Einführung in die Darstellungstheorie

Karl-Hermann Neeb
(aufbauend auf einem Skriptum von C. Meusburger (SS 2014))

22. Januar 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Ein erster Blick auf den Zoo der Darstellungstheorie

Bevor wir in konkrete Aspekte der Darstellungstheorie einsteigen, wollen wir uns einen Überblick über einige Spielarten der Darstellungstheorie verschaffen, die in dieser Vorlesung eine Rolle spielen werden und die man später in anderen Vorlesungen vertiefen kann.

Zunächst einmal stellt sich die Frage, was dargestellt wird und was darstellen jeweils bedeutet. Der Ausgangspunkt hierbei ist, dass alle Darstellungen, die wir betrachten werden, solche durch Endomorphismen abelscher Gruppen sind.

1.1 Darstellungen von Ringen

Ist M eine abelsche Gruppe, so ist

$$\mathrm{End}(M) = \mathrm{Hom}(M, M) = \{\varphi\colon M \to M\colon (\forall m, n \in M)\, \varphi(m+n) = \varphi(m) + \varphi(n)\}$$

ein Ring bzgl.

$$(\varphi + \psi)(x) := \varphi(x) + \varphi(y), \qquad (\varphi\psi)(x) := \varphi(\psi(x)) \quad \text{für} \quad x \in M, \varphi, \psi \in \mathrm{End}(M).$$

Da $\mathrm{End}(M)$ eine Ringstruktur trägt, bildet die Darstellungstheorie von Ringen den ersten natürlichen Kontext für Darstellungstheorie.

Definition 1.1. Sei R ein Ring. Eine *Darstellung von R auf der abelschen Gruppe M* ist ein Paar (π, M) aus einer abelschen Gruppe M und einem Ringhomomorphismus $\pi\colon R \to \mathrm{End}(M)$, d.h.,

$$\pi(r+s) = \pi(r) + \pi(s) \quad \text{und} \quad \pi(rs) = \pi(r)\pi(s) \quad \text{für} \quad r, s \in R. \tag{1}$$

Hat der Ring R ein Einselement $\mathbf{1} \in R$, so verlangt man in der Regel zusätzlich $\pi(\mathbf{1}) = \mathrm{id}_M$ und spricht dann von einer *Darstellung des unitalen Rings R*.

1.2 Darstellungen von Algebren

Man könnte nun Darstellungstheorie auf dieser Ebene betreiben, dies stellt sich aber strukturell als zu wenig reichhaltig heraus, um eine weitergehende Strukturtheorie zuzulassen. Eine natürliche Art der Anreicherung ist es, statt allgemeiner abelscher Gruppen M Vektorräume V über einem Körper $\mathbb{K}$ zu betrachten. Hier ist die Menge $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ der Vektorraum-Endomorphismen von V nicht nur ein Ring, sondern sogar eine *assoziative $\mathbb{K}$-Algebra*, also ein Vektorraum mit einer bilinearen assoziativen Multiplikation. Dies führt uns zu folgendem Kontext:

Definition 1.2. Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathbb{K}$-Algebra. Eine *Darstellung von $\mathcal{A}$* ist ein Paar (π, V) aus einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V und einem Algebra-Homomorphismus $\pi\colon \mathcal{A} \to \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$, d.h., π ist linear und multiplikativ:

$$\pi(\lambda A) = \lambda\pi(A), \quad \pi(A+B) = \pi(A) + \pi(B) \quad \text{und} \quad \pi(AB) = \pi(A)\pi(B) \tag{2}$$

für $\lambda \in \mathbb{K}, A, B \in \mathcal{A}$.

1.3 Darstellungen von Gruppen

Einen weiteren Aspekt der Darstellungstheorie erhalten wir, wenn wir eine Gruppe G als etwas betrachten, das Symmetrien bzw. Automorphismen mathematischer Strukturen repräsentiert. Für einen Vektorraum V ist die Gruppe $\mathrm{GL}(V) = \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(V) = \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(V)$ der Vektorraum-Automorphismen, d.h. der invertierbaren linearen Abbildungen $g\colon V \to V$, die Symmetriegruppe von V. Entsprechend erhalten wir:

Definition 1.3. Sei G eine Gruppe. Eine *Darstellung von G* ist ein Paar (π, V) aus einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V und einem Gruppenhomomorphismus $\pi\colon G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(V)$, d.h.,

$$\pi(gh) = \pi(g)\pi(h) \quad \text{für} \quad g, h \in G. \tag{3}$$

1.4 Darstellungen von Lie-Algebren

Um Darstellungen von Gruppen zu definieren, haben wir lediglich ausgenutzt, dass $\mathrm{Aut}(V)$ für einen Vektorraum V eine Gruppenstrukur trägt und für Darstellungen von Algebren verwenden wir die Algebra-Struktur von $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$. Man kann von hier aus noch einen Schritt weiter gehen, wenn man auf dem Vektorraum $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ die *Kommutatorklammer*

$$[A, B] := AB - BA \quad \text{für} \quad A, B \in \mathrm{End}(V)$$

betrachtet. Sie definiert eine bilineare Abbildung $\mathrm{End}(V) \times \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V)$ mit den Eigenschaften:

(L1) $[A, A] = 0$ für $A \in \mathrm{End}(V)$.

(L2) $[A, [B, C]] = [[A, B], C] + [B, [A, C]]$ für $A, B, C \in \mathrm{End}(V)$ (Jacobi-Identität).

Hieraus kristallisiert sich die folgende Struktur:

Definition 1.4. Eine *Lie-Algebra* ist ein Paar $(L, [\cdot,\cdot])$, wobei L ein Vektorraum ist und

$$[\cdot,\cdot]\colon L \times L \to L,$$

eine bilineare Abbildung mit

(L1) $[x, x] = 0$ für $x \in L$ und

(L2) $[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]]$ für $x, y, z \in L$ (Jacobi-Identität).

Entsprechend definiert man Darstellungen von Lie-Algebren:

Definition 1.5. Sei $(L, [\cdot,\cdot])$ eine Lie-Algebra. Eine *Darstellung von L* ist ein Paar (π, V) aus einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V und einem Homomorphismus $\pi\colon L \to (\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V), [\cdot,\cdot])$ von Lie-Algebren, d.h., π is linear und erfüllt

$$\pi([x, y]) = \pi(x)\pi(y) - \pi(y)\pi(x) \quad \text{für} \quad x, y \in L.$$

1.5 Ziele der Darstellungstheorie

Das Ziel dieser Einleitung ist es, dem Leser die Vielfalt von Strukturen vor Augen zu führen, für die man Darstellungstheorie betreiben kann. Sie ist mit den aufgeführten Beispieltypen aber noch lange nicht erschöpft. Andererseits kann man zeigen, dass sich die Darstellungstheorie von Gruppen und Lie-Algebren relativ direkt in die Darstellungstheorie einer geeigneten Algebra (die einhüllende Algebra) übersetzen lässt, so dass letztendlich die Darstellungstheorie von Ringen und Algebren auch die anderer Strukturen mit erfassen kann.

Das zentrale Problem der Darstellungstheorie ist die Klassifikation aller Darstellungen bis auf eine geeignet definierte Isomorphie bzw. Äquivalenz. Hierbei geht man wie folgt vor: man zerlegt Darstellungen zunächst in direkte Summe von *unzerlegbaren* Darstellungen. Hierbei bedeutet unzerlegbar zu sein, dass die Darstellung keine echte Zerlegung als direkte Summe zulässt. Das ist insbesondere der Fall, wenn sie *irreduzibel* ist, also gar keine echten Unterdarstellungen besitzt. Die Hauptschwierigkeit besteht nun darin, die irreduziblen bzw. unzerlegbaren Darstellungen zu klassifizieren, d.h. durch geeignete Parameter möglichst explizit zu beschreiben. Das ist im allgemeinen recht schwierig und führt schnell zu ungelösten Problemen.

Um etwas konkreter zu sehen, wie das funktioniert, beginnen wir in Kapitel 3 mit der Darstellungstheorie endlicher Gruppen, in der sich über (algebraisch abgeschlossenen) Körpern der Charakteristik 0 all diese Ziele sehr direkt erreichen lassen. Da wir diese Konstruktionen in der Darstellungstheorie benötigen, schieben wir vorher noch ein kurzes Kapitel zu direkten Summen und Tensorprodukten ein. Sie werden uns helfen, Darstellungen additiv und multiplikativ zu zerlegen.

2 Direkte Summen und Tensorprodukte

Wir beginnen unsere Einführung in die Darstellungstheorie in diesem Abschnitt mit einem systematischen Blick auf direkte Summen und Tensorprodukte von Vektorräumen. Wir werden hier einen besonderen Schwerpunkt auf die universellen Eigenschaften legen, die Summen und Tensorprodukte bis auf Isomorphie eindeutig spezifizieren.

Für die Darstellungstheorie sind beide Konstruktionen von fundamentaler Bedeutung, da es sich bei "Zerlegungen" von Darstellung zunächst einmal um direkte Summen handelt. Andererseits werden multiplikative Zerlegungen benötig, wenn man Vielfachheiten behandeln möchte, mit denen eine irreduzible Darstellung in einer anderen auftritt, aber auch um natürliche Darstellungen auf Räumen linearer und multilinearer Abbildungen zu verstehen.

Wir wiederholen zunächst einige Begriffe aus der linearen Algebra. In diesem Abschnitt sind alle Vektorräume über einem beliebigen aber festen Körper $\mathbb{K}$ definiert.

2.1 Direkte Summen

Definition 2.1. Für zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume A, B schreiben wir $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A, B)$ für den Vektorraum der linearen Abbildungen (Homomorphismen von Vektorräumen) $f\colon A \to B$. Die Vektorraumstruktur ist hier definiert durch punktweise Operationen:

$$(f + \lambda g)(a) := f(a) + \lambda g(a), \qquad \text{für} \quad a \in A, \lambda \in \mathbb{K}, f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A, B).$$

Definition 2.2. Sei $(A_j)_{j\in J}$ eine Familie von Vektorräumen.

(a) Wir definieren das *direkte Produkt der Vektorräume* $(A_j)_{j\in J}$ als

$$\prod_{j\in J} A_j = \Big\{a\colon J \to \dot{\bigcup}_{j\in J} A_j \colon (\forall j \in J)\ a_j = a(j) \in A_j\Big\} = \{(a_j)_{j\in J} \colon (\forall j \in J)\ a_j \in A_j\}.$$

Elemente der Produktmenge schreiben wir als Tupel $(a_j)_{j\in J}$. Die Vektorraumstruktur ist komponentenweise erklärt:

$$(x_j)_{j\in J} + \lambda(y_j)_{j\in J} := (x_j + \lambda y_j)_{j\in J}.$$

Sind alle A_j gleich einem Vektorraum A, so erhalten wir den Vektorraum A^J aller Funktionen $x\colon J \to A$.

(b) Die *direkte Summe der Vektorräume* $(A_j)_{j\in J}$ ist der Untervektorraum

$$\bigoplus_{j\in J} A_j := \Big\{(x_j) \in \prod_{j\in J} A_J \colon |\{j \in J \colon x_j \neq 0\}| < \infty\Big\}$$

derjenigen Tupel, die nur endlich viele Einträge $\neq 0$ haben. Sind alle A_j gleich einem Vektorraum A, so erhalten wir den Vektorraum $A^{(J)}$ aller Funktionen $a\colon J \to A$, die nur an endlich vielen Stellen nicht verschwinden.

In der Mathematik sind viele Konstruktionen dadurch motiviert, dass man durch sie neue Objekte erhält, die durch gewisse (universelle) Eigenschaften eindeutig (bis auf Isomorphie) bestimmt sind. Wir werden später im Rahmen der Kategorientheorie sehen, wie man damit systematisch umgeht. Bis wir soweit sind, studieren wir diese Eigenschaften beispielhaft.

Lemma 2.3. (Universelle Eigenschaft direkter Summen) *Sei* $(A_j)_{j\in J}$ *eine Familie von Vektorräumen und*

$$\eta_j \colon A_j \to \bigoplus_{k\in J} A_k, \quad \eta_j(a) = \delta_j \cdot a, \qquad \eta_j(a)_k = \begin{cases} a & \textit{für } k = j \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

die kanonische Einbettung. Sei weiter M *ein* $\mathbb{K}$*-Vektorraum. Dann existiert zu jeder Familie* $(f_j)_{j\in J}$ *von linearen Abbildungen* $f_j \colon A_j \to M$ *genau ein Homomorphismus*

$$f\colon \bigoplus_{j\in J} A_j \to M \quad \textit{mit} \quad f\circ\eta_j = f_j \quad \textit{für alle} \quad j\in J.$$

Wir erhalten so für jeden Vektorraum M *einen Isomorphismus von Vektorräumen*

$$\Phi\colon \operatorname{Hom}\left(\bigoplus_{j\in J} A_j, M\right) \to \prod_{j\in J} \operatorname{Hom}(A_j, M), \quad f\mapsto (f\circ\eta_j)_{j\in J}. \tag{4}$$

Beweis. **Existenz von f:** Wir definieren

$$f\colon D := \bigoplus_{j\in J} A_j \to M, \quad f((a_j)_{j\in J}) := \sum_{j\in J} f_j(a_j)$$

und beachten, dass das sinnvoll ist, da nur endlich viele a_j von 0 verschieden sind. Die Summe auf der rechten Seite ist daher endlich. Man überzeugt sich leicht davon, dass f linear ist. Aus der Definition folgt unmittelbar $f\circ\eta_j = f_j$.

Eindeutigkeit von f: Der Vektorraum D wird von den Unterräumen $\eta_j(A_j)\cong A_j$ erzeugt und durch die Bedingung $f\circ\eta_j = f_j$ werden die Werte von f auf diesen Unterräumen festgelegt. Dadurch ist f eindeutig bestimmt.

Damit ist gezeigt, dass die Abbildung Φ in (4) bijektiv ist. Dass Φ linear ist, folgt aus

$$\Phi(f+\lambda g) = ((f+\lambda g)\circ\eta_j)_{j\in J} = (f\circ\eta_j + \lambda g\circ\eta_j)_{j\in J} = \Phi(f) + \lambda\Phi(g)$$

für $f, g\in \operatorname{Hom}(D, M), \lambda\in\mathbb{K}$. □

Lemma 2.4. (Universelle Eigenschaft direkter Produkte) *Sei* $(A_j)_{j\in J}$ *eine Familie von Vektorräumen und*

$$p_j\colon \prod_{k\in J} A_k \to A_j, \quad p_j((a_k)_{k\in J}) := a_j$$

die Projektionsabbildungen auf die Faktoren. Dann existiert zu jeder Familie $(f_j)_{j\in J}$ linearer Abbildungen $f_j\colon M \to A_j$ genau eine lineare Abbildung

$$f\colon M \to \prod_{j\in J} A_j \quad \textit{mit} \quad p_j \circ f = f_j \quad \textit{für alle} \quad j \in J.$$

Wir erhalten so für jeden Vektorraum M einen linearen Isomorphismus

$$\Phi\colon \operatorname{Hom}\Big(M, \prod_{j\in J} A_j\Big) \to \prod_{j\in J} \operatorname{Hom}(M, A_j), \quad f \mapsto (p_j \circ f)_{j\in J}. \tag{5}$$

Beweis. Wir setzen $f(m) := (f_j(m))_{j\in J}$. Die Eindeutigkeit von f ist klar, da die Bedingungen $p_j \circ f = f_j$ festlegen, was die Komponenten von $f(m)$ sein müssen. Damit ist gezeigt, dass Φ in (5) bijektiv ist und man verifiziert leicht, dass Φ auch linear ist. □

Bemerkung 2.5. (Matrixzerlegung von Endomorphismen) Sind $(A_k)_{k\in K}$ und $(B_j)_{j\in J}$ Vektorräume, so haben wir lineare Isomorphismen

$$\operatorname{Hom}\Big(\bigoplus_{k\in K} A_k, \prod_{j\in J} B_j\Big) \cong \prod_{k\in K} \operatorname{Hom}\Big(A_k, \prod_{j\in J} B_j\Big) \cong \prod_{k\in K}\prod_{j\in J} \operatorname{Hom}(A_k, B_j).$$

Das ist eine abstrakte Form der Matrixdarstellung von linearen Abbildungen. Entsprechend schreiben wir für $\varphi \in \operatorname{Hom}\Big(\bigoplus_{k\in K} A_k, \prod_{j\in J} B_j\Big)$ dann auch

$$\varphi_{jk} = p_j \circ \varphi \circ \eta_k\colon A_k \to B_j$$

für die lineare Abbildung, die wir durch Einschränkung der $j$ten Komponente φ auf den Unterraum A_k der direkten Summe erhalten.

Definition 2.6. Sei M eine Menge. Wir schreiben $F(M) := \mathbb{K}^{(M)} = \oplus_{m\in M}\mathbb{K}$ für den *freien Vektorraum über M*. Das ist der Unterraum des kartesischen Produkts $\mathbb{K}^M$, also des Raums aller Funktionen $M \to K$, der aus den Elementen $(z_j)_{j\in M}$ besteht, für die nur endlich viele Komponenten z_j von Null verschieden sind. Eine Basis dieses Raums bilden die "δ-Funktionen" $\delta_m(n) = \delta_{mn}$ (Leichter Nachweis als Übung).

Lemma 2.7. (Universelle Eigenschaft des freien Vektorraums) *Sei M eine Menge. Die Abbildung*

$$\eta_M\colon M \to F(M), \qquad \eta_M(m) = \delta_m := (\delta_{mn})_{n\in M}$$

hat die folgende universelle Eigenschaft. Zu jeder Abbildung $f\colon M \to V$ in einen Vektorraum V existiert genau eine lineare Abbildunge $\widehat{f}\colon F(M) \to V$ mit $\widehat{f} \circ \eta_M = f$.

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt aus der Tatsache, dass $F(M)$ von den Deltafunktionen $(\delta_m)_{m\in M}$ als Vektorraum erzeugt wird. Die Existenz folgt aus der Beobachtung, dass diese Elemente eine Basis von $F(M)$ bilden. □

2.2 Tensorprodukte von zwei Vektorräumen

Definition 2.8. Seien V und W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume. Ein Paar (η, U) aus einem Vektorraum U und einer bilinearen Abbildung $\eta\colon V \times W \to U$ heißt *Tensorprodukt von V und W*, wenn es folgende universelle Eigenschaft besitzt: Zu jeder bilinearen Abbildung

$$f\colon V \times W \to X$$

in einen Vektorraum X existiert genau eine lineare Abbildung $\widetilde{f}\colon U \to X$ mit $\widetilde{f} \circ \eta = f$.

Lemma 2.9. (Eindeutigkeit von Tensorprodukten) *Sind (η, U) und (η', U') zwei Tensorprodukte von V und W, so existiert ein linearer Isomorphismus $\Gamma\colon U \to U'$ mit $\Gamma \circ \eta = \eta'$.*

Beweis. Da die Abbildung $\eta'\colon V \times W \to U'$ bilinear ist, existiert gemäß der universellen Eigenschaft von (η, U) genau eine lineare Abbildung $\alpha\colon U \to U'$ mit $\alpha \circ \eta = \eta'$. Ebenso finden wir mit der universellen Eigenschaft von (η', U') eine lineare Abbildung $\beta\colon U' \to U$ mit $\beta \circ \eta' = \eta$. Dann ist $\beta \circ \alpha\colon U \to U$ eine lineare Abbildung mit

$$\beta \circ \alpha \circ \eta = \beta \circ \eta' = \eta = \mathrm{id}_U \circ \eta.$$

Aus der Eindeutigkeit in der universellen Eigenschaft von (η, U) folgt daher $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}_U$. Analog erhalten wir $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}_{U'}$. Also ist $\alpha\colon U \to U'$ ein linearer Isomorphismus mit $\alpha^{-1} = \beta$. □

Das obige Lemma besagt, dass Tensorprodukte bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt sind. Nachdem wir die Eindeutigkeit des Tensorprodukts eingesehen haben, beweisen wir nun seine Existenz.

Definition 2.10. Seien V und W Vektorräume. In dem freien Vektorraum $F(V \times W)$ betrachten wir den Unterraum U, der von allen Elementen der Gestalt

$$\delta_{(v_1+v_2,w)} - \delta_{(v_1,w)} - \delta_{(v_2,w)}, \quad \delta_{(v,w_1+w_2)} - \delta_{(v,w_1)} - \delta_{(v,w_2)},$$

und

$$\lambda\delta_{(v,w)} - \delta_{(v,\lambda w)}, \quad \lambda\delta_{(v,w)} - \delta_{(\lambda v,w)}$$

erzeugt wird. Wir definieren

$$V \otimes W := F(V \times W)/U \quad \text{und} \quad v \otimes w := \delta_{(v,w)} + U.$$

Lemma 2.11. *Für die Abbildung*

$$b\colon V \times W \to V \otimes W, \quad (v, w) \mapsto v \otimes w$$

ist $(b, V \otimes W)$ ein Tensorprodukt von V und W.

Beweis. Die Bilinearität von b folgt aus der Definition von $V \otimes W$. Z.B. ist

$$b(v_1 + v_2, w) = \delta_{(v_1+v_2,w)} + U = \delta_{(v_1,w)} + \delta_{(v_2,w)} + U = b(v_1, w) + b(v_2, w)$$

und

$$b(\lambda v, w) = (\lambda v, w) + U = \lambda(v, w) + U = \lambda \cdot ((v, w) + U).$$

Ebenso folgt die Linearität im zweiten Argument.

Sei nun $f \colon V \times W \to X$ eine bilineare Abbildung. Da $F(V \times W)$ von der Teilmenge $\{\delta_{(v,w)} \colon v \in V, w \in W\}$ erzeugt wird, wird der Quotientenraum $V \otimes W$ von $b(V \times W) = \{\delta_{(v,w)} + U \colon v \in V, w \in W\}$ erzeugt. Hieraus folgt sofort die Eindeutigkeit von $\widetilde{f}$.

Um die Existenz von $\widetilde{f}$ einzusehen, verwenden wir zuerst die universelle Eigenschaft von $F(V \times W)$ (Lemma 2.7), um eine lineare Abbildung

$$\widehat{f} \colon F(V \times W) \to X \quad \text{mit} \quad \widehat{f}(\delta_{(v,w)}) = f(v, w) \quad \text{für alle} \quad (v, w) \in V \times W$$

zu erhalten. Aus der Bilinearität von f folgt nun $U \subseteq \ker \widehat{f}$. Also faktorisiert $\widehat{f}$ zu einer linearen Abbildung $\widetilde{f} \colon V \otimes W \to X$ mit $\widetilde{f}(v \otimes w) = \widehat{f}(\delta_{(v,w)}) = f(v, w)$ für alle $(v, w) \in V \times W$. $\square$

Bemerkung 2.12. In Aufgabe 2.2 wird gezeigt, wie man eine Basis des Tensorprodukts $V \otimes W$ erhält. Dazu sei $B_V = \{e_i \colon i \in I\}$ bzw. $B_W = \{f_j \colon j \in J\}$ eine Basis von V bzw. W. Dann ist

$$B_V \otimes B_W := \{e_i \otimes f_j \colon i \in I, j \in J\}$$

eine Basis des Vektorraums $V \otimes W$. Sind V und W endlichdimensional, so erhalten wir insbesondere die Formel

$$\dim(V \otimes W) = \dim V \cdot \dim W.$$

Bemerkung 2.13.

(a) Seien X, Y und Z Vektorräume. Dann erhalten wir eine Abbildung

$$\Gamma \colon \operatorname{Hom}(X \otimes Y, Z) \to \operatorname{Bil}(X \times Y, Z), \quad \Gamma(\varphi)(x, y) := \varphi(x \otimes y),$$

wobei $\operatorname{Bil}(X \times Y, Z)$ den Raum der bilinearen Abbildungen von $X \times Y$ nach Z bezeichnet. Die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts bedeutet, dass diese Abbildung Γ bijektiv ist. Sie übersetzt lineare in bilineare Abbildungen. Da Γ bzgl. der kanonischen Vektorraumstruktur linear ist, ist Γ sogar ein linearer Isomorphismus.

Für den Spezialfall $Z = \mathbb{K}$ erhalten wir so einen Isomorphismus

$$\Gamma \colon (X \otimes Y)^* \to \operatorname{Bil}(X \times Y, \mathbb{R}), \quad \Gamma(\alpha)(x, y) := \alpha(x \otimes y).$$

(b) Von besonderem Interesse ist auch die Beziehung zwischen dem Tensorprodukt $X^* \otimes Y$ und dem Raum $\mathrm{Hom}(X, Y)$ der linearen Abbildungen von X nach Y. Wir beobachten zunächst, dass wir eine natürliche lineare Abbildung

$$\Gamma\colon X^* \otimes Y \to \mathrm{Hom}(X, Y), \quad \Gamma(\alpha \otimes y)(x) := \alpha(x)y$$

haben. Um die Existenz dieser Abbildung einzusehen, verwenden wir die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts. Dazu muss man zeigen, dass die Abbildung

$$\widetilde{\Gamma}\colon X^* \times Y \to \mathrm{Hom}(X, Y), \quad \widetilde{\Gamma}(\alpha, y)(x) := \alpha(x)y$$

bilinear ist, was sich aus einer trivialen Rechnung ergibt.

Das Tensorprodukt $X^* \otimes Y$ besteht aus endlichen Summen der Gestalt

$$A := \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \otimes y_j, \quad \alpha_j \in X^*, y_j \in Y.$$

Für die zugeordnete lineare Abbildung $\Gamma(A)$ ist dann $\mathrm{im}(\Gamma(A)) \subseteq \mathrm{span}\{y_1, \ldots, y_k\}$. Insbesondere ist das Bild von $\Gamma(A)$ immer endlichdimensional. Ist $X = Y$ unendlichdimensional, so liegt id_X nicht im Bild von Γ. Insbesondere ist Γ nicht surjektiv.

Wir nehmen nun an, dass X und Y **endlichdimensional** sind. Dann ist zunächst

$$\dim(X^* \otimes Y) = \dim X^* \cdot \dim Y = \dim X \dim Y = \dim \mathrm{Hom}(X, Y)$$

(Bemerkung 2.12). Ist $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis von X, $b_1^*, \ldots, b_n^*$ die duale Basis von X^* und $c_1, \ldots, c_m$ eine Basis von Y, so erhalten wir

$$\Gamma(b_j^* \otimes c_i)(b_k) = b_j^*(b_k)c_i = \delta_{jk}c_i.$$

Die Matrix der lineren Abbildung $\Gamma(b_j^* \otimes c_i)$ ist also die Basismatrix

$$E_{ij} = (\delta_{ii'}\delta_{jk})_{1 \leq i' \leq m, 1 \leq k \leq n} \in M_{m,n}(\mathbb{K}) \quad \text{mit} \quad E_{ij}e_k = \delta_{jk}e_i.$$

Insbesondere sehen wir, dass die Basis $b_j^* \otimes c_i$ in $X^* \otimes Y$ in eine Basis von $\mathrm{Hom}(X, Y) \cong M_{m,n}(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^{m \times n}$ abgebildet wird. Also liefert Γ in diesem Fall einen Isomorphismus

$$X^* \otimes Y \cong \mathrm{Hom}(X, Y). \tag{6}$$

Für $X = Y$ und $b_i = c_i$ ergibt sich insbesondere

$$\Gamma\Big(\sum_{j=1}^{n} b_j^* \otimes b_j\Big) = \mathrm{id}_X, \tag{7}$$

denn die zugehörige Matrix ist die Einheitsmatrix $\mathbf{1}_n$. In diesem Fall erhalten wir also einen Isomorphismus

$$\mathrm{End}(X) \cong X^* \otimes X. \tag{8}$$

Beispiel 2.14. (Matrizen als Tensorprodukt) Die Abbildung

$$\Gamma\colon \mathbb{K}^m \times \mathbb{K}^n \to M_{m,n}(\mathbb{K}), \quad (x,y) \mapsto x \cdot y^\top = (x_i y_j)_{1\le i\le m, 1\le j\le n}$$

ist bilinear, induziert also eine lineare Abbildung

$$\widetilde{\Gamma}\colon \mathbb{K}^m \otimes \mathbb{K}^n \to M_{m,n}(\mathbb{K}), \quad x \otimes y \mapsto x \cdot y^\top.$$

Für die Standardbasis erhalten wir $\Gamma(e_i \otimes e_j) = E_{ij}$, so dass $\widetilde{\Gamma}$ insbesondere ein linearer Isomorphismus ist.

2.3 Tensorprodukte von endlich vielen Vektorräumen

Definition 2.15. Sind $V_1, \ldots, V_n$ Vektorräume und $n \geq 3$, so definieren wir rekursiv

$$V_1 \otimes \ldots \otimes V_n := (V_1 \otimes \ldots \otimes V_{n-1}) \otimes V_n$$

und analog

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_n := (v_1 \otimes \ldots \otimes v_{n-1}) \otimes v_n \quad \text{für} \quad v_j \in V_j.$$

Lemma 2.16. (Universelle Eigenschaft mehrfacher Tensorprodukte) *Sind $V_1, \ldots, V_n$ Vektorräume, so ist*

$$m\colon V_1 \times \ldots \times V_n \to V_1 \otimes \ldots \otimes V_n, \quad (v_1, \ldots, v_n) \mapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$$

eine n-lineare Abbildung, d.h. linear in jedem Argument. Zu jeder n-linearen Abbildung

$$f\colon V_1 \times \ldots \times V_n \to X$$

in einen Vektorraum X existiert genau eine lineare Abbildung

$$\widetilde{f}\colon V_1 \otimes \ldots \otimes V_n \to X$$

mit $\widetilde{f} \circ m = f$.

Beweis. Zuerst zeigen wir die n-Linearität von $m_n := m$. Wir setzen hierzu

$$m_{n-1}\colon V_1 \times \ldots \times V_{n-1} \to V_1 \otimes \ldots \otimes V_{n-1}, \quad (v_1, \ldots, v_{n-1}) \mapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_{n-1}.$$

Ist $n = 2$, so ist nichts mehr zu zeigen (Lemma 2.11). Wir dürfen daher induktiv annehmen, dass die Abbildung m_{n-1} in jedem Argument linear ist. Nach Lemma 2.11 ist die Abbildung

$$b\colon (V_1 \otimes \ldots \otimes V_{n-1}) \times V_n \to (V_1 \otimes \ldots \otimes V_{n-1}) \otimes V_n, \quad (x, w) \mapsto x \otimes w$$

bilinear. Daher ist

$$m_n(v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n) = b\big(m_{n-1}(v_1, \ldots, v_{n-1}), v_n\big)$$

in den ersten $n-1$ Argumenten als Komposition von zwei linearen Abbildungen linear. Im letzten Argument ist sie nach Lemma 2.11 linear, d.h. m_n ist n-linear.

