so immer kompliziertere topologische Räume aufbauen. Diese Prozedur kann entweder nach endlich vielen Schritten beendet oder ins Unendliche fortgesetzt werden. Die so entstehenden topologischen Räume nennt man *CW-Komplexe* oder *Zellenkomplexe*.

Definition 3.4.11: Ist in Definition 3.4.8

- $X_1 = \coprod_{i \in I} D^n$ eine Summe von abgeschlossenen n -Bällen $D^n \subseteq \mathbb{R}^n$,
- $A = \coprod_{i \in I} S^{n-1} \subseteq X_1$ die Summe ihrer Ränder $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$,
- $f : \coprod_{i \in I} S^{n-1} \rightarrow X_2$ die von einer Familie $(f_i)_{i \in I}$ stetiger Abbildungen $f_i : S^{n-1} \rightarrow X_2$ durch die universelle Eigenschaft der Summe induzierte Abbildung,

so sagt man das Pushout $X_1 +_A X_2$ entstehe durch **Anheften** von n -**Zellen** an X_2 mit der Familie von **Anheftungsabbildungen** $(f_i)_{i \in I}$.

Definition 3.4.12: Ein **CW-Komplex** oder **Zellenkomplex** ist ein Hausdorffraum (X, \mathcal{O}) zusammen mit einer aufsteigenden Kette von Teilräumen $X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots$, so dass

- (i) $X = \cup_{n \in \mathbb{N}_0} X_n$,
- (ii) X_0 mit der Teilraumtopologie diskret ist,
- (iii) für alle $k \in \mathbb{N}$ der topologische Raum X_k homöomorph ist zu einem topologischen Raum, der durch Anheften von k -Zellen an X_{k-1} entsteht.

Der topologische Raum X_k mit der Teilraumtopologie heißt das k -**Skelett** des CW-Komplexes (X, \mathcal{O}) . Ist X_0 endlich und $X_k = X_1$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so spricht man auch von einem **Graphen**. Ist $X_k = X_n$ für alle $k \geq n$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$ sprechen wir von einem **endlichen** CW-Komplex.

Definition 3.4.12 erlaubt es einem einerseits, gegebene topologische Räume mit der Struktur eines CW-Komplexes auszustatten, indem man geeignete Unterräume X_n für $n \in \mathbb{N}_0$ identifiziert. Dabei darf insbesondere auch $X_{k+1} = X_k$ gesetzt werden, was der leeren Indexmenge $I = \emptyset$ in Definition 3.4.11 und dem Anheften des leeren topologischen Raums aus Beispiel 3.4.10, 1. entspricht. Wir konzentrieren uns im folgenden auf Beispiele, wo $X_{k+1} = X_n$ für alle $k \geq n$ und ein gegebenes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

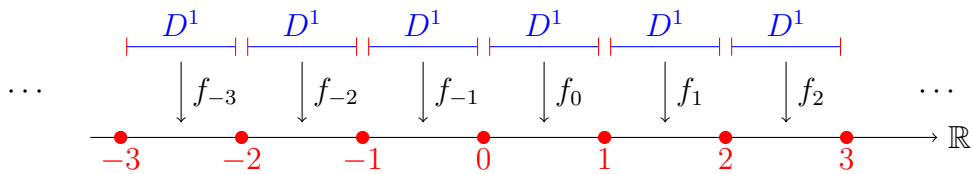
Umgekehrt kann man auch einen CW-Komplex konstruieren, indem man für alle $k \in \mathbb{N}_0$ die Räume (X_k, \mathcal{O}_k) durch Anheften von k -Zellen an $(X_{k-1}, \mathcal{O}_{k-1})$ konstruiert. Den CW-Komplex X ist dann die (nicht-disjunkte) Vereinigung $X = \cup_{n \in \mathbb{N}_0} X_n$, wobei hier X_{n-1} über die Inklusion $\iota'_2 : X_{n-1} \rightarrow X_n$ mit einem Teilraum von X_n identifiziert wird (vgl. Bemerkung 3.4.9, 2.) und X mit der durch die Inklusionsabbildungen $\iota_k : X_k \rightarrow X$ induzierten Finaltopologie versehen wird. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ ist also genau dann offen, wenn $A \cap X_k$ offen in X_k ist für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Beendet man die Konstruktion eines CW-Komplexes nach endlich vielen Schritten, indem man $X_k = X_n$ für alle $k \geq n$ setzt, ist diese Forderung automatisch erfüllt, d. h. die Topologie auf $X = X_n$ ist automatisch die von den Inklusionen $\iota_k : X_k \rightarrow X$ induzierte Finaltopologie.

Beispiel 3.4.13: Der topologische Raum \mathbb{R} mit der Standardtopologie hat die Struktur eines CW-Komplexes mit $X^0 = \mathbb{Z}$ und $X^k = \mathbb{R}$ für $k \in \mathbb{N}$. Er entsteht durch Anheften von 1-Zellen $D^1 = [-1, 1]$ an den diskreten topologischen Raum $X_0 = \mathbb{Z}$ mit der Familie $(f_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ von Anheftungsabbildungen $f_i : \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{Z}$ mit $f_i(-1) = i$ und $f_i(1) = i + 1$.

Denn die Abbildungen $g_1 : \amalg_{\mathbb{Z}} D^1 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, i) \mapsto \frac{1}{2}(x + 1) + i$ und $g_2 = \iota_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, $i \mapsto i$ erfüllen die Bedingung $g_1(\pm 1, i) = \frac{1}{2}(1 \pm 1) + i = f_i(\pm 1) = g_2 \circ f_i(\pm 1)$ aus Bemerkung 3.4.9, 3. und induzieren damit eine stetige Abbildung $g : \amalg_{\mathbb{Z}} D^1 +_f \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g \circ \iota'_1 = g \circ \iota'_2$. Sie ist bijektiv mit Umkehrabbildung

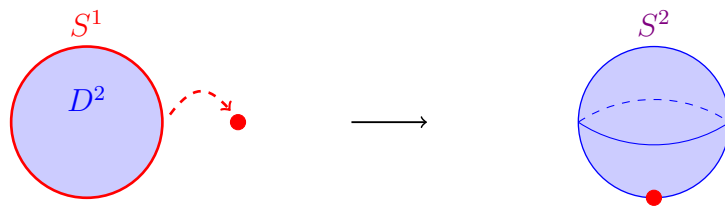
$$g^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \amalg_{\mathbb{Z}} D^1 +_f \mathbb{Z}, \quad x \mapsto \pi(2(x - [x]_G) - 1, [x]_G),$$

wobei $\pi : X_1 + X_2 \rightarrow X_1 +_f X_2$ die kanonische Surjektion und $[x]_G = \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq [x]\}$ die Gauß-Klammer bezeichnet. Diese Abbildung ist stetig, denn die Gauß-Klammer ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, und es gilt $\pi(1, i) = \pi(-1, i + 1)$ für alle $i \in \mathbb{Z}$.

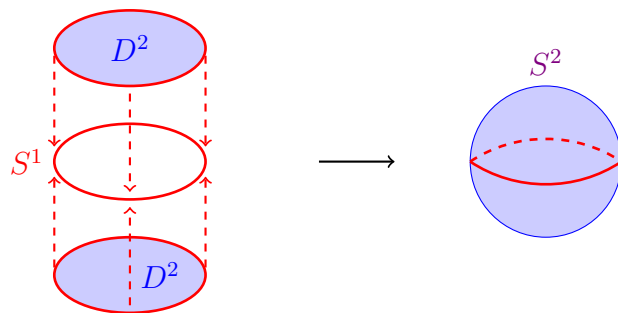


Beispiel 3.4.14:

- Die n -Sphäre $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$ ist ein CW-Komplex mit $X^0 = \dots = X^{n-1} = \{-e_{n+1}\}$ und $X^k = S^n$ für $k \geq n$. Sie entsteht durch Anheften einer n -Zelle an den Einpunktraum, was nach Beispiel 3.4.10, 2. dem Kollabieren deren Randes entspricht: $D^n / \partial D^n \cong S^n$



- Die n -Sphäre S^n ist ein CW-Komplex mit $X^k = S^n \cap \text{span}\{e_1, \dots, e_{k+1}\}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Denn sie entsteht durch Anheften zweier n -Zellen an die $(n - 1)$ -Sphäre $S^{n-1} = S^n \cap \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$ mit $f_1 = f_2 = \text{id} : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$.



Eine weitere Art, topologische Räume systematisch zu verkleben, ergibt sich, wenn die betrachteten Räume alle hausdorffsch und lokal homöomorph zu einem Standardraum sind. In diesem Fall kann man sich eine offene Referenzmenge im Standardraum wählen, die Bilder ihres Inneren aus den betrachteten topologischen Räumen entfernen und die zwei so entstehenden Räume mit den lokalen Homöomorphismen entlang der Ränder des entfernten Teilraums verkleben.

Dabei bietet es sich an, einen möglichst einfachen Standardraum zu wählen, nämlich den \mathbb{R}^n mit der Standardtopologie. Hausdorffräume, die lokal homöomorph zum \mathbb{R}^n sind, werden als *topologische Mannigfaltigkeiten* bezeichnet und spielen eine sehr wichtige Rolle in Topologie und Geometrie.

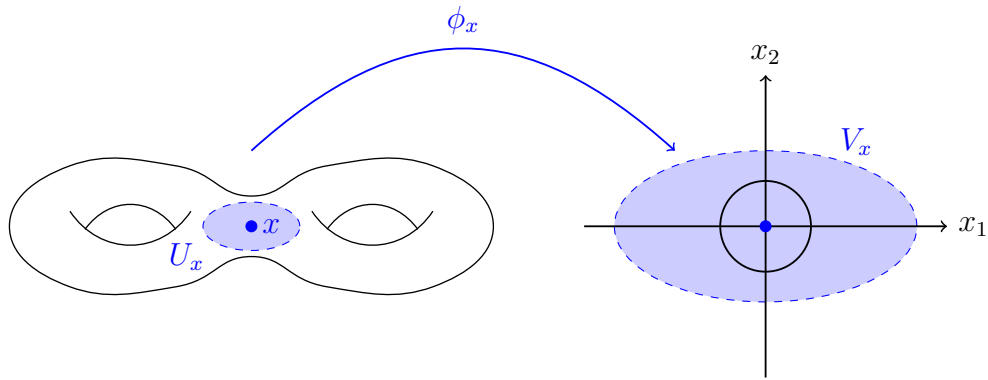
Definition 3.4.15: Eine **topologische Mannigfaltigkeit** der Dimension $n \in \mathbb{N}_0$ ist ein Hausdorffraum (X, \mathcal{O}) , der lokal homöomorph zum \mathbb{R}^n ist: zu jedem Punkt $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung $x \in U_x \in \mathcal{O}$ und einen Homöomorphismus $\phi_x : U_x \rightarrow V_x$ auf eine offene Teilmenge $V_x \subseteq \mathbb{R}^n$.

Beispiel 3.4.16:

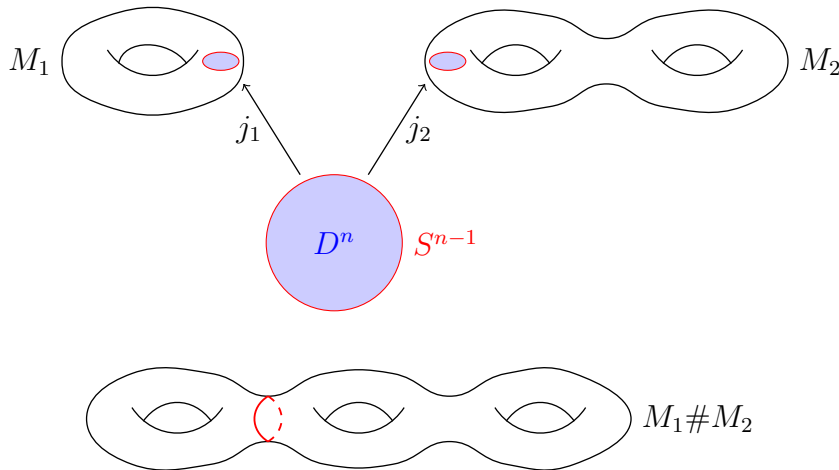
1. Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^m sind topologische Mannigfaltigkeiten. Insbesondere sind die n -Sphäre und die offene n -Kugel topologische Mannigfaltigkeiten der Dimension n , und der Torus ist eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension 2.
2. Der **reell projektive Raum** ist der Quotient $\mathbb{R}P^n = S^n / \sim$ der n -Sphäre S^n bezüglich der Äquivalenzrelation $x \sim y \Leftrightarrow y \in \{\pm x\}$, die die Antipodenpunkte identifiziert. Er ist eine n -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit (siehe Aufgabe 54). Seine Elemente entsprechen den eindimensionalen linearen Unterräumen des \mathbb{R}^{n+1} .
3. Der **komplex projektive Raum** $\mathbb{C}P^n$ ist der Quotient $(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$ bezüglich der Äquivalenzrelation $x \sim x' \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^\times : x' = \lambda x$. Er ist eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension $2n$ (siehe Aufgabe 56).

Man kann zeigen, dass die Dimension einer topologischen Mannigfaltigkeit eindeutig ist. Das folgt aus der Aussage, dass eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^n nie homöomorph zu einer offenen Teilmenge des \mathbb{R}^m mit $m \neq n$ ist. Der Beweis der letzten Aussage benötigt aber fortgeschrittenere Methoden aus der algebraischen Topologie.

Ist (X, \mathcal{O}) eine topologische Mannigfaltigkeit und $x \in X$, so können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $\phi_x(x) = 0 \in \mathbb{R}^n$ und $D^n = B_{\leq 1}(0) \subseteq V_x$ gilt. Dies können wir erreichen, indem wir den Homöomorphismus $\phi_x : U_x \rightarrow V_x$ mit einer geeigneten Translation und Streckung im \mathbb{R}^n verketten. Für zwei n -dimensionale topologische Mannigfaltigkeiten (M_i, \mathcal{O}_i) mit ausgewählten Punkten $x_i \in M_i$ können wir dann das Bild der offenen Kugel $\overset{\circ}{D}^n$ unter dem lokalen Homöomorphismen $\phi_{x_i}^{-1} : U_{x_i} \rightarrow V_{x_i}$ aus M_i ausschneiden und die so entstehenden Ränder identifizieren, die homöomorph zur $(n - 1)$ -Sphäre $S^{n-1} = \partial B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^n$ sind.

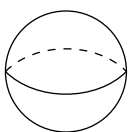


Definition 3.4.17: Seien (M_1, \mathcal{O}_1) und (M_2, \mathcal{O}_2) n -dimensionale topologische Mannigfaltigkeiten, $x_i \in M_i$ und $\phi_i : U_i \rightarrow V_i$ Homöomorphismen von offenen Umgebungen $x_i \in U_i \subseteq M_i$ in offene Teilmengen $V_i \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\phi_i(x_i) = 0$ und $D^n \subseteq V_i$. Dann heißt das Pushout von $X_i = M_i \setminus \phi_i^{-1}(\overset{\circ}{D}^n)$ entlang $j_i = \phi_i^{-1}|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \rightarrow X_i$ die **zusammenhängende Summe** von (M_1, \mathcal{O}_1) und (M_2, \mathcal{O}_2) und wird mit $M_1 \# M_2$ bezeichnet.

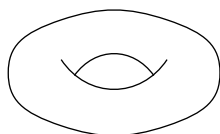


Man kann zeigen, dass die zusammenhängende Summe $M_1 \# M_2$ zweier topologischer Mannigfaltigkeiten der Dimension n wieder eine n -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ist. Sind M_1 und M_2 zusammenhängend und orientiert, so kann man außerdem zeigen, dass die zusammenhängende Summe $M_1 \# M_2$ nicht von der Wahl der Punkte $x_i \in M_i$ und der (mit der Orientierung kompatiblen) Wahl der Homöomorphismen $\phi_i : U_i \rightarrow V_i$ abhängt. Alle so konstruierten topologischen Mannigfaltigkeiten $M_1 \# M_2$ sind dann nämlich homöomorph. Man kann diese Konstruktion dann auch iterieren, und dabei kommt es nicht darauf an, wo und in welcher Reihenfolge die zusammenhängenden Summen gebildet werden.

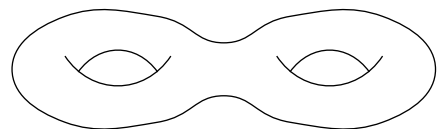
Beispiel 3.4.18: Eine g -fache zusammenhängende Summe $T^{\#g} = T \# T \# \dots \# T$ von Tori bezeichnet man auch als **orientierte Fläche** vom **Geschlecht** g , wobei man $T^{\#0} = S^2$ setzt.



orientierte Fläche
vom Geschlecht $g = 0$



orientierte Fläche
vom Geschlecht $g = 1$

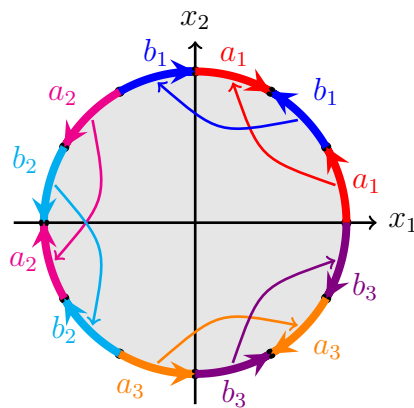


orientierte Fläche
vom Geschlecht $g = 2$

Statt als g -fache zusammenhängende Summe von Tori lässt sich eine Fläche vom Geschlecht g auch als Quotient der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe bezüglich einer Äquivalenzrelation realisieren, die die Punkte auf deren Rand identifiziert. Dabei sind dann die Äquivalenzklassen von Punkten im Inneren der Kreisscheibe einelementig, die Äquivalenzklassen von Randpunkten $e^{2\pi i x}$ mit $x \notin \mathbb{Z}/4g$ enthalten genau zwei Punkte, und die Äquivalenzklasse eines Punktes $x = e^{2\pi i n/4g}$ mit $n \in \mathbb{Z}$ genau $4g$ Punkte. In manchen Lehrbüchern wird statt der Kreisscheibe auch ein reguläres $4g$ -gon verwendet, aber dies liefert das gleiche Ergebnis, da es offensichtlich homöomorph zur abgeschlossenen Kreisscheibe ist.

Lemma 3.4.19: Für $g \in \mathbb{N}$ ist die g -fache zusammenhängende Summe $T^{\#g}$ ist homöomorph zum Quotienten D^2 / \sim der Kreisscheibe $D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ mit der Äquivalenzrelation

$$e^{2\pi i(4k+x)/4g} \sim e^{2\pi i(4k+3-x)/4g}, \quad e^{2\pi i(4k+1+x)/4g} \sim e^{2\pi i(4k+4-x)/4g} \quad \text{für } x \in [0, 1], k \in \{0, \dots, g-1\}.$$



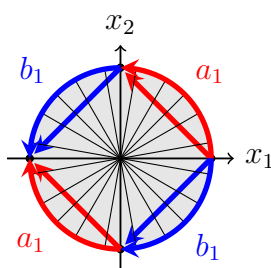
Filme, die die Konstruktion dieses Quotienten visualisieren, finden sich beispielsweise auf

- http://www.josleys.com/show_gallery.php?galid=368
- http://www.josleys.com/show_gallery.php?galid=369
- http://www.josleys.com/show_gallery.php?galid=370.

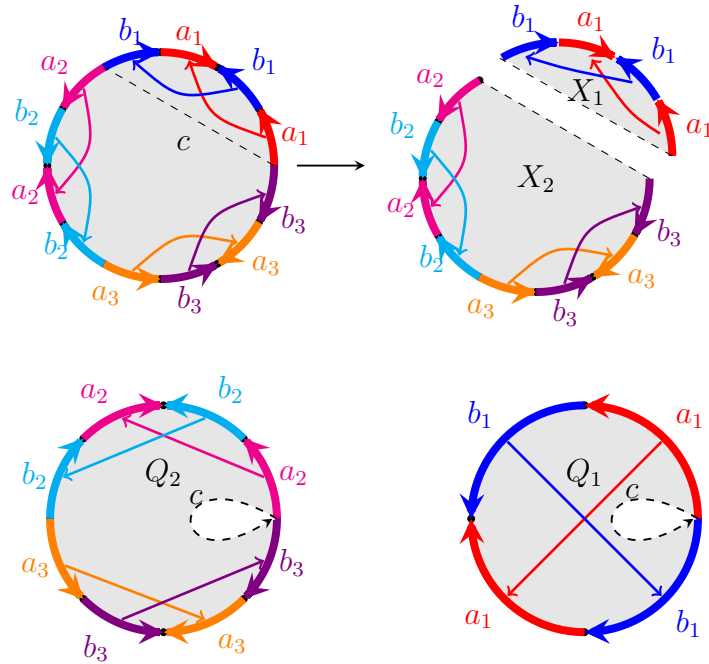
Beweis:

Dies folgt per Induktion über g .

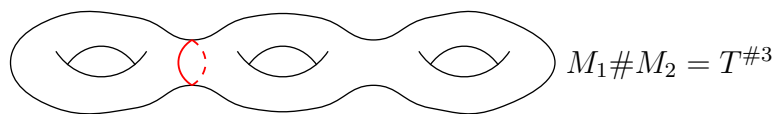
$g = 1$: Nach Beispiel 3.2.7, 3. ist der Torus der Quotient $T = [-1, 1]^{\times 2} / \sim_T$ mit der Äquivalenzrelation $(-1, y) \sim_T (1, y)$, $(x, -1) \sim_T (x, 1)$ und der kanonischen Surjektion $\pi : [-1, 1]^{\times 2} \rightarrow T$. Für $g = 1$ liefert die Verkettung der radialen Projektion vom Einheitskreis auf das Quadrat mit Ecken $(\pm 1, 0)$ und $(0, \pm 1)$ mit einer Drehung um 90° einen Homöomorphismus $\phi : D^2 \rightarrow [-1, 1]^{\times 2}$. Die Abbildung $\pi \circ \phi : D^2 \rightarrow T$ ist dann auf den Äquivalenzklassen von Punkten in D^2 konstant und induziert einen Homöomorphismus $\tilde{\phi} : D^2 / \sim \rightarrow T$.



$(g-1) \rightarrow g$: Sei die Aussage nun bewiesen für $T^{\#k}$ mit $k \leq g-1$. Wir betrachten den Quotienten D^2/\sim bezüglich der Äquivalenzrelation für $k = g$. Dann können wir die Kreisscheibe D^2 entlang der gestrichelten Linie c in zwei Teile X_1 und X_2 schneiden. Da die zwei Endpunkte von c auf $S^1 = \partial D^2$ in der selben Äquivalenzklasse liegen, sind X_1/\sim und X_2/\sim homöomorph zu den Quotienten Q_1/\sim und Q_2/\sim mit der eingezeichneten Identifikation der Randpunkte und einer ausgeschnittenen Scheibe mit Rand c .



Nun ist nach Induktionsvoraussetzung Q_1/\sim homöomorph zu $M_1 = T \setminus j_1(B_\epsilon(0))$ und Q_2/\sim zu $M_2 = T^{\#(g-1)} \setminus j_2(B_\epsilon(0))$, wobei $j_1 : B_{2\epsilon}(0) \rightarrow T$, $j_2 : B_{2\epsilon}(0) \rightarrow T^{\#(g-1)}$ Einbettungen sind. Indem wir den Pushout entlang der stetigen Abbildungen $j_i|_{\partial B_\epsilon(0)} : \partial B_\epsilon(0) \rightarrow M_i \setminus j_i(B_\epsilon(0))$ bilden, erhalten wir, dass $T^{\#g} = M_1 \# M_2$ homöomorph zu D^2/\sim ist. \square



4 Kompaktheit

4.1 Kompaktheit

Der Ursprung der Bezeichnung *kompakt* ist wahrscheinlich die Tatsache, dass Teilmengen des \mathbb{R}^n nach dem Satz von Heine-Borel kompakt sind genau dann, wenn sie abgeschlossen und beschränkt sind. Man kann die Bezeichnung *kompakt* aber auch so interpretieren, dass in kompakten topologischen Räumen die Information über den ganzen Raum kompakt organisiert ist, nämlich in *endlich* vielen offenen Umgebungen. Kompakte topologische Räume sind also topologische Räume, in denen es relativ einfach ist, von *lokalen* Aussagen oder Definitionen zu *globalen* überzugehen. Daher verhalten sich kompakte topologische Räume in vielerlei Hinsicht ähnlich wie endliche topologische Räume. Insbesondere ist die Kompaktheit der Schlüssel für viele Existenzsätze, wie z.B. die Existenz von Minimal- und Maximalstellen einer stetigen reellwertigen Funktion, oder einer konvergenten Teilfolge einer Folge.

Definition 4.1.1: Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum.

1. Eine (**offene**) **Überdeckung** von (X, \mathcal{O}) ist eine Familie $(O_i)_{i \in I}$ von (offenen) Teilmengen $O_i \subseteq X$ mit $X \subseteq \cup_{i \in I} O_i$. Ist $J \subseteq I$ eine Teilmenge, so dass auch $(O_i)_{i \in J}$ eine Überdeckung von X ist, so nennt man $(O_i)_{i \in J}$ eine **Teilüberdeckung** von $(O_i)_{i \in I}$.
2. Der topologische Raum (X, \mathcal{O}) heißt **kompakt**, wenn jede offene Überdeckung $(O_i)_{i \in I}$ von X eine **endliche Teilüberdeckung** besitzt, also eine Teilüberdeckung $(O_i)_{i \in J}$ mit endlicher Indexmenge $J \subseteq I$.
3. Eine Teilmenge $K \subseteq X$ heißt **kompakt**, wenn sie mit der Teilraumtopologie ein kompakter topologischer Raum ist.

Bemerkung 4.1.2:

1. In manchen Lehrbüchern wird in der Definition der Kompaktheit zusätzlich gefordert, dass es sich um einen Hausdorffraum handelt. Die topologischen Räume, die kompakt im Sinne von Definition 4.1.1 sind, heißen dort **quasikompakt**.
2. Man kann das Konzept der Kompaktheit auch mit abgeschlossenen Mengen formulieren: Ein topologischer Raum (X, \mathcal{O}) ist genau dann kompakt, wenn es zu jeder Familie $(A_i)_{i \in I}$ abgeschlossener Teilmengen $A_i \subseteq X$ mit $\cap_{i \in I} A_i = \emptyset$ eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ mit $\cap_{i \in J} A_i = \emptyset$ gibt. Denn für jede offene Überdeckung $(O_i)_{i \in I}$ ist die Familie $(X \setminus O_i)_{i \in I}$ der Komplemente eine Familie abgeschlossener Teilmengen mit $\cap_{i \in I} X \setminus O_i = X \setminus (\cup_{i \in I} O_i) = \emptyset$ und umgekehrt.

Beispiel 4.1.3:

1. Ist (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum mit endlicher Topologie $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$, so ist (X, \mathcal{O}) kompakt. Insbesondere sind alle endlichen topologischen Räume kompakt, und jede Menge X wird kompakt mit der indiskreten Topologie.
2. Ein diskreter topologischer Raum $(X, \mathcal{P}(X))$ ist kompakt genau dann, wenn X endlich ist. Denn die Familie $(\{x\})_{x \in X}$ ist eine offene Überdeckung von X und hat genau dann eine endliche Teilüberdeckung, wenn X endlich ist.

3. Jede Menge X wird kompakt mit der kofiniten Topologie.

Für $X = \emptyset$ ist dies offensichtlich. Ist $X \neq \emptyset$ und $(O_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X , so gibt es ein $i \in I$ mit $O_i \neq \emptyset$. Da das Komplement $X \setminus O_i$ endlich ist, finden wir zu jedem $x \in X \setminus O_i$ ein $i_x \in I$ mit $x \in O_{i_x}$ und erhalten so eine endliche Teilüberdeckung durch die Mengen O_i und O_{i_x} mit $x \in X \setminus O_i$.

4. Eine Teilmenge des \mathbb{R}^n mit der Standardtopologie ist nach dem **Satz von Heine-Borel** kompakt genau dann, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

5. Quotienten kompakter topologischer Räume sind kompakt (Aufgabe 57).

6. Ist $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ eine Familie nichtleerer kompakter topologischer Räume, so ist die topologische Summe $\coprod_{i \in I} X_i$ kompakt genau dann, wenn I endlich ist.

Ist I unendlich, so hat die offene Überdeckung $(\iota_i(X_i))_{i \in I}$ keine endliche Teilüberdeckung. Wir nehmen daher an, dass I endlich ist. Per Definition der Summentopologie definiert jede offene Überdeckung $(O_j)_{j \in J}$ offene Überdeckungen $(\iota_i^{-1}(O_j))_{j \in J}$ von X_i für alle $i \in I$. Diese besitzen endliche Teilüberdeckungen $(\iota_i^{-1}(O_j))_{j \in J_i}$. Da I endlich ist, ist $(O_j)_{j \in \cup_{i \in I} J_i}$ eine endliche Teilüberdeckung von $\coprod_{i \in I} X_i$, und somit ist $\coprod_{i \in I} X_i$ kompakt.

Wir untersuchen nun die Eigenschaften von kompakten topologischen Räumen. Dabei kommt zunächst die Frage nach dem Zusammenhang von Abgeschlossenheit und Kompaktheit auf. Denn nach dem Satz von Heine-Borel sind kompakte Teilmengen des \mathbb{R}^n immer abgeschlossen, und jede abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Teilmenge des \mathbb{R}^n ist kompakt. Während sich die zweite Aussage direkt auf allgemeine topologische Räume überträgt, ist dies für die erste nicht der Fall. Betrachtet man nämlich die Menge $\{0, 1\}$ mit der indiskreten Topologie, so ist $\{0\} \subseteq \{0, 1\}$ kompakt als endliche Menge, aber nicht abgeschlossen. Man benötigt die Hausdorffeigenschaft, um aus Kompaktheit Abgeschlossenheit folgern zu können.

Lemma 4.1.4: In jedem topologischen Raum (X, \mathcal{O}_X) gilt:

1. Ist (X, \mathcal{O}_X) hausdorffsch, so sind kompakte Teilmengen $K \subseteq X$ abgeschlossen.
2. Ist (X, \mathcal{O}_X) kompakt, so sind abgeschlossene Teilmengen $A \subseteq X$ kompakt.

Beweis:

1. Ist (X, \mathcal{O}_X) hausdorffsch und $x \in X \setminus K$, so gibt es zu allen Punkten $k \in K$ offene Mengen $O_k, O'_k \in \mathcal{O}_X$ mit $k \in O_k, x \in O'_k$ und $O_k \cap O'_k = \emptyset$. Dann ist die Familie $(O_k \cap K)_{k \in K}$ eine offene Überdeckung von K , und wegen der Kompaktheit von K existiert eine endliche Teilüberdeckung $(O_{k_i} \cap K)_{i \in \{1, \dots, n\}}$. Dann ist $\cap_{i=1}^n O'_{k_i} \subseteq X \setminus K$ offen als endlicher Schnitt offener Mengen mit $x \in \cap_{i=1}^n O'_{k_i}$. Damit besitzt jeder Punkt $x \in X \setminus K$ eine offene Umgebung, die in $X \setminus K$ liegt. Es folgt, dass $X \setminus K$ offen und K abgeschlossen ist.

2. Ist $(O_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $(A, \mathcal{O}_{A \subseteq X})$, so gibt es per Definition der Teilraumtopologie offene Mengen $U_i \in \mathcal{O}_X$ mit $O_i = A \cap U_i$. Ist $A \subseteq X$ abgeschlossen, so ist $X \setminus A$ offen, und damit bildet die Familie $(U_i)_{i \in I}$ zusammen mit $X \setminus A$ eine offene Überdeckung von X . Ist (X, \mathcal{O}_X) kompakt, so besitzt sie eine endliche Teilüberdeckung. Also gibt es eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ mit $X \subseteq (X \setminus A) \cup (\cup_{i \in J} U_i)$, und die Familie $(O_i)_{i \in J} = (U_i \cap A)_{i \in J}$ ist dann eine endliche Teilüberdeckung von A . Also ist A kompakt. \square

Die Kompaktheit eines Hausdorffraums hat auch starke Auswirkungen auf seine Trennungseigenschaften. Sie impliziert nämlich, dass jeder kompakte Hausdorffraum normal ist und damit *alle* Trennungsaxiome in Definition 2.2.1 erfüllt. Kompakte Hausdorffräume sind die wichtigsten Beispiele normaler topologischer Räume und haben nach dem Lemma von Urysohn und dem Fortsetzungssatz von Tietze besonders gute Eigenschaften bezüglich der Fortsetzbarkeit stetiger Abbildungen.

Satz 4.1.5: Kompakte Hausdorffräume sind normal.

Beweis:

Sei (X, \mathcal{O}) ein kompakter Hausdorffraum. Zu zeigen ist, dass die Bedingung T_4 in Definition 2.2.1 erfüllt ist, also dass es zu disjunkten abgeschlossenen Teilmengen $A, B \subseteq X$ disjunkte offene Teilmengen $O_A, O_B \subseteq X$ gibt mit $A \subseteq O_A$ und $B \subseteq O_B$.

Sind $A, B \subseteq X$ abgeschlossen und (X, \mathcal{O}_X) kompakt, so sind A, B kompakt nach Lemma 4.1.4, 2. Da (X, \mathcal{O}_X) hausdorffsch ist, gibt es zu Punkten $a \in A$ und $b \in B$ disjunkte offene Mengen $O_{ab}^A, O_{ab}^B \in \mathcal{O}_X$ mit $a \in O_{ab}^A$ und $b \in O_{ab}^B$. Für jeden Punkt $a \in A$ ist dann die Familie $(O_{ab}^B \cap B)_{b \in B}$ eine offene Überdeckung von B , die wegen der Kompaktheit von B eine endliche Teilüberdeckung $(O_{ab_i}^B \cap B)_{i \in I}$ besitzt. Dann sind $O_a = \bigcap_{i \in I} O_{ab_i}^A$ und $O_{aB} = \bigcup_{i \in I} O_{ab_i}^B$ offen und disjunkt mit $a \in O_a$ und $B \subseteq O_{aB}$. Die Familie $(O_a \cap A)_{a \in A}$ ist dann eine offene Überdeckung der kompakten Teilmenge $A \subseteq X$, und damit existiert eine endliche Teilüberdeckung $(O_{a_j} \cap A)_{j \in J}$. Dann sind die Mengen $O_A = \bigcup_{j \in J} O_{a_j}$ und $O_B = \bigcap_{j \in J} O_{a_j B}$ offen und disjunkt mit $A \subseteq O_A$ und $B \subseteq O_B$. \square

Eine weitere offensichtliche Frage ist, wie sich Kompaktheit unter stetigen Abbildungen vererbt. Dass man aus der Kompaktheit eines topologischen Raums nichts über die Kompaktheit seines Urbilds unter einer stetigen Abbildung folgern kann, ergibt sich direkt aus der Betrachtung der konstanten Abbildungen. Diese sind stetig und ihre Bilder sind als endliche Mengen stets kompakt, während als Urbild jeder topologische Raum auftreten kann.

Kompaktheit vererbt sich aber auf die *Bilder* kompakter topologischer Räume unter stetigen Abbildungen. Im Fall einer stetigen Bijektion in einen Hausdorffraum kann man daraus direkt folgern, dass auch die Umkehrabbildung stetig ist. Dies ist sehr nützlich, wenn es darum geht, die Homöomorphie von zwei kompakten Hausdorffräumen zu beweisen. Hat man nämlich eine stetige Bijektion gefunden, so muss man diese nun nicht mehr explizit invertieren und die Stetigkeit der Umkehrfunktion beweisen.

Satz 4.1.6: Seien (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) topologische Räume.

1. Ist $f : X \rightarrow Y$ stetig und (X, \mathcal{O}_X) kompakt, so ist auch das Bild $f(X) \subseteq Y$ kompakt.
2. Ist (X, \mathcal{O}_X) kompakt und (Y, \mathcal{O}_Y) hausdorffsch, so ist jede stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ eine abgeschlossene Abbildung. Insbesondere ist jede stetige Bijektion $f : X \rightarrow Y$ ein Homöomorphismus.

Beweis:

1. Ist $(O_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $(f(X), \mathcal{O}_{\subseteq})$, so gibt es per Definition der Teilraumtopologie offene Mengen $U_i \in \mathcal{O}_Y$ mit $O_i = U_i \cap f(X)$. Dann sind wegen der Stetigkeit von f auch

die Mengen $f^{-1}(U_i) = f^{-1}(O_i) \subseteq X$ offen mit $X = \cup_{i \in I} f^{-1}(O_i)$. Also ist $(f^{-1}(O_i))_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X . Da X kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung $(f^{-1}(O_i))_{i \in J}$, und damit ist $(O_i)_{i \in J}$ eine endliche Teilüberdeckung von $(O_i)_{i \in I}$. Also ist $f(X)$ kompakt.

2. Sei $f : X \rightarrow Y$ stetig und $A \subseteq X$ abgeschlossen. Da (X, \mathcal{O}_X) kompakt ist, ist nach Lemma 4.1.4, 1. jede abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq X$ kompakt. Nach 1. ist dann auch ihr Bild $f(A) \subseteq Y$ kompakt. Da (Y, \mathcal{O}_Y) hausdorffsch ist, ist damit $f(A) \subseteq Y$ auch abgeschlossen nach Lemma 4.1.4, 2. Ist f zusätzlich bijektiv, so folgt aus der Abgeschlossenheit von f mit Bemerkung 1.3.6, dass f ein Homöomorphismus ist. \square

Die zweite Aussage in Satz 4.1.6 ist besonders nützlich, wenn es darum geht, die Homöomorphie zwischen Quotienten kompakter topologischer Räume und gewissen Hausdorffräumen zu beweisen, beispielsweise um Einbettungen von Quotienten in den \mathbb{R}^n zu konstruieren. Insbesondere ergibt sich daraus direkt, dass es sich bei den stetigen Abbildungen aus Beispiel 3.2.7 und aus Aufgabe 5 tatsächlich um Einbettungen bzw. Homöomorphismen handelt, ohne dass man diese invertieren und die Stetigkeit der Umkehrabbildung untersuchen muss.

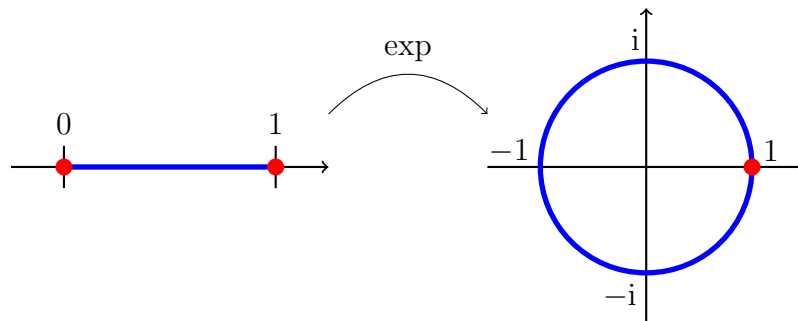
Korollar 4.1.7: Sei (X, \mathcal{O}_X) ein kompakter topologischer Raum, (Y, \mathcal{O}_Y) ein Hausdorffraum und $g : X \rightarrow Y$ eine surjektive stetige Abbildung. Dann ist \sim mit $x \sim x' \Leftrightarrow g(x) = g(x')$ eine Äquivalenzrelation auf X und die Abbildung $\tilde{g} : X/\sim \rightarrow Y, [x] \mapsto g(x)$ ein Homöomorphismus.

Beweis:

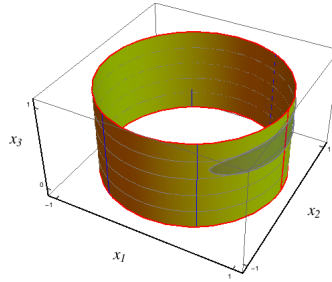
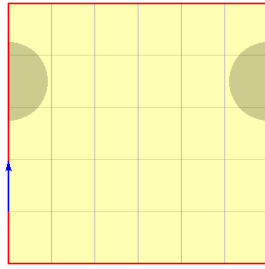
Offensichtlich ist \sim eine Äquivalenzrelation auf X , und g ist per Definition konstant auf den Äquivalenzklassen. Also folgt mit der universellen Eigenschaft des Quotientenraums, dass die Abbildung $\tilde{g} : X/\sim \rightarrow Y, [x] \mapsto g(x)$ wohldefiniert und stetig ist. Da g surjektiv ist, ist sie surjektiv, und da $g(x) = g(x')$ genau dann, wenn $[x] = [x']$, ist sie auch injektiv. Da $(X/\sim, \mathcal{O}_{\sim})$ nach Beispiel 4.1.3, 5. als Quotientenraum eines kompakten topologischen Raums kompakt ist und (Y, \mathcal{O}_Y) hausdorffsch, ist \tilde{g} nach Satz 4.1.6 ein Homöomorphismus. \square

Beispiel 4.1.8:

1. Der Quotientenraum $[0, 1]/\{0, 1\}$ ist homöomorph zu S^1 , denn die Abbildung $\exp : [0, 1] \rightarrow S^1, x \mapsto e^{2\pi i x}$ induziert nach Korollar 4.1.7 einen Homöomorphismus.



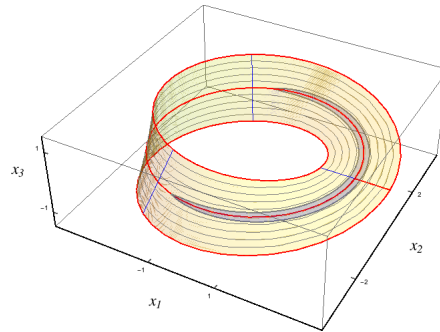
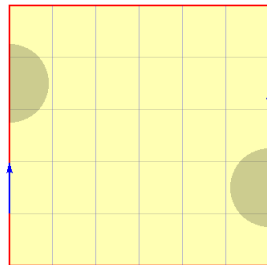
2. Der Quotientenraum $[0, 1]^{\times 2}/\sim$ mit $(0, y) \sim (1, y)$ ist homöomorph zum Zylindermantel $Z = S^1 \times [0, 1] \subseteq \mathbb{C} \times [0, 1]$, denn die Abbildung $g : [0, 1]^{\times 2} \rightarrow Z, (x, y) \mapsto (e^{2\pi i x}, y)$ induziert nach Korollar 4.1.7 einen Homöomorphismus.



3. Der Quotientenraum $M = [0, 1]^{\times 2} / \sim$ mit $(0, y) \sim (1, 1 - y)$ ist das Möbiusband. Die Abbildung $g : [0, 1]^{\times 2} \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$g : (x, y) \mapsto \left(\cos(2\pi x) \left(3 + \left(y - \frac{1}{2} \right) \cos(\pi x) \right), \sin(2\pi x) \left(3 + \left(y - \frac{1}{2} \right) \cos(\pi x) \right), \left(y - \frac{1}{2} \right) \sin(\pi x) \right)$$

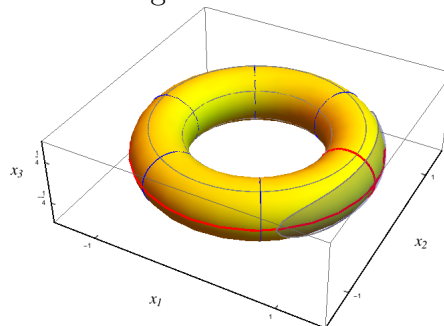
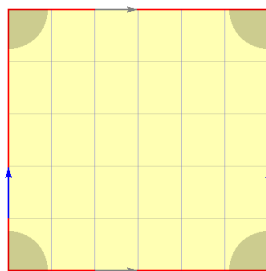
aus Beispiel 3.2.7 induziert nach Korollar 4.1.7 eine Einbettung $\tilde{g} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$.



4. Der Quotientenraum $T = [0, 1]^{\times 2} / \sim$ mit $(0, y) \sim (1, y)$ und $(x, 0) \sim (x, 1)$ ist der Torus. Für $r \in (0, 1)$ induziert die Abbildung $g : [0, 1]^{\times 2} \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$g : (x, y) \mapsto \left(\cos(2\pi x) (1 + r \cos(2\pi y)), \sin(2\pi x) (1 + r \cos(2\pi y)), r \sin(2\pi y) \right)$$

aus Beispiel 3.2.7 nach Korollar 4.1.7 eine Einbettung des Torus in den \mathbb{R}^3 .



5. Die Abbildung $g : [0, 1]^{\times 2} \rightarrow S^1 \times S^1$, $(x, y) \mapsto (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$ induziert nach Korollar 4.1.7 einen Homöomorphismus $\tilde{g} : T \rightarrow S^1 \times S^1$. Wir können den Torus also auch als Produkt $T = S^1 \times S^1$ auffassen. Allgemein nennt man den Produktraum $T^n := (S^1)^{\times n}$ den n -dimensionalen Torus.

Eine weitere wichtige Folgerung, die sich aus Satz 4.1.6 ergibt, ist eine Verallgemeinerung des Resultats, dass eine stetige Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ auf jeder kompakten Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ihr Infimum und Supremum annimmt. Diese Aussage erhalten wir mit Satz 4.1.6 für stetige reelle Abbildungen auf beliebigen kompakten topologischen Räumen.

Korollar 4.1.9: Ist (X, \mathcal{O}_X) nichtleer und kompakt und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so nimmt f ihr Infimum und Supremum an:

$$\exists x_-, x_+ \in X \quad \text{mit} \quad f(x_-) = \inf f(X) \quad \text{und} \quad f(x_+) = \sup f(X).$$

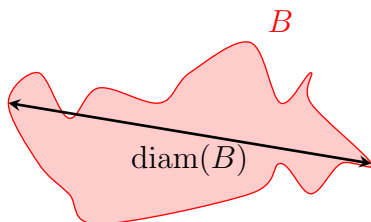
Beweis:

Ist (X, \mathcal{O}_X) kompakt und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist nach Satz 4.1.6 auch $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ kompakt, also nach dem Satz von Heine–Borel abgeschlossen und beschränkt. Also gilt $\inf f(X), \sup f(X) \in \overline{f(X)} = f(X)$. \square

4.2 Kompaktheit in metrischen Räumen

Wir konzentrieren uns nun auf metrische Räume und untersuchen, welche zusätzlichen Aussagen sich dort über Kompaktheit machen lassen. Da hier mit der Metrik ein Abstands begriff zur Verfügung steht, können wir über die Beschränktheit einer Menge sprechen und diese zu Kompaktheit in Beziehung setzen. Andererseits gelten in metrischen Räumen weitergehende Aussagen über die Konvergenz von Folgen, so dass man auch diese zur Charakterisierung von Kompaktheit heranziehen kann. Wir verallgemeinern zunächst den Begriff der Beschränktheit auf Teilmengen metrischer Räume, indem wir das Supremum des Abstands von Punkten in der Teilmenge betrachten.

Definition 4.2.1: Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $B \subseteq X$ heißt **beschränkt**, wenn $B = \emptyset$ oder ihr **Durchmesser** $\text{diam}(B) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in B\}$ endlich ist.



Es zeigt sich, dass sich die Implikation *kompakt* \Rightarrow *abgeschlossen und beschränkt* aus dem Satz von Heine–Borel direkt von Teilmengen des \mathbb{R}^n auf metrische Räume verallgemeinert. Denn da metrische Räume Hausdorffräume sind, sind kompakte Teilmengen auch abgeschlossen. Der Beweis der Beschränktheit kompakter Teilmengen ist völlig analog, nur dass hier mit der Metrik des metrischen Raums und dem Durchmesser der Teilmenge statt dem euklidischen Abstand und dem Abstand vom Ursprung argumentiert wird.

Satz 4.2.2: Jede kompakte Teilmenge eines metrischen Raums (X, d) ist beschränkt.

Beweis:

Wir dürfen annehmen, dass K nicht leer ist und wählen $x \in K$. Dann ist die Folge $O_n := \{y \in K : d(x, y) < n\} = K \cap B_n(x)$ eine offene Überdeckung $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von K . Aus der Existenz einer endlichen Teilüberdeckung folgt die Existenz von $N \in \mathbb{N}$ mit $K \subseteq B_N(x)$. Für $y, z \in K$ ist dann $d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z) \leq 2N$ und daher $\text{diam}(K) \leq 2N$. \square

Die Umkehrung dieser Aussage, also die Implikation *abgeschlossen und beschränkt* \Rightarrow *kompakt* aus dem Satz von Heine–Borel gilt jedoch nicht einmal in euklidischen oder unitären Vektorräumen mit der durch das Skalarprodukt induzierten Metrik. Dies zeigt das folgende Beispiel, das auch sehr wichtig für physikalische Anwendungen ist, da der betrachtete Hilbertraum das Standardbeispiel für alle in der Quantenmechanik auftretenden Hilberträume ist.

Beispiel 4.2.3: Der **Hilbertsche Folgenraum** ist der unitäre Vektorraum

$$\ell^2 = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \mid \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\} \subseteq \text{Abb}(\mathbb{N}_0, \mathbb{C}) \quad \langle (a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} b_n.$$

Man kann zeigen, dass es sich um einen Hilbertraum handelt, d. h. jede Cauchyfolge in ℓ^2 konvergiert bezüglich der zugehörigen Norm gegen ein Element in ℓ^2 .

Der abgeschlossene Einheitsball $B_{\leq 1}(0) = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \mid \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \leq 1\} \subseteq \ell^2$ für die Metrik

$$d : \ell^2 \times \ell^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad d((a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}) = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n - b_n|^2}.$$

ist abgeschlossen und beschränkt, denn mit der Dreiecksungleichung folgt $\text{diam}(B_{\leq 1}(0)) \leq 2$. Aber die offene Überdeckung $(B_{1/2}(a))_{a \in \ell^2}$ hat keine endliche Teilüberdeckung. Denn gäbe es $a_1, \dots, a_n \in \ell^2$ mit $\cup_{i=1}^n B_{1/2}(a_i) = \ell^2$, so müsste jede Folge $e_m = (\delta_{m,n})_{n \in \mathbb{N}_0} \in \overline{B_1(0)}$ mit $m \in \mathbb{N}_0$ in einem der Bälle $B_{1/2}(a_i)$ enthalten sein. Da aber $d(e_k, e_m) = \sqrt{2}$ für alle $k \neq m$ und $d(b, c) \leq d(a_i, b) + d(a_i, c) < 1$ für alle $b, c \in B_{1/2}(a_i)$, kann jede offene Kugel $B_{1/2}(a_i)$ maximal eine Folge e_m enthalten.

Aus der Analysis ist bekannt, dass sich Kompaktheit für Teilmengen des \mathbb{R}^n auch durch Folgen charakterisieren lässt: Eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn jede Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine konvergente Teilfolge besitzt. Da auch in allgemeinen topologischen Räumen ein Konvergenzbegriff für Folgen zur Verfügung steht, lässt sich diese Bedingung auch für allgemeine topologische Räume formulieren. Sie ist dort jedoch nur begrenzt nützlich, weil kompakte topologische Räume nicht folgenkompakt und auch folgenkompakte topologische Räume nicht kompakt sein müssen. In metrischen Räumen stimmen die beiden Konzepte jedoch überein.

Definition 4.2.4: Ein ein topologischer Raum (X, \mathcal{O}_X) heißt **folgenkompakt**, wenn jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine konvergente Teilfolge besitzt.

Beispiel 4.2.5:

Wir betrachten für das Intervall $I = [0, 1)$ den topologischen Raum $\{0, 1\}^I = \text{Abb}(I, \{0, 1\}) = \prod_{i \in I} \{0, 1\}$ mit der durch die diskrete Topologie auf $\{0, 1\}$ induzierten Produkttopologie. Wir werden später mit dem Satz von Tychonoff zeigen (siehe Beispiel 4.3.6), dass dieser Raum kompakt ist.

Wir zeigen, dass $\text{Abb}(I, \{0, 1\})$ nicht folgenkompakt ist. Dazu betrachten wir die eindeutig bestimmte **2-adische Darstellung** von Elementen $x \in I = [0, 1)$

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k 2^{-k} \quad \text{mit} \quad x_k \in \{0, 1\}, k \in \mathbb{N} \quad \text{und es gilt nicht } x_k = 1 \text{ für fast alle } k \in \mathbb{N}.$$

Wir definieren eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ in $\text{Abb}(I, \{0, 1\})$ durch

$$f_n : I \rightarrow \{0, 1\}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} x_k 2^{-k} \mapsto x_n.$$

Nach Satz 3.3.5 konvergiert eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ in $\text{Abb}(I, \{0, 1\})$ genau dann, wenn die Abbildungen $f_{n_k} : I \rightarrow \{0, 1\}$ auf I punktweise konvergieren. Zu jeder Teilfolge $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ gibt es aber immer einen Punkt, in dem die Teilfolge nicht konvergiert, nämlich

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} (1 + (-1)^k) 2^{-n_k} \quad \Rightarrow \quad f_{n_k}(x) = \frac{1}{2} (1 + (-1)^k) = \begin{cases} 1 & k \text{ gerade} \\ 0 & k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Also hat $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge, und $\text{Abb}(I, \{0, 1\})$ ist nicht folgenkompakt.

Satz 4.2.6: Ein metrischer Raum (X, d) ist folgenkompakt genau dann, wenn er kompakt ist.

Beweis:

1. Sei (X, d) kompakt. Gibt es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X ohne konvergente Teilfolge, so existiert zu jedem Punkt $y \in X$ ein $\epsilon_y > 0$, so dass $\mathbb{N}_y := \{n \in \mathbb{N} : x_n \in B_{\epsilon_y}(y)\}$ endlich ist.

Denn ist dies nicht der Fall, so existiert ein $y \in X$, so dass alle Kugeln $B_{1/k}(y)$, $k \in \mathbb{N}$, unendlich viele Folgenglieder enthalten. Es existiert also eine strikt wachsende Folge natürlicher Zahlen $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $x_{n_k} \in B_{1/k}(y)$ und dann gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = y$.

Da $(B_{\epsilon_y}(y))_{y \in X}$ eine offene Überdeckung von X ist und (X, d) kompakt, existieren endlich viele Punkte y_1, \dots, y_n , so dass die Mengen $B_{\epsilon_{y_j}}(y_j)$ den Raum X überdecken. Dann ist $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_{y_1} \cup \dots \cup \mathbb{N}_{y_n}$, im Widerspruch zur Unendlichkeit von \mathbb{N} . Also existiert in X keine Folge ohne konvergente Teilfolge.

2. Sei nun (X, d) folgenkompakt und $(O_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X ohne endliche Teilüberdeckung. Dann setzen wir $\epsilon(x) = \frac{1}{2} \sup\{0 < r \leq 1 \mid \exists i \in I \text{ mit } B_r(x) \subseteq O_i\}$, wählen zu jedem $x \in X$ ein $i(x) \in I$ mit $B_{\epsilon(x)}(x) \subseteq O_{i(x)}$ und konstruieren induktiv eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_{n+1} \in X \setminus \bigcup_{j=1}^n O_{i(x_j)}$. Dann gilt $d(x_n, x_m) \geq \epsilon(x_m)$ für alle $n > m$, da $x_n \in X \setminus O_{i(x_m)} \subseteq X \setminus B_{\epsilon(x_m)}(x_m)$.

Da (X, d) folgenkompakt ist, hat die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, die gegen einen Punkt $x \in X$ konvergiert. Nach Übergang zu dieser Teilfolge können wir annehmen, dass $x_n \rightarrow x$ mit $n \rightarrow \infty$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in B_{\epsilon(x)/5}(x)$ für alle $n \geq N$. Daraus folgt mit der Dreiecksungleichung $B_{4\epsilon(x)/5}(x_n) \subseteq B_{\epsilon(x)}(x) \subseteq O_{i(x)}$ für alle $n \geq N$. Per Definition von $\epsilon(x_n)$ gilt dann $\epsilon(x_n) \geq 2\epsilon(x)/5$ für alle $n \geq N$. Daraus folgt für $n > m \geq N$

$$\frac{2}{5}\epsilon(x) \leq \epsilon(x_m) \leq d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{1}{5}\epsilon(x) + \frac{1}{5}\epsilon(x) = \frac{2}{5}\epsilon(x),$$

ein Widerspruch. Also besitzt die offene Überdeckung $(O_i)_{i \in I}$ eine endliche Teilüberdeckung. \square

Eine nützliche Konsequenz aus der Äquivalenz von Folgenkompaktheit und Kompaktheit in metrischen Räumen ist das sogenannte *Lemma von Lebesgue*. Es erlaubt einem, zu jeder offenen Überdeckung eines kompakten topologischen Raums einen Abstand vorzugeben, so dass jede Menge deren Durchmesser kleiner als dieser vorgegebene Abstand ist, in einer der offenen Mengen enthalten ist. Das entscheidende dabei ist, dass dieser Abstand *global* vorgegeben werden kann. Dieses Lemma hat keine herausragende konzeptionelle Bedeutung aber wichtige Anwendungen, unter anderem in der algebraischen Topologie.

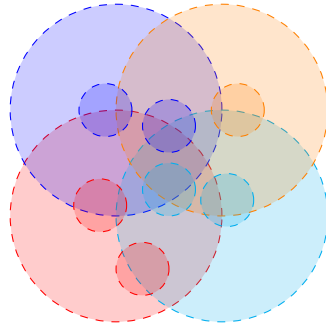
Lemma 4.2.7: (Lemma von Lebesgue)

Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Dann gibt es zu jeder offenen Überdeckung $(O_i)_{i \in I}$ von X ein $\epsilon > 0$, die **Lebesgue-Zahl**, so dass jede Teilmenge $M \subseteq X$ mit $\text{diam}(M) < \epsilon$ in einer der Mengen O_i enthalten ist.

Beweis:

Sei $(O_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X . Angenommen eine solche Zahl $\epsilon > 0$ existiert nicht. Dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Teilmenge $M_n \subseteq X$ mit $\text{diam}(M_n) < 1/n$ und $M_n \setminus O_i \neq \emptyset$ für alle $i \in I$. Wir wählen dann zu $n \in \mathbb{N}$ ein Element $m_n \in M_n$. Da X kompakt ist und damit nach Satz 4.2.6 auch folgenkompakt, hat die Folge $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(m_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, die gegen einen Punkt $x \in X$ konvergiert. Da $(O_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X ist, gibt

es dann eine offene Menge O_i mit $x \in O_i$ und ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(x) \subseteq O_i$. Da $m_{n_k} \rightarrow x$ und $\text{diam}(M_{n_k}) \rightarrow 0$ mit $k \rightarrow \infty$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $d(m_{n_k}, x) < \epsilon/2$ und $\text{diam}(M_{n_k}) < \epsilon/2$. Dann folgt $d(m, x) \leq d(m, m_{n_k}) + d(m_{n_k}, x) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ für alle $m \in M_{n_k}$ und somit $M_{n_k} \subseteq B_\epsilon(x) \subseteq O_i$, im Widerspruch zur Wahl von M_{n_k} . \square



4.3 Der Satz von Tychonoff

In diesem Abschnitt beweisen wir einen der nützlichsten und wichtigsten Sätze über Kompaktheit, den *Satz von Tychonoff*, der die Interaktion von Kompaktheit und Produkten topologischer Räume beschreibt:

Satz von Tychonoff: Sei $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ eine Familie kompakter topologischer Räume. Dann ist auch der Produktraum $\prod_{i \in I} X_i$ kompakt.