Die Existenz und Eindeutigkeit von $\widetilde{f}$ zeigt man ebenfalls induktiv. Wir dürfen daher annehmen, dass zu jedem $w \in V_n$ genau eine lineare Abbildung $\widetilde{f}_w\colon V_1 \otimes \cdots \otimes V_{n-1} \to X$ mit

$$\widetilde{f}_w(v_1 \otimes \ldots \otimes v_{n-1}) = f(v_1, \ldots, v_{n-1}, w) \quad \text{für} \quad v_j \in V_j, j = 1, \ldots, n-1,$$

existiert, denn wenn wir das letzte Argument $v_n = w$ fixieren, wird f zu einer $(n-1)$-linearen Abbildung. Wegen der Eindeutigkeit von $\widetilde{f}_w$ für jedes w ist die Zuordnung

$$V_n \to \operatorname{Hom}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_{n-1}, X), \quad w \mapsto \widetilde{f}_w$$

linear, d.h. die Abbildung

$$(V_1 \otimes \cdots \otimes V_{n-1}) \times V_n \to X, \quad (x, w) \mapsto \widetilde{f}_w(x)$$

ist bilinear. Mit Lemma 2.11 finden wir daher eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung

$$\widetilde{f}\colon (V_1 \otimes \cdots \otimes V_{n-1}) \otimes V_n = V_1 \otimes \cdots \otimes V_{n-1} \otimes V_n \to X$$

mit

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_{n-1} \otimes v_n) &= \widetilde{f}\big((v_1 \otimes \cdots \otimes v_{n-1}) \otimes v_n\big) \\ &= \widetilde{f}_{v_n}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_{n-1}) = f(v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n). \end{aligned}$$

□

Aufgaben zu Kapitel 2

Aufgabe 2.1. (Die direkte Summe ist eindeutig durch ihre universelle Eigenschaft bestimmt) Sei $(A_j)_{j\in J}$ eine Familie von Vektorräumen, D und D' Vektorräume sowie für jedes $j \in J$ jeweils lineare Abbildungen $\eta_j\colon A_j \to D$, $\eta'_j\colon A_j \to D'$ gegeben, die folgende universelle Eigenschaft besitzen: Zu jeder Familie $(f_j)_{j\in J}$ von linearen Abbildungen $f_j\colon A_j \to M$ existiert genau eine lineare Abbildung

$$f\colon D \to M \quad \text{mit} \quad f \circ \eta_j = f_j \quad \text{für alle} \quad j \in J$$

und genau eine lineare Abbildung

$$f'\colon D' \to M \quad \text{mit} \quad f' \circ \eta'_j = f_j \quad \text{für alle} \quad j \in J.$$

Zeigen Sie: Dann existiert genau ein linearer Isomorphismus $\Phi\colon D \to D'$ mit $\Phi \circ \eta_j = \eta'_j$ für alle $j \in J$.

Aufgabe 2.2. Ziel dieser Aufgabe ist es, eine bessere Vorstellung des Tensorprodukts zweier Vektorräume V und W zu bekommen. Dazu sei $B_V = \{e_i\colon i \in I\}$ bzw. $B_W = \{f_j\colon j \in J\}$ eine Basis von V bzw. W. Zeigen Sie:

(a) Jede Funktion $f\colon B_V \times B_W \to \mathbb{K}$ lässt sich eindeutig zu einer bilinearen Abbildung $\widetilde{f}\colon V \times W \to \mathbb{K}$ fortsetzen.

(b) Die Menge $B_V \otimes B_W := \{e_i \otimes f_j \colon i \in I, j \in J\}$ ist eine Basis des Vektorraums $V \otimes W$.

(c) Jedes Element $x \in V \otimes W$ lässt sich in eindeutiger Weise darstellen als eine endliche Summe $x = \sum_{i\in I} e_i \otimes w_i$ mit $w_i \in W$. Folgern Sie hieraus

$$V \otimes W \cong \bigoplus_{i\in I} e_i \otimes W \cong W^{(I)}.$$

(d) Sind V_1 und V_2 Vektorräume, so gilt $(V_1 \oplus V_2) \otimes W \cong (V_1 \otimes W) \oplus (V_2 \otimes W)$.
Hinweis: Verwende (c).

(e) $V \otimes W$ und $W \otimes V$ sind isomorphe Vektorräume.

Aufgabe 2.3. Seien V und W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume. Zeigen Sie:

(a) Zu $A \in \operatorname{End}(V)$ und $B \in \operatorname{End}(W)$ existiert genau eine lineare Abbildung $A \otimes B \in \operatorname{End}(V \otimes W)$, die durch

$$(A \otimes B)(v \otimes w) = Av \otimes Bw \quad \text{für} \quad v \in V, w \in W,$$

eindeutig bestimmt ist.

(b) Es existiert genau eine lineare Abbildung

$$\Gamma\colon \operatorname{End}(V) \otimes \operatorname{End}(W) \to \operatorname{End}(V \otimes W) \quad \text{mit} \quad \Gamma(A \otimes B) = A \otimes B$$

für $A \in \operatorname{End}(V), B \in \operatorname{End}(W)$. Man beachte, dass hier das Symbol $\otimes$ in zwei verschiedenen Bedeutungen auftritt.

(c) Ist V oder W endlichdimensional, so ist Γ ein linearer Isomorphismus.

(d) Sei nun $V = \mathbb{K}^n$ und $W = \mathbb{K}^m$. Ist $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ and $B = (b_{k\ell}) \in M_m(\mathbb{K})$, so ist $(a_{ij}b_{k\ell})_{1\leq i,j\leq n, 1\leq k,\ell\leq m}$ die Matrix der linearen Abbildung $A \otimes B$ auf $\mathbb{K}^n \otimes \mathbb{K}^m$ bzgl. der kanonischen Basis.

(e) Für $A, A' \in \operatorname{End}(V)$ und $B, B' \in \operatorname{End}(W)$ ist

$$(A \otimes B)(A' \otimes B') = AA' \otimes BB'.$$

Aufgabe 2.4. (Verallgemeinerung von Bemerkung 2.13(b) auf unendlichdimensionale Räume) Seien X und Y Vektorräume. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\Gamma\colon X^* \otimes Y \to \operatorname{Hom}(X, Y), \quad \Gamma(\alpha \otimes y)(x) := \alpha(x)y.$$

Zeigen Sie:

(a) Ist $f\colon X \to Y$ linear mit endlichdimensionalem Bild, so existieren $y_1, \dots, y_k \in Y$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in X^*$ mit $f(x) = \sum_{j=1}^k \alpha_j(x) y_j$.

(b) $\mathrm{im}(\Gamma)$ besteht aus den linearen Abbildungen mit endlichdimensionalem Bild.

(c) Ist X oder Y endlichdimensional, so ist Γ ein linearer Isomorphismus.

Aufgabe 2.5. (a) Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Algebren über dem Körper $\mathbb{K}$. Dann existiert auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ die Struktur einer assoziativen $\mathbb{K}$-Algebra mit

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb' \quad \text{für} \quad a, a' \in \mathcal{A}, b, b' \in \mathcal{B}.$$

(b) Zeigen Sie, dass für jede $\mathbb{K}$-Algebra $\mathcal{A}$ gilt: $M_n(\mathcal{A}) \cong M_n(\mathbb{K}) \otimes \mathcal{A}$.
(c) Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ erhalten wir $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.
(d) Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ erhalten wir $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong M_2(\mathbb{C})$, wobei

$$\mathbb{H} := \left\{ \begin{pmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})\colon z, w \in \mathbb{C} \right\} \subseteq M_2(\mathbb{C})$$

die Unteralgebra der *Quaternionen* ist.

3 Darstellungen endlicher Gruppen

In diesem Abschnitt werfen wir einen ersten Blick auf die Darstellungstheorie der endlichen Gruppen. Ein zentrales Resultat in diesem Kontext ist der Satz von Maschke: Falls $\mathrm{char}\, \mathbb{K}$ nicht die Gruppenordnung $|G|$ teilt, sind alle Darstellungen direkte Summen von irreduziblen, so dass man sich auf die Klassifikation der irreduziblen Darstellungen konzentrieren kann, was wir weitgehend tun werden. Es wird sich zeigen, dass in diesem Fall die Charaktere von Darstellungen ein effektives Mittel zu einer systematischen Klassifikation sind.

Für den Fall, dass $\mathrm{char}\, \mathbb{K}$ die Gruppenordnung teilt, wird die Situation sehr viel komplizierter; so sind z.B. alle irreduziblen Darstellungen der Gruppe $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ über jedem Körper der Charakteristik $p > 0$ trivial und das Problem besteht darin zu verstehen, auf welche Weisen man aus trivialen Darstellungen nicht triviale aufbauen kann.

3.1 Darstellungen und Homomorphismen von Darstellungen

3.1.1 Darstellungen und Moduln

Definition 3.1. Eine *Darstellung* einer Gruppe G über einem Körper $\mathbb{K}$ ist ein Paar (ρ, V) aus einen $\mathbb{K}$-Vektorraum V und einem Gruppenhomomorphismus $\rho : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(V)$ in die invertierbaren $\mathbb{K}$-linearen Abbildungen von V.

Die *Dimension* einer Darstellung (ρ, V) ist die Dimension von V. Insbesondere heißt (ρ, V) endlichdimensional, wenn V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum ist. Eine *komplexe Darstellung* ist eine Darstellung über $\mathbb{C}$, eine *reelle Darstellung* eine Darstellung über $\mathbb{R}$.

Oft spricht man auch von ρ als einer Darstellung, da die Spezifikation von V ja im Grunde in ρ enthalten ist. Dies lässt sich allerdings auch umkehren. Lenkt man den Fokus auf V, so denkt man sich die Darstellung als einer Art "Skalarmultiplikation" von G auf V und schreibt auch

$$g.v := \rho(g)v \quad \text{für} \quad g \in G, v \in V.$$

Die Bedingungen, dass ρ ein Gruppenhomomorphismus $G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(V)$ ist, drücken sich dann aus durch

(M1) $g.(h.v) = (gh).v$ für $g, h \in G, v \in V$.

(M2) $e.v = v$ für $v \in V$ (e ist das neutrale Element in G).

(M3) $g.(v + \lambda w) = g.v + \lambda g.w$ für $g \in G, v, w \in V, \lambda \in \mathbb{K}$.

Definition 3.2. Ein Abbildung $\mu\colon G \times V \to V, (g, v) \mapsto g.v$ definiert auf V die Struktur eines *G-Moduls*, wenn (M1-3) erfüllt sind, also wenn sie eine Wirkung von G auf V durch lineare Abbildungen definiert. Ein G-Modul ist also ein Paar (V, μ), wobei μ angibt, wie G auf V operiert.[1]

Bemerkung 3.3.

(a) Ist (ρ, V) eine Darstellung, so definiert $\rho^\sharp(g, v) := \rho(g)v$ eine Modulstruktur und umgekehrt erhalten wir für eine Modulstruktur μ eine Darstellung durch $\mu^\flat(g)v := \mu(g, v)$. Hierbei gilt $(\rho^\sharp)^\flat = \rho$ und $(\mu^\flat)^\sharp = \mu$, so dass sich Modulstrukturen und Darstellungen bijektiv entsprechen. Sie beschreiben also die gleichen Strukturen aus verschiedenen Perspektiven.

(b) Jeder Vektorraum V trägt eine Darstellung jeder Gruppe G, nämlich die *triviale Darstellung* mit $\rho(g) = \mathrm{id}_V$ für alle $g \in G$. Man spricht dann auch vom einem *trivialen G-Modul*.

(c) Jeder Vektorraum V trägt eine Darstellung der Gruppe $\mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(V)$ und beliebiger Untergruppen $G \subset \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(V)$.

Definition 3.4.

(a) Sind (ρ_V, V) und (ρ_W, W) Darstellungen von G über $\mathbb{K}$, dann trägt auch die direkte Summe $V \oplus W$ eine Darstellung von G, die gegeben ist durch

$$\rho_{V \oplus W}(g)(v, w) = \big(\rho_V(g)(v), \rho_W(g)(w)\big) \qquad \text{für} \quad g \in G, v \in V, w \in W.$$

Diese wird als *direkte Summe* der Darstellungen (ρ_V, V) und (ρ_W, W) bezeichnet. Analog definiert man die direkte Summe $\bigoplus_{i \in I}(\rho_{V_i}, V_i)$ von Darstellungen (ρ_i, V_i) für eine beliebige Indexmenge I.

[1] **Der** Modul, nicht das Modul. Der Plural ist Moduln, nicht Module. Das Wort Modul wird auf der ersten Silbe betont.

(b) Sind (ρ_V, V), (ρ_W, W) Darstellungen einer Gruppe G über $\mathbb{K}$, so trägt auch der $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ eine Darstellungen von G mit

$$\rho_{\mathrm{Hom}(V,W)}(g)\varphi = \rho_W(g) \circ \varphi \circ \rho_V(g)^{-1} \qquad \text{für} \quad \varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W), g \in G.$$

(c) Ist (ρ_V, V) eine Darstellung von G über $\mathbb{K}$, so trägt auch der Dualraum $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$ eine Darstellung (ρ_V^*, V^*) von G, die gegeben ist durch

$$\rho_V^*(g)\alpha = \alpha \circ \rho_V(g^{-1}) \quad \text{für} \quad \alpha \in V^*, g \in G.$$

Dies ergibt sich für den Spezialfall der trivialen Darstellung auf $W = \mathbb{K}$ und $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K}) = V^*$ auch aus (b).

(d) Sind (ρ_V, V) und (ρ_W, W) Darstellungen von G über $\mathbb{K}$, dann trägt auch das Tensorprodukt $V \otimes W$ eine Darstellung von G, die gegeben ist durch

$$\rho_{V\otimes W}(g) = \rho_V(g) \otimes \rho_W(g) \qquad \text{d.h.,} \qquad \rho_{V\otimes W}(g)(v \otimes w) = \rho_V(g)(v) \otimes \rho_W(g)(w)$$

für $g \in G, v \in V, w \in W$. Hierzu verwenden wir Aufgabe 2.3, um die Existenz der linearen Abbildungen $\rho_V(g) \otimes \rho_W(g)$ auf $V \otimes W$ einzusehen. Aus Teil (e) dieser Aufgabe folgt

$$(\rho_V(g) \otimes \rho_W(g))(\rho_V(h) \otimes \rho_W(h)) = \rho_V(gh) \otimes \rho_W(gh) \quad \text{für} \quad g, h \in G,$$

so dass $\rho_{V\otimes W}$ in der Tat eine Darstellung ist. Diese wird als *Tensorprodukt* der Darstellungen (ρ_V, V) und (ρ_W, W) bezeichnet. Analog definiert man endliche Tensorprodukte $\rho_{V_1} \otimes \cdots \otimes \rho_{V_n}$.

(e) Ist $f : H \to G$ ein Gruppenhomomorphismus und (ρ, V) eine Darstellung von G, so erhält man durch $\tau := \rho \circ f$ eine Darstellung (τ, V) von H. Diese wird als *Pullback* von ρ entlang f bezeichnet. Als wichtigen Spezialfall erhalten wir Einschränkungen von Darstellungen: Dann ist $H \subseteq G$ eine Untergruppe, $f \colon H \to G$ die Inklusionsabbildung und $\rho \circ f = \rho|_H$ die Einschränkung von ρ auf H.

Beispiele 3.5. (a) Eine Darstellung (ρ, V) der Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ ist eindeutig bestimmt durch das Element $\rho(1) \in \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(V)$, denn die Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ wird von 1 erzeugt. Ist $\rho : \mathbb{Z} \to \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(V)$ ein Gruppenhomomorphismus, so folgt $\rho(n) = \rho(1)^n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Die Darstellungen der Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ auf V über $\mathbb{K}$ entsprechen also den Elementen von $\mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(V)$.

(b) Sei $G = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$ mit $m \in \mathbb{N}$. Diese Gruppe wird von $\overline{1} \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ erzeugt und somit ist jede Darstellung (ρ, V) von G durch $\rho(\overline{1}) \in \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(V)$ eindeutig bestimmt. Allerdings liefert nicht jeder Automorphismus von V eine Darstellung, denn es muss gelten

$$\rho(\overline{1})^m = \rho(m\overline{1}) = \rho(\overline{0}) = \mathrm{id}_V .$$

Die Darstellungen von $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$ auf V entsprechen also den Elementen $g \in \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(V)$ mit $g^m = 1$.

Beispiel 3.6. Sei M eine Menge und $\mathbb{K}$ ein Körper. Ist

$$\sigma\colon G \times M \to M, \quad (g, m) \mapsto \sigma_g(m) = g.m$$

eine Wirkung von G auf M ((M1/2) gelten), so erhalten wir durch

$$\rho(g)f := f \circ \sigma_g^{-1}, \quad (\rho(g)f)(m) := f(g^{-1}.m) \qquad \text{für} \quad g \in G, m \in M$$

eine Darstellung von G auf dem Vektorraum $\mathbb{K}^M$ der Funktionen $f\colon M \to \mathbb{K}$. Der Unterraum $\mathbb{K}^{(M)}$ ist unter $\rho(G)$ invariant, so dass wir auch auf ihm eine Darstellung von G erhalten. Eine kurze Rechnung (Aufgabe 3.4) zeigt, dass

$$\rho(g)\delta_m = \delta_{g.m} \quad \text{für} \quad g \in G, m \in M$$

gilt und dass es sich dabei tatsächlich um eine Darstellung handelt.

3.1.2 Homomorphismen von Darstellungen

Wie in den aus der Algebra bekannten Fällen von Vektorräumen, Körpern, Ringen etc wollen wir nun auch für den Begriff der Darstellung ein Konzept von Homomorphismen entwickeln. Da es sich bei einer Darstellung um zwei wechselwirkende Strukturen handelt, nämlich einen Vektorraum V und einen Gruppenhomomorphismus von $G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(V)$, sollte ein "Homomorphismus von Darstellungen" mit beiden dieser Strukturen kompatibel und damit ein Vektorraumhomomorphismus sein, der mit der Gruppenwirkung verträglich ist.

Definition 3.7. Seien (ρ, V) und (τ, W) Darstellungen einer Gruppe G über demselben Körper $\mathbb{K}$. Ein *Homomorphismus von Darstellungen* oder *Vertauschungsoperator* zwischen (ρ, V) und (τ, W) ist eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ mit

$$\varphi \circ \rho(g) = \tau(g) \circ \varphi \quad \text{bzw.} \quad \varphi(g.v) = g.\varphi(v) \qquad \text{für alle} \quad g \in G, v \in V.$$

Wir schreiben

$$\mathrm{Hom}((\rho, V), (\tau, W)) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$$

für den Untervektorraum der Vertauschungsoperatoren und

$$\mathrm{End}((\rho, V)) := \mathrm{Hom}((\rho, V), (\rho, V))$$

für den Raum der *Endomorphismen der Darstellung* (ρ, V). Weiter ist

$$\begin{aligned} &\mathrm{Iso}((\rho, V), (\tau, W)) \\ &:= \{\varphi \in \mathrm{Hom}((\rho, V), (\tau, W))\colon \big(\exists \psi \in \mathrm{Hom}((\tau, W), (\rho, V))\big)\, \psi \circ \varphi = \mathrm{id}_V, \varphi \circ \psi = \mathrm{id}_W\} \end{aligned}$$

der Raum der *Isomorphismen* von (ρ, V) und (η, W), und

$$\mathrm{Aut}((\rho, V)) := \mathrm{Iso}((\rho, V), (\rho, V))$$

die Gruppe der *Automorphismen der Darstellung* (ρ, V).

Zwei Darstellungen einer Gruppe G über $\mathbb{K}$, zwischen denen ein Isomorphismus von Darstellungen existiert, heißen *isomorph* oder *äquivalent*.

Bemerkung 3.8.

(a) Ist $\varphi \in \mathrm{Hom}((\rho, V), (\tau, W))$ bijektiv, so ist die Umkehrabbildung $\psi \colon W \to V$ auch linear und sogar ein Homomorphismus von Darstellungen (leichte Übung). Die Isomorphismen von Darstellungen sind also genau die bijektiven Homomorphismen.

(b) Sind (ρ, V) und (τ, W) Darstellungen einer Gruppe G über $\mathbb{K}$, dann bilden die Homomorphismen von Darstellungen $(\rho, V) \to (\tau, W)$ einen Untervektorraum des Vektorraums $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ der linearen Abbildungen zwischen V und W, denn die Summe zweier Homomorphismen von Darstellungen und skalare Vielfache von Homomorphismen von Darstellungen sind wieder Homomorphismen von Darstellungen.

(c) Sind $\psi \in \mathrm{Hom}((\rho, U), (\sigma, V))$ und $\varphi \in \mathrm{Hom}((\sigma, V), (\tau, W))$ Homomorphismen von Darstellungen, so ist auch die Verkettung $\varphi \circ \psi : U \to W$ ein Homomorphismus von Darstellungen.

(d) Wir haben in Definition 3.4(c) schon gesehen, dass wir auf dem Raum $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ durch

$$g.\varphi := \rho_W(g) \circ \varphi \circ \rho_V(g)^{-1} \quad \text{für} \quad g \in G, \varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$$

eine Darstellung erhalten. Ein Element $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ ist genau dann ein Vertauschungsoperator, wenn $g.\varphi = \varphi$ für alle $g \in G$ gilt, d.h. wenn φ ein Fixpunkt der G-Wirkung auf $\mathrm{Hom}(V, W)$ ist:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)^G = \mathrm{Hom}((\rho_V, V), (\rho_W, W)).$$

Das folgende Lemma liefert ein Beispiel für einen nicht trivialen Isomorphismus von Darstellungen (vgl. Bemerkung 2.13).

Lemma 3.9. *Sind (ρ_V, V) und (ρ_W, W) endlichdimensionale Darstellungen von G über $\mathbb{K}$ und*

$$\Gamma \colon V \otimes W^* \to \mathrm{Hom}(W, V), \quad \Gamma(v \otimes \alpha)(w) := \alpha(w)v$$

der kanonische Isomorphismus, so definiert Γ einen Isomorphismus

$$(\rho_V \otimes \rho_W^*, V \otimes W^*) \to (\rho_{\mathrm{Hom}(W,V)}, \mathrm{Hom}(W, V)).$$

Beweis. Für $v \in V$, $w \in W$ und $\alpha \in W^*$ ist

$$\begin{aligned} \Gamma(\rho_V(g)v \otimes \rho_W^*(g)\alpha)w &= \big(\rho_W^*(g)\alpha\big)(w)\rho_V(g)v = \alpha\big(\rho_W(g^{-1})w\big)\rho_V(g)v \\ &= \rho_V(g)\Gamma(v \otimes \alpha)\rho_W(g^{-1})w. \end{aligned}$$

Da die Elemente der Form $\Gamma(v \otimes \alpha)$ den Raum $\mathrm{Hom}(W, V)$ aufspannen (Bemerkung 2.13), erhalten wir

$$\Gamma \circ (\rho_V(g) \otimes \rho_W^*(g)) = \rho_V(g)\Gamma(\cdot)\rho_W(g)^{-1},$$

so dass Γ ein Isomorphismus von Darstellungen ist. $\square$

3.2 Die Klassifikation von Darstellungen zyklischer Gruppen

Das Hauptproblem der Darstellungstheorie besteht in der Klassifikation der endlichdimensionalen Darstellungen bis auf Isomorphie (=Äquivalenz). Man möchte also die Gesamtheit der Darstellungen einer endlichen Gruppe in geeigneter Form möglichst explizit parametrisieren. In diesem Abschnitt diskutieren wird dieses Problem für den Fall einer zyklischen Gruppe $G = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $\mathbb{K}$.

Wir benötigen hierzu eine kleine Vorbereitung:

Lemma 3.10. *Sei $\mathbb{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, $k \in \mathbb{N}$ und*

$$C_k^{\mathbb{K}} := \{z \in \mathbb{K}^\times : z^k = 1\}$$

die multiplikative Gruppe der k-ten Einheitswurzeln in $\mathbb{K}$. Dann gilt:

(i) *Ist* $\operatorname{char} \mathbb{K} = 0$, *so ist $C_k^{\mathbb{K}}$ eine zyklische Gruppe der Ordnung k, insbesondere unabhängig von $\mathbb{K}$.*

(ii) *Ist* $\operatorname{char} \mathbb{K} = p > 0$ *und $k = p^m q$, wobei p kein Teiler von q ist, so ist $C_k^{\mathbb{K}}$ eine zyklische Gruppe der Ordnung q, also nur abhängig von der Charakteristik von $\mathbb{K}$.*

Beweis. (i) Da $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen ist, zerfällt das Polynom $f(X) := X^k - 1$ über $\mathbb{K}$ in Linearfaktoren. Wegen $f'(X) = kX^{k-1}$ ist $f'(z) \neq 0$ für jede Nullstelle von f. Also sind alle Nullstellen von f einfach. Es gibt also genau k Nullstellen.

Die abelsche Gruppe $A := C_k^{\mathbb{K}}$ enthält also genau k Elemente. Um einzusehen, dass sie zyklisch ist, betrachten wir die Primfaktorzerlegung $k = p_1^{m_1} \cdots p_r^{m_r}$ von k. Dann enthalten die Gruppen $A_{p_j} := C_{p_j^{m_j}}^{\mathbb{K}}$ genau $p_j^{m_j}$ Elemente. Ist A_{p_j} nicht zyklisch, so existiert kein Element der Ordnung $p_j^{m_j}$. Also sind alle auftretenden Ordnungen Teiler von $p_j^{m_j-1}$ und somit A_{p_j} in der Untergruppe $C_{p_j^{m_j-1}}^{\mathbb{K}}$ enthalten, die aber nur $p_j^{m_j-1}$ Elemente enthält. Aus diesem Widerspruch schließen wir, dass $A_{p_j} \cong \mathbb{Z}/p_j^{m_j}\mathbb{Z}$ ist. Da die Multiplikationsabbildung

$$A_{p_1} \times \cdots \times A_{p_r} \to A, \quad (z_1, \ldots, z_r) \mapsto z_1 \cdots z_r$$

wegen dem Struktursatz für endliche abelsche Gruppen ein Isomorphismus ist, erhalten wir

$$A \cong \mathbb{Z}/p_1^{m_1}\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p_r^{m_r}\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z},$$

da die Primzahlpotenzen $p_j^{m_j}$ jeweils teilerfremd sind.

(ii) Zuerst beobachten wir, dass alle Binomialkoeffizienten

$$\binom{p}{j} = \frac{p(p-1)\cdots(p-j+1)}{j!}, \quad 0 < j < p,$$

verschwinden, da p den Zähler aber nicht den Nenner teilt. Daher gilt für $p$te Potenzen in kommutativen Algebren über $\mathbb{K}$ die Formel

$$(a+b)^p = a^p + b^p.$$

Aus $k = p^m q$ ergibt sich damit

$$f(X) = X^{qp^m} - 1 = (X^q - 1)^{p^m}.$$

Also ist $z^k - 1 = f(z) = 0$ gleichbedeutend mit $z^q = 1$. Für $g(X) = X^q - 1$ ist $g'(X) = qX^{q-1}$ und $g'(z)$ verschwindet an keiner Nullstelle z von g. Also hat g, und damit auch f, genau q Nullstellen in $\mathbb{K}$.

Dass die Gruppe $C_n^{\mathbb{K}} = C_q^{\mathbb{K}}$ zyklisch ist, folgt nun mit dem gleichen Argument wie unter (i), da die Primzahl p nicht unter den Primfaktoren von q auftritt und $|C^{\mathbb{K}}_{p_j^{m_j}}| = p_j^{m_j}$ für alle j gilt. □

Beispiel 3.11. (Darstellungen von $G = \mathbb{Z}$ über algebraisch abgeschlossenen Körpern) Für die Gruppe $G = \mathbb{Z}$ sind die Darstellungen $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V eindeutig spezifiziert durch beliebige Elemente $g = \rho(1) \in \mathrm{GL}(V)$ (Beispiel 3.5). Sind ρ und ρ' zwei Darstellungen sowie $g = \rho(1)$ und $g' = \rho'(1)$, so ist $\varphi \in \mathrm{Hom}((\rho, V), (\rho', V'))$ genau dann, wenn $\varphi \circ g = g' \circ \varphi$ gilt. Insbesondere ist $\rho \cong \rho'$ genau dann, wenn

$$g' = \varphi g \varphi^{-1} \quad \text{für ein} \quad \varphi \in \mathrm{Iso}(V, V')$$

gilt. *Die Äquivalenzklassen von Darstellungen von $\mathbb{Z}$ auf V entsprechen also den Ähnlichkeitsklassen invertierbarere linearer Abbildungen.*

In der linearen Algebra wird das Problem der Beschreibung der Ähnlichkeitsklassen (invertierbarer) linearer Endomorphismen (endlichdimensionaler Vektorräume) über algebraisch abgeschlossenen Körpern durch die Jordansche Normalform gelöst. Für jedes $g \in \mathrm{GL}(V)$ existiert eine geordnete Basis in V, so dass die zugehörige Matrix Jordansche Normalform besitzt und g, g' sind genau dann konjugiert, wenn für beide die Zahl $m_{n,\lambda}$ der Jordanblöcke

$$J_{n,\lambda} := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \mathbf{1} + N_{n,\lambda} \in M_n(\mathbb{K})$$

der Grösse n zu dem Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$ übereinstimmt:

- Klassifiziert werden die Darstellungen von $G = \mathbb{Z}$ über $\mathbb{K}$ also durch die Vielfachheiten $(m_{n,\lambda})_{\lambda \in \mathbb{K}^\times, n \in \mathbb{N}_0}$ der Jordanblöcke $J_{n,\lambda}$.

Ist der Körper $\mathbb{K}$ nicht algebraisch abgeschlossen, so wird die Klassifikation komplizierter, wie man schon für den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sieht. Das Problem besteht hierbei in den fehlenden Eigenwerten bzw. darin, dass die Gruppe $C_k^{\mathbb{K}}$ sehr klein sein kann. Für $\mathbb{R}$ ist diese Gruppe für alle ungeraden Zahlen trivial und für alle geraden Zahlen besteht sie nur aus $\{\pm 1\}$. Dadurch sind nicht alle Matrizen endlicher Ordnung zu einer Matrix in Jordanscher Normalform konjugiert. Wir werden später im Kontext der Darstellungstheorie von Hauptidealringen einen erneuten Blick auf die Jordansche Normalform werfen, sozusagen von einem höheren Standpunkt aus. Hierbei wird sich ein allgemeineres Bild zeigen und insbesondere auch was passiert, wenn $\mathbb{K}$ nicht algebraisch abgeschlossen ist.

Beispiel 3.12. (Darstellungen von $G = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ über algebraisch abgeschlossenen Körpern) Ist $G = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$, so stellt sich das Klassifikationsproblem zunächst vollkommen analog dar, wobei man allerdings nur Elemente $g \in \mathrm{GL}(V)$ mit $g^k = \mathbf{1}$ betrachtet. Dass diese Einschränkung das Klassifikationsproblem wesentlich vereinfacht, sieht man bei einem Blick auf die Jordansche Normalform. Zuerst beobachten wir, dass die Relation $g^k = \mathbf{1}$ genau dann erfüllt ist, wenn dies für alle zugehörigen Jordanblöcke der Fall ist:

$$\mathbf{1} = J_{n,\lambda}^k = (\lambda\mathbf{1} + N_{n,\lambda})^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda^{k-j} N_{n,\lambda}^j = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & & * \\ & \lambda^k & \ddots & \\ & & \ddots & k\lambda^{k-1} \\ 0 & & & \lambda^k \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Hierzu ist zunächst $\lambda^k = 1$ notwendig. Darüber hinaus muss entweder $n = 1$ sein, oder $k = 0$ in $\mathbb{K}$ gelten, also $p := \operatorname{char}\mathbb{K}$ ein Teiler von k sein. Zunächst sind das nur notwendige Bedingungen und wir betrachten nun die beiden Fälle, dass p ein Teiler von k ist oder nicht.

(a) Ist p kein Teiler von k, so haben alle Jordanblöcke die Größe 1, so dass g diagonalisierbar ist. Sind $(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ die verschiedenen Eigenwerte von g und $(m_{\lambda_1}, \ldots, m_{\lambda_N})$ deren Vielfachheiten, so sind zwei Elemente $g, g' \in \mathrm{GL}(V)$ mit $g^k = (g')^k = \mathbf{1}$ genau dann konjugiert, wenn alle Eigenwerte mit den gleichen Vielfachheiten auftreten.

- Ist $\operatorname{char}\mathbb{K}$ kein Teiler von k, so werden die Darstellungen von $G = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ durch die Vielfachheiten $(m_\lambda)_{\lambda \in C_k^{\mathbb{K}}}$ der Eigenwerte klassifiziert (ein k-Tupel natürlicher Zahlen).

(b) Ist p ein Teiler von k, so schreiben wir $k = p^d q$, wobei q teilerfremd zu p ist. Aus der Relation

$$(1+X)^k = \left((1+X)^{p^d}\right)^q = (1 + X^{p^d})^q = \sum_{j=0}^{q} \binom{q}{j} X^{jp^d}$$

in $\mathbb{K}[X]$ folgt, dass die Binomialkoeffizienten $\binom{k}{j}$ zwar für $0 < j < p^d$ verschwinden, aber $\binom{k}{p^d} = \binom{q}{1} = q \neq 0$ ist. Wir erhalten also die notwendige und hinreichende Bedingung $n \leq p^d$ an die Größe des Jordanblocks $J_{n,\lambda}$.

- Klassifiziert werden die Darstellungen von $G = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ über $\mathbb{K}$ durch die Vielfachheiten $(m_{n,\lambda})_{\lambda \in C_k^{\mathbb{K}}, n \leq p^d}$ der Jordanblöcke $J_{n,\lambda}$ (wegen $k = p^d q = p^d |C_k^{\mathbb{K}}|$ ist das im wesentlichen auch ein k-Tupel natürlicher Zahlen).

(c) Ist $p = \operatorname{char} \mathbb{K}$ und $k = p^d$, so folgt aus $\lambda^k = 1$ schon $\lambda = 1$ (Lemma 3.10). Daher ist $\lambda = 1$ der einzige auftretende Eigenwert. Jede Matrix der Ordnung p^d ist daher unipotent, d.h. $g - \mathbf{1}$ ist nilpotent.

- Invertierbaren Matrizen der Ordnung p^d werden durch die Vielfachheiten $(m_{1,n})_{1 \leq n \leq p}$ der Jordanblöcke $J_{n,1}$ der Größe n klassifiziert.

3.3 Zerlegbarkeit und Reduzibilität

Wir möchten nun Darstellungen systematisch untersuchen und klassifizieren. Die Grundidee ist dabei, eine Darstellung in Grundbausteine zu zerlegen, die man mittels einfacher Hilfsmittel charakterisieren kann.

3.3.1 Unterdarstellungen

Wie im Fall von Vektorräumen, Gruppen, Ringen, wo jeweils ein entsprechendes Konzept von Untervektorräumen, Untergruppen, Unterringen etc. existiert, formulieren wir dazu zunächst den Begriff einer Unterdarstellung.

Definition 3.13. (a) Sei (ρ, V) eine Darstellung von G über $\mathbb{K}$. Eine Darstellung (τ, U) von G über $\mathbb{K}$ heißt *Unterdarstellung* von (ρ, V), wenn $U \subset V$ ein Untervektorraum ist und $\rho(g)|_U = \tau(g)$ für alle $g \in G$. Man nennt U dann auch einen *Untermodul* des G-Moduls V.

(b) Ist U ein Untermodul des G-Moduls V, so erbt der Quotientenraum V/U eine G-Modulstruktur durch

$$g.(v + U) := g.v + U \quad \text{für} \quad v \in V, g \in G.$$

Hierbei beachten wir, dass die rechte Seite wohldefiniert ist, denn für $v + U = v' + U$ ist $v - v' \in U$, also auch $g.v - g.v' = g.(v - v') \in U$ und daher $g.v + U = g.v' + U$. Wir nennen V/U den *Quotientenmodul von V nach U*.

Ist $U \subseteq V$ ein Untermodul, so betrachten with U und V/U als "Bausteine", aus denen V zusammengebaut ist.

Bemerkung 3.14.

(a) Die Unterdarstellungen einer Darstellung (ρ, V) entsprechen genau den Untervektorräumen $U \subset V$, die invariant sind unter der Wirkung von G auf V, d.h. für die gilt: $\rho(g)u \in U$ für alle $u \in U$, $g \in G$.

(b) Jeder G-Modul V hat mindestens zwei Untermoduln, nämlich $\{0\}$ und V. Alle anderen Untermoduln bezeichnet man als *echte Untermoduln* und spricht entsprechend von *echten Unterdarstellungen*.

(c) Für jeden G-Modul V ist der Unterraum

$$V^G := \{v \in V \colon (\forall g \in G)\, g.v = v\}$$

der *Fixelemente* der maximale triviale Untermodul.

(d) Sind (ρ, V) und (τ, W) Darstellungen einer Gruppe G und $\varphi : V \to W$ ein Homomorphismus von Darstellungen, so definieren $\ker(\varphi) \subset V$ und $\operatorname{im}(\varphi) \subset W$ Unterdarstellungen von (ρ, V) bzw. (τ, W). Denn für alle $v \in \ker(\varphi)$ und $g \in G$ gilt $\varphi(\rho(g)v) = \tau(g)\varphi(v) = 0$. Analog ergibt sich für $v \in V$ die Identität $\tau(g)\varphi(v) = \varphi(\rho(g)v) \in \operatorname{im}(\varphi)$.

Die Unterdarstellungen einer Darstellung sollen nun als Bausteine dienen, in die wir eine Darstellung zerlegen. Um dies präzise zu formulieren, benötigen wir ein Konzept von Zerlegbarkeit von Darstellungen und ein Konzept von "irreduziblen Darstellungen", die als unzerlegbare Grundbausteine dienen. Hierbei ist es naheliegend, isomorphe Darstellungen nicht zu unterscheiden.

Definition 3.15. (a) Eine Darstellung (ρ, V) einer Gruppe G heißt *unzerlegbar*, wenn sie nicht isomorph ist zu einer echten direkten Summe von Darstellungen: Sind (σ, U) und (τ, W) Darstellungen von G und ist $\varphi : U \oplus W \to V$ ein Isomorphismus von Darstellungen, so folgt $W = \{0\}$ oder $U = \{0\}$. Andernfalls heißt die Darstellung *zerlegbar*.

(b) Eine Darstellung (ρ, V) einer Gruppe G heißt *einfach* oder *irreduzibel* falls $V \neq \{0\}$ und sie keine echten Unterdarstellungen besitzt, also falls $\{0\}$ und V die einzigen Untermoduln sind.

(c) Eine Darstellung (ρ, V) einer Gruppe G heißt *halbeinfach* (oder *vollständig reduzibel*), wenn sie isomorph zu einer direkten Summe einfacher Darstellungen ist, d.h. es existieren Darstellungen $(\rho_i, V_i)_{i \in I}$ von G und ein Isomorphismus von Darstellungen $\varphi : \bigoplus_{i \in I} V_i \xrightarrow{\sim} V$.

Offensichtlich ist jede einfache Darstellung unzerlegbar. Einfache Darstellungen können somit als Grundbausteine dienen, aus denen man weitere Darstellungen durch Bildung direkter Summen zusammmensetzt. Allerdings ist nicht jede unzerlegbare Darstellung einfach, wie aus dem folgenden Beispiel hervorgeht. Eine vollständige Zerlegung einer Darstellung als direkte Summe einfacher Darstellungen ist daher im allgemeinen nicht möglich. Die Darstellungen, für die eine solche Zerlegung existiert, sind gerade die halbeinfachen Darstellungen.

Beispiel 3.16. (a) Sei $\mathbb{K}$ ein beliebiger Körper. Wir betrachten die Darstellung der Gruppe $(\mathbb{Z},+)$ auf dem Vektorraum $\mathbb{K}^2$, die durch die Matrix

$$\rho(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

definiert ist. Offensichtlich ist diese Matrix in Jordan-Normalform. Der Vektorraum $\mathbb{K}^2$ kann nicht als direkte Summe echter (also eindimensionaler) Untervektorräume dargestellt werden, die unter der Gruppenwirkung stabil sind, denn dies würde bedeuten, dass $\rho(1)$ diagonalisierbar sein müsste. Also ist die Darstellung unzerlegbar. Andererseits besitzt diese Darstellung aber eine echte Unterdarstellung auf dem Untervektorraum $\mathbb{K}e_1 = \mathbb{K}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, denn es gilt $\rho(1)e_1 = e_1$.

(b) Für $p = \operatorname{char}\mathbb{K} > 0$ erhalten wir auf diese Weise eine Darstellung der endlichen Gruppe $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{K}^2$, die unzerlegbar aber nicht halbeinfach ist (vgl. Beispiel 3.11).

3.3.2 Mittelung über endliche Gruppen

Nachdem wir schon gesehen haben, welche Komplikationen schon für zyklische Gruppen auftreten können, wenden wir uns nun dem regulären Fall zu, also endlichen Gruppen G, deren Ordnung nicht von $\operatorname{char}\mathbb{K}$ geteilt wird.

Homomorphismen von Darstellungen sind mehr als nur lineare Abbildungen zwischen den zugehörigen Vektorräumen, da sie mit den Gruppenwirkungen verträglich sein müssen. Wir werden bald sehen, dass es im Fall endlicher Gruppen unter bestimmten Voraussetzungen an die Gruppenordnung ein Verfahren gibt, mit dem man aus jeder linearen Abbildung zwischen den Darstellungsräumen einen Vertauschungsoperator konstruieren kann. Es beruht auf der folgenden Mittelungsmethode. Sie ist ein zentrales Werkzeug der Darstellungstheorie endlicher Gruppen und letztendlich der Schlüssel zu den zentralen Resultaten der Darstellungstheorie endlicher Gruppen über Körpern der Charakteristik 0.

Satz 3.17. (Die Fixpunktprojektion) *Sei G eine endliche Gruppe und $\mathbb{K}$ ein Körper mit* $\operatorname{char}(\mathbb{K}) \nmid |G|$ *und (π, V) eine Darstellung von G über $\mathbb{K}$. Dann ist die lineare Abbildung*

$$I\colon V \to V, \quad I(v) := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\pi(g)v$$

ein Vertauschungsoperator und eine Projektion auf den Fixraum

$$V^G := \{v \in G\colon (\forall g \in G)\, \pi(g)v = v\}.$$

Sein Kern ist der effektive Unterraum

$$V_{\mathrm{eff}} := \operatorname{span}\{\pi(g)v - v\colon g \in G, v \in V\}.$$

Beweis. Aus $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \nmid |G|$ folgt, dass das Element

$$|G| = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{|G|\times} \in \mathbb{K}$$

ein multiplikatives Inverses $\frac{1}{|G|}$ besitzt. Die Formel für I ist also sinnvoll.

Ist $v \in V^G$, so ist

$$I(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \pi(g)v = \frac{1}{|G|}|G|v = v.$$

Für $h \in G$ ist

$$\pi(h)I = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \pi(h)\pi(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \pi(hg) = \frac{1}{|G|} \sum_{u \in G} \pi(u) = I.$$

Also ist $I(V) \subseteq V^G$ und damit $I^2 = I$ eine Projektion mit dem Bild V^G.

Dass I ein Vertauschungsoperator ist, folgt aus

$$I\pi(h) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \pi(g)\pi(h) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \pi(gh) = \frac{1}{|G|} \sum_{u \in G} \pi(u) = I.$$

Da $I(V)$ aus Fixpunkten besteht, gilt $I(\pi(g)v - v) = \pi(g)Iv - Iv = 0$, also $V_{\mathrm{eff}} \subseteq \ker I$. Darüber hinaus ist

$$I(v) - v = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \big(\pi(g)v - v\big) \in V_{\mathrm{eff}}$$

und für $I(v) = 0$ erhalten wir somit $v \in V_{\mathrm{eff}}$. Also ist $V = I(V) \oplus \ker I = V^G \oplus V_{\mathrm{eff}}$. □

Bemerkung 3.18. Wenn $\mathrm{char}(\mathbb{K})$ die Gruppenordnung teilt, so kann man, indem man den Faktor $\frac{1}{|G|}$ in der Definition des Symmetrisators weglässt, immer noch einen Vertauschungsoperator

$$\widehat{I} := \sum_{g \in G} \pi(g) \colon V \to V^G$$

konstruieren. Für $v \in V^G$ ist dann aber $\widehat{I}(v) = |G|v = 0$ und damit $\widehat{I}^2 = 0$. Insbesondere ist $\widehat{I}$ i.a. keine Projektion sondern nilpotent.

Wenden wir Satz 3.17 auf die Darstellung von G auf dem Raum $\mathrm{Hom}(V, W)$ an, so erhalten wir unmittelbar:

Korollar 3.19. *Sei G eine endliche Gruppe mit $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \nmid |G|$ und (ρ, V), (τ, W) Darstellungen von G über $\mathbb{K}$. Dann ist für jede lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ die durch*

$$\mathrm{Sym}(\varphi) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \tau(g) \circ \varphi \circ \rho(g^{-1})$$

definierte lineare Abbildung $\mathrm{Sym}(\varphi) : V \to W$ ein Homomorphismus von Darstellungen. Ist die lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ bereits ein Homomorphismus von Darstellungen, so gilt $\mathrm{Sym}(\varphi) = \varphi$.

3.3.3 Vollständige Reduzibilität

Um eine vollständige Zerlegung von Darstellungen in unzerlegbare Darstellungen zu erhalten sind also zusätzliche Annahmen an die Darstellungen oder an die Gruppe notwendig. Die einfachste Situation, in der eine solche vollständige Zerlegung für jede Darstellung möglich ist, ist der Fall einer endlichen Gruppe, in der die Anzahl der Elemente $|G|$ die Charakteristik des Körpers nicht teilt.

Satz 3.20. (Satz von Maschke) *Sei G eine endliche Gruppe und* $\operatorname{char}(\mathbb{K}) \nmid |G|$. *Dann ist jede Darstellung von G über $\mathbb{K}$ halbeinfach und jede einfache Darstellung endlichdimensional.*

Beweis. **1. Schritt:** Wir zeigen zuerst, dass jeder Untermodul $U \subseteq V$ ein Modulkomplement besitzt. Hierzu wählen wir zunächst einen komplementären Untervektorraum W, also $V = U \oplus W$, und betrachten die Projektionsabbildung $p : V \to U$, $u + w \mapsto u$ mit Kern W und deren Symmetrisierung $\operatorname{Sym}(p) : V \to U$ aus Lemma 3.19. Offensichtlich gilt wegen $\rho(g)u \subset U$ für alle $g \in G$ und $u \in U$:

$$\operatorname{Sym}(p)(u) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)p\big(\rho(g^{-1})u\big) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)\rho(g^{-1})(u) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} u = u$$

und somit $\operatorname{Sym}(p)|_U = \operatorname{id}_U$. Damit erhalten wir eine Zerlegung

$$V \cong \ker(\operatorname{Sym}(p)) \oplus \operatorname{im}(\operatorname{Sym}(p)) = \ker(\operatorname{Sym}(p)) \oplus U,$$

und da $\operatorname{Sym}(p)$ ein Homomorphismus von Darstellungen ist, folgt mit Bemerkung 3.14 dass auch $\ker(\operatorname{Sym}(p))$ ein Untermodul ist.

2. Schritt: Jetzt zeigen wir, dass jeder G-Modul $W \neq \{0\}$ einen einfachen endlichdimensionalen Untermodul enthält. Insbesondere ist also jeder einfache G-Modul endlichdimensional. Sei hierzu $0 \neq w \in W$. Dann ist $W_1 := \operatorname{span}(\rho_W(G).w) \subseteq W$ ein endlichdimensionaler Untermodul, da G endlich ist. Ist $\{0\} \neq W_2 \subseteq W_1$ ein echter Untermodul minimaler Dimension, so ist W_2 einfach.

3. Schritt: Wir betrachten nun die Menge $\mathfrak{M}$ aller Mengen $\mathcal{M}$ einfacher Untermoduln von V, deren Summe direkt ist. Wir ordnen die Menge $\mathfrak{M}$ durch Inklusion. Wir zeigen jetzt, dass jede Kette $\mathfrak{K}$ in der geordneten Menge $(\mathfrak{M}, \subseteq)$ eine obere Schranke besitzt. Hierzu betrachten wir die Menge $\widetilde{\mathcal{K}}$ aller einfacher Untermoduln von V, die in einem Element $\mathcal{K} \in \mathfrak{K}$ enthalten sind. Um einzusehen, dass $\widetilde{\mathcal{K}} \in \mathfrak{M}$ ist, müssen wir zeigen, dass $\sum_{W\in\widetilde{\mathcal{K}}} W$ direkt ist. Hierzu reicht es aus einzusehen, dass für endlich viele $W_1, \ldots, W_n \in \widetilde{\mathcal{K}}$ die Summe direkt ist.[2] Nun existieren Elemente $\mathcal{K}_j$, $j = 1, \ldots, n$, der Kette $\mathfrak{K}$ mit $W_j \in \mathcal{K}_j$. Aus der Ketteneigenschaft

[2] Eine Summe $\sum_{j\in J} W_j$ von Unterräumen eines Vektorraums ist genau dann direkt, wenn dies für jede endliche Teilsumme $W_{j_1} + \cdots + W_{j_n}$ der Fall ist. In der Tat, bedeutet die Direktheit der Summe, dass für jede endliche Summe $\sum_{j\in J} w_j = 0$ mit $w_j \in W_j$ alle Summanden verschwinden. Da die betrachtete Summe endlich ist, folgt dies schon aus der Direktheit der endlichen Teilsummen.

folgt die Existenz eines j_0 mit $\mathcal{K}_j \subseteq \mathcal{K}_{j_0}$ für alle j. Dann sind $W_1, \ldots, W_n$ alle in $\mathcal{K}_{j_0}$ enthalten, ihre Summe ist also direkt. Wir haben damit gezeigt, dass jede Kette $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{M}$ eine obere Schranke besitzt, und das Zornsche Lemma liefert ein maximales Element $\mathcal{V}$ in $\mathfrak{M}$.

Dann ist $U := \sum_{W \in \mathcal{V}} W$ isomorph zu $\bigoplus_{W \in \mathcal{V}} W$. Wir haben zu zeigen, dass $U = V$ ist. Nach dem 1. Schritt ist $V \cong U \oplus U'$ für einen weiteren Untermodul U' und wenn $U' \neq \{0\}$ ist, enthält U' nach dem 2. Schritt einen einfachen Untermodul U_0. Dann ist $\mathcal{V} \cup \{U_0\} \in \mathfrak{M}$ und das widerspricht der Maximalität von $\mathcal{V}$. Also ist $U' = \{0\}$ und somit $V = U$.

3. Schritt (endlichdim. Fall): Ist V endlichdimensional, so können wir direkter durch vollständige Induktion nach der Dimension von V argumentieren. Ist V nicht einfach, so existiert nach dem 2. Schritt ein einfacher Untermodul V_1. Nach dem 1. Schritt ist $V \cong V_1 \oplus W$ für einen Untermodule W mit $\dim W < \dim V$. Unsere Induktionsvoraussetzung liefert nun, dass W direkte Summe einfacher Moduln ist, und damit ist dies auch für V der Fall. $\square$

Bemerkung 3.21. Es ist instruktiv sich an dieser Stelle noch einmal den Fall zyklischer Gruppen $G = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ aus Abschnitt 3.2 vor Augen zu führen. Sei dazu $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen.

- Da jede Matrix einen Eigenvektor besitzt, sind die einfachen Darstellungen von G eindimensional.
- Halbeinfachheit der Darstellung ist daher gleichbedeutend mit der Diagonalisierbarkeit der erzeugenden linearen Abbildung $g = \rho(\overline{1})$, die ja der Bedingung $g^k = \mathbf{1}$ genügen muss.
- Ist $p = \operatorname{char} \mathbb{K}$ kein Teiler von k, so haben wir in Beispiel 3.12 gesehen, dass g diagonalisierbar ist, was auch aus dem Satz von Maschke folgt. In diesem Fall sind alle Darstellungen halbeinfach.
- Die Darstellung ist unzerlegbar, genau dann wenn die Jordansche Normalform von $\rho(\overline{1})$ nur aus einem Jordan-Block besteht.
- Wir haben aber auch gesehen, dass für den Fall, dass p ein Teiler von k ist, schon in der Dimension 2 Matrizen g mit $g^k = 1$ existierten, die nicht diagonalisierbar sind.

Da wir einfache Darstellungen einer Gruppe als Grundbausteine in der Klassifizierung von Darstellungen verwenden möchten, stellt sich insbesondere die Frage, inwieweit sich verschiedene einfache Darstellungen einer Gruppe durch Homomorphismen von Darstellungen in Verbindung setzen lassen bzw. welche Endomorphismen für eine gegebene einfache Darstellung existieren. Die Antwort auf diese Fragen findet sich im Lemma von Schur.

Satz 3.22. *Sei (ρ, V) eine irreduzible Darstellung der Gruppe G.*

1. Lemma von Schur: *Ist (τ, W) ebenfalls eine irreduzible G-Darstellung und $0 \neq \varphi : V \to W$ ein Homomorphismus von Darstellungen, so ist φ ein Isomorphismus.*

Insbesondere ist $\mathrm{Hom}((\rho, V), (\tau, W)) = \{0\}$*, wenn beide Darstellungen nicht äquivalent sind.*

2. Lemma von Schur: *Ist* $\dim V < \infty$ *und* $\mathbb{K}$ *algebraisch abgeschlossen, so ist* $\mathrm{End}((\rho, V)) = \mathbb{K}\,\mathrm{id}_V$*.*

Beweis. (a) Nach Bemerkung 3.14 sind der Kern und das Bild von φ Untermoduln. Da (ρ, V) und (τ, W) irreduzibel sind, und $\varphi \neq 0$, ist $\mathrm{im}(\varphi) = W$ und $\ker(\varphi) = \{0\}$, so dass φ ein Isomorphismus ist.

(b) Da $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen ist, hat der Endomorphismus $\varphi : V \to V$ einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$. Da φ ein Homomorphismus von Darstellungen ist, ist der dazugehörige Eigenraum $V_\lambda \subset V$ stabil unter der Wirkung von G

$$\varphi(v) = \lambda v \quad \Rightarrow \quad \varphi(\rho(g)v) = \rho(g)\varphi(v) = \lambda\rho(g)v$$

und bildet daher eine Unterdarstellung. Da (ρ, V) irreduzibel ist und $V_\lambda \neq \{0\}$, folgt $V_\lambda = V$ und somit $\varphi = \lambda\,\mathrm{id}_V$. □

Korollar 3.23. *Ist G eine abelsche Gruppe und $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen, so ist jede irreduzible endlichdimensionale G-Darstellung (ρ, V) eindimensional, also von der Form* $\rho(g) = \chi(g)\mathbf{1}$ *für einen Homomorphismus* $\chi\colon G \to \mathbb{K}^\times$*.*

Für eine abelsche Gruppe G nennt man Homomorphismen $\chi\colon G \to \mathbb{K}^\times$ auch *Charaktere von G*. Wir werden bald sehen, wie sich dieser Begriff auf nichtabelsche Gruppen erweitern lässt.

Beweis. Da G abelsch ist, ist $\rho(G) \subseteq \mathrm{End}((\rho, V))$. Aus dem zweiten Schurschen Lemma folgt daher $\rho(G) \subseteq \mathbb{K}\mathbf{1}$. Da (ρ, V) irreduzibel ist, muss daher $\dim V = 1$ sein. □

Bemerkung 3.24. (a) Da die Gruppe $\mathrm{GL}_1(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^\times$ abelsch ist, sind die Darstellungen, die man aus zwei Charakteren $\chi, \chi'\colon G \to \mathbb{K}^\times$ erhält, genau dann äquivalent, wenn sie gleich sind. Die Menge der Äquivalenzklassen eindimensionaler Darstellungen einer abelschen Gruppe G wird also durch die Gruppe $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{K}^\times)$ (bzgl. der punktweisen Multiplikation) beschrieben. Über algebraisch abgeschlossenen Körpern erhalten wir also die einfache Beschreibung

$$\mathrm{Irrep}_{\mathbb{K}}(G) \cong \mathrm{Hom}(G, \mathbb{K}^\times)$$

der Menge $\mathrm{Irrep}_{\mathbb{K}}(G)$ der Äquivalenzklassen endlichdimensionaler irreduzibler Darstellungen von G über $\mathbb{K}$.

(b) (Zyklischer Fall) Ist $G = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$, so ist jeder Homomorphismus $\chi\colon G \to \mathbb{K}^\times$ durch seinen Wert auf dem Erzeuger $\overline{1}$ bestimmt und wir erhalten so

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, \mathbb{K}^\times) \cong C_k^{\mathbb{K}} = \{z \in \mathbb{K}^\times : z^k = 1\}$$

(vg. Lemma 3.10).

Bemerkung 3.25. (Zu den Voraussetzungen des zweiten Schurschen Lemmas)

(a) Ist V endlichdimensional und $\mathbb{K}$ nicht algebraisch abgeschlossen, so gilt das zweite Schursche Lemma (Satz 3.22) im allgemeinen nicht. Die einfachsten Beispiele erhält man für die Gruppe $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $V = \mathbb{K}^2$ und

$$\rho(\overline{1}) = g := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\det(\lambda\mathbf{1} - g) = \det\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Also besitzt g genau dann keinen Eigenvektor, wenn -1 in $\mathbb{K}$ kein Quadrat ist (z.B. für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). In diesem Fall gibt es keinen eindimensionalen g-invarianten Unterraum, so dass (ρ, V) eine irreduzible Darstellung von G ist.

Da G abelsch ist, ist insbesondere $\rho(g) \in \mathrm{End}((\rho, V))$, aber $\rho(g) \notin \mathbb{K}\,\mathrm{id}_V$.

(b) Allgemein nennt man eine irreduzible Darstellung (ρ, V) *absolut irreduzibel*, wenn $\mathrm{End}((\rho, V)) = \mathbb{K}\,\mathrm{id}_V$ gilt. Das zweite Schursche Lemma besagt also, dass endlichdimensionale irreduzible Darstellungen über algebraisch abgeschlossenen Körpern absolut irreduzibel sind.

(c) Ist $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen und überabzählbar (z.B. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), aber V nicht endlichdimensional, so stellt sich in der Tat heraus, dass die Voraussetzung der endlichen Dimension von V abgeschwächt werden kann. Es reicht aus, dass V abzählbare Dimension besitzt, wenn $\mathbb{K}$ überabzählbar ist.

1. Sei $\varphi \in \mathrm{End}((\rho, V))$ und $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{End}((\rho, V))$ eine maximal kommutative Unteralgebra, die φ enthält (Nachweis als Übung 3.21). Jedes $\psi \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ ist invertierbar, so dass aus der Maximalität $\psi^{-1} \in \mathcal{A}$ folgt. Also ist $\mathcal{A}$ ein Körper, der $\mathbb{K}\,\mathrm{id}_V$ enthält. Ist $0 \neq v_0 \in V$, so ist die Abbildung $\gamma\colon \mathcal{A} \to V, A \mapsto Av_0$ injektiv, denn aus $A \neq 0$ folgt ja $\ker A = \{0\}$. Nun ist $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{A} \leq \dim_{\mathbb{K}} V$ höchstens abzählbar. Wir zeigen nun, dass dies $\mathcal{A} = \mathbb{K}\mathbf{1}$ zur Folge hat.

2. Sei $\mathbb{L} \supsetneq \mathbb{K}$ eine echte Körpererweiterung, d.h. $\mathbb{L}$ ist ein Körper, der $\mathbb{K}$ als echten Unterkörper enthält. Ist $L \in \mathbb{L} \setminus \mathbb{K}$, so sind die Elemente $(L - \lambda)^{-1}$, $\lambda \in \mathbb{K}$, über $\mathbb{K}$ linear unabhängig, da L nicht Nullstelle eines Polynoms über $\mathbb{K}$ ist (Nachweis als Übung). Da $\mathbb{K}$ überabzählbar ist, kann $\mathbb{L}$ als $\mathbb{K}$-Vektorraum nicht von abzählbarer Dimension sein.