Es gibt viele verschiedene Arten, diesen Satz zu beweisen. Allen ist jedoch gemeinsam, dass sie das *Auswahlaxiom* benutzen. Dies ist kein Zufall, denn man kann zeigen, dass der Satz von Tychonoff *äquivalent* zum Auswahlaxiom ist. Man kann also nicht nur den Satz von Tychonoff aus dem Auswahlaxiom herleiten, sondern auch das Auswahlaxiom aus dem Satz von Tychonoff.

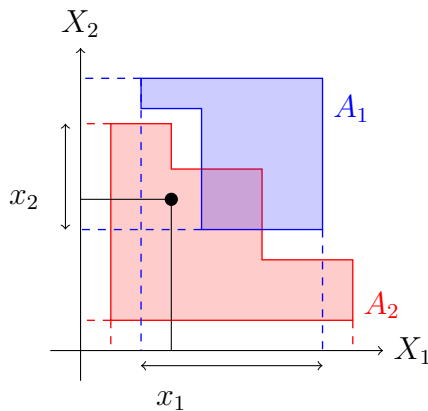
Unser Beweis hat den Vorteil, dass er direkt deutlich macht, wozu das Auswahlaxiom benötigt wird und was das grundlegende Problem beim Beweis dieses Satzes ist. Aus Effizienzgründen benutzt er das Kompaktheitskriterium in Bemerkung 4.1.2, 2., wonach ein topologischer Raum (X, \mathcal{O}) genau dann kompakt ist, wenn für jede Familie $(A_j)_{j \in J}$ abgeschlossener Teilmengen $A_j \subseteq X$ mit $\bigcap_{j \in J} A_j = \emptyset$ auch eine endliche Teilmenge $E \subseteq J$ mit $\bigcap_{j \in E} A_j = \emptyset$ existiert. Dies ist offensichtlich äquivalent zu der Bedingung, dass für jede Familie $(A_j)_{j \in J}$ abgeschlossener Teilmengen $A_j \subseteq X$ mit $\bigcap_{j \in E} A_j \neq \emptyset$ für alle endlichen Teilmengen $E \subseteq J$ auch $\bigcap_{j \in J} A_j \neq \emptyset$ gilt. Da diese Bedingung relativ umständlich ist, führt man eine abkürzende Bezeichnung ein.

Definition 4.3.1: Sei X eine Menge. Eine Familie $(A_j)_{j \in J}$ von Teilmengen $A_j \subseteq X$ besitzt die **endliche Durchschnittseigenschaft**, wenn alle endlichen Schnitte von Mengen aus $(A_j)_{j \in J}$ nichtleer sind: $\bigcap_{j \in E} A_j \neq \emptyset$ für alle endlichen Teilmengen $E \subseteq J$.

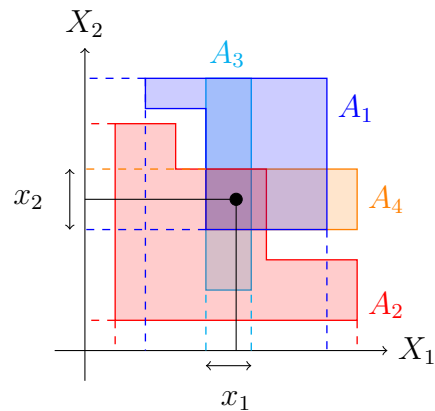
Mit dieser Definition ist ein topologischer Raum (X, \mathcal{O}) also genau dann kompakt, wenn für jede Familie $(A_j)_{j \in J}$ abgeschlossener Teilmengen $A_j \subseteq X$, die die endliche Durchschnittseigenschaft besitzt, auch $\bigcap_{j \in J} A_j \neq \emptyset$ gilt. Die Beweisidee für den Satz von Tychonoff ist die folgende:

- Wir nehmen an, dass eine Familie $(A_j)_{j \in J}$ abgeschlossener Teilmengen $A_j \subseteq \prod_{i \in I} X_i$ gegeben ist, die die endliche Durchschnittseigenschaft besitzt, und wollen einen Punkt in $\bigcap_{j \in J} A_j$ konstruieren.

- Um die Kompaktheit der Teilräume X_i ausnutzen zu können, müssen wir dazu die Mengen A_j mit den Projektionsabbildungen $\pi_i : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_i$ in die Räume X_i projizieren. Auch wenn die Mengen A_j abgeschlossen sind, ist es nicht garantiert, dass auch die Projektionen $\pi_i(A_j) \subseteq X_i$ abgeschlossen sind. Daher betrachten wir ihre Abschlüsse. Da die Mengenfamilie $(\overline{\pi_i(A_j)})_{j \in J}$ dann ebenfalls die endliche Durchschnittseigenschaft besitzt und (X_i, \mathcal{O}_i) kompakt ist, gilt dann $\bigcap_{j \in J} \overline{\pi_i(A_j)} \neq \emptyset$ und wir können Punkte $x_i \in \bigcap_{j \in J} \overline{\pi_i(A_j)}$ wählen.
- Der Punkt $x = (x_i)_{i \in I}$ sollte im Schnitt $\bigcap_{j \in J} A_j \subseteq \prod_{i \in I} X_i$ liegen. Das Problem ist aber, dass dies nicht der Fall sein muss, wenn die Familie $(A_j)_{j \in J}$ klein ist und die Punkte x_i ungünstig gewählt wurden:



Ungünstige Wahl der Punkte x_1, x_2 für eine kleine Familie $(A_j)_{j \in \{1,2\}}$: es gilt $x = (x_1, x_2) \notin A_1 \cap A_2$



Gute Wahl der Punkte x_1, x_2 für eine größere Familie $(A_j)_{j \in \{1,2,3,4\}}$: es gilt $x = (x_1, x_2) \in \bigcap_{j=1}^4 A_j \subseteq A_1 \cap A_2$.

- die Idee ist es nun, der Familie $(A_j)_{j \in J}$ abgeschlossener Mengen zusätzliche Mengen hinzuzufügen, so dass die endliche Durchschnittseigenschaft erhalten bleibt, aber eine ungünstige Wahl der Punkte x_i nicht mehr möglich ist. Da über die Mengen A_j nichts bekannt ist, können wir diese zusätzlichen Mengen nur dadurch charakterisieren, dass die endliche Durchschnittseigenschaft erhalten bleiben soll und die so entstehende Familie von Mengen maximal sein soll, also dass jedes Hinzufügen weiterer Mengen die endliche Durchschnittseigenschaft verletzen würde.
- Ist die Existenz einer solchen maximalen Familie $(A_j)_{j \in M}$ gesichert, die die gegebene Familie $(A_j)_{j \in J}$ enthält, so können wir, wie oben beschrieben, Punkte $x_i \in \bigcap_{j \in M} \overline{\pi_i(A_j)}$ wählen und zu einem Punkt $x = (x_i)_{i \in I}$ zusammensetzen. Dann ist noch zu zeigen, dass x tatsächlich im Schnitt $\bigcap_{j \in J} A_j$ liegt.

Wir beweisen zunächst die Existenz einer maximalen Familie $(A_j)_{j \in M}$ von Mengen $A_j \subseteq \prod_{i \in I} X_i$, die die gegebene Familie $(A_j)_{j \in J}$ enthält und die endliche Durchschnittseigenschaft besitzt. Dazu benötigen wir das *Zornsche Lemma*, das äquivalent zum *Auswahlaxiom* ist, und auf den Begriffen der *partiell geordneten Menge*, der *aufsteigenden Kette* und der *induktiv geordneten Menge* beruht. Ein Beweis des Zornschen Lemmas mit dem Auswahlaxiom findet sich beispielsweise in Appendix 2 in [La].

Definition 4.3.2:

1. Eine **partielle Ordnung** \preceq auf einer Menge \mathcal{M} ist eine Relation \preceq auf \mathcal{M} mit den folgenden Eigenschaften:

(PO1) reflexiv: $m \preceq m$ für alle $m \in \mathcal{M}$,

(PO2) transitiv: $m \preceq n, n \preceq p \Rightarrow m \preceq p$,

(PO3) antisymmetrisch: $(m \preceq n) \wedge (n \preceq m) \Rightarrow m = n$.

2. Eine **Kette** in einer partiell geordneten Menge (\mathcal{M}, \preceq) ist eine Teilmenge $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}$, so dass (\mathcal{K}, \preceq) **total geordnet** ist, d. h. für alle $h, k \in \mathcal{K}$ gilt $h \preceq k$ oder $k \preceq h$.

3. Die Menge \mathcal{M} heißt **induktiv geordnet**, wenn jede Kette \mathcal{K} in \mathcal{M} eine obere Schranke besitzt, d. h. es existiert ein $m \in \mathcal{M}$ mit $k \preceq m$ für alle $k \in \mathcal{K}$.

Lemma 4.3.3: (Zornsches Lemma) Jede nichtleere induktiv geordnete Menge \mathcal{M} besitzt ein **maximales Element** m , d. h. aus $n \in \mathcal{M}$ und $m \preceq n$ folgt $m = n$.

Wir beweisen nun mit dem Zornschen Lemma die Existenz der gesuchten maximalen Mengenfamilie, die die endliche Durchschnittseigenschaft besitzt und eine gegebene Mengenfamilie $(A_j)_{j \in J}$ enthält.

Lemma 4.3.4: Sei X eine Menge. Zu jeder Teilmenge $a \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit der endlichen Durchschnittseigenschaft gibt es eine maximale Teilmenge $m \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit der endlichen Durchschnittseigenschaft, die a enthält. Jede solche Menge m hat die folgenden Eigenschaften:

(i) Sie ist stabil unter endlichen Durchschnitten: $M_1, \dots, M_n \in m \Rightarrow \bigcap_{j=1}^n M_j \in m$.

(ii) Ist $Y \subseteq X$ eine Teilmenge, die jedes Element von m schneidet, so ist $Y \in m$.

Beweis:

1. Wir zeigen, dass die Teilmenge

$$\mathcal{M} = \{b \subseteq \mathcal{P}(X) \mid a \subseteq b, b \text{ hat die endliche Durchschnittseigenschaft}\} \subseteq (\mathcal{P}(\mathcal{P}(X)), \subseteq)$$

nichtleer ist und bzgl. der Inklusionsordnung induktiv geordnet ist. Hieraus folgt dann die Existenz von m mit dem Zornschen Lemma.

Wegen $a \in \mathcal{M}$ ist $\mathcal{M} \neq \emptyset$, und $\preceq := \subseteq$ definiert eine partielle Ordnung auf \mathcal{M} . Zu zeigen ist, dass jede Kette $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}$ eine obere Schranke besitzt. Sei $n := \bigcup_{k \in \mathcal{K}} k \subseteq \mathcal{P}(X)$ die Vereinigung aller Elemente der Kette \mathcal{K} . Offensichtlich gilt dann $k \subseteq n$ für alle $k \in \mathcal{K}$. Wir zeigen $n \in \mathcal{M}$, so dass n in \mathcal{M} eine obere Schranke von \mathcal{K} ist.

Per Definition ist $a \subseteq k$ für alle $k \in \mathcal{K}$ und damit auch $a \subseteq n = \bigcup_{k \in \mathcal{K}} k$. Zu zeigen ist noch, dass n die endliche Durchschnittseigenschaft besitzt. Seien dazu $n_1, \dots, n_m \in n$. Dann existieren $k_1, \dots, k_m \in \mathcal{K}$ mit $n_j \in k_j, j = 1, \dots, m$. Da \mathcal{K} eine Kette ist, dürfen wir $k_1 \preceq \dots \preceq k_m$ annehmen. Dann sind n_1, \dots, n_m alle in k_m enthalten. Da k_m als Element von \mathcal{M} die endliche Durchschnittseigenschaft besitzt, ist $n_1 \cap \dots \cap n_m \neq \emptyset$. Also ist $n \in \mathcal{M}$ und damit eine obere Schranke von \mathcal{K} . Das Zornsche Lemma liefert uns nun ein maximales Element $m \in \mathcal{M}$.

(i) Sind $M_1, M_2 \in m$, so ist auch $m \cup \{M_1 \cap M_2\} \in \mathcal{M}$, denn aus $a \subseteq M_1$ und $a \subseteq M_2$ folgt $a \subseteq M_1 \cap M_2$ und $m \cup \{M_1 \cap M_2\}$ besitzt die endliche Durchschnittseigenschaft. Aus der Maximalität von m folgt daher $M_1 \cap M_2 \in m$. Induktiv folgt, dass m stabil ist unter endlichen Durchschnitten.

(ii) Ist $Y \subseteq X$ eine Teilmenge, die jedes Element von m schneidet, so besitzt $m \cup \{Y\}$ ebenfalls die endliche Durchschnittseigenschaft, da m nach (i) stabil ist unter endlichen Durchschnitten. Aus der Maximalität von m folgt daher auch $Y \in m$. \square

Nachdem alle Zutaten des Beweises bereitgestellt wurden, können wir nun den Beweis des Satzes von Tychonoff nach der oben beschriebenen Beweisidee in Angriff nehmen.

Satz 4.3.5: (Satz von Tychonoff) Sei $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ eine Familie kompakter topologischer Räume. Dann ist auch der Produktraum $\prod_{i \in I} X_i$ kompakt.

Beweis:

Gibt es ein $i \in I$ mit $X_i = \emptyset$, so ist $\prod_{i \in I} X_i = \emptyset$ und damit kompakt. Sei also jetzt $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ eine Familie nichtleerer, kompakter topologischer Räume. Wir zeigen, dass für jede Familie $(A_j)_{j \in J}$ abgeschlossener Teilmengen $A_j \subseteq \prod_{i \in I} X_i$, die die endliche Durchschnittseigenschaft besitzt, auch $\bigcap_{j \in J} A_j \neq \emptyset$ gilt. Sei also $(A_j)_{j \in J}$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen $A_i \subseteq \prod_{i \in I} X_i$ mit der endlichen Durchschnittseigenschaft.

1. Wir konstruieren einen Punkt $x \in \prod_{i \in I} X_i$, von dem wir dann zeigen, dass $x \in \bigcap_{j \in J} A_j$ gilt: Da $(A_j)_{j \in J}$ die endliche Durchschnittseigenschaft besitzt, gibt es nach Lemma 4.3.4 eine maximale Familie $(A_m)_{m \in M}$ von (nicht notwendigerweise abgeschlossenen) Teilmengen $A_m \subseteq X$ mit $J \subseteq M$ und der endlichen Durchschnittseigenschaft. Aus der endlichen Durchschnittseigenschaft erhält man für alle endlichen Teilmengen $E \subseteq M$

$$\bigcap_{m \in E} \overline{\pi_i(A_m)} \supseteq \bigcap_{m \in E} \pi_i(A_m) \supseteq \pi_i(\bigcap_{m \in E} A_m) \neq \emptyset.$$

Also haben auch alle Familien $(\overline{\pi_i(A_m)})_{m \in M}$ für $i \in I$ die endliche Durchschnittseigenschaft. Da (X_i, \mathcal{O}_i) kompakt und die Mengen $\overline{\pi_i(A_m)} \subseteq X_i$ abgeschlossen sind für alle $m \in M$ folgt daraus $\bigcap_{m \in M} \overline{\pi_i(A_m)} \neq \emptyset$ für alle $i \in I$. Wir können also zu jedem $i \in I$ ein $x_i \in \bigcap_{m \in M} \overline{\pi_i(A_m)}$ wählen und das Element $x := (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$ betrachten (Auswahlaxiom!).

2. Wir zeigen, dass es zu jeder Umgebung U von x ein $m_0 \in M$ mit $A_{m_0} \subseteq U$ gibt: Sei also $U \subseteq \prod_{i \in I} X_i$ eine Umgebung von x . Da nach Bemerkung 3.3.2 die Menge

$$\mathcal{B} = \{\prod_{i \in I} O_i \mid O_i \in \mathcal{O}_i \ (\forall i \in I) \ O_i = X_i \text{ für fast alle } i \in I\}$$

eine Basis der Produkttopologie ist, gibt es dann offene Mengen $O_i \in \mathcal{O}_i$ mit $O_i = X_i$ für fast alle $i \in I$ und $x \in O := \prod_{i \in I} O_i = \bigcap_{i \in I} \pi_i^{-1}(O_i) \subseteq U$. Da per Konstruktion $x_i \in \pi_i(A_m)$ für alle $m \in M$ gilt und O_i eine Umgebung von x_i ist, folgt mit Satz 1.1.18, dass $O_i \cap \pi_i(A_m) \neq \emptyset$, also $\pi_i^{-1}(O_i) \cap A_m \neq \emptyset$ für alle $m \in M$ und $i \in I$. Mit Lemma 4.3.4 (ii) folgt hieraus $\pi_i^{-1}(O_i) \in \{A_m \mid m \in M\}$ für alle $i \in I$. Da $I' = \{i \in I \mid O_i \neq X_i\}$ endlich ist mit $O = \bigcap_{i \in I'} \pi_i^{-1}(O_i)$ und $\pi_i^{-1}(O_i) \in \{A_m \mid m \in M\}$ folgt mit Lemma 4.3.4 (i) auch $O \in \{A_m \mid m \in M\}$. Also gibt es ein $m_0 \in M$ mit $A_{m_0} = O \subseteq U$.

3. Da es nach 2. zu jeder Umgebung U von x ein $m_0 \in M$ mit $A_{m_0} \subseteq U$ gibt, folgt $A_j \cap U \supseteq A_j \cap A_{m_0} \neq \emptyset$ nach der endlichen Durchschnittseigenschaft für jede Umgebung U von x . Mit Satz 1.1.18 folgt daraus $x \in \overline{A_j} = A_j$ für alle $j \in J$ und damit $x \in \bigcap_{j \in J} A_j$. \square

Beispiel 4.3.6:

1. Jede Teilmenge der Form $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $a_i < b_i \in \mathbb{R}$ ist kompakt, denn die abgeschlossenen Intervalle $[a_i, b_i] \subseteq \mathbb{R}$ sind kompakt.

2. Es gilt der **Satz von Heine-Borel**: Eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ist kompakt, genau dann, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Die Implikation “kompakt \Rightarrow abgeschlossen und beschränkt” folgt aus Lemma 4.1.4 und Satz 4.2.2. Die Implikation “abgeschlossen und beschränkt \Rightarrow kompakt” folgt aus dem Satz von Tychonoff. Denn ist $K \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt bezüglich der Metrik d_∞ mit $d_\infty(x, y) = \max_{i=1, \dots, n} |x_i - y_i|$ so gibt es $a_i < b_i \in \mathbb{R}$ mit $K \subseteq [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$. Damit ist K kompakt als abgeschlossene Teilmenge eines Kompaktums nach 1. und nach Lemma 4.1.4.

3. Für jede Menge M und jeden kompakten topologischen Raum (X, \mathcal{O}) ist die Menge $\text{Abb}(M, X) = X^M = \prod_{m \in M} X$ der Abbildungen $f : M \rightarrow X$ mit der Produkttopologie kompakt. Insbesondere gilt dies für jeden endlichen topologischen Raum X .

4.4 Lokale Kompaktheit und Kompaktifizierungen

Schon an Teilräumen des \mathbb{R}^n und der n -Sphäre S^n , wo Entfernen eines einzigen Punktes die Kompaktheitseigenschaft zerstört, wird deutlich, dass viele topologische Räume nicht kompakt sind. Für Anwendungen reicht es aber oft aus, dass jede Umgebung eines Punktes eine kompakte Umgebung enthält. Dies entspricht einer lokalen Version des Konzepts der Kompaktheit.

Definition 4.4.1: Ein topologischer Raum (X, \mathcal{O}_X) heißt **lokalkompakt**, wenn jede Umgebung eines Punkt $x \in X$ eine kompakte Umgebung von x enthält:

$$U \in \mathcal{U}(x) \quad \Rightarrow \quad \exists K \in \mathcal{U}(x) \text{ kompakt mit } K \subseteq U.$$

Neben dieser Definition von Lokalkompaktheit gibt es noch eine schwächere Definition, die ebenfalls häufig in der Literatur benutzt wird, und bei der nur gefordert wird, dass jeder Punkt des topologischen Raums eine kompakte Umgebung besitzt. Die zwei Definitionen stimmen jedoch für Hausdorffräume überein, wo das Konzept eines lokalkompakten topologischen Raums seine wichtigsten Anwendungen besitzt.

Lemma 4.4.2: Ein Hausdorffraum (X, \mathcal{O}_X) ist lokalkompakt genau dann, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine kompakte Umgebung besitzt.

Beweis:

“ \Rightarrow ” benötigt die Hausdorffeigenschaft nicht. Zu jedem Punkt $x \in X$ ist nämlich X eine Umgebung von x . Ist (X, \mathcal{O}) lokalkompakt, so gibt es eine kompakte Umgebung $x \in K \subseteq X$.

“ \Leftarrow ”: Sei (X, \mathcal{O}) ein Hausdorffraum. Dann ist für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq X$ der Teilraum $(K, \mathcal{O}_\subseteq)$ ein kompakter Hausdorffraum nach Lemma 2.2.5 und damit nach Satz 4.1.5 normal.

Existiert zu jedem Punkt $x \in X$ eine kompakte Umgebung $x \in K \subseteq X$, so ist für jede Umgebung U von x auch die Menge $U \cap K$ eine Umgebung von x . Also existiert eine offene Menge $O \in \mathcal{O}$ mit $x \in O \subseteq U \cap K$. Wegen der Normalität von $(K, \mathcal{O}_\subseteq)$ gibt es dann eine abgeschlossene Umgebung A von x in K mit $x \in A \subseteq O \subseteq U \cap K \subseteq U$ nach Bemerkung 2.2.2, 3. Dann ist A nach Lemma 4.1.4 kompakt, also eine kompakte Umgebung von x , die in U enthalten ist. \square

Beispiel 4.4.3:

1. Der \mathbb{R}^n mit der Standardtopologie ist ein lokalkompakter topologischer Raum.

Denn jede Umgebung U von $x \in \mathbb{R}^n$ enthält eine offene Kugel $B_\epsilon(x) \subseteq U$ und damit auch die abgeschlossene Kugel $B_{\leq \epsilon/2}(x)$, die nach dem Satz von Heine-Borel kompakt ist und die offene Menge $B_{\epsilon/2}(x)$ enthält.

2. Der Hilbertsche Folgenraum ℓ^2 aus Beispiel 4.2.3 ist nicht lokalkompakt.

Denn nach Beispiel 1.3.18, 2. bilden die offenen Bälle $B_{1/n}(x)$ mit $n \in \mathbb{N}$ eine Umgebungsbasis eines Punktes $x \in \ell^2$. Jede kompakte Umgebung K von x müsste also eine Kugel $B_{1/n}(x)$ enthalten. Damit wäre aber auch $B_{\leq 1/n}(x) \subseteq \overline{K} = K$ in K enthalten und damit kompakt als abgeschlossene Teilmenge eines kompakten topologischen Raums. Nach Beispiel 4.2.3 ist aber die abgeschlossene Kugel $B_{\leq 1}(0)$ und damit auch die dazu homöomorphe Kugel $B_{\leq 1/n}(x)$ nicht kompakt.

Weitere wichtige Beispiele lokalkompakter topologischer Räume ergeben sich aus dem folgenden Lemma, das insbesondere zeigt, dass das Entfernen von offenen oder abgeschlossenen Teilmengen aus einem topologischen Raum zwar dessen Kompaktheit zerstören kann, aber an dessen Lokalkompaktheit nichts ändert. Lokalkompaktheit vererbt sich also im Gegensatz zur Kompaktheit auch nicht nur auf abgeschlossene, sondern auch auf offene Teilräume.

Lemma 4.4.4: Jede offene oder abgeschlossene Teilmenge eines lokalkompakten topologischen Raums (X, \mathcal{O}) mit der Teilraumtopologie ist lokalkompakt.

Beweis:

1. Ist $O \subseteq X$ offen und $x \in O$, so ist jede Umgebung U von x in $(O, \mathcal{O}_\subseteq)$ auch eine Umgebung von x in (X, \mathcal{O}) . Wegen der Lokalkompaktheit von (X, \mathcal{O}) gibt es dann eine kompakte Umgebung $x \in K \subseteq U \subseteq O$, und diese ist auch kompakt in $(O, \mathcal{O}_\subseteq)$.

2. Sei $A \subseteq X$ abgeschlossen, $x \in A$ und U eine Umgebung von x in A . Dann gibt es eine Umgebung U' von x in X mit $U = U' \cap A$. Da X lokalkompakt ist, gibt es eine kompakte Umgebung K von x in X mit $K \subseteq U'$. Dann ist $K \cap A$ kompakt als abgeschlossene Teilmenge von K nach Lemma 4.1.4 und $x \in A \cap K$. Also ist $A \cap K$ eine kompakte Umgebung von x in $(A, \mathcal{O}_\subseteq)$. \square

Die Intuition, dass lokalkompakte Hausdorffräume im Wesentlichen topologische Räume sind, die durch das Entfernen abgeschlossener oder offener Teilmengen aus kompakten topologischen Räumen entstehen, wird durch die Tatsache gestützt, dass man lokalkompakte Hausdorffräume durch das Hinzufügen von Punkten *kompaktifizieren*, d. h. kompakt machen kann. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, dies zu tun. Die einfachste ist die sogenannte Einpunktkompaktifizierung, bei der nur ein einziger Punkt hinzugefügt wird.

Definition 4.4.5: Sei (X, \mathcal{O}) ein lokalkompakter Hausdorffraum. Die **Einpunktkompaktifizierung** oder **Alexandrov-Kompaktifizierung** von (X, \mathcal{O}) ist die Menge $X^* = X \cup \{\infty\}$ mit der Topologie

$$\mathcal{O}^* = \mathcal{O} \cup \{O \subseteq X^* \mid X^* \setminus O \subseteq X \text{ kompakt}\}.$$

Satz 4.4.6: Sei (X, \mathcal{O}) ein lokalkompakter Hausdorffraum.

1. Dann ist \mathcal{O}^* eine Topologie auf X , und (X^*, \mathcal{O}^*) ist ein kompakter Hausdorffraum.
2. Ist (X', \mathcal{O}') ein kompakter Hausdorffraum und $p' \in X'$ mit $X' \setminus \{p'\}$ homöomorph zu X , so ist (X', \mathcal{O}') homöomorph zu (X^*, \mathcal{O}^*) .

Beweis:

1.(a) Offensichtlich gilt $\emptyset \in \mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}^*$ und $X^* \in \mathcal{O}^*$ da $X^* \setminus X^* = \emptyset$ kompakt ist (T1). Ist $O_i \in \mathcal{O}^*$ für alle $i \in I$, so gilt entweder $O_i \in \mathcal{O}$ für alle $i \in I$ und damit $\cup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}^*$ oder es gibt ein i_0 mit $\infty \in O_{i_0}$. Dann ist $X^* \setminus O_{i_0} \subseteq X$ kompakt, und es folgt

$$X \supseteq X^* \setminus \cup_{i \in I} O_i = \cap_{i \in I} X^* \setminus O_i = (X \setminus O_{i_0}) \cap (\cap_{i \neq i_0} X \setminus O_i).$$

Die erste Menge $X \setminus O_{i_0}$ ist kompakt und die zweite abgeschlossen. Damit ist ihr Schnitt kompakt als abgeschlossene Teilmenge eines Kompaktums (T2).

Ist I endlich und $O_i \in \mathcal{O}^*$ für alle $i \in I$, so gibt es entweder ein $i \in I$ mit $\infty \notin O_i$ und dann folgt $\cap_{i \in I} O_i \in \mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}^*$, oder $\infty \in O_i$ für alle $i \in I$. Dann ist $X^* \setminus O_i \subseteq X$ kompakt für alle $i \in I$, und damit auch $\cup_{i \in I} X^* \setminus O_i = X^* \setminus \cap_{i \in I} O_i$ als endliche Vereinigung kompakter Mengen (Aufgabe 57).

1.(b) Sind $x, y \in X$, so gibt es disjunkte offene Mengen $O_x, O_y \in \mathcal{O}$ mit $x \in O_x$ und $y \in O_y$, da (X, \mathcal{O}) hausdorffsch ist. Zu jedem Punkt $x \in X$ gibt es wegen der Lokalkompaktheit von (X, \mathcal{O}) eine kompakte Umgebung $x \in K \subseteq X$ und damit eine offene Menge $O \in \mathcal{O}$ mit $x \in O \subseteq K$. Dann ist $O' := X^* \setminus K$ offen mit $\infty \in O'$ und $O \cap O' = \emptyset$. Also ist (X^*, \mathcal{O}^*) hausdorffsch.

1.(c) Wir zeigen, dass (X^*, \mathcal{O}^*) kompakt ist. Sei $(O_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X^* . Dann gibt es ein $j \in I$ mit $\infty \in O_j$, und damit ist $X^* \setminus O_j \subseteq X$ kompakt. Für $i \in I \setminus \{j\}$ sind auch die Mengen $O'_i = O_i \cap X$ offen als endliche Schnitte offener Mengen und $X^* \setminus O_j \subseteq \cup_{i \in I \setminus \{j\}} O'_i$. Also ist $(O'_i)_{i \in I \setminus \{j\}}$ eine offene Überdeckung des Kompaktums $X^* \setminus O_j \subseteq X$ und besitzt eine endliche Teilüberdeckung $(O'_i)_{i \in J}$. Damit ist $(O_i)_{i \in J \cup \{j\}}$ eine endliche Teilüberdeckung von X^* .

2. Sei (X', \mathcal{O}') ein kompakter Hausdorffraum, $p' \in X'$ und $f : X' \setminus \{p'\} \rightarrow X$ ein Homöomorphismus. Wir definieren eine bijektive Abbildung $f^* : X' \rightarrow X^*$ durch $f^*(x) = f(x)$ für alle $x \in X$ und $f^*(p') = \infty$. Da f ein Homöomorphismus ist, gilt dann $f^{*-1}(O) = f^{-1}(O) \subseteq X'$ offen für alle $O \in \mathcal{O}$. Für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq X$ ist $f^{*-1}(K) = f^{-1}(K) \subseteq X' \setminus \{p'\}$ kompakt nach Satz 4.1.6, da f^{-1} stetig ist und K kompakt. Da X' hausdorffsch ist, ist $f^{*-1}(K)$ damit auch abgeschlossen nach Lemma 4.1.4 und $f^{*-1}(X \setminus K) = X' \setminus f^{-1}(K)$ offen für alle kompakten Teilmengen $K \subseteq X$. Damit ist f^* stetig. Da (X', \mathcal{O}') kompakt ist und (X^*, \mathcal{O}^*) hausdorffsch, ist f^* dann nach Satz 4.1.6 ein Homöomorphismus. \square

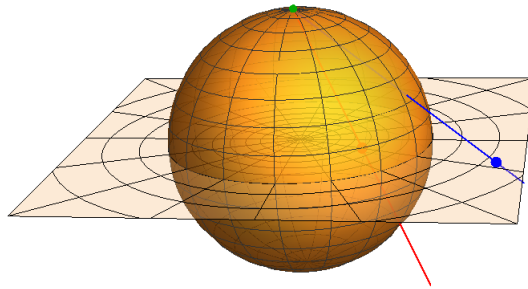
Korollar 4.4.7: Jeder lokalkompakte Hausdorffraum ist regulär.

Beweis:

Ist (X, \mathcal{O}) ein lokalkompakter Hausdorffraum, so ist (X, \mathcal{O}) homöomorph zu einem Teilraum seiner Einpunktkompaktifizierung (X^*, \mathcal{O}^*) , die als kompakter Hausdorffraum nach Satz 4.1.5 normal und damit auch regulär ist. Nach Lemma 2.2.5 sind Teilräume regulärer Räume regulär. \square

Beispiel 4.4.8:

1. Die Einpunktkompaktifizierung des topologischen Raums $(\mathbb{N}_0, \mathcal{P}(\mathbb{N}_0))$ ist der topologische Raum $\overline{\mathbb{N}_0}$ mit $\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{N}_0}} = \mathcal{P}(\mathbb{N}_0) \cup \{O \subseteq \overline{\mathbb{N}_0} \mid \infty \in O, n \in O \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}_0\}$ aus Satz 1.3.15. Denn nach Beispiel 4.1.3, 2. ist eine Menge $K \subseteq \mathbb{N}_0$ kompakt bezüglich der diskreten Topologie genau dann, wenn sie endlich ist.
2. Die Einpunktkompaktifizierung des \mathbb{R}^n ist homöomorph zur n -Sphäre S^n , und der Homöomorphismus wird durch die stereographische Projektion induziert (Aufgabe 67).



3. Ist X bereits kompakt, so ist X^* homöomorph zur Summe $X + \{\infty\}$ (Aufgabe 67).

Die Einpunktkompaktifizierung gibt uns also einen neuen Blick auf die Konvergenz von Folgen. Denn nach Satz 1.3.15 konvergiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ in einem topologischen Raum (X, \mathcal{O}) genau dann gegen $x \in X$, wenn die Abbildung $x^* : \overline{\mathbb{N}_0} \rightarrow X$ mit $x^*(\infty) = x$ und $x^*(n) = x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ stetig ist. Die konvergenten Folgen in einem topologischen Raum (X, \mathcal{O}) sind damit genau die stetigen Abbildungen $x : \mathbb{N}_0 \rightarrow X$, die sich stetig auf die Einpunktkompaktifizierung $\overline{\mathbb{N}_0}$ fortsetzen lassen.

Das zweite Beispiel ist insbesondere für Anwendungen in der Funktionentheorie relevant, wo man den Fall $n = 2$ betrachtet und $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ identifiziert. Die Einpunktkompaktifizierung ermöglicht es einem dann, **Möbiustransformationen**, also gebrochen lineare Abbildungen

$$f : \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{mit } a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0$$

zu stetigen Abbildungen $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ fortzusetzen, indem man $f(-d/c) = \infty$ und $f(\infty) = a/c$ setzt. Wegen der Homöomorphie von S^2 und \mathbb{C}^* entspricht das einer Fortsetzung zu stetigen Abbildungen $f : S^2 \rightarrow S^2$. Man spricht deswegen auch von der **Riemannschen Zahlensphäre**.

Teil II

Intermezzo: Kategorien und Funktoren

5 Kategorien und Funktoren

5.1 Kategorien

In der algebraischen Topologie werden topologische Räume mit Hilfe von algebraischen Strukturen, wie beispielsweise Gruppen, abelsche Gruppen und Vektorräume beschrieben. Jedem topologischen Raum wird eine solche algebraische Struktur zugeordnet. Dabei stellt sich die Frage, was die geeignete mathematische Beschreibung einer solchen Zuordnung ist. Das Konzept der Abbildung eignet sich einerseits deswegen nicht, da topologische Räume keine Menge bilden, andererseits, weil es zu kurz greift. Sowohl auf Seiten der topologischen Räume als auch auf der algebraischen Seite möchte man nämlich Strukturen nur bis auf Isomorphie betrachten, also homöomorphe topologische Räume und isomorphe Gruppen oder Vektorräume nicht unterscheiden. Jede vernünftige Zuordnung von algebraischen zu topologischen Strukturen muss also homöomorphe topologische Räume in isomorphe algebraische Strukturen abbilden.

Das zwingt einem, ein Konzept von Zuordnung zu entwickeln, das nicht nur die mathematischen Strukturen sondern auch die zugehörigen strukturhaltenden Abbildungen enthält. Dazu müssen mathematische Strukturen und die zugehörigen strukturhaltenden Abbildungen in einer mathematischen Struktur zusammengefasst werden. Dies ist das Konzept der *Kategorie* und die beschriebenen Zuordnungen zwischen verschiedenen Kategorien nennt man *Funktoren*.

Der Begriff der Kategorie verkörpert die Systematik in der Untersuchung mathematischer Strukturen, die sich bereits in den Grundvorlesungen abgezeichnet hat. So folgt beispielsweise auf die Definition der Menge der Begriff der Abbildung, auf die Definition einer Gruppe, eines Rings und einer Algebra der Begriff des Gruppen-, Ring- und Algebromorphismus, auf den Begriff des Vektorraums der Begriff der linearen Abbildung und auf den Begriff des topologischen Raums der Begriff der stetigen Abbildung.

In all diesen Fällen wurde zunächst eine mathematische Struktur definiert (Menge, Gruppe, Ring, Algebra, Vektorraum, topologischer Raum) und anschließend die Abbildungen zwischen solchen Strukturen untersucht, die die Strukturmerkmale erhalten oder mit den entsprechenden Strukturabbildungen oder Verknüpfungen vertauschen. In all diesen Fällen ergibt die Verkettung zweier strukturhaltender Abbildungen wieder eine strukturhaltende Abbildung, die Verkettung ist assoziativ, und die Identitätsabbildung ist strukturhaltend. Dies sind genau die Bedingungen, die in einer Kategorie gefordert werden. Allerdings nimmt man dort nicht mehr auf Abbildungen Bezug, sondern gibt diese Bedingungen abstrakt vor.

Definition 5.1.1: Eine **Kategorie** \mathcal{C} besteht aus:

- einer Klasse $\text{Ob } \mathcal{C}$ von **Objekten**,
- für je zwei Objekte $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ eine Menge $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ von **Morphismen**,
- für je drei Objekte X, Y, Z eine **Kompositionsabbildung**

$$\circ : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z), \quad (g, f) \mapsto g \circ f,$$

so dass die folgenden Axiome erfüllt sind:

- (K1) Die Morphismenmengen $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ sind paarweise disjunkt.
- (K2) Die Komposition ist assoziativ: $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ für alle Objekte W, X, Y, Z und Morphismen $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X)$, $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$.
- (K3) Zu jedem Objekt X gibt es einen Morphismus $1_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$, den **Identitätsmorphimus** auf X , mit $1_X \circ f = f$ und $g \circ 1_X = g$ für alle $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X)$, $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

Statt $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ schreibt man auch $f : X \rightarrow Y$. Das Objekt X heißt dann **Quelle** und das Objekt Y **Ziel** des Morphismus f .

Ein Morphismus $f : X \rightarrow Y$ heißt **Isomorphismus**, wenn ein Morphismus $g : Y \rightarrow X$ mit $g \circ f = 1_X$ und $f \circ g = 1_Y$ existiert. Die Objekte X und Y heißen dann **isomorph**.

Man beachte, dass in der Definition einer Kategorie zwar gefordert wird, dass die *Morphismen* zwischen zwei gegebenen Objekten X, Y eine Menge $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ bilden, nicht jedoch, dass die *Objekte* eine Menge bilden. Eine Kategorie, in der auch die Objekte eine Menge bilden, heißt **kleine Kategorie**.

Der Grund, warum man dies bei Objekten nicht fordert, ist, dass man so ein wichtiges Beispiel einer Kategorie verlieren würde, nämlich die Kategorie **Set**, deren Objekte Mengen und deren Morphismen Abbildungen sind. Würde man fordern, dass die Objekte einer Kategorie eine Menge bilden, so müsste man die Menge aller Mengen betrachten, die nicht existiert, da sie zum Russelschen Paradox führt. Auch für Morphismen kann die Forderung, dass sie Mengen bilden, gelockert werden. Kategorien im Sinn von Definition 5.1.1 nennt man dann **lokal kleine Kategorien**.

Beispiel 5.1.2:

1. Die Kategorie **Set** der Mengen: die Objekte sind Mengen, die Morphismen Abbildungen, und die Isomorphismen Bijektionen.
2. Die Kategorie **Top** der topologischen Räume: die Objekte sind topologische Räume, die Morphismen stetige Abbildungen, die Isomorphismen Homöomorphismen.
3. Die Kategorie **Top*** der punktierten topologischen Räume, deren Objekte Paare (x, X) eines topologischen Raums (X, \mathcal{O}) und eines Punkts $x \in X$ sind. Die Morphismen $f : (x, X) \rightarrow (y, Y)$ sind stetige Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ mit $f(x) = y$ und die Isomorphismen Homöomorphismen $f : X \rightarrow Y$ mit $f(x) = f(y)$.
4. Die Kategorie $\text{Vect}_{\mathbb{K}}$ der Vektorräume über einem Körper \mathbb{K} : die Objekte sind \mathbb{K} -Vektorräume, die Morphismen \mathbb{K} -lineare Abbildungen, und die Isomorphismen \mathbb{K} -lineare Isomorphismen.
5. Die Kategorie **Grp** der Gruppen (Objekte: Gruppen, Morphismen: Gruppenhomomorphismen, Isomorphismen: Gruppenisomorphismen), die Kategorie **Ring** der Ringe (Objekte: Ringe, Morphismen: Ringhomomorphismen, Isomorphismen: Ringisomorphismen), die Kategorie **URing** der unitalen Ringe (Objekte: unitale Ringe, Morphismen: unitale Ringhomomorphismen, Isomorphismen: unitale Ringisomorphismen), die Kategorie **\mathbb{K} -Alg** der Algebren über einem Körper \mathbb{K} (Objekte: \mathbb{K} -Algebren, Morphismen: \mathbb{K} -Algebrahomomorphismen, Isomorphismen: \mathbb{K} -Algebraisomorphismen).

Kategorie	Objekte	Morphismen	Isomorphismen
Set	Mengen	Abbildungen	Bijektionen
Set*	punktierte Mengen	basipunktcompatible Abbildungen	basipunktcompatible Bijektionen
Grp	Gruppen	Gruppenhomomorphismen	Gruppenisomorphismen
Grpd	Gruppoide	Funktoren zwischen Gruppoiden	invertierbare Funktoren zwischen Gruppoiden
Ab	abelsche Gruppen	Gruppenhomomorphismen	Gruppenisomorphismen
Ring	Ringe	Ringhomomorphismen	Ringisomorphismen
URing	unitale Ringe	unitale Ringhomomorphismen	unitale Ringisomorphismen
Field	Körper	Körperhomomorphismen =unitale Ringhomomorphismen	Körperisomorphismen =unitale Ringisomorphismen
Vect $_{\mathbb{K}}$	\mathbb{K} -Vektorräume	\mathbb{K} -lineare Abbildungen	\mathbb{K} -Vektorraumisomorphismen
\mathbb{K} -Alg	Algebren über \mathbb{K}	Algebrahomomorphismen	Algebraisomorphismen
Top	topologische Räume	stetige Abbildungen	Homöomorphismen
Top*	punktierte topologische Räume	basipunktcompatible stetige Abbildungen	basipunktcompatible Homöomorphismen

Tabelle 1: Beispiele von Kategorien

6. Jede partiell geordnete Menge (\mathcal{M}, \preceq) bildet eine Kategorie \mathcal{C} mit $\text{Ob } \mathcal{C} = \mathcal{M}$ und Morphismenmengen $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(m, m') = \emptyset$ falls $m \not\preceq m'$ und $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(m, m')$ einelementig, falls $m \preceq m'$. Die Komposition von Morphismen ist wegen der Transitivität von \preceq wohldefiniert.
7. Eine kleine Kategorie, in der alle Morphismen Isomorphismen sind, heißt **Gruppoid**. Für jedes Objekt X in einem Gruppoid \mathcal{G} ist $(\text{Hom}_{\mathcal{G}}(X, X), \circ)$ eine Gruppe mit der Verkettung von Morphismen als Gruppenmultiplikation und dem Identitätsmorphismus 1_X als neutralem Element.
8. Eine Kategorie mit einem einzigen Objekt ist gerade ein **Monoid**. Ein Gruppoid mit einem einzigen Objekt ist gerade eine Gruppe. Für eine Gruppe (G, \circ) bezeichnet man mit BG die zugehörige Kategorie mit einem Objekt, Elementen von G als Morphismen und der Gruppenmultiplikation als Verkettung von Morphismen.
9. Die **leere Kategorie** enthält weder Objekte noch Morphismen. Die Kategorie mit einem Objekt und einem Identitätsmorphismus entspricht der trivialen Gruppe.

Diese und noch einige weitere Beispiele sind in Tabelle 1 zusammengefasst. Wie auch bei anderen mathematischen Strukturen gibt es für Kategorien einige naheliegende Konstruktionen, mit denen man aus gegebenen Kategorien neue Kategorien erhält. Man kann die Verknüpfung von Morphismen in einer Kategorie umdrehen, man kann Produkte verschiedener Kategorien betrachten und Unterkategorien konstruieren, indem man Objekte und Morphismen aus einer Kategorie entfernt. Auch das Bilden von Quotienten von Kategorien ist möglich.

Definition 5.1.3: Seien \mathcal{C}, \mathcal{D} Kategorien.

1. Die zu \mathcal{C} **opponierte Kategorie** \mathcal{C}^{op} ist die Kategorie mit $\text{Ob } \mathcal{C}^{op} = \text{Ob } \mathcal{C}$, mit $\text{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ für alle Objekte X, Y und Komposition $f \circ_{\mathcal{C}^{op}} g = g \circ_{\mathcal{C}} f$.
2. Das **kartesische Produkt** $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ hat als Objekte Paare (X, Y) von Objekten $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ und $Y \in \text{Ob } \mathcal{D}$ und als Morphismenmengen die kartesischen Produkte der entsprechenden Morphismenmengen in \mathcal{C} und \mathcal{D} , die komponentenweise verknüpft werden

$$\text{Hom}_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}}((U, V), (X, Y)) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, X) \times \text{Hom}_{\mathcal{D}}(V, Y).$$

3. Eine **Unterkategorie** von \mathcal{C} ist eine Kategorie \mathcal{U} mit $\text{Ob } \mathcal{U} \subseteq \text{Ob } \mathcal{C}$, mit $\text{Hom}_{\mathcal{U}}(X, Y) \subseteq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ für alle $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{U}$ und der Verknüpfungen von Morphismen aus \mathcal{C} . Die Unterkategorie \mathcal{U} heißt **voll**, wenn $\text{Hom}_{\mathcal{U}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ für alle $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{U}$.
4. Ist \mathcal{C} eine Kategorie mit Äquivalenzrelationen $\sim_{X, Y}$ auf jeder Morphismenmenge $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, die kompatibel mit der Verkettung von Morphismen sind:

$$f \sim_{X, Y} f' \text{ in } \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y), g \sim_{Y, Z} g' \text{ in } \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \Rightarrow g \circ f \sim_{X, Z} g' \circ f' \text{ in } \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z),$$

so erhält man eine **Quotientenkategorie** \mathcal{C}_{\sim} mit $\text{Ob } \mathcal{C}_{\sim} = \text{Ob } \mathcal{C}$ und Äquivalenzklassen von Morphismen in \mathcal{C} als Morphismen: $\text{Hom}_{\mathcal{C}_{\sim}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) / \sim_{X, Y}$ (Aufgabe 84).

Beispiel 5.1.4:

1. Die Kategorie $\text{Vect}_{\mathbb{K}}^{fin}$ der endlich-dimensionalen Vektorräume über \mathbb{K} ist eine volle Unterkategorie der Kategorie $\text{Vect}_{\mathbb{K}}$.
2. Die Kategorie Ab der abelschen Gruppen ist eine volle Unterkategorie der Kategorie Grp.
3. Die Kategorie Field der Körper ist eine volle Unterkategorie der Kategorie URing.

5.2 Funktoren

Aus den Beispielen wird deutlich, dass es sich bei Kategorien um eine sehr flexible und allgemeine Struktur handelt, die in verschiedenen Gebieten der Mathematik auftritt. Die Frage ist nun, wie man Beziehungen zwischen verschiedenen Kategorien charakterisiert, also etwa die Kategorie der topologischen Räume mit der Kategorie der Gruppen in Verbindung bringt. Anhand der Definition der Kategorie ist es naheliegend, dass die entsprechende mathematische Struktur, nicht nur die Objekte in den zwei Kategorien in Verbindung bringen muss, sondern auch ihre Morphismen, und zwar auf eine Art und Weise die kompatibel ist mit (i) deren Quellen- und Zielobjekten, (ii) den Identitätsmorphismen und (iii) der Verkettung von Morphismen. Dies führt auf das Konzept des Funktors.

Definition 5.2.1: Seien $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien. Ein **Funktor** $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ besteht aus:

- einer Zuordnung $X \mapsto F(X)$ eines Objekts $F(X) \in \text{Ob } \mathcal{D}$ zu jedem Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$,
- für je zwei Objekte $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ einer Abbildung

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)), \quad f \mapsto F(f),$$

die kompatibel mit der Komposition und den Identitätsmorphismen sind:

$$\begin{aligned} F(f \circ g) &= F(f) \circ F(g) & \forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y), g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X) \\ F(1_X) &= 1_{F(X)} & \forall X \in \text{Ob } \mathcal{C}. \end{aligned}$$

- Einen Funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ nennt man auch einen **Endofunktor**.
- Ein **kontravarianter Funktor** von \mathcal{C} nach \mathcal{D} ist ein Funktor $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{D}$.
- Die **Verkettung** zweier Funktoren $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ ist der Funktor $FG : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D}$ mit der Zuordnung $X \mapsto F(G(X))$ für alle Objekte $X \in \text{Ob } \mathcal{B}$ und den Abbildungen $FG : \text{Hom}_{\mathcal{B}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(G(X)), F(G(Y))), f \mapsto F(G(f))$.

Beispiel 5.2.2:

1. Der Identitätsfunktor $\text{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, der jedes Objekt und jeden Morphismus auf sich selbst abbildet, ist ein Endofunktor.
2. Die Funktoren $\text{Ring} \rightarrow \text{Ab}$ und $\text{Vect}_{\mathbb{K}} \rightarrow \text{Ab}$, die einem Ring oder Vektorraum die zugrundeliegende abelsche Gruppe zuordnen, und die Funktoren $\text{Grp} \rightarrow \text{Set}$, $\text{Ring} \rightarrow \text{Set}$, $\text{Vect}_{\mathbb{K}} \rightarrow \text{Set}$, $\mathbb{K}\text{-Alg} \rightarrow \text{Set}$, $\text{Top} \rightarrow \text{Set}$, die einer Gruppe, einem \mathbb{K} -Vektorraum, einem Ring, einer \mathbb{K} -Algebra oder einem topologischen Raum die zugrundeliegende Menge zuordnen. Solche Funktoren heißen **Vergissfunktoren**.
3. Der Funktor $*$: $\text{Vect}_{\mathbb{K}}^{op} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{K}}$, der jedem \mathbb{K} -Vektorraum V seinen Dualraum V^* und jeder \mathbb{K} -linearen Abbildung $f : V \rightarrow W$ die dazu duale Abbildung $f^* : W^* \rightarrow V^*$, $f^*(\alpha) = \alpha \circ f$ für alle $\alpha \in W^*$ zuordnet, ist ein kontravarianter Funktor.
4. **Tensorprodukte:** Das Tensorprodukt von \mathbb{K} -Vektorräumen definiert einen Funktor $\otimes : \text{Vect}_{\mathbb{K}} \times \text{Vect}_{\mathbb{K}} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{K}}$, der einem Paar von \mathbb{K} -Vektorräumen V, W ihr Tensorprodukt $V \otimes W$ und einem Paar von \mathbb{K} -linearen Abbildungen $f : V \rightarrow V'$ und $g : W \rightarrow W'$ die lineare Abbildung $f \otimes g : V \otimes W \rightarrow V' \otimes W'$, $v \otimes v' \mapsto f(v) \otimes g(v')$ zuordnet.

5. Ist \mathbb{K} ein Körper, so erhält man einen Funktor $\text{Set} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{K}}$, der einer Menge A den von A erzeugten \mathbb{K} -Vektorraum $\langle A \rangle_{\mathbb{K}}$ zuordnet und einer Abbildung $f : A \rightarrow B$ die eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\langle f \rangle_{\mathbb{K}} : \langle A \rangle_{\mathbb{K}} \rightarrow \langle B \rangle_{\mathbb{K}}$ mit $\langle f \rangle_{\mathbb{K}}(a) = f(a)$ für alle $a \in A$.
6. Sind G, H Gruppen und BG, BH die zugehörigen Gruppoide mit einem einzigen Objekt und Gruppenelementen als Morphismen aus Beispiel 5.1.2, 8, so entsprechen die Funktoren $F : BG \rightarrow BH$ gerade den Gruppenhomomorphismen $F : G \rightarrow H$ (Aufgabe 78).

Ein weiteres interessantes Beispiel, das einen Vorgeschmack auf weitere Funktoren aus der algebraischen Topologie gibt, ergibt sich aus dem Begriff des Wegzusammenhangs und der Wegzusammenhangskomponenten.

Beispiel 5.2.3: Der **Wegkomponentenfunktor** $\pi_0 : \text{Top} \rightarrow \text{Set}$ ordnet einem topologischen Raum (X, \mathcal{O}_X) die Menge $\pi_0(X) = \{W(x) \mid x \in X\}$ seiner Wegzusammenhangskomponenten zu und einer stetigen Abbildung $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ die Abbildung $\pi_0(f) : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$, $W(x) \mapsto W(f(x))$ (Aufgabe 81).

Da die Verkettung von Funktoren assoziativ ist und es zu jeder Kategorie einen Identitätsfunktor gibt, der als Identitätsmorphismus dienen kann, können wir auch aus Kategorien und Funktoren wieder eine Kategorie bilden. Dazu müssen wir uns aber auf *kleinen* Kategorien beschränken, deren Objekte Mengen bilden. Dies ist notwendig, um von einer *Menge von Funktoren* zwischen zwei gegebenen Kategorien sprechen zu können. Insbesondere erhalten wir so eine Kategorie der Gruppoide, die auch in der Topologie eine wichtige Rolle spielt.

Definition 5.2.4: Die Kategorie **Grpd** der Gruppoide enthält als Objekte Gruppoide und als Morphismen Funktoren zwischen Gruppoiden mit der Verkettung von Funktoren als Verkettung von Morphismen. Einen Funktor $F : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ zwischen Gruppoiden bezeichnet man auch als **Morphismus von Gruppoiden**.

Während die Begriffe der Kategorie und des Funktors anhand der bisherigen Überlegungen und Erfahrungen mit mathematischen Strukturen relativ naheliegend erscheinen, gibt es hier doch ein neues Phänomen, nämlich die Existenz einer weiteren mathematischen Struktur, die verschiedene Funktoren zwischen zwei gegebenen Kategorien in Beziehung setzt. Dies sind die sogenannten *natürlichen Transformationen*. Eine wesentliche Motivation für die Betrachtung dieser Strukturen ist, dass es kaum Beispiele zueinander inverser Funktoren gibt, d. h. Funktoren $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ zu denen ein Funktor $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ mit $GF = \text{id}_{\mathcal{C}}$ und $FG = \text{id}_{\mathcal{D}}$ existiert. Zu fordern, dass ein Funktor *invertierbar* sein soll, schließt sehr viele mathematisch interessante Beispiele aus. Mit Hilfe von natürlichen Transformationen kann man diese Bedingung abschwächen und ein allgemeineres und nützlicheres Konzept erhalten.

Definition 5.2.5: Seien $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ Funktoren. Eine **natürliche Transformation** $\eta : F \rightarrow G$ ist eine Zuordnung $X \in \text{Ob } \mathcal{C} \mapsto \eta_X : F(X) \rightarrow G(X)$ eines Morphismus $\eta_X : F(X) \rightarrow G(X)$ in \mathcal{D} zu jedem Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$, so dass für jeden Morphismus $f : X \rightarrow Y$ das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\eta_X} & G(X) \\ \downarrow F(f) & & \downarrow G(f) \\ F(Y) & \xrightarrow{\eta_Y} & G(Y). \end{array}$$

Sind die Morphismen $\eta_X : F(X) \rightarrow G(X)$ Isomorphismen für alle Objekte X in \mathcal{C} , so nennt man $\eta : F \rightarrow G$ einen **natürlichen Isomorphismus** und die Funktoren F, G **natürlich isomorph**.

Bemerkung 5.2.6: Ist \mathcal{C} eine kleine Kategorie und \mathcal{D} eine Kategorie, so bilden die Funktoren $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ und natürlichen Transformationen $\eta : F \rightarrow G$ eine Kategorie, die als **Funktorkategorie** und mit $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ bezeichnet wird (siehe Aufgabe 83).

Beispiel 5.2.7:

1. Für jeden Funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ist $\text{id}_F : F \rightarrow F$ mit $(\text{id}_F)_X = 1_{F(X)} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ für alle Objekte X in \mathcal{C} ein natürlicher Isomorphismus.
2. In der Kategorie $\mathcal{C} = \text{Vect}_{\mathbb{K}}$ gibt es zwischen den Funktoren $\text{id} : \text{Vect}_{\mathbb{K}} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{K}}$ und $** : \text{Vect}_{\mathbb{K}} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{K}}$ eine kanonische natürliche Transformation $\text{can} : \text{id} \rightarrow **$. Die Morphismen $\text{can}_V : V \rightarrow V^{**}$, $v \mapsto f_v$ sind die linearen Abbildungen, die einen Vektor $v \in V$ auf den eindeutig bestimmten Vektor $f_v \in V^{**}$ mit $f_v(\alpha) = \alpha(v)$ für alle $\alpha \in V^*$ abbilden. Sie sind Isomorphismen genau dann, wenn V endlich-dimensional ist.
3. Wir betrachten die Kategorie CRing aller kommutativen unitalen Ringe und unitalen Ringhomomorphismen. Dann erhält man einen Funktor $F : \text{CRing} \rightarrow \text{Grp}$, indem man jedem Ring $(R, +, \cdot)$ die Gruppe (R^\times, \cdot) seiner Einheiten zuordnet und jedem Ringhomomorphismus $f : R \rightarrow S$ den induzierten Gruppenhomomorphismus $f|_{R^\times} : (R^\times, \cdot) \rightarrow (S^\times, \cdot)$.