Die Schurschen Lemmata sind in der Praxis sehr nützlich, um Aussagen über Homomorphismen von Darstellungen herzuleiten und zu beweisen. Als erste Anwendung betrachten wir die Konstruktion von Homomorphismen von Darstellungen mittels Symmetrisierung aus Lemma 3.19.

Korollar 3.26. *Seien (ρ, V), (τ, W) irreduzible Darstellungen einer endlichen Gruppe G über $\mathbb{K}$, $\operatorname{char}\mathbb{K}$ sei kein Teiler von $|G|$ und $\varphi : V \to W$ sei eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung. Dann gilt:*

(a) *Sind (ρ, V) und (τ, W) nicht isomorph, so ist* $\operatorname{Sym}(\varphi) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\tau(g)\circ\varphi\circ\rho(g^{-1}) = 0$.

(b) *Ist $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen,* $\operatorname{char}\mathbb{K} = 0$ *und $V \neq \{0\}$, so ist*

$$\operatorname{Sym}(\varphi) = \frac{\operatorname{tr}(\varphi)}{\dim_{\mathbb{K}}(V)}\operatorname{id}_V \qquad \textit{für} \qquad \varphi \in \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V).$$

Beweis. (a) Nach Lemma 3.19 ist $\operatorname{Sym}(\varphi) : V \to W$ ein Homomorphismus von Darstellungen, und mit dem ersten Schurschen Lemma (Satz 3.22) folgt, dass $\operatorname{Sym}(\varphi) : V \to W$ entweder ein Isomorphismus von Darstellungen oder Null ist. Sind V und W nicht isomorph, so folgt $\operatorname{Sym}(\varphi) = 0$.

(b) Die lineare Abbildung $\operatorname{Sym}(\varphi) : V \to V$ ist ein Endomorphismus von einfachen Darstellungen, und nach dem zweiten Schurschen Lemma (3.22) existiert ein $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $\operatorname{Sym}(\varphi) = \lambda \operatorname{id}_V$. Durch Spurbildung erhält man

$$\lambda \dim_{\mathbb{K}}(V) = \operatorname{tr}(\lambda \operatorname{id}_V) = \operatorname{tr}\left(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)\circ\varphi\circ\rho(g^{-1})\right) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\operatorname{tr}(\varphi) = \operatorname{tr}(\varphi).$$

Wegen $\operatorname{char}\mathbb{K} = 0$ ist $\dim_{\mathbb{K}}(V) \neq 0$ in $\mathbb{K}$, so dass wir durch diese Zahl teilen dürfen. $\square$

Aus dem ersten Schurschen Lemma leiten wir nun ab, dass es für jede endliche Gruppe G nur endlich viele Typen irreduzibler Darstellungen gibt:

Satz 3.27. (Endlichkeitssatz) *Für jede endliche Gruppe G und jeden Körper $\mathbb{K}$ gilt:*

(a) *Jede irreduzible Darstellung einer endlichen Gruppe G ist endlich dimensional und tritt als Unterdarstellung der regulären Darstellung $(\rho_l, \mathbb{K}^G)$ mit $(\rho_l(g)f)(x) := f(g^{-1}x)$ auf.*

(b) *Es gibt nur endlich viele Äquivalenzklassen irreduzibler Darstellungen von G über $\mathbb{K}$.*

Beweis. (a) Sei (ρ, V) irreduzibel, also V ein einfacher G-Modul, und $0 \neq v \in V$. Dann ist $W := \operatorname{span}(\rho(G)v)$ ein Untermodul, also $V = W$, da V einfach ist. Da G endlich ist, folgt somit $\dim V \leq |G|$ (siehe hierzu auch den Beweis des Satzes von Maschke 3.20).

Zu $\alpha \in V^*$ betrachten wir die lineare Abbildung

$$\Gamma_\alpha \colon V \to \mathbb{K}^G, \quad \Gamma_\alpha(v)(g) := \alpha(\rho(g)^{-1}v).$$

Dann ist

$$\Gamma_\alpha(\rho(h)v)(g) = \alpha(\rho(g)^{-1}\rho(h)v) = \alpha(\rho(h^{-1}g)^{-1}v) = \Gamma_\alpha(v)(h^{-1}g).$$

Also ist $\Gamma_\alpha \colon (\rho, V) \to (\rho_l, \mathbb{K}^G)$ ein Homomorphismus von Darstellungen.

Ist $\alpha \neq 0$, so ist $\Gamma_\alpha \neq 0$, also injektiv, da V einfach ist. Folglich ist (ρ, V) äquivalent zu einer einfachen Unterdarstellung von $(\rho_l, \mathbb{K}^G)$.

(b) In dem endlichdimensionalen G-Modul $\mathbb{K}^G$ betrachten wir eine maximale Fahne $W_0 = \{0\} \subseteq W_1 \subseteq \ldots \subseteq W_N = \mathbb{K}^G$ von G-Untermoduln. Induktiv erhält man eine solche Fahne wie folgt. Man beginnt mit $W_0 := \{0\}$. Zu W_i wählt man $W_{i+1} \supseteq W_i$ als einen echten "Obermodul" von W_i minimaler Dimension. Nach endlich vielen Schritten bricht das Verfahren mit $W_N = V$ ab.

Wir betrachten nun die Quotientendarstellungen (ρ_j, V_j) auf $V_j := W_j/W_{j-1}$, $j = 1, \ldots, N$ (Definition 3.13). Da zwischen W_{j-1} und W_j kein weiterer Untermodul liegt, ist der Quotient V_j einfach, denn seine Untermoduln entsprechen den Untermoduln von W_j, die W_{j-1} enthalten. Wir erhalten so N einfache G-Moduln (ρ_j, V_j).

Ist nun (ρ, V) ein beliebiger einfacher G-Modul, so dürfen wir wegen (a) annehmen, dass er ein Untermodul der regulären Darstellung ist. Wir finden daher ein minimales k mit $V \subseteq W_k$. Dann ist $V \not\subseteq W_{k-1}$ und daher liefert die Quotientenabbildung $q \colon W_k \to V_k$ einen Homomorphismus $q|_V \colon V \to V_k$ von einfachen G-Moduln, der nicht verschwindet. Aus dem ersten Schurschen Lemma folgt nun $(\rho, V) \cong (\rho_k, V_k)$. □

Kombinieren wir den Endlichkeitssatz 3.27 mit dem Satz von Maschke, so können wir das Klassifikationsproblem für G-Darstellungen auf den Fall einfacher Darstellungen reduzieren:

Korollar 3.28. (Klassifikation durch Vielfachheiten) *Sei G eine endliche Gruppe und* $\operatorname{char} \mathbb{K}$ *kein Teiler von $|G|$. Weiter sei*

$$\mathrm{Irrep}_{\mathbb{K}}(G) = \{[(\rho_j, V_j)] \colon 1 \leq j \leq N\},$$

d.h., die Darstellungen (ρ_j, V_j) sind einfach und paarweise nicht äquivalent und jede irreduzible Darstellungen ist zu einer Darstellung (ρ_j, V_j) äquivalent. Dann ist jede endlichdimensionale G-Darstellung (ρ, V) äquivalent zu einer direkten Summe

$$(\rho, V) \cong \bigoplus_{j=1}^{N} (\rho_j, V_j)^{\oplus m_j}, \quad m_j \in \mathbb{N}_0. \tag{10}$$

Zwei solche Darstellungen (ρ, V) und (ρ', V') sind genau dann äquivalent, wenn die Vielfachheiten m_j und m_j' für alle j übereinstimmen.

Die Menge $\mathrm{Irrep}_{\mathbb{K}}(G)$ der Äquivalenzklassen von endlichdimensionalen G-Darstellungen über $\mathbb{K}$ lässt sich also mit $\mathbb{N}_0^{\mathrm{Irrep}_{\mathbb{K}}(G)} \cong \mathbb{N}_0^N$ identifizieren.

Beweis. Zunächst einmal liefert der Endlichkeitssatz 3.27 die Existenz einer endlichen Familie $((\rho_j, V_j))_{1 \leq j \leq N}$, die jeden Typ einfacher Darstellungen genau einmal enthält. Aus dem Satz von Maschke folgt nun (10) unmittelbar.

Es bleibt noch zu sehen, wie wir die Vielfachheiten m_j in kanonischer Weise wieder aus der Darstellung extrahieren können und insbesondere, dass sie nicht davon abhängen, wie wir die

Darstellung als direkte Summe von einfachen schreiben. Hierbei hilft uns das erste Schursche Lemma, aus dem wir sofort $\operatorname{Hom}((\rho_j, V_j), (\rho_k, V_k)) = \{0\}$ für $j \neq k$ erhalten. Hieraus ergibt sich

$$\operatorname{Hom}((\rho_k, V_k), (\rho, V)) \cong \bigoplus_{j=1}^{N} \operatorname{Hom}((\rho_k, V_k), (\rho_j, V_j))^{\oplus m_j} \cong \operatorname{End}((\rho_k, V_k))^{m_k} \tag{11}$$

und damit

$$m_k(\rho, V) := m_k = \frac{\dim \operatorname{Hom}((\rho_k, V_k), (\rho, V))}{\dim \operatorname{End}((\rho_k, V_k))},$$

wobei wir den Bruch in $\mathbb{Q}$ interpretieren (und nicht in $\mathbb{K}$).

Wir sehen also, dass aus $(\rho, V) \cong (\rho', V')$ sofort $m_k(\rho, V) = m_k(\rho', V')$ für alle k folgt. Die Umkehrung folgt sofort aus (10). □

3.3.4 Isotypische Komponenten

Wie in Korollar 3.28 sei

$$(\rho, V) \cong \bigoplus_{j=1}^{N} (\rho_j, V_j)^{\oplus m_j} \tag{12}$$

eine endlichdimensionale Darstellung der endlichen Gruppe G, wobei $((\rho_j, V_j))_{1 \leq j \leq N}$ ein Repräsentantensystem der Äquivalenzklassen einfacher G-Moduln ist. Ist $(\tau, W) \subseteq (\rho, V)$ ein einfacher Untermodul, so existiert genau ein j mit $(\tau, W) \cong (\rho_j, V_j)$. Nach dem ersten Schurschen Lemma ist dann $\operatorname{Hom}((\tau, W), (\rho_k, V_k)) = \{0\}$ für $k \neq j$ und daher

$$W \subseteq V_{[j]} := (\rho_j, V_j)^{\oplus m_j}.$$

Definition 3.29. (Isotypische Komponenten) Wir sehen so, dass wir $V_{[j]}$ auch ohne auf eine konkrete Zerlegung von V in einfache Untermoduln Bezug zu nehmen, als den Untermodul

$$V_{[j]} := \sum_{\rho \in \operatorname{Hom}((\rho_j, V_j), (\rho, V))} \rho(V_j)$$

definieren können, der von allen einfachen Untermoduln erzeugt wird, die zu V_j isomorph sind. Wir nennen ihn daher *die isotypische Komponente vom Typ V_j*. Wir schreiben $\rho_{[j]}$ für die Darstellung auf diesem Untermodul. Insbesondere heißt ein Modul V *isotypisch*, wenn er nur einfache Untermoduln eines Typs enthält, also wenn $V = V_{[j]}$ für ein j gilt.

Aus der Zerlegung (12) folgt sofort, dass

$$V \cong \bigoplus_{j=1}^{N} V_{[j]}$$

die direkte Summe seiner isotypischen Komponenten ist. Das erste Schursche Lemma liefert weiterhin

$$\mathrm{Hom}((\rho_{[j]}, V_{[j]}), (\rho_{[k]}, V_{[k]})) = \{0\} \quad \text{für} \quad j \neq k,$$

so dass alle isotypischen Komponenten unter $\mathrm{End}((V, \rho))$ invariant sind. Hieraus ergibt sich insbesondere

$$\mathrm{End}((\rho, V)) \cong \bigoplus_{j=1}^{N} \mathrm{End}((\rho_{[j]}, V_{[j]})). \tag{13}$$

Aus $V_{[j]} \cong V_j^{\oplus m_j}$ erhalten wir zunächst

$$\mathrm{End}_{\mathbb{K}}((\rho_{[j]}, V_{[j]})) \cong M_{m_j}(\mathrm{End}_{\mathbb{K}}((\rho_j, V_j)))$$

(Bemerkung 2.5), wobei

$$\rho_{[j]}(g) = \mathrm{diag}(\rho_j(g), \cdots, \rho_j(g)) \tag{14}$$

einer Diagonalmatrix entspricht. Hieraus ergibt sich unmittelbar

$$\mathrm{End}((\rho_{[j]}, V_{[j]})) \cong M_{m_j}(\mathrm{End}((\rho_j, V_j))).$$

Wir halten fest:

Satz 3.30. (Endomorphismenalgebra einer Darstellung) *Ist (ρ, V) ein halbeinfacher G-Modul der Gestalt $\bigoplus_{j=1}^N (\rho_j, V_j)^{\oplus m_j}$ mit paarweise nicht isomorphen einfachen Darstellungen (ρ_j, V_j) und schreiben wir $\mathbb{L}_j$ für den Schiefkörper*[3] $\mathrm{End}((\rho_j, V_j))$*, so ist*

$$\mathrm{End}((\rho, V)) \cong \bigoplus_{j=1}^{N} M_{m_j}(\mathbb{L}_j).$$

Ist $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen, so gilt sogar

$$\mathrm{End}((\rho, V)) \cong \bigoplus_{j=1}^{N} M_{m_j}(\mathbb{K}).$$

Beweis. Es bleibt nur noch zu ergänzen, dass die zweite Behauptung aus dem zweiten Schurschen Lemma folgt. □

Bemerkung 3.31. (a) Ist (ρ, V) eine Darstellung von G und (ρ_j, V_j) eine irreduzible Darstellung von G, so erhalten wir eine "Auswertungsabbildung"

$$E_j \colon \mathrm{Hom}((\rho_j, V_j), (\rho, V)) \otimes V_j \to V, \quad \varphi \otimes v \mapsto \varphi(v),$$

[3]Ein *Schiefkörper* ist ein Ring R, in dem jedes Element $r \neq 0$ invertierbar ist, also in dem $R^\times = R \setminus \{0\}$ gilt.

die ein Morphismus von Darstellungen ist, denn

$$E_j(\varphi \otimes \rho_j(g)v) = \varphi(\rho_j(g)v) = \rho(g)\varphi(v) = \rho(g)E_j(\varphi \otimes v).$$

Das Bild von E_j ist natürlich der Untermodul, der von all homomorphen Bildern von V_j aufgespannt wird, also die isotypische Komponente $V_{[j]}$.

(b) Ist $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen, so ist $\mathrm{End}((\rho_j, V_j)) = \mathbb{K}\mathbf{1}$ für alle j und aus (11) (im Beweis von Korollar 3.28) ergibt sich

$$\mathrm{Hom}((\rho_j, V_j), (\rho, V)) \cong \mathbb{K}^{m_j}.$$

Hier folgt sofort (schon aus Dimensionsgründen), dass die surjektive Abbildung

$$E_j\colon \mathrm{Hom}((\rho_j, V_j), (\rho, V)) \otimes V_j \to V_{[j]}, \quad \varphi \otimes v \mapsto \varphi(v)$$

ein Isomorphismus von G-Moduln ist. Wir erhalten also einen kanonischen Isomorphismus

$$V_{[j]} \cong M_j \otimes V_j, \quad \text{wobei} \quad M_j \cong \mathrm{Hom}((\rho_j, V_j), (\rho, V))$$

ein trivialer G-Modul ist. Bauen wir alle $V_{[j]}$ zusammen, so ergibt sich

$$V \cong \bigoplus_{j=1}^{N} V_{[j]} \cong \bigoplus_{j=1}^{N} M_j \otimes V_j.$$

Der Vorteil dieser Zerlegung ist, dass sie kanonisch ist und auf keiner Wahl beruht.

Definition 3.32. (Vielfachheitenraum) Man nennt M_j den *Vielfachheitenraum für V_j in V*.

3.4 Die Gruppenalgebra

Ist G eine Gruppe und $\mathbb{K}$ ein Körper, so trägt der freie Vektorraum $F(G) = \mathbb{K}^{(G)}$ mit der Basis $(\delta_g)_{g\in G}$ (Definition 2.6) eine natürliche Multiplikation $\star$, die man durch bilineare Fortsetzung der Gruppenmultiplikation erhält (vgl. Aufgabe 2.2). Aus

$$\delta_g \star \delta_h := \delta_{gh} \quad \text{für} \quad g, h \in G \tag{15}$$

erhalten wir so

$$\Big(\sum_{g_1\in G} f(g_1)\delta_{g_1}\Big) \star \Big(\sum_{g_2\in G} h(g_2)\delta_{g_2}\Big) = \sum_{g_1, g_2\in G} f(g_1)h(g_2)\delta_{g_1 g_2} = \sum_{g\in G}\Big(\sum_{g_1 g_2 = g} f(g_1)h(g_2)\Big)\delta_g. \tag{16}$$

Betrachten wir die Elemente von $F(G)$ als Funktionen $f\colon G \to \mathbb{K}$, so erhalten wir das *Faltungsprodukt*

$$(f \star h)(g) := \sum_{g_1 g_2 = g} f(g_1)h(g_2) = \sum_{x\in G} f(x)h(x^{-1}g) = \sum_{x\in G} f(gx^{-1})h(x).$$

Für $g \in G$ und $f \in \mathbb{K}[G]$ ergibt sich aus (16) sofort

$$(\delta_g \star f)(x) = f(g^{-1}x) \quad \text{und} \quad (f \star \delta_g)(x) = f(xg^{-1}). \tag{17}$$

Definition 3.33. Wir schreiben $\mathbb{K}[G] := (\mathbb{K}^{(G)}, \star)$ für die so erhaltene assoziative Algebra mit Eins und nennen sie die *Gruppenalgebra von G*.

Satz 3.34. (Universelle Eigenschaft der Gruppenalgebra) *Durch $\eta\colon G \to \mathbb{K}[G], g \mapsto \delta_g$ wird ein Homomorphismus von G in die Einheitengruppe $\mathbb{K}[G]^\times$ definiert. Für jeden Homomorphismus $\alpha\colon G \to \mathcal{A}^\times$ in die Einheitengruppe einer assoziativen Algebra $\mathcal{A}$ mit Eins existiert genau ein Homomorphismus $\widehat{\alpha}\colon \mathbb{K}[G] \to \mathcal{A}$ von assoziativen Algebren mit Eins, so dass $\widehat{\alpha} \circ \eta = \alpha$ ist, also $\widehat{\alpha}(\delta_g) = \alpha(g)$ für alle $g \in G$.*

Beweis. Da $\mathbb{K}[G]$ durch $\eta(G)$ aufgespannt wird, ist $\widehat{\alpha}$ eindeutig durch α bestimmt. Die Existenz erhalten wir durch lineare Fortsetzung von α. Das ist immer möglich, da $\eta(G)$ eine Basis von $\mathbb{K}[G]$ ist. Dass $\widehat{\alpha}$ ein Homomorphismus von Algebren wird, ergibt sich direkt aus $\widehat{\alpha}(\delta_g \star \delta_h) = \alpha(g)\alpha(h)$ für $g, h \in G$ und bilinearer Fortsetzung (siehe (16)), da die Deltafunktionen eine Basis von $\mathbb{K}[G]$ bilden. $\square$

Korollar 3.35. (Fortsetzung von Darstellungen auf $\mathbb{K}[G]$) *Ist (ρ, V) eine Darstellung von G auf V, so wird durch*

$$\widehat{\rho}\colon \mathbb{K}[G] \to \operatorname{End}(V), \quad \widehat{\rho}(f) := \sum_{g \in G} f(g)\rho(g)$$

eine Darstellung der $\mathbb{K}$-Algebra $\mathbb{K}[G]$ auf V definiert. Umgekehrt erhalten wir aus jeder Darstellung $\pi\colon \mathbb{K}[G] \to \operatorname{End}(V)$ von Algebren mit Eins eine Gruppendarstellung durch $\rho := \pi \circ \eta$ und es gilt $\widehat{\rho} = \pi$ und $\widehat{\rho} \circ \eta = \rho$.

Bemerkung 3.36. (Irreduzible Darstellungen abelscher Gruppen und Erweiterungskörper)

(a) Wir betrachten eine irreduzible Darstellung (ρ, V) der endlichen abelschen Gruppe G. Ist $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen, so haben wir als unmittelbare Konsequenz des zweiten Schurschen Lemmas in Korollar 3.23 gesehen, dass $\dim V = 1$ sein muss.

Ist $\mathbb{K}$ nicht algebraisch abgeschlossen, so zeigt uns das erste Schursche Lemma, dass die Algebra $\mathcal{C} := \operatorname{End}((\rho, V))$ ein Schiefkörper ist, d.h., jedes von 0 verschiedene Element in $\mathcal{C}$ ist invertierbar, d.h. $\mathcal{C}^\times = \mathcal{C} \setminus \{0\}$. Da G abelsch ist, ist die kommutative Unteralgebra $\mathcal{A} := \widehat{\rho}(\mathbb{K}[G])$ von $\operatorname{End}(V)$ in $\mathcal{C}$ enthalten. Ist $0 \neq A \in \mathcal{A}$, so ist A in $\mathcal{C}$ invertierbar. Insbesondere ist die Multiplikationsabbildung $\lambda_A\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}, B \mapsto AB$ injektiv, also auch surjektiv (wegen $\dim \mathcal{A} < \infty$) und somit $A^{-1} = \lambda_A^{-1}(\mathbf{1}) \in \mathcal{A}$ (vgl. Aufgabe 3.22). Hieraus folgt, dass $\mathcal{A}$ ein Körper ist. Wir erhalten also eine endlichdimensionale Körpererweiterung $\mathbb{K} \hookrightarrow \mathcal{A}$. Ist $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen, so folgt hieraus $\mathbb{K} = \mathcal{A}$, aber im allgemeinen kann $\mathcal{A}$ größer als $\mathbb{K}$ sein.

Für die irreduzible Darstellung der Gruppe $C_4 \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{R}^2$ aus Bemerkung 3.25(a) erhalten wir z.B. $\mathcal{A} \cong \mathbb{C}$.

(b) Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so ist $\mathbb{C}$ die einzige endlichdimensionale Körpererweiterung. Ist nun (ρ, V) eine irreduzible Darstellung der abelschen Gruppe G mit $\dim V > 1$, so ist $\mathcal{A} = \widehat{\rho}(\mathbb{R}[G]) \cong \mathbb{C}$. Insbesondere erhalten wir auf V die Struktur eines komplexen Vektorraums und aus der

Irreduzibilität folgt $\dim_{\mathbb{C}} V = 1$, also $\dim_{\mathbb{R}} V = 2$. Die zweidimensionalen reellen irreduziblen Darstellungen einer abelschen Gruppe G entsprechen also genau denjenigen Homomorphismen $\chi\colon G \to \mathbb{C}^\times$ für die $\chi(G) \not\subseteq \mathbb{R}^\times$ ist. Insgesamt erhalten wir eine Bijektion

$$\mathrm{Irrep}_{\mathbb{R}}(G) \to \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times).$$

Definition 3.37. Sei G eine Gruppe und $\mathbb{K}$ ein Körper. Eine Funktion $f : G \to \mathbb{K}$ heißt *Klassenfunktion*, wenn sie konstant auf den Konjugationsklassen ist:

$$f(g \cdot h \cdot g^{-1}) = f(h) \qquad \text{für alle} \quad g, h \in G.$$

Die Klassenfunktionen auf einer Gruppe G bilden einen Untervektorraum

$$\mathrm{Klass}(G, \mathbb{K}) \subseteq \mathbb{K}^G$$

des $\mathbb{K}$-Vektorraums $\mathbb{K}^G$ der Abbildungen $f : G \to \mathbb{K}$.

Satz 3.38. (Das Zentrum der Gruppenalgebra) *Ist G eine endliche Gruppe, so bilden die Klassenfunktionen* $\mathrm{Klass}(G, \mathbb{K})$ *das Zentrum der Gruppenalgebra* $\mathbb{K}[G]$*:*

$$\mathrm{Klass}(G, \mathbb{K}) = \{f \in \mathbb{K}[G] \colon (\forall h \in \mathbb{K}[G])\ f \star h = h \star f\}.$$

Beweis. Sei $f = \sum_{g \in G} f(g)\delta_g \in \mathbb{K}[G]$. Da $\mathbb{K}[G]$ von den Elementen δ_h, $h \in G$, erzeugt wird, ist f genau dann zentral, wenn

$$f = \delta_h \star f \star \delta_h^{-1} = \sum_{g \in G} f(g)\delta_{hgh^{-1}} = \sum_{g \in G} f(h^{-1}gh)\delta_g$$

für all $h \in G$ gilt. Das bedeutet, dass f eine Klassenfunktion ist.

Da G eine endliche Gruppe ist, definiert jede Klassenfunktion auch ein Element von $\mathbb{K}[G]$ und die Behauptung folgt. [4] $\square$

Die Gruppenalgebra $\mathbb{K}[G]$ einer Gruppe trägt eine weitere Algebra-Struktur:

Bemerkung 3.39. Für jede Gruppe G erhält man durch die punktweise Multiplikation von Funktionen $f_1, f_2 : G \to \mathbb{K}$

$$(f_1 \cdot f_2)(g) = f_1(g) \cdot f_2(g) \qquad \text{für} \quad g \in G$$

eine zweite Algebrastruktur auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathbb{K}^{(G)}$ der Funktionen mit endlichem Träger. Diese Multiplikation ist immer kommutativ, was bei $\star$ nur für abelsche Gruppen der Fall ist. Allerdings existiert für diese Algebrastruktur nur im Fall einer *endlichen* Gruppe ein Einselement. Denn das Einselement für die Multiplikation ist die konstante Funktion $1 : G \to \mathbb{K}$, $1(g) = 1$ für alle $g \in G$. Ist G unendlich, so liegt dieses nicht in $\mathbb{K}^{(G)}$.

[4] Ist G unendlich und die Konjugationsklasse $[g]$ von $g \in G$ unendlich, so ist ihre charakteristische Funktion zwar eine Klassenfunktion, definiert aber kein Element von $\mathbb{K}[G]$, da sie keinen endlichen Träger besitzt.

Bemerkung 3.40. (a) Wir haben schon gesehen, dass jede Darstellung (ρ, V) von G zu einer Darstellung $\widehat{\rho}$: $\mathbb{K}[G] \to \operatorname{End}(V)$ der Grupppenalgebra $(\mathbb{K}[G], \star)$ führt (Korollar 3.35). Andrerseits haben wir auf $\mathbb{K}[G]$ die *bireguläre Darstellung* von $G \times G$, die durch

$$(\rho_b(g,h)f)(x) = f(g^{-1}xh) \quad \text{also} \quad \rho_b(g,h)f = \delta_g \star f \star \delta_h^{-1}$$

gegeben ist (siehe Beispiel 2.6). Da $\widehat{\rho}$ ein Homomorphismus ist, folgt hieraus

$$\widehat{\rho}(\rho_b(g,h)f) = \widehat{\rho}(\delta_g)\widehat{\rho}(f)\widehat{\rho}(\delta_h)^{-1} = \rho(g)\widehat{\rho}(f)\rho(h)^{-1}.$$

Die Abbildung $\widehat{\rho}$ is also ein Homomorphismus von Darstellungen, wenn wir auf $\operatorname{End}(V)$ die Darstellung

$$\rho_{\operatorname{End}(V)}(g,h)A := \rho(g)A\rho(h)^{-1}$$

betrachten (Definition 3.4(b)).

(b) Sei nun $\dim V < \infty$. Andererseits erhalten wir eine natürliche lineare Abbildung

$$\widehat{\rho}^*\colon \operatorname{End}(V) \to \mathbb{K}^G, \quad \widehat{\rho}^*(A)(g) := \operatorname{tr}(\rho(g)^{-1}A).$$

Für diese Abbildung gilt

$$\begin{aligned}\widehat{\rho}^*(\rho(g)A\rho(h)^{-1})(x) &= \operatorname{tr}(\rho(x)^{-1}\rho(g)A\rho(h)^{-1}) = \operatorname{tr}(\rho(h)^{-1}\rho(x)^{-1}\rho(g)A)\\ &= \operatorname{tr}(\rho(g^{-1}xh)^{-1}A) = \widehat{\rho}^*(A)(g^{-1}xh) = (\rho_b(g,h)\widehat{\rho}^*(A))(x).\end{aligned}$$

Also ist auch $\widehat{\rho}^*$ ein Homomorphismus von Darstellungen von $G \times G$. Wir werden später sehen, dass diese Abbildungen wesentliche Informationen über die Natur der Gruppenalgebra zulassen.

3.5 Charaktere

Wir möchten nun die Darstellungen einer endlichen Gruppe auf möglichst einfache Weise klassifizieren. Ein wichtiges Hilfsmittel hierbei sind die Charaktere von Darstellungen.

In diesem Abschnitt ist **durchweg** $\operatorname{char}\mathbb{K} = 0$, wenn nichts anderes gesagt wird.[5]

Definition 3.41. Sei (ρ, V) eine endlichdimensionale Darstellung einer Gruppe G über $\mathbb{K}$. Der *Charakter* von (ρ, V) ist die Funktion $\chi_{(\rho,V)} : G \to \mathbb{K},\ g \mapsto \operatorname{tr}_{\mathbb{K}}(\rho(g))$.

Bemerkung 3.42.

(a) Sei (ρ, V) eine endlichdimensionale Darstellung von G und $B = (b_1, \ldots, b_n)$ eine geordnete Basis von V. Ist $(m_{ij}(g))_{1 \leq i,j \leq n}$ die darstellende Matrix von $\rho(g) \in \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$ bezüglich der Basis B, so bezeichnet man die Funktionen

$$m_{ij} : G \to \mathbb{K}, \quad g \mapsto m_{ij}(g)$$

[5] Die Voraussetzung ist hier wesentlich, da wir oft durch die Dimension einer Darstellung teilen müssen.

als *Matrixkoeffizienten* der Darstellung (ρ, V) bezüglich der Basis B. Dann gilt

$$\chi = \sum_{i=1}^{n} m_{ii}.$$

Wegen der zyklischen Invarianz der Spur hängt der Charakter von (ρ, V) nicht von der Wahl der Basis ab.

(b) Daraus folgt insbesondere, dass sich die Charaktere komplexer Darstellungen aus der Jordan-Normalform berechnen lassen. Es gilt für jede endlichdimensionale komplexe Darstellung (ρ, V) und jedes $g \in G$:

$$\chi_{(\rho,V)}(g) = \sum_{i=1}^{r} m_{\lambda_i} \lambda_i,$$

wobei λ_i die Eigenwerte von $\rho(g) \in \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ mit den algebraische Vielfachheiten m_{λ_i} sind.

(c) Aufgrund der zyklischen Invarianz der Spur sind die Charaktere Klassenfunktionen, d.h. auf den Konjugationsklassen in G konstant:

$$\chi(g \cdot h \cdot g^{-1}) = \chi(h) \quad \text{für alle} \quad g, h \in G.$$

(d) Isomorphe Darstellungen haben den gleichen Charakter (Aufgabe 3.14).

Aus dieser Bemerkung ergibt sich, dass die Charaktere gegenüber den Matrixkoeffizienten zwei wesentlichen Vorteile haben: Erstens sind sie kanonisch, hängen also nicht von der Wahl zusätzlicher Strukturen wie einer geordneten Basis ab. Ausserdem hängen sie nur von der Isomorphieklasse einer Darstellung ab, unterscheiden also isomorphe Darstellungen nicht. Da wir die Darstellungen nur bis auf Isomorphie klassifizieren möchten, bietet es sich also an, mit Charakteren zu arbeiten.

Beispiele 3.43. (a) Sei M eine endliche Menge mit einer G-Wirkung

$$\sigma\colon G \times M \to M, \quad (g, m) \mapsto g.m.$$

Wir betrachten die zugehörige Darstellung $(\rho, \mathbb{K}^M)$ aus Beispiel 3.6. Bzgl. der Basis $(\delta_m)_{m \in M}$ von $\mathbb{K}^M$ sind die Matrizen der linearen Abbildungen $\rho(g)$ Permutationsmatrizen. Hieraus ergibt sich sofort die *Spurformel*

$$\chi_\rho(g) = \mathrm{tr}(\rho(g)) = |\{m \in M\colon g.m = m\}| = |\,\mathrm{Fix}(\sigma_g)|.$$

Der Charakter der Darstellung ρ kodiert also für jedes $g \in G$ die Anzahl der Fixpunkte der Wirkung auf M.

(b) Ist $M = G$ und $g.m = gm$ die Multiplikation von G, so heißt die zugehörige Darstellung $(\rho, \mathbb{K}^G) = (\rho_l, \mathbb{K}^G)$ die *(links-)reguläre Darstellung von* G. Aus (a) erhalten wir sofort

$$\chi_\rho(g) = \operatorname{tr}(\rho(g)) = \begin{cases} 0 & g \neq e \\ |G| & g = e \end{cases} \qquad \text{bzw.} \quad \chi_\rho = |G|\delta_e.$$

(c) Ist $M = G$ und $g.m = gmg^{-1}$, so heißt die zugehörige Darstellung $(\rho, \mathbb{K}^G)$ die *Konjugationsdarstellung von* G. Aus (a) erhalten wir

$$\chi_\rho(g) = \operatorname{tr}(\rho(g)) = |C_G(g)|, \qquad \text{wobei} \quad C_G(g) = \{x \in G \colon gxg^{-1} = x\}$$

der *Zentralisator von* g *in* G *ist.*

(d) Auf G betrachten wir die Wirkung von $G \times G$ durch $(g, h).m := gmh^{-1}$. Dann heißt die zugehörige Darstellung $(\rho, \mathbb{K}^G)$ die *bireguläre Darstellung*:

$$(\rho(g, h)f)(x) = f(g^{-1}xh).$$

Um (a) anwenden zu können, beobachten wir, dass $(g, h).x = x$ äquivalent ist zu $gxh^{-1} = x$, also zu $g = xhx^{-1}$. Schreiben wir

$$[g] = \{xgx^{-1} \colon x \in G\}$$

für die *Konjugationsklasse von* g *in* G, so sehen wir, dass die Existenz eines Fixpunkts x von (g, h) äquivalent ist zu $[g] = [h]$. Ist dies der Fall und $g = x_0hx_0^{-1}$, so haben alle Lösungen x der Gleichung $g = xhx^{-1}$ die Gestalt $x = x_0y$, $y \in C_G(h)$. Also erhalten wir mit (a)

$$\chi_\rho(g, h) = \begin{cases} 0 & \text{für } [g] \neq [h] \\ |C_G(h)| = |C_G(g)| & \text{für } [g] = [h]. \end{cases}$$

Lemma 3.44. *Seien* (ρ, V), (τ, W) *endlichdimensionale Darstellungen einer Gruppe* G *über* $\mathbb{K}$ *mit Charakteren* $\chi_{(\rho,V)}, \chi_{(\tau,W)} : G \to \mathbb{K}$. *Dann gilt:*

(a) $\chi_{(\rho,V)}(e) = \dim_{\mathbb{K}}(V)$.

(b) $\chi_{(\rho^*,V^*)}(g) = \chi_{(\rho,V)}(g^{-1})$ *für* $g \in G$.

(c) $\chi_{(\rho,V)\oplus(\tau,W)} = \chi_{(\rho,V)} + \chi_{(\tau,W)}$.

(d) $\chi_{(\rho,V)\otimes(\tau,W)} = \chi_{(\rho,V)}\chi_{(\tau,W)}$.

(e) $\chi_{(\rho_{\mathrm{Hom}(W,V)},\mathrm{Hom}(W,V))} = \chi_{(\rho,V)}\chi_{(\tau^*,W^*)}$.

Beweis. (a) Aus der Definition ergibt sich sofort

$$\chi_{(\rho,V)}(e) = \mathrm{tr}_{\mathbb{K}}(\rho(e)) = \mathrm{tr}_{\mathbb{K}}(\mathrm{id}_V) = \dim_{\mathbb{K}}(V).$$

(b) Die duale Darstellung war definiert durch $\rho^*(g)\alpha := \alpha \circ \rho(g)^{-1}$. Ist $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis von V und $(b_1^*, \ldots, b_n^*)$ die duale Basis, so ist die zugehörige Matrix von $\rho(g)$ gegeben durch $(b_j^*(\rho(g)b_k))_{1\leq j,k\leq n}$ und daher

$$\mathrm{tr}(\rho(g)) = \sum_{j=1}^{n} b_j^*(\rho(g)b_j).$$

Analog erhalten wir mit $b_j = (b_j^*)^*$

$$\mathrm{tr}(\rho^*(g)) = \sum_{j=1}^{n} b_j^{**}(\rho^*(g)b_j^*) = \sum_{j=1}^{n}(\rho^*(g)b_j^*)(b_j) = \sum_{j=1}^{n} b_j^*(\rho(g^{-1})b_j) = \mathrm{tr}(\rho(g^{-1})).$$

(c) Bildet man aus geordneten Basen B_V von V und B_W von W eine geordnete Basis $B_{V\oplus W} = (B_V, B_W)$ von $V\oplus W$, so hat die darstellende Matrix der linearen Abbildung $\rho_{V\oplus W}(g)$ bezüglich $B_{V\oplus W}$ die Gestalt

$$\rho_{V\oplus W}(g) = \begin{pmatrix} \rho(g) & 0 \\ 0 & \tau(g) \end{pmatrix} \qquad \text{für} \quad g \in G.$$

Durch Spurbildung erhält man

$$\chi_{(\rho,V)\oplus(\tau,W)}(g) = \mathrm{tr}(\rho_{V\oplus W}(g)) = \mathrm{tr}(\rho(g)) + \mathrm{tr}(\tau(g)) = \chi_{(\rho,V)}(g) + \chi_{(\tau,W)}(g).$$

(d) Analog verfahren wir für das Tensorprodukt. Ist $B_V = (b_1, \ldots, b_n)$ und $B_W = (c_1, \ldots, c_m)$, so ist $B_{V\otimes W} = \{b_i \otimes c_j \colon 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ eine Basis von $V \otimes W$ mit der dualen basis

$$(b_i \otimes c_j)^* = b_i^* \otimes c_j^* \quad \text{d.h.,} \quad (b_i \otimes c_j)^*(v \otimes w) = b_i^*(v)c_j^*(w).$$

Für die darstellende Matrix der linearen Abbildung $\rho_{V\otimes W}(g) = \rho(g)\otimes\tau(g)$ erhalten wir daher die Einträge

$$(b_i \otimes c_j)^*(\rho_{V\otimes W}(g)(b_k \otimes c_\ell)) = b_i^*(\rho(g)b_k)c_j^*(\tau(g)c_\ell)$$

und daher

$$\mathrm{tr}(\rho_{V\otimes W}(g)) = \sum_{i,j} b_i^*(\rho(g)b_i)c_j^*(\tau(g)c_j) = \sum_i b_i^*(\rho(g)b_i)\sum_j c_j^*(\tau(g)c_j) = \mathrm{tr}(\rho(g))\,\mathrm{tr}(\tau(g)). \quad \square$$

(e) folgt aus Lemma 3.9, (b) und (d), da $\mathrm{Hom}(W, V)$ als G-Modul isomorph ist zu $W^*\otimes V$.

Wir möchten nun die Charaktere endlichdimensionaler Darstellungen einer Gruppe G systematisch als Funktionen auf G bzw. auf der Menge der Konjugationsklassen in G untersuchen und feststellen, was diese gegenüber anderen solchen Funktionen auszeichnet. Dazu erinnern wir uns an den Begriff der Klassenfunktion. Offensichtlich sind die Charaktere endlichdimensionaler Darstellungen einer Gruppe G Klassenfunktionen (Bemerkung 3.42).

Definition 3.45. Sei G eine endliche Gruppe und $\operatorname{char}\mathbb{K}$ **kein Teiler von** $|G|$, was wir im Rest dieses Abschnitts stillschweigend annehmen. Wir betrachten auf dem endlichdimensional $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathbb{K}^G$ der $\mathbb{K}$-wertigen Funktionen auf G die symmetrische Bilinearform

$$(f,h) := \frac{1}{|G|}(f\star h)(e) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(g)h(g^{-1}) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(g^{-1})h(g) \quad \text{für} \quad f,h\in\mathbb{K}^G. \tag{18}$$

Lemma 3.46. (Der Mittelwert eines Charakters) *Für jede endlichdimensionale Darstellung (ρ, V) von G gilt*

$$\dim(V^G) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{(\rho,V)}(g) = (\chi_{(\rho,V)}, 1).$$

Beweis. Wir wissen schon, dass $I := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)$ eine Projektion von V mit dem Bild V^G ist (Proposition 3.17). Also ergibt sich die Behauptung aus $\dim(V^G) = \operatorname{tr}(I)$. $\square$

Satz 3.47. (Orthogonalitätsrelationen für Matrixkoeffizienten) *Seien (ρ, V) und (τ, W) endlichdimensionale Darstellungen der endlichen Gruppe G und* $\operatorname{char}\mathbb{K} \nmid |G|$. *Wir wählen geordnete Basen $B_V = (b_1, \ldots, b_n)$ von V und $B_W = (c_1, \ldots, c_m)$ von W und beschreiben die linearen Abbildungen $\rho(g) : V \to V$ und $\tau(g) : W \to W$ durch ihre Matrixkoeffizienten $a_{ji}, b_{\ell k} : G \to \mathbb{K}$ bezüglich dieser Basen:*

$$\rho(g)b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}(g)b_j, \qquad \tau(g)c_k = \sum_{\ell=1}^{m} b_{\ell k}(g)c_\ell.$$

(a) *Ist* $\operatorname{Hom}((\rho, V), (\tau, W)) = \{0\}$, *so gilt*

$$(a_{ji}, b_{\ell k}) = 0 \quad \textit{für} \quad 1\leq i,j\leq n; 1\leq \ell,k\leq m. \tag{19}$$

(b) *Ist $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen,* $\operatorname{char}\mathbb{K} = 0$ *und (ρ, V) irreduzibel, so gilt*

$$(a_{ji}, a_{\ell k}) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} a_{ji}(g)a_{\ell k}(g^{-1}) = \frac{\delta_{\ell i}\delta_{kj}}{\dim_{\mathbb{K}}(V)} \qquad \textit{für} \quad i,j,k,\ell\in\{1,\ldots,n\}. \tag{20}$$

Beweis. Für jede lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ betrachten wir die darstellende Matrix bezüglich der Basen B_V und B_W:

$$\varphi b_i = \sum_{j=1}^{m} \varphi_{ji} c_j.$$

Die Matrixdarstellung von $\mathrm{Sym}(\varphi) : V \to W$ ist dann gegeben durch

$$\mathrm{Sym}(\varphi)_{\ell i} = \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} b_{\ell k}(g) \varphi_{kj} a_{ji}(g^{-1}) \right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (a_{ji}, b_{\ell k}) \varphi_{kj} \tag{21}$$

Ist $\mathrm{Hom}((\rho, V), (\tau, W)) = \{0\}$, so ist $\mathrm{Sym}(\varphi) = 0$ für alle linearen Abbildungen $\varphi : V \to W$ (Korollar 3.26) und wir erhalten (19), denn man kann eine Basis (φ^{rs}) des Vektorraums $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ betrachten, für die gilt $(\varphi^{rs})_{kj} = \delta_{kr}\delta_{sj}$.

Sei nun(ρ, V) irreduzibel und $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen mit $\mathrm{char}\, \mathbb{K} = 0$. Mit Korollar 3.26 erhalten wir dann für jede lineare Abbildung $\varphi \in \mathrm{End}(V)$

$$\mathrm{Sym}(\varphi) = \frac{\mathrm{tr}(\varphi)}{\dim_{\mathbb{K}}(V)} \mathrm{id}_V .$$

Für $\varphi = \varphi^{kj}$ ergibt sich daher mit (21)

$$(a_{ji}, a_{\ell k}) = \mathrm{Sym}(\varphi^{kj})_{\ell i} = \frac{\delta_{kj}\delta_{\ell i}}{\dim_{\mathbb{K}}(V)}$$

und damit die Identität (20). □

Satz 3.48. (Orthogonalitätsrelationen für Charaktere) *Seien (ρ, V), (τ, W) endlichdimensionale Darstellungen einer endlichen Gruppe G. Dann gilt:*

(i) $(\chi_V, \chi_W) = \dim \mathrm{Hom}(W, V)^G = \dim \mathrm{Hom}((\rho, V), (\tau, W))$.

(ii) *Ist $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen sowie ρ und τ irreduzibel, so gilt*

$$(\chi_{(\rho,V)}, \chi_{(\tau,W)}) = \begin{cases} 0 & \textit{falls } (\rho, V) \not\cong (\tau, W) \\ 1 & \textit{falls } (\rho, V) \cong (\tau, W). \end{cases}$$

Die Charaktere irreduzibler Darstellungen bilden in $\mathrm{Klass}(G, \mathbb{K})$ also ein Orthonormalsystem bzgl. $(\cdot, \cdot)$.

Beweis. (i) Aus Lemma 3.9 und Lemma 3.44 folgt

$$\chi_V(g)\chi_W(g^{-1}) = \chi_V(g)\chi_{W^*}(g) = \chi_{V \otimes W^*}(g) = \chi_{\mathrm{Hom}(W,V)}(g).$$

Aus Lemma 3.46 ergibt sich daher

$$(\chi_V, \chi_W) \quad = \quad \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\mathrm{Hom}(W,V)}(g) = \dim \left(\mathrm{Hom}(W, V)^G \right). \tag{22}$$

(ii) Da beide Darstellungen irreduzibel sind, ist

$$\mathrm{Hom}(W,V)^G = \mathrm{Hom}((\rho,V),(\tau,W)) = \{0\},$$

wenn sie nicht äquivalent sind (erstes Schursches Lemma). Sind beide äquivalent, so ist $\mathrm{Hom}(W,V) \cong \mathrm{End}(V)$, und das zweite Schursche Lemma liefert $\mathrm{End}(V)^G = \mathbb{K}\,\mathrm{id}_V$. Damit folgt (ii) aus (22). □

Bemerkung 3.49. (a) Beachte, dass (22) auch für nicht algebraisch abgeschlossene Körper gilt, so dass auch in diesem Fall die Charaktere ein Orthogonalsytem bilden. Allerdings ist dann

$$(\chi_V, \chi_V) = \dim\big(\mathrm{End}(V)^G\big)$$

im allgemeinen größer als 1, so dass die Charaktere nicht normiert sind.

(b) Will man die Voraussetzung der algebraischen Abgeschlossenheit von $\mathbb{K}$ vermeiden, so kann man immer noch argumentieren, dass die irreduziblen Charaktere (falls $\mathrm{char}\,\mathbb{K}$ die Gruppenordnung nicht teilt) ein Orthogonalsystem in $\mathrm{Klass}(G,\mathbb{K})$ bilden. Allerdings könnte es noch passieren, dass $\mathrm{char}\,\mathbb{K}$ ein Teiler von $\dim\big(\mathrm{End}(V)^G\big)$ ist, so dass

$$(\chi_V, \chi_V) = \dim\big(\mathrm{End}(V)^G\big) = 0$$

(in dem Körper $\mathbb{K}$) ist. Wenn $\mathrm{char}\,\mathbb{K} = 0$ ist, tritt dieses Problem nicht auf und wir erhalten ebenfalls, dass die Zahl der Äquivalenzklassen irreduzibler Darstellungen durch $\dim \mathrm{Klass}(G,\mathbb{K})$ beschränkt ist.

Mit Hilfe der Orthogonalitätsrelationen kann man also untersuchen, ob zwei Darstellungen einer Gruppe isomorph sind. Insbesondere sind Charaktere hilfreich, wenn man die Zerlegung einer Darstellung einer endlichen Gruppe in einfache Darstellungen beschreiben will. Das Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ der Charaktere gibt nun an, wie oft eine einfache Darstellung als Summand in dieser direkten Summe auftritt.

Satz 3.50. *Sei G eine endliche Gruppe und*

$$(\rho, V) \cong \bigoplus_{j=1}^{N} m_j(\rho_j, V_j),$$

wobei die Darstellungen $(\rho_j, V_j)_{j=1,\ldots,N}$, paarweise nicht äquivalent sind. Ist $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen, so ist

$$m_j = (\chi_{(\rho,V)}, \chi_{(\rho_j,V_j)}) \quad \textit{für} \quad j = 1, \ldots, N.$$

Beweis. Aus den Orthogonalitätsrelationen für die Charaktere 3.48 und Lemma 3.44 ergibt sich:

$$(\chi_{(\rho,V)}, \chi_{(\rho_j,V_j)}) = \left(\sum_{i=1}^{N} \chi_{m_i(\rho_i,V_i)}, \chi_{(\rho_j,V_j)}\right) = \sum_{i=1}^{N} m_i(\chi_{(\rho_i,V_i)}, \chi_{(\rho_j,V_j)}) = \sum_{i=1}^{N} m_i\delta_{ij} = m_j. \quad □$$

Korollar 3.51. *Ist* $\operatorname{char}\mathbb{K}$ *kein Teiler von* $|G|$ *und* $\mathbb{K}$ *algebraisch abgeschlossen, so haben zwei endlichdimensionale Darstellungen der endlichen Gruppe* G *genau dann den gleichen Charakter, wenn sie äquivalent sind.*

Beweis. Da wir schon wissen, dass äquivalente Darstellungen den gleichen Charakter haben (Bemerkung 3.42(d)), bleibt zu zeigen, dass aus $\chi_{(\rho,V)} = \chi_{(\tau,W)}$ die Äquivalenz der Darstellungen folgt. Wegen Korollar 3.28 folgt dies aus der Gleichheit der Vielfachheiten für alle irreduziblen Darstellungen (ρ_j, V_j), die man aus der Gleichheit der Charaktere gewinnt. Aus $\rho \cong \sum_{j=1}^N m_j\rho_j$ und $\tau \cong \sum_{j=1}^N k_j\rho_j$ folgt nämlich

$$m_j = (\chi_{(\rho,V)}, \chi_{(\rho_j,V_j)}) = (\chi_{(\tau,W)}, \chi_{(\rho_j,V_j)}) = k_j. \qquad \square$$

Beispiel 3.52. Korollar 3.51 wird falsch, wenn $p = \operatorname{char}\mathbb{K}$ die Gruppenordnung teil. Ein einfaches Beispiel sind die beiden Darstellungen $(\rho, \mathbb{K}^2)$ und $(\rho', \mathbb{K}^2)$ der Gruppe $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ mit

$$\rho(\overline{1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \rho'(\overline{1}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

die den gleichen Charakter haben. Siehe hierzu auch Aufgabe 3.28.

Insbesondere erhält man aus Satz 3.50 ein nützliches Kriterium, das es erlaubt, zu untersuchen, ob eine gegebene endlichdimensionale Darstellung einer endlichen Gruppe einfach ist.

Korollar 3.53. *Ist* $\mathbb{K}$ *algebraisch abgeschlossen und* $\operatorname{char}\mathbb{K} = 0$*, so ist eine Darstellung* (ρ, V) *einer endlichen Gruppe* G *genau dann irreduzibel, wenn* $(\chi_{(\rho,V)}, \chi_{(\rho,V)}) = 1$.

Beweis. Wir schreiben $\rho \cong \sum_{j=1}^N m_j\rho_j$ als Summe von Vielfachen paarweise inäquivalenter irreduzibler Darstellungen $\rho_1, \ldots, \rho_N$ und erhalten in $\mathbb{K}$:

$$(\chi_{(\rho,V)}, \chi_{(\rho,V)}) = \sum_{j,k=1}^N m_j m_k (\chi_{(\rho_j,V_j)}, \chi_{(\rho_k,V_k)}) = \sum_{j,k=1}^N m_j m_k \delta_{jk} = \sum_{j,k=1}^N m_j^2$$

(Satz 3.50). Die Summe von Quadraten ist genau dann gleich 1, wenn nur ein Summand $m_j = 1$ auftritt und alle anderen Summanden verschwinden. Das bedeutet, dass ρ irreduzibel ist. $\square$

Das Ziel ist es nun, mit Hilfe der Charaktere die irreduziblen Darstellungen einer endlichen Gruppe vollständig zu klassifizieren. Da die Charaktere endlichdimensionaler irreduzibler Darstellungen nach Bemerkung 3.42 isomorphe Darstellungen nicht unterscheiden und auch die Ergebnisse in Satz 3.48 nur von den Isomorphieklassen von Darstellungen abhängen, bietet es sich an, einen Repräsentanten in jeder Isomorphieklasse einfacher Darstellungen zu wählen, d.h. eine Menge einfacher Darstellungen $(\rho_j, V_j)_{j=1,\ldots,N}$, so dass jede einfache Darstellung zu genau einer Darstellung aus der Menge isomorph ist. Ein solches System von Darstellungen bezeichnet man als *Repräsentantensystem.* Zunächst untersuchen wir dazu die Zerlegung der regulären Darstellung bezüglich eines solchen Repräsentantensystems. Hierbei erinnern wir uns daran, dass wir schon aus dem Endlichkeitssatz 3.27 wissen, dass alle irreduziblen Darstellungen in der regulären Darstellung auftreten. Mittels Charaktertheorie können wir nun sogar ihre Vielfachheiten bestimmen.

Korollar 3.54. (Zerlegung der regulären Darstellung) *Sei G eine endliche Gruppe und $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen, so dass* $\operatorname{char}\mathbb{K}$ *kein Teiler von $|G|$ ist. Sind $(\rho_j, V_j)_{1\le j\le N}$ ein Repräsentantensystem irreduzibler Darstellungen von G, so ist die Vielfachheit von (ρ_j, V_j) in der regulären Darstellung $(\rho_l, \mathbb{K}^G)$ gegeben durch* $\dim_{\mathbb{K}} V_j$ *und es gilt*

$$|G| = \dim_{\mathbb{K}}(V_1)^2 + \ldots + \dim_{\mathbb{K}}(V_N)^2. \tag{23}$$

Beweis. Wir berechnen

$$(\chi_{\mathbb{K}^G}, \chi_{V_j}) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \underbrace{\chi_{\mathbb{K}^G}(g)}_{=0 \text{ für} g\neq e} \chi_{V_j}(g^{-1}) = \frac{\chi_{\mathbb{K}^G}(e)\chi_{V_j}(e)}{|G|} = \dim_{\mathbb{K}}(V_j),$$

wobei die Formel für den Charakter der regulären Darstellung $\mathbb{K}^G$ aus Beispiel 3.43 benutzt wurde. Daraus folgt mit Satz 3.50, dass die Zerlegung von $\mathbb{K}^G$ als direkte Summe einfacher Darstellungen von der Form

$$\mathbb{K}^G \cong \bigoplus_{1\le j\le N} (\rho_j, V_j)^{\oplus \dim_{\mathbb{K}}(V_j)} \tag{24}$$

ist. Für die Dimension $|G|$ von $\mathbb{K}^G$ erhalten wir daher (23). □

Der nächste Satz liefert uns schließlich die Vollständigkeit des Orthonormalsystems der Charaktere im Raum der Klassenfunktionen. Hieraus können wir dann insbesondere ableiten, dass die Zahl N der Äquivalenzklassen irreduzibler Darstellungen mit der Zahl der Konjugationsklassen übereinstimmt.

Satz 3.55. *Sei G eine endliche Gruppe und $\mathbb{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik* 0*. Ist $(\rho_j, V_j)_{1\le j\le N}$ ein Repräsentantensystem irreduzibler Darstellungen von G, so bilden die Charaktere $(\chi_{(\rho_j,V_j)})_{1\le j\le N}$ eine Orthonormalbasis des Vektorraums* $\operatorname{Klass}(G,\mathbb{K})$ *der $\mathbb{K}$-wertigen Klassenfunktionen auf G bzgl. $(\cdot,\cdot)$.*

Die algebraische Abgeschlossenheit ist hierbei wesentlich, denn dieser Satz wird z.B. für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $G = C_4$ falsch (Aufgabe 3.39).

Beweis. Nach Satz 3.48 bilden die Charaktere der irreduziblen Darstellungen ein Orthonormalsystem und sind daher linear unabhängig (wieso?). Zu zeigen ist also lediglich, dass $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Klass}(G,\mathbb{K}) \le N$ ist. Dazu konstruieren wir einen Vektorraumhomomorphismus $\Phi : \operatorname{Klass}(G,\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^N$ und zeigen dass dieser injektiv ist.

Für eine Darstellung (ρ, V) von G betrachten wir den Algebren-Homomorphismus

$$\widehat{\rho}\colon \mathbb{K}[G] \to \mathrm{End}(V), \quad f \mapsto \sum_{g \in G} f(g)\rho(g).$$

Ist f eine Klassenfunktion, so ist f im Zentrum der Gruppenalgebra (Satz 3.38), so dass $\widehat{\rho}(f)$ ein Endomorphismus von Darstellungen ist. Für die einfachen Darstellungen (ρ_i, V_i) folgt dann mit dem zweiten Teil des Lemmas von Schur die Existenz von Zahlen $\lambda_j(f) \in \mathbb{K}$ mit $\widehat{\rho}_j(f) = \lambda_j(f)\ \mathrm{id}_{V_j}$. Die Abbildung

$$\Phi : \mathrm{Klass}(G, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}^N, \quad f \mapsto (\lambda_1(f), \ldots, \lambda_N(f))$$

ist offensichtlich linear. Zu zeigen bleibt noch, dass Φ injektiv ist. Sei dazu $f \in \ker(\Phi)$. Dann ist $\widehat{\rho}_j(f) = 0$ für alle j. Mit der Identität

$$(\rho \oplus \tau)\widehat{\ }(f) = \widehat{\rho}(f) \oplus \widehat{\tau}(f),$$

die sich direkt aus der Definition ergibt, und der Zerlegung der regulären Darstellung in Vielfache der einfachen Darstellungen (ρ_j, V_j) (siehe (24)), erhält man daraus $\widehat{\rho}_l(f) = 0$ für die reguläre Darstellung ρ_l auf $\mathbb{K}[G] = \mathbb{K}^G$. Wegen

$$\widehat{\rho}_l(f)h = f \star h \quad \text{für} \quad f, h \in \mathbb{K}^G \cong \mathbb{K}[G]$$

(Nachweis!) folgt hieraus

$$0 = \widehat{\rho}_l(f)(\delta_e) = f \star \delta_e = f.$$

Also ist $\Phi : \mathrm{Klass}(G, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}^N$ injektiv und die Charaktere des Repräsentantensystems bilden eine Orthonormalbasis von $\mathrm{Klass}(G, \mathbb{K})$. □

Mit Hilfe dieses Satzes erhalten wir eine interessante Beziehung zwischen der Anzahl der Konjugationsklassen einer endlichen Gruppe G und der Anzahl von Isomorphieklassen endlichdimensionaler einfacher Darstellungen. Die Klassenfunktionen $\delta_C : G \to \mathbb{K}$, die auf der Konjugationsklasse $C \subset G$ den Wert 1 und auf allen anderen Konjugationsklassen den Wert 0 annehmen, bilden offensichtlich eine Basis von $\mathrm{Klass}(G, \mathbb{K})$. Die Anzahl solcher Klassenfunktionen ist gleich der Anzahl der Konjugationsklassen. Andererseits bilden nach Satz 3.55 auch die Charaktere eines Repräsentantensystems einfacher Darstellungen eine Basis von $\mathrm{Klass}(G, \mathbb{K})$. Die Anzahl der Elemente in zwei verschiedenen Basen muss üereinstimmen, und somit ist die Anzahl der Isomorphieklassen endlichdimensionaler einfacher Darstellungen gleich der Anzahl der Konjugationsklassen in G.

Korollar 3.56. *Über jedem algebraisch abgeschlossenen Körper $\mathbb{K}$ der Charakteristik* 0 *ist die Anzahl der Isomorphieklassen irreduzibler Darstellungen einer endlichen Gruppe G gleich der Anzahl* $|\,\mathrm{Conj}(G)|$ *ihrer Konjugationsklassen.*

Satz 3.57. *Sei G eine endliche Gruppe und $(\rho_j, V_j)_{1\leq j\leq N}$ ein Repräsentantensystem der irreduziblen Darstellungen von G. Dann gilt für die zugehörigen Charaktere:*

$$\chi_{(\rho_i,V_i)} \star \chi_{(\rho_j,V_j)} = \delta_{ij} \frac{|G|}{\dim_{\mathbb{K}}(V_i)}\ \chi_{(\rho_i,V_i)}$$

Insbesondere sind die elemente

$$p_j := \frac{\dim_{\mathbb{K}} V_j}{|G|} \chi_{(\rho_j,V_j)}$$

Idempotente in der Gruppenalgebra $\mathbb{K}[G]$, die den Relationen

$$p_j \star p_k = \delta_{jk} p_k \quad \textit{und} \quad \sum_{j=1}^{N} p_j = \delta_e \tag{25}$$

genügen.