Ein weiterer Funktor $G : \text{CRing} \rightarrow \text{Grp}$ ergibt sich, indem man einem Ring $(R, +, \cdot)$ die Gruppe $\text{GL}_n(R)$ der invertierbaren Matrizen mit Einträgen in R zuordnet und einem Ringhomomorphismus $f : R \rightarrow S$ den zugehörigen Gruppenhomomorphismus

$$\text{GL}_n(f) : \text{GL}_n(R) \rightarrow \text{GL}_n(S), \quad (r_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \mapsto (f(r_{ij}))_{i,j=1,\dots,n},$$

der durch Anwendung von f auf alle Einträge der Matrizen entsteht. Die Determinante definiert dann eine natürliche Transformation $\det : G \rightarrow F$, denn für jeden Ringhomomorphismus $f : R \rightarrow S$ kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{GL}_n(R) & \xrightarrow{\det_R} & R^\times \\ \text{GL}_n(f) \downarrow & & \downarrow f|_{R^\times} \\ \text{GL}_n(S) & \xrightarrow{\det_S} & S^\times. \end{array}$$

Mit Hilfe des Begriffs der natürlichen Transformation kann man die Forderung, dass ein Funktor ein Inverses besitzen soll, abschwächen. Anstatt zu fordern, dass es zu einem Funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ einen Funktor $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ gibt, so dass die Funktoren $GF : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ und $FG : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ mit den Identitätsfunktoren *übereinstimmen*, fordern wir nur noch, dass diese zu Identitätsfunktoren *natürlich isomorph* sind. Dies führt auf den Begriff der Äquivalenz von Kategorien. Dieser ist viel brauchbarer als die naive Forderung eines inversen Funktors.

Definition 5.2.8: Ein Funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ heißt **Äquivalenz von Kategorien**, wenn ein Funktor $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ und natürliche Isomorphismen $\epsilon : FG \rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$, $\eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow GF$ existieren. In diesem Fall heißen die Kategorien \mathcal{C} und \mathcal{D} **äquivalent**.

Ein in der Praxis leichter handhabbares Kriterium dafür, dass ein Funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ eine Äquivalenz von Kategorien ist, liefert der folgende Satz. Sein Beweis benutzt das Auswahlaxiom und wird beispielsweise in [K, Proposition XI.1.5] gegeben.

Satz 5.2.9: Ein Funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ist eine Äquivalenz von Kategorien genau dann, wenn er

- **volltreu** ist:
für alle Objekte C, C' in \mathcal{C} ist $F : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C') \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), F(C'))$ eine Bijektion,
- und **wesentlich surjektiv**:
zu jedem Objekt D in \mathcal{D} gibt es ein Objekt C in \mathcal{C} , so dass D isomorph zu $F(C)$ ist.

Beispiel 5.2.10: (Übung)

1. Die Kategorie $\text{Vect}^{fin}(\mathbb{K})$ der endlich-dimensionalen \mathbb{K} -Vektorräume ist äquivalent zu der Kategorie \mathcal{C} , deren Objekte nichtnegative ganze Zahlen $n \in \mathbb{N}_0$ und deren Morphismen $f : n \rightarrow m$ Matrizen in $\text{Mat}(m \times n, \mathbb{K})$ sind. Die Komposition von Morphismen entspricht der Matrixmultiplikation und die Identitätsmorphismen den Einheitsmatrizen $1_n = \mathbb{1}_n$.
2. Die Kategorie Set^{fin} der *endlichen* Mengen ist äquivalent zur Kategorie Ord^{fin} der endlichen **Ordinalzahlen** mit Objekten $\underline{n} = \{0, 1, \dots, n-1\}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und Abbildungen $f : \{0, 1, \dots, n-1\} \rightarrow \{0, 1, \dots, m-1\}$ als Morphismen $f : \underline{n} \rightarrow \underline{m}$.

5.3 Produkte, Koprodukte, Pullbacks und Pushouts

Nachdem wir uns mit den grundlegenden Begriffen in Kategorien befasst haben, untersuchen wir nun, wie sich auf universellen Eigenschaften beruhende Konstruktionen in Kategorien realisieren lassen. Die zentrale Idee bei der Verallgemeinerung solcher Konstruktionen auf Kategorien ist es, die universellen Eigenschaften als Bedingungen an die Morphismen zu interpretieren und sie als Definition der entsprechenden Struktur in Kategorien zu verwenden. Ersetzt man beispielsweise in Satz 3.3.4 die Begriffe *topologischer Raum* durch *Objekt* und *stetige Abbildung* durch *Morphismus* und fordert statt der Stetigkeit von Projektions- und Inklusionsabbildungen die Existenz einer Familie von Morphismen, die deren Rolle einnimmt, so erhält man direkt die Definition eines Produkts und Koprodukts in einer Kategorie.

Definition 5.3.1: Sei \mathcal{C} eine Kategorie und $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie von Objekten in \mathcal{C} .

1. Ein **Produkt** der Objekte X_i ist ein Objekt $\prod_{i \in I} X_i$ in \mathcal{C} zusammen mit einer Familie $(\pi_i)_{i \in I}$ von Morphismen $\pi_i : \prod_{j \in I} X_j \rightarrow X_i$, so dass für jede Familie $(f_i)_{i \in I}$ von Morphismen $f_i : W \rightarrow X_i$ in \mathcal{C} ein eindeutig bestimmter Morphismus $f : W \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ existiert, so dass für alle $i \in I$ das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\exists! f} & \prod_{i \in I} X_i \\ & \searrow f_i & \downarrow \pi_i \\ & & X_i. \end{array}$$

Dies wird als die **universelle Eigenschaft** des Produkts bezeichnet.

2. Ein **Koprodukt** der Objekte X_i ist ein Objekt $\coprod_{i \in I} X_i$ in \mathcal{C} zusammen mit einer Familie $(\iota_i)_{i \in I}$ von Morphismen $\iota_i : X_i \rightarrow \coprod_{j \in I} X_j$, so dass zu jeder Familie $(g_i)_{i \in I}$ von Morphismen $g_i : X_i \rightarrow W$ ein eindeutig bestimmter Morphismus $g : \coprod_{i \in I} X_i \rightarrow W$ existiert, so dass für alle $i \in I$ das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} W & \xleftarrow{\exists! g} & \coprod_{i \in I} X_i \\ & \searrow g_i & \uparrow \iota_i \\ & & X_i \end{array}$$

Dies wird als die **universelle Eigenschaft** des Koprodukts bezeichnet.

Ist $I = \{1, \dots, n\}$, so schreibt man auch $X_1 \times \dots \times X_n = \prod_{i \in I} X_i$ und $X_1 + \dots + X_n = \coprod_{i \in I} X_i$.

Im Allgemeinen müssen (Ko)produkte in einer Kategorie \mathcal{C} nicht für alle Familien von Objekten existieren. Wenn sie aber existieren, so sind sie *eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie*. Es sind also nicht nur alle (Ko)produkte isomorph, sondern es gibt *genau einen* Isomorphismus zwischen zwei (Ko)produkten, der mit der (Ko)produktstruktur verträglich ist.

Dass *Eindeutigkeit bis auf eindeutige Isomorphie* eine viel stärkere Forderung ist als *Isomorphie* sieht man am Beispiel der Vektorräume. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ sind n -dimensionale Vektorräume über einem Körper \mathbb{K} *eindeutig bis auf Isomorphie*, d. h. zwischen zwei n -dimensionalen \mathbb{K} -Vektorräumen gibt es immer mindestens einen Vektorraumisomorphismus. Nulldimensionale Vektorräume sind dagegen *eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie*, d. h. zwischen zwei 0-dimensionalen Vektorräumen über \mathbb{K} gibt es *genau einen* Vektorraumisomorphismus. Deswegen spricht man von *einem* n -dimensionalen Vektorraum aber von *dem* Nullvektorraum.

Die *Eindeutigkeit bis auf eindeutige Isomorphie* gilt auch für alle anderen Strukturen in Kategorien, die über universelle Eigenschaften definiert werden. Auch der Beweis dieser Eindeutigkeitsaussagen hat immer die gleiche Struktur und verläuft immer wie im folgenden Satz.

Satz 5.3.2: Sei \mathcal{C} eine Kategorie. Dann sind Produkte und Koprodukte in \mathcal{C} **eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie**:

1. Sind $(\prod_{i \in I} X_i, (\pi_i)_{i \in I})$ und $(\prod'_{i \in I} X_i, (\pi'_i)_{i \in I})$ Produkte einer Familie von Objekten $(X_i)_{i \in I}$ so gibt es genau einen Morphismus $\pi' : \prod'_{i \in I} X_i \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ mit $\pi_i \circ \pi' = \pi'_i$ für alle $i \in I$, und dieser ist ein Isomorphismus.
2. Sind $(\prod_{i \in I} X_i, (\iota_i)_{i \in I})$ und $(\prod'_{i \in I} X_i, (\iota'_i)_{i \in I})$ Koprodukte einer Familie von Objekten $(X_i)_{i \in I}$ so gibt es genau einen Morphismus $\iota' : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow \prod'_{i \in I} X_i$ mit $\iota'_i \circ \iota_i = \iota'_i$ für alle $i \in I$, und dieser ist ein Isomorphismus.

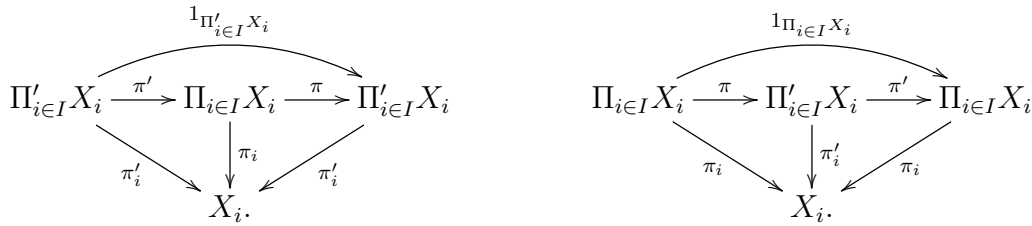
Beweis:

Wir beweisen die Aussage für Produkte. Der Beweis für Koprodukte ist analog. Sind $(\prod_{i \in I} X_i, (\pi_i)_{i \in I})$ und $(\prod'_{i \in I} X_i, (\pi'_i)_{i \in I})$ zwei Produkte einer Familie von Objekten $(X_i)_{i \in I}$, so gibt es nach der universellen Eigenschaft des Produkts $(\prod_{i \in I} X_i, (\pi_i)_{i \in I})$ genau einen Morphismus $\pi' : \prod'_{i \in I} X_i \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ mit $\pi_i \circ \pi' = \pi'_i$ und nach der universellen Eigenschaft des Produkts $(\prod'_{i \in I} X_i, (\pi'_i)_{i \in I})$ genau einen Morphismus $\pi : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow \prod'_{i \in I} X_i$ mit $\pi'_i \circ \pi = \pi_i$ für alle $i \in I$

$$\begin{array}{ccc} \prod'_{i \in I} X_i & \xrightarrow{\exists! \pi'} & \prod_{i \in I} X_i \\ & \searrow \pi' & \downarrow \pi_i \\ & & X_i \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \prod_{i \in I} X_i & \xrightarrow{\exists! \pi} & \prod'_{i \in I} X_i \\ & \searrow \pi_i & \downarrow \pi'_i \\ & & X_i \end{array}$$

Dann gilt für die Morphismen $\pi \circ \pi' : \prod'_{i \in I} X_i \rightarrow \prod'_{i \in I} X_i$ und $\pi' \circ \pi : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$

$$\pi'_i \circ \pi \circ \pi' = \pi_i \circ \pi' = \pi'_i = \pi'_i \circ 1_{\prod'_{i \in I} X_i}, \quad \pi_i \circ \pi' \circ \pi = \pi'_i \circ \pi = \pi_i = \pi_i \circ 1_{\prod_{i \in I} X_i} \quad \forall i \in I.$$



Mit der universellen Eigenschaft der Produkte $(\prod_{i \in I} X_i, (\pi_i)_{i \in I})$, $(\prod'_{i \in I} X_i, (\pi'_i)_{i \in I})$ folgt daraus $\pi \circ \pi' = 1_{\prod'_{i \in I} X_i}$ und $\pi' \circ \pi = 1_{\prod_{i \in I} X_i}$, und damit ist π' ein Isomorphismus mit $\pi'^{-1} = \pi$. \square

Beispiel 5.3.3:

1. Ein Produkt einer Familie von Objekten in \mathcal{C} ist ein Koprodukt dieser Familie in \mathcal{C}^{op} . Denn die Definition des Produkts wandelt sich in die Definition des Koprodukts um, wenn man Quelle und Ziel aller Morphismen vertauscht und die Verkettung umkehrt.
2. Das kartesische Produkt von Mengen ist ein Produkt und die disjunkte Vereinigung von Mengen ist ein Koprodukt in der Kategorie Set.
3. Das Produkt und die Summe topologischer Räume sind ein Produkt und ein Koprodukt in der Kategorie Top.
4. Das Wedge Produkt aus Beispiel 3.4.6 ist ein Koprodukt in der Kategorie Top* punktierter topologischer Räume.
5. Das Produkt von Vektorräumen und die direkte Summe von Vektorräumen sind ein Produkt und ein Koprodukt in der Kategorie Vect $_{\mathbb{K}}$.
6. Das **kartesische Produkt** $\times_{i \in I} G_i$ einer Familie $(G_i)_{i \in I}$ von Gruppen (G_i, \cdot) ist das kartesische Produkt der Mengen G_i mit der Gruppenmultiplikation $(g_i)_{i \in I} \cdot (h_i)_{i \in I} = (g_i \cdot h_i)_{i \in I}$. Es ist ein Produkt in der Kategorie Grp, denn die Projektionen $\pi_k : (g_i)_{i \in I} \rightarrow g_k$ sind Gruppenhomomorphismen, und zu jeder Familie $(f_i)_{i \in I}$ von Gruppenhomomorphismen $f_i : H \rightarrow G_i$ gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus $f : H \rightarrow \times_{i \in I} G_i$ mit $\pi_k \circ f(h) = f_k(h)$, nämlich $f : h \mapsto (f_i(h))_{i \in I}$.
7. Analog definiert man für eine Familie $(R_i)_{i \in I}$ von (unitalen) Ringen das **kartesische Produkt** als das kartesische Produkt der Mengen R_i mit der Ringstruktur

$$(r_i)_{i \in I} + (s_i)_{i \in I} = (r_i + s_i)_{i \in I} \quad (r_i)_{i \in I} \cdot (s_i)_{i \in I} = (r_i \cdot s_i)_{i \in I}.$$

Dies definiert ein Produkt in den Kategorien URing und Ring.

Insbesondere kann man in jeder Kategorie Produkte und Koprodukte für leere Indexmengen I betrachten. Existiert das leere Produkt in einer Kategorie \mathcal{C} , so besteht es aus einem Objekt $X = \prod_{i \in \emptyset} X_i$ und für jedes Objekt W in \mathcal{C} genau einem Morphismus $f_W : W \rightarrow X$. Denn die Familien $(\pi_i)_{i \in I}$, $(f_i)_{i \in I}$ aus Definition 5.3.1 sind leer. Die Bedingung an den Morphismus $f : W \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ reduziert sich dann auf die Existenz *genau eines* Morphismus $f_W : W \rightarrow X$.

Existiert das leere Koprodukt in einer Kategorie \mathcal{C} , so besteht es aus einem Objekt $X = \coprod_{i \in \emptyset} X_i$ und für jedes Objekt W in \mathcal{C} genau einem Morphismus $g_W : X \rightarrow W$. Denn die Familien $(\pi_i)_{i \in I}$, $(g_i)_{i \in I}$ aus Definition 5.3.1 sind leer. Die Bedingung an den Morphismus $g : \coprod_{i \in I} X_i \rightarrow W$ reduziert sich dann auf die Existenz *genau eines* Morphismus $g_W : X \rightarrow W$.

Definition 5.3.4: Ein Objekt X in einer Kategorie \mathcal{C} heißt:

1. **final** oder **terminal**, wenn es zu jedem Objekt W in \mathcal{C} genau einen Morphismus $f_W : W \rightarrow X$ gibt,
2. **kofinal** oder **initial**, wenn es zu jedem Objekt W in \mathcal{C} genau einen Morphismus $g_W : X \rightarrow W$ gibt,
3. **Nullobjekt**, wenn es initial und final ist.

Aus der Eindeutigkeit von Produkten und Koprodukten bis auf eindeutige Isomorphie in Satz 5.3.2 ergibt sich direkt, dass terminale, initiale und Nullobjekte, wenn sie existieren, eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie sind: Sind X und X' zwei initiale, terminale oder Nullobjekte Objekte in \mathcal{C} , so gibt es genau einen Morphismus $f : X \rightarrow X'$, und er ist ein Isomorphismus.

Beispiel 5.3.5:

1. Jede einelementige Menge ist ein terminales Objekt in Set, und jeder Einpunktraum ein terminales Objekt in Top. Die leere Menge ist ein initiales Objekt in Set und der leere topologische Raum ein initiales Objekt in Top. Es gibt dort keine Nullobjekte.
2. Der Nullvektorraum $\{0\}$ ist ein Nullobjekt in der Kategorie $\text{Vect}_{\mathbb{F}}$, und die triviale Gruppe $G = \{e\}$ ist ein Nullobjekt in den Kategorien Grp und Ab.
3. Der Ring \mathbb{Z} ist ein initiales Objekt in der Kategorie URing der unitalen Ringe, denn zu jedem unitalen Ring R , gibt es genau einen unitalen Ringhomomorphismus $f : \mathbb{Z} \rightarrow R$, der gegeben ist durch $f(0) = 0_R$, $f(n) = 1_R + \dots + 1_R$ und $f(-n) = -f(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Der Nullring $R = \{0\}$ mit $0 = 1$ ist ein terminales Objekt in der Kategorie URing.

Wir zeigen nun, dass die Kategorie Grp neben dem kartesischen Produkt von Gruppen auch noch über ein Koprodukt verfügt, das sogenannte *freie Produkt von Gruppen*, das später in der Beschreibung topologischer Räume eine wichtige Rolle spielen wird. Neben dieser konkreten Anwendung spielt es auch in der Algebra eine wichtige Rolle in der Beschreibung von Gruppen durch *Erzeuger* und *Relationen*.

Definition 5.3.6: Sei $(G_i)_{i \in I}$ eine Familie von Gruppen. Das **freie Produkt** $\star_{i \in I} G_i$ ist die Menge der reduzierten **freien Wörter** in den Gruppen G_i

$$\star_{i \in I} G_i = \bigcup_{n=0}^{\infty} W_n \quad W_n = \{(g_1, \dots, g_n) : g_i \in G_{k_i} \setminus \{e\}, k_i \neq k_{i+1} \forall i \in \{1, \dots, n-1\}\}$$

mit der Gruppenmultiplikation $\cdot : \star_{i \in I} G_i \times \star_{i \in I} G_i \rightarrow \star_{i \in I} G_i$

$$(g_1, \dots, g_n) \cdot (g'_1, \dots, g'_m) = \begin{cases} (g_1, \dots, g_n, g'_1, \dots, g'_m) & g_n \in G_i, g'_1 \notin G_i \\ (g_1, \dots, g_n \cdot g'_1, g'_2, \dots, g'_m) & g_n, g'_1 \in G_i, g'_1 \neq g_n^{-1} \\ (g_1, \dots, g_{n-1}) \cdot (g'_2, \dots, g'_m) & g'_1 = g_n^{-1} \in G_i. \end{cases} \quad (8)$$

Es handelt sich also bei dem freien Produkt um die Menge aller Tupel von Elementen aus den Gruppen G_i , bei denen benachbarte Einträge aus verschiedenen Gruppen G_i in der Familie stammen, inklusive dem leeren Tupel. Tupel werden multipliziert, indem sie aneinandergehängt werden, falls das letzte Element des linken und das erste des rechten Elements aus verschiedenen Gruppen G_i stammen, in der Gruppe G_i multipliziert werden, falls sie aus der selben Gruppe G_i stammen und nicht zueinander invers sind und ansonsten aus dem Tupel gestrichen werden.

Lemma 5.3.7: Sei $(G_i)_{i \in I}$ eine Familie von Gruppen, $\star_{i \in I} G_i$ ihr freies Produkt und $\iota_i : G_i \rightarrow \star_{j \in I} G_j$, $g \mapsto (g)$, $e \mapsto ()$ die Inklusionsabbildungen. Dann gilt:

1. Das freie Produkt $\star_{i \in I} G_i$ ist eine Gruppe mit neutralem Element $()$ und Inversen $(h_1, \dots, h_n)^{-1} = (h_n^{-1}, \dots, h_1^{-1})$.
2. Das freie Produkt von Gruppen ist ein Koproduct in der Kategorie Grp, denn es besitzt die folgende **universelle Eigenschaft**:

Die Inklusionsabbildungen $\iota_i : G_i \rightarrow \star_{j \in I} G_j$ sind injektive Gruppenhomomorphismen. Zu jeder Familie $(\phi_i)_{i \in I}$ von Gruppenhomomorphismen $\phi_i : G_i \rightarrow H$ gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus $\phi : \star_{i \in I} G_i \rightarrow H$ mit $\phi \circ \iota_i = \phi_i$ für alle $i \in I$.

$$\begin{array}{ccc}
 H & \xleftarrow{\exists! \phi} & \star_{j \in I} G_j \\
 \phi_i \swarrow & & \uparrow \iota_i \\
 & & G_i
 \end{array} \tag{9}$$

Beweis:

Dass $\cdot : \star_{i \in I} G_i \times \star_{i \in I} G_i \rightarrow \star_{i \in I} G_i$ assoziativ ist mit neutralem Element $()$ und Inversen $(h_1, \dots, h_n)^{-1} = (h_n^{-1}, \dots, h_1^{-1})$ folgt durch direktes Nachrechnen unter Benutzung der Fallunterscheidung in (8). Dass die Inklusionsabbildungen $\iota_j : G_j \rightarrow \star_{i \in I} G_i$ Gruppenhomomorphismen sind, folgt direkt aus ihrer Definition und der Gruppenmultiplikation in (8). Der Gruppenhomomorphismus $\phi : \star_{j \in I} G_j \rightarrow H$ in (9) ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
 \phi((g)) &= e_H, & \phi((g)) &= \phi \circ \iota_i(g) = \phi_i(g) \text{ für } g \in G_i \setminus \{e\} \\
 \phi((g_1, \dots, g_n)) &= \phi((g_1) \star \dots \star (g_n)) = \phi((g_1)) \cdot \phi((g_2)) \cdot \dots \cdot \phi((g_n)).
 \end{aligned}$$

Ist $\phi' : \star_{i \in I} G_i \rightarrow H$ ein weiterer Gruppenhomomorphismus mit der universellen Eigenschaft aus (9), so ist $\phi' \circ \iota_j(g) = \phi'((g)) = \phi_j(g)$ für alle $g \in G_i \setminus \{e\}$ und $i \in I$. Da ϕ' ein Gruppenhomomorphismus ist, muss außerdem $\phi'((g)) = e_H$ und $\phi'((g_1, \dots, g_n)) = \phi'((g_1)) \cdot \phi'((g_2)) \cdot \dots \cdot \phi'((g_n))$ gelten, was $\phi' = \phi$ impliziert. \square

Man zeigt leicht (Übung), dass das freie Produkt von Gruppen die folgenden Eigenschaften besitzt, die analog zu den Eigenschaften der disjunkten Vereinigung von Mengen und von Summen topologischer Räume sind.

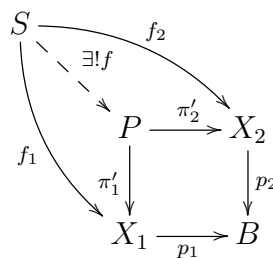
Lemma 5.3.8: Das freie Produkt von Gruppen hat die folgenden Eigenschaften:

1. **Assoziativität:** Für alle Gruppen G_1, G_2, G_3 gilt $G_1 \star (G_2 \star G_3) \cong (G_1 \star G_2) \star G_3$.
2. **Kommutativität:** Für alle Gruppen G_1, G_2 gilt $G_1 \star G_2 = G_2 \star G_1$.
3. **Triviale Produkte:** Ist $G_1 = \{e\}$ ($G_2 = \{e\}$), so folgt $G_1 \star G_2 = G_2$ ($G_1 \star G_2 = G_1$).

Wie topologische Produkte und Summen lassen sich auch Pullbacks und des Pushouts direkt auf beliebige Kategorien verallgemeinern. Dies liegt daran, dass sie eine universelle Eigenschaft besitzen. Indem man in Satz 3.4.3 und Satz 3.4.7 den Begriff *topologischer Raum* durch *Objekt* und den Begriff *stetige Abbildung* durch *Morphismus* ersetzt, erhält man dann direkt die entsprechende Definition für Kategorien.

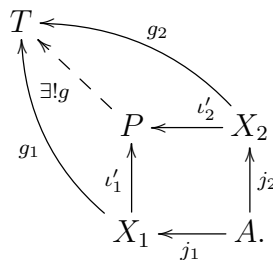
Definition 5.3.9: Sei \mathcal{C} eine Kategorie und X_1, X_2 Objekte in \mathcal{C} .

1. Ein **Pullback** oder **Faserprodukt** zweier Morphismen $p_i : X_i \rightarrow B$ ist ein Objekt P in \mathcal{C} zusammen mit zwei Morphismen $\pi'_i : P \rightarrow X_i$, so dass das innere Rechteck in dem folgenden Diagramm kommutiert und für jedes Paar von Morphismen $f_i : S \rightarrow X_i$, für die das äußere Viereck kommutiert, genau ein Morphismus $f : S \rightarrow P$ existiert, so dass die zwei Dreiecke kommutieren:



Das bezeichnet man als die **universelle Eigenschaft** des Pullbacks oder Faserprodukts.

2. Ein **Pushout** zweier Morphismen $j_i : A \rightarrow X_i$ ist ein Objekt P in \mathcal{C} zusammen mit zwei Morphismen $\iota'_i : X_i \rightarrow P$, so dass das innere Rechteck in dem folgenden Diagramm kommutiert und für jedes Paar von Morphismen $g_i : X_i \rightarrow T$, für die das äußere Viereck kommutiert, genau ein Morphismus $g : P \rightarrow T$ existiert, so dass die zwei Dreiecke kommutieren:



Das bezeichnet man als die **universelle Eigenschaft** des Pushouts.

Wie auch Produkte und Koprodukte, müssen Pullbacks und Pushouts nicht unbedingt für alle Morphismenpaare $p_i : X_i \rightarrow B$ oder $j_i : A \rightarrow X_i$ in einer Kategorie \mathcal{C} existieren. Wenn Sie aber existieren, so sind sie durch ihre universelle Eigenschaft eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie. Der Beweis dieser Aussage ist analog zum Beweis der Eindeutigkeit von Produkten und Koprodukten in Satz 5.3.2 (Übung).

Beispiel 5.3.10:

1. Der Pullback und Pushout für topologische Räume aus Definition 3.4.1 und 3.4.4 sind ein Pullback und Pushout in der Kategorie Top . In der Kategorie Top existiert also für alle Paare von Morphismen $p_i : X_i \rightarrow B$ oder $j_i : A \rightarrow X_i$ ein Pullback bzw. Pushout. Vergisst man dabei die Topologien so erhält man daraus direkt den Pullback und Pushout in Set .

2. Der Pullback zweier Gruppenhomomorphismen $p_i : G_i \rightarrow H$ ist die Untergruppe

$$P = \{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2 \mid p_1(g_1) = p_2(g_2)\} \subseteq G_1 \times G_2$$

zusammen mit den Gruppenhomomorphismen $\pi'_i : P \rightarrow G_i, (g_1, g_2) \mapsto g_i$. Er existiert für alle Paare von Gruppenhomomorphismen $p_i : G_i \rightarrow H$. (Übung)

Da der Pushout von topologischen Räumen, Mengen und Vektorräumen jeweils als Quotient ihrer Summe, also des Koprodukts, gegeben ist, ist es naheliegend, einen Pushout von Gruppen als Quotient ihres freien Produkts zu realisieren. Dabei ergibt sich allerdings die Schwierigkeit, dass die Menge der Nebenklassen $gN = \{gn \mid n \in N\}$ für eine Untergruppe $N \subseteq G$ im Allgemeinen keine Gruppenstruktur trägt. Um eine Gruppenstruktur auf $G/N = \{gN \mid g \in G\}$ zu erhalten, muss man fordern, dass $N \subseteq G$ eine *normale Untergruppe* ist, d. h. dass die Bedingung $gng^{-1} \in N$ für alle $g \in G$ und $n \in N$ erfüllt ist. Dies hängt eng mit der Tatsache zusammen, dass der Kern eines Gruppenhomomorphismus $\phi : G \rightarrow H$ eine *normale Untergruppe* von G ist. Ist eine beliebige Untergruppe $A \subseteq G$ gegeben, so muss diese nicht normal sein, aber man kann daraus eine normale Untergruppe konstruieren, indem man den Schnitt aller normalen Untergruppen bildet, die A enthalten.

Definition 5.3.11: Sei G eine Gruppe.

1. Eine Untergruppe $N \subseteq G$ heißt **normale Untergruppe** oder **Normalteiler**, wenn $gng^{-1} \in N$ für alle $g \in G, n \in N$ gilt.
2. Die von einer Teilmenge $A \subseteq G$ **erzeugte normale Untergruppe** $\langle A \rangle \subseteq G$ ist

$$\langle A \rangle = \bigcap_{\substack{A \subseteq N \\ N \subseteq G \text{ normal}}} N.$$

Lemma 5.3.12: Für jede Gruppe G gilt:

1. Für jede Teilmenge $A \subseteq G$ ist $\langle A \rangle \subseteq G$ eine normale Untergruppe.
2. Ist $N \subseteq G$ eine normale Untergruppe, so ist $g \sim g' \Leftrightarrow \exists n \in N: g' = gn$ eine Äquivalenzrelation auf G , und die Quotientenmenge $G/N = \{gN \mid g \in G\}$ eine Gruppe mit

$$\cdot : G/N \times G/N \rightarrow G/N, \quad (gN, hN) \mapsto (gh)N.$$

Die Äquivalenzklassen $gN = \{gn \mid n \in N\}$ heißen **Nebenklassen** und die Gruppe G/N **Faktorgruppe** von G bezüglich N .

3. Die Faktorgruppe hat die folgende **universelle Eigenschaft**:
Zu jedem Gruppenhomomorphismus $\phi : G \rightarrow H$ mit $N \subseteq \ker(\phi)$ existiert genau ein Gruppenhomomorphismus $\tilde{\phi} : G/N \rightarrow H$ mit $\tilde{\phi} \circ \pi = \phi$, wobei $\pi : G \rightarrow G/N, g \mapsto gN$.

Beweis:

1. Da der Schnitt von Untergruppen eine Untergruppe ist, ist nur noch zu zeigen, dass $\langle A \rangle$ normal ist. Ist $n \in \langle A \rangle$, so folgt $n \in N$ für alle normalen Untergruppen $N \subseteq G$ mit $A \subseteq N$ und damit auch $gng^{-1} \in N$ für alle $g \in G$ und normalen Untergruppen $N \subseteq G$ mit $A \subseteq N$. Also gilt $gng^{-1} \in \langle A \rangle$ für alle $n \in \langle A \rangle$ und $g \in G$.

2. Dass es sich tatsächlich um eine Äquivalenzrelation handelt, folgt durch nachrechnen: Wegen $e \in N$ gilt $g \sim g = ge$ (Reflexivität), wegen $n^{-1} \in N$ für alle $n \in N$ folgt aus $g \sim g' = gn$ auch $g' \sim g = g'n^{-1}$ (Symmetrie) und wegen $nn' \in N$ für alle $n, n' \in N$ folgt aus $g \sim g' = gn$ und $g' \sim g'' = g'n'$ auch $g \sim g'' = gnn'$. Die Multiplikation $\cdot : G/N \times G/N \rightarrow G/N$ ist wohldefiniert, denn für $g = g'n$ und $h = h'm$ mit $m, n \in N$ folgt wegen $hnh^{-1} \in N$ für alle $h \in G$ und $n \in N$ auch $(g'h')N = (gnhm)N = (gnh)N = (ghh^{-1}nh)N = (gh)N$. Die Assoziativität ergibt sich aus der Assoziativität der Gruppenmultiplikation in G , und Nachrechnen zeigt, dass $eN = N$ das neutrale Element und $(gN)^{-1} = g^{-1}N$ das Inverse von $gN \in G/N$ ist.

3. Ist $\phi : G \rightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus mit $N \subseteq \ker(\phi)$, so ist die Abbildung $\tilde{\phi} : G/N \rightarrow H, gN \mapsto \phi(g)$ wohldefiniert, denn aus $g' = gn$ mit $n \in N$ folgt

$$\phi(g') = \phi(gn) = \phi(g)\phi(n) = \phi(g).$$

Sie ist ein Gruppenhomomorphismus, denn $\tilde{\phi}(gN \cdot hN) = \phi(gh) = \phi(g)\phi(h) = \tilde{\phi}(gN)\tilde{\phi}(hN)$ für alle $g, h \in G$ und erfüllt die Bedingung $\tilde{\phi} \circ \pi = \phi$. Ist $\phi' : G/N \rightarrow H$ ein weiterer Gruppenhomomorphismus mit $\phi' \circ \pi = \phi$ so folgt $\phi' = \tilde{\phi}$ wegen der Surjektivität von π . \square

Proposition 5.3.13: Seien G_1, G_2 Gruppen, $G_1 \star G_2$ ihr freies Produkt und $\iota_i : G_i \rightarrow G_1 \star G_2$ die Inklusionsabbildungen. Dann ist für jedes Paar von Gruppenhomomorphismen $j_i : A \rightarrow G_i$ die Gruppe $G_1 \star G_2/N$ mit $N = \langle \{(\iota_1 \circ j_1(a))^{-1} \cdot (\iota_2 \circ j_2(a)) \mid a \in A\} \rangle$ zusammen mit den Gruppenhomomorphismen $\iota'_i = \pi \circ \iota_i : G_i \rightarrow G_1 \star G_2/N, g \mapsto \iota_i(g)N$ ein Pushout in Grp.

Beweis:

Da $N \subseteq G_1 \star G_2$ per Definition eine normale Untergruppe ist, ist $G_1 \star G_2/N$ eine Gruppe. Dann kommutiert per Definition von N das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G_1 \star G_2/N & \xleftarrow{\iota'_2} & G_2 \\ \iota'_1 \uparrow & & \uparrow j_2 \\ G_1 & \xleftarrow{j_1} & A, \end{array}$$

denn es gilt $(\iota_1 \circ j_1(a))^{-1} \cdot (\iota_2 \circ j_2(a)) \in N$ für alle $a \in A$. Daraus folgt für alle $a \in A$

$$\iota'_2 \circ j_2(a) = (\iota_2 \circ j_2(a))N = (\iota_1 \circ j_1(a)) \cdot (\iota_1 \circ j_1(a))^{-1} (\iota_2 \circ j_2(a))N = (\iota_1 \circ j_1(a))N = \iota'_1 \circ j_1(a).$$

Seien nun $\phi_i : G_i \rightarrow H$ zwei Gruppenhomomorphismen mit $\phi_1 \circ j_1 = \phi_2 \circ j_2$. Dann gibt es nach der universellen Eigenschaft des freien Produkts genau einen Gruppenhomomorphismus $\phi : G_1 \star G_2 \rightarrow H$ mit $\phi \circ \iota_i = \phi_i$. Er erfüllt die Bedingung

$$\phi((\iota_1 \circ j_1(a))^{-1} (\iota_2 \circ j_2(a))) = (\phi \circ \iota_1 \circ j_1(a))^{-1} (\phi \circ \iota_2 \circ j_2(a)) = (\phi_1 \circ j_1(a))^{-1} (\phi_2 \circ j_2(a)) = e$$

für alle $a \in A$, und damit gilt $N \subseteq \ker(\phi)$. Also existiert nach der universellen Eigenschaft der Faktorgruppe genau ein Gruppenhomomorphismus $\tilde{\phi} : G_1 \star G_2/N \rightarrow H$ mit $\tilde{\phi} \circ \pi = \phi$ und damit mit $\tilde{\phi} \circ \iota'_i = \tilde{\phi} \circ \pi \circ \iota_i = \phi \circ \iota_i = \phi_i$.

$$\begin{array}{ccc} H & & \\ \phi_1 \swarrow & \xleftarrow{\tilde{\phi}} & \searrow \phi_2 \\ G_1 \star G_2/N & \xleftarrow{\iota'_2} & G_2 \\ \iota'_1 \uparrow & & \uparrow j_2 \\ G_1 & \xleftarrow{j_1} & A, \end{array}$$

Ist $\phi' : G_1 \star G_2/N \rightarrow H$ ein weiterer Gruppenhomomorphismus mit $\phi_i = \phi' \circ \iota'_i = \phi' \circ \pi \circ \iota_i$ so folgt aus der universellen Eigenschaft des freien Produkts $\phi' \circ \pi = \tilde{\phi} \circ \pi$ und mit der Surjektivität von π dann $\phi' = \tilde{\phi}$. \square

Die Pushouts und freien Produkte in der Kategorie der Gruppen spielen auch in der Algebra eine wichtige Rolle, weil man damit Gruppen zu *präsentieren* kann, also durch *Erzeuger* und *Relationen* beschreiben. Dabei bildet man zunächst multiple freie Produkte der Gruppe \mathbb{Z} mit sich selbst und bildet anschließend eine Faktorgruppe bezüglich der *Relationen*, die die Beziehungen zwischen Gruppenelementen bzw. die *Rechenregeln* in der Gruppe beschreiben.

Definition 5.3.14:

1. Für eine Menge M bezeichnet man das freie Produkt $M^* = \star_{m \in M} \mathbb{Z}$ als die von M erzeugte **freie Gruppe**, und für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet man das n -fache freie Produkt $F_n = \{1, \dots, n\}^* = \mathbb{Z} \star \dots \star \mathbb{Z}$ als die **freie Gruppe** mit n Erzeugern.
2. Ist eine Gruppe G isomorph zu einer Gruppe $M^*/\langle R \rangle$ für eine Menge M und eine Teilmenge $R \subseteq M^*$, so nennt man (M, R) eine **Präsentation** der Gruppe G , die Elemente von M **Erzeuger** und die Elemente von R **erzeugende Relationen**.
3. Ist $M = \{m_1, \dots, m_n\}$ endlich, so nennt man die Gruppe $G = M^*/\langle R \rangle$ **endlich erzeugt**. Ist zusätzlich $R = \{r_1, \dots, r_k\}$ endlich, so sagt man G sei **endlich präsentiert** und schreibt $G = \langle m_1, \dots, m_n \mid r_1, \dots, r_k \rangle$ oder $G = \langle m_1, \dots, m_n \mid r_1 = 1, \dots, r_k = 1 \rangle$.

Bemerkung 5.3.15:

1. Jede Gruppe G besitzt eine Präsentation. Denn man kann $M = G$ wählen, den von der universellen Eigenschaft des freien Produkts induzierten Gruppenhomomorphismus $\phi : G^* \rightarrow G$ mit $\phi \circ \iota_g(1) = g$ für alle $g \in G$ betrachten, und $R = \ker(\phi) \subseteq G^*$ setzen.
2. Jedes Gruppenelement in $M^*/\langle R \rangle$ lässt sich als ein endliches Produkt von ganzzahligen Potenzen der Erzeuger in M schreiben. Die Relationen in R kann man als grundlegende Rechenregeln in $M^*/\langle R \rangle$ auffassen, mit denen man Ausdrücke dieser Form ineinander umwandeln kann. Daher versucht man, eine Gruppe mit so wenigen Erzeugern und Relationen wie möglich zu präsentieren.
3. Präsentationen von Gruppen sind alles andere als eindeutig, und es ist oft sehr schwierig zu sehen, ob zwei Präsentationen isomorphe Gruppen beschreiben. Es gibt im Allgemeinen nicht einmal einen Algorithmus, der es einem erlaubt zu entscheiden, ob zwei gegebene Ausdrücke in den Erzeugern das selbe Element der Gruppe beschreiben, also mit Hilfe der Relationen ineinander umgewandelt werden können.

Beispiel 5.3.16:

1. Die Gruppe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ hat die Präsentation $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \langle a \mid a^n = 1 \rangle$ (Aufgabe 92).
2. Die Gruppe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ hat die Präsentation $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} = e \rangle$. Die Relation bedeutet gerade, dass die Elemente $a = (1, 0)$ und $b = (0, 1)$ kommutieren (Aufgabe 92). Eine weitere Präsentation ist $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \langle a, b, c \mid abc = 1, acb = 1 \rangle$.

3. Die **modulare Gruppe** $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) = \{M \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{Z}) \mid \det M = 1\} / \{\pm 1\}$ besitzt die Präsentation $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) = \{S, R \mid S^2 = 1, R^3 = 1\}$ (Aufgabe 92), und damit gilt $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Die Erzeuger S und R stehen dabei für die Matrizen

$$S = \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad R = \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Teil III

Elementare Homotopietheorie

6 Homotopien

6.1 Homotopien und Homotopieäquivalenzen

Ein wichtiges Ziel der Topologie ist die Klassifikation topologischer Räume bis auf Homöomorphie. Dies ist ein sehr schwieriges Problem, das sich in dieser Allgemeinheit nicht lösen oder sinnvoll bearbeiten lässt. Insbesondere ist es sehr schwierig, zu zeigen, dass zwei topologische Räume nicht homöomorph sind. Bisher können wir dies im Wesentlichen nur über die Betrachtung von (Weg)zusammenhangskomponenten oder Kompaktheit beweisen.

In diesem Kapitel entwickeln wir eine gröberes Klassifikationskriterium, das in der Praxis leichter zu handhaben ist. Wir lockern die Klassifikation bis auf Homöomorphie auf, indem wir zwei topologische Räume (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) nicht nur dann als äquivalent betrachten, wenn sie homöomorph sind, also stetige Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow X$ existieren mit $g \circ f = \text{id}_X$ und $f \circ g = \text{id}_Y$, sondern auch dann, wenn stetige Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow X$, für die sich die Abbildungen $g \circ f : X \rightarrow X$ und $f \circ g : Y \rightarrow Y$ stetig in die Identitätsabbildungen $\text{id}_X : X \rightarrow X$ und $\text{id}_Y : Y \rightarrow Y$ deformieren lassen.

Ein vernünftiges und leicht handhabbares Konzept von stetiger Deformierbarkeit sollte eine Äquivalenzrelation auf der Menge $C(X, Y)$ der stetigen Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ definieren und auch mit der Verkettung stetiger Abbildungen kompatibel sein. Dies entspricht dem Übergang von der Kategorie Top der topologischen Räume und stetigen Abbildungen zu einer Quotientenkategorie wie in Definition 5.1.3, 4.

Anschaulich kann man sich eine solche stetige Deformation einer Abbildung $f : X \rightarrow Y$ in eine Abbildung $f' : X \rightarrow Y$ als eine zeitabhängige Abbildung vorstellen. Zur Zeit $t = 0$ liegt die Abbildung f vor, die sich mit fortschreitender Zeit allmählich, aber nicht sprunghaft ändert, bis zur Zeit $t = 1$ die Abbildung f' vorliegt. Mathematisch entspricht dies einer *stetigen* Abbildung $h : [0, 1] \times X \rightarrow Y$ mit $h(0, x) = f(x)$ und $h(1, x) = f'(x)$ für alle $x \in X$.

Stimmen f und f' auf einer Teilmenge $M \subseteq X$ überein, ist es oft auch sinnvoll, zu fordern, dass sich die Werte dort zeitlich nicht ändern, dass also $h(t, m) = f(m) = f'(m)$ für alle $m \in M$ gilt. Dies ist beispielsweise der Fall, wenn man stetige Deformationen von Wegen $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ mit fixierten Endpunkten $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = x'$ betrachten will. Kleine, stetige Änderungen von Wegen spielen in allen bisher betrachteten Konzepten keine Rolle, wohl aber die Frage welche Punkte ein solcher Weg verbindet.

Definition 6.1.1: Seien (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) topologische Räume, $M \subseteq X$ ein Teilraum und $f, g : X \rightarrow Y$ stetige Abbildungen mit $f|_M = g|_M$.

1. Eine **Homotopie von f nach g relativ zu M** ist eine stetige Abbildung

$$h : [0, 1] \times X \rightarrow Y, \quad (t, x) \mapsto h(t, x)$$

mit $h(0, x) = f(x), \quad h(1, x) = g(x), \quad h(t, m) = f(m) = g(m) \quad \forall x \in X, m \in M, t \in [0, 1].$

2. Gibt es eine Homotopie relativ zu M von f nach g , so nennt man f, g **homotop relativ zu M** und schreibt $f \sim_M g$.
3. Für $M = \emptyset$ spricht man auch von einer **Homotopie** und **homotop** und schreibt $f \sim g$.
4. Stetige Abbildungen $f : X \rightarrow Y$, die homotop zu einer konstanten Abbildung $g : X \rightarrow Y$ sind, heißen **nullhomotop**.

Beispiel 6.1.2:

1. Die Exponentialabbildung $\exp : [0, 1] \rightarrow S^1$, $x \mapsto e^{2\pi i x}$ ist homotop zu der konstanten Abbildung $c_1 : [0, 1] \rightarrow S^1$, $x \mapsto 1$ mit der Homotopie

$$h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S^1, \quad h(t, x) = e^{2\pi i(1-t)x}.$$

Wir zeigen später, dass \exp nicht *relativ zu* $\{0, 1\}$ homotop zu c_1 ist.

2. Homotopien zwischen stetigen Abbildungen $f, f' : \{p\} \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ stehen in Bijektion mit Wegen zwischen $f(p)$ und $f'(p)$.

Denn jede stetige Abbildung $h : [0, 1] \times \{p\} \rightarrow X$ mit $h(0, p) = f(p)$ und $h(1) = f'(p)$ definiert einen Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$, $t \mapsto h(t, p)$ von $f(p)$ nach $f'(p)$, und jeder Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ definiert eine Homotopie $h : [0, 1] \times \{p\} \rightarrow X$, $(t, p) \mapsto \gamma(t)$ von f nach f' .

3. Sei (X, \mathcal{O}_X) ein topologischer Raum und $M \subseteq X$ ein Teilraum. Ist $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex, so sind alle stetigen Abbildungen $f, g : X \rightarrow Y$ mit $f|_M = g|_M$ homotop relativ zu M mit

$$h : [0, 1] \times X \rightarrow Y, \quad h(t, x) = t f(x) + (1 - t) g(x).$$

4. Ist $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sternförmig bezüglich $p \in X$, d. h. $\overline{xp} \subseteq X$ für alle $x \in X$, so ist jede stetige Abbildung $f : (X, \mathcal{O}_{std}) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ nullhomotop mit

$$h : [0, 1] \times X \rightarrow Y, \quad h(t, x) = f(tx + (1 - t)p).$$

5. Sind $f, f' : X \rightarrow Y$ homotop relativ zu $M \subseteq X$ und ist $g : Y \rightarrow Z$ stetig, so sind auch $g \circ f, g \circ f' : X \rightarrow Z$ homotop relativ zu M .

Ist nämlich $h : [0, 1] \times X \rightarrow Y$ eine Homotopie von f nach f' relativ zu M , so ist $g \circ h : [0, 1] \times X \rightarrow Z$ eine Homotopie von $g \circ f$ nach $g \circ f'$ relativ zu M .

6. Sind $g, g' : Y \rightarrow Z$ homotop relativ zu $N \subseteq Y$ und $f : X \rightarrow Y$ stetig mit $f(M) \subseteq N$, so sind $g \circ f, g' \circ f : X \rightarrow Z$ homotop relativ zu M .

Ist nämlich $h : [0, 1] \times Y \rightarrow Z$ eine Homotopie von g nach g' relativ zu N , so ist $h \circ (\text{id}_{[0,1]} \times f) : [0, 1] \times X \rightarrow Z$ eine Homotopie von $g \circ f$ nach $g' \circ f$ relativ zu M .

7. Sind $h_i : [0, 1] \times X_i \rightarrow Y_i$ für $i = 1, 2$ Homotopien von $f_i : X_i \rightarrow Y_i$ nach $f'_i : X_i \rightarrow Y_i$ relativ zu $M_i \subseteq X_i$, so ist $h : [0, 1] \times X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2$, $(t, x_1, x_2) \mapsto (h_1(t, x_1), h_2(t, x_2))$ eine Homotopie von $f_1 \times f_2$ nach $f'_1 \times f'_2$ relativ zu $M_1 \times M_2$.

Bevor wir weitere Beispiele von Homotopien betrachten, klären wir zunächst ihre grundlegenden Eigenschaften. Wie oben diskutiert, sollte für jeden Teilraum $M \subseteq X$ eines topologischen Raums (X, \mathcal{O}) die Relation *homotop relativ zu M* eine Äquivalenzrelation auf der Menge $C(X, Y)$ der stetigen Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ definieren. Anschaulich ist es dabei naheliegend,

dass die Reflexivität dieser Äquivalenzrelation einer trivialen Homotopie entsprechen sollte, die die Abbildung $f : X \rightarrow Y$ nicht deformiert, ihre Symmetrie einer Homotopie, die rückwärts durchlaufen wird, und ihre Transitivität der Verkettung zweier Homotopien, wobei zuerst die erste Deformation und dann die zweite mit doppelter Geschwindigkeit durchgeführt werden.

Satz 6.1.3: Seien (X, \mathcal{O}_X) , (Y, \mathcal{O}_Y) topologische Räume und $M \subseteq X$ ein Teilraum. Dann ist \sim_M eine Äquivalenzrelation auf der Menge $C(X, Y)$ der stetigen Abbildungen $f : X \rightarrow Y$.

Beweis:

- Reflexivität: Jede Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist homotop zu sich selbst relativ zu M mit der Homotopie $h : [0, 1] \times X \rightarrow Y$, $(t, x) \mapsto f(x)$.

- Symmetrie: Ist $h : [0, 1] \times X \rightarrow Y$ eine Homotopie von $f : X \rightarrow Y$ nach $f' : X \rightarrow Y$ relativ zu M , so ist $\bar{h} : [0, 1] \times X \rightarrow Y$, $(t, x) \mapsto h(1 - t, x)$ eine Homotopie von f' nach f relativ zu M . Denn \bar{h} ist stetig, und für alle $t \in [0, 1]$, $x \in X$, $m \in M$ gilt:

$$\bar{h}(0, x) = h(1, x) = f'(x), \quad \bar{h}(1, x) = h(0, x) = f(x), \quad \bar{h}(t, m) = h(1 - t, m) = f(m) = f'(m).$$

- Transitivität: Sind $h, h' : [0, 1] \times X \rightarrow Y$ Homotopien relativ zu M von $f : X \rightarrow Y$ nach $f' : X \rightarrow Y$ und von $f' : X \rightarrow Y$ nach $f'' : X \rightarrow Y$, so ist

$$h'' : [0, 1] \times X \rightarrow Y, \quad (t, x) \mapsto \begin{cases} h(2t, x) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ h'(2t - 1, x) & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

eine Homotopie relativ zu M von f nach f'' . Denn h'' ist stetig nach Aufgabe 19 mit

$$h''(0, x) = f(x), \quad h''(1, x) = f''(x), \quad h''(t, m) = f(m) = f''(m) \quad \forall t \in [0, 1], m \in M, x \in X. \quad \square$$

Ein entscheidende Eigenschaft der Äquivalenzrelation *homotop* ist nun, dass sie mit der Verkettung stetiger Abbildungen kompatibel ist. Verkettet man zwei zueinander homotope Abbildungen $f_1, f'_1 : X \rightarrow Y$ mit zwei zueinander homotopen Abbildungen $f_2, f'_2 : Y \rightarrow Z$ so sind die resultierenden Abbildungen $f_2 \circ f_1$ und $f'_2 \circ f'_1$ zueinander homotop. Diese Aussage bleibt auch wahr, wenn man Homotopie homotop relativ zu Teilräumen $M \subseteq X$ und $N \subseteq Y$ betrachtet und fordert, dass die Abbildungen f_1, f'_1 den Teilraum $M \subseteq X$ in den Teilraum $N \subseteq Y$ abbilden.

Lemma 6.1.4: Seien (X, \mathcal{O}_X) , (Y, \mathcal{O}_Y) und (Z, \mathcal{O}_Z) topologische Räume, $f_1, f'_1 : X \rightarrow Y$ und $f_2, f'_2 : Y \rightarrow Z$ stetige Abbildungen und $M \subseteq X$, $N \subseteq Y$ Teilräume. Sind $f_1, f'_1 : X \rightarrow Y$ homotop relativ zu M mit $f_1(M), f'_1(M) \subseteq N$ und $f_2, f'_2 : Y \rightarrow Z$ homotop relativ zu N , dann sind auch $f_2 \circ f_1, f'_2 \circ f'_1 : X \rightarrow Z$ homotop relativ zu M .

Beweis:

Sei $h_1 : [0, 1] \times X \rightarrow Y$ eine Homotopie von f_1 nach f'_1 relativ zu M und $h_2 : [0, 1] \times Y \rightarrow Z$ eine Homotopie von f_2 nach f'_2 relativ zu N . Dann ist

$$h : [0, 1] \times X \rightarrow Z, \quad (t, x) \mapsto h_2(t, h_1(t, x))$$

eine Homotopie von $f_2 \circ f_1$ nach $f'_2 \circ f'_1$ relativ zu M . Denn h ist stetig und erfüllt für alle $t \in [0, 1]$, $x \in X$, $m \in M$:

$$\begin{aligned} h(0, x) &= h_2(0, h_1(0, x)) = f_2(h_1(0, x)) = f_2 \circ f_1(x) \\ h(1, x) &= h_2(1, h_1(1, x)) = f'_2(h_1(1, x)) = f'_2 \circ f'_1(x) \\ h(t, m) &= h_2(t, h_1(t, m)) = h_2(f_1(m)) = h_2(f'_1(m)) = f_2 \circ f_1(m) = f'_2 \circ f'_1(m). \end{aligned} \quad \square$$

Betrachtet man Satz 6.1.3 und Lemma 6.1.4 für triviale Teilräume aus Sicht der Kategorien, so sieht man, dass *homotop* auf den Morphismenmengen $\text{Hom}_{\text{Top}}(X, Y) = C(X, Y)$ Äquivalenzrelationen definiert, die mit der Verkettung von Morphismen kompatibel sind. Wir erhalten damit nach Aufgabe 84 und Definition 5.1.3, 4. eine zugehörige *Quotientenkategorie*, deren Objekte wieder topologische Räume, und deren Morphismen Homotopieklassen von stetigen Abbildungen sind. Die Verkettung von Morphismen, wird durch die Verkettung von Abbildungen induziert: $[g] \circ [f] = [g \circ f]$ für alle stetigen Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$.

Die selbe Prozedur funktioniert auch, wenn man statt der Kategorie Top der topologischen Räume und stetigen Abbildungen, die Kategorie Top^* betrachtet, deren Objekte topologische Räume mit ausgewählten Basispunkten und deren Morphismen stetige Abbildungen sind, die die Basispunkte aufeinander abbilden. Der einzige Unterschied ist, dass man in diesem Fall *Homotopie relativ zu den Basispunkten* betrachtet.

Definition 6.1.5:

1. Die Kategorie **hTop** hat als Objekte topologische Räume und als Morphismen von (X, \mathcal{O}_X) nach (Y, \mathcal{O}_Y) Homotopieklassen stetiger Abbildungen $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$. Sie wird als die **Homotopiekategorie** der topologischen Räume bezeichnet.
2. Die Kategorie **hTop*** hat als Objekte punktierte topologische Räume und als Morphismen von (x, X) nach (y, Y) Homotopieklassen stetiger Abbildungen $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ mit $f(x) = y$ relativ zu $\{x\}$. Sie wird als die **Homotopiekategorie** der punktierten topologischen Räume bezeichnet.
3. Die Kategorie **hTop(2)** hat als Objekte Paare (X, A) eines topologischen Raums X und eines Teilraums $A \subseteq X$ und als Morphismen von (x, X) nach (y, Y) Homotopieklassen relativ zu A von stetigen Abbildungen $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ mit $f(A) \subseteq B$. Sie heißt **Homotopiekategorie** der Kategorie von Paaren punktierten topologischen Räume.

Statt topologische Räume bis auf Isomorphismen in Top, also bis auf Homöomorphie, zu klassifizieren, kann man sie nun auch als Objekte der Kategorie hTop auffassen und bis auf Isomorphismen in hTop klassifizieren. Dies bedeutet, dass man zwei topologische Räume (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) als äquivalent betrachtet, wenn es stetige Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow X$ mit $g \circ f \sim \text{id}_X$ und $f \circ g \sim \text{id}_Y$ gibt. Da dabei Gleichheit durch Homotopie ersetzt wurde, liefert dies eine schwächere Klassifikation. Sie ist aber anschaulicher und leichter zu handhaben.

Definition 6.1.6: Seien (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) topologische Räume.

1. Eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **Homotopieäquivalenz** wenn es eine stetige Abbildung $g : Y \rightarrow X$ mit $g \circ f \sim \text{id}_X$ und $f \circ g \sim \text{id}_Y$ gibt.
2. Gibt es eine Homotopieäquivalenz $f : X \rightarrow Y$, so schreibt man $X \simeq Y$ und sagt X und Y seien **homotopieäquivalent** oder **vom selben Homotopietyp**.
3. Ein topologischer Raum (X, \mathcal{O}_X) heißt **kontrahierbar** wenn er homotopieäquivalent zu einem Einpunktraum ist.

Bemerkung 6.1.7:

1. Homotopieäquivalenz ist eine Äquivalenzrelation auf der Klasse der topologischen Räume. Denn dies gilt für Isomorphie von Objekten in jeder Kategorie, und Homotopieäquivalenz entspricht Isomorphie von Objekten der Kategorie hTop bzw. hTop*.

2. Jeder Homöomorphismus $f : X \rightarrow Y$ ist eine Homotopieäquivalenz zwischen X und Y .

Besonders einfache Beispiele von kontrahierbaren topologischen Räumen sind konvexe Teilmengen des \mathbb{R}^n , insbesondere also alle offenen und abgeschlossenen Bälle $B_\epsilon(x)$ und $B_{\leq \epsilon}(x)$ für Metriken, die durch Normen auf dem \mathbb{R}^n definiert werden, und der Raum \mathbb{R}^n selbst.

Beispiel 6.1.8: Jeder konvexe Teilraum $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist kontrahierbar.

Denn für jeden Punkt $p \in X$ ist die Abbildung $f : X \rightarrow \{p\}$, $x \mapsto p$ eine Homotopieäquivalenz. Mit der Inklusionsabbildung $g : \{p\} \rightarrow X$, $p \mapsto p$ ergibt sich nämlich $f \circ g = \text{id}_{\{p\}}$, und $h : [0, 1] \times X \rightarrow X$, $(t, x) \mapsto tx + (1 - t)p$ ist eine Homotopie von $g \circ f : X \rightarrow X$, $x \mapsto p$ nach id_X nach Beispiel 6.1.2, 2.