Ein System $p_1, \ldots, p_N$ von zentralen Idempotenten einer Algebra, die den Relationen (25) genügen nennt man eine *Zerlegung der Eins.*

Beweis. Für $k = 1, \ldots, N$ seien B_k Basen von V_k, $d_k = \dim(V_k)$ und $m^k_{ij} : G \to \mathbb{K}$ die Matrixkoeffizienten von (ρ_k, V_k) bezüglich der Basis B_k (Definition 3.41). Dann gilt:

$$\begin{aligned}(\chi_{(\rho_i,V_i)} \star \chi_{(\rho_j,V_j)})(g) &= \sum_{h\in G} \sum_{k=1}^{d_i} \sum_{\ell=1}^{d_j} m^i_{kk}(h) m^j_{\ell\ell}(h^{-1}\cdot g) = \sum_{k=1}^{d_i} \sum_{\ell,s=1}^{d_j} \left(\sum_{h\in G} m^i_{kk}(h) m^j_{\ell s}(h^{-1}) \right) m^j_{s\ell}(g) \\ &= \sum_{k=1}^{d_i} \sum_{\ell,s=1}^{d_j} |G| \cdot (m^i_{kk}, m^j_{\ell s}) \cdot m^j_{s\ell}(g)\end{aligned}$$

und mit (19), (20) ergibt sich

$$\big(\chi_{(\rho_i,V_i)} \star \chi_{(\rho_j,V_j)}\big)(g) = \delta_{ij} \sum_{k=1}^{d_i} \sum_{\ell,s=1}^{d_j} \frac{\delta_{k\ell}\delta_{ks}|G|}{d_j}\ m^j_{s\ell}(g) = \frac{\delta_{ij}|G|}{d_i} \sum_{k=1}^{d_i} m^i_{kk}(g) = \frac{\delta_{ij}|G|}{d_i} \chi_{(\rho_i,V_i)}(g).$$

Hieraus ergibt sich sofort $p_i \star p_j = \delta_{ij} p_j$. Insbesondere ist jedes p_j ein Idempotent in der Algebra $\mathbb{K}[G]$. Aus der Zerlegung $\mathbb{K}[G] = \mathbb{K}^G \cong \bigoplus_{j=1}^N V_j^{\oplus \dim(V_j)}$ bzgl. der regulären Darstellung ρ_l (Korollar 3.54) erhalten wir daher weiter

$$\delta_e = \frac{1}{|G|} \chi_{(\rho_l,\mathbb{K}[G])} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\dim(V_j)}{|G|} \chi_{(\rho_j,V_j)} = \sum_{j=1}^{N} p_j. \qquad \square$$

Aus diesem Satz ergibt sich direkt, dass der Charakter χ_j einer irreduziblen Darstellung (ρ_j, V_j) einer endlichen Gruppe G einen Projektor

$$\mathbb{K}[G] \to p_j \star \mathbb{K}[G], \quad f \mapsto p_j \star f$$

liefert, für den insbesondere

$$p_j \star \mathrm{Klass}(G, \mathbb{K}) = \mathbb{K}p_j = \mathbb{K}\chi_{(\rho_j, V_j)}$$

gilt. Da die Idempotente p_j zentral sind mit $p_j \star p_k = \delta_{jk} p_j$ sind die Unterräume $p_j \star \mathbb{K}[G]$ Ideale in $\mathbb{K}[G]$ und wir erhalten eine direkte Zerlegung in zweiseitige Ideale:

$$\mathbb{K}[G] = \bigoplus_{j=1}^{N} p_j \star \mathbb{K}[G].$$

Die Struktur der einzelnen Ideale $p_j \star \mathbb{K}[G]$ diskutieren wir später im Kontext der halbeinfachen Ringe. Dort wird sich zeigen, dass sie in natürlicher Weise zu den Algebren $\mathrm{End}(V_j^*)$ isomorph sind.

3.6 Charaktertafeln

Bemerkung 3.58. Sei $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen und $\mathrm{char}\,\mathbb{K} = 0$.

Aus den obigen Ergebnissen schließen wir, dass sich die Klassenfunktionen auf einer endlichen Gruppe G vollständig durch die Charaktere ihrer einfachen Darstellungen beschreiben lassen. Die Charaktere enthalten also alle wesentlichen Informationen über eine Gruppe. Aus diesem Grund werden die einfachen Darstellungen von G häufig durch sogenannte *Charaktertafeln* beschrieben.

Dabei handelt es sich um Tabellen, deren Spalten durch die Konjugationsklassen von G und deren Zeilen durch die einfachen Darstellungen indiziert werden. Der Eintrag in der i. Zeile und j. Spalte gibt den Wert des Charakters der i. einfachen Darstellung auf der j. Konjugationsklasse an. Über den Konjugationsklassen wird oft noch die Anzahl ihrer Elemente angegeben. Aus Korollar 3.56 folgt, dass eine solche Tabelle stets quadratisch ist, also gleich viele Zeilen und Spalten hat.

Beispiel 3.59. Wir betrachten die einfachen Darstellung der Permutationsgruppe $G = S_3$, wobei wir eine Permutation π in Zykelschreibweise darstellen. Offensichtlich enthält die Konjugationsklasse $C_1 = [e]$ des Einheitselements e ein einziges Element. Eine kurze Rechnung zeigt, dass noch zwei weitere Konjugationsklassen existieren, nämlich die Konjugationsklasse $C_2 = [(12)] = \{(12), (13), (23)\}$ der Transpositionen und die Konjugationsklasse $C_3 = [(123)] = \{(123), (132)\}$ der 3-Zykel.

Es gibt also genau drei irreduzible Darstellungen $(\rho_i, V_i)_{1 \le i \le 3}$ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $\mathbb{K}$ der Charakteristik 0. Nach Korollar 3.54 muss gelten

$$|S_3| = 6 = \dim(V_1)^2 + \dim(V_2)^2 + \dim(V_3)^2.$$

Also existiert eine irreduzible Darstellung (ρ_3, V_3) der Dimension 2 und zwei nicht-isomorphe eindimensionale Darstellungen. Letztere sind durch die triviale Darstellung $(\rho_1, \mathbb{K})$, $\rho_1(\pi) = 1$ für alle $\pi \in S_3$ und die Signatur der Permutation $(\rho_2, \mathbb{K})$, $\rho_2(\pi) = \operatorname{sgn}(\pi)$ für alle $\pi \in S_3$ gegeben. Da sie verschieden und eindimensional sind, sind sie nicht isomorph.

Um die dritte Darstellung zu finden, betrachten wir die Permutationsdarstellung $(\rho, \mathbb{K}^3)$ von S_3. Sie enthält die triviale Darstellung (ρ_1, V_1) als Unterdarstellung auf dem Raum $V_1 := \mathbb{K}(1, 1, 1)$. Der Unterraum

$$V_3 := \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \colon x + y + z = 0\}$$

ist ebenfall invariant und definiert eine 2-dimensionale Darstellung (ρ_3, V_3). Da er keinen Eigenvektor für S_3 enthält (da alle eindimensionalen Darstellungen trivial auf (123) sind, müssten alle Komponenten des Vektors gleich sein), ist die Darstellung (ρ_3, V_3) irreduzibel. Für ihren Charakter erhalten wir

$$\chi_{(\rho_3,V_3)} = \chi_{(\rho,\mathbb{K}^3)} - \chi_{(\rho_1,V_1)}.$$

Der Charakter $\chi_{(\rho,\mathbb{K}^3)}$ zählt jeweils die Fixpunkte (Beispiel 3.43):

$$\chi_{(\rho,\mathbb{K}^3)}(e) = 3, \quad \chi_{(\rho,\mathbb{K}^3)}((123)) = 0, \quad \chi_{(\rho,\mathbb{K}^3)}((12)) = 1.$$

Hieraus ergibt sich

$$\chi_{(\rho_3,V_3)}(e) = 2, \quad \chi_{(\rho_3,V_3)}((123)) = -1, \quad \chi_{(\rho_3,V_3)}((12)) = 0.$$

Wir erhalten also die folgende Charaktertafel:

	1 $[e]$	3 $[(12)]$	2 $[(123)]$
ρ_1	1	1	1
ρ_2	1	-1	1
ρ_3	2	0	-1

Aus der Information, dass der Charakter χ_{ρ_3} die Gleichungen $(\chi_{\rho_3}, \chi_{\rho_j}) = 0$, $j = 1, 2$, und $\chi_{\rho_3}(e) = \dim V_3 = 2$ erfüllt, hätten wir den Charakter χ_{ρ_3} auch direkt bestimmen können ohne die Darstellung ρ_3 zu kennen.

3.7 Darstellungen direkter Produkte

Sei nun $G \times H$ ein direktes Produkt zweier endlicher Gruppen und $\operatorname{char} \mathbb{K} = 0$.

Definition 3.60. Ist (ρ, V) eine Darstellung der Gruppe G und (τ, W) eine Darstellung der Gruppe H, so definieren wir das *Tensorprodukt dieser Darstellungen* (als Darstellung der Gruppe $G \times H$) durch

$$(\rho, V) \boxtimes (\tau, W) := (\rho \boxtimes \tau, V \otimes W) \quad \text{mit} \quad (\rho \boxtimes \tau)(g, h) := \rho(g) \otimes \tau(h)$$

(siehe Aufgabe 2.3). Man verifiziert leicht, dass dies eine Darstellung von $G \times H$ definiert.

Theorem 3.61. (Irreduzible Darstellungen von $G \times H$) *Sei $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen.*

(a) *Ist (ρ, V) eine irreduzible Darstellung von G und (τ, W) eine irreduzible Darstellung von H, so ist die Darstellung $(\rho, V) \boxtimes (\tau, W)$ irreduzibel.*

(b) *Die reguläre Darstellung $(\rho_l^{G\times H}, \mathbb{K}^{G\times H})$ ist isomorph zu $(\rho_l^G, \mathbb{K}^G) \boxtimes (\rho_l^H, \mathbb{K}^H)$.*

(c) *Für jede irreduzible Darstellung (ζ, U) von $G\times H$ existieren bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte irreduzible Darstellungen (ρ, V) von G und (τ, W) von H, so dass $(\zeta, U) \cong (\rho \boxtimes \tau, V \otimes W)$ ist.*

Beweis. (a) Für den Charakter von $\rho \boxtimes \tau$ erhalten wir sofort (vgl. Aufgabe 3.2)

$$\chi_{\rho\boxtimes\tau}(g,h) = \operatorname{tr}(\rho(g)\otimes\tau(h)) = \operatorname{tr}(\rho(g))\operatorname{tr}(\tau(h)) = \chi_\rho(g)\chi_\tau(h).$$

Hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned}(\chi_{\rho\boxtimes\tau}, \chi_{\rho\boxtimes\tau}) &= \frac{1}{|G\times H|}\sum_{(g,h)\in G\times H}\chi_\rho(g)\chi_\tau(h)\chi_\rho(g^{-1})\chi_\tau(h^{-1})\\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_\rho(g)\chi_\rho(g^{-1})\frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}\chi_\tau(h)\chi_\tau(h^{-1}) = 1\end{aligned}$$

mit Korollar 3.53. Wenden wir dieses Korollar noch einmal an, folgt hieraus die Irreduzibilität von $\rho \boxtimes \tau$.

(b) Die Abbildung

$$\Phi\colon \mathbb{K}^G \otimes \mathbb{K}^H \to \mathbb{K}^{G\times H} \quad \text{mit} \quad \Phi(f_1\otimes f_2)(g,h) := f_1(g)f_2(h)$$

ist ein linearer Isomorphismus, der die Basis $(\delta_g \otimes \delta_h)_{g\in G, h\in H}$ auf die Basis $(\delta_{(g,h)})_{(g,h)\in G\times H}$ abbildet. Nun ist

$$\Phi\big((\rho_l^G(g)\otimes\rho_l^H(h))(\delta_x\otimes\delta_y\big) = \Phi(\delta_{gx}\otimes\delta_{hy}) = \delta_{(gx,hy)} = \rho_l^{G\times H}(g,h)\delta_{(x,y)} = \rho_l^{G\times H}(g,h)\Phi(\delta_x\otimes\delta_y).$$

Da die Elemente $\delta_x \otimes \delta_y$ eine Basis von $\mathbb{K}^G \otimes \mathbb{K}^H$ bilden, ist Φ ein Vertauschungsoperator von $(\rho_l^G, \mathbb{K}^G) \boxtimes (\rho_l^H, \mathbb{K}^H)$ nach $(\rho_l^{G\times H}, \mathbb{K}^{G\times H})$.

(c) **1. Beweis:** Zerlegen wir die regulären Darstellungen in einfache (Satz von Maschke):

$$(\rho_l^G, \mathbb{K}^G) \cong \bigoplus_{i=1}^N (\rho_i, V_i)^{\oplus m_i} \text{ und } \quad (\rho_l^H, \mathbb{K}^H) \cong \bigoplus_{j=1}^M (\tau_j, W_j)^{\oplus k_j},$$

so ergibt sich

$$(\rho_l^G, \mathbb{K}^G) \boxtimes (\rho_l^H, \mathbb{K}^H) \cong \bigoplus_{i,j}\big((\rho_i, V_i)\boxtimes(\tau_j, W_j)\big)^{\oplus m_i k_j}.$$

Nach (a) sind alle Darstellungen $(\rho_i, V_i) \boxtimes (\tau_j, W_j)$ einfach. Da jede einfach Darstellung von $G \times H$ in der regulären Darstellung auftritt (Satz 3.27), erhalten wir hieraus (c).

2. Beweis: Nach dem Satz von Maschke ist die Einschränkung der Darstellung $\zeta|_G$ auf G zunächst halbeinfach und $\zeta(H)$ besteht aus G-Endomorphismen dieser Darstellung, lässt also die G-isotypischen Komponenten invariant. Da ζ irreduzibel ist, folgt hieraus, dass $\zeta|_G$ isotypisch ist, also isomorph zu einer Darstellunge $(\rho \otimes \mathbf{1}, V \otimes W)$ (Bemerkung 3.31). Aus Satz 3.30 folgt

$$\mathrm{End}_G((\rho \otimes \mathbf{1}, V \otimes W)) \cong \mathbf{1} \otimes \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(W),$$

da $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen ist. Da $\zeta(H)$ mit $\zeta(G)$ vertauscht, erhalten wir so einen Homomorphismus $\tau : H \to \mathrm{GL}(W)$ mit $\zeta(e, h) = \mathbf{1} \otimes \tau(h)$. Hieraus ergibt sich

$$\zeta(g, h) = \zeta(g, e)\zeta(e, h) = (\rho(g) \otimes \mathbf{1})(\mathbf{1} \otimes \tau(h)) = \rho(g) \otimes \tau(h)$$

und damit $\zeta \cong \rho \boxtimes \tau$. Für jeden H-Untermodul $W_0 \subseteq W$ ist $V \otimes W_0$ ein $(G \times H)$-Untermodul von $V \otimes W$. Also ist auch die Darstellung (τ, W) einfach. $\square$

Über algebraisch abgeschlossenen Körpern der Charakteristik 0 erhalten wir also die folgende Bijektion für die Menge der Isomorphieklassen irreduzibler Darstellungen:

$$\mathrm{Irrep}_{\mathbb{K}}(G) \times \mathrm{Irrep}_{\mathbb{K}}(H) \to \mathrm{Irrep}_{\mathbb{K}}(G \times H), \quad ([(\rho, V)], [(\tau, W)]) \mapsto [(\rho \boxtimes \tau, V \otimes W)].$$

Für ein direktes Produkt zweier endlicher Gruppen reduzieren sich damit alle Klassifikationsprobleme auf die beiden Faktoren.

Bemerkung 3.62. Induktiv erhält man analoge Aussagen für endliche Produkte

$$G_1 \times \cdots \times G_n$$

endlicher Gruppen G_j.

Aufgaben zu Kapitel 3

Aufgabe 3.1. (Isotypische Komponenten und Eigenräume) Sei $g \in \mathrm{GL}(V)$ und (ρ, V) mit $\rho(n) := g^n$ die zugehörige Darstelung der Gruppe $G = \mathbb{Z}$. Wir nehmen an, dass $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen ist. Zeigen Sie:

(a) (ρ, V) ist genau dann einfach, wenn $\dim V = 1$ ist.

(b) (ρ, V) ist genau dann halbeinfach, wenn g diagonalisierbar ist.

(c) $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ heißt *halbeinfach*, wenn zu jedem φ-invarianten Unterraum $U \subseteq V$ ein φ-invariantes Komplement existiert. Zeigen Sie, dass $g \in \mathrm{GL}(V)$ genau dann halbeinfach ist, wenn g diagonalisierbar ist.

Aufgabe 3.2. Seien V und W endlichdimensionale Vektorräume, $A \in \mathrm{End}(V)$ und $B \in \mathrm{End}(W)$. Dann ist die Spur von $A \otimes B \in \mathrm{End}(V \otimes W)$ gegeben durch

$$\mathrm{tr}(A \otimes B) = \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B).$$

Aufgabe 3.3. Seien (ρ, V), (τ, W) Darstellungen einer Gruppe G über $\mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass durch

$$\rho_{\mathrm{Hom}(V,W)}(g)\varphi = \tau(g) \circ \varphi \circ \rho(g)^{-1} \quad \text{für} \quad \varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$$

eine Darstellung von G auf $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ definiert wird.

Aufgabe 3.4. Zeigen Sie, dass die reguläre Darstellung einer Gruppe G aus Beispiel 3.6 auf $\mathbb{K}^M$ tatsächlich eine Darstellung definiert und verifizieren Sie die Relation

$$\rho(g)\delta_m = \delta_{g.m} \quad \text{für} \quad g \in G, m \in M$$

und alle Deltafunktionen $\delta_m : M \to \mathbb{K}$.

Aufgabe 3.5. Seien G, H Gruppen, $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus und (ρ, V) eine Darstellung von H über $\mathbb{K}$.

(a) Zeigen Sie, dass durch $\tau := \rho \circ \varphi : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(V)$ eine Darstellung von G auf V definiert wird. Diese bezeichnet man als *Pullback* der Darstellung (V, ρ) entlang φ.

(b) Untersuchen Sie für den Fall $H = G$ und $\varphi : G \to G$ mit $\varphi(g) = g_0 \cdot g \cdot g_0^{-1}$ für festes $g_0 \in G$, ob der Pullback von (ρ, V) isomorph zu (ρ, V) ist.

(c) Geben Sie ein Beispiel eines Gruppenautomorphimus $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ und einer Gruppendarstellung (ρ, V) von G an, so dass der Pullback von (ρ, V) entlang φ nicht isomorph zu (ρ, V) ist.

Aufgabe 3.6. Finden Sie eine endlichdimensionale irreduzible reelle Darstellung einer abelschen Gruppe, die nicht eindimensional ist.

Aufgabe 3.7. Eine Darstellung $(\rho, \mathbb{C}^n)$ einer Gruppe G heißt unitär, wenn $\rho(g)$ für alle $g \in G$ eine unitäre Abbildung ist. Zeigen Sie, dass jede unitäre Darstellung einer Gruppe auf $\mathbb{C}^n$ halbeinfach ist.

Aufgabe 3.8. Sei (ρ, V) eine endlichdimensionale Darstellung einer Gruppe G auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V und $W \subset V$ ein Unterraum, der durch die Gruppenwirkung stabilisiert wird:

$$\rho(g)w \in W \qquad \text{für alle} \quad g \in G, w \in W.$$

Konstruieren Sie eine Darstellung von G auf dem Quotientenraum V/W.

Aufgabe 3.9. Sei G eine Gruppe und $N \subset G$ eine normale Untergruppe, d.h. eine Untergruppe $N \subset G$ mit $gN = Ng$ für alle $g \in G$. Zeigen Sie:

(a) Die Nebenklassen gN, $g \in G$, bilden eine Gruppe. (Sie wird als *Faktorgruppe* und mit G/N bezeichnet.)

(b) Ist (ρ, V) eine Darstellung von G über $\mathbb{K}$ mit $N \subseteq \ker \rho$, so definiert dies eine Darstellung der Faktorgruppe G/N auf V.

Aufgabe 3.10. Sei G eine Gruppe und $[G,G] = \langle a{\cdot}b{\cdot}a^{-1}{\cdot}b^{-1} : \ a, b \in G\rangle$ die von Elementen der Form $[a,b] = a{\cdot}b{\cdot}a^{-1}{\cdot}b^{-1}$ erzeugte Untergruppe (sie heißt *Kommutatorgruppe*). Zeigen Sie, dass die Isomorphieklassen eindimensionaler Darstellungen von G über einem Körper $\mathbb{K}$ bijektiv den Gruppenhomomorphismen
$\varphi : G/[G,G] \to \mathbb{K}^\times$ entsprechen.

Aufgabe 3.11. (Isotypische Komponenten und Eigenräume) Sei $g \in \mathrm{GL}(V)$ eine diagonalisierbare lineare Abbildung und (ρ, V) mit $\rho(n) := g^n$ die zugehörige Darstellung der Gruppe $G = \mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

(a) Die Darstellung (ρ, V) ist halbeinfach.

(b) Die isotypischen Komponenten dieser Darstellung sind die Eigenräume von g.

(c) Für $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ ist $\varphi \in \mathrm{End}((\rho, V))$ genau dann, wenn φ alle Eigenräume von g invariant lässt.

(d) Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die verschiedenen Eigenwerte von g und $m_1, \ldots, m_n$ ihre Vielfachheiten, so ist

$$\mathrm{End}((\rho, V)) \cong \bigoplus_{j=1}^{n} M_{m_j}(\mathbb{K}),$$

wobei die Multiplikation in der direkten Summe von Algebren komponentenweise definiert wird.

Aufgabe 3.12. Wir erinnern uns an das Tensorprodukt von Matrizen

$$\otimes \colon M_n(\mathbb{K}) \times M_m(\mathbb{K}) \to M_{nm}(\mathbb{K}), \quad (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \otimes (b_{k\ell})_{1 \le k,\ell \le m} := (a_{ij} b_{k\ell})_{1 \le i,j \le m; 1 \le k,\ell \le m}$$

und definieren

$$\oplus \colon M_n(\mathbb{K}) \times M_m(\mathbb{K}) \to M_{n+m}(\mathbb{K}), \quad (A, B) \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie: Ist $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen und $A \in M_n(\mathbb{K})$, so existieren $m_{k,\lambda} \in \mathbb{N}_0$, so dass A ähnlich ist zur Matrix

$$\bigoplus_{j=1}^{N} \mathbf{1}_{m_{k_j,\lambda_j}} \otimes J_{k_j,\lambda_j},$$

wobei $J_{k,\lambda}$ der Jordanblock der Größe k zu dem Eigenwert λ ist. Zwei solche Matrizen sind genau dann zueinander ähnlich, wenn alle Zahlen $m_{k,\lambda}$, $k \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{K}^\times$, übereinstimmen.

Aufgabe 3.13. Sei $G := \mathbb{Z}$ und $\lambda \in \mathbb{K}^\times$ sowie $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass durch $\rho(1) := J_{n,\lambda}$ eine unzerlegbare Darstellung $(\rho, \mathbb{K}^n)$ von $\mathbb{Z}$ definiert wird.

Aufgabe 3.14. Beweisen Sie, dass isomorphe Darstellungen einer Gruppe G über $\mathbb{K}$ den gleichen Charakter haben.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass für $A \in \mathrm{End}(V)$ und $\varphi \in \mathrm{Iso}(V, W)$ die Beziehung $\mathrm{tr}(\varphi \circ A \circ \varphi^{-1}) = \mathrm{tr}(A)$ gilt.

Aufgabe 3.15. Sei G eine abelsche Gruppe und $\mathbb{K}$ ein Körper.

- Zeigen Sie, dass die Menge $X(G) := \mathrm{Hom}(G, \mathbb{K}^\times)$ bzgl. der punktweisen Multiplikation eine Gruppe ist (Charaktergruppe von G über $\mathbb{K}$).
- $X(G_1 \times \cdots \times G_n) \cong X(G_1) \times \cdots \times X(G_n)$ für abelsche Gruppen $G_1, \ldots, G_n$.
- Ist $\mathrm{char}\,\mathbb{K}$ kein Teiler von $|G|$ und $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossener, so ist $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{K}^\times) \cong G$.
  Hinweis: Verwenden Sie den Struktursatz für endlich erzeugte abelsche Gruppen um das Problem auf den Fall zu reduzieren, dass G zyklisch ist; Lemma 3.10.

Aufgabe 3.16. Zeigen Sie, dass die Matrixkoeffizienten $a_{ij} \colon G \to \mathbb{K}$ einer n-dimensionalen Darstellung (ρ, V) einer Gruppe G die folgende Relation erfüllen

$$a_{ij}(g \cdot h) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(g) a_{kj}(h) \qquad \text{für} \quad g, h \in G.$$

Aufgabe 3.17. Seien (ρ_V, V) und (ρ_W, W) endlichdimensionale komplexe Darstellungen einer endlichen Gruppe G.
(a) Wir betrachten die durch $\rho_{V^*}(g)\alpha := \alpha \circ \rho(g^{-1})$ definierte Darstellung von G auf dem Dualraum $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass für den Charakter dieser Darstellung gilt

$$\chi_{\rho_{V^*}}(g) = \overline{\chi_{\rho_V}(g)} \qquad \forall g \in G.$$

(b) Wir betrachten die durch

$$\rho_{\mathrm{Hom}(V,W)}(g)\varphi := \rho_W(g) \circ \varphi \circ \rho_V(g^{-1}) \qquad \forall \varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W), g \in G$$

definierte Darstellung von G auf $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$. Zeigen Sie, dass der Charakter dieser Darstellung gegeben ist durch

$$\chi_{\rho_{\mathrm{Hom}(V,W)}} = \chi_{\rho_W} \cdot \overline{\chi_{\rho_V}}.$$

Aufgabe 3.18. Sei $(\rho, \mathbb{K}^n)$ eine einfache endlichdimensionale Darstellung einer Gruppe G, $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen, und $M(g) = (\rho_{ij}(g))_{1 \le i,j \le n}$ die darstellenden Matrizen der linearen Abbildungen $\rho(g)$ bezüglich einer Basis $B = (b_1, \ldots, b_n)$ von $\mathbb{K}^n$. Beweisen Sie, dass jede Matrix, die mit allen Matrizen $M(g)$ kommutiert, ein Vielfaches der Einheitsmatrix ist.

Aufgabe 3.19. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Beweisen Sie sie, oder geben Sie ein Gegenbeispiel an:
(a) Die einzigen eindimensionalen Darstellungen der Permutationsgruppe S_n über $\mathbb{K}$ sind die triviale Darstellung und die Darstellung $\mathrm{sgn} : S_n \to \mathbb{K}^\times$, $\pi \mapsto \mathrm{sgn}(\pi)$.

(b) Ist (ρ, V) eine endlichdimensionale Darstellung einer Gruppe G , so ist $(\det \circ \rho, \mathbb{K})$ eine eindimensionale Darstellung von G.

(c) Ist (ρ, V) eine einfache Darstellung einer Gruppe G über $\mathbb{K}$ und $H \subset G$ eine Untergruppe, so ist $(\rho|_H, V)$ eine einfache Darstellung von H.

(d) Ist G eine endliche Gruppe und (ρ, V) eine Darstellung von G, dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\rho(g)^n = \mathrm{id}_V$ für alle $g \in G$.

Aufgabe 3.20. (a) Klassifizieren Sie für $n \in \mathbb{N}$ alle irreduziblen komplexen Darstellungen der Gruppe $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ bis auf Isomorphie.

(b) Geben Sie eine Zerlegung der regulären Darstellung $\mathbb{C}[G]$ als direkte Summe einfacher Darstellungen an.

Aufgabe 3.21. Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathbb{K}$-Algebra und $A \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie die Existenz einer maximal abelschen Unteralgebra $\mathcal{C}$, die A enthält. Hinweis: Lemma von Zorn.

Aufgabe 3.22. Sei $\mathcal{A}$ ein Schiefkörper, also eine assoziative $\mathbb{K}$-Algebra mit Eins, in der jedes Element $A \neq 0$ invertierbar ist. Sei $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ eine endlichdimensionale Unteralgebra. Zeigen Sie, dass auch $\mathcal{B}$ ein Schiefkörper ist.

Aufgabe 3.23. Sei $\mathcal{A}$ ein Schiefkörper und $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ eine maximale kommutative Unteralgebra. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ ein Körper ist.

Aufgabe 3.24. Sei $\mathbb{K} \subseteq \mathbf{L}$ ein Erweiterungskörper, d.h. $\mathbb{K}$ ist ein Unterkörper von $\mathbf{L}$. Zeigen Sie: Die Multiplikation $\rho(g)h := gh$ definiert eine irreduzible Darstellung $(\rho, \mathbf{L})$ der abelschen Gruppe $G := \mathbf{L}^\times$ über $\mathbb{K}$. Vergleiche mit dem zweiten Schurschen Lemma.

Aufgabe 3.25. Sei (ρ, V) eine einfache Darstellung der endlichen abelschen Gruppe G. Zeigen Sie:

(a) Die $\mathbb{K}$-Algebra $\mathbb{L} := \widehat{\rho}(\mathbb{K}[G])$ ist ein Körper.

(b) Ist $0 \neq v \in V$, so ist die Abbildung $\varphi \colon \mathbb{L} \to V, A \mapsto Av$ ein linearer Isomorphismus.

(c) Definieren wir eine Darstellung $\rho_{\mathbb{L}} \colon G \to \mathbb{L}^\times \subseteq \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(\mathbb{L})$ durch $\rho_{\mathbb{L}}(g)A := \rho(g) \cdot A$, so ist $\varphi \colon (\rho_{\mathbb{L}}, \mathbb{L}) \to (\rho, V)$ ein Isomorphismus von G-Darstellungen.

(d) Sei $\mathbb{L} \supseteq \mathbb{K}$ eine Körpererweiterung, G eine endliche abelsche Gruppe und $\chi \colon G \to \mathbb{L}^\times$ ein Homomorphismus. Wir erhalten eine Darstellung $(\rho, \mathbb{L})$ durch $\rho(g)x = \chi(g) \cdot x$. Diese Darstellung ist genau dann irreduzibel, wenn $\mathbb{L} = \mathrm{span}_{\mathbb{K}} \chi(G)$ ist, also wenn $\chi(G)$ den Körper $\mathbb{L}$ über $\mathbb{K}$ erzeugt.

Aufgabe 3.26. (Zweidimensionale irreduzible Darstellungen zyklischer Gruppen) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $\lambda^k = 1$, so dass λ in $\mathbb{K}$ kein Quadrat ist, also $\lambda \neq \mu^2$ für alle $\mu \in \mathbb{K}$. Zeigen Sie:

(a) Auf $\mathbb{L} := \mathbb{K}^2$ erhalten wir durch die Multiplikation

$$(a, b)(a', b') := (aa' + \lambda bb', ab' + a'b)$$

die Struktur eines Körpers und für $\mu := (0, 1)$ gilt $\mu^2 = \lambda$.

(b) Durch $\rho(\overline{1}) := \mu$ wird eine irreduzible Darstellung der zyklischen Gruppe $G = \mathbb{Z}/2k\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{K}^2 \cong \mathbb{L}$ definiert.

(c)* Ist (ρ, V) eine zweidimensionale irreduzible Darstellung der zyklischen Gruppe $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, so ist sie äquivalent zu einer Darstellung wie in Aufgabe 3.25(d), wobei $\mathbb{L}$ eine zweidimensionale Körpererweiterung von $\mathbb{K}$ ist mit $C_n^{\mathbb{L}} \neq C_n^{\mathbb{K}}$.

Aufgabe 3.27. (Körper der Ordnung 4) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ der Körper der Ordnung 2 und $G := \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ die 3-elementige zyklische Gruppe. Zeigen Sie:

(i) Ist $\varepsilon \colon G \to \mathrm{GL}_1(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^\times$ die triviale Darstellung und $\widehat{\varepsilon} \colon \mathbb{K}[G] \to \mathbb{K}$ ihre lineare Fortsetzung, so ist

$$\mathbb{L} := \ker \widehat{\varepsilon} = \Big\{ \sum_{g \in G} f(g)\delta_g \colon \sum_g f(g) = 0 \Big\}$$

ein 2-dimensionales Ideal in $\mathbb{K}[G]$.

(ii) $C_3^{\mathbb{K}} = \{1\}$.

(iii) Als Unterdarstellung von $(\rho_l, \mathbb{K}[G])$ ist der G-Modul $\mathbb{L}$ irreduzibel. Hinweis: Es existiert kein G-Eigenvektor in $\mathbb{L}$.

(iv) $\mathbb{L}$ ist ein 4-elementiger Körper.

Aufgabe 3.28. Sei (ρ, V) eine Darstellung der Gruppe G, (ρ_W, W) eine Unterdarstellung und (ρ_Q, Q) die zugehörige Quotientendarstellung auf $Q := V/W$. Zeigen Sie

$$\chi_{(\rho,V)} = \chi_{(\rho_W,W)} + \chi_{(\rho_Q,Q)} = \chi_{(\rho_W,W)\oplus(\rho_Q,Q)}.$$

Charaktere können (ρ, V) also nicht von der direkten Summe $(\rho_W, W) \oplus (\rho_Q, Q)$ unterscheiden.

Aufgabe 3.29. Sei G eine endliche Gruppe.

(a) Sei V ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum und für $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ bezeichne $\varphi^\dagger$ die adjungierte Abbildung: $\langle \varphi v, w\rangle = \langle v, \varphi^\dagger w\rangle$ für alle $v, w \in V$. Zeigen Sie, dass für jede endlichdimensionale komplexe Darstellung (ρ, V) von G auch $(\widetilde{\rho}, V)$ mit $\widetilde{\rho}(g) = \rho(g^{-1})^\dagger$ eine komplexe Darstellung von G ist, und $(\rho, V) \cong (\widetilde{\rho}, V)$.

(b) Sei $(\rho_1, V_1), \ldots, (\rho_n, V_n)$ ein Repräsentantensystem einfacher komplexer Darstellungen von G. Zeigen Sie, dass die Matrixkoeffizienten der Darstellungen (ρ_i, V_i) bezüglich fest gewählter Orthonormalbasen B_i eine Orthogonalbasis des komplexen Vektorraums $\mathbb{C}[G]$ mit Skalarprodukt

$$(f, h) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g)\overline{h(g)} \qquad \text{für} \quad f, h \in \mathbb{C}[G]$$

bilden.

Aufgabe 3.30. Sei G eine endliche Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe. Ist (ρ, V) eine irreduzible komplexe Darstellung von G, so ist $(\rho|_H, V)$ eine Darstellung von H, aber nicht notwendigerweise irreduzibel. Zeigen Sie, dass jede Isomorphieklasse irreduzibler Darstellungen von H als direkter Summand in einer Darstellung der Form $(\rho|_H, V)$ einer einfachen komplexen Darstellung (ρ, V) von G auftritt.

Aufgabe 3.31. Sei G eine endliche Gruppe und $(\rho_j, V_j)_{1\leq j\leq n}$ ein Repräsentantensystem einfacher komplexer Darstellungen von G. Beweisen Sie, dass eine Klassenfunktion $f : G \to \mathbb{C}$ genau dann Charakter einer endlichdimensionalen komplexen Darstellung von G ist, wenn gilt

$$(f, \chi_{(\rho_i,V_i)}) \in \mathbb{N}_0 \qquad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Aufgabe 3.32. Sei (ρ, V) eine d-dimensionale komplexe Darstellung einer endlichen Gruppe G. Zeigen Sie, dass dann für den Charakter $\chi_{(\rho,V)}$ gilt

$$|\chi_{(\rho,V)}(g)| \leq d \qquad \text{für} \quad g \in G$$

und $|\chi_{(\rho,V)}(g)| = d$ genau dann, wenn $\rho(g) = \xi\, \mathrm{id}_V$ mit einer Einheitswurzel ξ. Gilt dies auch für unendliche Gruppen?
Hinweis: Cauchy–Schwarzsche Ungleichung.

Aufgabe 3.33. Sei (ρ_1, V_1),..., (ρ_n, V_n) ein Repräsentantensystem einfacher endlichdimensionaler komplexer Darstellungen einer endlichen Gruppe G. Zeigen Sie, dass für die zugehörigen Charaktere gilt

$$\chi_{(\rho_i,V_i)} \cdot \chi_{(\rho_j,V_j)} = \sum_{k=1}^{n} n_k^{ij} \cdot \chi_{(\rho_k,V_k)}$$

mit ganzzahligen, nicht-negativen Koeffizienten $n_k^{ij} \in \mathbb{N}_0$. Drücken Sie diese Koeffizienten durch die Charaktere $\chi_{(\rho_i,V_i)}$ aus.

Aufgabe 3.34. Bestimmen Sie die Charaktertafel für die zyklische Gruppe $C_3 = \{e, x, x^2\}$ der Ordnung 3.

Aufgabe 3.35. Ergänzen Sie in der folgenden Charaktertafel die fehlende Zeile:

Ord.	1	3	6	6	8
	e	g_1	g_2	g_3	g_4
ρ_1	1	1	1	1	1
ρ_2	1	1	-1	-1	1
ρ_3	3	-1	1	-1	0
ρ_4	3	-1	-1	1	0
ρ_5	?	?	?	?	?

Aufgabe 3.36. Seien G und H Gruppen. Zeigen Sie, dass $\mathbb{K}[G \times H] \cong \mathbb{K}[G] \otimes \mathbb{K}[H]$ im Sinne der natürlichen Algebrastruktur auf dem Tensorprodukt ist (Aufgabe 2.5).

Aufgabe 3.37. Sei G eine endliche Gruppe und $\mathbb{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0. Auf $\mathbb{K}[G] = \mathbb{K}^G$ betrachten wir die bireguläre Darstellung ρ_b von $G \times G$ (Bemerkung 3.39). Sei $((\rho_j, V_j))_{1\leq j\leq N}$ ein vollständiges System paarweise inäquivalenter einfacher G-Darstellungen. Zeigen Sie:

(a) Die Darstellungen $(\rho_j \boxtimes \rho_k^*)_{1\leq j,k\leq N}$ sind ein vollständiges System paarweise inäquivalenter Darstellungen von $G \times G$.

(b) $(\rho_b, \mathbb{K}[G]) \cong \bigoplus_{j=1}^N (\rho_j \boxtimes \rho_j^*, V_j \otimes V_j^*)$.
Hinweis: Berechne $(\chi_{\rho_b}, \chi_{\rho_j \boxtimes \rho_k^*})$. Für $g \in G$, den Zentralisator $C_G(g)$ und die Konjugationsklasse $[g]$ gilt $|[g]| = |G|/|C_G(g)|$.

(c) Wie sehen die zweiseitigen Ideale der Algebra $\mathbb{K}[G]$ aus? Wie viele gibt es?

Aufgabe 3.38. Sei $(\rho_j, V_j)_{1\leq j\leq n}$ ein Repräsentantensystem einfacher komplexer Moduln einer endlichen Gruppe G. Beweisen Sie

$$\sum_{i=1}^n \chi_{(\rho_i,V_i)}(g)\chi_{\rho_i,V_i}(h^{-1}) = \begin{cases} \frac{|G|}{|C|} & \text{falls } g,h \text{ in derselben Konjugationsklasse } C \text{ liegen} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hinweis: Beispiel 3.43(d).

Aufgabe 3.39. Wir betrachten die zyklische Gruppe $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ der Ordnung 4 und interessieren uns für ihre reellen Darstellungen. Zeigen Sie:

(a) G hat genau zwei verschiedene eindimensionale reelle Darstellungen $\chi_1, \chi_2 \colon G \to \mathbb{R}$.

(b) Durch $\rho(\overline{1}) := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ erhalten wir eine irreduzible zweidimensionale Darstellung von G. Für diese Darstellung ist $\widehat{\rho}(\mathbb{R}[G]) \cong \mathbb{C}$ (als reelle Algebra).

(c) $\mathbb{R}[G] = \mathbb{R}\chi_1 \oplus \mathbb{R}\chi_2 \oplus \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\delta_{\overline{0}} - \delta_{\overline{2}}, \delta_{\overline{1}} - \delta_{\overline{3}}\}$ liefert einen Isomorphismus

$$\mathbb{R}[G] \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{C}$$

von reellen Algebren, wobei die Multiplikation in der direkten Summe komponentenweise definiert ist.

(d) $\mathrm{Irrep}_{\mathbb{R}}(G) = \{[\chi_1], [\chi_2], [\rho]\}$.

(e) $\mathrm{Irrep}_{\mathbb{C}}(G) = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$ enthält 4 Elemente. Vergleiche die Summe der Quadrate der Dimensionen im reellen und komplexen Fall.

(f) Durch $\tau \colon G \times G \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), (g,h) \mapsto \rho(g)\rho(h)$ erhalten wir eine irreduzible 2-dimensionale Darstellung von $G \times G$. Sie ist nicht von der Form $(\tau_1 \boxtimes \tau_2, V_1 \otimes V_2)$.

Aufgabe 3.40. Sei $\sigma \colon G \times M \to M$ eine Wirkung der Gruppe G auf der Menge M und $(\rho, \mathbb{K}^M)$ die zugehörige Darstellung mit $\rho(g)f := f \circ \sigma_g^{-1}$.

(a) Finden Sie einen linearen Isomorphismus vom Unterraum $(\mathbb{K}^M)^G$ der Fixvektoren auf den Raum $\mathbb{K}^{M/G}$ der Funktionen auf der Menge $M/G = \{G.m \colon m \in M\}$ der G-Bahnen in M.

(b) Ist M endlich, so gilt
$$\dim(\mathbb{K}^M)^G = |M/G|.$$

Aufgabe 3.41. (Darstellungen semidirekter Produkte mit abelschen Gruppen) Sei G eine endliche Gruppe von der Struktur $G = A \rtimes_\alpha H$, wobei A eine abelsche Gruppe ist und $\alpha \colon H \to \mathrm{Aut}(A)$ ein Homomorphismus. D.h. die Multiplikation in G hat die Gestalt

$$(a,h)(a',h') = (a\alpha_h(a'), hh').$$

Wir identifizieren A und H in kanonischer Weise mit Untergruppen von G. Zeigen Sie für jede endlichdimensionale komplexe Darstellung (ρ, V) on G:

(i) $\rho|_A$ ist diagonalisierbar: Schreiben wir $\widehat{A} := \mathrm{Hom}(A, \mathbb{C}^\times)$ für die Charaktergruppe von A, so erhalten wir eine direkte Zerlegung $V = \bigoplus_{\chi \in \widehat{A}} V_\chi$ mit den Eigenräumen

$$V_\chi = \{v \in V \colon (\forall a \in A)\ \rho(a)v = \chi(a)v\}.$$

(ii) Durch $H \times \widehat{A} \to \widehat{A}, (h,\chi) \mapsto h.\chi := \chi \circ \alpha_h^{-1}$ wird eine Gruppenwirkung definiert.

(iii) Für $h \in H$ gilt die Beziehung $\rho(h)V_\chi = V_{h.\chi}$. Insbesondere erhalten wir eine Darstellung der Stabilisatorgruppe $H_\chi := \{h \in H \colon h.\chi = \chi\}$ auf V_χ.

(iv) Ist $S \subseteq \widehat{A}$ eine H-invariante Teilmenge, so ist $V_S = \bigoplus_{\chi \in S} V_\chi$ ein G-Untermodul.

(v) Ist (ρ, V) irreduzibel, so existiert eine H-Bahn $\mathcal{O} = H.\chi_0 \subseteq \widehat{A}$ mit $V = V_\mathcal{O}$. In diesem Fall ist $V = \bigoplus_{h \in H/H_0} \rho(h)V_{\chi_0}$ für $H_0 := H_{\chi_0}$.

(vi) Sei $\mathcal{O} = H.\chi_0 \subseteq \widehat{A}$ eine H-Bahn und $V = V_\mathcal{O}$. Für einen Unterraum $W_0 \subseteq V_{\chi_0}$, der unter der Darstellung der Stabilisatorgruppe $H_0 := H_{\chi_0}$ auf V_{χ_0} invariant ist, betrachten wir den Unterraum $W = \sum_{h \in H} \rho(h)W_0$. Dann liefert die Zuordnung $W \mapsto W_0 = W \cap V_{\chi_0}$ eine Bijektion zwischen den G-invarianten Unterräumen von V und den H_0-invarianten Unterräumen von V_{χ_0}. Insbesondere ist (ρ, V) genau dann irreduzibel, wenn die Darstellung von H_0 auf V_{χ_0} irreduzibel ist.

(vii) Ist H auch abelsch und (ρ, V) irreduzibel, so ist $\dim V = |\mathcal{O}|$ für eine H-Bahn in $\widehat{A}$.

Aufgabe 3.42. (Darstellungen von Diedergruppen) Für $n > 1$ betrachten wir die Diedergruppe $D_n = C_n \rtimes_\alpha \{\mathbf{1}, \sigma\}$ mit $\alpha_\sigma(z) = z^{-1}$ für $z \in C_n = \{w \in \mathbb{C}^\times \colon w^n = 1\}$. Wir schreiben $\zeta := e^{2\pi i/n}$ für eine primitive n. Einheitswurzel. Zeigen Sie:

(i) Für $A = C_n$ ist $\widehat{A} = \{\chi_s \colon 0 \leq s < n\}$ mit $\chi_s(\zeta^j) = \zeta^{sj}$. Die Wirkung von $H = \{\mathbf{1}, \sigma\}$ auf $\widehat{A}$ ist gegeben durch $\sigma.\chi_s = \chi_{n-s}$ für $s > 0$ und $\sigma.\chi_0 = \chi_0$.

(ii) Jede irreduzible Darstellung von D_n ist ein- oder zweidimensional.

(iii) Für jedes $0 \leq s < n$ wird durch

$$\rho_s(\zeta) = \begin{pmatrix} \zeta^s & 0 \\ 0 & \zeta^{-s} \end{pmatrix}, \quad \rho_s(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

eine zweidimensionale Darstellung definiert. Für welche s ist sie irreduzibel? Zeigen Sie $\rho_s \cong \rho_{n-s}$.

(iv) Ist $n = 2k + 1$ ungerade, so enthält D_n genau $k + 2$ Konjugationsklassen. Ist $n = 2k$ gerade, so enthält D_n genau $k + 3$ Konjugationsklassen.

(v)* Beschreiben Sie alle irreduziblen Darstellungen von D_n.

Aufgabe 3.43. Wir betrachten die *Quaternionengruppe*

$$Q := \{\pm E, \pm I, \pm J, \pm K\} \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$$

mit

$$I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = IJ = -JI.$$

Zeigen Sie:

(i) $\mathrm{ord}(\pm I) = \mathrm{ord}(\pm J) = \mathrm{ord}(\pm K) = 4$.

(ii) $Q/\{\pm E\} \cong \mathbb{Z}_2^2$ ist isomorph zur Kleinschen Vierergruppe.

(iii) Jede Untergruppe $H \subseteq Q$ ist normal.

(iv) Die Kommutatorgruppe ist $(Q, Q) = \{\pm E\}$.

(v) Die Charaktergruppe $\mathrm{Hom}(Q, \mathbb{C}^\times)$ is vierelementig.

(vi) Stellen Sie die Charaktertafel von Q auf.

4 Moduln über Ringen

4.1 Grundbegriffe

In diesem Kapitel werden wir die Darstellungstheorie von Gruppen aus dem letzten Kapitel verallgemeinern und uns mit Moduln über Ringen befassen. Wir werden sehen, dass dieser Begriff mehrere schon bekannte Konzepte aus der Algebra wie Vektorräume über Körpern, abelsche Gruppen und Darstellungen von Gruppen als Spezialfälle enthält. Man kann diese Begriffe also gemeinsam behandeln und ihre strukturellen Gemeinsamkeiten erfassen. Dazu wiederholen wir zunächst noch einmal die wesentlichen aus der Algebra bekannten Definitionen zu Ringen.

4.1.1 Ringe

Definition 4.1.

(a) Ein *Ring* $(R, +, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe $(R, +)$ zusammen mit einer Multiplikationsabbildung $\cdot : R \times R \to R$, $(r, s) \mapsto r \cdot s$, die assoziativ und distributiv ist:

$$r \cdot (s \cdot t) = (r \cdot s) \cdot t, \quad r \cdot (s + t) = r \cdot s + r \cdot t, \quad (s + t) \cdot r = s \cdot r + t \cdot r \qquad \text{für} \quad r, s, t \in R.$$

Das neutrale Element der abelschen Gruppe $(R, +)$ wird mit 0 bezeichnet.

- Ein Ring heißt *unitär (unital)* oder *Ring mit Eins*, wenn ein Element $\mathbf{1}_R \in R$ existiert mit $\mathbf{1}_R \cdot r = r \cdot \mathbf{1}_R = r$ für alle $r \in R$. Ein Element $r \in R$ eines unitären Rings heißt *Einheit*, wenn es ein multiplikatives Inverses besitzt, d.h. es existiert ein $s \in R$ mit $r \cdot s = s \cdot r = \mathbf{1}_R$. Die Menge der Einheiten in R bildet eine multiplikative Gruppe, die wir mit $R^\times$ bezeichnen.
- Ein Ring heißt *kommutativ* wenn die Multiplikationsabbildung kommutativ ist: $r \cdot s = s \cdot r$ für alle $r, s \in R$.
- Ein Ring heißt *nullteilerfrei*, wenn für alle $r, s \in R$ aus $r \cdot s = 0$ folgt $r = 0$ oder $s = 0$, d.h. $R \setminus \{0\}$ ist multiplikativ abgeschlossen.
- Ein *Integritätsring* oder *Integritätsbereich* ist ein kommutativer, nullteilerfreier Ring $R \neq \{0\}$ mit Eins.
- Ein Ring mit Eins heißt *Schiefkörper* oder *Divisionsring*, wenn jedes Element außer 0 ein multiplikatives Inverses besitzt: $R^\times = R \setminus \{0\}$.

(b) Unterringe und Ideale: Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring.

- Ein *Unterring* oder *Teilring* von R ist eine Untergruppe $(U, +) \subset (R, +)$, die mit der Einschränkung der Ringmultiplikation in R wieder einen Ring bildet: $u \cdot u' \in U$ für alle $u, u' \in U$.

- Ein *Linksideal* in einem Ring $(R, +, \cdot)$ ist eine Untergruppe $(I, +) \subset (R, +)$, so dass $r \cdot i \in I$ für alle $r \in R$, $i \in I$. Analog ist ein *Rechtsideal* in R eine Untergruppe $(I, +) \subset (R, +)$, so dass $i \cdot r \in I$ für alle $r \in R$, $i \in I$. Ist $I \subset R$ sowohl ein Links- als auch ein Rechtsideal in R, so nennt man I ein *zweiseitiges Ideal*.
- Ein *Hauptidealring* ist ein Integritätsring, in dem jedes Ideal I ein *Hauptideal* ist, also von der Form $I = (a) := Ra = \{r \cdot a : \ r \in R\}$ für ein $a \in R$ ist.

(c) Ein *Ringhomomorphismus* $f : (R, +, \cdot) \to (S, +, \cdot)$ ist ein Gruppenhomomorphismus, der die multiplikative Struktur der Ringe respektiert:

$$f(r + r') = f(r) + f(r'), \quad f(r \cdot r') = f(r) \cdot f(r') \qquad \text{für} \quad r, r' \in R.$$

Sind $(R, +, \cdot)$ und $(S, +, \cdot)$ unitäre Ringe, so fordert man zusätzlich, dass ein Ringhomomorphismus $f : R \to S$ die Einselemente aufeinander abbildet: $f(\mathbf{1}_R) = \mathbf{1}_S$. Die Menge der Ringhomomorphismen von $(R, +, \cdot)$ nach $(S, +, \cdot)$ wird mit $\mathrm{Hom}(R, S)$ bezeichnet.

Beispiele 4.2.

(a) Der Ring der ganzen Zahlen $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. Dieser spielt eine besonders wichtige Rolle und wird auch als *initialer Ring mit Eins* bezeichnet. Denn für jeden unitalen Ring R existiert genau ein Ringhomomorphismus $f : \mathbb{Z} \to R$ unitaler Ringe (Beweis: Übung).

(b) Der Nullring $R = \{0\}$. Dieser wird auch als *terminaler Ring* bezeichnet. Denn für jeden Ring S existiert genau ein Ringhomomorphismus $f : S \to R = \{0\}$.

(c) Jeder Körper ist auch ein Ring, also insbesondere $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, und die endlichen Körper $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

(d) Jede assoziative Algebra $(\mathcal{A}, \circ)$ ist ein Ring. Insbesondere gilt das für die Gruppenalgebra $\mathbb{K}[G]$ einer Gruppe G aus Definition 3.4, die deswegen oft auch als *Gruppenring* bezeichnet wird, sowie für die Endomorphismenalgebra $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ eines $\mathbb{K}$-Vektorraums (siehe auch Beispiel 4.3).

(e) Die Polynome in einer Unbestimmten X mit Koeffizienten in einem kommutativen Ring R bilden bezüglich der Polynomaddition und Multiplikation einen Ring, der mit $R[X]$ bezeichnet wird.

(f) Für $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, bilden die reellwertigen Funktionen auf U einen Ring bezüglich der punktweisen Addition und Multiplikation. Dasselbe gilt für die stetigen, die differenzierbaren und die analytischen Funktionen auf U.

(g) Ist $(A,+)$ eine abelsche Gruppe, so bildet die Menge $\mathrm{End}(A)$ der Gruppenendomorphismen $\varphi : A \to A$ einen unitalen Ring, den *Endomorphismenring* . Die Ringstruktur ist gegeben durch die punktweise Addition und die Verkettung von Gruppenendomorphismen.

(h) ist $(R,+,\cdot)$ ein Ring, so erhält man einen weiteren Ring $(R,+,*)$, indem man die Multiplikation in R umdreht: $r * s := s \cdot r$ für alle $r,s \in R$. Dieser wird als der zu R *opponierte Ring* und mit R^{op} bezeichnet. Offensichtlich ist der Ring $(R,+,\cdot)$ kommutativ genau dann, wenn $\mathrm{id}_R : R \to R$ ein Ringhomomorphismus von R nach R^{op} ist.

(i) Ist $f : R \to S$ ein Ringhomomorphismus, so ist $\ker(f) = \{r \in R : \ f(r) = 0\}$ ein zweiseitiges Ideal in R und $\mathrm{im}(f) = \{s \in S : (\exists r \in R)\ f(r) = s\}$ ein Unterring von S.

Ein weiteres sehr wichtiges Beispiel ergibt sich als eine Verallgemeinerung der Gruppenalgebra aus Definition 3.4. Ersetzen wir den Körper $\mathbb{K}$ durch einen Ring R, so erhalten wir den sogenannten Gruppenring $R[G]$.

Beispiel 4.3. (Gruppenring) Sei G eine Gruppe, R ein Ring mit Eins und $R[G] := R^{(G)}$ die Menge der Abbildungen $f : G \to R$ mit endlichem Träger, also $f(g) = 0$ für fast alle $g \in G$. Dann bildet $R[G]$ zusammen mit der punktweisen Addition von Abbildungen und der Faltung

$$(f \star k)(g) = \sum_{g_1,g_2 \in G, g_1\cdot g_2 = g} f(g_1)k(g_2) = \sum_{u \in G} f(u)k(u^{-1}g)$$

einen Ring $(R[G],+,\star)$ mit Einselement δ_e, der als *Gruppenring* mit Koeffizienten in R bezeichnet wird.

4.1.2 Moduln

In Analogie zur Darstellungstheorie von Gruppen definieren wir nun den Begriff des Moduls über einem Ring.

Definition 4.4. Ein *(Links)modul* über einem Ring R ist eine abelsche Gruppe $(M,+)$ zusammen mit einer Abbildung $\mu : R \times M \to M, (r,m) \mapsto \mu(r,m) = r.m$ (die Strukturabbildung), so dass für alle $m,m' \in M$ und $r,r' \in R$ die folgenden Identitäten gelten:

(M1) $r.(m+m') = r.m + r.m'$ bzw. $\mu(r,m+m') = \mu(r,m) + \mu(r,m')$,

(M2) $(r+r').m = r.m + r'.m$ bzw. $\mu(r+r',m) = \mu(r,m) + \mu(r',m)$,

(M3) $r.(r'.m) = (rr').m$ bzw. $\mu(r,\mu(r',m)) = \mu(r\cdot r',m)$.

Ist $(R,+,\cdot)$ ein unitärer Ring, so fordert man zusätzlich

(M4) $\mathbf{1}_R.m = m$ bzw. $\mu(\mathbf{1}_R,m) = m$ für $m \in M$.

Lemma 4.5. *Sei M eine abelsche Gruppe und R ein Ring. Dann gilt:*

(a) *Ist $\rho : R \to \mathrm{End}(M)$ ein Ringhomomorphismus, dann wird eine R-Modulstruktur auf M definiert durch $\mu : R \times M \to M, \mu(r, m) = \rho(r)m$.*

(b) *Ist durch $\mu : R \times M \to M$ eine R-Modulstruktur auf M gegeben, dann definiert $\rho(r)(m) = \mu(r, m)$ einen Ringhomomorphismus $\rho \colon R \to \mathrm{End}(M)$.*

Beweis. (M1) bedeutet, dass $\rho(r) \in \mathrm{End}(M)$ ist und (M2/3), dass $\rho \colon R \to \mathrm{End}(M)$ ein Ringhomomorphismus ist. Bedingung (M4) bedeutet $\rho(\mathbf{1}_R) = \mathrm{id}_M$. In diesem Sinn können wir einen R-Modul M auch als einen Ringhomomorphismus $\rho \colon R \to \mathrm{End}(M)$ auffassen und umgekehrt. □

Bemerkung 4.6. (a) Analog definiert man einen *Rechtsmodul* über einem unitären Ring $(R, +, \cdot)$ als eine abelsche Gruppe $(M, +)$ zusammen mit einer Abbildung

$$\mu : M \times R \to M, \quad (m, r) \mapsto \mu(m, r) = m.r,$$

so dass für alle $m, m' \in M$ und $r, r' \in R$ die folgenden Identitäten gelten:

$$(m + m').r = m.r + m'.r, \qquad m.(r + r') = m.r + m.r', \qquad (m.r').r = m.(r'r).$$

Ist $(R, +, \cdot)$ ein unitärer Ring, so fordert man zusätzlich $m.\mathbf{1}_R = m$ für alle $m \in M$.

(b) Seien R, S zwei Ringe. Ein (R, S)-*Bimodul* ist eine abelsche Gruppe $(M, +)$, die sowohl die Struktur eines R-Linksmoduls $(M, +, \mu_R)$ als auch eines S-Rechtsmoduls $(M, +, \mu_S)$ hat, so dass die beiden Ringwirkungen verträglich sind

$$r.(m.s) = (r.m).s \qquad \text{für} \quad r \in R, s \in S, m \in M.$$

Definition 4.7. Ein *Modulhomomorphismus* oder eine *R-lineare Abbildung* zwischen R-Moduln $(M, +, \mu_M)$ und $(N, +, \mu_N)$ ist ein Gruppenhomomorphismus $\varphi : M \to N$, der kompatibel mit der Ringwirkung auf den Moduln M, N ist:

$$\varphi(r.m) = r.\varphi(m) \qquad \text{für} \quad m \in M, r \in R.$$

Ein bijektiver Modulhomomorphismus wird als *Modulisomorphismus* bezeichnet. Zwei Moduln $(M, +, \mu_M)$ und $(N, +, \mu_N)$ heißen *isomorph* , wenn ein Modulisomorphismus zwischen ihnen existiert. Wir schreiben dann $M \cong N$. Die Menge der Modulhomomorphismen $f : M \to N$ zwischen zwei Moduln M und N über R bezeichnen wir mit $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ und setzen $\mathrm{End}_R(M) := \mathrm{Hom}_R(M, M)$.