Das Konzept der Konvexität ist auf Teilräume von normierten Vektorräumen mit der Standardtopologie beschränkt. Wir können Beispiel 6.1.8 aber verallgemeinern, indem wir den Vektorraum \mathbb{R}^n durch einen allgemeinen topologischen Raum (X, \mathcal{O}) und den Einpunktraum $\{p\}$ durch einen Teilraum $(M, \mathcal{O}_{M \subseteq X})$ ersetzen. In diesem Fall ist wieder die Inklusionsabbildung $\iota : M \rightarrow X$ eine Kandidatin für eine Homotopieäquivalenz, und die Bedingung $r \circ \iota = \text{id}_M$ ist für jede Abbildung $r : X \rightarrow M$ mit $r|_M = \text{id}_M$ erfüllt. Die Bedingung, dass $\iota : M \rightarrow X$ eine Homotopieäquivalenz ist, reduziert sich dann auf die Forderung, dass $\iota \circ r : X \rightarrow X$ homotop zur Identitätsabbildung $\text{id}_X : X \rightarrow X$ ist. Dies führt aus das Konzept des *Deformationsretrakts*, einen wichtigen Spezialfall einer Homotopieäquivalenz. Ist für einen Deformationsretrakt die Abbildung $\iota \circ r : X \rightarrow X$ homotop zur Identitätsabbildung $\text{id}_X : X \rightarrow X$ sondern sogar homotop relativ zu M , so spricht man auch von einem *starken Deformationsretrakt*.

Definition 6.1.9: Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum und $M \subseteq X$ ein Teilraum mit Inklusionsabbildung $\iota : M \rightarrow X$. Dann nennt man M

1. einen **Retrakt** von X , wenn es eine stetige Abbildung $r : X \rightarrow M$ mit $r \circ \iota = \text{id}_M$ gibt. Eine solche Abbildung r nennt man **Retraktion**.
2. einen (schwachen) **Deformationsretrakt** von X , wenn es eine Retraktion $r : X \rightarrow M$ gibt mit $\iota \circ r \sim \text{id}_X$.
3. einen starken **Deformationsretrakt** von X , wenn es eine Retraktion $r : X \rightarrow M$ gibt mit $\iota \circ r \sim_M \text{id}_X$.

Da jede Retraktion $r : X \rightarrow M$ die Bedingung $r \circ \iota_M \circ r = r$ erfüllt, kann man Retraktionen als topologische Analoga von Projektionsabbildungen auffassen. Retrakte und Deformationsretrakte haben außerdem den Vorteil, dass sie sich sehr leicht visualisieren lassen, und damit anschaulicher und intuitiver sind als das Konzept des Homöomorphismus. Man kann sie sich wie ein Einschmelzen oder Zusammenpressen des topologischen Raums (X, \mathcal{O}) auf den Teilraum $M \subseteq X$ vorstellen. Dies illustrieren die folgenden Beispiele und Aufgabe 113.

Beispiel 6.1.10:

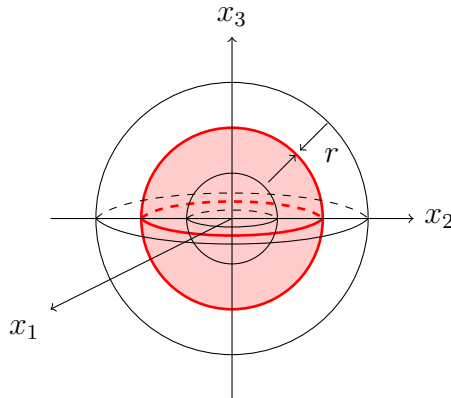
1. Für jeden topologischen Raum X und Punkt $p \in X$ ist $\{p\} \subseteq X$ ein Retrakt von X mit Retraktion $r : X \rightarrow \{p\}$, $x \mapsto p$. Der Teilraum $\{p\} \subseteq X$ ist ein Deformationsretrakt von X genau dann, wenn X kontrahierbar ist.

2. Die n -Sphäre S^n ist homotopieäquivalent zu $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Denn die Abbildungen

$$r : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow S^n, \quad x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2}}$$

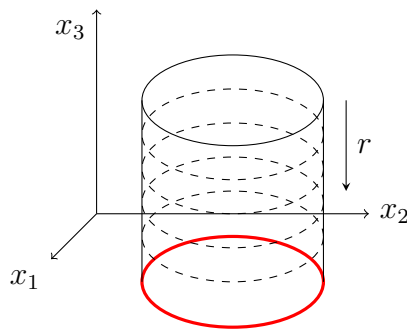
$$h : [0, 1] \times \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \quad (t, x) \mapsto tx + (1-t) \frac{x}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2}}$$

sind eine Retraktion und eine Homotopie relativ zu S^n von $\iota \circ r$ nach $\text{id}_{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}$. Das zeigt, dass S^n und $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ vom selben Homotopietyp sind. Sie sind aber nicht homöomorph, denn $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ist kompakt, aber $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ nicht.



3. Der Zylinder $Z = S^1 \times \mathbb{R}$ ist homotopieäquivalent zum Kreis S^1 .

Denn $r : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times \{0\}$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2, 0)$ ist eine Retraktion, und die Abbildung $h : [0, 1] \times Z \rightarrow Z$, $(t, x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2, tx_3)$ eine Homotopie von $\iota \circ r$ nach id_Z relativ zu S^1 . Also ist Z homotopieäquivalent zu $S^1 \times \{0\}$ und damit zu S^1 .



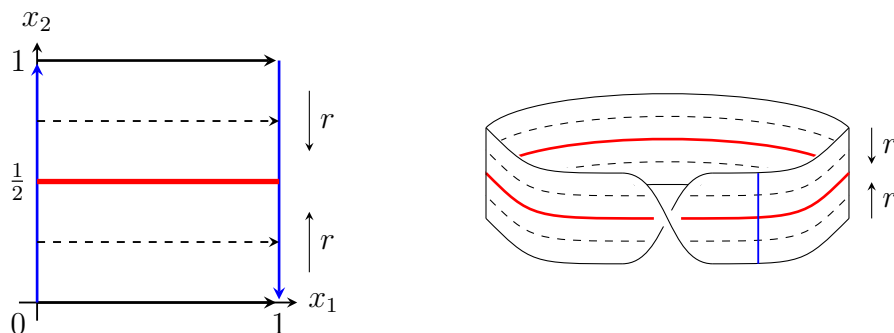
4. Das Möbiusband ist homotopieäquivalent zum Kreis S^1 .

Denn $M = [0, 1] \times \{ \frac{1}{2} \} / \sim$ mit $(0, y) \sim (1, 1 - y)$, und nach der universellen Eigenschaft des Quotientenraums sind die Abbildungen

$$r : M \rightarrow [0, 1] \times \{ \frac{1}{2} \} / \sim, \quad [(x, y)] \mapsto [(x, \frac{1}{2})]$$

$$h : [0, 1] \times M \rightarrow M, \quad (t, [(x, y)]) \mapsto [(x, ty + \frac{1}{2}(1-t))]$$

wohldefiniert und stetig. Die Abbildung r ist eine Retraktion und h eine Homotopie von $\iota \circ r$ nach id_M relativ zu $[0, 1] \times \{ \frac{1}{2} \} / \sim$, wobei $\iota : [0, 1] \times \{ \frac{1}{2} \} / \sim \rightarrow M$ die Inklusionsabbildung bezeichnet. Also ist M homotopieäquivalent zu $[0, 1] \times \{ \frac{1}{2} \} / \sim$, und damit zu S^1 .



6.2 Fundamentalgruppen und Fundamentalgruppoid

In diesem Abschnitt werden wir topologische Räume mit Hilfe von Wegen charakterisieren und unterscheiden, ähnlich wie dies bereits im Kontext von Wegzusammenhang und Wegzusammenhangskomponenten geschehen ist. Der Unterschied ist, dass wir uns jetzt nicht nur die Frage stellen, ob ein Weg existiert, der zwei Punkte eines gegebenen topologischen Raums verbindet, sondern auch wieviele nicht stetig ineinander deformierbare Wege existieren, und wie diese sich zu Wegen zwischen anderen Punkten verketteten.

Die Grundidee dabei ist, dass sich “Löcher” in topologischen Räumen, wie in den Henkeln einer Fläche vom Geschlecht g oder in einem topologischen Raum, aus dem einzelne Punkte entfernt wurden, dadurch manifestieren, dass sich gewisse Wege, die die gleichen Endpunkte besitzen, nicht stetig ineinander deformieren lassen, ohne die Endpunkte zu verändern, während dies beispielsweise im \mathbb{R}^n für zwei Wege mit gegebenen Endpunkten immer der Fall ist.

Dabei ist es aus mehreren Gründen wichtig, mit Homotopieklassen von Wegen zu arbeiten. Der erste ist, dass stetige Deformationen von Wegen, die die Endpunkte festlassen topologisch gesehen irrelevant sind. Dies gilt insbesondere für Umparametrisierungen von Wegen, bei denen sich nur die Geschwindigkeit ändert, mit der der Weg durchlaufen wird. Stetige Deformationen eines Wegs sollen als äquivalent zu dem ursprünglichen Weg aufgefasst werden. Indem man statt Wegen Homotopieklassen von Wegen betrachtet, entfernt man dann irrelevante Information und erzielt eine effizientere Beschreibung.

Der zweite Grund ist, dass das naive Aneinanderhängen von Wegen nicht assoziativ ist, sondern nur assoziativ bis auf Umparametrisierungen. Möchte man eine assoziative Struktur erhalten, so muss man zumindest Wege identifizieren, die sich nur durch Umparametrisierungen unterscheiden, und es bietet sich dann an, mit Homotopieklassen von Wegen zu arbeiten.

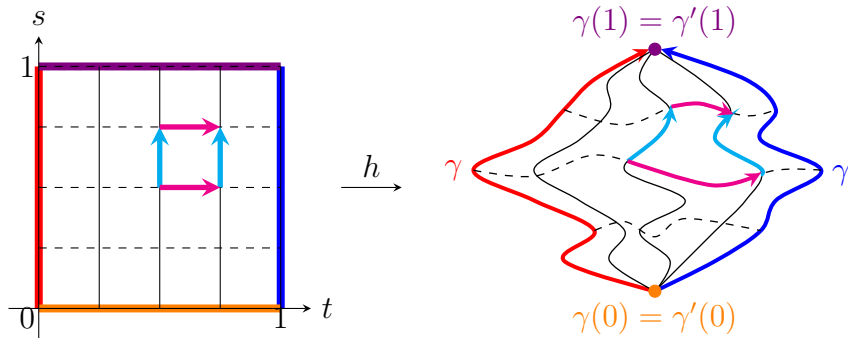
Definition 6.2.1: Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum und $W(p, q, X)$ die Menge der Wege in X von $p \in X$ nach $q \in X$.

1. Die **Verkettung** zweier Wege $\gamma_1 \in W(p, q, X)$ und $\gamma_2 \in W(q, r, X)$ ist der Weg

$$\gamma_2 \star \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow X, \quad \gamma_2 \star \gamma_1(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2t - 1) & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

2. Die **Umkehrung** eines Weges $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ ist der Weg $\bar{\gamma} : [0, 1] \rightarrow X, t \mapsto \gamma(1 - t)$.
3. Für $p \in X$ heißt der konstante Weg $\gamma_p : [0, 1] \rightarrow X, t \mapsto p$ der **triviale Weg** auf p .

4. Zwei Wege $\gamma, \gamma' \in W(p, q, X)$ heißen **homotop**, wenn sie homotop relativ zu $\{0, 1\}$ sind, und man schreibt dann $\gamma \sim \gamma'$.
5. Ein Weg $\gamma \in W(p, p, X)$ heißt **nullhomotop**, wenn er homotop relativ zu $\{0, 1\}$ zu dem trivialen Weg γ_p ist.
6. Eine Homotopie von γ nach γ' relativ zu $\{0, 1\}$ nennt man auch eine **Homotopie von Wegen** oder eine **Homotopie mit festen Endpunkten**.



Bemerkung 6.2.2:

1. Für alle Punkte $p, q \in X$ ist *homotop* eine Äquivalenzrelation auf der Menge $W(p, q, X)$ der Wege $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ von p nach q .
2. **Reparametrisierungen** von Wegen definieren Homotopien:
Für jeden Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ und jede stetige Abbildung $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ mit $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$ ist die Abbildung $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X, (s, t) \mapsto \gamma(s f(t) + (1 - s)t)$ eine Homotopie von γ nach $\gamma \circ f$ relativ zu $\{0, 1\}$.

Schon die Strukturen in Definition 6.2.1, nämlich die Verkettung von Wegen durch Aneinanderhängen, die Existenz von trivialen Wegen und von Umkehrungen von Wegen legen nahe, dass die Wege in einem topologischen Raum X eine gruppenähnliche Struktur bilden sollten, nämlich ein Gruppoid, mit Punkten des topologischen Raums als Objekte und durch Wege zwischen diesen Punkten definierten Morphismen. Für die Assoziativität der Verkettung, die Existenz von Identitätsmorphismen und von inverse Morphismen, müssen wir aber *Homotopieklassen von Wegen* statt Wegen betrachten.

Satz 6.2.3: Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum.

1. Die Punkte $x \in X$ und die Homotopieklassen von Wegen $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ bilden mit der durch die Verkettung von Wegen induzierten Komposition von Morphismen ein Gruppoid $\Pi_1(X)$, das **Fundamentalgruppoid** von X .
2. Insbesondere bilden für jeden Punkt $x \in X$ die Homotopieklassen von Wegen von x nach x eine Gruppe, die **Fundamentalgruppe** $\pi_1(x, X) = \text{Hom}_{\Pi_1(X)}(x, x)$ im Punkt x .

Beweis:

Das Fundamentalgruppoid $\Pi_1(X)$ soll als Objekte die Punkte $x \in X$ und als Morphismen $f : x_1 \rightarrow x_2$ die Homotopieklassen von Wegen $\gamma \in W(x_1, x_2, X)$ enthalten. Die Verkettung von Morphismen soll gegeben sein durch $[\gamma_2] \circ [\gamma_1] = [\gamma_2 \star \gamma_1]$ für alle Wege $\gamma_1 \in W(x_1, x_2, X)$ und $\gamma_2 \in W(x_2, x_3, X)$. Zu zeigen ist, dass (i) die Verkettung von Morphismen wohldefiniert

ist, also nicht von der Wahl der Repräsentanten abhängt, dass sie (ii) assoziativ ist, dass (iii) Identitätsmorphismen existieren und dass (iv) jeder Morphismus invertierbar ist.

(i) Wohldefiniertheit: Seien $\gamma_i, \gamma'_i \in W(x_i, x_{i+1}, X)$ für $i = 1, 2$ Wege mit $\gamma_i \sim \gamma'_i$. Dann gibt es Homotopien $h_i : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ von γ_i nach γ'_i , und die Abbildung $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$

$$h(s, t) = \begin{cases} h_1(s, 2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ h_2(s, 2t - 1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

ist stetig nach Aufgabe 19 mit $h(0, t) = \gamma_2 \star \gamma_1(t)$, $h(1, t) = \gamma'_2 \star \gamma'_1(t)$ und $h(s, 0) = x_1$, $h(s, 1) = x_3$ für alle $s, t \in [0, 1]$. Damit ist sie eine Homotopie von $\gamma_2 \star \gamma_1$ nach $\gamma'_2 \star \gamma'_1$, und es gilt $[\gamma_2] \circ [\gamma_1] = [\gamma_2 \star \gamma_1] = [\gamma'_2 \star \gamma'_1] = [\gamma'_2] \circ [\gamma'_1]$.

(ii) Assoziativität: Seien $\gamma_i \in W(x_i, x_{i+1}, X)$ für $i = 1, 2, 3$. Dann gilt

$$\gamma_3 \star (\gamma_2 \star \gamma_1)(t) = \begin{cases} \gamma_1(4t) & t \in [0, \frac{1}{4}] \\ \gamma_2(4t - 1) & t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ \gamma_3(2t - 1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \quad (\gamma_3 \star \gamma_2) \star \gamma_1(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(4t - 2) & t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ \gamma_3(4t - 3) & t \in [\frac{3}{4}, 1], \end{cases} \quad (10)$$

und die nach Aufgabe 19 stetige Abbildung $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$

$$h(s, t) = \begin{cases} \gamma_1(\frac{4t}{1+s}) & t \in [0, \frac{1}{4}(1+s)] \\ \gamma_2(4t - 1 - s) & t \in [\frac{1}{4}(1+s), \frac{1}{4}(2+s)] \\ \gamma_3(\frac{4t-2-s}{2-s}) & t \in [\frac{1}{4}(2+s), 1] \end{cases}$$

ist eine Homotopie von $\gamma_3 \star (\gamma_2 \star \gamma_1)$ nach $(\gamma_3 \star \gamma_2) \star \gamma_1$ relativ zu $\{0, 1\}$. Damit gilt

$$[\gamma_3] \circ ([\gamma_2] \circ [\gamma_1]) = [\gamma_3 \star (\gamma_2 \star \gamma_1)] = [(\gamma_3 \star \gamma_2) \star \gamma_1] = ([\gamma_3] \circ [\gamma_2]) \circ [\gamma_1].$$

(iii) Identitätsmorphismen: Zu zeigen ist, dass $\gamma_{x_2} \star \gamma_1 \sim \gamma_1$ und $\gamma_2 \star \gamma_{x_2} \sim \gamma_2$ für alle Wege $\gamma_i \in W(x_i, x_{i+1}, X)$, $i = 1, 2$, denn dann folgt

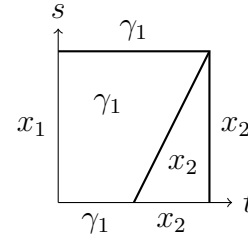
$$[\gamma_{x_2}] \circ [\gamma_1] = [\gamma_{x_2} \star \gamma_1] = [\gamma_1] \quad [\gamma_2] \circ [\gamma_{x_2}] = [\gamma_2 \star \gamma_{x_2}] = [\gamma_2].$$

Die Verkettungen der Wege γ_i mit dem trivialen Weg γ_{x_2} sind gegeben durch

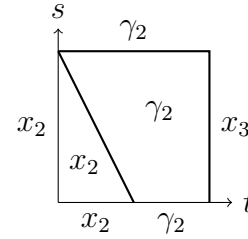
$$\gamma_{x_2} \star \gamma_1(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ x_2 & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}, \quad \gamma_2 \star \gamma_{x_2}(t) = \begin{cases} x_2 & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2t - 1) & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \quad (11)$$

Die nach Aufgabe 19 stetigen Abbildungen $h_i : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$

$$h_1(s, t) = \begin{cases} \gamma_1(\frac{2t}{1+s}) & t \in [0, \frac{1}{2}(1+s)] \\ x_2 & t \in [\frac{1}{2}(1+s), 1] \end{cases}$$



$$h_2(s, t) = \begin{cases} x_2 & t \in [0, \frac{1}{2}(1-s)] \\ \gamma_2(\frac{2t-1+s}{1+s}) & t \in [\frac{1}{2}(1-s), 1] \end{cases}$$



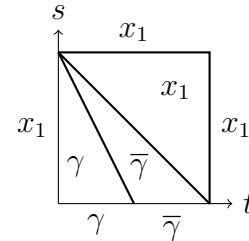
sind Homotopien von $\gamma_1 \star \gamma_{x_2}$ nach γ_1 und von $\gamma_{x_2} \star \gamma_2$ nach γ_2 .

(iv) Inverse: Um zu zeigen, dass jeder Morphismus in $\Pi_1(X)$ ein Inverses hat, betrachten wir einen Weg $\gamma \in W(x_1, x_2, X)$ und seine Umkehrung $\bar{\gamma} \in W(x_2, x_1, X)$. Dann gilt

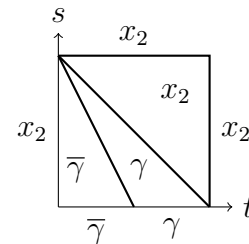
$$\bar{\gamma} \star \gamma(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \bar{\gamma}(2t-1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \quad \gamma \star \bar{\gamma}(t) = \begin{cases} \bar{\gamma}(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma(2t-1) & t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} \quad (12)$$

und die folgenden Abbildungen $h_i : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ sind Homotopien von $\bar{\gamma} \star \gamma$ nach γ_{x_1} und von $\gamma \star \bar{\gamma}$ nach γ_{x_2}

$$h_1(t, s) = \begin{cases} \gamma(\frac{2t}{1-s}) & t \in [0, \frac{1}{2}(1-s)] \\ \bar{\gamma}(\frac{2t-1+s}{1-s}) & t \in [\frac{1}{2}(1-s), 1-s] \\ x_1 & t \in [1-s, 1] \end{cases}$$



$$h_2(t, s) = \begin{cases} \bar{\gamma}(\frac{2t}{1-s}) & t \in [0, \frac{1}{2}(1-s)] \\ \gamma(\frac{2t-1+s}{1-s}) & t \in [\frac{1}{2}(1-s), 1-s] \\ x_2 & t \in [1-s, 1] \end{cases}$$



Damit gilt $\bar{\gamma} \star \gamma \sim \gamma_{x_1}$ und $\gamma \star \bar{\gamma} \sim \gamma_{x_2}$, und es folgt $[\bar{\gamma}] \circ [\gamma] = 1_{x_1}$, $[\gamma] \circ [\bar{\gamma}] = 1_{x_2}$.

Damit ist gezeigt, dass $\Pi_1(X)$ ein Gruppoid ist, und somit ist $\pi_1(x, X) := \text{Hom}_{\Pi_1(X)}(x, x)$ mit der Verkettung von Morphismen eine Gruppe für alle Objekte $x \in X$. \square

Der Begriff der *Fundamentalgruppe* ist in der Mathematik viel gebräuchlicher als der Begriff des *Fundamentalgruppoids*. Dennoch hat das Fundamentalgruppoid gegenüber der Fundamentalgruppe mehrere Vorteile. Es ist allgemeiner und enthält bereits alle Fundamentalgruppen zu Punkten $x \in X$ als Morphismenmengen. Im Gegensatz zur Fundamentalgruppe müssen hier aber keine Wahlen von Punkten getroffen werden.

Weitere wichtige Vorteile sind, dass Fundamentalgruppoid in der Handhabung flexibler sind und die Kategorie Grpd der Gruppoid besser an die zu untersuchende Kategorie Top angepasst ist. Beide Kategorien verfügen über initiale Objekte (der leere topologische Raum und das leere Gruppoid) und terminale Objekte (der Einpunktraum und das Gruppoid mit einem Objekt und einem Identitätsmorphismus), und in beiden Fällen ist das Koprodukt durch die disjunkte Vereinigung von Objekten gegeben (Aufgabe 88). In der Kategorie der Gruppen ist dagegen die triviale Gruppe ein Nullobjekt und das Koprodukt das freie Produkt von Gruppen.

Dass die Abhängigkeit der Fundamentalgruppen von der Wahl der Basispunkte in der Formulierung mit Gruppoiden transparenter wird illustriert auch das folgende Korollar. Hier wird deutlich, dass die Abhängigkeit der Fundamentalgruppe vom Basispunkt einer Bijektion zwischen den Endomorphismenmengen zweier isomorpher Objekte in einem Gruppoid entspricht, die durch die Konjugation mit einem Isomorphismus entsteht. Sie ist also ein Beispiel einer allgemeineren Aussage über Gruppoid (Aufgabe 85).

Korollar 6.2.4:

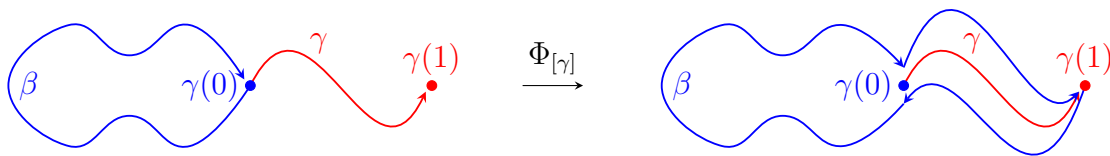
Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum. Dann ist für jeden Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ die Abbildung

$$\Phi_{[\gamma]} : \pi_1(\gamma(0), X) \rightarrow \pi_1(\gamma(1), X), \quad [\beta] \mapsto [\gamma] \circ [\beta] \circ [\bar{\gamma}]$$

ein Gruppenisomorphismus mit den folgenden Eigenschaften:

1. $\Phi_{[\gamma_x]} = \text{id}_{\pi_1(x, X)}$ für alle Punkte $x \in X$ und triviale Wege $\gamma_x : [0, 1] \rightarrow X$.
2. $\Phi_{[\gamma_2] \circ [\gamma_1]} = \Phi_{[\gamma_2]} \circ \Phi_{[\gamma_1]}$ für alle Wege $\gamma_i : [0, 1] \rightarrow X$ mit $\gamma_2(0) = \gamma_1(1)$.

Ist (X, \mathcal{O}) wegzusammenhängend, so folgt $\pi_1(x, X) \cong \pi_1(x', X)$ für alle $x, x' \in X$. Man spricht dann von *der Fundamentalgruppe* von X und schreibt $\pi_1(X)$ statt $\pi_1(x, X)$.



Beweis:

Für jedes Gruppoid \mathcal{G} und jeden Morphismus $g : X \rightarrow Y$ in \mathcal{G} ist $\Phi_g : \text{Hom}_{\mathcal{G}}(X, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{G}}(Y, Y)$, $f \mapsto g \circ f \circ g^{-1}$ ein Gruppenhomomorphismus, da

$$\Phi_g(f \circ f') = g \circ f \circ f' \circ g^{-1} = g \circ f \circ g^{-1} \circ g \circ f' \circ g^{-1} = \Phi_g(f) \circ \Phi_g(f').$$

Für alle Morphismen $f : X \rightarrow X$, $h : Y \rightarrow Z$ gilt

$$\Phi_{1_X}(f) = 1_X \circ f \circ 1_X^{-1} = f, \quad \Phi_{h \circ g}(f) = h \circ g \circ f \circ g^{-1} \circ h^{-1} = \Phi_h(g \circ f \circ g^{-1}) = \Phi_h \circ \Phi_g(f).$$

Daraus folgt, dass der Gruppenhomomorphismus $\Phi_{g^{-1}} : \text{Hom}_{\mathcal{G}}(Y, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{G}}(X, X)$ das Inverse von $\Phi_g : \text{Hom}_{\mathcal{G}}(X, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{G}}(Y, Y)$ ist, und damit beide Isomorphismen sind. \square

Ein besonders einfacher Fall liegt dann vor, wenn ein topologischer Raum (X, \mathcal{O}) wegzusammenhängend ist und alle Fundamentalgruppen $\pi_1(x, X)$ trivial sind. In diesem Fall enthält das Fundamentalgruppoid $\Pi_1(X)$ zu jedem Paar von Objekten $x, x' \in X$ genau einen Morphismus $f : x \rightarrow x'$. Für $x = x'$ ist dieser gerade der Identitätsmorphismus $1_x : x \rightarrow x$.

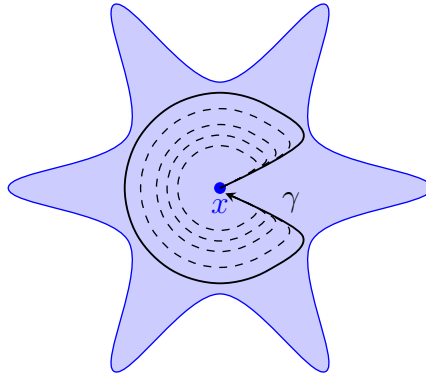
Definition 6.2.5: Ein topologischer Raum (X, \mathcal{O}) heißt **einfach zusammenhängend**, wenn alle Fundamentalgruppen $\pi_1(x, X)$ trivial sind, und **1-zusammenhängend**, wenn er wegzusammenhängend und einfach zusammenhängend ist.

Beispiel 6.2.6: Sternförmige Teilräume $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sind 1-zusammenhängend.

Ist $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sternförmig, so gibt es einen Punkt $x \in X$ mit $\overline{xy} \subseteq X$ für alle $y \in X$. Nach Beispiel 2.1.9 ist dann X wegzusammenhängend, und für jeden Weg $\gamma \in W(x, X)$ ist

$$h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X, \quad (s, t) \mapsto sx + (1 - s)\gamma(t)$$

eine Homotopie von γ zum trivialen Weg γ_x . Also sind nach Satz 6.2.3 und Korollar 6.2.4 alle Fundamentalgruppen $\pi_1(y, X)$ mit $y \in X$ trivial.



Unser Ziel in der Betrachtung von Fundamentalgruppen und Fundamentalgruppoiden war es, topologischen Räumen algebraische Größen zuzuordnen, mit denen wir nicht homöomorphe oder, allgemeiner, nicht homotopieäquivalente topologische Räume unterscheiden können. Dafür müssen wir Fundamentalgruppen und Fundamentalgruppoiden homotopieäquivalenter topologischer Räume in Verbindung bringen und das Verhalten von Fundamentalgruppen und Fundamentalgruppoiden unter stetigen Abbildungen untersuchen.

Da es sich bei stetigen Abbildungen um Morphismen in der Kategorie Top handelt und das Fundamentalgruppoid (die Fundamentalgruppe) jedem Objekt in der Kategorie Top ein Objekt in der Kategorie Grpd (Grp) zuordnen, ist es naheliegend, dass stetige Abbildungen Morphismen in Grpd (Grp) induzieren sollten, also *Funktoren* (*Gruppenhomomorphismen*) zwischen den zugehörigen Fundamentalgruppoiden (Fundamentalgruppen), die diese Zuordnung zu einem Funktor $\Pi_1 : \text{Top} \rightarrow \text{Grpd}$ (zu einem Funktor $\pi_1 : \text{Top}^* \rightarrow \text{Grp}$) machen.

Diese Morphismen in Grpd (Grp) ergeben sich aus der Beobachtung, dass Wege mit stetigen Abbildungen von einem topologischen Raum in einen anderen transportiert werden können. Für jede stetige Abbildung $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ und jeden Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ in (X, \mathcal{O}_X) ist nämlich $f \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow Y$ ein Weg in Y . Indem wir zeigen, dass dieser Transport von Wegen kompatibel mit Homotopien und Verkettungen von Wegen und stetigen Abbildungen ist, erhalten wir dann den folgenden Satz.

Satz 6.2.7: Seien (X, \mathcal{O}_X) , (Y, \mathcal{O}_Y) , (Z, \mathcal{O}_Z) topologische Räume und $f, f' : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ stetige Abbildungen. Dann gilt:

1. Die Zuordnungen $x \mapsto f(x)$ und $[\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$ für jeden Punkt $x \in X$ und Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ definieren einen Funktor $\Pi_1(f) : \Pi_1(X) \rightarrow \Pi_1(Y)$.
2. $\Pi_1(g \circ f) = \Pi_1(g)\Pi_1(f)$ und $\Pi_1(\text{id}_X) = \text{id}_{\Pi_1(X)}$.
3. Jede Homotopie $h : [0, 1] \times X \rightarrow Y$ von f nach f' induziert einen natürlichen Isomorphismus $\Pi_1(h) : \Pi_1(f) \rightarrow \Pi_1(f')$.

Dies definiert einen Funktor $\Pi_1 : \text{Top} \rightarrow \text{Grpd}$, der homotope Abbildungen auf natürlich isomorphe Funktoren abbildet.

Beweis:

1. $\Pi_1(f)$ ordnet jedem Objekt $x \in X$ im Fundamentalgruppoid $\Pi_1(X)$ das Objekt $f(x)$ im Fundamentalgruppoid $\Pi_1(Y)$ zu und jedem Morphismus $[\gamma] : x \rightarrow x'$ in $\Pi_1(X)$ den Morphismus $[f \circ \gamma] : f(x) \rightarrow f(x')$ in $\Pi_1(Y)$. Diese Zuordnung ist wohldefiniert, denn nach Beispiel 6.1.2, 5. folgt aus $\gamma \sim \gamma'$ auch $f \circ \gamma \sim f \circ \gamma'$. Sie ist auch kompatibel mit der Verkettung von Morphismen und Identitätsmorphismen. Denn per Definition der Verkettung von Wegen gilt

$$f \circ (\gamma_2 \star \gamma_1) = (f \circ \gamma_2) \star (f \circ \gamma_1) \quad f \circ \gamma_x = \gamma_{f(x)}$$

für alle Wege $\gamma_i \in W(x_i, x_{i+1}, X)$ und den trivialen Weg $\gamma_x \in W(x, x, X)$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \Pi_1(f)([\gamma_2] \circ [\gamma_1]) &= [f \circ (\gamma_2 \star \gamma_1)] = [(f \circ \gamma_2) \star (f \circ \gamma_1)] = [f \circ \gamma_2] \circ [f \circ \gamma_1] \\ &= \Pi_1(f)([\gamma_2]) \circ \Pi_1(f)([\gamma_1]), \\ \Pi_1(f)(1_x) &= \Pi_1(f)([\gamma_x]) = [f \circ \gamma_x] = [\gamma_{f(x)}] = 1_{f(x)} = 1_{\Pi_1(f)(x)}, \end{aligned}$$

und damit ist $\Pi_1(f) : \Pi_1(X) \rightarrow \Pi_1(Y)$ ein Funktor.

2. Für alle Punkte $x \in X$ gilt $\Pi_1(g \circ f)(x) = g \circ f(x) = \Pi_1(g)\Pi_1(f)(x)$ und $\Pi_1(\text{id}_X)(x) = x$, und für alle Wege $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ erhält man

$$\begin{aligned} \Pi_1(g \circ f)([\gamma]) &= [g \circ f \circ \gamma] = \Pi_1(g)([f \circ \gamma]) = \Pi_1(g) \circ \Pi_1(f)([\gamma]) \\ \Pi_1(\text{id}_X)([\gamma]) &= [\text{id}_X \circ \gamma] = [\gamma]. \end{aligned}$$

3. Eine Homotopie $h : [0, 1] \times X \rightarrow Y$ von f nach f' ordnet jedem Punkt $x \in X$ einen Weg $h_x : [0, 1] \rightarrow Y$, $t \mapsto h(t, x)$ in Y von $f(x) = h(0, x)$ nach $f'(x) = h(1, x)$ zu. Indem man dann jedem Objekt $x \in X$ in $\Pi_1(X)$ den zugehörigen Isomorphismus $[h_x] : f(x) \rightarrow f'(x)$ in $\Pi_1(Y)$ zuordnet, erhält man einen natürlichen Isomorphismus $\Pi_1(h) : \Pi_1(f) \rightarrow \Pi_1(f')$. Dazu ist noch zu zeigen, dass für alle Wege $\gamma \in W(x, x', X)$ das Diagramm

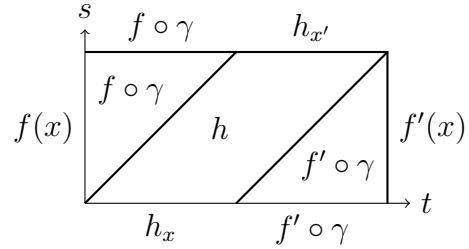
$$\begin{array}{ccc} f(x) & \xrightarrow{[h_x]} & f'(x) \\ \Pi_1(f)([\gamma]) \downarrow & & \downarrow \Pi_1(f')([\gamma]) \\ f(x') & \xrightarrow{[h_{x'}]} & f'(x') \end{array} \tag{13}$$

kommutiert. Da dies äquivalent ist zur Bedingung

$$[(f' \circ \gamma) \star h_x] = \Pi_1(f')([\gamma]) \circ [h_x] = [h_{x'}] \circ \Pi_1(f)([\gamma]) = [h_{x'} \star (f \circ \gamma)],$$

reicht es dafür aus, eine Homotopie von $(f' \circ \gamma) \star h_x$ nach $h_{x'} \star (f \circ \gamma)$ zu konstruieren. So eine Homotopie ist gegeben durch

$$h'(s, t) = \begin{cases} f \circ \gamma(2t) & t \in [0, \frac{s}{2}] \\ h(2t - s, \gamma(s)) & t \in [\frac{s}{2}, \frac{s}{2} + \frac{1}{2}] \\ f' \circ \gamma(2t - 1) & t \in [\frac{s}{2} + \frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$



und damit ist $\Pi_1(h) : \Pi_1(f) \rightarrow \Pi_1(g)$ ein natürlicher Isomorphismus. \square

Nachdem durch Satz 6.2.7 geklärt ist, wie sich stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen auf deren Fundamentalgruppoiden auswirken, können wir nun den Spezialfall von Homotopieäquivalenzen betrachten. Ist $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ eine Homotopieäquivalenz, so gibt es eine stetige Abbildung $g : (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ mit $g \circ f \sim \text{id}_X$ und $f \circ g \sim \text{id}_Y$. Man erhält also aus Satz 6.2.7 zwei Funktoren $\Pi_1(f) : \Pi_1(X) \rightarrow \Pi_1(Y)$ und $\Pi_1(g) : \Pi_1(Y) \rightarrow \Pi_1(X)$ und zwei natürliche Isomorphismen $\Pi_1(g)\Pi_1(f) \rightarrow \text{id}_{\Pi_1(X)}$ und $\Pi_1(f)\Pi_1(g) \rightarrow \text{id}_{\Pi_1(Y)}$. Dies sind nach Definition 5.2.8 genau die Strukturen, die eine Äquivalenz von Kategorien definieren. Homotopieäquivalenzen entsprechen also Äquivalenzen von Fundamentalgruppoiden.

Korollar 6.2.8: Ist $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ eine Homotopieäquivalenz, so ist der Funktor $\Pi_1(f) : \Pi_1(X) \rightarrow \Pi_1(Y)$ eine Äquivalenz von Kategorien. Sind also (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) vom selben Homotopietyp, so sind ihre Fundamentalgruppoiden $\Pi_1(X)$ und $\Pi_1(Y)$ äquivalent.

Indem wir statt des ganzen Fundamentalgruppoids $\Pi_1(X)$ nur die Endomorphismenmenge eines Objektes $x \in X$ betrachten, können wir aus den Aussagen in Satz 6.2.7 und Korollar 6.2.8 entsprechende Aussagen über die Fundamentalgruppen $\pi_1(x, X) = \text{Hom}_{\Pi_1(X)}(x, x)$ gewinnen. Um eine Formulierung in Kategorien und Funktoren zu erhalten, müssen wir dazu die Wahl des Basispunktes berücksichtigen und in der Kategorie Top^* arbeiten, deren Objekte Paare (x, X) aus einem topologischen Raum (X, \mathcal{O}) und einem Basispunkt $x \in X$ sind und deren Morphismen $f : (x, X) \rightarrow (y, Y)$ stetige Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ mit $f(x) = y$.

Satz 6.2.9: Seien (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) topologische Räume. Dann gilt:

1. Die Zuordnungen $(x, X) \rightarrow \pi_1(x, X)$ und $f \rightarrow \pi_1(f)$ mit $\pi_1(f) : \pi_1(x, X) \rightarrow \pi_1(f(x), Y)$, $[\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$ definieren einen Funktor $\pi_1 : \text{Top}^* \rightarrow \text{Grp}$.
2. Sind die stetigen Abbildungen $f, f' : X \rightarrow Y$ homotop, so sind die Gruppenhomomorphismen $\pi_1(f)$ und $\pi_1(f')$ zueinander konjugiert.
3. Ist $f : X \rightarrow Y$ eine Homotopieäquivalenz, so ist $\pi_1(f) : \pi_1(x, X) \rightarrow \pi_1(f(x), Y)$ ein Gruppenisomorphismus für alle $x \in X$. Homotopieäquivalente topologische Räume haben isomorphe Fundamentalgruppen.

Beweis:

1. Da $\Pi_1(f) : \Pi_1(X) \rightarrow \Pi_1(Y)$ ein Funktor zwischen Gruppoiden ist, definiert er für jedes Objekt $x \in X$ eine Abbildung $\pi_1(f) : \pi_1(x, X) \rightarrow \pi_1(f(x), Y)$ zwischen den Morphismenmengen $\pi_1(x, X) = \text{Hom}_{\Pi_1(X)}(x, x)$ und $\pi_1(f(x), Y) = \text{Hom}_{\Pi_1(Y)}(f(x), f(x))$, die mit der Komposition

von Morphismen und den Identitätsmorphismen kompatibel und damit ein Gruppenhomomorphismus ist. Wir ordnen also jedem Objekt (x, X) in Top^* die Gruppe $\pi_1(x, X)$ und jedem Morphismus $f : (x, X) \rightarrow (y, Y)$ den Gruppenhomomorphismus $\pi_1(f) : \pi_1(x, X) \rightarrow \pi_1(y, Y)$, $[\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$ zu. Die zweite Aussage in Satz 6.2.7 besagt, dass diese Zuordnung die Verkettung von Morphismen und die Identitätsmorphismen in Top^* und Grp respektiert und damit einen Funktor $\pi_1 : \text{Top}^* \rightarrow \text{Grp}$ definiert.

2. Die dritte Aussage in Satz 6.2.7 besagt, dass für homotope Abbildungen $f, f' : X \rightarrow Y$ die Gruppenhomomorphismen $\pi_1(f), \pi_1(f') : \pi_1(x, X) \rightarrow \pi_1(f(x), Y)$ durch Konjugation in $\Pi_1(f(x), Y)$ auseinander hervorgehen. Denn für alle Homotopien $h : [0, 1] \times X \rightarrow Y$ von f nach f' und Punkte $x \in X$ erhält man aus dem kommutierenden Diagramm (13)

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \xrightarrow{[h_x]} & f'(x) & \text{mit } h_x : [0, 1] \rightarrow Y, t \mapsto h(t, x) \\ \pi_1(f)([\gamma]) \downarrow & & \downarrow \pi_1(f')([\gamma]) \\ f(x) & \xrightarrow{[h_x]} & f'(x), \end{array}$$

und damit $\pi_1(f')([\gamma]) = [h_x] \circ \pi_1(f)([\gamma]) \circ [h_x]^{-1}$ für alle Wege $\gamma \in W(x, x, X)$.

3. Ist $f : X \rightarrow Y$ eine Homotopieäquivalenz, so ist der Funktor $\Pi_1(f) : \Pi_1(X) \rightarrow \Pi_1(Y)$ nach Korollar 6.2.8 eine Äquivalenz von Kategorien. Nach Satz 5.2.9 sind damit alle Gruppenhomomorphismen $\pi_1(f) : \pi_1(x, X) \rightarrow \pi_1(f(x), Y)$ bijektiv. \square

Insbesondere können wir Satz 6.2.7 und 6.2.9 auf Deformationsretrakte anwenden, die besonders anschauliche und einfache Beispiele von Homotopieäquivalenzen sind. Ist $M \subseteq X$ ein Retrakt von X , so ist $f = \iota : M \rightarrow X$ die Inklusionsabbildung und $g = r : X \rightarrow M$ eine Retraktion mit $r \circ \iota = \text{id}_M$. In diesem Fall identifiziert die Inklusionsabbildung die Fundamentalgruppen $\pi_1(m, M)$ mit *Untergruppen* der Fundamentalgruppen $\pi_1(m, X)$. Handelt es sich um ein Deformationsretrakt, so gilt auch $\iota \circ r \sim \text{id}_X$, und die Fundamentalgruppen $\pi_1(m, M)$ und $\pi_1(m, X)$ sind isomorph.

Korollar 6.2.10: Sei (X, \mathcal{O}_X) ein topologischer Raum, $M \subseteq X$ ein Teilraum mit Inklusionsabbildung $\iota : M \rightarrow X$ und $m \in M$.

1. Ist M ein Retrakt von X , so ist $\pi_1(\iota) : \pi_1(m, M) \rightarrow \pi_1(m, X)$ ein injektiver Gruppenhomomorphismus.
2. Ist M ein schwacher Deformationsretrakt von X , so ist $\pi_1(\iota) : \pi_1(m, M) \rightarrow \pi_1(m, X)$ ein Gruppenisomorphismus.

Beweis:

Ist $M \subseteq X$ ein Retrakt von X mit Retraktion $r : X \rightarrow M$, so folgt aus der Bedingung $r \circ \iota = \text{id}_M$ die Identität $\pi_1(r) \circ \pi_1(\iota) = \pi_1(r \circ \iota) = \pi_1(\text{id}_M) = \text{id}_{\pi_1(m, M)}$. Also hat der Gruppenhomomorphismus $\pi_1(\iota) : \pi_1(m, M) \rightarrow \pi_1(m, X)$ ein Linksinverses und ist damit injektiv. Ist zusätzlich $\iota \circ r \sim \text{id}_X$, so sind nach Satz 6.2.9 die Gruppenhomomorphismen $\pi_1(\iota) \circ \pi_1(r) = \pi_1(\iota \circ r)$ und $\pi_1(\text{id}_X) = \text{id}_{\pi_1(m, X)}$ zueinander konjugiert und es folgt $\pi_1(\iota \circ r) = \text{id}_{\pi_1(m, X)}$. Damit hat der Gruppenhomomorphismus $\pi_1(\iota) : \pi_1(m, M) \rightarrow \pi_1(m, X)$ auch ein Rechtsinverses und ist surjektiv. \square

Beispiel 6.2.11:

1. Die Fundamentalgruppen des Zylinders $\mathbb{R} \times S^1$, des Kreises S^1 und des Möbiusbandes sind isomorph, denn der Kreis ist ein Deformationsretrakt des Möbiusbandes und des Zylinders nach Beispiel 6.1.10.
2. Für alle $n \in \mathbb{N}$, sind die Fundamentalgruppen von $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ und S^n isomorph, denn nach Beispiel 6.1.10 ist S^n ein starker Deformationsretrakt von $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.
3. Kontrahierbare topologische Räume sind einfach zusammenhängend, denn sie sind homotopieäquivalent zu dem Einpunktraum.

Bevor wir uns der konkreten Berechnungen von Fundamentalgruppen widmen, stellen wir Fundamentalgruppen noch in einen größeren Zusammenhang. Dazu erinnern wir an den Zusammenhang zwischen Wegen in einem topologischen Raum X und Homotopieklassen stetiger Abbildungen $f : \{x\} \rightarrow X$ aus dem Einpunktraum.

Nach Beispiel 6.1.2, 2. stehen *Homotopien* zwischen Abbildungen $f, f' : \{x\} \rightarrow X$ in Bijektion mit Wegen in X zwischen $f(x)$ und $f'(x)$. Die *Homotopieklassen* solcher Abbildungen entsprechen genau den Wegzusammenhangskomponenten von X . Homotopien zwischen Wegen in X können damit als Homotopien von Homotopien aufgefasst werden und Elemente des Fundamentalgruppoids $\Pi_1(X)$ als Homotopieklassen von Homotopien. Betrachtet man dabei nur Wege mit festem Anfangs- und Endpunkt x und Homotopien mit festen Endpunkten, so sind sie durch stetige Abbildungen $h : [0, 1]^{\times 2} \rightarrow X$ mit $h(\partial[0, 1]^{\times 2}) = \{x\}$ gegeben.

Es stellt sich nun die Frage, ob auch Homotopien zwischen Homotopien von Homotopien und deren Homotopieklassen interessante mathematische Strukturen liefern, und diese Frage lässt sich beliebig oft iterieren. Berücksichtigt man in jedem Schritt dabei nur Homotopien relativ zu $\{0, 1\}$ und die zugehörigen Homotopieklassen, so betrachtet man nach n Iterationen stetige Abbildungen $h : [0, 1]^{\times n} \rightarrow X$ mit $h(\partial[0, 1]^{\times n}) = \{x\}$.

Solche Abbildungen stehen nach der universellen Eigenschaft des Quotientenraums in Bijektion mit stetigen Abbildungen $h : [0, 1]/\partial[0, 1]^{\times n} \rightarrow X$. Nach Aufgabe 68 ist der topologische Raum $[0, 1]^{\times n}/\partial[0, 1]^{\times n}$, der durch Kollabieren des Randes des Einheitswürfels $[0, 1]^{\times n}$ entsteht, homöomorph zur n -Sphäre S^n . Wir können also Elemente der Fundamentalgruppe auch als Homotopieklassen stetiger Abbildungen $\gamma : S^1 \rightarrow X$ auffassen und analog für $n > 1$ Homotopieklassen stetiger Abbildungen $\gamma : S^n \rightarrow X$ betrachten. So erhält man für alle $n \in \mathbb{N}_0$ Funktoren $\pi_n : \text{Top} \rightarrow \text{Grp}$ und das Konzept der *höheren Homotopiegruppen*.

Bemerkung 6.2.12:

1. Für jeden topologischen Raum (X, \mathcal{O}_X) , jeden Punkt $x \in X$ und alle $n \in \mathbb{N}$ bilden die Homotopieklassen stetiger Abbildungen $f : [0, 1]^{\times n} \rightarrow X$ mit $f(\partial[0, 1]^{\times n}) = \{x\}$ relativ zu $\partial[0, 1]^{\times n}$ eine Gruppe mit der Gruppenmultiplikation

$$[g] \circ [f] = [g \star f] \quad (g \star f)(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \dots, t_n) & t_1 \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n) & t_1 \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

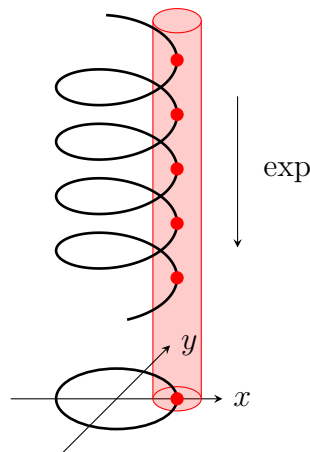
Diese werden mit $\pi_n(x, X)$ und als n te **Homotopiegruppe** von X bezeichnet. Alle Homotopiegruppen $\pi_n(x, X)$ mit $n \geq 2$ sind abelsch.

2. Die n te Homotopiegruppe definiert einen Funktor $\pi_n : \text{Top}^* \rightarrow \text{Ab}$. Homotopieäquivalenzen $f : X \rightarrow Y$ induzieren Gruppenisomorphismen $\pi_n(f) : \pi_n(x, X) \rightarrow \pi_n(f(x), Y)$. Damit haben homotopieäquivalente topologische Räume isomorphe Homotopiegruppen.
3. Höhere Homotopiegruppen sind schwierig zu berechnen. Insbesondere gibt es keine allgemeine Formel für die Homotopiegruppen $\pi_n(S^k)$ der k -Sphären für beliebige $k, n \in \mathbb{N}$.

6.3 Die Fundamentalgruppe des Kreises

Das Ziel ist es nun, Fundamentalgruppoid und Fundamentalgruppen topologischer Räume zu berechnen. Das kann einerseits dadurch geschehen, dass man topologische Räume vom selben Homotopietyp findet, deren Fundamentalgruppen bereits bekannt sind. Andererseits werden wir Fundamentalgruppoid und Fundamentalgruppen berechnen, indem wir topologische Räume in gewisse Grundbausteine von möglichst einfacher Gestalt zerlegen. Neben den topologischen Räumen mit trivialen Fundamentalgruppen ist der wichtigste Grundbaustein dabei der Einheitskreis $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, dessen Fundamentalgruppe wir nun bestimmen.

Die wichtigste Zutat in der Bestimmung der Fundamentalgruppe $\pi_1(S^1)$ ist die Exponentialabbildung $\exp : \mathbb{R} \rightarrow S^1, t \mapsto e^{2\pi it}$, mit der wir Homotopieklassen von Wegen $\gamma : [0, 1] \rightarrow S^1$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = 1$ mit Homotopieklassen von Wegen $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\tilde{\gamma}(0), \tilde{\gamma}(1) \in \mathbb{Z}$ in Beziehung setzen können. Anschaulich kann man sich dies wie ein spiralförmiges Aufwickeln der reellen Achse über dem Einheitskreis vorstellen, wobei die Exponentialabbildungen der Orthogonalprojektion in die Ebene entspricht.



Offensichtlich liefert für jeden Weg $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\tilde{\gamma}(0), \tilde{\gamma}(1) \in \mathbb{Z}$ die Verkettung mit der Exponentialabbildung einen Weg $\gamma = \exp \circ \tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow S^1$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = 1$. Die Frage ist nun, ob jeder Weg $\gamma \in W(1, 1, S^1)$ auf diese Weise zustande kommt, und ob Homotopien von Wegen $\tilde{\gamma} \in W(z, z', \mathbb{R})$ mit $z, z' \in \mathbb{Z}$ Homotopien von Wegen $\gamma \in W(1, 1, S^1)$ entsprechen. Da Wege $\gamma \in W(1, 1, S^1)$ in Bijektion stehen mit stetigen Abbildungen $\gamma : S^1 \rightarrow S^1$ können wir zur Klärung dieser Fragen auch stetige Abbildungen $f : S^1 \rightarrow S^1$ betrachten.

Satz 6.3.1: Sei $f : S^1 \rightarrow S^1$ stetig. Dann gibt es zu jedem $t_0 \in \mathbb{Z}$ eine eindeutig bestimmte stetige Abbildung $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\tilde{f}(0) = t_0$ und $\exp \circ \tilde{f} = f \circ \exp$. Eine stetige Abbildung $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\exp \circ \tilde{f} = f \circ \exp$ heißt **Lift** oder **Hochhebung** von f .

Beweis:

Eindeutigkeit: Sind $\tilde{f}, \tilde{f}' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Hochhebungen von f , so gilt

$$\exp \circ (\tilde{f}(t) - \tilde{f}'(t)) = \frac{\exp \circ \tilde{f}(t)}{\exp \circ \tilde{f}'(t)} = \frac{f \circ \exp(t)}{f \circ \exp(t)} = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

und somit $\tilde{f}(t) - \tilde{f}'(t) \in \mathbb{Z}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Da $\tilde{f} - \tilde{f}' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist und $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ mit der Teilraumtopologie diskret, ist $\tilde{f} - \tilde{f}'$ nach Satz 2.1.5 konstant. Gilt $\tilde{f}(0) = \tilde{f}'(0)$, so folgt $\tilde{f} = \tilde{f}'$.

Existenz: Da S^1 kompakt und $f : S^1 \rightarrow S^1$ stetig ist, ist f gleichmäßig stetig. Das gleiche gilt für die stetige Abbildung $\exp : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, denn $[0, 1]$ ist kompakt und \exp ist periodisch mit Periode 1. Damit ist auch $f \circ \exp : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ gleichmäßig stetig, und es gibt ein $\epsilon > 0$, so dass $f \circ \exp(I)$ in einem offenen Halbkreis enthalten ist für alle Intervalle I der Länge $\leq \epsilon$. Für jeden offenen Halbkreis $H \subseteq S^1$ ist $\exp^{-1}(H) = \dot{\cup}_{k \in \mathbb{Z}} I_k$ mit $I_k = (s + k, s + k + \frac{1}{2})$, $s \in \mathbb{R}$, und $\exp|_{I_k} : I_k \rightarrow H$ ist ein Homöomorphismus.

Da $f \circ \exp([0, \epsilon])$ in einem offenen Halbkreis H_0 enthalten ist, gibt es ein eindeutig bestimmtes Intervall I_0 der Länge $1/2$ mit $\exp(I_0) = H_0$ und $t_0 \in I_0$. Wir definieren

$$\tilde{f}(t) = (\exp|_{I_0})^{-1} \circ f \circ \exp(t) \quad \forall t \in [0, \epsilon].$$

Dann ist $\tilde{f} : [0, \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $\exp \circ \tilde{f} = (f \circ \exp)|_{[0, \epsilon]}$ und $\tilde{f}(0) = t_0$. Jetzt wenden wir die selbe Prozedur auf das Intervall $[\epsilon, 2\epsilon]$ und $t_1 = \tilde{f}(\epsilon)$ an. Da $f \circ \exp([\epsilon, 2\epsilon])$ in einem offenen Halbkreis H_1 enthalten ist, gibt es ein eindeutig bestimmtes Intervall I_1 der Länge $1/2$ mit $\exp(I_1) = H_1$ und $t_1 = \tilde{f}(\epsilon) \in I_1$. Wir erhalten also eine stetige Abbildung $\tilde{f} : [0, 2\epsilon] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\exp \circ \tilde{f} = (f \circ \exp)|_{[0, 2\epsilon]}$, indem wir

$$\tilde{f}(t) = (\exp|_{I_1})^{-1} \circ f \circ \exp(t) \quad \forall t \in [\epsilon, 2\epsilon].$$

setzen. Durch Iteration dieses Schritts und anschließende Ausdehnung auf negative Zahlen erhalten wir dann eine stetige Abbildung $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\exp \circ \tilde{f} = f \circ \exp$ und $\tilde{f}(0) = t_0$. \square

Für jede Hochhebung $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ einer stetigen Abbildung $f : S^1 \rightarrow S^1$ können wir die Zahl $\tilde{f}(1) - \tilde{f}(0)$ betrachten. Da $\exp \circ \tilde{f} = f \circ \exp$ und $\exp(0) = \exp(1) = 1$, gilt $\exp(\tilde{f}(1) - \tilde{f}(0)) = 1$ und damit $\tilde{f}(1) - \tilde{f}(0) \in \mathbb{Z}$. Diese Zahl hängt auch nicht von der Wahl der Hochhebung ab, denn zwei verschiedene Hochhebungen können sich nach Satz 6.3.1 nur um eine Konstante unterscheiden. Damit können wir jeder stetigen Abbildung $f : S^1 \rightarrow S^1$ die eindeutig bestimmte ganze Zahl $\deg(f) = \tilde{f}(1) - \tilde{f}(0) \in \mathbb{Z}$ zuordnen.

Da stetige Abbildungen $f : S^1 \rightarrow S^1$ in Bijektion stehen mit Wegen $\gamma \in W(1, 1, S^1)$, erhalten wir auch für jeden Weg $\gamma \in W(1, 1, S^1)$ eine solche Zuordnung. Ist nämlich \sim die Äquivalenzrelation auf $[0, 1]$, die die Endpunkte des Intervalls identifiziert, und $\pi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]/\sim$ die kanonische Surjektion, so gibt es nach der universellen Eigenschaft des Quotienten wegen $\gamma(0) = \gamma(1)$ und $\exp(0) = \exp(1)$ genau eine stetige Abbildung $\gamma_\sim : [0, 1]/\sim \rightarrow S^1$ mit $\gamma_\sim \circ \pi = \gamma$ und genau eine stetige Abbildung $\exp_\sim : [0, 1]/\sim \rightarrow S^1$ mit $\exp_\sim \circ \pi = \exp|_{[0, 1]}$. Da letztere ein Homöomorphismus ist, können wir die zugehörige Abbildung $\gamma_\sim \circ \exp_\sim^{-1} : S^1 \rightarrow S^1$ betrachten und dem Weg γ die Zahl $\deg(\gamma) := \deg(\gamma_\sim \circ \exp_\sim^{-1})$ zuordnen.

$$\begin{array}{ccc}
S^1 & \xleftarrow{\exp|_{[0,1]}} [0, 1] & \xrightarrow{\gamma} S^1 \\
& \searrow \cong & \downarrow \pi \\
& \exp_{\sim} & [0, 1] / \sim \\
& & \nearrow \gamma_{\sim}
\end{array} \tag{14}$$

Definition 6.3.2:

1. Der **Abbildungsgrad** einer stetigen Abbildung $f : S^1 \rightarrow S^1$ ist $\deg(f) = \tilde{f}(1) - \tilde{f}(0) \in \mathbb{Z}$ für eine beliebige Hochhebung $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ von f .
2. Der **Abbildungsgrad** eines Weges $\gamma : [0, 1] \rightarrow S^1$ mit $\gamma(1) = \gamma(0) = 1$ ist definiert durch $\deg(\gamma) = \deg(\gamma_{\sim} \circ \exp_{\sim}^{-1})$.

Der Abbildungsgrad $\deg(f)$ einer Abbildung $f : S^1 \rightarrow S^1$ misst, wie oft der zugehörige Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow S^1$, $t \mapsto f \circ \exp(t)$ mit $\gamma(0) = \gamma(1)$ im mathematischen Sinn um den Ursprung läuft. Dies wird unter anderem an dem folgenden Beispiel deutlich.

Beispiel 6.3.3: Die Abbildung $f : S^1 \rightarrow S^1$, $z \mapsto z^n$ für $n \in \mathbb{Z}$ hat den Abbildungsgrad $\deg(f) = n$. Denn $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto nt$ ist eine Hochhebung von f , da sie die Bedingung $\exp \circ \tilde{f}(t) = \exp(nt) = \exp(t)^n = f \circ \exp(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt, und $\deg(f) = \tilde{f}(1) - \tilde{f}(0) = n$.

Um mit dem Abbildungsgrad die Fundamentalgruppe des Kreises zu bestimmen, müssen wir zunächst seine Eigenschaften untersuchen, die auch auf interessante geometrische Anwendungen führen. Sie folgen aus den Eigenschaften der Exponentialabbildung und der Hochhebungen.

Lemma 6.3.4: Für alle stetigen Abbildungen $f, g : S^1 \rightarrow S^1$ gilt:

1. Ist $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Hochhebung von f , so ist $\tilde{f}(t+k) - \tilde{f}(t) = k \deg(f)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$.
2. $\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g)$.
3. $\deg(f \circ g) = \deg(f) \cdot \deg(g)$.
4. Ist $f(-z) = -f(z)$ für alle $z \in S^1$, so ist $\deg(f)$ ungerade.
5. Ist $\deg(f) \neq 0$, so ist f surjektiv.

Beweis:

1. Ist $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Hochhebung von $f : S^1 \rightarrow S^1$, so gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{Z}$

$$\exp(\tilde{f}(x+k) - \tilde{f}(x)) = \frac{\exp(\tilde{f}(x+k))}{\exp(\tilde{f}(x))} = \frac{f(\exp(x+k))}{f(\exp(x))} = \frac{f(\exp(x))}{f(\exp(x))} = 1$$

und damit $\tilde{f}(x+k) - \tilde{f}(x) \in \mathbb{Z}$. Da \mathbb{Z} diskret ist und $\tilde{f}_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \tilde{f}(x+k) - \tilde{f}(x)$ stetig mit Werten in \mathbb{Z} , ist \tilde{f}_k nach Satz 2.1.5 konstant, und es folgt für alle $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\tilde{f}(x+k) - \tilde{f}(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \tilde{f}(x+j+1) - \tilde{f}(x+j) = \sum_{j=0}^{k-1} \tilde{f}_1(x+j) = k \tilde{f}_1(0) = k \deg(f).$$

2. Sind \tilde{f} und \tilde{g} Hochhebungen von f und g , so ist $\tilde{f} + \tilde{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Hochhebung von $f \cdot g : S^1 \rightarrow S^1$, denn $\exp \circ (\tilde{f} + \tilde{g}) = (\exp \circ \tilde{f}) \cdot (\exp \circ \tilde{g}) = (f \circ \exp) \cdot (g \circ \exp) = (f \cdot g) \circ \exp$. Daraus folgt $\deg(f \cdot g) = \tilde{f}(1) + \tilde{g}(1) - \tilde{f}(0) - \tilde{g}(0) = \deg(f) + \deg(g)$.

3. Ist \tilde{f} eine Hochhebung von f und \tilde{g} eine Hochhebung von g , so ist $\tilde{g} \circ \tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Hochhebung von $g \circ f : S^1 \rightarrow S^1$, denn $\exp \circ \tilde{g} \circ \tilde{f} = g \circ \exp \circ \tilde{f} = g \circ f \circ \exp$. Daraus folgt mit 1.

$$\deg(g \circ f) = \tilde{g}(\tilde{f}(1)) - \tilde{g}(\tilde{f}(0)) = \tilde{g}(\tilde{f}(0) + \deg(f)) - \tilde{g}(\tilde{f}(0)) = \deg(f) \cdot \deg(g).$$

4. Für jede Hochhebung $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ von f und alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp(\tilde{f}(t) + \frac{1}{2}) = -\exp \circ \tilde{f}(t) = -f \circ \exp(t) = f \circ (-\exp(t)) = f \circ \exp(t + \frac{1}{2}) = \exp(\tilde{f}(t + \frac{1}{2})).$$

Damit nimmt die stetige Abbildung $\tilde{f}_{1/2} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \tilde{f}(t + \frac{1}{2}) - \tilde{f}(t) - \frac{1}{2}$ Werte in \mathbb{Z} an und ist nach Satz 2.1.5 konstant. Es folgt $\deg(f) = \tilde{f}(1) - \tilde{f}(0) = \tilde{f}_{1/2}(\frac{1}{2}) + \tilde{f}_{1/2}(0) + 1 = 2\tilde{f}_{1/2}(0) + 1$ mit $\tilde{f}_{1/2}(0) \in \mathbb{Z}$.

5. Ist $\deg(f) \neq 0$, so gilt $|\tilde{f}(1) - \tilde{f}(0)| \geq 1$ für jede Hochhebung \tilde{f} von f . Damit enthält das Bild $\tilde{f}(\mathbb{R})$ ein Intervall I der Länge eins, und es folgt $f(S^1) = f(\exp(\mathbb{R})) = \exp(\tilde{f}(\mathbb{R})) \supseteq \exp(I) = S^1$.
□

Mit den Hilfsaussagen in Lemma 6.3.4 können wir nun beweisen, dass der Abbildungsgrad eines Weges $\gamma \in W(1, 1, S^1)$ nur von seiner Homotopieklasse abhängt, und daraus die Fundamentalgruppe des Kreises berechnen.

Satz 6.3.5: Der Abbildungsgrad definiert einen Gruppenisomorphismus

$$\deg : \pi_1(1, S^1) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad [\gamma] \mapsto \deg(\gamma).$$

Beweis:

1. Wir zeigen, dass der Abbildungsgrad eines Weges $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = 1$ nur von seiner Homotopieklasse abhängt. Seien dazu $f, f' : S^1 \rightarrow S^1$ stetig und $h : [0, 1] \times S^1 \rightarrow S^1$ eine Homotopie von f nach f' . Wir betrachten für $t, t' \in [0, 1]$ die Abbildungen

$$h_t : S^1 \rightarrow S^1, \quad z \mapsto h(t, z), \quad H_{t,t'} = \frac{h_t}{h_{t'}} : S^1 \rightarrow S^1, \quad z \mapsto \frac{h(t, z)}{h(t', z)}.$$

Da h stetig und $[0, 1] \times S^1$ kompakt ist, ist h gleichmäßig stetig, und damit gibt es ein $\delta > 0$ mit $|h(t, z) - h(t', z)| < 1$ für $|t - t'| < \delta$. Dann ist für $|t - t'| < \delta$ die Abbildung $H_{t,t'} : S^1 \rightarrow S^1$ nicht surjektiv, und mit Lemma 6.3.4, 5. folgt $\deg(H_{t,t'}) = 0$. Nach Lemma 6.3.4, 2. gilt dann

$$\deg(h_t) = \deg(H_{t,t'} \cdot h_{t'}) = \deg(H_{t,t'}) + \deg(h_{t'}) = \deg(h_{t'}) \quad \forall t, t' \in [0, 1] \text{ mit } |t - t'| < \delta.$$

Indem wir eine Unterteilung $0 = t_0 < \dots < t_n = 1$ des Intervalls $[0, 1]$ mit $|t_i - t_{i-1}| < \delta$ für $i \in \{1, \dots, n\}$ wählen, erhalten wir dann

$$\deg(f) = \deg(h_{t_0}) = \deg(h_{t_1}) = \dots = \deg(h_{t_n}) = \deg(f').$$

Sind nun $\gamma, \gamma' \in W(1, 1, S^1)$ Wege und $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S^1$ eine Homotopie von γ nach γ' , so gilt $h(s, 0) = h(s, 1) = 1$ für alle $s \in [0, 1]$, und damit gibt es eine eindeutig bestimmte stetige Abbildung $h_\sim : [0, 1] \times S^1 \rightarrow S^1$ mit $h_\sim(s, \exp(t)) = h(s, t)$ für alle $s, t \in [0, 1]$. Da für $t \in [0, 1]$

$$h_\sim(0, \exp(t)) = \gamma(t) = \gamma_\sim \circ \exp_\sim^{-1}(\exp(t)) \quad h_\sim(1, \exp(t)) = \gamma'(t) = \gamma'_\sim \circ \exp_\sim^{-1}(\exp(t))$$

und $\exp|_{[0,1]} : [0, 1] \rightarrow S^1$ surjektiv ist, ist h_\sim eine Homotopie von $\gamma_\sim \circ \exp_\sim^{-1} : S^1 \rightarrow S^1$ nach $\gamma'_\sim \circ \exp_\sim^{-1} : S^1 \rightarrow S^1$, und es folgt

$$\deg(\gamma) = \deg(\gamma_\sim \circ \exp_\sim^{-1}) = \deg(\gamma'_\sim \circ \exp_\sim^{-1}) = \deg(\gamma').$$

2. Um zu zeigen, dass $\deg : \pi_1(1, S^1) \rightarrow \mathbb{Z}$, $[\gamma] \mapsto \deg(\gamma)$ ein Gruppenhomomorphismus ist, reicht, es zu zeigen, dass $\deg(\delta \star \gamma) = \deg(\delta) + \deg(\gamma)$ für alle Wege $\gamma, \delta \in W(1, 1, S^1)$ gilt. Dies folgt aus der Tatsache, dass S^1 eine topologische Gruppe ist mit der Multiplikation in \mathbb{C} als Gruppenmultiplikation. Nach Aufgabe 104 stimmen die Gruppenstrukturen auf $\pi_1(1, S^1)$ überein, die durch das Aneinanderhängen von Wegen und durch die Gruppenmultiplikation von S^1 definiert werden: $[\delta] \circ [\gamma] = [\delta \star \gamma] = [\delta \cdot \gamma]$. Mit Lemma 6.3.4, 2. folgt dann

$$\begin{aligned} \deg(\delta \star \gamma) &= \deg(\delta \cdot \gamma) = \deg((\delta \cdot \gamma)_{\sim} \circ \exp_{\sim}^{-1}) = \deg((\delta_{\sim} \circ \exp_{\sim}^{-1}) \cdot (\gamma_{\sim} \circ \exp_{\sim}^{-1})) \\ &= \deg(\delta_{\sim} \circ \exp_{\sim}^{-1}) + \deg(\gamma_{\sim} \circ \exp_{\sim}^{-1}) = \deg(\delta) + \deg(\gamma). \end{aligned}$$

3. Dass $\deg : \pi_1(1, S^1) \rightarrow \mathbb{Z}$ surjektiv ist, folgt aus der Tatsache, dass der Weg $\gamma_n : [0, 1] \rightarrow S^1$, $t \mapsto \exp(nt)$ mit $n \in \mathbb{Z}$ nach Beispiel 6.3.3 den Abbildungsgrad $\deg(\gamma_n) = n$ hat.

Um zu zeigen, dass $\deg : \pi_1(1, S^1) \rightarrow \mathbb{Z}$ injektiv ist, betrachten wir einen Weg $\gamma \in W(1, 1, S^1)$ mit $\deg(\gamma) = 0$ und die Hochhebung $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ von $\gamma_{\sim} \circ \exp_{\sim}^{-1} : S^1 \rightarrow S^1$ mit $\tilde{\gamma}(0) = 0$. Dann gilt $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\gamma}(0) + \deg(\gamma_{\sim} \circ \exp_{\sim}^{-1}) = \deg(\gamma) = 0$. Damit erfüllt die stetige Abbildung $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S^1$, $(s, t) \mapsto \exp(s\tilde{\gamma}(t))$ die Bedingungen $h(0, t) = \exp(0) = 1$, $h(1, t) = \exp(\tilde{\gamma}(t))$ und $h(s, 0) = h(s, 1) = \exp(s\tilde{\gamma}(0)) = \exp(s\tilde{\gamma}(1)) = \exp(0) = 1$ und ist eine Homotopie von Wegen zwischen dem trivialen Weg γ_1 und $\gamma = \exp \circ \tilde{\gamma}|_{[0,1]} : [0, 1] \rightarrow S^1$. Also gilt $[\gamma] = e$ und $\deg : \pi_1(1, S^1) \rightarrow \mathbb{Z}$ ist injektiv. \square

Aus Satz 6.3.5 erhalten wir die Fundamentalgruppe des Kreises und aller topologischen Räume vom selben Homotopietyp, also auch des Zylinders, des offenen oder abgeschlossenen Kreisrings und des Möbiusbands. Satz 6.3.5 hat aber auch interessante Anwendungen in der Topologie, der Geometrie und der Algebra. Dies illustrieren die folgenden Korollare.

Korollar 6.3.6:

1. Ist $f : S^1 \rightarrow S^1$ die Einschränkung einer stetigen Abbildung $g : D^2 \rightarrow S^1$ auf $S^1 = \partial D^2$, so ist $\deg(f) = 0$.

Denn dann ist $h : [0, 1] \times S^1 \rightarrow S^1$, $h(t, z) = g(tz)$ eine Homotopie von der konstanten Abbildung $S^1 \rightarrow S^1$, $z \mapsto g(0)$ nach f und somit gilt $\deg(f) = 0$ nach Lemma 6.3.4, 5.

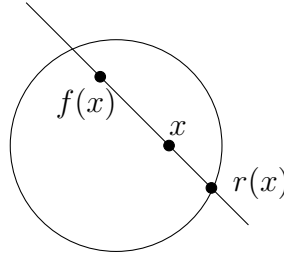
2. S^1 ist kein Retrakt von D^2 .

Wäre nämlich $r : D^2 \rightarrow S^1$ eine Retraktion, so wäre $r \circ \iota = \text{id}_{S^1} : S^1 \rightarrow S^1$ für die Inklusionsabbildung $\iota : S^1 \rightarrow D^2$. Mit 1. würde dann $\deg(r \circ \iota) = \deg(\text{id}_{S^1}) = 0$ folgen. Nach Beispiel 6.3.3 gilt aber $\deg(\text{id}_{S^1}) = 1$.

3. **Brouwerscher Fixpunktsatz für $d = 2$:**

Jede stetige Abbildung $f : D^2 \rightarrow D^2$ hat einen Fixpunkt.

Gäbe es eine stetige Abbildung $f : D^2 \rightarrow D^2$ ohne Fixpunkt, so könnten wir eine Abbildung $r : D^2 \rightarrow S^1$ definieren, die jedem Punkt $x \in D^2$ den Schnittpunkt der dann eindeutig bestimmten Geraden durch x und $f(x)$ mit $S^1 = \partial D^2$ zuordnet, der näher an x als an $f(x)$ liegt. Da f stetig ist, wäre auch r stetig mit $r(x) = x$ für alle $x \in S^1$ und damit eine Retraktion, die es nach 2. aber nicht geben kann.



Korollar 6.3.7: (Fundamentalsatz der Algebra)

Jedes nicht-konstante Polynom mit Koeffizienten in \mathbb{C} hat eine Nullstelle in \mathbb{C} .

Beweis:

Angenommen $p \in \mathbb{C}[x]$ ist ein nicht-konstantes Polynom ohne Nullstelle in \mathbb{C} . Dann können wir annehmen, dass p normiert ist und damit von der Form $p = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$ mit $n \geq 1$ und $a_k \in \mathbb{C}$. Da p keine Nullstelle hat, ist dann die Abbildung

$$f : \mathbb{C} \rightarrow S^1, \quad z \mapsto \frac{p(z)}{|p(z)|}$$

stetig, und nach Korollar 6.3.6, 1. gilt $\deg(f \circ \iota) = 0$ für die Inklusion $\iota : S^1 \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z$. Andererseits ist auch die Abbildung

$$h : [0, 1] \times S^1 \rightarrow S^1, \quad h(t, z) = \frac{z^n + ta_{n-1}z^{n-1} + t^2a_{n-2}z^{n-2} \dots + t^na_0}{|z^n + ta_{n-1}z^{n-1} + t^2a_{n-2}z^{n-2} + \dots + t^na_0|}$$

stetig mit $h(0, z) = z^n$ und $h(1, z) = f(z)$ für alle $z \in S^1$. Damit ist h eine Homotopie von $g : S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^n$ nach $f \circ \iota : S^1 \rightarrow S^1$. Das impliziert $\deg(f \circ \iota) = \deg(g) = n$, im Widerspruch zu $\deg(f \circ \iota) = 0$. □

Korollar 6.3.8 (Satz von Borsuk-Ulam für $d = 2$):

Ist $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig mit $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in S^2$, so hat f eine Nullstelle.

Beweis:

Angenommen f hat keine Nullstelle. Dann sind die Abbildungen

$$g : S^2 \rightarrow S^1, \quad x \mapsto \frac{f(x)}{\|f(x)\|}, \quad G : D^2 \rightarrow S^1, \quad z \mapsto g(z, \sqrt{1 - |z|^2})$$

stetig mit $g(-x) = -g(x)$ für alle $x \in S^2$ und $G \circ \iota' = g \circ \iota$, wobei $\iota : S^1 \rightarrow S^2, z \mapsto (z, 0)$ und $\iota' : S^1 \rightarrow D^2, z \mapsto z$ die Inklusionsabbildungen bezeichnen. Mit Korollar 6.3.6, 1. folgt $\deg(g \circ \iota) = 0$, aber nach Lemma 6.3.4, 4. ist $\deg(g \circ \iota)$ ungerade, ein Widerspruch. □

Korollar 6.3.9: Es gibt keine Einbettung $\iota : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Die topologischen Räume \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 sind nicht homöomorph.

Beweis:

Da für jeden Homöomorphismus $g' : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Einschränkung $g = g'|_{S^2} : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Einbettung ist, reicht es, zu zeigen, dass eine stetige Abbildung $g : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ nicht injektiv sein kann. Das folgt aus Korollar 6.3.8, denn die Abbildung $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto g(x) - g(-x)$ erfüllt die Bedingung $f(-x) = -f(x)$. Nach Korollar 6.3.8 gibt es damit einen Punkt $x \in S^2$ mit $f(x) = g(x) - g(-x) = 0$, und somit ist g nicht injektiv. □

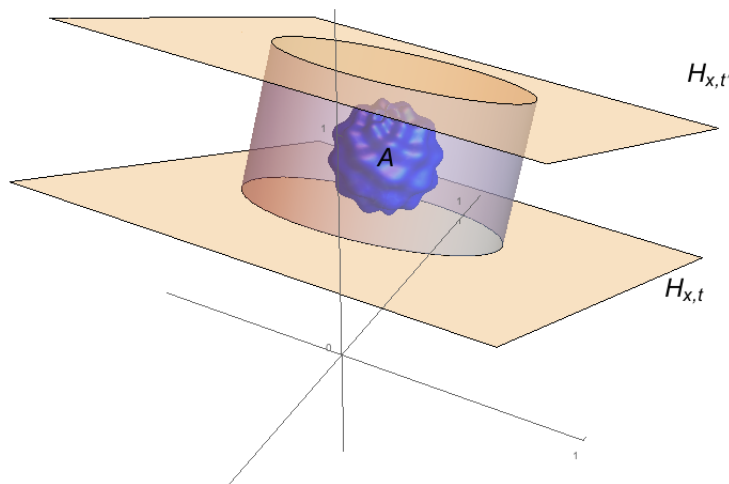
Eine weitere interessante Anwendung von Satz 6.3.5 ist der sogenannte Satz vom Schinkenbrot, der eine Antwort auf die folgende Frage gibt:

Ist es möglich ein Schinkenbrot, bestehend aus einer Brotscheibe, einem Aufstrich aus Butter und einem Belag aus Schinken, mit einem einzigen Schnitt so in zwei Teile zu schneiden, dass beide jeweils gleichviel Brot, Butter und Schinken enthalten?

Um diese Frage zu beantworten, interpretieren wir die Brotscheibe, den Aufstrich aus Butter und den Schinken jeweils als Teilmengen des \mathbb{R}^3 und modellieren den Schnitt, der das Schinkenbrot teilen soll, als eine affine Ebene im \mathbb{R}^3 . Den Ausdruck *gleichviel* interpretieren wir so, dass Brot, Butter und Schinken Lebesgue-messbare Teilmengen des \mathbb{R}^3 sein sollen, also etwa offen und beschränkt, und die zwei Teile jeweils das gleiche Volumen haben sollen. Die Antwort auf die Frage ist dann die folgende.

Korollar 6.3.10: (Der Satz vom Schinkenbrot)

Seien $A, B, C \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und beschränkt. Dann gibt es eine affine Ebene, die jede der drei Teilmengen A, B, C in zwei Teilmengen gleichen Volumens aufteilt.



Beweis:

Für $x \in S^2$ und $t \in \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $H_{x,t}$ die affine Ebene mit Normalenvektor x durch den Punkt tx und mit $H_{x,t}^+$ einen der zwei zugehörigen Halbräume:

$$H_{x,t} = \{y \in \mathbb{R}^3 : \langle y, x \rangle = t\}, \quad H_{x,t}^+ = \{y \in \mathbb{R}^3 : \langle y, x \rangle \geq t\},$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Skalarprodukt auf dem \mathbb{R}^3 bezeichnet. Für festes $x \in S^2$ betrachten wir die wegen der Messbarkeit von A wohldefinierte und monoton fallende Abbildung

$$a_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \text{vol}(A \cap H_{x,t}^+).$$

Da A beschränkt ist, gibt es ein $r > 0$ mit $\|a\| < r$ für alle $a \in A$, und es folgt $a_x(t) = 0$ für $t > r$ und $a_x(t) = \text{vol}(A)$ für $t < -r$. Die Abbildung a_x ist Lipschitzstetig, denn für $t < t'$ ist die Menge $A \cap (H_{x,t}^+ \setminus H_{x,t'}^+)$ in einem Zylinder mit Radius r und Höhe $t' - t$ enthalten, der von den parallelen affinen Ebenen $H_{x,t}$ und $H_{x,t'}$ begrenzt wird. Daraus folgt

$$|a_x(t) - a_x(t')| \leq \text{vol}(A \cap (H_{x,t}^+ \setminus H_{x,t'}^+)) \leq \pi r^2 |t - t'|.$$

Da a_x stetig und monoton ist, gilt $a_x^{-1}(\text{vol}(A)/2) = [t_1, t_2]$ mit $t_1 \leq t_2 \in \mathbb{R}$. Indem wir dann $t_A(x) =: (t_1 + t_2)/2$ setzen, erhalten wir eine stetige Abbildung $t_A : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto t_A(x)$ mit $t_A(-x) = -t_A(x)$, denn $a_{-x}(t) = \text{vol}(A) - a_x(-t)$ und somit $a_{-x}^{-1}(\text{vol}(A)/2) = -a_x^{-1}(\text{vol}(A)/2)$.

Analog erhalten wir lipschitzstetige Abbildungen $b_x, c_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und stetige Abbildungen $t_B, t_C : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ für die Mengen $B, C \subseteq \mathbb{R}^3$. Damit ist auch die Abbildung

$$f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto (t_B(x) - t_A(x), t_C(x) - t_A(x)).$$

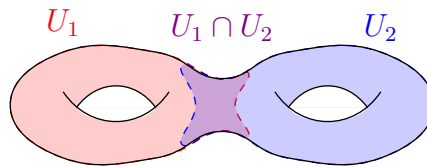
stetig und erfüllt die Bedingung $f(-x) = -f(x)$. Nach Korollar 6.3.8 gibt es damit einen Punkt $x \in S^2$ mit $f(x) = 0$. Für diesen gilt $t_A(x) = t_B(x) = t_C(x) =: t$ und $a_x(t) = \text{vol}(A)/2$, $b_x(t) = \text{vol}(B)/2$, $c_x(t) = \text{vol}(C)/2$. \square

Der Satz vom Schinkenbrot lässt sich nicht auf mehr als drei Mengen verallgemeinern. Dies sieht man, indem man zunächst drei offene und beschränkte Teilmengen $A, B, C \subseteq \mathbb{R}^3$ wählt, für die die affine Ebene $H_{x,t}$ eindeutig bestimmt ist. Beispielsweise kann man drei offene Bälle $A = B_1(0, 0, 0)$, $B = B_1(1, 0, 0)$ und $C = B_1(0, 1, 0)$ wählen, für die die affine Ebene $H_{x,t}$ die x_1x_2 -Ebene ist. Nun kann man eine vierte offene und beschränkte Menge so wählen, dass diese durch $H_{x,t}$ *nicht* in zwei Teile gleichen Volumens geteilt wird, etwa $D = B_1(0, 0, 1)$.

7 Der Satz von Seifert und van Kampen

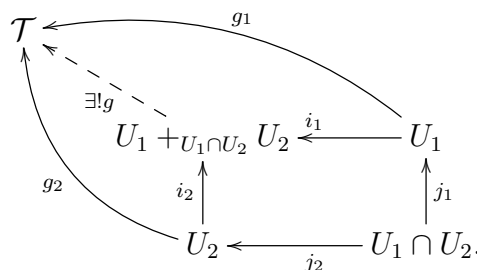
7.1 Der Satz von Seifert und van Kampen

In diesem Abschnitt beweisen wir den *Satz von Seifert und van Kampen*, mit dem wir Fundamentalgruppoiden und Fundamentalgruppen von topologischen Räumen explizit berechnen können. Dazu zerlegen wir den topologischen Raum (X, \mathcal{O}) in zwei überlappende Teilräume $U_1, U_2 \subseteq X$, deren Fundamentalgruppoiden und Fundamentalgruppen schon bekannt oder zumindest leicht zu berechnen sind. Das Fundamentalgruppoid $\Pi_1(X)$ lässt sich dann durch die Fundamentalgruppoiden $\Pi_1(U_1)$, $\Pi_1(U_2)$ und $\Pi_1(U_1 \cap U_2)$ charakterisieren. Dabei ist es wichtig, dass die Teilräume $U_1, U_2 \subseteq X$ offen gewählt werden und zusammen ganz X überdecken.



Um einen Zusammenhang zwischen den Fundamentalgruppoiden $\Pi_1(X)$, $\Pi_1(U_1)$, $\Pi_1(U_2)$ und $\Pi_1(U_1 \cap U_2)$ herzustellen, müssen wir zunächst den topologischen Raum (X, \mathcal{O}) durch die Teilräume $U_1 \cap U_2$, U_1 und U_2 beschreiben. Intuitiv erscheint es dabei naheliegend, die topologischen Räume U_1 und U_2 entlang des Schnitts $U_1 \cap U_2$ zu *verkleben* oder U_1 mit Hilfe einer Anheftungsabbildung $f : U_1 \cap U_2 \rightarrow U_2$ an U_2 anzuheften.

Da wir aber eine bezüglich U_1 und U_2 symmetrische Beschreibung wollen und keine konkrete Anheftungsabbildung bekannt ist, bietet es sich an, stattdessen mit dem allgemeineren Konzept des *Pushouts* zu arbeiten. Aus den gegebenen Daten erhalten wir nämlich Inklusionsabbildungen $i_k : U_k \rightarrow X$ und $j_k : U_1 \cap U_2 \rightarrow U_k$ für $k = 1, 2$, die es uns erlauben, den topologischen Raum X als Pushout $U_1 +_{U_1 \cap U_2} U_2 = U_1 + U_2 / \sim$ zu realisieren, wobei $\iota_1 \circ j_1(w) \sim \iota_2 \circ j_2(w)$ für alle $w \in U_1 \cap U_2$ und $\iota_k : U_k \rightarrow U_1 + U_2$ die Inklusionsabbildungen der topologischen Summe bezeichnen. Anschaulich bedeutet dies, dass wir die Punkte $x \in U_1 \cap U_2$ verdoppeln, wenn wir statt X die topologische Summe $U_1 + U_2$ betrachten. Um einen topologischen Raum zu erhalten, der homöomorph zu X ist, müssen wir also die zwei Punkte $\iota_1 \circ j_1(x)$ und $\iota_2 \circ j_1(x)$ in $U_1 + U_2$, die einem gegebenen Punkt $x \in U_1 \cap U_2$ entsprechen, identifizieren und erhalten das Pushout



Da Pushouts eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie sind, ist $U_1 +_{U_1 \cap U_2} U_2$ homöomorph zu X (Aufgabe 52). Damit ist es naheliegend, dass Anwendung des Funktors $\Pi_1 : \text{Top} \rightarrow \text{Grpd}$ auf dieses Pushout ein Pushout in der Kategorie Grpd der Gruppoide liefern sollte. Dies ist genau die Aussage des Satzes von Seifert und van Kampen in seiner Version für Fundamentalgruppoiden.

Satz 7.1.1 (Satz von Seifert und van Kampen): Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum, $U_1, U_2 \subseteq X$ offen mit $U_1 \cup U_2 = X$ und $i_k : U_k \rightarrow X$ und $j_k : U_1 \cap U_2 \rightarrow U_k$ die Inklusionsabbildungen. Dann ist das folgende Diagramm ein Pushout in der Kategorie der Gruppoide

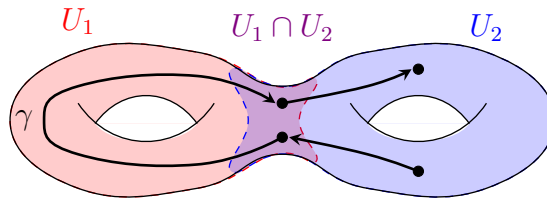
$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{T} & & \\
 \uparrow G_1 & \swarrow \exists! G & \\
 \Pi_1(X) & \xleftarrow{\Pi_1(i_1)} & \Pi_1(U_1) \\
 \uparrow \Pi_1(i_2) & & \uparrow \Pi_1(j_1) \\
 \Pi_1(U_2) & \xleftarrow{\Pi_1(j_2)} & \Pi_1(U_1 \cap U_2)
 \end{array}$$

Beweis:

1. Nach Satz 6.2.7 definieren die Inklusionsabbildungen $i_k : U_k \rightarrow X$, $j_k : U_1 \cap U_2 \rightarrow U_k$ Funktoren $\Pi_1(i_k) : \Pi_1(U_k) \rightarrow \Pi_1(X)$ und $\Pi_1(j_k) : \Pi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \Pi_1(U_k)$. Da die Inklusionsabbildungen die Bedingung $i_1 \circ j_1 = i_2 \circ j_2 : U_1 \cap U_2 \rightarrow X$ erfüllen, folgt dann mit Satz 6.2.7 $\Pi_1(i_1)\Pi_1(j_1) = \Pi_1(i_1 \circ j_1) = \Pi_1(i_2 \circ j_2) = \Pi_1(i_2)\Pi_1(j_2)$. Damit kommutiert das innere Viereck.

2. Sei nun \mathcal{T} ein Gruppoid und $G_k : \Pi_1(U_k) \rightarrow \mathcal{T}$ Funktoren mit $G_1\Pi_1(j_1) = G_2\Pi_1(j_2)$. Wir zeigen, dass dann ein eindeutig bestimmter Funktor $G : \Pi_1(X) \rightarrow \mathcal{T}$ mit $G\Pi_1(i_k) = G_k$ für $k = 1, 2$ existiert. Um G auf Objekten zu definieren, nutzen wir aus, dass $X = U_1 \cup U_2$ gilt und setzen $G(x) = G_k(x)$ für $x \in U_k$. Da $G_1\Pi_1(j_1) = G_2\Pi_1(j_2)$, folgt $G_1(x) = G_2(x)$ für alle $x \in U_1 \cap U_2$ und damit ist G auf Objekten wohldefiniert.

Um $G : \Pi_1(X) \rightarrow \mathcal{T}$ auf Morphismen zu definieren, zeigen wir zuerst dass G durch die universelle Eigenschaft im Diagramm eindeutig bestimmt ist. Dazu betrachten wir einen Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$, unterteilen ihn in Wegstücke, die ganz in U_1 oder U_2 liegen und ordnen diesen Wegstücken die Bilder unter den Funktoren G_1 und G_2 zu.



Da $\gamma^{-1}(U_1)$ und $\gamma^{-1}(U_2)$ eine offene Überdeckung von $[0, 1]$ bilden, gibt es nach dem Lemma von Lebesgue (Lemma 4.2.7) eine Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$ von $[0, 1]$, so dass $[t_{i-1}, t_i] \subset \gamma^{-1}(U_{k_i})$ mit $k_i \in \{1, 2\}$. Indem wir Homöomorphismen $\tau_i : [0, 1] \rightarrow [t_{i-1}, t_i]$ mit $\tau_i(0) = t_{i-1}$ und $\tau_i(1) = t_i$, wählen, erhalten wir Wege

$$\gamma_i : [0, 1] \rightarrow U_{k_i}, t \mapsto \gamma(\tau_i(t)) \quad \gamma'_i = i_{k_i} \circ \gamma_i : [0, 1] \rightarrow X, t \mapsto \gamma(\tau_i(t))$$

mit $[\gamma] = [\gamma'_n] \circ \dots \circ [\gamma'_1]$. Erfüllt G die Bedingung $G\Pi_1(i_k) = G_k$ für $k = 1, 2$, so folgt

$$\begin{aligned}
 G([\gamma'_i]) &= G([i_{k_i} \circ \gamma_i]) = G\Pi_1(i_{k_i})([\gamma_i]) = G_{k_i}([\gamma_i]), \\
 G([\gamma]) &= G([\gamma'_n]) \circ \dots \circ G([\gamma'_1]) = G_{k_n}([\gamma_n]) \circ \dots \circ G_{k_1}([\gamma_1]),
 \end{aligned} \tag{15}$$

und das bestimmt den Funktor $G : \Pi_1(X) \rightarrow \mathcal{T}$ eindeutig.

3. Um die Existenz von G zu beweisen, definieren wir G über (15) und zeigen, dass der resultierende Morphismus $G([\gamma])$ weder von (i) der Wahl der Homöomorphismen $\tau_i : [0, 1] \rightarrow [t_{i-1}, t_i]$

noch (ii) der Wahl der Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ abhängt, sondern nur (iii) von der Homotopieklasse von γ .

(i) Die Unabhängigkeit von der Wahl der Homöomorphismen τ_i folgt, da jede andere Wahl der Homöomorphismen τ_i Wege liefert, die nach Bemerkung 6.2.2 homotop zu den Wegen γ_i sind.

(ii) Unabhängigkeit von der Wahl der Unterteilung folgt, da zwei endliche Unterteilungen von $[0, 1]$ immer eine gemeinsame Verfeinerung haben. Die Identitäten

$$G_1([j_1 \circ \delta]) = G_1\Pi_1(j_1)([\delta]) = G_2\Pi_2(j_2)([\delta]) = G_2([j_2 \circ \delta]) \quad \text{für alle Wege } \delta : [0, 1] \rightarrow U_1 \cap U_2$$

$$G_{k_i}([\gamma'_i]) \circ G_{k_{i-1}}([\gamma'_{i-1}]) = G_{k_i}([\gamma'_i] \circ [\gamma'_{i-1}]) \quad \text{für } k_i = k_{i-1},$$

die sich aus der Kommutativität des inneren Vierecks im Diagramm ergeben und der Tatsache, dass G_1, G_2 Funktoren sind, garantieren dann, dass die Morphismen auf der rechten Seite in (15) für die zwei Unterteilungen übereinstimmen.

(iii) Zu zeigen ist noch, dass der Morphismus $G([\gamma])$ in (15) tatsächlich nur von der Homotopieklasse $[\gamma]$ abhängt. Seien dazu $\gamma, \delta : [0, 1] \rightarrow X$ Wege mit $\gamma(0) = \delta(0) = p$, $\gamma(1) = \delta(1) = q$ und $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ eine Homotopie von γ nach δ mit festen Endpunkten:

$$h(0, t) = \gamma(t), \quad h(1, t) = \delta(t), \quad h(s, 0) = p, \quad h(s, 1) = q \quad \forall s, t \in [0, 1].$$

Da h stetig ist, bilden $h^{-1}(U_1)$ und $h^{-1}(U_2)$ eine offene Überdeckung des Kompaktums $[0, 1]^{\times 2}$, und nach dem Lemma von Lebesgue gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ so dass alle Quadrate

$$S_{ij} = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \times \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right] \quad \text{für } i, j \in \{1, \dots, n\}$$

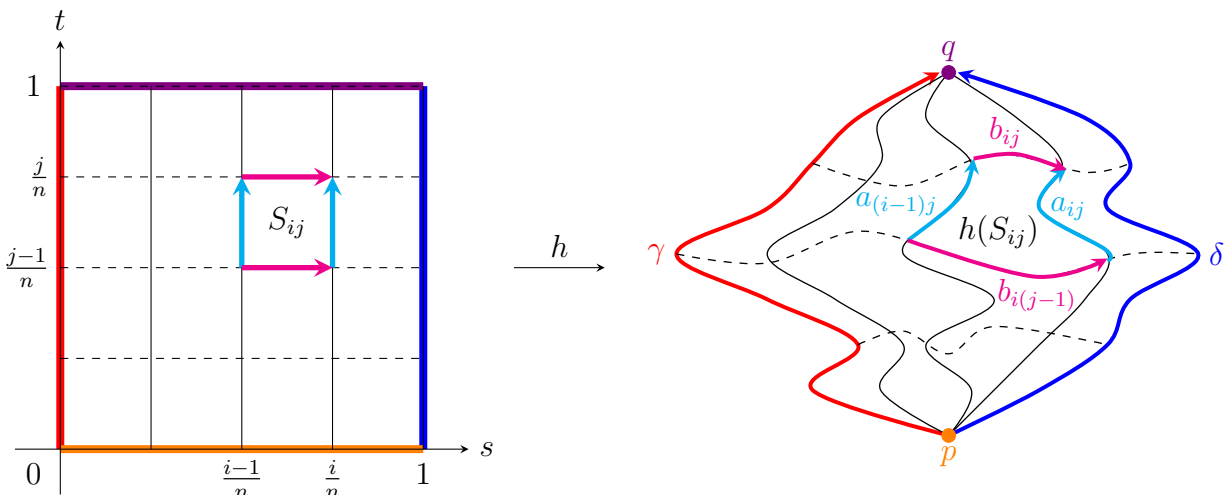
in einer der Mengen $h^{-1}(U_1)$ oder $h^{-1}(U_2)$ enthalten sind. Wir wählen Homöomorphismen $\tau_i : [0, 1] \rightarrow \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ mit $\tau_i(0) = \frac{i-1}{n}$ und $\tau_i(1) = \frac{i}{n}$ und betrachten die Wege

$$a_{ij} : [0, 1] \rightarrow U_{k_{ij}} \cap U_{k_{(i+1)j}}, \quad t \mapsto h\left(\frac{i}{n}, \tau_j(t)\right) \quad \text{für } i, j \in \{0, \dots, n\}$$

$$b_{ij} : [0, 1] \rightarrow U_{k_{ij}} \cap U_{k_{i(j+1)}}, \quad t \mapsto h\left(\tau_i(t), \frac{j}{n}\right),$$

die entlang der Ränder der Bilder $h(S_{ij})$ verlaufen:

$$a_{ij}([0, 1]) \subseteq h(S_{ij} \cap S_{(i+1)j}) \quad b_{ij}([0, 1]) \subseteq h(S_{ij} \cap S_{i(j+1)}).$$



Wir betrachten nun die zwei Wege von $(0, 0)$ nach $(1, 1)$ im Rand von $[0, 1] \times [0, 1]$, ihre Bilder unter h , und die Homotopieklassen der Wege γ, δ , die gegeben sind durch

$$[\gamma] = [a_{0n}] \circ \dots \circ [a_{01}], \quad [\delta] = [a_{nn}] \circ \dots \circ [a_{n1}].$$

Da h eine Homotopie mit festen Endpunkten ist, gilt $b_{j0}(t) = p, b_{jn}(t) = q$ für alle $j \in \{0, \dots, n\}, t \in [0, 1]$, und die Homotopieklassen der Bilder der Wege entlang des oberen und unteren Randes von $[0, 1] \times [0, 1]$ sind trivial:

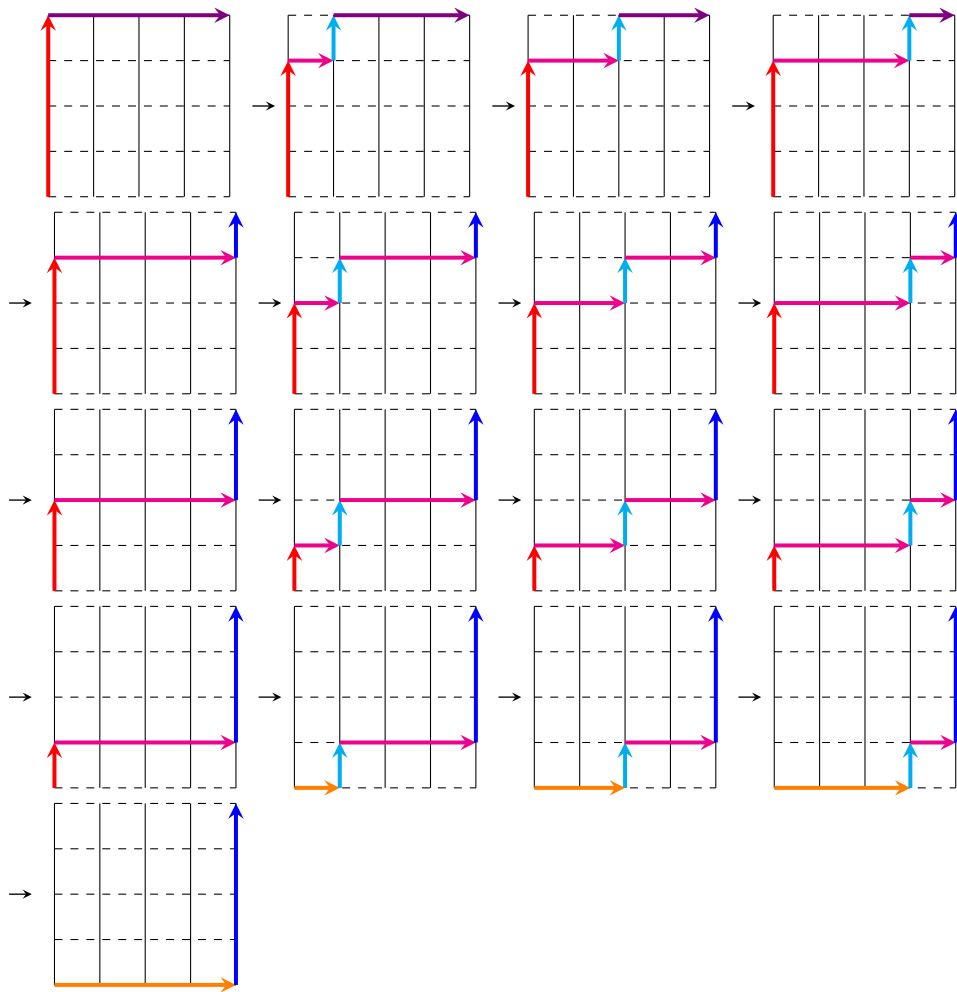
$$[\gamma_q] = [b_{nn}] \circ \dots \circ [b_{1n}], \quad [\gamma_p] = [b_{n0}] \circ \dots \circ [b_{10}].$$

Mit (15) berechnen wir dann

$$\begin{aligned} G([\gamma]) &= G([a_{0n}] \circ \dots \circ [a_{01}]) = 1_{G(q)} \circ G([a_{0n}] \circ \dots \circ [a_{01}]) = G([\gamma_q]) \circ G([a_{0n}] \circ \dots \circ [a_{01}]) \\ &= G_{k_{nn}}([b_{nn}]) \circ \dots \circ G_{k_{1n}}([b_{1n}]) \circ G_{k_{0n}}([a_{0n}]) \circ \dots \circ G_{k_{01}}([a_{01}]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G([\delta]) &= G([a_{nn}] \circ \dots \circ [a_{n1}]) = G([a_{nn}] \circ \dots \circ [a_{n1}]) \circ 1_{G(p)} = G([a_{nn}] \circ \dots \circ [a_{n1}]) \circ G([\gamma_p]) \\ &= G_{k_{nn}}([a_{nn}]) \circ \dots \circ G_{k_{n1}}([a_{n1}]) \circ G_{k_{n0}}([b_{n0}]) \circ \dots \circ G_{k_{10}}([b_{10}]). \end{aligned}$$

Die Wege in X , die zu den letzten zwei Ausdrücken für $G([\gamma])$ und $G([\delta])$ gehören, können nun nach dem folgenden Schema ineinander umgeformt werden:



Wir zeigen, dass diese Umformungen die rechte Seite von (15) und damit den Wert von $G([\gamma])$ und $G([\delta])$ nicht ändern.

Da $S_{ij} \subseteq [0, 1] \times [0, 1]$ konvex ist und $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ stetig, gilt nach Beispiel 6.1.2, 3.

$$[a_{ij}] \circ [b_{i(j-1)}] = [b_{ij}] \circ [a_{(i-1)j}] \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Da $G_1 \Pi_1(j_1) = G_2 \Pi_1(j_2)$ gilt außerdem für alle $i, j \in \{0, \dots, n-1\}$

$$G_{k_{ij}}([a_{ij}]) = G_{k_{(i+1)j}}([a_{ij}]), \quad G_{k_{ij}}([b_{ij}]) = G_{k_{i(j+1)}}([b_{ij}]).$$

Mit der Notation $A_{i,j} := G_{k_{ij}}([a_{ij}])$ und $B_{i,j} := G_{k_{ij}}([b_{ij}])$, erhalten wir dann durch Kombinieren dieser zwei Identitäten die Gleichung $A_{i,j} \circ B_{i,j-1} = B_{i,j} \circ A_{i-1,j}$. Durch wiederholte Anwendung dieser Gleichung ergibt sich dann

$$\begin{aligned} G([\gamma]) &= B_{n,n} \circ \dots \circ B_{1,n} \circ A_{0,n} \circ \dots \circ A_{0,1} \\ &= B_{n,n} \circ \dots \circ B_{2,n} \circ A_{1,n} \circ B_{1,n-1} \circ A_{0,n-1} \circ \dots \circ A_{0,1} \\ &= B_{n,n} \circ \dots \circ B_{2,n} \circ A_{1,n} \circ A_{1,n-1} \circ B_{1,n-2} \circ A_{0,n-2} \circ \dots \circ A_{0,1} \\ &= \dots = B_{n,n} \circ \dots \circ B_{2,n} \circ A_{1,n} \circ \dots \circ A_{1,1} \circ B_{1,0} \\ &= B_{n,n} \circ \dots \circ B_{3,n} \circ A_{2,n} \circ B_{2,n-1} \circ A_{1,n-1} \circ \dots \circ A_{1,1} \circ B_{1,0} \\ &= \dots = B_{n,n} \circ \dots \circ B_{3,n} \circ A_{2,n} \circ \dots \circ A_{2,1} \circ B_{2,0} \circ B_{1,0} \\ &= \dots = A_{n,n} \circ \dots \circ A_{n,1} \circ B_{n,0} \circ \dots \circ B_{1,0} \\ &= G([\delta]). \end{aligned}$$

Das zeigt, dass die rechte Seite von (15) nur von der Homotopieklasse von γ abhängt. \square

Satz 7.1.1 charakterisiert das Fundamentalgruppoid $\Pi_1(X)$ eindeutig durch eine universelle Eigenschaft, nämlich als Pushout entlang der Funktoren $\Pi_1(j_k) : \Pi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \Pi_1(U_k)$. Es liefert aber noch keinen effizienten Weg zu dessen Berechnung. Dies liegt daran, dass das Fundamentalgruppoid $\Pi_1(X)$ zu viele Objekte und dadurch viel überflüssige Information enthält.

Denn prinzipiell interessiert man sich vor allem für die *Isomorphieklassen* von Objekten in $\Pi_1(X)$ und für die Morphismenmengen $\text{Hom}_{\Pi_1(X)}(x, y)$. Da auch die Morphismenmengen $\text{Hom}_{\Pi_1(X)}(x, y)$ und $\text{Hom}_{\Pi_1(X)}(x', y')$ in Bijektion stehen, sobald es Morphismen von x nach x' und y nach y' gibt, liegt es nahe, nur ein Objekt in jeder Isomorphieklasse in $\Pi_1(X)$ zu betrachten, also in jeder Wegzusammenhangskomponente von X . Indem man diese Prozedur auf die Fundamentalgruppoiden $\Pi_1(X)$, $\Pi_1(U_1)$, $\Pi_1(U_2)$ und $\Pi_1(U_1 \cap U_2)$ in Satz 7.1.1 anwendet, erhält man dann die folgende reduzierte Version dieses Satzes.

Satz 7.1.2: Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum und $A, U_1, U_2 \subseteq X$ Teilräume, so dass U_1, U_2 offen sind, $U_1 \cup U_2 = X$ und jede Wegzusammenhangskomponente von $U_1, U_2, U_1 \cap U_2$ einen Punkt in A enthält. Dann erhält man ein Pushout in der Kategorie der Gruppoiden:

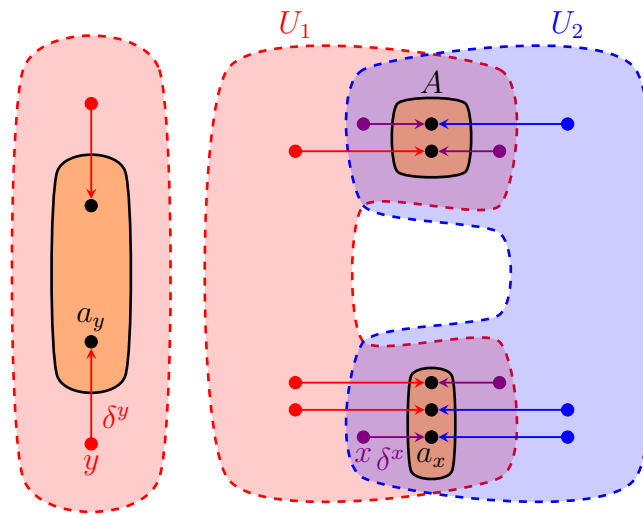
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T} & \xleftarrow{G_1} & \Pi_1^A(U_1) \\ & \swarrow \exists! G & \uparrow \Pi_1^A(j_1) \\ & \Pi_1^A(X) & \xleftarrow{\Pi_1^A(i_1)} \Pi_1^A(U_1) \\ & \uparrow \Pi_1^A(i_2) & \uparrow \Pi_1^A(j_1) \\ \mathcal{T} & \xleftarrow{G_2} & \Pi_1^A(U_2) \xleftarrow{\Pi_1^A(j_2)} \Pi_1^A(U_1 \cap U_2) \end{array}$$

wobei $\Pi_1^A(V)$ für $V \subseteq X$ die volle Unterkategorie von $\Pi_1(V)$ mit Objekten in $A \cap V$ bezeichnet.

Beweis:

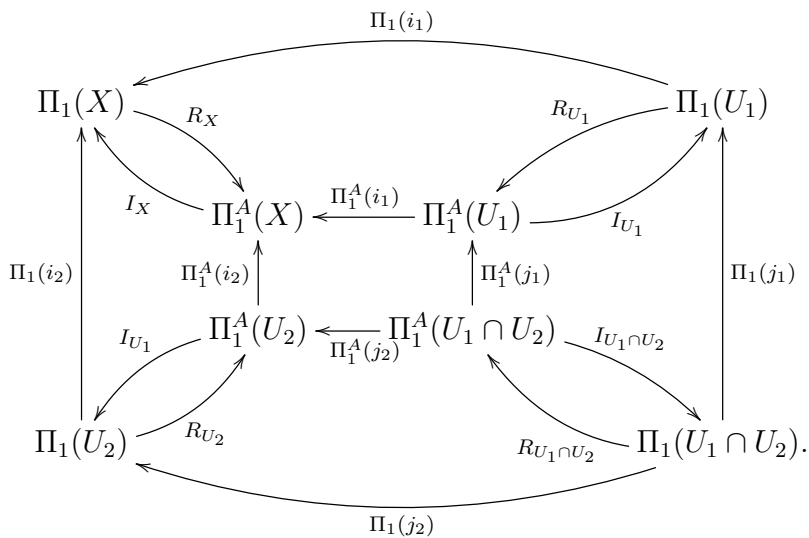
Für $V = U_1 \cap U_2, U_1, U_2$ bezeichnen wir mit $I_V : \Pi_1^A(V) \rightarrow \Pi_1(V)$ die Inklusionsfunktoren, die alle Objekte und Morphismen in $\Pi_1^A(V)$ auf sich selbst abbilden. Wir konstruieren Retraktionsfunktoren $R_V : \Pi_1(V) \rightarrow \Pi_1^A(V)$ mit $R_V I_V = \text{id}_{\Pi_1^A(V)}$ und natürliche Isomorphismen $I_V R_V \rightarrow \text{id}_V$.

Dazu wählen wir zuerst zu jedem Punkt $x \in U_1 \cap U_2$ einen Punkt $a_x \in A \cap U_1 \cap U_2$ und einen Weg $\delta^x : [0, 1] \rightarrow U_1 \cap U_2$ von x nach a_x , so dass $a_b = b$ und $\delta^b = \gamma_b$ der triviale Weg auf b ist für jeden Punkt $b \in U_1 \cap U_2 \cap A$. Anschließend wählen wir zu jedem Punkt $x \in U_k \setminus (U_1 \cap U_2)$ einen Punkt $a_x \in A \cap U_k$ und einen Weg $\delta^x : [0, 1] \rightarrow U_k$ von x nach a_x , so dass $a_b = b$ und $\delta^b = \gamma_b$ der triviale Weg auf b ist für jeden Punkt $b \in U_k \cap A$.



Damit erhalten wir Funktoren $R_V : \Pi_1(V) \rightarrow \Pi_1^A(V)$ für $V = U_1 \cap U_2, U_1, U_2, X$, die einem Punkt $x \in V$ den Punkt $a_x \in A \cap V$ und einem Morphismus $[\gamma] : x \rightarrow y$ in $\Pi_1(V)$ den Morphismus $[\delta^y] \circ [\gamma] \circ [\delta^x]^{-1} : a_x \rightarrow a_y$ in $\Pi_1^A(V)$ zuordnen.

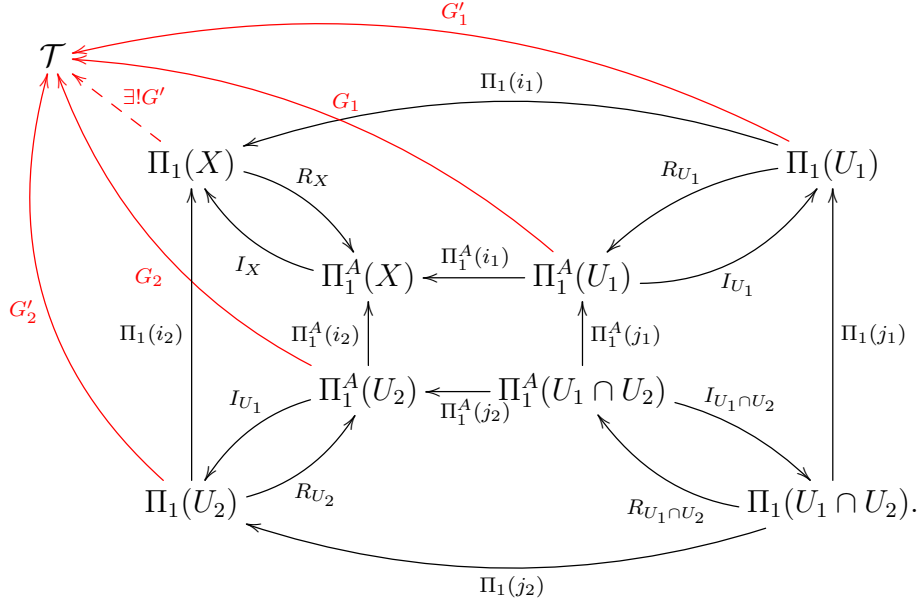
Da wir $a_b = b$ und $\delta^b = \gamma_b$ für alle $b \in A \cap V$ gewählt haben, erfüllen diese Funktoren die Bedingung $R_V I_V = \text{id}_{\Pi_1^A(V)}$. Da wir die Wege δ^x für Punkte in $x \in V = U_1, U_2, U_1 \cap U_2$ so gewählt haben, dass sie in V verlaufen, kommutieren alle Vierecke in dem folgenden Diagramm



Wir weisen jetzt die universelle Eigenschaft des Pushouts nach, indem wir sie mit Hilfe dieses Diagramms auf die universelle Eigenschaft des Pushouts in Satz 7.1.1 zurückführen. Seien dazu $G_k : \Pi_1^A(U_k) \rightarrow \mathcal{T}$ Funktoren mit $G_1 \Pi_1^A(j_1) = G_2 \Pi_1^A(j_2)$.

Dann erhalten wir Funktoren $G'_k = G_k R_{U_k} : \Pi_1(U_k) \rightarrow \mathcal{T}$ mit

$$G'_1 \Pi_1(j_1) = G_1 R_{U_1} \Pi_1(j_1) = G_1 \Pi_1^A(j_1) R_{U_1 \cap U_2} = G_2 \Pi_1^A(j_2) R_{U_1 \cap U_2} = G_2 R_{U_2} \Pi_1(j_2) = G'_2 \Pi_1(j_2).$$



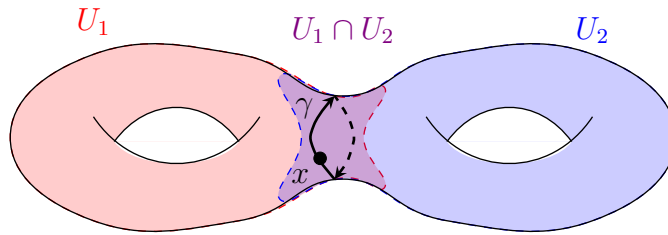
Nach Satz 7.1.1 gibt es dann zu den Funktoren $G'_k = G_k R_{U_k} : \Pi_1(U_k) \rightarrow \mathcal{T}$ einen eindeutig bestimmten Funktor $G' : \Pi_1(X) \rightarrow \mathcal{T}$ mit $G' \Pi_1(i_k) = G'_k$. Verkettung mit dem Inklusionsfunctor $I_X : \Pi_1^A(X) \rightarrow \Pi_1(X)$ liefert dann einen Funktor $G = G' I_X : \Pi_1^A(X) \rightarrow \mathcal{T}$ mit

$$G \Pi_1^A(i_k) = G' I_X \Pi_1^A(i_k) = G' \Pi_1(i_k) I_{U_k} = G'_k I_{U_k} = G_k R_{U_k} I_{U_k} = G_k.$$

Ist $F : \Pi_1^A(X) \rightarrow \mathcal{T}$ ein weiterer Funktor mit $F \Pi_1^A(i_k) = G_k$, so erhalten wir einen Funktor $F' := F R_X : \Pi_1(X) \rightarrow \mathcal{T}$ mit $F' \Pi_1(i_k) = F R_X \Pi_1(i_k) = F \Pi_1^A(i_k) R_{U_k} = G_k R_{U_k} = G'_k$. Aus der universellen Eigenschaft des Pushouts aus Satz 7.1.1 folgt dann $G' = F'$ und $G = G' I_X = F' I_X = F R_X I_X = F$. \square

Mit dieser reduzierten Version des Satzes von Seifert und van Kampen können wir Fundamentalgroupoide und Fundamentalgruppen von topologischen Räumen explizit berechnen. Dies wird besonders einfach, wenn die Teilräume U_1 , U_2 und ihr Schnitt $U_1 \cap U_2$ wegzusammenhängend sind. In diesem Fall kann man die Teilmenge $A = \{x\} \subseteq X$ für einen Punkt $x \in U_1 \cap U_2$ wählen.

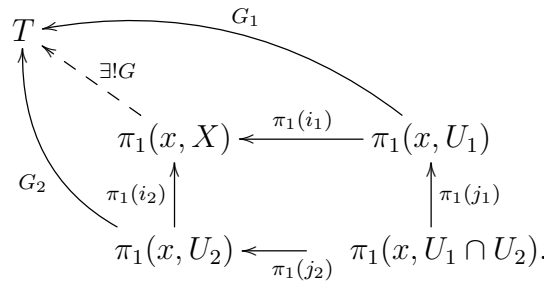
Die Fundamentalgroupoide $\Pi_1^A(V)$ in Satz 7.1.2 werden dann zu Fundamentalgruppen $\pi_1(x, V)$, die Funktoren $\Pi_1^A(f) : \Pi_1^A(V) \rightarrow \Pi_1^A(V')$ zu Gruppenhomomorphismen $\pi_1(f) : \pi_1(x, V) \rightarrow \pi_1(x, V')$, und das Pushout in der Kategorie Grpd wird ein Pushout in Grp. Da Pushouts in Grp nach Proposition 5.3.13 als Quotienten eines freien Produkts von Gruppen bezüglich normaler Untergruppen gegeben sind, erhalten wir dann das folgende Korollar.



Korollar 7.1.3 (Satz von Seifert und van Kampen für Fundamentalgruppen):

Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum, $U_1, U_2 \subseteq X$ offen mit $X = U_1 \cup U_2$ und Inklusionsabbildungen $i_k : U_k \rightarrow X$ und $j_k : U_1 \cap U_2 \rightarrow U_k$.

Sind U_1, U_2 und $U_1 \cap U_2$ wegzusammenhängend, so ist für alle Punkte $x \in U_1 \cap U_2$ das folgende Diagramm ein Pushout in der Kategorie Grp



Bezeichnen wir mit $\iota_k : \pi_1(x, U_k) \rightarrow \pi_1(x, U_1) \star \pi_1(x, U_2)$ die Inklusionsabbildungen für das freie Produkt, so folgt daraus für alle $x \in U_1 \cap U_2$

$$\pi_1(x, X) \cong \frac{\pi_1(x, U_1) \star \pi_1(x, U_2)}{N} \quad N = \langle \iota_1 \circ \pi_1(j_1)([\gamma]) \cdot \iota_2 \circ \pi_1(j_2)([\gamma]^{-1}) : [\gamma] \in \pi_1(x, U_1 \cap U_2) \rangle.$$

Eine weitere Vereinfachung ergibt sich aus Korollar 7.1.3, wenn der Teilraum $U_1 \cap U_2$ nicht nur wegzusammenhängend sondern sogar 1-zusammenhängend ist. Dann ist $\pi_1(x, U_1 \cap U_2) = \{e\}$ und damit auch die normale Untergruppe $N \subseteq \pi_1(x, U_1) \star \pi_1(x, U_2)$ trivial.

Korollar 7.1.4: Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum, $U_1, U_2 \subseteq X$ offen mit $X = U_1 \cup U_2$. Sind U_1, U_2 wegzusammenhängend und $U_1 \cap U_2$ 1-zusammenhängend, so gilt für alle $x \in U_1 \cap U_2$

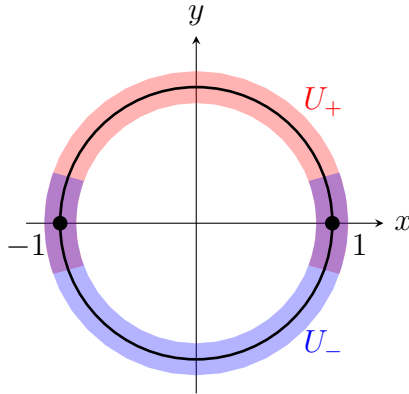
$$\pi_1(x, X) = \pi_1(x, U_1) \star \pi_1(x, U_2).$$

7.2 Berechnung von Fundamentalgruppen

Wir berechnen nun mit Hilfe von Satz 7.1.2 und Korollaren 7.1.3 und 7.1.4 die Fundamentalgruppoiden und Fundamentalgruppen von bekannten topologischen Räumen. Zunächst benutzen wir die Gruppoid-Version des Satzes von Seifert und van Kampen, um die Fundamentalgruppe des Kreises ohne Benutzung des Abbildungsgrads und von Hochhebungen zu bestimmen.

Beispiel 7.2.1: (Fundamentalgruppe des Kreises)

Wir betrachten $X = S^1$ und für ein $\epsilon \in (0, 1)$ die Teilmengen $U_{\pm} = \{z \in S^1 : \mp \text{Im}(z) < \epsilon\}$.



Dann sind die Teilräume U_{\pm} 1-zusammenhängend, und $U_+ \cap U_- = B_{\epsilon}(1) \cup B_{\epsilon}(-1)$ hat zwei kontrahierbare Wegzusammenhangskomponenten $B_{\epsilon}(\pm 1)$. Daher können wir $A = \{\pm 1\}$ in Satz 7.1.2 wählen und erhalten die folgenden Gruppoide:

- $\Pi_1^A(U_1 \cap U_2)$ hat zwei Objekte, ± 1 , und die zwei Morphismen $1_{\pm 1} : \pm 1 \rightarrow \pm 1$. Diese sind gerade die Homotopieklassen der trivialen Wege.
- $\Pi_1^A(U_{\pm})$ hat zwei Objekte, ± 1 , die zwei Identitätsmorphismen $1_{\pm 1} : \pm 1 \rightarrow \pm 1$, einen Isomorphismus $\alpha_{\pm} : 1 \rightarrow -1$ und sein Inverses $\alpha_{\pm}^{-1} : -1 \rightarrow 1$. Dabei entsprechen $1_{\pm 1}$ wieder den Homotopieklassen der trivialen Wege und α_{\pm} der Homotopieklasse eines Weges in U_{\pm} von 1 nach -1. Da die Räume U_{\pm} kontrahierbar sind, gibt es nur eine solche Homotopieklasse.
- $\Pi_1^A(S^1)$ hat zwei Objekte, ± 1 , die zwei Identitätsmorphismen $1_{\pm 1} : \pm 1 \rightarrow \pm 1$ und weitere Morphismen, die aus dem Pushout bestimmt werden sollen.

Die Funktoren aus Satz 7.1.2 sind die folgenden:

- Die Funktoren $\Pi_1^A(j_{\pm}) : \Pi_1^A(U_+ \cap U_-) \rightarrow \Pi_1^A(U_{\pm})$ bilden die Objekte ± 1 und Identitätsmorphismen $1_{\pm 1}$ in $\Pi_1^A(U_+ \cap U_-)$ auf die Objekte ± 1 und die Identitätsmorphismen $1_{\pm 1}$ in $\Pi_1^A(U_{\pm})$ ab.
- Die Funktoren $\Pi_1^A(i_{\pm}) : \Pi_1^A(U_{\pm}) \rightarrow \Pi_1^A(S^1)$ bilden die Objekte ± 1 und Identitätsmorphismen $1_{\pm 1}$ in $\Pi_1^A(U_{\pm})$ auf die Objekte ± 1 und die Morphismen $1_{\pm 1}$ in $\Pi_1^A(S^1)$ ab, und die Morphismen $\alpha_{\pm} : 1 \rightarrow -1$ auf Morphismen $\beta_{\pm} := \Pi_1^A(i_{\pm})(\alpha_{\pm}) : 1 \rightarrow -1$.

Die Bedingung, dass ein Pushout vorliegt, besagt, dass für zwei Funktoren $G_{\pm} : \Pi_1^A(U_{\pm}) \rightarrow \mathcal{T}$ in ein Gruppoid \mathcal{T} mit $G_+ \Pi_1^A(j_+) = G_- \Pi_1^A(j_-)$ genau ein Funktor $G : \Pi_1^A(S^1) \rightarrow \mathcal{T}$ mit $G_{\pm} = G \Pi_1^A(i_{\pm})$ existiert.

Funktoren $G_{\pm} : \Pi_1^A(U_{\pm}) \rightarrow \mathcal{T}$ in ein Gruppoid \mathcal{T} mit $G_+ \Pi_1^A(j_+) = G_- \Pi_1^A(j_-)$ entsprechen der Wahl von zwei Objekten $G_+(1) = G_-(1)$ und $G_+(-1) = G_-(-1)$ in \mathcal{T} .

Aus den Bedingungen $G_{\pm} = G \Pi_1^A(i_{\pm})$ folgt $G(1_{\pm}) = G_{\pm}(1_{\pm}) = 1_{G_{\pm}(\pm 1)}$ und $G(\beta_{\pm}) = G_{\pm}(\alpha_{\pm})$. Die Forderung, dass *maximal ein* solcher Funktor G existiert, besagt, dass G durch die Bilder $G(\beta_{\pm}) = G_{\pm}(\alpha_{\pm})$ eindeutig bestimmt ist, also dass sich jeder Morphismus in $\Pi_1^A(S^1)$ durch Verkettungen der Morphismen β_{\pm} und ihrer Inversen ergibt.

Die Forderung, dass *mindestens ein* solcher Funktor G existiert, besagt, dass es zwischen den Morphismen β_+ und β_- in $\Pi_1^A(S^1)$ keine weiteren Relationen geben darf. Denn zu $a, b \in \mathbb{Z}$ und dem Gruppoid $\mathcal{T} = B\mathbb{Z}$ mit einem Objekt kann man Funktoren $G_\pm : \Pi_1^A(U_\pm) \rightarrow B\mathbb{Z}$ mit $G_\pm(1_{\pm 1}) = 0$ und $G_+(\alpha_+) = a$ und $G_-(\alpha_-) = b$ wählen, die die Bedingung $G_+\Pi_1^A(j_+) = G_-\Pi_1^A(j_-)$ immer erfüllen. Aus $G_\pm = G\Pi_1^A(i_\pm)$ folgt dann $G(\beta_+) = a$, $G(\beta_-) = b$, und jede Relation zwischen β_+ und β_- würde eine Relation zwischen a und b erzwingen.

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\Pi_1^A(S^1)}(1, 1) &= \{(\beta_-^{-1}\beta_+)^n : n \in \mathbb{Z}\} & \text{Hom}_{\Pi_1^A(S^1)}(-1, -1) &= \{(\beta_+\beta_-^{-1})^n : n \in \mathbb{Z}\} \\ \text{Hom}_{\Pi_1^A(S^1)}(1, -1) &= \{(\beta_+\beta_-^{-1})^n\beta_+ : n \in \mathbb{Z}\} & \text{Hom}_{\Pi_1^A(S^1)}(-1, 1) &= \{\beta_+^{-1}(\beta_+\beta_-^{-1})^n : n \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Insbesondere folgt $\pi_1(1, S^1) \cong \pi_1(-1, S^1) \cong \mathbb{Z}$.

Beispiel 7.2.1 zeigt, dass die Gruppoid-Version des Satzes von Seifert und van Kampen flexibler und allgemeiner ist als seine Formulierung mit Gruppen in Korollar 7.1.3. Denn in Beispiel 7.2.1 kann man $U_1 \cap U_2$ nicht wegzusammenhängend wählen, und damit ist Korollar 7.1.3 nicht anwendbar. Für die Sphären höherer Dimension ergibt sich dieses Problem nicht. Ihre Fundamentalgruppen können direkt mit Korollar 7.1.3 berechnet werden.

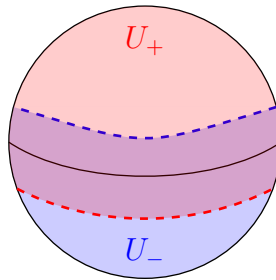
Beispiel 7.2.2: Für $n \geq 2$ ist die Fundamentalgruppe der n -Sphäre S^n trivial: $\pi_1(S^n) = \{e\}$.

Beweis:

Denn ist $\epsilon \in (0, 1)$, so sind die Mengen $U_\pm = \{x \in S^n : \mp x_{n+1} < \epsilon\}$ offen und $S^n = U_+ \cup U_-$ mit U_\pm , $U_+ \cap U_-$ wegzusammenhängend. Da U_\pm homotopieäquivalent zur n -Scheibe D^n und damit zu einem Einpunktraum ist, gilt $\pi_1(U_\pm) = \{e\}$, und mit Korollar 7.1.3 folgt

$$\pi_1(S^n) \cong \pi_1(D^n) \star \pi_1(D^n) = \{e\}.$$

□



Unsere nächsten Beispiele zeigen, dass auch der besonders einfache Spezialfall in Korollar 7.1.4 sehr viele Anwendungen hat, insbesondere beim Anheften von n -Zellen.

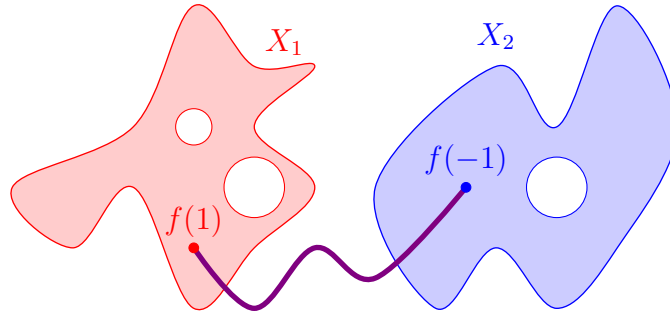
Beispiel 7.2.3: (Anheften einer 1-Zelle an eine topologische Summe)

Seien (X_1, \mathcal{O}_1) , (X_2, \mathcal{O}_2) zwei wegzusammenhängende topologische Räume und

$$Y = [-1, 1] +_f (X_1 + X_2)$$

entstehe durch Anheften der 1-Zelle $[-1, 1]$ an die Summe $X_1 + X_2$ mit einer Anheftungsabbildung $f : \{\pm 1\} \rightarrow X_1 + X_2$, so dass $f(1) \in \iota_1(X_1)$ und $f(-1) \in \iota_2(X_2)$. Dann ist

$$\pi_1(Y) \cong \pi_1(X_1) \star \pi_1(X_2).$$



Beweis:

Wir bezeichnen die Inklusionsabbildungen für die topologischen Summen mit

$$\iota_k : X_k \rightarrow X_1 + X_2, \quad \iota_{12} : X_1 + X_2 \rightarrow [-1, 1] + (X_1 + X_2), \quad \iota : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1] + (X_1 + X_2)$$

und mit $\pi : [-1, 1] + (X_1 + X_2) \rightarrow Y$ die kanonische Surjektion. Wir betrachten die Teilmengen

$$U_k = \pi \circ \iota([-1, 1]) \cup \pi \circ \iota_{12} \circ \iota_k(X_k) \subseteq Y$$

mit $U_1 \cup U_2 = Y$. Nach Bemerkung 3.4.5 sind die Mengen $U_k \subseteq Y$ offen, da

$$\pi^{-1}(U_1) = \iota([-1, 1]) \cup \iota_{12} \circ \iota_1(X_1) \quad \pi^{-1}(U_2) = \iota([-1, 1]) \cup \iota_{12} \circ \iota_2(X_2)$$

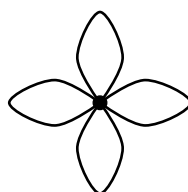
und $(-1, 1], [-1, 1) \subseteq [-1, 1]$ und $X_k \subseteq X_1 + X_2$ offen sind. Die Teilräume U_1 und U_2 sind wegzusammenhängend, denn X_1, X_2 und $(-1, 1], [-1, 1)$ sind jeweils wegzusammenhängend mit $\pi \circ \iota(1) \in \pi \circ \iota_{12} \circ \iota_1(X_1)$ und $\pi \circ \iota(-1) \in \pi \circ \iota_{12} \circ \iota_2(X_2)$. Die Menge $U_1 \cap U_2 = \pi \circ \iota(-1, 1) \subseteq Y$ ist 1-zusammenhängend als Bild des Intervalls $(-1, 1)$ unter der Einbettung $\pi \circ \iota : [-1, 1] \rightarrow Y$.

Die Räume X_k sind Deformationsretrakte von U_k . Die Retraktionen $r_k : U_k \rightarrow X_k$ werden durch die Identitätsabbildung auf X_k und die Abbildungen $r'_1 : (-1, 1] \rightarrow \{1\}$ und $r'_2 : [-1, 1) \rightarrow \{-1\}$ induziert und die zugehörigen Homotopien $h_k : [0, 1] \times U_k \rightarrow U_k$ durch $h'_k : [0, 1] \times X_k \rightarrow X_k, (t, x) \mapsto x$ und durch $h''_1 : [0, 1] \times (-1, 1] \rightarrow (-1, 1], (t, x) \mapsto t + (1 - t)x$ und $h''_2 : [0, 1] \times [-1, 1) \rightarrow [-1, 1), (t, x) \mapsto -t + (1 - t)x$. Damit gilt $\pi_1(U_k) \cong \pi_1(X_k)$ für $k = 1, 2$, und mit Korollar 7.1.4 folgt die Behauptung. \square

Beispiel 7.2.4: (Bouquets)

Ein **Bouquet mit $n \in \mathbb{N}$ Kreisen** ist das n -fache Wedge-Produkt $\vee^n S^1 = S^1 \vee S^1 \vee \dots \vee S^1$ des Kreises mit sich selbst, bezogen auf einen einzigen Punkt. Seine Fundamentalgruppe ist

$$\pi_1(\vee^n S^1) \cong F_n = \mathbb{Z} \star \dots \star \mathbb{Z}.$$

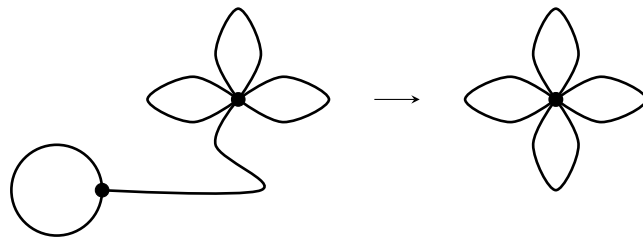


Beweis:

Das folgt aus Beispiel 7.2.3, denn nach Aufgabe 101 ist das Wedge-Produkt $\vee^n S^1$ homotopieäquivalent zu dem topologischen Raum, den man erhält, indem man das Intervall $[-1, 1]$ wie in Beispiel 7.2.3 an die topologische Summe $S^1 + \vee^{n-1} S^1$ anheftet. Mit Beispiel 7.2.3 folgt

$$\pi_1(\vee^n S^1) \cong \mathbb{Z} \star \pi_1(\vee^{n-1} S^1) = \mathbb{Z} \star \mathbb{Z} \star \pi_1(\vee^{n-2} S^1) = \dots = \mathbb{Z} \star \dots \star \mathbb{Z} = F_n.$$

□



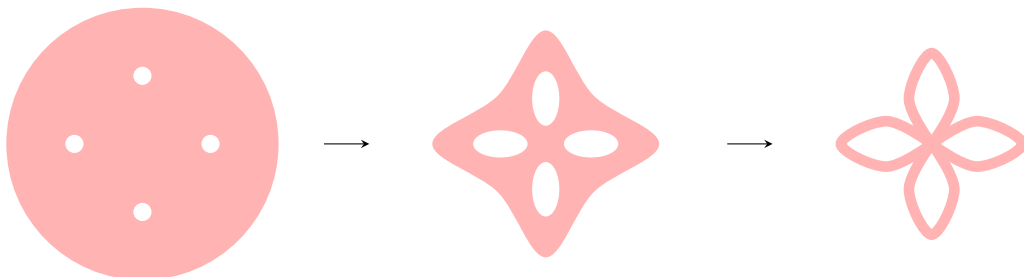
Mit Beispiel 7.2.4 können wir nicht nur die Fundamentalgruppen von Bouquets berechnen, sondern auch die Fundamentalgruppen aller topologischer Räume vom selben Homotopietyp. Insbesondere gilt dies für alle topologischen Räume die Bouquets als Deformationsretrakte haben. Wichtige Beispiele sind topologische Räume die aus anderen entstehen, indem Punkte entfernt werden. Ein weiteres wichtiges Beispiel von topologischen Räumen sind Graphen, also 1-dimensionale CW-Komplexe, die durch Kontrahieren eines maximalen Baumgraphen in Bouquets überführt werden (siehe Aufgabe 119).

Beispiel 7.2.5:

1. Die Fundamentalgruppe der n -punktigten Ebene und der n -punktigten Kreisscheibe ist die freie Gruppe mit n -Erzeugern

$$\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_n\}) = \pi_1(D^2 \setminus \{q_1, \dots, q_n\}) \cong F_n.$$

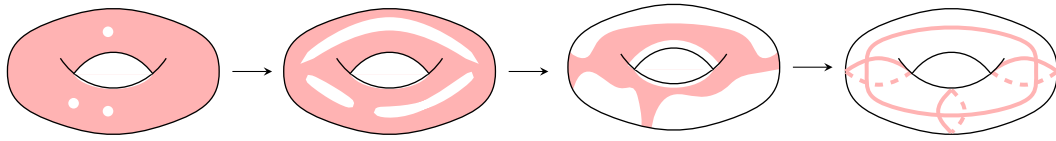
Denn $\mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$ und $D^2 \setminus \{q_1, \dots, q_n\}$ sind homotopieäquivalent, und das Bouquet mit n Kreisen ist ein Deformationsretrakt von $D^2 \setminus \{q_1, \dots, q_n\}$.



2. Die Fundamentalgruppe des n -punktigten Torus ist die freie Gruppe mit $n + 1$ Erzeugern

$$\pi_1(T \setminus \{p_1, \dots, p_n\}) \cong F_{n+1}$$

Das folgt, weil das $n + 1$ -fache Bouquet ein Deformationsretrakt von $T \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$ ist.



3. Die Fundamentalgruppe der n -punktierten Sphäre ist die freie Gruppe mit $n-1$ Erzeugern:

$$\pi_1(S^2 \setminus \{p_1, \dots, p_n\}) \cong F_{n-1}.$$

Denn es gibt eine Drehung des \mathbb{R}^3 , die den Punkt p_1 in e_{n+1} überführt. Die stereographische Projektion liefert einen Homöomorphismus $\phi : S^2 \setminus \{p_1, \dots, p_n\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{p_2, \dots, p_n\}$, und aus 1. folgt die Behauptung.

Beispiel 7.2.3 beschreibt das Anheften einer 1-Zelle an eine topologische Summe $X_1 + X_2$ zweier wegzusammenhängender topologischer Räume X_1, X_2 . Wir wenden uns nun der Frage zu, wie sich die Fundamentalgruppen topologischer Räume unter dem Anheften von n -Zellen für $n \geq 2$ verhalten. Die Anschauung suggeriert, dass das Anheften einer n -Zelle an einen topologischen Raum eine Überdeckung des resultierenden topologischen Raums durch zwei offene Mengen liefern sollte, die sich entlang des Randes $\partial D^n = S^{n-1}$ überlappen. Da D^n und S^{n-1} 1-zusammenhängend sind für $n \geq 3$, sollte sich also die Fundamentalgruppe eines topologischen Raums nicht ändern, wenn n -Zellen mit $n \geq 3$ angeheftet werden.

Lemma 7.2.6: Sei $n \geq 3$, (X, \mathcal{O}) wegzusammenhängend und $f : S^{n-1} = \partial D^n \rightarrow X$ stetig. Dann gilt $\pi_1(D^n +_f X) \cong \pi_1(X)$.

Beweis:

Das Pushout Diagramm für das Anheften der n -Zelle D^n an X mit $f : S^{n-1} \rightarrow X$ ist

$$\begin{array}{ccc} D^n +_f X & \xleftarrow{\iota'_2} & X \\ \iota'_1 \uparrow & & \uparrow f \\ D^n & \xleftarrow{i} & S^{n-1}. \end{array}$$

Die Teilmengen $U_1 = \iota'_1(\mathring{D}^n)$ und $U_2 = (D^n +_f X) \setminus \{\iota'_1(0)\} = \iota'_1(D^n \setminus \{0\}) \cup \iota'_2(X)$ sind nach Bemerkung 3.4.5 offen in $D^n +_f X$, denn $\iota'^{-1}_1(U_1) = \mathring{D}^n$, $\iota'^{-1}_1(U_2) = D^n \setminus \{0\}$, $\iota'^{-1}_2(U_1) = \emptyset$ und $\iota'^{-1}_2(U_2) = X$ sind offen in D^n und in X .

Der Teilraum U_1 ist kontrahierbar, da er homöomorph ist zu \mathring{D}^n , und es folgt $\pi_1(U_1) \cong \{e\}$. Der Teilraum U_2 ist homotopieäquivalent zu X , denn $\iota'_2(X)$ ist homöomorph zu X und ein Deformationsretrakt von U_2 . Die Retraktion $r : U_2 \rightarrow \iota'_2(X)$ wird durch die universelle Eigenschaft des Pushouts und die stetigen Abbildungen

$$r_1 : D^n \setminus \{0\} \rightarrow S^{n-1}, \quad x \mapsto \frac{x}{\|x\|} \quad r_2 = \text{id}_X : X \rightarrow X, \quad x \mapsto x$$

induziert. Die Homotopie $h : [0, 1] \times U_2 \rightarrow U_2$ von $\iota \circ r : U_2 \rightarrow U_2$ nach $\text{id}_{U_2} : U_2 \rightarrow U_2$ durch die stetigen Abbildungen

$$h_1 : [0, 1] \times (D^n \setminus \{0\}) \rightarrow D^n \setminus \{0\}, \quad (t, x) \mapsto tx + (1-t) \frac{x}{\|x\|} \quad h_2 : [0, 1] \times X \rightarrow X, \quad (t, x) \mapsto x.$$

Damit folgt $\pi_1(U_2) \cong \pi_1(X)$. Der Schnitt $U_1 \cap U_2 = \iota'_1(\mathring{D}^n \setminus \{0\})$ ist homotopieäquivalent zu S^{n-1} , denn $\mathring{D}^n \setminus \{0\} \simeq S^{n-1}$ und $\iota'_1|_{\mathring{D}^n} : \mathring{D}^n \rightarrow D^n +_f X$ ist eine Einbettung. Damit ist $U_1 \cap U_2$ 1-zusammenhängend nach Korollar 7.2.2. Mit Korollar 7.1.4 folgt dann $\pi_1(D^n +_f X) \cong \pi_1(D^n) \star \pi_1(X) \cong \pi_1(X)$. \square

Mit Lemma 7.2.6 können wir Fundamentalgruppen von endlichen wegzusammenhängenden CW-Komplexen der Dimension n berechnen. Denn ein endlicher CW-Komplex der Dimension n entsteht induktiv aus einer diskreten Menge X_0 , indem man für $k \in \{1, \dots, n\}$ in jedem Schritt k -Zellen an das $(k-1)$ -Skelett X_{k-1} anheftet: $X_k = (\Pi_{i \in I_k} D^k) +_f X_{k-1}$. Beschränkt man sich dabei auf CW-Komplexe, die sich durch Anheften endlich vieler Zellen an das 2-Skelett ergeben, so folgt aus 7.2.6, dass die Fundamentalgruppe nur von seinem 2-Skelett abhängt.

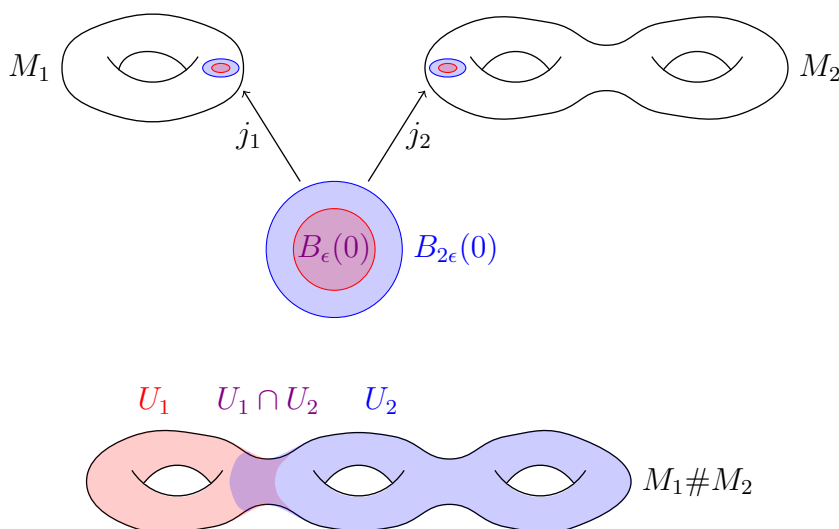
Korollar 7.2.7: Sei (X, \mathcal{O}) ein endlicher wegzusammenhängender CW-Komplex, dessen k -Skelett (X_k, \mathcal{O}_k) für $k \geq 3$ durch das Anheften *endlich* vieler k -Zellen an X_{k-1} entsteht. Dann gilt $\pi_1(X) = \pi_1(X_2)$.

Beweis:

Da das k -Skelett für $k \geq 3$ durch das Anheften endlich vieler k -Zellen an X_{k-1} entsteht, kann man nach Aufgabe 53 die k -Zellen auch einzeln und nacheinander anheften. Mit Lemma 7.2.6 folgt dann induktiv $\pi_1(X_{k-1}) = \pi_1(X_k)$ für alle $k \geq 3$. Da X endlich ist, ergibt sich daraus nach endlich vielen Schritten $\pi_1(X) = \pi_1(X_2)$. \square

Ein ähnliches Bild ergibt sich, wenn man die zusammenhängende Summe zweier topologischer Mannigfaltigkeiten der Dimension $n \geq 3$ betrachtet. Denn in diesem Fall werden die zwei Mannigfaltigkeiten entlang des Randes eines offenen n -Balls, also entlang einer $(n-1)$ -Sphäre verklebt. Überdeckt man die zusammenhängende Summe mit zwei offenen Mengen, die sich entlang dieser Sphäre überlappen, so ist ihr Schnitt 1-zusammenhängend und mit Korollar 7.1.4 folgt, dass die Fundamentalgruppe der zusammenhängenden Summe das freie Produkt der Fundamentalgruppen der einzelnen Mannigfaltigkeiten ist.

Satz 7.2.8: Seien M_1, M_2 wegzusammenhängende topologische Mannigfaltigkeiten der Dimension $n \geq 3$. Dann ist $\pi_1(M_1 \# M_2) \cong \pi_1(M_1) \star \pi_1(M_2)$.



Beweis:

Wir wählen Homöomorphismen $j_i : B_{2\epsilon}(0) \rightarrow V_i \subseteq M_i$ und kleben $N_1 := M_1 \setminus j_1(B_\epsilon(0))$ mit dem Homöomorphismus $f := j_2 \circ (j_1|_{\partial B_\epsilon(0)})^{-1} : j_1(\partial B_\epsilon(0)) \rightarrow j_2(\partial B_\epsilon(0))$ an $N_2 := M_2 \setminus j_2(B_\epsilon(0))$ an. Wir erhalten also ein Pushout

$$\begin{array}{ccc} M_1 \# M_2 & \xleftarrow{\iota'_2} & N_2 \\ \iota'_1 \uparrow & & \uparrow f \\ N_1 & \xleftarrow{i} & j_1(\partial B_\epsilon(0)) \end{array}$$

mit Einbettungen $\iota'_i : N_i \rightarrow M_1 \# M_2$, denn $f : j_1(\partial B_\epsilon) \rightarrow j_2(\partial B_\epsilon)$ ist ein Homöomorphismus. Nach Bemerkung 3.4.5 sind die Mengen

$$U_1 = \iota'_1(N_1) \cup \iota'_2 \circ j_2(B_{2\epsilon}(0) \setminus \overline{B_\epsilon(0)}) \quad U_2 = \iota'_2(N_2) \cup \iota'_1 \circ j_1(B_{2\epsilon}(0) \setminus \overline{B_\epsilon(0)}).$$

offen in $M_1 \# M_2$, denn $\iota'_i{}^{-1}(U_i) = N_i$, $\iota'_i{}^{-1}(U_k) = j_i(B_{2\epsilon}(0) \setminus \overline{B_\epsilon(0)})$ für $k \neq i$ sind offen in N_i . Der Schnitt $U_1 \cap U_2$ ist wegzusammenhängend, denn

$$U_1 \cap U_2 = \iota'_1 \circ j_1(B_{2\epsilon}(0)) \cup \iota'_2 \circ j_2(B_{2\epsilon}(0)) \simeq B_{2\epsilon}(0) \setminus B_\epsilon(0) \simeq S^{n-1},$$

und nach Korollar 7.2.2 ist $\pi_1(U_1 \cap U_2)$ trivial. Nach Voraussetzung sind M_i wegzusammenhängend und wegen $n \geq 3$ damit auch N_i und U_i . Mit Korollar 7.1.4 folgt dann $\pi_1(M_1 \# M_2) = \pi_1(N_1) \star \pi_1(N_2)$.

Da Ankleben einer n -Zelle an N_i mit $f_i : S^{n-1} \rightarrow j_i(\partial B_\epsilon(0))$, $x \mapsto j_i(\epsilon x)$ einen topologischen Raum liefert, der homöomorph zu M_i ist und $n \geq 3$, folgt mit Lemma 7.2.6, dass $\pi_1(M_i) \cong \pi_1(D^n +_{f_i} N_i) \cong \pi_1(N_i)$ gilt, und damit $\pi_1(M_1 \# M_2) \cong \pi_1(M_1) \star \pi_1(M_2)$. \square

Betrachtet man stattdessen die zusammenhängende Summe zweier wegzusammenhängenden Mannigfaltigkeiten der Dimension zwei, so können diese durch zwei offene Mengen überdeckt werden, deren Schnitt homotopieäquivalent zu S^1 ist, aber die Fundamentalgruppe von S^1 ist nicht trivial. In diesem Fall erhält man aus Korollar 7.1.3 eine *Präsentation* der Fundamentalgruppe der zusammenhängenden Summe. Wir berechnen diese für orientierte Flächen vom Geschlecht g , also zusammenhängende Summen $M = T^{\#g}$.

Satz 7.2.9: Für $g \in \mathbb{N}_0$ wird die Fundamentalgruppe einer orientierten Fläche $T^{\#g}$ vom Geschlecht g präsentiert durch

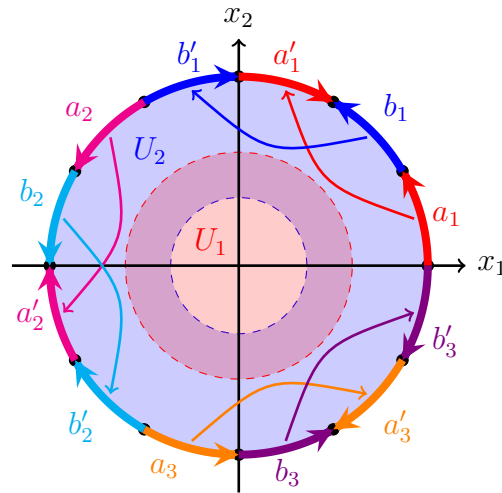
$$\pi_1(T^{\#g}) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid [b_g, a_g] \cdots [b_2, a_2] \cdot [b_1, a_1] = 1 \rangle,$$

wobei $[b, a] = b \cdot a \cdot b^{-1} \cdot a^{-1}$ den **Gruppenkommutator** von a und b bezeichnet.

Beweis:

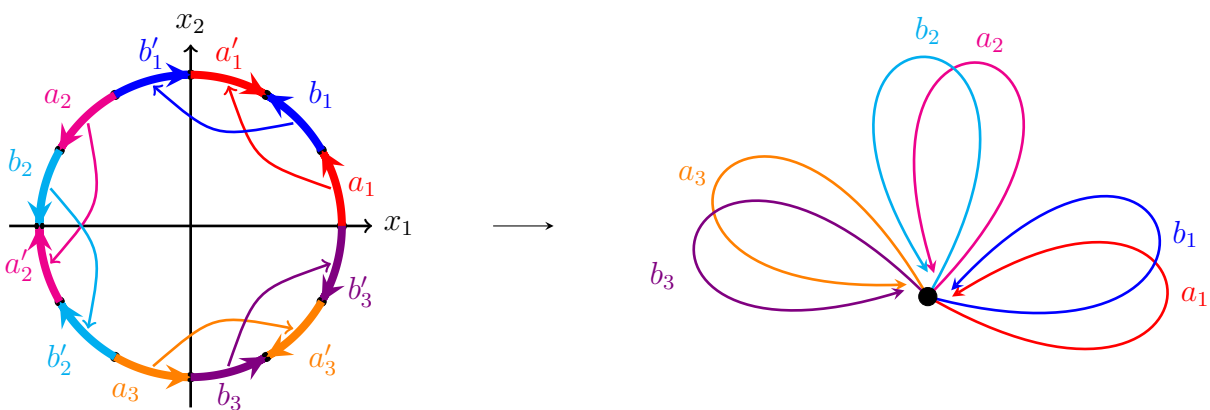
Nach Lemma 3.4.19 ist $T^{\#g}$ homöomorph zum Quotienten der abgeschlossenen Kreisscheibe D^2 bezüglich der Äquivalenzrelation

$$e^{2\pi i(4k+x)/4g} \sim e^{2\pi i(4k+3-x)/4g}, \quad e^{2\pi i(4k+1+x)/4g} \sim e^{2\pi i(4k+4-x)/4g} \quad \text{für } x \in [0, 1], k \in \{0, \dots, g-1\}.$$



Wir berechnen die Fundamentalgruppe von D^2/\sim mit dem Satz von Seifert und van Kampen. Dazu wählen wir die offenen und wegzusammenhängenden Teilräume $U_1 = B_{3/4}(0)/\sim$ und $U_2 = D^2 \setminus B_{\leq 1/4}(0)/\sim$ mit $D^2/\sim = U_1 \cup U_2$ und einen Punkt $x \in U_1 \cap U_2$. Dann ist U_1 homotopieäquivalent zu D^2 und damit kontrahierbar. Also gilt $\pi_1(x, U_1) = \{e\}$. Der Schnitt $U_1 \cap U_2$ ist homöomorph zu $\{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{4} < |z| < \frac{3}{4}\}$ und damit homotopieäquivalent zu S^1 , und es folgt $\pi_1(x, U_1 \cap U_2) \cong \mathbb{Z}$.

Da $S^1 = \partial D^2$ ein Deformationsretrakt von $X := D^2 \setminus B_{\leq 1/4}(0)$ ist, gibt es eine Retraktion $r : X \rightarrow S^1$ und eine Homotopie $h : [0, 1] \times X \rightarrow X$ von der Abbildung $i_{S^1} \circ r : X \rightarrow X$ nach id_X relativ zu S^1 . Da die Einschränkungen von r und von $h_t : X \rightarrow X, x \mapsto h(t, x)$ auf S^1 die Identitätsabbildungen sind, sind $\pi \circ r, \pi \circ h_t : X \rightarrow S^1/\sim$ auf den Äquivalenzklassen in X konstant und induzieren nach der universellen Eigenschaft des Quotienten eine Retraktion $r_\sim : U_2 \rightarrow S^1/\sim$ und eine Homotopie $h_\sim : [0, 1] \times U_2 \rightarrow U_2$ von $i_{S^1/\sim} \circ r_\sim$ nach id_{U_2} mit $r_\sim \circ \pi = \pi \circ r$ und $h_\sim \circ \pi = \pi \circ h$. Damit ist U_2 homotopieäquivalent zu S^1/\sim . Da S^1/\sim homöomorph zu einem Bouquet mit $2g$ Kreisen ist, folgt mit Beispiel 7.2.4, dass $\pi_1(x, U_2) \cong F_{2g}$.



Mit Korollar 7.1.3 erhalten wir dann das folgende Pushout in Grp

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_1(x, D^2/\sim) & \xleftarrow{\pi_1(i_1)} & \pi_1(x, U_1) = \{e\} \\
 \pi_1(i_2) \uparrow & & \uparrow \pi_1(j_1) \\
 F_{2g} \cong \pi_1(x, U_2) & \xleftarrow{\pi_1(j_2)} & \pi_1(x, U_1 \cap U_2) \cong \mathbb{Z}
 \end{array}$$

Da das Diagramm kommutiert, ist der Gruppenhomomorphismus

$$\pi_1(i_2) \circ \pi_1(j_2) = \pi_1(i_1) \circ \pi_1(j_1) : \pi_1(x, U_1 \cap U_2) \rightarrow \pi_1(x, D^2/\sim), \quad [\gamma] \mapsto e$$

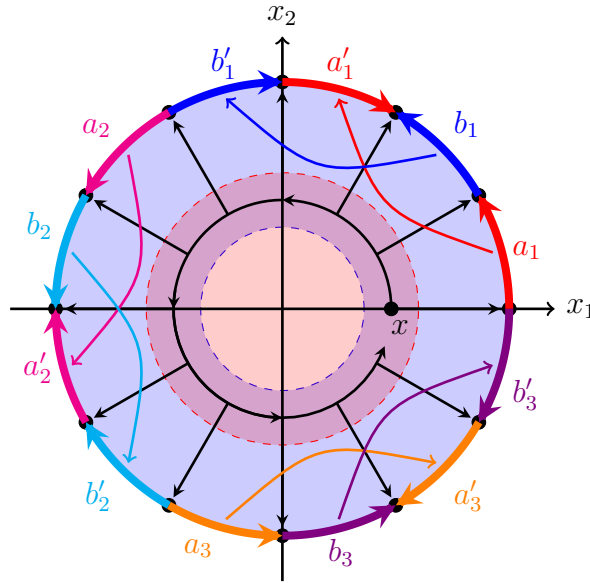
und jeder Gruppenhomomorphismus von $\pi_1(x, U_1)$ in eine beliebige Gruppe H trivial. Die universelle Eigenschaft des Pushouts besagt dann, dass es zu jedem Gruppenhomomorphismus $\phi_2 : \pi_1(x, U_2) \cong F_{2g} \rightarrow H$, für den die Verkettung $\phi_2 \circ \pi_1(j_2) : \mathbb{Z} \rightarrow H$ trivial ist, einen eindeutigen Gruppenhomomorphismus $\phi : \pi_1(x, D^2/\sim) \rightarrow H$ mit $\phi \circ \pi_1(i_2) = \phi_2$ gibt und somit

$$\pi_1(x, D^2/\sim) \cong \frac{\pi_1(x, U_2)}{\pi_1(j_2)(\pi_1(x, U_1 \cap U_2))} \cong F_{2g}/\mathbb{Z}.$$

Um eine Präsentation von $\pi_1(x, D^2/\sim)$ zu erhalten, bestimmen wir

$$\pi_1(j_2) : \pi_1(x, U_1 \cap U_2) \cong \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(x, U_2) \cong F_{2g}.$$

Dazu betrachten wir die Wege A_i, B_i in X , die entstehen, wenn man (i) von x aus in Pfeilrichtung entlang des mittleren Kreises zu dem radialen Weg läuft, der zum Startpunkt von a_i bzw. b_i führt, dann (ii) entlang des radialen Wegs bis zum Rand von X , dann (iii) in Pfeilrichtung entlang der eingezeichneten Wege a_i oder b_i , (iv) auf dem radialen Weg am Zielpunkt von a_i oder b_i zurück zum mittleren Kreis und (v) gegen die Pfeilrichtung entlang des mittleren Kreises zurück zu x läuft. Analog definieren wir die Wege A'_i, B'_i in X , die entstehen, wenn man die selbe Prozedur für a'_i und b'_i durchführt. Wir bezeichnen mit $a_i = \pi(A_i) = \pi(A'_i)$ und $b_i = \pi(B_i) = \pi(B'_i)$ die Bilder unter der kanonischen Surjektion $\pi : X \rightarrow U_2$ und auch deren Homotopieklassen, die die Fundamentalgruppe $\pi_1(x, U_2) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \rangle = F_{2g}$ erzeugen.



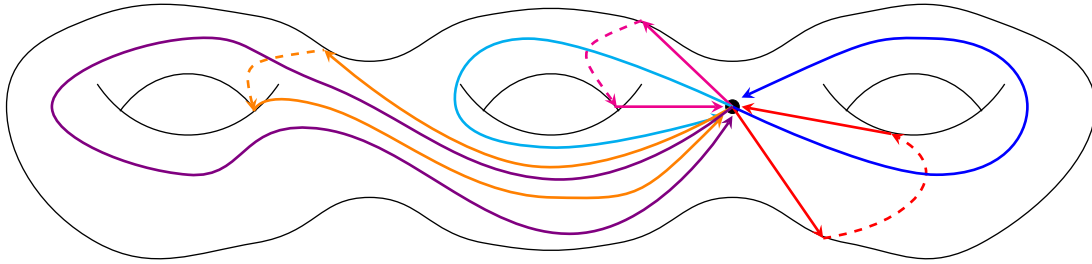
Die Fundamentalgruppe $\pi_1(x, U_1 \cap U_2) \cong \mathbb{Z} = F_1$ wird von der Homotopieklassse des Weges $\gamma : [0, 1] \rightarrow U_1 \cap U_2$ erzeugt, der den mittleren Kreis in Pfeilrichtung einmal durchläuft. Da der zugehörige Weg in X homotop ist zu $\overline{B'_g} \star \overline{A'_g} \star B_g \star A_g \star \dots \star \overline{B'_1} \star \overline{A'_1} \star B_1 \star A_1$, folgt

$$\pi_1(j_2)([\gamma]) = b_g^{-1} \circ a_g^{-1} \circ b_g \circ a_g \circ \dots \circ b_1^{-1} \circ a_1^{-1} \circ b_1 \circ a_1,$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} \pi_1(x, D^2/\sim) &\cong \pi_1(x, U_2) / \pi_1(j_2)(\pi_1(x, U_1 \cap U_2)) \cong \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid [b_g^{-1}, a_g^{-1}] \cdots [b_1^{-1}, a_1^{-1}] = 1 \rangle \\ &\cong \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid [b_g, a_g] \cdots [b_1, a_1] = 1 \rangle. \end{aligned}$$

□

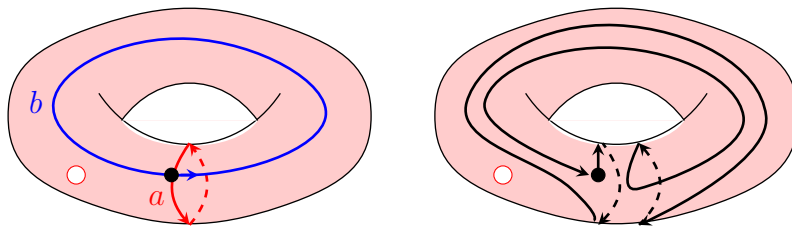


Die Erzeuger der Fundamentalgruppe einer orientierten Fläche $T^{\#3}$ vom Geschlecht 3.

Beispiel 7.2.10: Für den Torus erhält man aus Satz 7.2.9 die Fundamentalgruppe

$$\pi_1(T) = \langle a, b \mid [b, a] = 1 \rangle \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},$$

während der punktierte Torus $T \setminus \{p\}$ homotopieäquivalent zu dem topologischen Raum U_2 im Beweis von Satz 7.2.9 ist und damit die Fundamentalgruppe $\pi_1(T \setminus \{p\}) = \langle a, b \rangle = F_2$ besitzt. Das Gruppenelement $[b, a]$ entspricht dort der Kurve, die den Punkt p einmal gegen den Uhrzeigersinn umläuft.



Die Erzeuger a, b der Fundamentalgruppe des punktierten Torus und das Element $[b, a]$.

Korollar 7.2.11: Für $g_1 \neq g_2$ sind die Flächen $T^{\#g_1}$ und $T^{\#g_2}$ nicht vom selben Homotopietyp und damit auch nicht homöomorph.

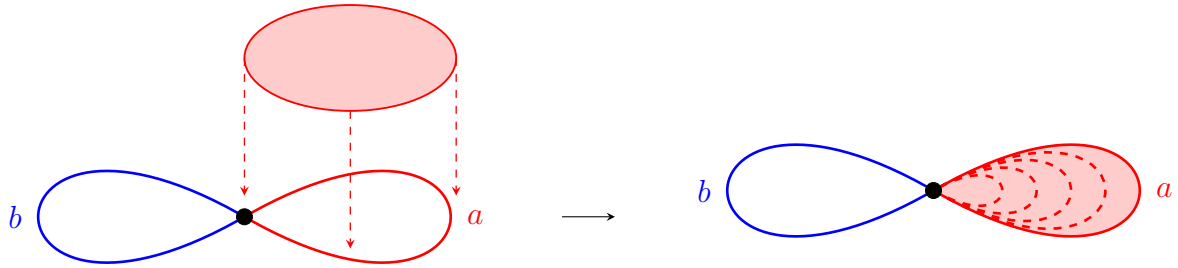
Beweis:

Sind zwei wegzusammenhängende topologische Räume X_1, X_2 vom selben Homotopietyp, so sind ihre Fundamentalgruppen isomorph: $\pi_1(X_1) \cong \pi_1(X_2)$. Damit sind aber auch deren Abelisierungen $\text{Ab}(\pi_1(X_i)) = \pi_1(X_i)/[\pi_1(X_i), \pi_1(X_i)]$ isomorph, also die Bilder unter dem Abelisierungsfunktor aus Aufgabe 82. Nach Satz 7.2.9 gilt

$$\pi_1(T^{\#g}) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid [b_g, a_g] \cdots [b_1, a_1] = 1 \rangle$$

und damit $\text{Ab}(\pi_1(T^{\#g})) = \mathbb{Z}^{\times 2g}$. Da die Gruppen $\mathbb{Z}^{\times 2g_1}$ und $\mathbb{Z}^{\times 2g_2}$ für $g_1 \neq g_2$ nicht isomorph sind, folgt $\pi_1(T^{\#g_1}) \not\cong \pi_1(T^{\#g_2})$ für $g_1 \neq g_2$. \square

Zum Abschluss unserer Betrachtungen zu Fundamentalgruppen zeigen wir noch, dass es zu jeder endlich präsentierten Gruppe G einen topologischen Raum X gibt mit $\pi_1(X) \cong G$. Dazu gehen wir von einem Bouquet mit n Kreisen aus, wobei n die Zahl der Erzeuger in einer gegebenen Präsentation der Gruppe G ist. Dessen Fundamentalgruppe ist die freie Gruppe F_n . Anschließend heften wir mit Anheftungsabbildungen, die man aus den Relationen konstruiert, 2-Zellen an dieses Bouquet an, wodurch die Wege, die die Anheftungsabbildungen und damit die Relationen repräsentieren, homotop zu trivialen Wegen werden.



Satz 7.2.12: Sei $G = \langle a_1, \dots, a_n \mid r_1 = 1, \dots, r_m = 1 \rangle$ eine endlich erzeugte Gruppe mit Erzeugern a_1, \dots, a_n und Relationen r_1, \dots, r_m . Dann gibt es einen wegzusammenhängenden topologischen Raum (X, \mathcal{O}) mit $\pi_1(X) \cong G$.

Beweis:

Wir beweisen die Aussage per vollständiger Induktion über die Anzahl m der Relationen. Für $m = 0$ können wir für X ein Bouquet mit n Kreisen wählen, denn nach Beispiel 7.2.4 gilt dann $\pi_1(X) = F_n = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$.

Sei die Aussage bewiesen für $m \leq k$ und $G = \langle a_1, \dots, a_n \mid r_1, \dots, r_{k+1} \rangle$. Dann gibt es nach Induktionsvoraussetzung zu der Gruppe $H = \langle a_1, \dots, a_n \mid r_1, \dots, r_k \rangle$ mit der kanonischen Surjektion $\pi_H : F_n \rightarrow H$ einen wegzusammenhängenden topologischen Raum Y mit $\pi_1(Y) \cong H$.

Wir wählen einen Punkt $y \in Y$ und einen Weg $\gamma \in W(y, y, Y)$ mit $[\gamma] = \pi_H(r_{k+1})$. Nach der universellen Eigenschaft des Quotienten $S^1 = [0, 1] / \sim$ induziert γ eine stetige Abbildung $f : S^1 \rightarrow Y$, mit der wir eine 2-Zelle an Y anheften können.

Wir berechnen die Fundamentalgruppe von $X := D^2 +_f Y$ mit dem Satz von Seifert und van Kampen. Dazu betrachten wir die offenen und wegzusammenhängenden Teilmengen

$$U_1 = \iota'_1(\mathring{D}^2) \subseteq X \quad U_2 = \iota'_1(D^2 \setminus \{0\}) \cup \iota'_2(Y) \subseteq X,$$

wobei $\iota'_i = \pi_X \circ \iota_i$, die Abbildungen $\iota_1 : D^2 \rightarrow D^2 + Y$ und $\iota_2 : Y \rightarrow D^2 + Y$ die Inklusionen für die topologische Summe und $\pi_X : D^2 + Y \rightarrow X$ die kanonische Surjektion bezeichnen.

Dann ist U_1 homotopieäquivalent zu \mathring{D}^2 und damit $\pi_1(U_2) = \{e\}$. Ebenso ergibt sich, dass die Teilmenge $U_1 \cap U_2 = \iota_1(\mathring{D}^2 \setminus \{0\})$ homotopieäquivalent zu S^1 ist, und es folgt $\pi_1(U_1 \cap U_2) = \mathbb{Z}$. Die Teilmenge U_2 ist homotopieäquivalent zu Y , denn wie im Beweis von Lemma 7.2.6 kann man zeigen, dass $\iota'_2(Y)$ ein Deformationsretrakt von U_2 ist. Daraus folgt $\pi_1(x, U_2) \cong \pi_1(y, Y)$ für jeden Punkt $x \in U_1 \cap U_2$. Mit Korollar 7.1.3 erhalten wir dann das Pushout

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(x, X) & \xleftarrow{e \mapsto e} & \{e\} \\ \pi_1(i_2) \uparrow & & \uparrow z \mapsto e \\ \pi_1(Y) & \xleftarrow{\pi_1(j_2)} & \mathbb{Z} \end{array} ,$$

mit dem Gruppenhomomorphismus $\pi_1(j_2) : \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(Y)$, $1 \mapsto \pi_H(r_{k+1})$. Daraus ergibt sich

$$\pi_1(x, X) \cong \frac{\pi_1(Y)}{\pi_1(j_2)(\mathbb{Z})} \cong \frac{F_n / \langle \{r_1, \dots, r_k\} \rangle}{\langle \{ \pi_H(r_{k+1}) \} \rangle}$$

Nun reicht es zu zeigen, dass die Gruppen $G = F_n / \langle \{r_1, \dots, r_{k+1}\} \rangle$ und $K := H / \langle \{\pi_H(r_{k+1})\} \rangle$ isomorph sind. Seien dazu $\pi_G : F_n \rightarrow G$ und $\pi_K : H \rightarrow K$ die kanonischen Surjektionen. Dann gilt $\{r_1, \dots, r_{k+1}\} \subseteq \ker(\pi_K \circ \pi_H)$, und mit der charakteristischen Eigenschaft der Faktorgruppe erhalten wir einen eindeutig bestimmten Gruppenhomomorphismus $\phi : G \rightarrow K$ mit $\phi \circ \pi_G = \pi_K \circ \pi_H$. Für den Gruppenhomomorphismus $\pi_G : F_n \rightarrow G$ gilt $\{r_1, \dots, r_k\} \subseteq \ker(\pi_G)$ und damit erhalten wir einen eindeutig bestimmten Gruppenhomomorphismus $\psi' : H \rightarrow G$ mit $\psi' \circ \pi_H = \pi_G$. Nun gilt $\pi_H(r_{k+1}) \in \ker(\psi')$, und somit gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus $\psi : K \rightarrow G$ mit $\psi \circ \pi_K = \psi'$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\psi \circ \phi \circ \pi_G &= \psi \circ \pi_K \circ \pi_H = \psi' \circ \pi_H = \pi_G \\ \phi \circ \psi \circ \pi_K \circ \pi_H &= \phi \circ \psi' \circ \pi_H = \phi \circ \pi_G = \pi_K \circ \pi_H.\end{aligned}$$

Mit der charakteristischen Eigenschaft der Faktorgruppe folgt daraus $\psi \circ \phi = \text{id}_G$ und $\psi \circ \phi = \text{id}_K$. Damit gilt $\psi = \phi^{-1}$, und die Gruppen G und K sind isomorph. \square

Literatur

- [BB] T.-D. Bradley, T. Bryson, J. Terilla: *Topology: A Categorical Approach*, The MIT Press 2020.
- [E] R. Engelking: *General Topology*, Heldermann, 1989.
- [F] W. Franz: *Topologie I*, Walter de Gruyter, 1973.
- [F] W. Fulton: *Algebraic Topology: A First Course*, Springer Graduate Texts 153, 2013.
- [H] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002
Download: <https://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html>
- [K] C. Kassel, *Quantum Groups*, Springer Graduate Texts 155, 1995.
- [La] S. Lang. *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics 211, Springer 2005.
- [LS] G. Laures, M. Szymik, *Grundkurs Topologie*, Spektrum, 2009.
- [Q] B. v. Querenburg, *Mengentheoretische Topologie*, Springer 2001.
- [R] E. Riehl, *Category Theory in Context*, Courier Dover Publications, 2017
- [S] L. A. Steen, J. A. Seebach, *Counterexamples in Topology*, Dover, 1995.
- [SZ] R. Stöcker, H. Zieschang, *Algebraische Topologie*, Teubner 1994.
- [W] S. Waldmann: *Topology, An Introduction*, Springer, 2014.

8 Aufgaben

8.1 Aufgaben zu Kapitel 1

Aufgabe 1: (Bilder und Urbilder)

(a) Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung, I eine Indexmenge sowie A, B und A_i für $i \in I$ Teilmengen von Y . Zeigen Sie:

- (i) $f^{-1}(Y) = X$,
- (ii) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$,
- (iii) $f^{-1}(\cup_{i \in I} A_i) = \cup_{i \in I} f^{-1}(A_i)$,
- (iv) $f^{-1}(\cap_{i \in I} A_i) = \cap_{i \in I} f^{-1}(A_i)$.

(b) Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung, I eine Indexmenge sowie A, B und A_i für $i \in I$ Teilmengen von X . Zeigen oder widerlegen Sie:

- (i) $f(X) = Y$,
- (ii) $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$,
- (iii) $f(\cup_{i \in I} A_i) = \cup_{i \in I} f(A_i)$,
- (iv) $f(\cap_{i \in I} A_i) = \cap_{i \in I} f(A_i)$.

Aufgabe 2: (Stetige Abbildungen)

(a) Geben Sie jeweils eine Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften an:

- (i) Die Abbildung f ist überall stetig.
- (ii) Die Abbildung f ist nirgends stetig.
- (iii) Die Abbildung f ist stetig in jedem Punkt $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, aber unstetig in 0.
- (iv) Die Abbildung f ist stetig in 0, aber unstetig in jedem Punkt $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- (v) Die Abbildung f ist stetig in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, aber unstetig in \mathbb{Q} .

(b) Geben Sie jeweils eine *unstetige* Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ an, so dass:

- (i) für alle $x \in \mathbb{R}$ die Abbildung $f(x, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y \mapsto f(x, y)$ stetig ist,
- (ii) für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die folgenden Abbildungen stetig sind

$$f(x, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto f(x, y) \quad \text{und} \quad f(\cdot, y) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x, y),$$

- (iii) für jede Gerade $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto tv$ ($v \in \mathbb{R}^2$) die Abbildung $f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist.

Aufgabe 3: (Metrische Räume)

Sei (M, d) ein metrischer Raum und $B_r(x) = \{y \in M \mid d(x, y) < r\}$ die offene Kugel um $x \in M$ vom Radius $r > 0$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

- (a) Durch $d'(x, y) := d(x, y)^2$ für alle $x, y \in M$ wird eine weitere Metrik auf M definiert.
- (b) Außer M und \emptyset gibt es keine Teilmengen, die offen und abgeschlossen sind.
- (c) Alle unendlichen Teilmengen von M sind offen.
- (d) Alle endlichen Teilmengen von M sind abgeschlossen.
- (e) Ist M endlich, so sind alle Teilmengen von M offen.
- (f) Sind \emptyset und M die einzigen offenen Mengen, so ist $M = \emptyset$ oder M einelementig.
- (g) Sei $r > 0$ und $x, y \in M$. Aus $B_r(x) = B_r(y)$ folgt $x = y$.
- (h) Sei $x, y \in M$. Aus $B_r(x) \subseteq B_r(y)$ für alle $r > 0$ folgt $x = y$.

Aufgabe 4: (Die Teilraumtopologie)

Die Teilraumtopologie auf einer Teilmenge $M \subseteq X$ eines topologischen Raums (X, \mathcal{O}_X) ist

$$\mathcal{O}_{M \subseteq X} = \{O \cap M \mid O \in \mathcal{O}_X\}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass die Teilraumtopologie eine Topologie auf M ist und dass die Urbilder $\iota^{-1}(O)$ von offenen Mengen $O \subseteq X$ unter der Inklusionsabbildung $\iota : M \rightarrow X, m \mapsto m$ offen bezüglich der Teilraumtopologie auf M sind.
- (b) Bestimmen Sie die Teilraumtopologie auf M für den Fall, dass \mathcal{O}_X die (i) diskrete, (ii) die indiskrete, (iii) die kofinite Topologie auf X ist. Bestimmen Sie die Teilmengen $M \subseteq X$ für die die Topologie in (iii) gleich der diskreten Topologie auf M ist.
- (c) Zeigen Sie:
- Ist $M \subseteq X$ abgeschlossen, so sind alle Teilmengen $A \subseteq M$, die abgeschlossen bezüglich der Teilraumtopologie $\mathcal{O}_{M \subseteq X}$ sind, auch abgeschlossen bezüglich der Topologie \mathcal{O}_X .
 - Ist $M \subseteq X$ offen, so sind alle Teilmengen $O \subseteq M$, die offen bezüglich der Teilraumtopologie $\mathcal{O}_{M \subseteq X}$ sind, auch offen bezüglich der Topologie \mathcal{O}_X .
- (d) Gilt auch die Umkehrung der Aussagen in (c)?
- (e) Seien nun $N \subseteq M \subseteq X$. Zeigen Sie, dass die Teilraumtopologie $\mathcal{O}_{N \subseteq M}$ auf N als Teilraum des topologischen Raums $(M, \mathcal{O}_{M \subseteq X})$ mit der Teilraumtopologie $\mathcal{O}_{N \subseteq X}$ auf N als Teilraum des topologischen Raums (X, \mathcal{O}_X) übereinstimmt.
- (f) Sei nun (X, d) ein metrischer Raum und $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_d$ die metrische Topologie auf X .

$$\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_d = \{O \subseteq X \mid \forall x \in O \exists \epsilon > 0 \text{ mit } B_\epsilon(x) \subseteq O\}$$

Zeigen Sie, dass für jede Teilmenge $M \subseteq X$ die metrische Topologie auf M für die Metrik $d|_{M \times M} : M \times M \rightarrow \mathbb{R}, (m, n) \mapsto d(m, n)$ mit der Teilraumtopologie auf M übereinstimmt.

Aufgabe 5: (Kreis, Zylindermantel und Torus als Quotienten)

- (a) Wir betrachten die folgenden Teilmengen $X \subseteq \mathbb{R}^n$ mit den angegebenen Äquivalenzrelationen. Bestimmen Sie jeweils die Äquivalenzklassen.

(i) $n = 1, X_i = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$

(ii) $n = 2, X_{ii} = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], x \sim y \Leftrightarrow x_1 - y_1 \in \mathbb{Z},$

(iii) $n = 2, X_{iii} = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], x \sim y \Leftrightarrow x_1 - y_1 \in \mathbb{Z} \text{ und } x_2 - y_2 \in \mathbb{Z}.$

- (b) Wir betrachten nun die Teilmengen

(i) $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$

(ii) $Z = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\} \subseteq \mathbb{R}^3$

(iii) $T_r = \{((1 + r \sin \phi) \cos \psi, (1 + r \sin \phi) \sin \psi, r \cos \phi) \mid \phi, \psi \in [0, 2\pi)\} \subseteq \mathbb{R}^3 \text{ mit } r \in (0, 1)$

und die Abbildungen

(i) $\phi'_i : X_i / \sim \rightarrow S^1, [x] \mapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$

(ii) $\phi'_{ii} : X_{ii} / \sim \rightarrow Z, [(x_1, x_2)] \mapsto (\cos(2\pi x_1), \sin(2\pi x_1), x_2)$

(iii) $\phi'_{iii} : X_{iii} / \sim \rightarrow T_r,$

$$[(x_1, x_2)] \mapsto ((1 + r \sin(2\pi x_2)) \cos(2\pi x_1), (1 + r \sin(2\pi x_2)) \sin(2\pi x_1), r \cos(2\pi x_2))$$

Skizzieren Sie S^1, Z, T und die Bilder einiger Punkte $[x]$ für $x \in X_i, x \in X_{ii}, x \in X_{iii}$. Zeigen Sie, dass die Abbildungen $\phi'_i, \phi'_{ii}, \phi'_{iii}$ wohldefiniert und bijektiv sind.

- (c) Wir versehen nun die Mengen X_i, X_{ii}, X_{iii} sowie S^1, Z, T_r mit der Einschränkung der euklidischen Metrik d auf dem \mathbb{R}^n . Zeigen Sie, dass für $k \in \{i, ii, iii\}$ und die Untergruppen $G_i = \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}, G_{ii} = \mathbb{Z} \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ sowie $G_{iii} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}^2$

$$d'([x], [y]) = \inf \{d(x', y') \mid x' - x, y' - y \in G_k\}$$

wohldefiniert ist und eine Metrik auf X_k/\sim definiert.

- (d) Zeigen Sie, dass die kanonische Surjektion $\pi : X_k \rightarrow X_k/\sim, x \mapsto [x]$ ϵ - δ stetig ist, und dass für jede ϵ - δ stetige Abbildung $\phi : X_k \rightarrow Y$, die konstant auf den Äquivalenzklassen ist, die Abbildung $\phi' : X_k/\sim \rightarrow Y, [x] \mapsto \phi(x)$ wohldefiniert und ϵ - δ stetig ist.
- (e) Zeigen Sie, dass die Abbildungen in (b) Homöomorphismen sind, d. h. bijektiv und stetig mit stetiger Umkehrfunktion.

Aufgabe 6: (Unendlichkeit der Primzahlen aus Topologien)

Sei $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, \dots\}$ die Menge der Primzahlen und für $x \in \mathbb{Z}$ und $y \in \mathbb{N}$

$$N_{x,y} = \{x' \in \mathbb{Z} \mid x' - x \in \mathbb{Z}y\} = [x]_{\mathbb{Z}/y\mathbb{Z}}$$

die Menge der ganzen Zahlen, die sich von x nur durch ganzzahlige Vielfache von y unterscheiden. Zeigen Sie:

- (a) Die folgende Menge definiert eine Topologie auf \mathbb{Z} :

$$\mathcal{O} = \{M \subseteq \mathbb{Z} \mid \forall m \in M : \exists x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{N} \text{ mit } m \in N_{x,y} \subseteq M\}.$$

- (b) Alle Mengen $N_{x,y}$ sind offen und abgeschlossen in $(\mathbb{Z}, \mathcal{O})$.
- (c) Es gilt: $\cup_{p \in \mathbb{P}} N_{0,p} = \mathbb{Z} \setminus \{1, -1\}$.
- (d) Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Hinweis: Benutzen Sie in (c) die Tatsache, dass jedes $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ eine eindeutige Primfaktorzerlegung besitzt, also sich als Produkt $n = p_1^{\epsilon_1} \cdots p_k^{\epsilon_k}$ mit $k \in \mathbb{N}$, paarweise verschiedenen Primzahlen $p_i \in \mathbb{P}$ und $n_i \in \mathbb{N}$ schreiben lässt. Für (d) kombinieren Sie (b) und (c).

Aufgabe 7: Wir betrachten die Teilmenge

$$M = (0, 1) \cup (1, 2) \cup \{3\} \cup ([4, 5] \cap \mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie alle Mengen, die sich aus M durch Bildung von Abschlüssen und Komplementen konstruieren lassen.

Aufgabe 8: (Beispiele von Topologien)

Handelt es sich bei den folgenden Teilmengen $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$ um Topologien?

- (a) $X = \mathbb{R}, \mathcal{O} = \{[a, \infty) \mid a \in \mathbb{Q}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$
- (b) $X = \mathbb{R}, \mathcal{O} = \{[a, \infty) \mid a \in \mathbb{Z}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$
- (c) $X = \mathbb{N}_0 \cup \{p\}$ mit $p \notin \mathbb{N}_0$ und $\mathcal{O} = \mathcal{P}(\mathbb{N}_0) \cup \{U \subseteq X \mid p \in U, \mathbb{N}_0 \setminus U \text{ endlich}\}$
- (d) X beliebig, $\mathcal{O} = \cup_{i \in I} \mathcal{O}_i$, wobei \mathcal{O}_i eine Topologie auf X ist für alle $i \in I$.

Aufgabe 9: (Topologien auf normierten Vektorräumen)

Wir betrachten einen reellen Vektorraum V mit Normen $\|\cdot\|_i : V \rightarrow \mathbb{R}$ und den zugehörigen Metriken $d_i : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $d(v, w) = \|v - w\|_i$ für $i = 1, 2$.

Eine Norm $\|\cdot\|_1$ auf V heißt **äquivalent** zu einer Norm $\|\cdot\|_2$ auf V , wenn es Konstanten $C, c > 0$ gibt mit $c\|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq C\|v\|_1$ für alle $v \in V$. Zeigen Sie:

- (a) Äquivalenz von Normen ist eine Äquivalenzrelation.
- (b) Sind $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalent, so induzieren sie die selbe Topologie auf V .
- (c) Für $n \in \mathbb{N}_0$ sind alle Normen auf dem \mathbb{R}^n äquivalent.
- (d) Es gibt reelle Vektorräume mit nicht äquivalenten Normen.

Hinweis: Sie können in (c) den Satz von Heine-Borel benutzen und die Aussage, dass jede stetige Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ auf jedem Kompaktum $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ihr Infimum und Extremum annimmt (siehe Vorlesungen Analysis 1 und 2).

Aufgabe 10: (Umgebungen in den Standardbeispielen)

Bestimmen Sie alle Umgebungen eines Punktes $x \in X$ für die folgenden topologischen Räume:

- (a) Eine Menge X mit der diskreten Topologie.
- (b) Eine Menge X mit der indiskreten Topologie.
- (c) Eine unendliche Menge X mit der kofiniten Topologie.
- (d) Bestimmen Sie für (a)-(c) welche dieser Umgebungen offen und welche abgeschlossen sind.

Aufgabe 11: (Inneres, Abschluss und Rand in den Standardbeispielen)

Bestimmen Sie das Innere, den Abschluss und den Rand einer Teilmenge $M \subseteq X$ in den folgenden topologischen Räumen:

- (a) Eine Menge X mit der diskreten Topologie.
- (b) Eine Menge X mit der indiskreten Topologie.
- (c) Eine unendliche Menge X mit der kofiniten Topologie.

Aufgabe 12: (Inneres, Abschluss und Rand von Teilmengen des \mathbb{R}^2)

Bestimmen Sie das Innere, den Abschluss und den Rand der folgenden Teilmengen $M \subseteq \mathbb{R}^2$ des \mathbb{R}^2 mit der Standardtopologie

- (a) $M = \{(x, y) \mid x > 0, y \neq 0\}$
- (b) $M = \{(x, y) \mid 0 \leq x^2 - y^2 < 1\}$
- (c) $M = \{(\frac{1}{n}, 0) \mid n \in \mathbb{N}\}$
- (d) $M = \{(x, \sin \frac{1}{x}) \mid x \in (0, \infty)\}$.

Aufgabe 13: (endliche Hausdorffräume sind diskret)

- (a) Zeigen Sie: ist (X, \mathcal{O}) ein endlicher Hausdorffraum, so ist \mathcal{O} die diskrete Topologie auf X .
- (b) Geben Sie ein Beispiel eines abzählbar unendlichen Hausdorffraums an, der nicht die diskrete Topologie trägt.

Aufgabe 14: (Umgebungen und Topologien)

Sei X eine Menge, und für jeden Punkt $x \in X$ sei eine Teilmenge $\emptyset \neq \mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{P}(x)$ gegeben. Man sagt, die Mengen $\mathcal{U}(x)$ erfüllen die **Umgebungsaxiome**, wenn gilt:

- (i) $U \in \mathcal{U}(x)$ und $U \subseteq U' \Rightarrow U' \in \mathcal{U}(x)$.
- (ii) I endlich und $U_i \in \mathcal{U}(x)$ für alle $i \in I \Rightarrow \bigcap_{i \in I} U_i \in \mathcal{U}(x)$.
- (iii) $U \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow x \in U$.
- (iv) Zu $U \in \mathcal{U}(x)$ gibt es eine Menge $V \in \mathcal{U}(x)$ mit $V \subseteq U$ und $V \in \mathcal{U}(y) \forall y \in V$.

Zeigen Sie:

- (a) Für jede Topologie \mathcal{O} auf X erfüllen die Mengen $\mathcal{U}(x) = \{U \subseteq X \mid U \text{ Umgebung von } x\}$ die Bedingungen (i)-(iv).
- (b) Erfüllen die Mengen $\mathcal{U}(x)$ die Umgebungsaxiome, so ist $\mathcal{O} = \{U \subseteq X \mid U \in \mathcal{U}(x) \forall x \in U\}$ eine Topologie auf X .
- (c) Die Umgebungen eines Punktes $x \in X$ bezüglich der Topologie \mathcal{O} in (b) sind genau die Mengen in $\mathcal{U}(x)$.

Aufgabe 15: (Abschluss, Inneres, Rand und Mengenoperationen)

Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum und $A, B \subseteq X$.

(a) Zeigen Sie, dass

- (i) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$,
- (ii) $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subseteq A \overset{\circ}{\cup} B$,
- (iii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,
- (iv) $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} = A \overset{\circ}{\cap} B$,

und geben Sie für (i) und (ii) jeweils ein Beispiel an mit $\overline{A \cap B} \subsetneq \overline{A} \cap \overline{B}$ und $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subsetneq A \overset{\circ}{\cup} B$.

(b) Zeigen Sie, dass $\partial(A \cup B) \subseteq \partial A \cup \partial B$ gilt und geben Sie ein Beispiel mit $\partial(A \cup B) \subsetneq \partial A \cup \partial B$ an. Zeigen Sie, dass $\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$ falls $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$ gilt.

Aufgabe 16: (Subbasen) Beweisen Sie:

- (a) Für jede Menge X ist die Menge $\mathcal{M} = \{X \setminus \{x\} \mid x \in X\}$ eine Subbasis der kofiniten Topologie auf X .
- (b) Die Menge $\mathcal{M} = \{[0, a) \mid a \in (0, 1)\} \cup \{(a, 1] \mid a \in (0, 1)\}$ ist eine Subbasis der Standardtopologie auf $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$.
- (c) Die Menge $\mathcal{M} = \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$ ist eine Subbasis der Standardtopologie auf \mathbb{R} .

Aufgabe 17: (Erzeugung und Basen von Topologien) Wir betrachten $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Bestimmen Sie jeweils die Topologie \mathcal{O} , die von den folgenden Teilmengen $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ erzeugt wird, und geben Sie eine Basis \mathcal{B} von \mathcal{O} mit möglichst wenigen Elementen an.

- (a) $\mathcal{M} = \{\{1\}, \{2, 3, 5\}, \{4, 5\}\}$.
- (b) $\mathcal{M} = \{\{1\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}\}$.

Aufgabe 18: (\mathbb{R}^n erfüllt das 2. Abzählbarkeitsaxiom) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ der \mathbb{R}^n mit der Standardtopologie das 2. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

Aufgabe 19: (Zusammensetzen stetiger Abbildungen)

Seien (X, \mathcal{O}_X) , (Y, \mathcal{O}_Y) topologische Räume und $A_1, A_2 \subseteq X$ abgeschlossen mit $X = A_1 \cup A_2$. Seien $f_1 : A_1 \rightarrow Y$, $f_2 : A_2 \rightarrow Y$ stetig mit $f_1(x) = f_2(x)$ für alle $x \in A_1 \cap A_2$. Zeigen Sie, dass dann auch die Abbildung $f : X \rightarrow Y$ mit $f(x) = f_1(x)$ für alle $x \in A_1$ und $f(x) = f_2(x)$ für alle $x \in A_2$ stetig ist.

Aufgabe 20: (offene und abgeschlossene Abbildungen)

Geben Sie Beispiele von stetigen Abbildungen an, die die folgenden Eigenschaften besitzen:

- (a) offen, nicht abgeschlossen und injektiv,
- (b) abgeschlossen, nicht offen und injektiv,
- (c) nicht abgeschlossen, nicht offen und injektiv,
- (d) offen, nicht abgeschlossen und surjektiv,
- (e) nicht offen, abgeschlossen und surjektiv,
- (f) nicht offen, nicht abgeschlossen und surjektiv.

Aufgabe 21: (Stetige Abbildungen auf dichten Teilmengen)

Sei (X, \mathcal{O}_X) ein topologischer Raum und (Y, \mathcal{O}_Y) ein Hausdorffraum. Zeigen Sie, dass für alle stetigen Abbildungen $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$ gilt:

- (a) Die Menge $A_{12} = \{x \in X \mid f_1(x) = f_2(x)\}$ ist abgeschlossen.
- (b) Ist $U \subseteq X$ dicht in X und $f_1|_U = f_2|_U$, so folgt $f_1 = f_2$.

Aufgabe 22: (Eindeutigkeit des Grenzwerts in Hausdorffräumen)

Sei (X, \mathcal{O}) ein Hausdorffraum. Zeigen Sie, dass jeder Folge maximal einen Grenzwert hat.

Aufgabe 23: (Charakterisierung des Abschlusses durch Folgen)

Sei (X, \mathcal{O}_X) ein topologischer Raum, der das 1. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, und $M \subseteq X$ eine Teilmenge. Zeigen Sie, dass $x \in \overline{M}$ gilt genau dann, wenn es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $x_n \in M$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ gibt.

Aufgabe 24: (folgenstetig, aber nicht stetig)

Sei X eine Menge und (Y, \mathcal{O}_Y) ein topologischer Raum.

- (a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}_{koab} = \{O \subseteq X \mid X \setminus O \text{ abzählbar}\} \cup \{\emptyset\}$ eine Topologie auf X definiert, die **koabzählbare Topologie** auf X .
- (b) Zeigen Sie, dass eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ in (X, \mathcal{O}_{koab}) genau dann gegen einen Punkt $x \in X$ konvergiert, wenn $x_n = x$ für fast alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.
- (c) Zeigen Sie, dass jede Abbildung $f : (X, \mathcal{O}_{koab}) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ folgenstetig ist.
- (d) Bestimmen Sie alle stetigen Abbildungen $f : (X, \mathcal{O}_{koab}) \rightarrow (X, \mathcal{P}(X))$.
- (e) Nutzen Sie (c) und (d), um eine Abbildung zu konstruieren, die folgenstetig, aber nicht stetig ist.

Aufgabe 25: (Folgenstetigkeit für die kofinite Topologie) Sei X eine Menge und \mathcal{O}_{kof} die kofinite Topologie auf X .

- (a) Bestimmen Sie alle konvergenten Folgen in (X, \mathcal{O}_{kof}) und untersuchen Sie, ob ihr Grenzwert eindeutig ist.
- (b) Zeigen Sie: Ist X eine unendliche Menge und (Y, \mathcal{O}_Y) ein Hausdorffraum, so sind die einzigen folgenstetigen Abbildungen $f : (X, \mathcal{O}_{kof}) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ die konstanten Abbildungen.

8.2 Aufgaben zu Kapitel 2

Aufgabe 26: (Gegenbeispiele)

Widerlegen Sie die folgenden Aussagen durch Gegenbeispiele:

- (a) Urbilder von zusammenhängenden topologischen Räumen unter stetigen Abbildungen sind zusammenhängend.
- (b) Schnitte zusammenhängender Teilräume sind zusammenhängend.
- (c) Komplemente von zusammenhängenden Teilräumen zusammenhängender topologischer Räume sind zusammenhängend.

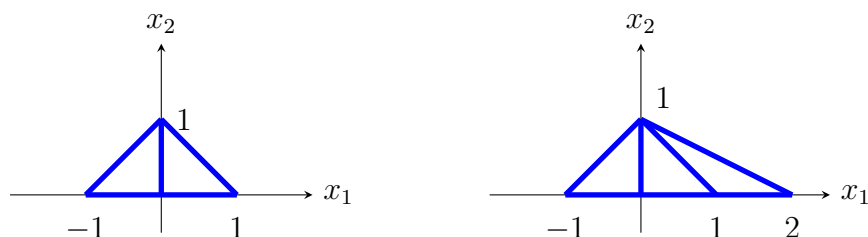
Aufgabe 27: (Äquivalente Definitionen von Zusammenhang)

Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum. Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (i) (X, \mathcal{O}) ist zusammenhängend.
- (ii) Es gibt keine disjunkten, abgeschlossenen Teilmengen $\emptyset \neq A_1, A_2 \subseteq X$ mit $A_1 \cup A_2 = X$.
- (iii) \emptyset und X sind die einzigen Teilmengen von X , die gleichzeitig offen und abgeschlossen sind.

Aufgabe 28: (Homöomorphie und Zusammenhang)

- (a) Ist $f : X \rightarrow Y$ ein Homöomorphismus der topologischen Räume (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) , so sind für jede Teilmenge $M \subseteq X$ auch die Räume $(M, \mathcal{O}_{M \subseteq X})$ und $(f(M), \mathcal{O}_{M \subseteq X})$ homöomorph.
- (b) Zeigen Sie, dass die folgenden topologischen Räume nicht homöomorph sind, indem Sie (a) ausnutzen und die Tatsache, dass zwei homöomorphe topologische Räume entweder beide zusammenhängend oder beide nicht zusammenhängend sind:
 - (i) Ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und der Einheitskreis $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$,
 - (ii) \mathbb{R} und \mathbb{R}^n mit $n \geq 2$,
 - (iii) Die abgebildeten Teilmengen des \mathbb{R}^2 :



Aufgabe 29: (Temperatur in Antipodenpunkten)

Wir beweisen, dass es auf der Erdoberfläche immer mindestens zwei gegenüberliegende Punkte gibt, an denen die gleiche Temperatur herrscht.

Dazu modellieren wir die Erdoberfläche durch die Sphäre $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ und die Temperatur durch eine stetige Abbildung $T : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es einen Punkt $x \in S^2$ mit $T(x) = T(-x)$ gibt.

Aufgabe 30: (Satz vom Grenzübertritt)

Sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ ein Teilraum.

- (a) Zeigen Sie: Ist $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ ein Weg mit $\gamma(0) \in A$ und $\gamma(1) \in X \setminus A$, so gibt es ein $t \in [0, 1]$ mit $\gamma(t) \in \partial A$.
- (b) Gilt auch die folgende Aussage?
Ist $B \subseteq X$ zusammenhängend mit $B \cap A \neq \emptyset$ und $B \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$, so ist auch $B \cap \partial A \neq \emptyset$.

Aufgabe 31: (gleichzeitig offene und abgeschlossene Mengen) Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum. Zeigen Sie: ist $M \subseteq X$ gleichzeitig offen und abgeschlossen, so ist M eine Vereinigung von Zusammenhangskomponenten von X .

Aufgabe 32: (äquivalente Formulierung von T_4) Zeigen Sie, dass die Trennungsbedingung T_4 äquivalent ist zur Bedingung, dass zu jeder abgeschlossenen Menge $A \subseteq X$ und jeder offenen Menge $O \subseteq X$ mit $A \subseteq O$ eine offene Menge $U \subseteq X$ mit $A \subseteq U \subseteq \bar{U} \subseteq O$ existiert.

Aufgabe 33: (Zusammenhangseigenschaften von Matrixgruppen)

Wir betrachten für $n \in \mathbb{N}$ die Mengen $\text{GL}(n, \mathbb{R})$, $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ der invertierbaren $n \times n$ -Matrizen mit Werten in \mathbb{R} oder \mathbb{C} und die Mengen $\text{U}(n, \mathbb{C})$ und $\text{O}(n, \mathbb{R})$ der unitären und orthogonalen $n \times n$ -Matrizen, jeweils mit der Teilraumtopologie die durch die Standardtopologie auf $\text{Mat}(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ und $\text{Mat}(n, \mathbb{C}) \cong \mathbb{R}^{2n^2}$ induziert wird. Zeigen Sie:

- (a) Die Teilräume $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ und $\text{O}(n, \mathbb{R})$ sind nicht zusammenhängend.
(b) $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ ist offen und $\text{O}(n, \mathbb{R})$ ist abgeschlossen in $\text{Mat}(n, \mathbb{R})$.
(c) Der Teilraum $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ hat genau zwei Zusammenhangskomponenten.
(d) Der Teilraum $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ und $\text{U}(n, \mathbb{C})$ sind wegzusammenhängend.

Aufgabe 34: (T_3 und T_4 , aber nicht T_2)

Geben Sie ein Beispiel eines topologischen Raums an, der T_4 und T_3 , aber nicht T_2 erfüllt.

Aufgabe 35: Sei (X, \mathcal{O}_X) ein T_4 -Raum. Zeigen Sie:

- (a) Ist $M \subseteq X$ abgeschlossen, so ist auch M mit der Teilraumtopologie ein T_4 -Raum.
(b) Ist $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ stetig, surjektiv und abgeschlossen, so ist auch (Y, \mathcal{O}_Y) ein T_4 -Raum.

8.3 Aufgaben zu Kapitel 3

Aufgabe 36: (Initial- und Finaltopologie für alle Abbildungen)

Seien (W, \mathcal{O}_W) , (Y, \mathcal{O}_Y) topologische Räume und X eine Menge. Bestimmen Sie:

- (a) die durch die Familie *aller* Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ induzierte Initialtopologie auf W ,
- (b) die durch die Familie *aller* Abbildungen $g : W \rightarrow X$ induzierte Finaltopologie auf X .

Aufgabe 37: (Transitivität der Initial- und Finaltopologie)

Sei X eine Menge, $(Y_i)_{i \in I}$ eine Familie von Mengen und $(Z_j, \mathcal{O}_j)_{j \in J}$ eine Familie topologischer Räume. Seien außerdem Familien $(f_i)_{i \in I}$ und $(g_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ von Abbildungen $f_i : X \rightarrow Y_i$ und $g_{ij} : Y_i \rightarrow Z_j$ gegeben. Sei \mathcal{O}'_i die durch die Familie $(g_{ij})_{j \in J}$ induzierte Initialtopologie auf Y_i , \mathcal{O} die durch die Familie von Abbildungen $(f_i)_{i \in I}$, $f_i : X \rightarrow (Y_i, \mathcal{O}'_i)$, induzierte Initialtopologie auf X und \mathcal{O}' die durch die Familie von Abbildungen $(g_{ij} \circ f_i)_{(i,j) \in I \times J}$, $g_{ij} \circ f_i : X \rightarrow (Z_j, \mathcal{O}_j)$ induzierte Initialtopologie auf X .

- (a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}' = \mathcal{O}$ gilt.
- (b) Formulieren und beweisen Sie eine analoge Aussage für die Finaltopologie.

Aufgabe 38: (Initial und Finaltopologie auf dem Intervall und dem Kreis) Wir betrachten die Abbildung $\exp : [0, 1) \rightarrow S^1$, die durch die Standardtopologie auf S^1 und \exp induzierte Initialtopologie \mathcal{O}_{ini} auf $[0, 1)$ und die durch die Standardtopologie auf $[0, 1)$ und \exp induzierte Finaltopologie \mathcal{O}_{fin} auf S^1 . Bestimmen Sie Basen der Topologien \mathcal{O}_{ini} und \mathcal{O}_{fin} .

Aufgabe 39: (Abbildungen zwischen Teilräumen und Quotienten)

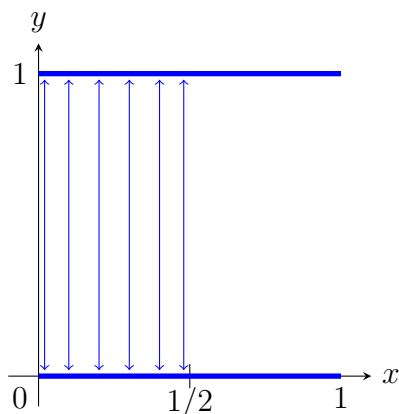
Seien (X, \mathcal{O}_X) , (Y, \mathcal{O}_Y) topologische Räume und $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ Teilräume mit Inklusionsabbildungen $\iota_A : A \rightarrow X$ und $\iota_B : B \rightarrow Y$. Sei \sim_X eine Äquivalenzrelation auf X , \sim_Y ein Äquivalenzrelation auf Y und $\pi_X : X \rightarrow X/\sim_X$, $\pi_Y : Y \rightarrow Y/\sim_Y$ die kanonischen Surjektionen. Zeigen Sie:

- (a) Zu jeder stetigen Abbildung $f : X \rightarrow Y$ mit $f(A) \subseteq B$ gibt es genau eine stetige Abbildung $\tilde{f} : (A, \mathcal{O}_{\subseteq X}) \rightarrow (B, \mathcal{O}_{\subseteq Y})$ mit $f \circ \iota_A = \iota_B \circ \tilde{f}$.
- (b) Zu jeder stetigen Abbildung $g : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ mit $g(x) \sim_Y g(x')$ für alle $x, x' \in X$ mit $x \sim_X x'$ gibt es genau eine stetige Abbildung $\tilde{g} : (X/\sim_X, \mathcal{O}_{\sim_X}) \rightarrow (Y/\sim_Y, \mathcal{O}_{\sim_Y})$ mit $\tilde{g} \circ \pi_X = \pi_Y \circ g$.
- (c) Sei $X = ([-1, 1] \times [1, 2]) \cup ([-1, 1] \times [-2, -1])$ mit der Standardtopologie. Wir betrachten die Äquivalenzrelationen \sim_1, \sim_2 auf X , die durch $(x, 2) \sim_1 (x, -2)$ und $(x, 1) \sim_2 (x, -1)$ für alle $x \in [-1, 1]$ definiert sind. Beweisen Sie, dass X/\sim_1 und X/\sim_2 zueinander homöomorph sind und homöomorph zu $[-1, 1] \times [-1, 1]$ mit der Teilraumtopologie.

Aufgabe 40: (nicht hausdorffscher Quotientenraum) Wir betrachten den Teilraum

$$X = (0, 1) \times \{0, 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, y \in \{0, 1\}\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

mit der Standardtopologie und der Äquivalenzrelation $(x, 0) \sim (x, 1)$ für alle $x, x' \in (0, \frac{1}{2})$.



Zeigen Sie, dass der Quotientenraum X/\sim nicht hausdorffsch ist, obwohl X hausdorffsch ist.

Aufgabe 41: (Initial- und Finaltopologie)

Sei X eine Menge, (Y, \mathcal{O}_Y) ein topologischer Raum und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Beweisen Sie die folgenden Aussagen oder widerlegen Sie sie durch ein Gegenbeispiel.

- (a) Die Finaltopologie \mathcal{O}_{fin} auf Y , die durch die Abbildung f und die durch f und \mathcal{O}_Y induzierte Initialtopologie \mathcal{O}_{ini} auf X induziert wird, stimmt mit \mathcal{O}_Y überein.
- (b) Die durch die Abbildung f und die Finaltopologie \mathcal{O}_{fin} auf Y aus (a) induzierte Initialtopologie \mathcal{O}'_{ini} auf X stimmt mit der durch f und \mathcal{O}_Y induzierten Initialtopologie \mathcal{O}_{ini} auf X überein.
- (c) Ist f bijektiv, so macht die durch f und \mathcal{O}_Y induzierte Initialtopologie \mathcal{O}_{ini} auf X die Abbildung f zu einem Homöomorphismus.
- (d) Ist $X = Y$ und die von f induzierte Initialtopologie $\mathcal{O}_{ini} = \mathcal{O}_Y$, so ist $f : (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ ein Homöomorphismus.

Aufgabe 42: (Abstandsquotienten) Wir betrachten den Quotienten \mathbb{R}^n/\sim bezüglich der Äquivalenzrelation $x \sim x' \Leftrightarrow \|x'\| = \|x\|$ oder $\|x'\| = 1/\|x\|$, wobei $\| \cdot \|$ die euklidische Norm auf dem \mathbb{R}^n bezeichnet. Beweisen Sie, dass \mathbb{R}^n/\sim homöomorph zu einem Teilraum eines \mathbb{R}^m mit der Standardtopologie ist.

Aufgabe 43: (abgeschlossene Mengen in der Produkttopologie)

Sei $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume. Zeigen Sie dass das Produkt $\prod_{i \in I} A_i \subseteq \prod_{i \in I} X_i$ abgeschlossen ist, falls $A_i \subseteq X_i$ abgeschlossen ist für alle $i \in I$.

Aufgabe 44: (Box-Topologie) Sei $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume. Wir betrachten die Produkttopologie \mathcal{O}_π und die **Box-Topologie** \mathcal{O}_\square auf der Menge $\prod_{i \in I} X_i$, die durch die folgenden Basen gegeben sind

$$\mathcal{B}_\Pi = \{ \prod_{i \in I} O_i \mid O_i \in \mathcal{O}_i \ \forall i \in I, O_i = X_i \text{ für fast alle } i \in I \}$$

$$\mathcal{B}_\square = \{ \prod_{i \in I} O_i \mid O_i \in \mathcal{O}_i \ \forall i \in I \}$$

Offensichtlich gilt $\mathcal{O}_\Pi = \mathcal{O}_\square$ für endliche Indexmengen I , während für unendliche Indexmengen I im allgemeinen $\mathcal{O}_\Pi \subsetneq \mathcal{O}_\square$ gilt. Die folgende Aufgabe zeigt, dass die Produkttopologie bessere Eigenschaften hat als die Box-Topologie.

- (a) Zeigen Sie, dass die Menge aller Vereinigungen von Mengen in \mathcal{B}_\square eine Topologie auf $\prod_{i \in I} X_i$ ist.
- (b) Sei $(X_i, \mathcal{O}_i) = (X, \mathcal{O})$ für alle $i \in I$. Zeigen Sie, dass die **Diagonalabbildung**

$$\Delta : X \rightarrow \prod_{i \in I} X, \quad x \mapsto (x)_{i \in I}$$

stetig bezüglich der Produkttopologie ist.

- (c) Zeigen Sie, dass für $I = \mathbb{N}$ und $(X_i, \mathcal{O}_i) = (\mathbb{R}, \mathcal{O}_{std})$ für alle $i \in \mathbb{N}$ die Diagonalabbildung nicht stetig bezüglich der Box-Topologie ist.
- (d) Zeigen Sie, dass für $I = \mathbb{N}$ und $(X_i, \mathcal{O}_i) = (\mathbb{R}, \mathcal{O}_{std})$ für alle $i \in \mathbb{N}$ der topologische Raum $(\prod_{i \in I} X_i, \mathcal{O}_\square)$ nicht zusammenhängend ist.
- (e) Zeigen Sie, dass für $I = \mathbb{N}$ und $(X_i, \mathcal{O}_i) = (\mathbb{R}, \mathcal{O}_{std})$ für alle $i \in \mathbb{N}$ der topologische Raum $(\prod_{i \in I} X_i, \mathcal{O}_\square)$ weder das erste noch das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

Aufgabe 45: (Abbildungen zwischen Produkträumen) Seien $(X_i, \mathcal{O}_{X_i})_{i \in I}$ und $(Y_i, \mathcal{O}_{Y_i})_{i \in I}$ zwei Familien topologischer Räume und $(f_i : X_i \rightarrow Y_i)_{i \in I}$ eine Familie stetiger Abbildungen. Seien $\pi_j^X : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j$ und $\pi_j^Y : \prod_{i \in I} Y_i \rightarrow Y_j$ die Projektionsabbildungen für die topologischen Produkte. Zeigen Sie:

- (a) Es existiert genau eine stetige Abbildung $f : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow \prod_{i \in I} Y_i$ mit $\pi_j^Y \circ f = f_j \circ \pi_j^X$ für alle $j \in I$.
- (b) Sind alle Abbildungen $f_i : X_i \rightarrow Y_i$ Homöomorphismen, so sind $\prod_{i \in I} X_i$ und $\prod_{i \in I} Y_i$ homöomorph.
- (c) Für $I = \{1, 2\}$ sind die Produkte $X_1 \times X_2$ und $X_2 \times X_1$ homöomorph.

Aufgabe 46: (Produktmetriken induzieren Produkttopologien)

Seien (X_1, d_1) und (X_2, d_2) metrische Räume. Zeigen Sie:

- (a) Die Abbildung $d : (X_1 \times X_2) \times (X_1 \times X_2) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}$$

ist eine Metrik auf $X_1 \times X_2$, die sogenannte **Produktmetrik**.

- (b) Die von der Produktmetrik induzierte metrische Topologie auf $X_1 \times X_2$ ist die Produkttopologie auf $X_1 \times X_2$, die von den metrischen Topologien auf X_1 und X_2 induziert wird.

Aufgabe 47: (Inneres, Abschluss und Rand in Produkträumen) Sei $(X_i, \mathcal{O}_{X_i})_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume, $\prod_{i \in I} X_i$ ihr Produkt und $M_i \subseteq X_i$ Teilmengen. Zeigen Sie:

- (a) Es gilt $\overline{\prod_{i \in I} M_i} = \prod_{i \in I} \overline{M_i}$.
- (b) Es gilt $(\prod_{i \in I} M_i) \subseteq \prod_{i \in I} \overset{\circ}{M_i}$. Geben Sie ein Beispiel an mit $(\prod_{i \in I} M_i) \neq \prod_{i \in I} \overset{\circ}{M_i}$.
- (c) Ist $I = \{1, \dots, n\}$ endlich, so gilt $(M_1 \times \dots \times M_n) = \overset{\circ}{M}_1 \times \dots \times \overset{\circ}{M}_n$ und

$$\partial(M_1 \times \dots \times M_n) = \partial M_1 \times \overline{M}_2 \times \dots \times \overline{M}_n \cup \overline{M}_1 \times \partial M_2 \times \overline{M}_3 \times \dots \times \overline{M}_n \cup \dots \cup \overline{M}_1 \times \dots \times \overline{M}_{n-1} \times \partial M_n$$

Aufgabe 48: (topologische Gruppenwirkungen)

Sei $(G, \mathcal{O}_G, \cdot)$ eine topologische Gruppe mit neutralem Element $e \in G$.

Ein G -**Raum** ist ein topologischer Raum (X, \mathcal{O}_X) mit einer Abbildung $\triangleright : G \times X \rightarrow X$, $(g, x) \mapsto g \triangleright x$, die stetig ist bezüglich \mathcal{O}_X und der Produkttopologie auf $G \times X$ und die Bedingungen $e \triangleright x = x$ und $(g \cdot h) \triangleright x = g \triangleright (h \triangleright x)$ für alle $x \in X$ und $g, h \in G$ erfüllt. Eine solche Abbildung nennt man eine **topologische Gruppenwirkung**.

Beweisen Sie:

- (a) Die Abbildungen $\triangleright_L : G \times G \rightarrow G$, $(g, h) \mapsto gh$, $\triangleright_R : G \times G \rightarrow G$, $(g, h) \mapsto hg^{-1}$ und $\triangleright_C : G \times G \rightarrow G$, $(g, h) \mapsto ghg^{-1}$ sind topologische Gruppenwirkungen.
- (b) Für jeden G -Raum $(X, \mathcal{O}_X, \triangleright)$ und alle $g \in G$ sind die Abbildungen $L_g : X \rightarrow X$, $x \mapsto g \triangleright x$ Homöomorphismen.
- (c) Für jeden G -Raum $(X, \mathcal{O}_X, \triangleright)$ ist $x \sim x' \Leftrightarrow \exists g \in G : x' = g \triangleright x$ eine Äquivalenzrelation auf X . Die kanonische Surjektion $\pi : X \rightarrow X/\sim$ ist eine offene Abbildung.

Die Äquivalenzklassen bezeichnet man als **Bahnen** oder **Orbiten** der Gruppenwirkung und den Quotientenraum $X/G := X/\sim$ als den **Bahnenraum**.

- (d) Die Zusammenhangskomponente $C(e)$ des neutralen Elements ist eine abgeschlossene **normale Untergruppe** von G , d. h. sie ist abgeschlossen, eine Untergruppe, und es gilt $ghg^{-1} \in C(e)$ für alle $h \in C(e)$ und $g \in G$.

Aufgabe 49:**(Produkttopologie und metrische Topologie auf dem Cantorschen Folgenraum)**

Wir betrachten den Cantorschen Folgenraum, also die Menge $X = \{0, 1\}^{\mathbb{N}_0} = \prod_{\mathbb{N}_0} \{0, 1\}$ der Folgen $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ mit Werten $x_k \in \{0, 1\}$ und für $a \in (0, 1)$ die Abbildung

$$d_a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}, \quad d_a((x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}, (y_k)_{k \in \mathbb{N}_0}) := a^{\inf\{k \in \mathbb{N}_0 \mid x_k \neq y_k\}},$$

wobei $a^\infty := 0$. Zeigen Sie:

- (a) d_a ist eine Metrik auf X .
- (b) Für alle $a \in (0, 1)$ ist die von d_a induzierte metrische Topologie auf X gleich der Produkttopologie auf X , die von der diskreten Topologie auf $\{0, 1\}$ induziert wird.

Aufgabe 50: (Verkleben von Möbiusbändern zu Kleinscher Flasche)

Zeigen Sie, dass durch Verkleben zweier Möbiusbänder entlang ihres Randes eine Kleinsche Flasche entsteht. Betrachten Sie dazu

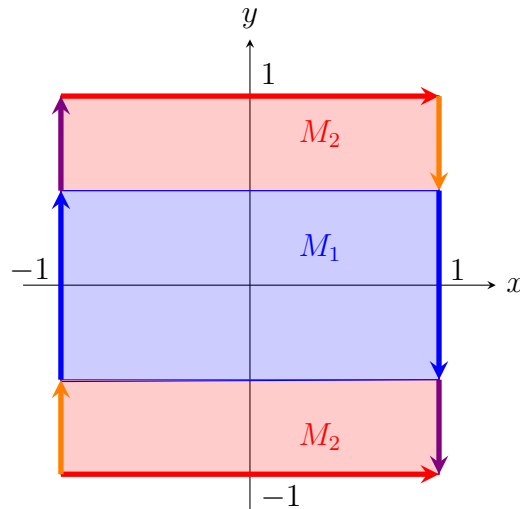
$$M_1 = [-1, 1] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \quad M_2 = ([-1, 1] \times [-1, -\frac{1}{2}]) \cup ([-1, 1] \times [\frac{1}{2}, 1])$$

mit der Teilraumtopologie und den folgenden Äquivalenzrelationen \sim_1 auf M_1 und \sim_2 auf M_2

$$\begin{aligned} (-1, -y) \sim_1 (1, y) \quad \forall y \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ (x, 1) \sim_2 (x, -1) \quad \forall x \in [-1, 1], \quad (-1, -y) \sim_2 (1, y) \quad \forall y \in [-1, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1] \end{aligned}$$

sowie die Kleinsche Flasche $K = [-1, 1] \times [-1, 1]/\sim_K$ mit der Äquivalenzrelation

$$(-1, -y) \sim_K (1, y) \quad \forall y \in [-1, 1], \quad (x, 1) \sim_K (x, -1) \quad \forall x \in [-1, 1].$$



- (a) Zeigen Sie zunächst, dass M_2/\sim_2 homöomorph zum Möbiusband M_1/\sim_1 ist. Nutzen Sie dabei die universelle Eigenschaft des Quotientenraums.
- (b) Betrachten Sie nun das Pushout, das entsteht, wenn man die Quotienten M_1/\sim_1 und M_2/\sim_2 mit einer bijektiven Anheftungsabbildung entlang ihrer Ränder verklebt. Konstruieren Sie einen Homöomorphismus zwischen diesem Pushout und der Kleinschen Flasche.

Hinweis: Einen Film, der das Verkleben zweier Möbiusbänder zu einer Kleinschen Flasche visualisiert, finden sie auf http://www.josleys.com/show_gallery.php?galid=364.

Aufgabe 51: (geometrische Interpretation des Pullbacks)

Wir betrachten den Einheitskreis $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, den Zylindermantel $Z = S^1 \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, das Möbiusband $M = ([0, 1] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])/\sim$ mit $(0, y) \sim (1, -y)$ für alle $y \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ sowie den Volltorus $V_{1/4}$ und den Torus $T_{1/4}$

$$V_{1/4} = \{((1 + r \cos \psi) \cos \phi, (1 + r \cos \psi) \sin \phi, r \sin \psi) \mid \phi, \psi \in \mathbb{R}, r \in [0, \frac{1}{4}]\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$T_{1/4} = \partial V_{1/4} = \{((1 + \frac{1}{4} \cos \psi) \cos \phi, (1 + \frac{1}{4} \cos \psi) \sin \phi, \frac{1}{4} \sin \psi) \mid \phi, \psi \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

- (a) Bestimmen Sie den Pullback $S^1 \times_{S^1} Z$ entlang der Abbildungen $p_1 : S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^n$ mit $n \in \mathbb{Z}$ und $p_2 : Z \rightarrow S^1, (z, t) \mapsto z$. Zeichnen Sie für $n = 0, 1, 2$ sein Bild unter der stetigen Abbildung $f : S^1 \times Z \rightarrow V_{1/4}$

$$f(z, w, y) = (\operatorname{Re}(z)(1 + \frac{y}{2}\operatorname{Re}(w)), \operatorname{Im}(z)(1 + \frac{y}{2}\operatorname{Re}(w)), \frac{y}{2}\operatorname{Im}(w)).$$

Sehen Sie einen Bezug zum k -fach verdrehten Möbiusband?

- (b) Bestimmen Sie den Pullback $S^1 \times_{S^1} M$ entlang der Abbildungen $p_1 : S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^n$ mit $n \in \mathbb{Z}$ ungerade und $p_2 : M \rightarrow S^1, [(x, y)] \mapsto e^{2\pi i x}$. Zeichnen Sie für $n = 1, 3$ sein Bild unter der stetigen Abbildung $f : S^1 \times M \rightarrow V_{1/4}$

$$f(z, [(x, y)]) = (\operatorname{Re}(z)(1 + \frac{y}{2}\cos(\pi x)), \operatorname{Im}(z)(1 + \frac{y}{2}\cos(\pi x)), \frac{y}{2}\sin(\pi x)).$$

Sehen Sie einen Bezug zum k -fach verdrehten Möbiusband?

- (c) Bestimmen Sie für $m, n \in \mathbb{N}$ den Pullback $S^1 \times_{S^1} S^1$ unter den stetigen Abbildungen $p_1 : S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^m$ und $p_2 : S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^n$. Betrachten Sie das Bild der Menge $\Delta(S^1) = \{(z, z) \mid z \in S^1\} \subseteq S^1 \times S^1$ unter der stetigen Abbildung $f_{m,n} : S^1 \times S^1 \rightarrow T_{1/4}$,

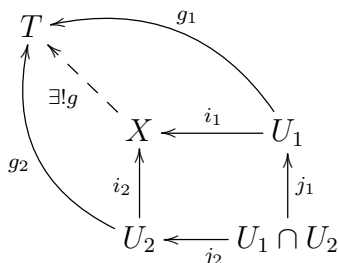
$$f_{m,n}(z, w) = (\operatorname{Re}(z^m)(1 + \frac{1}{4}\operatorname{Re}(w^n)), \operatorname{Im}(z^m)(1 + \frac{1}{4}\operatorname{Re}(w^n)), \frac{1}{4}\operatorname{Im}(w^n))$$

und zeichnen Sie es für $(m, n) \in \{(1, 4), (2, 3), (2, 5), (2, 11)\}$. Bestimmen Sie $f_{m,n}^{-1}(f_{1,1}(\Delta(S^1)))$. Sehen Sie einen Bezug zu **Torusknoten**?

- <https://de.wikipedia.org/wiki/Torusknoten>
- http://katlas.org/wiki/36_Torus_Knots

Aufgabe 52: (Pushouts aus offenen Überdeckungen)

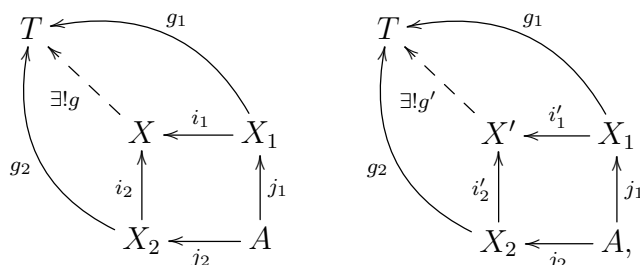
- (a) Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum und $U_1, U_2 \subseteq X$ offen mit $U_1 \cup U_2 = X$. Zeigen Sie, dass (X, i_1, i_2) mit den Inklusionsabbildungen $i_k : U_k \rightarrow X, x \mapsto x$ die universelle Eigenschaft des Pushouts entlang der Inklusionsabbildungen $j_1 : U_1 \cap U_2 \rightarrow U_1, x \mapsto x$ und $j_2 : U_1 \cap U_2 \rightarrow U_2, x \mapsto x$ besitzt:



- (b) Zeigen Sie, dass die Voraussetzung $U_1, U_2 \subseteq X$ *offen* in (a) notwendig ist, indem Sie ein Beispiel eines topologischen Raums (X, \mathcal{O}_X) und Teilmengen $U_1, U_2 \subseteq X$ mit $U_1 \cup U_2 = X$ angeben, so dass (X, i_1, i_2) nicht die universelle Eigenschaft des Pushouts entlang j_1, j_2 besitzt.

- (c) Seien nun $(X_1, \mathcal{O}_1), (X_2, \mathcal{O}_2)$ und (A, \mathcal{O}_A) topologische Räume und $j_i : A \rightarrow X_i$ stetige Abbildungen. Zeigen Sie, dass das Pushout von X_1 und X_2 entlang $j_1 : A \rightarrow X_1$ und $j_2 : A \rightarrow X_2$ *eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie* ist:

Sind (X, \mathcal{O}_X) und $(X', \mathcal{O}_{X'})$ topologische Räume und $i_k : X_k \rightarrow X$ und $i'_k : X_k \rightarrow X'$ stetige Abbildungen, so dass sowohl (X, i_1, i_2) und (X', i'_1, i'_2) die universelle Eigenschaft des Pushouts besitzen



so gibt es genau eine stetige Abbildung $g : X \rightarrow X'$ mit $g \circ i_k = i'_k$ für $k = 1, 2$, und diese ist ein Homöomorphismus.

- (d) Zeigen Sie, dass für einen topologischen Raum (X, \mathcal{O}) und $U_1, U_2 \subseteq X$ offen mit $U_1 \cup U_2 = X$ das Pushout $U_1 +_{U_1 \cap U_2} U_2$ entlang $j_1 : U_1 \cap U_2 \rightarrow U_1$ und $j_2 : U_1 \cap U_2 \rightarrow U_2$ homöomorph zu (X, \mathcal{O}_X) ist.

Aufgabe 53: (einzeln oder zusammen anheften?)

Seien (X_1, \mathcal{O}_1) , (X_2, \mathcal{O}_2) und (Y, \mathcal{O}_Y) topologische Räume, $A_i \subseteq X_i$ Teilräume und $f_i : A_i \rightarrow Y$ stetige Abbildungen. Sei $(X_1 + X_2) +_{f_{12}} Y$ der topologische Raum, der durch Anheften von $X_1 + X_2$ an Y mit der durch die Abbildungen f_i induzierten Abbildung $f_{12} : A_1 + A_2 \rightarrow Y$ entsteht. Sei $X_2 +_{f'_2} (X_1 +_{f_1} Y)$ der topologische Raum, der durch Anheften von X_1 an Y mit f_1 und anschließendes Anheften von X_2 an $X_1 +_{f_1} Y$ mit der durch die Abbildung f_2 induzierten Abbildung $f'_2 : A_2 \rightarrow X_1 +_{f_1} Y$ entsteht. Zeigen Sie, dass $(X_1 + X_2) +_{f_{12}} Y$ homöomorph zu $X_2 +_{f'_2} (X_1 +_{f_1} Y)$ ist.

Aufgabe 54: (reell projektiver Raum)

Der **reell projektive Raum** $\mathbb{R}P^n$ ist der Quotient $\mathbb{R}P^n = S^n / \sim$ der n -Sphäre S^n bezüglich der Äquivalenzrelation $x \sim y \Leftrightarrow y \in \{\pm x\}$, die die Antipodenpunkte identifiziert. Beweisen Sie:

- (a) $\mathbb{R}P^n$ ist hausdorffsch.
- (b) $\mathbb{R}P^n$ erfüllt das 2. Abzählbarkeitsaxiom.
- (c) Jeder Punkt $x \in \mathbb{R}P^n$ besitzt eine Umgebung, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge des \mathbb{R}^n ist.
- (d) $\mathbb{R}P^n$ ist homöomorph zu dem Quotientenraum $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim'$ bezüglich der Äquivalenzrelation $x \sim' y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : y = \lambda x$.

Aufgabe 55: (reell projektiver Raum als CW-Komplex)

Wir betrachten für $n \in \mathbb{N}_0$ den **reell projektiven Raum** $\mathbb{R}P^n$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}P^n$ die Struktur eines CW-Komplexes mit genau einer k -Zelle für $0 \leq k \leq n$ besitzt.

Hinweis: Induktion über n . Im Induktionsschritt reicht es, zu zeigen, dass $\mathbb{R}P^n$ homöomorph zu einem topologischen Raum ist, der durch Anheften einer n -Zelle an $\mathbb{R}P^{n-1}$ entsteht.

Aufgabe 56: (komplex projektiver Raum)

Der **komplex projektive Raum** $\mathbb{C}P^n$ ist der Quotient $(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$ mit der Äquivalenzrelation $x \sim x' \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : x' = \lambda x$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}P^n$ eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension $2n$ ist.

8.4 Aufgaben zu Kapitel 4

Aufgabe 57: Zeigen Sie:

- (a) Endliche Vereinigungen von kompakten Teilmengen topologischer Räume sind kompakt.
- (b) In einem Hausdorffraum sind beliebige Schnitte von kompakten Teilmengen kompakt.
- (c) Quotienten kompakter topologischer Räume sind kompakt.

Aufgabe 58: (kompakt oder nicht kompakt?)

Untersuchen Sie, ob die folgenden topologischen Räume kompakt sind:

- (a) Eine unendliche Menge X mit der koabzählbaren Topologie.

- (b) Die Gruppe $GL(n, \mathbb{R})$ der invertierbaren reellen $n \times n$ -Matrizen mit der Standardtopologie.
- (c) Die Gruppe $U(n, \mathbb{C})$ der unitären $n \times n$ -Matrizen mit der Standardtopologie.
- (d) Die Gruppe $PU(n, \mathbb{C}) = U(n, \mathbb{C})/\sim$ mit $M \sim N \Leftrightarrow \exists \lambda \in S^1 : N = \lambda M$.

Aufgabe 59: (Es gibt keine stetige Bijektionen zwischen Kreis und Kreisscheibe)

Wir betrachten den Kreis $S^1 = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$ und die abgeschlossene Kreisscheibe $D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$ mit der Standardtopologie und der euklidischen Norm $\|\cdot\|$. Zeigen Sie, dass es keine bijektive stetige Abbildung $f : S^1 \rightarrow D^2$ und keine bijektive stetige Abbildung $g : D^2 \rightarrow S^1$ gibt.

Aufgabe 60: (Schnitte von Kompakta in nicht-hausdorffschen Räumen)

Wir betrachten die Menge \mathbb{N} und

$$\mathcal{O} = \{U \subset \mathbb{N} \mid U \cap \{1, 2\} = \emptyset\} \cup \{U \subset \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \setminus U \text{ endlich}\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

- (a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{N}, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum ist.
- (b) Zeigen Sie: es gibt kompakte Teilräume $K_1, K_2 \subset \mathbb{N}$, so dass $K_1 \cap K_2$ nicht kompakt ist.

Aufgabe 61: (kompakte Hausdorffräume)

Sei (X, \mathcal{O}) ein kompakter Hausdorffraum. Zeigen Sie:

- (a) Ist \mathcal{O}' eine Topologie auf X , die echt feiner ist als \mathcal{O} , so ist (X, \mathcal{O}') hausdorffsch, aber nicht kompakt.
- (b) Ist \mathcal{O}'' eine Topologie auf X , die echt gröber ist als \mathcal{O} , so ist (X, \mathcal{O}'') kompakt, aber nicht hausdorffsch.

Aufgabe 62: (kompakt-offene Topologie) Seien (X, \mathcal{O}_X) , (Y, \mathcal{O}_Y) und (Z, \mathcal{O}_Z) Hausdorffräume und $C(X, Y)$ die Menge der stetigen Abbildungen $f : X \rightarrow Y$. Die von der Menge

$$\mathcal{S}_{X,Y} = \{U_{K,O} \mid K \subseteq X \text{ kompakt}, O \in \mathcal{O}_Y\}$$

mit $U_{K,O} := \{f : X \rightarrow Y \text{ stetig} \mid f(K) \subseteq O\} \subseteq C(X, Y)$

erzeugte Topologie $\mathcal{O}_{X,Y} = \langle \mathcal{S}_{X,Y} \rangle$ auf $C(X, Y)$ heißt die **kompakt-offene Topologie**. Zeigen Sie:

- (a) Die Abbildung $ev_x : C(X, Y) \rightarrow Y, f \mapsto f(x)$ ist stetig bezüglich $\mathcal{O}_{X,Y}$ und \mathcal{O}_Y .
- (b) Ist $f : X \rightarrow Y$ stetig, so ist auch die Abbildung $f^* : C(Y, Z) \rightarrow C(X, Z), g \mapsto g \circ f$ stetig bezüglich der Topologien $\mathcal{O}_{Y,Z}$ und $\mathcal{O}_{X,Z}$.
- (c) Ist $f : Y \rightarrow Z$ stetig, so ist auch die Abbildung $f_* : C(X, Y) \rightarrow C(X, Z), g \mapsto f \circ g$ stetig bezüglich der Topologien $\mathcal{O}_{X,Y}$ und $\mathcal{O}_{X,Z}$.

Aufgabe 63: (Cantormenge und Cantorraum) Die **Cantor-Menge** ist die Teilmenge $C \subseteq [0, 1]$ der Zahlen, in deren **3-adischer Darstellung** nur die Ziffern 0, 2 auftreten

$$C = \{x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n 3^{-n} \mid x_n \in \{0, 2\} \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Der **Cantor-Raum** ist die Cantormenge mit der Teilraumtopologie.

- (a) Zeigen sie, dass der Cantorraum gegeben ist als Schnitt $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$, wobei $C_0 = [0, 1]$ und C_{n+1} die abgeschlossene Teilmenge in $[0, 1]$ ist, die aus C_n entsteht, indem man in jeder Zusammenhangskomponente von C_n das mittlere offene Intervaldrittel entfernt.
- (b) Vergewissern Sie sich, dass der Cantorraum ein kompakter Hausdorffraum ist.
- (c) Zeigen Sie, dass die Menge $\{0, 2\}^{\mathbb{N}} = \prod_{\mathbb{N}} \{0, 2\} = \text{Abb}(\mathbb{N}, \{0, 2\})$ mit der Produkttopologie, die durch die diskrete Topologie auf $\{0, 2\}$ induziert wird, homöomorph zum Cantorraum ist.
- (d) Zeigen Sie, dass der Cantorraum (i) total unzusammenhängend ist, d. h. kein Punkt $x \in C$ besitzt eine zusammenhängende Umgebung, und (ii) dass jeder Punkt $x \in C$ ein Häufungspunkt ist.

Hinweis: Man kann zeigen, dass jeder nichtleere kompakte Hausdorffraum, der total unzusammenhängend ist und für den jeder Punkt ein Häufungspunkt ist, homöomorph zum Cantorraum ist. Dies erklärt die Wichtigkeit des Cantorraums in vielen Gebieten der Mathematik, aber der Beweis ist sehr aufwändig.

Aufgabe 64: (Produkttopologie und Produktmetrik) Sei I eine unendliche Indexmenge und $(X_i, d_i)_{i \in I}$ eine Familie kompakter metrischer Räume mit $\text{diam}(X_i) = 1$ für alle $i \in I$.

- (a) Zeigen Sie, dass $d((x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}) = \sup_{i \in I} d_i(x_i, y_i)$ eine Metrik auf $\prod_{i \in I} X_i$ definiert.
- (b) Zeigen Sie, dass die Produkttopologie und die metrische Topologie auf $\prod_{i \in I} X_i$ nicht übereinstimmen.

Aufgabe 65: (Charakterisierung von Kompaktheit durch Projektionsabbildungen) Wir beweisen, dass ein topologischer Raum (X, \mathcal{O}_X) genau dann kompakt ist, wenn für alle topologischen Räume (Y, \mathcal{O}_Y) die Projektion $\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y, (x, y) \mapsto y$ abgeschlossen ist.

- (a) Zeigen Sie, dass für alle kompakten topologischen Räume (X, \mathcal{O}_X) die Projektion $\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$ abgeschlossen ist.
- (b) Sei nun $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen $A_i \subseteq X$, die die endliche Durchschnittseigenschaft besitzt. Betrachten Sie die Menge $Y = X \cup \{p\}$ mit $p \notin X$ und der Topologie \mathcal{O}_Y , die von der Menge $\mathcal{S} = \mathcal{P}(X) \cup \{A_i \cup \{p\} \mid i \in I\}$ erzeugt wird. Zeigen Sie, dass $X \subseteq Y$ bezüglich dieser Topologie nicht abgeschlossen ist.
- (c) Betrachten Sie die Teilmenge $\overline{\Delta(X)} = \overline{\{(x, x) \mid x \in X\}} \subseteq X \times Y$ mit (Y, \mathcal{O}_Y) wie in (b). Nehmen Sie an, dass $\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$ abgeschlossen ist, und zeigen Sie, dass es einen Punkt $x \in X$ mit $(x, p) \in \overline{\Delta(x)}$ gibt. Folgern Sie daraus, dass $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ gilt.

Aufgabe 66: (\mathbb{Q} ist nicht lokalkompakt)

Zeigen Sie, dass der Teilraum $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ mit der Standardtopologie nicht lokalkompakt ist.

Aufgabe 67: (Einpunktkompaktifizierung) Zeigen Sie:

- (a) Die Einpunktkompaktifizierung des \mathbb{R}^n ist homöomorph zur n -Sphäre S^n .
- (b) Ist (X, \mathcal{O}) ein kompakter Hausdorffraum, so ist die Einpunktkompaktifizierung X^* homöomorph zur topologischen Summe $X + \{\infty\}$.
- (c) Ist (X, \mathcal{O}) ein lokalkompakter, aber nicht kompakter Hausdorffraum, so ist X dicht in X^* .

Aufgabe 68: (Kollabierter Einheitswürfel)

Wir betrachten den Einheitswürfel $[0, 1]^{\times n} \subseteq \mathbb{R}^n$ mit der Standardtopologie. Zeigen Sie, dass der topologische Raum $[0, 1]^{\times n} / \partial([0, 1]^{\times n})$, der durch Kollabieren des Teilraums $\partial([0, 1]^{\times n}) \subseteq [0, 1]^{\times n}$ entsteht, homöomorph zur n -Sphäre S^n ist.

Aufgabe 69: ($\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ ist nicht lokalkompakt) Zeigen Sie, dass der Raum $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}} = \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ mit der von der diskreten Topologie auf \mathbb{Z} induzierten Produkttopologie nicht lokalkompakt ist.

Aufgabe 70: Ist X ein kompakter topologischer Raum und $\mathcal{A} \subseteq C(X, \mathbb{R})$ eine Unteralgebra, so ist der Abschluß $\overline{\mathcal{A}}$ on \mathcal{A} in dem Banachraum $C(X, \mathbb{R})$ eine Unteralgebra.

Hinweis: Gilt $f_n \rightarrow f$ und $g_n \rightarrow g$ gleichmäßig, so auch $f_n + g_n \rightarrow f + g$, $\lambda f_n \rightarrow \lambda f$ und $f_n g_n \rightarrow f g$.

Aufgabe 71: Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Zeigen Sie, dass der Raum

$$\mathcal{A} := \left\{ f|_{[a,b]} : (\exists a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}) f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \right\}$$

der Polynomfunktionen auf $[a, b]$ in dem Banachraum $(C([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\infty})$ dicht ist.

Aufgabe 72: Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge. Zeigen Sie, dass der Raum \mathcal{A} aller Einschränkungen von Polynomfunktionen

$$f(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n, \text{endl.}} a_{\alpha} x^{\alpha}, \quad a_{\alpha} \in \mathbb{R}, \quad x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

auf K dicht in $(C(K, \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\infty})$ ist.

Aufgabe 73: Sei $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ und

$$\mathcal{A} := \left\{ f|_{S^1} : (\exists a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}) f(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j \right\}.$$

Zeigen Sie, dass \mathcal{A} nicht dicht in dem komplexen Banachraum $C(S^1, \mathbb{C})$ ist.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $f(z) := z^{-1}$ auf S^1 und versuchen Sie sie gleichmäßig durch Elemente von \mathcal{A} zu approximieren. Betrachten Sie das komplexe Wegintegral $\int_{|z|=1} f_n(z) dz$. Warum können wir hier den Satz von Stone–Weierstraß nicht anwenden?

Aufgabe 74: Für einen lokalkompakten Raum X betrachten wir den Banachraum $C_0(X)$ aller stetiger Funktionen $f: X \rightarrow \mathbb{C}$, die im Unendlichen verschwinden, d.h., zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine kompakte Teilmenge $C_{\varepsilon} \subseteq X$ mit $|f(x)| \leq \varepsilon$ für $x \in X \setminus C_{\varepsilon}$. Sei nun $\mathcal{A} \subseteq C_0(X)$ eine komplexe Unteralgebra mit folgenden Eigenschaften:

- (a) \mathcal{A} ist invariant unter komplexer Konjugation: $f \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{f} \in \mathcal{A}$.
- (b) \mathcal{A} hat keien Nullstellen, d.h., zu jedem $x \in X$ existiert ein $f \in \mathcal{A}$ mit $f(x) \neq 0$.
- (c) \mathcal{A} trennt die Punkte von X .

Zeigen Sie, dass \mathcal{A} dicht in dem komplexen Banachraum $(C_0(X), \|\cdot\|_\infty)$ ist.

Hinweis: Sei X_ω die Einpunktkompaktifizierung von X (Satz 4.4.6). Dann lässt sich jede Funktion $f \in C_0(X)$ durch $\tilde{f}(\omega) := 0$ zu einer stetigen Funktion \tilde{f} auf X_ω fortsetzen. Wir erhalten so eine Bijektion

$$C_*(X_\omega) := \{f \in C(X_\omega) : f(\omega) = 0\} \rightarrow C_0(X), \quad f \mapsto f|_X.$$

Auf die komplexe Unteralgebra

$$\tilde{\mathcal{A}} := \mathbb{C}\mathbf{1} + \{\tilde{a} : a \in \mathcal{A}\} \subseteq C(X_\omega, \mathbb{C})$$

kann man nun den Satz von Stone–Weierstraß anwenden. Gilt nun $\tilde{f}_n + \lambda\mathbf{1} \rightarrow \tilde{f}$ für $\lambda_n \in \mathbb{C}$, $f \in C_0(X)$, $f_n \in \mathcal{A}$, dann auch $\lambda_n \rightarrow 0$ und $f_n \rightarrow f$ (gleichmäßig).

8.5 Aufgaben zu Kapitel 5

Aufgabe 75: (Identitätsmorphisimen, Inverse und Isomorphismen) Zeigen Sie:

- (a) Identitätsmorphisimen in einer Kategorie \mathcal{C} sind eindeutig:
Sind $1_X, 1'_X : X \rightarrow X$ zwei Morphismen in \mathcal{C} mit $1_X \circ f = 1'_X \circ f = f$ und $g \circ 1_X = g \circ 1'_X = g$ für alle Morphismen $f : W \rightarrow X$ und $g : X \rightarrow Y$, so gilt $1_X = 1'_X$.
- (b) Inverse Morphismen in einer Kategorie \mathcal{C} sind eindeutig:
Ist $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus in \mathcal{C} und $g, g' : Y \rightarrow X$ zwei Morphismen mit $g \circ f = g' \circ f = 1_X$ und $f \circ g = f \circ g' = 1_Y$, so folgt $g = g'$.
- (c) Ist $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor und $f : X \rightarrow Y$ ein Isomorphismus in \mathcal{C} , so ist $F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)$ ein Isomorphismus in \mathcal{D} .

Aufgabe 76: (Kategorie der Relationen)

- Eine **Relation** zwischen zwei Mengen A und B ist eine Teilmenge $R \subseteq A \times B$.
- Eine Relation $R \subseteq A \times B$ heißt **Abbildung** von A nach B , wenn es zu jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ gibt mit $(a, b) \in R$.
- Die Verknüpfung von zwei Relationen $R \subseteq A \times B$ und $S \subseteq B \times C$ ist die Relation

$$S \circ R = \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B : (a, b) \in R, (b, c) \in S\} \subseteq A \times C.$$

- (a) Zeigen Sie, dass die Mengen und Relationen eine Kategorie **Rel** mit Mengen als Objekten und Morphismenmengen $\text{Hom}_{\text{Rel}}(A, B) = \mathcal{P}(A \times B)$ bilden.
- (b) Bestimmen Sie die Isomorphismen in der Kategorie **Rel**.

Aufgabe 77: (Wirkungsgruppoid) Sei (G, \cdot) eine Gruppe mit neutralen Element e und $\triangleright : G \times X \rightarrow X$ eine Gruppenwirkung von G auf eine Menge X , d. h. es gilt $(g \cdot g') \triangleright x = g \triangleright (g' \triangleright x)$ und $e \triangleright x = x$ für alle $g, g' \in G$ und $x \in X$.

- (a) Zeigen Sie, dass man ein Gruppoid erhält, wenn man Punkte $x \in X$ als Objekte und Morphismenräume $\text{Hom}(x, x') = \{g \in G \mid g \triangleright x = x'\}$ mit der Gruppenmultiplikation als Verkettung von Morphismen wählt. Dies ist das sogenannte **Wirkungsgruppoid** oder der schwache Quotient $X//G$.

- (b) Bestimmen Sie die Gruppe $\text{Hom}(x, x)$ für $x \in X$.
- (c) Zeigen Sie, dass es einen Funktor $F : X//G \rightarrow BG$ gibt, wobei BG das Gruppoid mit einem Objekt und Gruppenelementen $g \in G$ als Morphismen bezeichnet.

Aufgabe 78: (Funktoeren und natuerliche Transformationen fuer Gruppen)

Sei (G, \circ) eine Gruppe, die wir als Kategorie BG mit einem Objekt X , mit $\text{Hom}_{BG}(X, X) = G$ und mit der Gruppenmultiplikation als Verkettung von Morphismen interpretieren. Zeigen Sie:

- (a) Ist (H, \circ) eine weitere Gruppe, die wir ebenfalls als Kategorie BH mit einem Objekt interpretieren, so stehen Funktoeren $F : BG \rightarrow BH$ in Bijektion mit Gruppenhomomorphismen $\phi : G \rightarrow H$.
- (b) Funktoeren $F : BG \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{F}}$ stehen in Bijektion mit Darstellungen von G ueber \mathbb{F} , d. h. Paaren (V, ϕ) aus einem \mathbb{F} -Vektorraum V und einem Gruppenhomomorphismus $\phi : G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{F}}(V)$.
- (c) Funktoeren $F : BG \rightarrow \text{Top}$ stehen in Bijektion mit G -Raeumen, also topologischen Gruppenwirkungen $\triangleright : G \times Y \rightarrow Y$ auf topologischen Raeumen (Y, \mathcal{O}_Y) , wobei G mit der diskreten Topologie ausgestattet wird.
- (d) Charakterisieren Sie fuer (a) bis (c) jeweils die natuerlichen Transformationen zwischen zwei solchen Funktoeren $F, G : BG \rightarrow \mathcal{D}$ fuer die angegebenen Kategorien \mathcal{D} .

Aufgabe 79: (Hom-Funktoeren) Sei \mathcal{C} eine Kategorie und X ein Objekt von \mathcal{C} .

- (a) Zeigen Sie, dass man einen Funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ erhaelt, wenn man jedem Objekt Y in \mathcal{C} die Morphismenmenge $F(Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ und einem Morphismus $f : Y \rightarrow Y'$ in \mathcal{C} die Abbildung $F(f) : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y')$, $g \mapsto f \circ g$ zuordnet.
- (b) Zeigen Sie, dass man einen Funktor $G : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \text{Set}$ erhaelt, wenn man einem Objekt Y in \mathcal{C}^{op} die Morphismenmenge $G(Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ und einem Morphismus $f : Y \rightarrow Y'$ in \mathcal{C} die Abbildung $G(f) : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y', X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$, $g \mapsto g \circ f$ zuordnet.

Hinweis: Man benutzt haeufig die Notation $\text{Hom}(X, -) = F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ und $\text{Hom}(-, X) = G : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \text{Set}$ und bezeichnet diese Funktoeren als **Hom-Funktoeren**.

Aufgabe 80: (Topologien als Funktoeren)

- (a) Zeigen Sie, dass man einen Funktor $O : \text{Top}^{op} \rightarrow \text{Set}$ erhaelt, wenn man jedem topologischen Raum (X, \mathcal{O}_X) die Menge \mathcal{O}_X zuordnet und jeder stetigen Abbildung $f : (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ die Abbildung $O(f) : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_Y$, $M \mapsto f^{-1}(M)$.
- (b) Zeigen Sie, dass man einen Funktor $A : \text{Top}^{op} \rightarrow \text{Set}$ erhaelt, wenn man jedem topologischen Raum (X, \mathcal{O}_X) die Menge $\{M \subseteq X \mid X \setminus M \in \mathcal{O}_X\}$ zuordnet und jeder stetigen Abbildung $f : (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ die Abbildung $A(f) : A(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow A(Y, \mathcal{O}_Y)$, $M \mapsto f^{-1}(M)$.
- (c) Zeigen Sie, dass die Funktoeren $O, A : \text{Top}^{op} \rightarrow \text{Set}$ natuerlich isomorph sind.

Aufgabe 81: (Wegkomponentenfunktor) Zeigen Sie, dass man einen Funktor $\pi_0 : \text{Top} \rightarrow \text{Set}$ erhaelt, wenn man jedem topologischen Raum (X, \mathcal{O}_X) die Menge $\pi_0(X) = \{W(x) \mid x \in X\}$ seiner Wegzusammenhangskomponenten zuordnet, und jeder stetigen Abbildung $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ die Abbildung $\pi_0(f) : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$, $W(x) \mapsto W(f(x))$.

Aufgabe 82: (Abelisierungsfunktor) Für eine Gruppe G ist die **Kommutatorgruppe** $[G, G]$ die von Elementen $[g, h] := g \cdot h \cdot g^{-1} \cdot h^{-1}$ mit $g, h \in G$ erzeugte Untergruppe:

$$[G, G] = \{[g_n, h_n] \cdot [g_{n-1}, h_{n-1}] \cdots [g_1, h_1] : n \in \mathbb{N}, g_i, h_i \in G \text{ für alle } i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

- Zeigen Sie, dass $[G, G] \subseteq G$ eine normale Untergruppe und die **Faktorgruppe** $G/[G, G]$ eine abelsche Gruppe ist.
- Zeigen Sie: Ist $\phi : G \rightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus, so existiert genau ein Gruppenhomomorphismus $\phi_{\sim} : G/[G, G] \rightarrow H/[H, H]$ mit $\phi_{\sim} \circ \pi_G = \pi_H \circ \phi$, wobei $\pi_G : G \rightarrow G/[G, G]$ und $\pi_H : H \rightarrow H/[H, H]$ die kanonischen Surjektionen bezeichnen.
- Zeigen Sie, dass die Zuordnungen $G \rightarrow G/[G, G]$, $\phi \rightarrow \phi_{\sim}$ Funktoren $F : \text{Grp} \rightarrow \text{Grp}$ und $F' : \text{Grp} \rightarrow \text{Ab}$ definieren.
- Folgern Sie, dass die kanonischen Surjektionen $\pi_G : G \rightarrow G/[G, G]$ eine natürliche Transformation zwischen dem Identitätsfunktor $\text{id}_{\text{Grp}} : \text{Grp} \rightarrow \text{Grp}$ und dem Funktor $F : \text{Grp} \rightarrow \text{Grp}$ definieren.

Aufgabe 83: (Funktorkategorie) Seien \mathcal{C}, \mathcal{D} kleine Kategorien. Zeigen Sie, dass die Funktoren $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ und natürlichen Transformationen zwischen solchen Funktoren eine Kategorie $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ bilden.

Aufgabe 84: (Quotientenkategorie)

Wir betrachten die Kategorie Grp und auf $\text{Hom}_{\text{Grp}}(G, H)$ die Äquivalenzrelation $\phi \sim_{G, H} \phi' \Leftrightarrow \exists h \in H : \phi'(g) = h \cdot \phi(g) \cdot h^{-1}$ für alle $g \in G$ und Gruppenhomomorphismen $\phi, \phi' : G \rightarrow H$. Zeigen Sie, dass diese Äquivalenzrelationen mit der Verkettung von Morphismen verträglich sind, und bestimmen Sie die zugehörige Quotientenkategorie.

Aufgabe 85: (Gruppoid und Gruppen) Sei \mathcal{G} ein Gruppoid. Zeigen Sie:

- Für jedes Objekt X in \mathcal{G} ist $\text{End}_{\mathcal{G}}(X) = \text{Hom}_{\mathcal{G}}(X, X)$ mit der Verkettung von Morphismen eine Gruppe.
- Sind X, Y Objekte in \mathcal{G} , so dass es einen Morphismus $f : X \rightarrow Y$ gibt, so sind die Gruppen $(\text{End}_{\mathcal{G}}(X), \circ)$ und $(\text{End}_{\mathcal{G}}(Y), \circ)$ isomorph.

Aufgabe 86: (Klassifikation endlich-dimensionaler Vektorräume) Zeigen Sie, dass die Kategorie $\text{Vect}^{fin}(\mathbb{K})$ der endlich-dimensionalen \mathbb{K} -Vektorräume äquivalent ist zur Kategorie \mathcal{C} mit Objekten $n \in \mathbb{N}_0$ und Matrixen $M \in \text{Mat}(n \times m, \mathbb{K})$ als Morphismen $M : m \rightarrow n$.

Aufgabe 87: (Äquivalenzen von Gruppoiden) Sei \mathcal{G} ein nichtleeres Gruppoid und \mathcal{A} eine volle Unterkategorie von \mathcal{G} , so dass jedes Objekt von \mathcal{G} isomorph zu einem Objekt von \mathcal{A} ist.

- Zeigen Sie, dass dann auch \mathcal{A} ein Gruppoid ist und man einen Inklusionsfunktor $I : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{G}$ erhält, der jedes Objekt und jeden Morphismus in \mathcal{A} auf sich selbst abbildet.
- Konstruieren Sie einen Funktor $R : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{A}$, so dass $RI = \text{id}_{\mathcal{A}}$ gilt und $IR : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ natürlich isomorph zu $\text{id}_{\mathcal{G}}$ ist.

- (c) Zeigen Sie, dass \mathcal{G} äquivalent zu einer Kategorie BG für eine Gruppe (G, \circ) ist, falls $\text{Hom}_{\mathcal{G}}(X, Y) \neq \emptyset$ für alle Objekte X, Y in \mathcal{G} gilt.

Aufgabe 88: ((Ko)Produkte in Grpd) Wir betrachten die Kategorie Grpd der Gruppoide.

- (a) Zeigen Sie, dass das leere Gruppoid, also die Kategorie ohne Objekte oder Morphismen, ein initiales und das Einpunktgruppoid mit genau einem Objekt und genau einem Morphismus ein terminales Objekt in der Kategorie Grpd ist.
- (b) Zeigen Sie, dass das kartesische Produkt $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ zweier Gruppoide \mathcal{G}_1 und \mathcal{G}_2 ein Produkt in der Kategorie Grpd definiert.
- (c) Für Gruppoide \mathcal{G}_1 und \mathcal{G}_2 bezeichnen wir mit $\mathcal{G}_1 \amalg \mathcal{G}_2$ als das Gruppoid dessen Objektmenge $\text{Ob}(\mathcal{G}_1 \amalg \mathcal{G}_2) = (\text{Ob } \mathcal{G}_1) \dot{\cup} (\text{Ob } \mathcal{G}_2)$ die disjunkte Vereinigung der Objektmengen $\text{Ob}(\mathcal{G}_1)$ und $\text{Ob}(\mathcal{G}_2)$ ist, mit Morphismenmengen

$$\text{Hom}_{\mathcal{G}_1 \amalg \mathcal{G}_2}(X, Y) = \begin{cases} \text{Hom}_{\mathcal{G}_i}(X, Y) & X, Y \in \text{Ob } \mathcal{G}_i \text{ für ein } i \in \{1, 2\} \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

und der Verkettung von Morphismen aus \mathcal{G}_1 und \mathcal{G}_2 . Zeigen Sie, dass $\mathcal{G}_1 \amalg \mathcal{G}_2$ ein Koproduct in der Kategorie Grpd ist.

Aufgabe 89: (Das Wedge-Produkt als Koproduct in Top*)

Seien $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ topologische Räume und $x_i \in X_i$ für $i \in I$. Das **Wedge-Produkt** der Paare (X_i, x_i) ist der topologische Raum

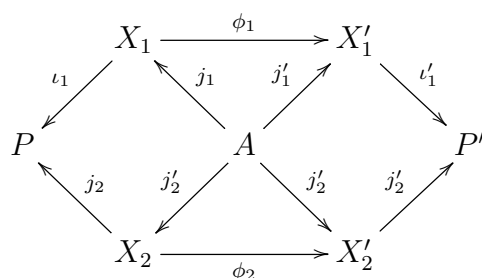
$$\bigvee_{i \in I} X_i = \prod_{i \in I} X_i / \sim \quad \iota_i(x_i) \sim \iota_j(x_j) \quad \forall i, j \in I,$$

wobei $\iota_i : X_i \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ die Inklusionsabbildung für die topologische Summe bezeichnet, und $\bigvee_{i \in I} X_i$ mit der durch die Summentopologie auf $\prod_{i \in I} X_i$ induzierten Quotiententopologie ausgestattet wird.

Zeigen Sie, dass das Wedge-Produkt ein Koproduct in der Kategorie Top^* der punktierten topologischen Räume definiert.

Aufgabe 90: (Eindeutigkeit von Pushouts)

Sei \mathcal{C} eine Kategorie, $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$ und $j_i : A \rightarrow X_i$ und $j'_i : A \rightarrow X'_i$ Morphismen in \mathcal{C} für $i = 1, 2$. Sei (P, ι_1, ι_2) das Pushout von X_1 und X_2 entlang j_1, j_2 und (P', ι'_1, ι'_2) das Pushout von X'_1 und X'_2 entlang j'_1, j'_2 .



Zeigen Sie: Gibt es Isomorphismen $\phi_i : X_i \rightarrow X'_i$ in \mathcal{C} mit $\phi \circ j_i = j'_i$, so gibt es genau einen Morphismus $f : P \rightarrow P'$ mit $f \circ \iota_i \circ \phi_i^{-1} = \iota'_i$ für $i = 1, 2$, und dieser ist ein Isomorphismus.

Aufgabe 91: (freie Erzeugung von Gruppen) Zeigen Sie, dass man einen Funktor $F : \text{Set} \rightarrow \text{Grp}$ erhält, wenn man jeder Menge M die Gruppe $F(M) = M^* = \star_M \mathbb{Z}$ und jeder Abbildung $f : M \rightarrow N$ den induzierten Gruppenhomomorphismus $F(f) = f^* : M^* \rightarrow N^*$ mit $f \circ \iota_m = \iota_{f(m)}$ für alle $m \in M$ zuordnet, wobei $\iota_m : \mathbb{Z} \rightarrow M^*$ die Inklusionsabbildungen bezeichnen.

Aufgabe 92: (Präsentation von Gruppen) Zeigen Sie:

- (a) Die Gruppe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ besitzt die Präsentation $\langle a \mid a^n = 1 \rangle$.
- (b) Die Gruppe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ besitzt die Präsentation $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} = 1 \rangle$.
- (c) Die **modulare Gruppe** $\text{PSL}(2, \mathbb{Z}) = \{M \in \text{Mat}(2, \mathbb{Z}) \mid \det M = 1\} / \{\pm 1\}$ besitzt die Präsentation $\text{PSL}(2, \mathbb{Z}) = \{S, T \mid S^2 = 1, (ST)^3 = 1\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

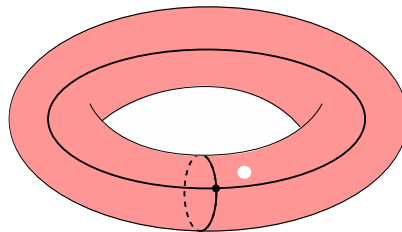
Hinweis: Betrachten Sie in (c) die Matrizen

$$s = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

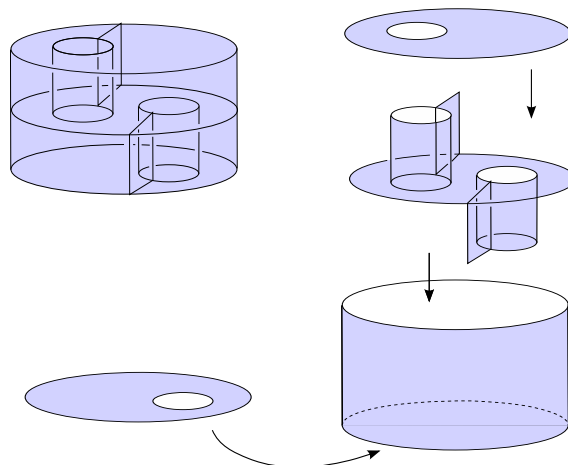
8.6 Aufgaben zu Kapitel 6

Aufgabe 93: (Deformationsretrakt des punktierten Torus)

Zeigen Sie durch Visualisieren einer geeigneten Homotopie, dass der eingezeichnete Graph ein Deformationsretrakt des punktierten Torus ist.



Aufgabe 94: (Bings Haus) Der folgende Teilraum $B \subseteq \mathbb{R}^3$ ist unter dem Namen **Bings Haus** bekannt. Zeigen Sie durch Visualisieren einer geeigneten Homotopie, dass er ein Deformationsretrakt von $D^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| \leq 1\}$ und damit kontrahierbar ist.



Aufgabe 95: (homotopieäquivalent, aber nicht homöomorph) Zeigen Sie, dass die folgenden topologischen Räume vom selben Homotopietyp sind, aber keiner dieser topologischen Räume zu einem der anderen homöomorph ist.

- (i) der Kreis S^1 ,
- (ii) der Kreisring $R = \{x \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} < x_1^2 + x_2^2 < \frac{3}{2}\} \subseteq \mathbb{R}^2$,
- (iii) der Produktraum $S^1 \times D^2$.

Aufgabe 96: (Homotopieäquivalenzen und (Weg)zusammenhangskomponenten)

Seien (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) topologische Räume. Wir bezeichnen mit $W(x)$ die Wegzusammenhangskomponente und mit $C(x)$ die Zusammenhangskomponente eines Punktes $x \in X$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist $f : X \rightarrow Y$ eine Homotopieäquivalenz, so induziert f eine Bijektion

$$w(f) : W_X = \{W(x) \mid x \in X\} \rightarrow W_Y = \{W(y) \mid y \in Y\}, \quad W(x) \mapsto W(f(x)).$$

(b) Ist $f : X \rightarrow Y$ eine Homotopieäquivalenz, so induziert f eine Bijektion

$$c(f) : C_X = \{C(x) \mid x \in X\} \rightarrow C_Y = \{C(y) \mid y \in Y\}, \quad C(x) \mapsto C(f(x)).$$

(c) Der Sinusraum ist nicht homotopieäquivalent zu \mathbb{R} oder zu $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Der topologische Raum \mathbb{Q} ist nicht homotopieäquivalent zu $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Aufgabe 97: (Homöomorphismengruppen) Sei (X, \mathcal{O}_X) ein topologischer Raum und $(\text{Homöo}(X), \circ)$ die Gruppe der Homöomorphismen $\phi : X \rightarrow X$.

- (a) Zeigen Sie, dass die Homöomorphismen $\phi : X \rightarrow X$, die homotop zur Identitätsabbildung $\text{id}_X : X \rightarrow X$ sind, eine normale Untergruppe $\text{Homöo}_0(X) \subseteq \text{Homöo}(X)$ bilden.
- (b) Zeigen Sie, dass die Homotopieklassen von Homöomorphismen $\phi : X \rightarrow X$ mit der durch die Verkettung induzierten Verknüpfung eine Gruppe bilden.
- (c) Zeigen Sie, dass die Gruppe aus (b) isomorph ist zur Gruppe $\text{Homöo}(X)/\text{Homöo}_0(X)$.

Aufgabe 98: (Homotopien und Gruppenwirkungen) Sei (G, \mathcal{O}_G) eine wegzusammenhängende topologische Gruppe und $\triangleright : G \times X \rightarrow X$ eine topologische Gruppenwirkung von (G, \mathcal{O}_G) auf einen topologischen Raum (X, \mathcal{O}_X) . Zeigen Sie, dass für alle $g \in G$ die stetige Abbildung $L_g : X \rightarrow X, x \mapsto g \triangleright x$ homotop zu $\text{id}_X : X \rightarrow X$ ist.

Aufgabe 99: (Retrakte kontrahierbarer Räume sind kontrahierbar)

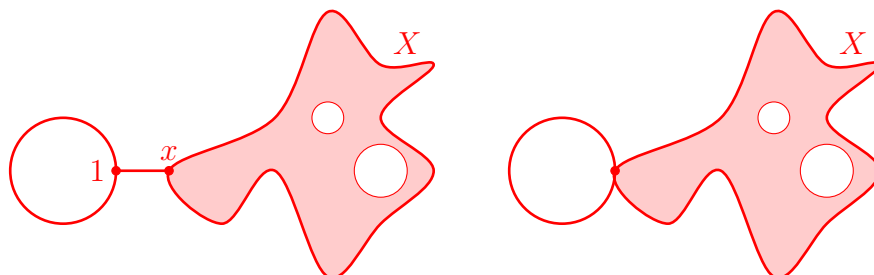
Zeigen Sie, dass jeder Retrakt eines kontrahierbaren topologischen Raums kontrahierbar ist.

Aufgabe 100: (Charakterisierung von Kontrahierbarkeit durch Abbildungen)

Sei (X, \mathcal{O}_X) ein topologischer Raum. Zeigen Sie:

- (a) (X, \mathcal{O}_X) ist kontrahierbar genau dann, wenn jede stetige Abbildung $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ nullhomotop ist.
- (b) (X, \mathcal{O}_X) ist kontrahierbar genau dann, wenn jede stetige Abbildung $f : (W, \mathcal{O}_W) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ nullhomotop ist.

Aufgabe 101: (Wedge Produkte durch Anheften) Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum und $x \in X$. Zeigen Sie, dass der topologische Raum $[-1, 1] +_f (S^1 + X)$, der entsteht, indem man eine 1-Zelle $[-1, 1]$ mit der Abbildung $f : \{\pm 1\} \rightarrow S^1 + X$, $f(1) = \iota_1(1)$ und $f(-1) = \iota_2(x)$ an den topologischen Raum $S^1 + X$ anheftet, homotopieäquivalent zum Wedge Produkt $S^1 \vee X$ in den Punkten $1 \in S^1$ und $x \in X$ ist.



Aufgabe 102: (Abbildungszylinder) Seien (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) topologische Räume. Der **Abbildungszylinder** einer stetigen Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist der topologische Raum $C_f = (X \times [0, 1]) +_{f'} Y$ der entsteht, wenn man $X \times [0, 1]$ mit der Anheftungsabbildung $f' : X \times \{1\} \rightarrow Y$, $(x, 1) \mapsto f(x)$ an Y anheftet. Zeigen sie, dass Y ein Deformationsretrakt von C_f ist.

Aufgabe 103: (Möbiusband als Abbildungszylinder) Zeigen Sie, dass das Möbiusband $M = [0, 1] \times [0, 1] / \sim$ mit $(0, y) \sim (1, 1 - y)$ für alle $y \in [0, 1]$ homöomorph zu einem Abbildungszylinder ist.

Aufgabe 104: (Fundamentalgruppe einer topologischen Gruppe)

Sei (G, \cdot) eine topologische Gruppe mit neutralem Element $e \in G$. Zeigen Sie:

- Für alle Wege $\gamma_1, \gamma_2 \in W(e, e, G)$ sind $\gamma_2 \star \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow G$ und $\gamma_1 \cdot \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow G$, $t \mapsto \gamma_1(t) \cdot \gamma_2(t)$ homotop.
- Die Fundamentalgruppe $\pi_1(e, G)$ ist abelsch.

Aufgabe 105: (Fundamentalgruppe des Produktraums)

Seien (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) topologische Räume. Zeigen Sie: für alle Punkte $x \in X$ und $y \in Y$ gilt $\pi_1((x, y), X \times Y) \cong \pi_1(x, X) \times \pi_1(y, Y)$.

Aufgabe 106: (Abelizität der Fundamentalgruppe) Sei (X, \mathcal{O}_X) ein wegzusammenhängender topologischer Raum. Zeigen Sie, dass die Fundamentalgruppe $\pi_1(x, X)$ abelsch ist genau dann, wenn die Gruppenisomorphismen $\Phi_{[\gamma]} : \pi_1(x, X) \rightarrow \pi_1(y, X)$, $[\beta] \mapsto [\gamma] \cdot [\beta] \cdot [\gamma]^{-1}$ für alle Wege $\gamma \in W(x, y, X)$ übereinstimmen.

Aufgabe 107: (Fundamentalgruppen und topologische Gruppenwirkungen)

Sei (G, \mathcal{O}_G) eine wegzusammenhängende topologische Gruppe und $\triangleright : G \times X \rightarrow X$ eine topologische Gruppenwirkung auf einen topologischen Raum (X, \mathcal{O}_X) . Zeigen Sie:

- Für jeden Punkt $x \in X$ definiert die Gruppenwirkung $\triangleright : G \times X \rightarrow X$ einen Gruppenhomomorphismus $\phi_x : \pi_1(e, G) \rightarrow \pi_1(x, X)$.

(b) Das Bild von ϕ_x ist im Zentrum von $\pi_1(x, X)$:

$$\phi_x([\gamma]) \cdot [\delta] = [\delta] \cdot \phi_x([\gamma]) \quad \text{für alle } \gamma \in W(e, e, G), \delta \in W(x, x, X).$$

Aufgabe 108: (Bilder aufhängen mit Topologie) Ist es möglich, ein Bild mit einer Schnur so an zwei in eine Wand geschlagenen Nägeln aufzuhängen, dass das Entfernen eines der beiden Nägel immer zum Herunterfallen des Bilds führt?

Aufgabe 109: (Windungszahl) Sei $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Für einen Punkt $w \in \mathbb{C} \setminus \gamma(S^1)$ definiert man die **Windungszahl** von γ um w durch

$$W_\gamma(w) = \deg(f_w) \quad \text{mit } f_w : S^1 \rightarrow S^1, \quad z \mapsto \frac{\gamma(z) - w}{|\gamma(z) - w|}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{C} \setminus \gamma(S^1)$ genau eine unbeschränkte Zusammenhangskomponente besitzt.
 (b) Zeigen Sie, dass $W_\gamma : \mathbb{C} \setminus \gamma(S^1) \rightarrow \mathbb{Z}$ auf den Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \setminus \gamma(S^1)$ konstant ist.
 (c) Zeigen Sie, dass W_γ auf der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \gamma(S^1)$ den Wert 0 annimmt.

Aufgabe 110: (Windungszahl und Residuen)

Für ein Polynom $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ohne Nullstellen in S^1 definieren wir

$$W(p) = \deg(\bar{p}) \quad \text{mit } \bar{p} : S^1 \rightarrow S^1, \quad \bar{p}(z) = \frac{p(z)}{|p(z)|}.$$

Zeigen Sie, dass $W(p)$ gleich der Summe der Multiplizitäten aller Nullstellen von p in der Kreisscheibe $\mathring{D}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ ist.

Aufgabe 111: (Fortsetzbarkeit auf die Kreisscheibe) Sei (X, \mathcal{O}_X) ein topologischer Raum. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (i) Jede stetige Abbildung $f : S^1 \rightarrow X$ ist nullhomotop.
 (ii) Jede stetige Abbildung $f : S^1 \rightarrow X$ kann zu einer stetigen Abbildung $\bar{f} : D^2 \rightarrow X$ mit $\bar{f}|_{\partial D^2} = f$ fortgesetzt werden.
 (iii) Alle Wege $\gamma, \gamma' : [0, 1] \rightarrow X$ mit $\gamma(0) = \gamma'(0)$ und $\gamma(1) = \gamma'(1)$ sind homotop.

Aufgabe 112: (Eigenschaften des Abbildungsgrads) Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Sind $f, g : S^1 \rightarrow S^1$ stetig mit $f(z) \neq g(z)$ für alle $z \in S^1$, so gilt $\deg(f) = \deg(g)$.
 (b) Ist $n \in \mathbb{N}$ und $f : S^1 \rightarrow S^1$ stetig mit $\deg(f) = 0 \pmod n$, so gibt es eine stetige Abbildung $g : S^1 \rightarrow S^1$ mit $f = g^n$.
 (c) Ist $w = \exp(1/n)$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $f : S^1 \rightarrow S^1$ stetig mit $f(wz) = f(z)$ für alle $z \in S^1$, so ist $\deg(f) = 0 \pmod n$.

8.7 Aufgaben zu Kapitel 7

Aufgabe 113: (Homöomorphieklassen und Homotopietypen von Buchstaben)

Bestimmen Sie die Homöomorphieklassen und Homotopieäquivalenzklassen der folgenden Menge von den Buchstaben. Dabei sollen genau die abgebildeten Buchstaben betrachtet und als Kombination von Geraden- und Kreissegmenten im \mathbb{R}^2 aufgefasst werden, also als unendlich dünne Buchstaben:

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

Aufgabe 114: (Fundamentalgruppe des $\mathbb{R}P^2$) Der reell-projektive Raum $\mathbb{R}P^2$ ist der Quotient D^2/\sim bezüglich der Äquivalenzrelation $z \sim -z$ für alle $z \in S^1 = \partial D^2$. Bestimmen Sie mit dem Satz von Seifert und van Kampen eine Präsentation der Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{R}P^2)$.

Aufgabe 115: (Fundamentalgruppe der Kleinschen Flasche) Die Kleinsche Flasche ist der Quotient $K = [0, 1] \times [0, 1]/\sim$ bezüglich der Äquivalenzrelation $(x, 0) \sim (x, 1)$ und $(0, y) \sim (1, 1 - y)$ für alle $x, y \in [0, 1]$. Bestimmen Sie mit dem Satz von Seifert und van Kampen eine Präsentation der Fundamentalgruppe $\pi_1(K)$.

Aufgabe 116: (Narrenkappen) Sei $f : S^1 \rightarrow S^1$ eine stetige Abbildung mit Abbildungsgrad $\deg(f) = n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes von Seifert und van Kampen die Fundamentalgruppe $\pi_1(D^2 +_f S^1)$ des topologischen Raums $D^2 +_f S^1$, der entsteht, wenn man die 2-Zelle D^2 mit f an S^1 anheftet.

Hinweis: Diesen topologischen Raum bezeichnet man auch als n -fache **Narrenkappe**.

Aufgabe 117: (Fundamentalgruppe des Komplements von Geraden) Seien $n \in \mathbb{N}$ verschiedene Geraden g_1, \dots, g_n durch den Ursprung im \mathbb{R}^3 gegeben. Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus (\cup_{k=1}^n g_k))$ des Komplements $\mathbb{R}^3 \setminus (\cup_{k=1}^n g_k)$.

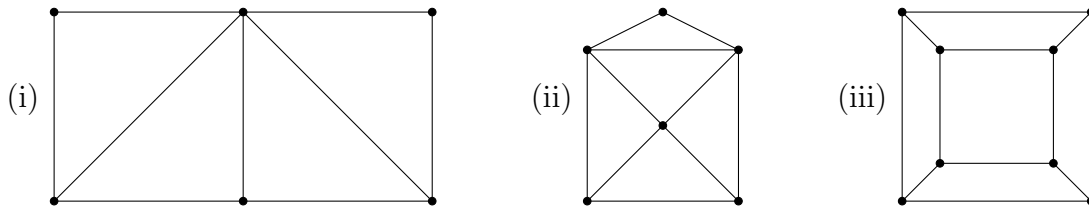
Aufgabe 118: (Fundamentalgruppe des Komplements von parallelen Geraden)

Seien $n \in \mathbb{N}$ verschiedene parallele affine Geraden g_1, \dots, g_n im \mathbb{R}^3 gegeben. Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus (\cup_{k=1}^n g_k))$ des Komplements $\mathbb{R}^3 \setminus (\cup_{k=1}^n g_k)$.

Aufgabe 119: (Fundamentalgruppe von Graphen)

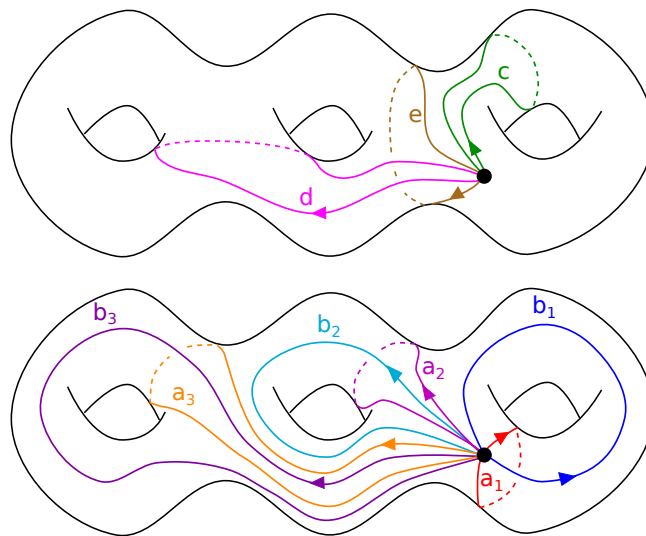
- Ein endlicher **Graph** ist ein topologischer Raum X , der durch Anheften endlich vieler 1-Zellen an eine endliche diskrete Menge X_0 entsteht.
 - Die Elemente von X_0 heißen **Vertizes** des Graphen X .
 - Die Zusammenhangskomponenten von $X \setminus X_0$ heißen **Kanten** des Graphen X .
 - Ist X wegzusammenhängend, so ist ein **Spannbaum** $T \subseteq X^1$ definiert als ein maximaler 1-zusammenhängender Teilgraph $T \subseteq X$.
- (a) Zeigen Sie mit Hilfe eines Spannbaums, dass jeder wegzusammenhängende endliche Graph X homotopieäquivalent zu einem Bouquet ist.

(b) Bestimmen Sie die Fundamentalgruppen der folgenden Graphen



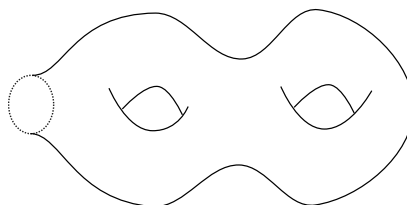
Aufgabe 120: (Homotopieklassen von Wegen durch Erzeuger beschreiben)

Drücken Sie die Homotopieklassen der eingezeichneten Wege c, d, e als Produkte der Homotopieklassen der Wege a_i, b_i und ihrer Inversen aus.



Aufgabe 121: (Fläche vom Geschlecht g mit ausgeschnittener Scheibe)

Zeigen Sie, dass der Rand der ausgeschnittenen Scheibe kein Retrakt der Fläche ist.



Index

- G -Raum, 165
- T_0 -Raum, 42
- T_1 -Raum, 42
- T_2 -Raum, 43
- T_3 -Raum, 43
- T_4 -Raum, 43
- ϵ - δ -Kriterium, 28
- k -Skelett, 70
- n -Zellen, 70
- p -Norm, 14
- Äquivalenz
 - Abstandsfunktionen, 16
 - Metriken, 16
 - Normen, 157
- Äquivalenz von Kategorien, 98
- äquivalent
 - Kategorien, 98
- 1-zusammenhängend, 120
- 1. Abzählbarkeitsaxiom, 30
- 2-adische Darstellung, 82
- 2. Abzählbarkeitsaxiom, 21
- 3-adische Darstellung, 169

- Abbildungsgrad, 127
- Abbildungszylinder, 178
- abgeschlossen
 - Abbildung, 24
 - Menge, 8
- abgeschlossene Kugel, 11
- Abschluss, 17
- Abstandsfunktion, 11
- Abzählbarkeitsaxiom
 - erstes, 30
 - zweites, 21
- affine algebraische Menge, 15
- Alexandrov-Kompaktifizierung, 89
- Anheften, 69
 - n -Zellen, 70
- Anheftungsabbildung, 69
- Ankleben, 69

- Bahnen
 - Gruppenwirkung, 165
- Bahnenraum, 165
- Banachraum, 65
- Basis, 21
- beschränkt, 81

- Besenraum, 38
- Bings Haus, 176
- Bouquet, 143
- Box-Topologie, 163
- Brouwerscher Fixpunktsatz für $d = 2$, 129

- Cantor-Menge, 169
- Cantor-Raum, 14, 169
- charakteristische Eigenschaft
 - Finaltopologie, 51
 - Initialtopologie, 51
- CW-Komplex, 70

- Deformationsretrakt, 113
- Diagonalabbildung, 164
- dicht, 17
- disjunkte Vereinigung, 59
- diskrete Gruppe, 64
- diskrete Metrik, 14
- diskrete Topologie, 9
- Durchmesser, 81

- Einbettung, 52
- Einbettungssatz von Urysohn, 22
- eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie, 100
- einfach zusammenhängend, 120
- Einpunktkompaktifizierung, 89
- Einpunktraum, 9
- endlich erzeugte Gruppe, 107
- endlich präsentierte Gruppe, 107
- endliche Durchschnittseigenschaft, 84
- endliche Teilüberdeckung, 76
- endlichen, 70
- Endofunktor, 96
- erzeugende Relationen, 107
- Erzeuger, 107
- Erzeugung
 - Topologie, 20
- euklidische Metrik, 14

- Faktorgruppe, 105, 174
- Faserprodukt, 66, 104
- finale Objekt, 102
- Finaltopologie, 50
- folgenkompakt, 82
- folgenstetig, 28
- folgenstetig in einem Punkt, 28
- Fortsetzungssatz von Tietze, 48

freie Gruppe, 107
 freies Produkt
 Gruppen, 102
 Fundamentalgruppe, 116
 Fundamentalgruppoid, 116
 Fundamentalsatz der Algebra, 130
 Funktor, 96
 Funktorkategorie, 98

 Geschlecht, 73
 gröber, 19
 Graph, 70, 180
 Grenzwert, 28
 Gruppenkommutator, 147
 Gruppenwirkung
 topologische, 165
 Gruppoid, 95

 Häufungspunkt, 28
 Hausdorffraum, 10, 43
 hausdorffsch, 10
 Hilbertraum, 65
 Hilbertscher Folgenraum, 82
 Hochhebung, 125
 Hom-Funktoren, 173
 homöomorph, 22
 Homöomorphismus, 22
 homotop, 110
 Wege, 116
 Homotopie, 109
 feste Endpunkte, 116
 relativ zu, 109
 Wege, 116
 homotopieäquivalent, 112
 Homotopieäquivalenz, 112
 Homotopiegruppe, 124
 Homotopiekategorie
 Paare topologischer Räume, 112
 punktierte topologische Räume, 112
 topologische Räume, 112
 Homotopietyp, 112

 Identifizierung, 54
 Identitätsmorphismus, 93
 indiskrete Topologie, 9
 induktiv geordnet, 86
 initiales Objekt, 102
 Initialtopologie, 50
 Inklusionsabbildung
 disjunkte Vereinigung, 59
 Summe topologischer Räume, 59
 Teilraum, 52
 Inneres, 17
 isomorph
 Objekte in Kategorie, 93
 Isomorphismus
 Kategorie, 93
 von topologischen Räumen, 22

 Kanten, 180
 kartesisches Produkt
 Gruppen, 101
 Kategorien, 95
 Mengen, 59
 Ringe, 101
 Kategorie, 92
 \mathbb{K} -Alg, 94
 $\text{Vect}_{\mathbb{K}}$, 93
 Grpd, 97
 Ab, 94
 Field, 94
 Grp, 93
 hTop, 112
 hTop*, 112
 hTop(2), 112
 Ring, 94
 Set, 93
 Top, 93
 Top*, 93
 URing, 94
 Kegel, 57
 kleine Kategorie, 93
 Kleinsche Flasche, 57
 Klumpentopologie, 9
 koabzählbare Topologie, 9, 159
 kofinales Objekt, 102
 kofinite Topologie, 9
 Kollabieren, 57
 Kommutatorgruppe, 174
 kompakt, 76
 kompakt-offene Topologie, 169
 komplex projektiver Raum, 72, 168
 Kompositionsabbildung, 92
 kontrahierbar, 112
 kontravarianter Funktor, 96
 konvergent, 28
 konvex, 37
 Koprodukt
 Kategorie, 100
 Kugel

- abgeschlossene, 11
- offene, 11
- Lebesgue-Zahl, 83
- leere Kategorie, 95
- leerer topologischer Raum, 9
- Lemma von Lebesgue, 83
- Lemma von Urysohn, 46
- Lift, 125
- lokal kleine Kategorien, 93
- lokal wegzusammenhängend, 36
- lokal zusammenhängend, 33
- lokalkompakt, 88
- Möbiustransformationen, 91
- Möbiusband, 56
- Maximumsnorm, 14
- Metrik, 11
- metrische Topologie, 11
- metrischer Raum, 11
- metrisierbar, 15
- modulare Gruppe, 108, 176
- Monoid, 95
- Morphismus
 - Kategorie, 92
 - von Gruppoiden, 97
- Narrenkappe, 180
- natürlich isomorph, 98
- natürliche Transformation, 97
- natürlicher Isomorphismus, 98
- Nebenklassen, 105
- nirgends dicht, 17
- normale Untergruppe, 105
 - Erzeugung, 105
- normaler Raum, 43
- Normalteiler, 105
- nullhomotop, 110
 - Weg, 116
- Nullobjekt, 102
- Objekt, Kategorie, 92
- offen
 - Abbildung, 24
 - Menge, 8
- offene Überdeckung, 76
- offene Kugel, 11
- opponierte Kategorie, 95
- Orbiten, 165
- Ordinalzahlen, 99
- partielle Ordnung, 86
- Präsentation
 - Gruppe, 107
- Produkt
 - Kategorie, 99
 - topologische Räume, 59
- Produktmetrik, 60, 164
- Produkttopologie, 59
- Projektionsabbildungen
 - Produkt topologischer Räume, 59
- Projektionssabbildung
 - kartesisches Produkt, 59
- Pullback, 66
 - Kategorie, 104
- Punkt, 8
- Pushout, 67
 - Kategorie, 104
- quasikompakt, 76
- Quelle, Morphismus, 93
- Quotientenkategorie, 95
- Quotiententopologie, 54
- römische Fläche, 57
- Rand, 17
- reduzierte freie Wörter, 102
- reell projektiver Raum, 57, 72, 168
- regulärer Raum, 43
- Relation, 172
- Reparametrisierungen, 116
- Retrakt, 113
- Retraktion, 113
- Riemannsche Zahlensphäre, 91
- Satz vom Schinkenbrot, 131
- Satz von Borsuk-Ulam, 130
- Satz von der Invarianz des Gebiets, 27
- Satz von Heine-Borel, 77, 88
- Satz von Seifert und van Kampen, 134
 - Fundamentalgruppen, 140
- Satz von Tychonoff, 84, 87
- Schwartz-Raum, 65
- Semimetrik, 13
- Sinusraum, 39
- Skelett, 70
- Spannbaum, 180
- Standardtopologie, 14
- Steinersche Fläche, 57
- stereographische Projektion, 26
- sternförmig, 37

stetig, 22
 stetig in einem Punkt, 27
 Subbasis, 21
 Summe topologischer Räume, 60
 Summentopologie, 60

 Teilüberdeckung, 76
 Teilraumtopologie, 9, 52
 terminales Objekt, 102
 Topologie, 8
 feiner, 19
 gröber, 19
 von Menge erzeugt, 20
 topologische Gruppe, 64
 topologische Mannigfaltigkeit, 72
 topologischer Raum, 8
 topologischer Vektorraum, 65
 Torus, 56
 Torusknoten, 167
 Trennungsaxiome, 42
 trivialer Weg, 115

 Umgebung, 10
 Umgebungsaxiome, 158
 Umgebungsbasis, 30
 Umkehrung
 Weg, 115
 universelle Eigenschaft
 Faktorgruppe, 105
 freies Produkt von Gruppen, 103
 Koprodukt in Kategorie, 100
 Produkt in Kategorie, 99
 Produkttopologie, 61
 Pullback, 66
 Pullback in Kategorie, 104
 Pushout, 68
 Pushout in Kategorie, 104
 Quotientenraum, 55
 Summentopologie, 61
 Teilraum, 53
 Unterkategorie, 95
 Urysohn-Funktion, 46

 Verbindungsstrecke, 37
 Vergissfunktoren, 96
 Verkettung
 Wege, 115
 Verkettung, Funktoren, 96
 Vertizes, 180
 voll, Unterkategorie, 95

 volltreu, 99
 Wedge-Produkt, 68
 Weg, 36
 trivial, 115
 Wegkomponente, 40
 Wegkomponentenfunktor, 97
 wegzusammenhängend, 36
 wesentlich surjektiv, 99
 Windungszahl, 179
 Wirkungsgruppoid, 172

 Zariski-Topologie, 15
 Zellenkomplex, 70
 Ziel, Morphismus, 93
 Zornsches Lemma, 86
 zusammenhängend, 33
 zusammenhängende Summe, 73
 Zusammenhangskomponente, 40
 Zwischenwertsatz, 35
 Zylindermantel, 55