Beispiele 4.8. (a) Sei R ein Ring mit Eins. Die Ringmultiplikation gibt jedem Ring R die Struktur eines (R, R)-Bimoduls, den wir mit ${}_R R_R$ bezeichnen. Entsprechend schreiben wir ${}_R R$ fuer den Linksmodul und R_R fuer den Rechtsmodul.

Die Modulendomorphismen von ${}_RR$ sind additive Abbildungen $\varphi : R \to R$ mit $\varphi(ab) = a\varphi(b)$ für $a, b \in R$. Insbesondere ergibt sich $\varphi(a) = \varphi(a\mathbf{1}_R) = a\varphi(\mathbf{1}_R)$, so dass φ durch eine Rechtsmultiplikation gegeben ist. Wir erhalten so einen Isomorphismus

$$\mathrm{End}_R({}_RR) \cong R^{\mathrm{op}}.$$

Analog sieht man, dass jedes Element von $\mathrm{End}_R(R_R)$ durch eine Linksmultiplikation gegeben ist und dies führt zu

$$\mathrm{End}_R(R_R) \cong R.$$

Ist $\varphi \in \mathrm{End}({}_RR_R)$, so erhalten wir für jedes $a \in R$ die Beziehung $\varphi(a) = \varphi(a\mathbf{1}_R) = a\varphi(\mathbf{1}_R)$ und analog $\varphi(a) = \varphi(\mathbf{1}_Ra) = \varphi(\mathbf{1}_R)a$. Also ist φ die Multiplikation mit einem zentralen Element $\varphi(\mathbf{1}_R)$. In diesem Sinne erhalten wir für unitale Ringe

$$\mathrm{End}_{(R,R)}({}_RR_R) \cong Z(R) = \{r \in S \colon (\forall s \in R)\ rs = sr\}.$$

(b) Ist R ein kommutativer Ring und M ein R-Modul, so erhalten wir durch $m.r := r.m$ auf M die Struktur eines R-Rechtsmoduls, so dass M hierdurch sogar zu einem R-Bimodul wird.

(c) Jede abelsche Gruppe A hat eine kanonische $\mathbb{Z}$-Modulstruktur gegeben durch

$$\mu : \mathbb{Z} \times A \to A, \quad \mu(n, a) = na.$$

Aus Lemma 4.5 ergibt sich, dass jede abelsche Gruppe A *genau eine* $\mathbb{Z}$-Modulstruktur trägt, denn die $\mathbb{Z}$-Modulstrukturen auf A entsprechen genau den unitalen Ringhomomorphismen $\mathbb{Z} \to \mathrm{End}(A)$ und nach Bemerkung 4.2(a) existiert genau ein Homomorphismus $\mathbb{Z} \to \mathrm{End}(A)$ von Ringen mit Eins.

Die Modulhomomorphismen zwischen zwei abelschen Gruppen A, B mit der kanonischen $\mathbb{Z}$-Modulstruktur sind gerade die Gruppenhomomorphismen $\varphi : A \to B$, also

$$\mathrm{Hom}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B).$$

(d) Ist $R = \mathbb{K}$ ein Körper, so sind die Linksmoduln über $\mathbb{K}$ gerade die $\mathbb{K}$-Vektorräume, und die Modulhomomorphismen zwischen zwei $\mathbb{K}$-Moduln V, W sind die $\mathbb{K}$-linearen Abbildungen $V \to W$.

(e) Eine assoziative $\mathbb{K}$-Algebra $(\mathcal{A}, +, \cdot, \circ)$ mit Einselement (hier steht $\cdot$ für die Skalarmultiplikation auf $\mathcal{A}$) ist gleichzeitig ein $\mathbb{K}$-Modul $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ und ein Ring $(\mathcal{A}, +, \circ)$, so dass die Skalarmultiplikation und die Ringmultiplikation verträglich sind:

$$\lambda \cdot (a \circ a') = (\lambda \cdot a) \circ a' = a \circ (\lambda \cdot a') \qquad \text{für} \quad \lambda \in \mathbb{K}, a, a' \in \mathcal{A}.$$

Analog definiert man für einen kommutativen Ring $(R, +, \cdot)$ eine *R-Algebra* als einen R-Modul $(\mathcal{A}, +, .)$, der eine Ringstruktur $(\mathcal{A}, +, \circ)$ trägt, so dass die Ringaddition mit der Moduladdition übereinstimmt und die Multiplikation $\circ$ R-bilinear ist, d.h.

$$r.(a \circ a') = (r.a) \circ a' = a \circ (r.a') \qquad \text{für} \quad r \in R, a, a' \in \mathcal{A}.$$

(f) Für jeden Ring R und jede Gruppe G trägt der Gruppenring $R[G]$ (Beispiel 4.3) die Struktur eines Moduls über R. Die Strukturabbildung ist durch die punktweise Linksmultiplikation von Funktionen $f : G \to R$ mit Ringelementen gegeben: $\mu(r, f) = r \cdot f$.

(g) Ist $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus und M ein S-Modul, so definiert die Abbildung

$$\mu_R : R \times M \to M, \quad (r, m) \mapsto \varphi(r).m$$

eine R-Modulstruktur auf M. Diese Operation von R auf M heißt *Pullback* des S-Moduls entlang φ. Ist $R \subseteq S$ und φ die kanonische Einbettung, so spricht man hier auch von *Einschränkung der Skalare*.

(h) Ist $(M, +, \mu)$ ein R-Linksmodul, so erhält M durch $\mu' : M \times R^{\mathrm{op}} \to M$, $\mu'(m, r) := r.m$ die Struktur eines R^{op}-Rechtsmoduls (vgl. Beispiel 4.2(h)). Umgekehrt hat auch jeder R-Rechtsmodul eine kanonische R^{op}-Linksmodulstruktur.

Aus den Beispielen wird deutlich, dass es sich bei Moduln über Ringen um eine sehr vielseitige und nützliche Struktur handelt, mit deren Hilfe sich auch viele schon bekannte Konzepte der Algebra erfassen lassen. Wir halten insbesondere fest, dass die gesamte Darstellungstheorie von Gruppen im Begriff des Moduls über einem Ring enthalten ist.

Lemma 4.9. *Sei G eine Gruppe und V eine abelsche Gruppe. Dann definiert die Zuordnung $\rho \mapsto \widehat{\rho}$ eine Bijektion zwischen den G-Modulstrukturen auf V bzgl. einer $\mathbb{K}$-Vektorraum-Struktur und den unitalen $\mathbb{K}[G]$-Modulstrukturen auf V.*

Beweis. Ist die $\mathbb{K}$-Vektorraum-Struktur auf V gegeben, so erhalten wir aus Korollar 3.35 eine Bijektion $\mathrm{Hom}(G, \mathrm{GL}(V)) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{K}[G], \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V))$. Insbesondere liefert jede G-Modulstruktur auf V die Struktur eine $\mathbb{K}[G]$-Moduls. Ist umgekehrt die abelsche Gruppe V mit einer $\mathbb{K}[G]$-Modulstruktur versehen, so erhält sie über die Inklusion $\mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{K}[G], r \mapsto r\delta_e$, die Struktur eines $\mathbb{K}$-Vektorraums, so dass der zugehörige Homomorphismus $\mathbb{K}[G] \to \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(V)$ Werte in $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ annimmt. Hieraus folgt die Behauptung. $\square$

Fassen wir die bisher betrachteten Beispiele von Moduln über Ringen zusammen und beziehen auch das Ergebnis von Aufgabe 4.11 mit ein, so erhalten wir die Tabelle in Abbildung 4.1.2, aus der deutlich wird, wie sich die schon bekannten Strukturen als Spezialfälle von Moduln über Ringen ergeben.

Beispiele von Moduln über Ringen:

Ring R	R**-Moduln**	R**-Modulhomomorphismen**
$\mathbb{Z}$	abelsche Gruppen	Gruppenhomomorphismen zwischen abelschen Gruppen
Körper $\mathbb{K}$	Vektorräume über $\mathbb{K}$	$\mathbb{K}$-lineare Abbildungen
Gruppenring $\mathbb{K}[G]$	G-Darstellungen über $\mathbb{K}$	Homomorphismen von Darstellungen
Polynomring $\mathbb{K}[X]$	$\mathbb{K}$-Vektorraum V mit linearer Abbildung $\varphi_V : V \to V$	Lineare Abbildungen $\psi : V \to W$ mit $\varphi_W \circ \psi = \psi \circ \varphi_V$

Beispiele von Endomorphismenringen eines Moduls:

Modul	$\mathrm{End}_R(M)$
Unitaler Ring R als Linksmodul: ${}_RR$	Gruppenhomomorphismen $\varphi : (R,+) \to (R,+)$ mit $\varphi(r) = r \cdot \varphi(\mathbf{1}_R)$ für alle $r \in R$ (Rechtsmultiplikationen), $\mathrm{End}({}_RR) \cong R^{\mathrm{op}}$
Unitaler Ring R als Rechtsmodul: R_R	Gruppenhomomorphismen $\varphi : (R,+) \to (R,+)$ mit $\varphi(r) = \varphi(\mathbf{1}_R) \cdot r$ für alle $r \in R$ (Linksmultiplikationen), $\mathrm{End}(R_R) \cong R$
Ring R als Bimodul: ${}_RR_R$	Gruppenhomomorphismen $\varphi : (R,+) \to (R,+)$ mit $\varphi(r) = r \cdot \varphi(\mathbf{1}_R)$, $\varphi(\mathbf{1}_R) \in Z(R)$ $\mathrm{End}({}_RR_R) \cong Z(R)$
M als Modul über $\mathrm{End}_R(M)$	Gruppenendomorphismen $\psi \in \mathrm{End}(M)$ mit $\psi \circ \varphi = \varphi \circ \psi$ für alle $\varphi \in \mathrm{End}_R(M)$.

Abbildung 1: Beispiele von Moduln über Ringen und von Endomorphismenringen

4.1.3 Untermoduln

Offensichtlich lohnt es sich also, die Struktur von Moduln systematisch zu untersuchen und die entsprechenden Begriffe aus der Theorie der abelschen Gruppen, der Vektorräume und der Darstellungstheorie von Gruppen zu verallgemeinern. Insbesondere benötigen wir den Begriff eines Untermoduls, der eine Verallgemeinerung des Konzeptes der Untergruppe einer abelschen Gruppe, des Untervektorraums und der Unterdarstellung aus Definition 3.13 auf Moduln angesehen werden kann.

Definition 4.10. Sei R ein Ring und $(M, +, \mu)$ ein R-Modul. Ein *R-Untermodul* von M ist eine Untergruppe $N \subset M$, die stabil unter der Operation des Rings R auf M ist, d.h. $r.n \in N$ für alle $r \in R$ und $n \in N$.

Bemerkung 4.11. (a) Jeder R-Modul M besitzt mindestens zwei Untermoduln, nämlich $\{0\}$ und M. Alle anderen Untermoduln von M werden als *echte Untermoduln* bezeichnet.

(b) Ist $\varphi : M \to N$ ein Homomorphismus von R-Moduln, so sind $\ker(\varphi) \subset M$ und $\mathrm{im}(\varphi) \subset N$ Untermoduln. Für $m \in \ker(\varphi)$ gilt $\varphi(r.m) = r.\varphi(m) = r.0 = 0$. Analog erhält man für $m \in M$ die Identität $r.\varphi(m) = \varphi(r.m) \in \mathrm{im}(\varphi)$.

(c) Ist $N \subset M$ ein Untermodul, so trägt die Quotientengruppe M/N eine natürliche R-Modulstruktur, die für $[m] := m + N$ durch $r.[m] := [r.m]$ definiert ist (Verifikation der Wohldefiniertheit als Übung). Dieser wird als *Quotientenmodul* oder *Faktormodul* bezeichnet (vgl. Satz 4.15).

Beispiel 4.12. (a) Ist M eine abelsche Gruppe (mit der kanonischen $\mathbb{Z}$-Modulstruktur), so ist ein Untermodul von M gerade eine Untergruppe.

(b) Ist $R = \mathbb{K}$ ein Körper, so ist ein Untermodul eines R-Moduls M gerade ein Untervektorraum von M.

(c) Ist G eine Gruppe und $\mathbb{K}$ ein Körper, so entsprechen die Untermoduln $N \subset M$ eines $\mathbb{K}[G]$-Moduls M gerade den Unterdarstellungen der Gruppe G.

(d) Die Untermoduln eines Rings R mit der kanonischen Struktur als Links, Rechts- oder Bimodul über sich selbst entsprechen den Links-, Rechts- und zweiseitigen Idealen von R.

4.1.4 Torsion

Ein weiteres wichtiges Beispiel eines Untermoduls ist der Annulator einer Teilmenge $U \subset M$. Dies führt auf das Konzept der Torsion.

Definition 4.13. Sei R ein Ring und M ein R-Modul. Der *Annulator* eines Elements $m \in M$ ist die Menge

$$\mathrm{Ann}(m) = \mathrm{Ann}_R(m) = \{r \in R : \ r.m = 0\} \subset R$$

und der Annulator einer Teilmenge $U \subset M$ die Menge

$$\mathrm{Ann}(U) = \{r \in R : (\forall u \in U)\ r.u = 0\} = \bigcap_{u \in U} \mathrm{Ann}(u) \subset R.$$

Der Annulator einer Teilmenge $U \subset M$ ist ein Linksideal in R, also ein Untermodul von R als Linksmodul über sich selbst. Ist die Teilmenge $U \subset M$ ein Untermodul von M, so ist $\mathrm{Ann}(U)$ ein zweiseitiges Ideal in R.

Ein Element $m \in M$ heißt *Torsionselement*, wenn $\mathrm{Ann}(m) \neq \{0\}$, und die Menge der Torsionselemente in M wird mit $\mathrm{tor}_R(M)$ bezeichnet. Ein R-Modul M heißt *treu*, wenn $\mathrm{Ann}(M) = \{0\}$ und *torsionsfrei*, wenn $\mathrm{tor}_R(M) = \{0\}$.

Beispiel 4.14. (a) Ist A eine abelsche Gruppe, die wir als $\mathbb{Z}$-Modul betrachten, so ist $a \in A$ genau dann ein Torsionselement, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $na = 0$ gibt, d.h., a ist ein Element endlicher Ordnung. Die Torsionslemente bilden die Untergruppe

$$\mathrm{tor}(A) = \{a \in A \colon (\exists n \in \mathbb{N})\ na = 0\}$$

der Elemente endlicher Ordnung. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir

$$A[n] := \{a \in A \colon na = 0\}$$

für die *n-Torsion* der abelschen Gruppe A. Dies ist eine Untergruppe von $\mathrm{tor}(A)$.

(b) Insbesondere ist $A = \mathbb{Z}$ eine torsionsfreie abelsche Gruppe, bzw. $\mathbb{Z}$-Modul. Im $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist jedes Element ein Torsionselement.

Betrachtet man hingegen den Ring $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ als Modul über sich selbst, so ist $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ genau dann torsionsfrei, wenn n eine Primzahl ist.

(c) Ist G eine Gruppe und $\mathbb{K}$ ein Körper, so ist jeder treue $\mathbb{K}[G]$-Modul M eine treue Darstellung der Gruppe, d.h. eine Darstellung für die $\rho : G \to \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(M)$ injektiv ist. Denn ist $M = (\rho, V)$ ein $\mathbb{K}[G]$-Modul mit $\rho(g) = \rho(g')$ für zwei Gruppenelemente $g \neq g'$, so folgt $g - g' \in \mathrm{Ann}(M)$. Es gibt aber treue Darstellungen von Gruppen, die keine treuen $\mathbb{K}[G]$-Moduln sind.[6]

[6] Ein sehr einfaches Beispiel erhält man für $G = \{\pm 1\}$ und $V = \mathbb{K}$.

4.1.5 Quotientenmoduln

Ähnlich wie bei der Konstruktion von Quotientenräumen eines Vektorraums kann man den Quotienten eines Moduls bezüglich eines Untermoduls bilden. Dieser trägt dann wieder eine kanonische R-Modulstruktur (Bemerkung 4.11).

Satz 4.15. *Sei M ein R-Modul, $N \subset M$ ein Untermodul und $\pi\colon M \to M/N$ die kanonische Abbildung. Dann gilt:*

(a) *Auf der abelschen Gruppe M/N existiert genau eine R-Modulstruktur, die $\pi : M \to M/N$ zu einem R-Modulhomomorphismus macht.*

(b) (Universelle Eigenschaft des Quotientenmoduls) *Ist $\varphi : M \to M'$ ein Homomorphismus von R-Moduln, so existiert genau dann ein R-Modulhomomorphismus $\widetilde{\varphi} : M/N \to M'$ mit $\widetilde{\varphi} \circ \pi = \varphi$, wenn $N \subseteq \ker \varphi$ gilt.*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & M' \\ M/N \arrow[ur, "\widetilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Die abelsche Gruppe M/N mit dieser R-Modulstruktur wird als *Quotientenmodul* oder *Faktormodul* bezeichnet.

Beweis. (a) Wir definieren die R-Modulstruktur auf der abelschen Gruppe M/N durch

$$r.[m] := [r.m] \qquad \text{für} \quad r \in R, m \in M,$$

wobei $[m] \in M/N$ die Äquivalenzklasse eines Elements $m \in M$ bezeichnet. Zu zeigen ist, dass dies tatsächlich eine Abbildung $\mu : R \times M/N \to M/N$ definiert, also, dass aus $[m] = [m']$ folgt $[r.m] = [r.m']$. Sind $m, m' \in M$ mit $[m'] = [m]$, so ist $m' - m \in N$, also $r.m' - r.m = r.(m' - m) \in N$ und daher $[r.m'] = [r.m]$. Die Abbildung

$$\mu : R \times M/N \to M/N, \quad (r, [m]) \mapsto r.[m] = [r.m]$$

ist also wohldefiniert.

Dass μ die Bedingungen in Definition 4.4 erfüllt und somit eine R-Modulstruktur auf M/N definiert, ergibt sich direkt aus den entsprechenden Eigenschaften des Moduls M. Dass die kanonische Abbildung $\pi\colon M \to M/N, m \mapsto [m]$ ein R-Modulhomomorphismus ist, folgt direkt aus der Definition. Umgekehrt ist dies die einzige R-Modulstruktur, die diese Eigenschaft hat, denn diese ist durch $r.\pi(m) = \pi(r.m)$ festgelegt.

(b) Sei $\varphi : M \to M'$ ein R-Modulhomomorphismus. Existiert ein Modulhomomorphismus $\widetilde{\varphi}\colon M/N \to M'$ mit $\varphi = \widetilde{\varphi} \circ \pi$, so gilt $\ker \varphi \supseteq \ker \pi = N$. Ist dies umgekehrt der Fall, so ist φ konstant auf den Nebenklassen $m + N$ von N, denn

$$\varphi(m + n) = \varphi(m) + \varphi(n) = \varphi(m) \quad \text{für} \quad m \in M, n \in N.$$

Wir können somit eine Abbildung $\widetilde{\varphi} : M/N \to M'$ durch $\widetilde{\varphi}([m]) = \varphi(m)$ definieren. Dass es sich dabei um einen R-Modulhomomorphismus handelt, folgt direkt aus den entsprechenden Eigenschaften der Abbildung $\varphi : M \to M'$, und es gilt $\widetilde{\varphi} \circ \pi = \varphi$. $\square$

Die Formulierung mittels einer universellen Eigenschaft hat zwei wesentliche Vorteile. Der erste ist, dass sie prägnant zusammenfasst, wobei es in der Konstruktion geht.

Der zweite Vorteil ist, dass die universelle Eigenschaft es einem erlaubt, R-Modulhomomorphismen $M/N \to M'$ durch R-Modulhomomorphismen $M \to M'$ mit $N \subset \ker(\varphi)$ zu beschreiben, was oft einfacher ist als ein Rechnen mit Äquivalenzklassen:

$$\mathrm{Hom}_R(M/N, M') \hookrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, M').$$

In vielen Beweisen wird die konkrete Beschreibung des Quotientenmoduls überhaupt nicht benötigt, und man kommt schneller und eleganter zum Ziel, wenn man die universelle Eigenschaft benutzt.

Beispiele 4.16. (a) Ist $R = \mathbb{K}$ ein Körper und M ein R-Modul, so sind nach Beispiel 4.12 die Untermoduln von M gerade die Untervektorräume, und die Quotientennmoduln entsprechen Quotienten von Vektorräumen.

(b) Ist $R = \mathbb{K}[G]$, so besagt Satz 4.15, dass jede Unterdarstellung $(\rho, N) \subset (\rho, M)$ eine Darstellung der Gruppe G auf dem Quotientenvektorraum M/N definiert (siehe Aufgabe 1.3.8).

(c) Im Fall eines Rings als Links-, Rechts- oder Bimodul über sich selbst besagt Satz 4.15, dass jeder Quotient eines solchen Rings bezüglich eines Links-, Rechts- oder beidseitigen Ideals einen entsprechenden Modul über dem Ring liefert.

Insbesondere hatten wir in Bemerkung 4.11 gezeigt, dass der Kern und das Bild eines R-Modulhomomorphismus $\varphi : M \to N$ Untermoduln $\ker \varphi \subset M$ und $\mathrm{im}\, \varphi \subset N$ sind. Daraus ergibt sich insbesondere die Frage, ob sich die aus der Theorie der Vektorräume bekannte Beziehung zwischen dem Quotienten $M/\ker(\varphi)$ und $\mathrm{im}(\varphi)$ auf Moduln verallgemeinern lässt. Dies zeigt das folgende Lemma:

Lemma 4.17. (Die Noetherschen Homomorphiesätze) [7]

(a) *Sind M, N Moduln über einem Ring R und $\varphi : M \to N$ ein R-Modulhomomorphismus, dann existiert ein kanonischer Isomorphismus $M/\ker(\varphi) \xrightarrow{\sim} \operatorname{im}(\varphi)$.*

(b) *Sind $B \subseteq C \subseteq M$ Untermoduln, so ist C/B ein Untermodul von M/B und es existiert ein kanonischer Isomorphismus*

$$(M/B)/(C/B) \xrightarrow{\sim} M/C.$$

(c) *Sind $A, B \subset M$ Untermoduln, so sind auch $A \cap B$ und $A + B$ Untermoduln von M und es existiert ein kanonischer Isomorphismus*

$$B/(A \cap B) \xrightarrow{\sim} (A + B)/A.$$

Beweis. Diese Aussagen ergeben sich leicht aus der universellen Eigenschaft von Quotientenmoduln (Satz 4.15(b)):

(a) ergibt sich aus der Bijektivität von der induzierten Abbildung $\widetilde{\varphi}\colon M/\ker(\varphi) \to \operatorname{im}(\varphi)$.

Für (b) betrachtet man den surjektiven Homomorphismus $\varphi\colon M/B \to M/C, m + B \mapsto m + C$. Sein Kern ist der Untermodul C/B, so dass (b) aus (a) folgt.

Für (c) betrachtet man den surjektiven Homomorphismus $\varphi\colon B \to (A + B)/A$. Wegen $\ker \varphi = B \cap A$ folgt (c) aus (a). □

Eine weitere interessante Anwendung von Satz 4.15 ergibt sich im Zusammenhang mit Torsionselementen. Im Allgemeinen ist die Menge $\operatorname{tor}_R(M)$ der Torsionselemente kein Untermodul eines Moduls M. Betrachtet man allerdings Moduln über einem Integritätsbereich, so bildet $\operatorname{tor}_R(M)$ einen Untermodul von M, und durch Quotientenbildung erhält man einen torsionsfreien Modul.

Satz 4.18. *Ist M ein Modul über einem Integritätsbereich R, so ist $\operatorname{tor}_R(M)$ ein Untermodul und $M/\operatorname{tor}_R(M)$ ein torsionsfreier R-Modul.*

[7] Auf der Gedenktafel zum Emmy-Noether-Hörsaal H12 findet man die folgenden Formeln aus Emmy Noethers Arbeit [EN27, S. 40]:

$$\overline{\overline{\mathsf{M}}} \simeq \mathsf{M} \mid \mathfrak{A}, \qquad \overline{\mathsf{M}} \mid \overline{\mathfrak{C}} \simeq \mathsf{M} \mid \mathfrak{C}, \qquad \text{und} \qquad (\mathfrak{B}, \mathfrak{A}) \mid \mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B} \mid [\mathfrak{B}, \mathfrak{A}.]$$

Hierbei steht die erste Isomorphie fuer den Isomorphismus $\overline{\overline{\mathsf{M}}} \cong \mathsf{M}/\ker\varphi$ für einen surjektiven Modulhomomorphismus $\varphi\colon \mathsf{M} \to \overline{\overline{\mathsf{M}}}$. Die zweite Isomorphie (bei Noether der "Erste Isomorphiesatz") steht für Untermoduln $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C} \subseteq \mathsf{M}$ und $\overline{\mathsf{M}} := \mathsf{M}/\mathfrak{B}$, $\overline{\mathfrak{C}} := \mathfrak{C}/\mathfrak{B}$ für den Isomorphismus $\mathsf{M}/\mathfrak{C} \cong \overline{\mathsf{M}}/\overline{\mathfrak{C}}$ (Lemma 4.16(b)). In der dritten Isomorphie (dem zweiten Homomorphiesatz) stehen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ für Untermoduln des Moduls M, $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ ist ihr "grösster gemeinsamer Teiler" und $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ ihr "kleinstes gemeinsame Vielfach", so dass wir Lemma 4.16(c) erhalten.

Beweis. (a) Ist m ein Torsionselement von M, dann existiert ein $r \in R \setminus \{0\}$ mit $r.m = 0$. Dann gilt für alle $r' \in R$:

$$0 = r'.(r.m) = (r' \cdot r).m = (r \cdot r').m = r.(r'.m),$$

also ist auch $r'.m$ ein Torsionselement. Sind zwei Torsionselemente $m, m' \in M$ gegeben, dann existieren $r, r' \in R \setminus \{0\}$ mit $r.m = r'.m' = 0$, und es folgt

$$(r \cdot r').(m + m') = (r \cdot r').m + (r \cdot r').m' = r'.(r.m) + r.(r'.m) = 0$$

und wegen der Nullteilerfreiheit von R ist $r \cdot r' \neq 0$. Somit ist $\mathrm{tor}_R(M)$ ein Untermodul von M.

(b) Wir bezeichnen mit $[m]$ die Äquivalenzklasse eines Elements $m \in M$ in $M/\mathrm{tor}_R(M)$. Ist $[m]$ ein Torsionselement, so existiert ein $r \in R \setminus \{0\}$ mit $r.[m] = [r.m] = 0$, und es folgt $r.m \in \mathrm{tor}_R(M)$. Also existiert ein $r' \in R \setminus \{0\}$ mit $r' \cdot (r.m) = (r' \cdot r).m = 0$, und da R ein Integritätsbereich ist, gilt $r \cdot r' \neq 0$. Also folgt $m \in \mathrm{tor}_R(M)$ und somit $[m] = 0$. □

4.2 Konstruktionen mit Moduln

Wir werden nun die systematische Untersuchung der Eigenschaften von Moduln aus dem letzten Abschnitt fortsetzen und uns mit Konstruktionen befassen, die es uns erlauben aus Moduln oder Mengen neue Moduln zu bilden. Zunächst erhalten wir wie im Fall der Vektorräume über Körpern und der Darstellungen von Gruppen einen Begriff von direkten Summen von Moduln, der direkte Summen von Vektorräumen verallgemeinert.

4.2.1 Direkte Summen und Produkte

Definition 4.19. Sei R ein Ring und $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von Moduln. Dann tragen die Mengen

$$\bigoplus_{i \in I} M_i := \Big\{ (m_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} M_i : |\{i \in I \colon m_i \neq 0\}| < \infty \Big\} \quad \text{und} \quad \prod_{i \in I} M_i$$

eine kanonische R-Modulstruktur, die gegeben ist durch

$$(m_i)_{i \in I} + r.(m_i')_{i \in I} := (m_i + r.m_i')_{i \in I}.$$

Wir bezeichnen die so erhaltenen Moduln als die *direkte Summe* der Moduln M_i und als das *direktes Produkt* der Moduln M_i.

Wie auch der Quotient von Moduln lassen sich die direkte Summe und das direkte Produkt von Moduln durch eine universelle Eigenschaft charakterisieren. Die R-Modulstruktur auf $\bigoplus_{i \in I} M_i$ ist gerade dadurch bestimmt, dass sie mit den Inklusionsabbildungen $\eta_j : M_j \to \bigoplus_{i \in I} M_i$ kompatibel ist und es erlaubt aus R-Modulhomomorphismen

$\varphi_i : M_i \to N$ einen R-Modulhomomorphismus $\bigoplus_{i\in I} M_i \to N$ zu konstruieren. Die R-Modulstruktur auf $\prod_{i\in I} M_i$ ist dadurch bestimmt, dass sie mit den Projektionsabbildungen $p_j : \prod_{i\in I} M_i \to M_j$ kompatibel ist und es erlaubt aus R-Modulhomomorphismen $\psi_j : L \to M_j$ einen R-Modulhomomorphismus $\psi : L \to \prod_{i\in I} M_i$ zu konstruieren.

Lemma 4.20. *Sei R ein Ring und $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von R-Moduln. Dann gilt:*

(a) *Die kanonische R-Modulstruktur auf $M := \bigoplus_{i\in I} M_i$ ist die einzige R-Modulstruktur auf M, die die Inklusionsabbildungen $\eta_i : M_i \to M$, $m \mapsto (m\delta_{ij})_{j\in I}$ zu Homomorphismen von R-Moduln macht. Ist $\varphi_i : M_i \to N$ eine Familie von R-Modulhomomorphismen, so existiert genau ein R-Modulhomomorphismus $\varphi : \bigoplus_{i\in I} M_i \to N$ mit $\varphi \circ \eta_i = \varphi_i$ für alle $i \in I$:*

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "\eta_i"'] & N \\ \bigoplus_{j\in I} M_j. \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd} \tag{26}$$

Dies wird als die universelle Eigenschaft der direkten Summe von Moduln bezeichnet und lässt sich prägnant durch die Isomorphie abelscher Gruppen

$$\mathrm{Hom}\Big(\bigoplus_{i\in I} M_i, N\Big) \xrightarrow{\cong} \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(M_i, N), \qquad f \mapsto (f \circ \eta_i)_{i\in I}$$

beschreiben.

(b) *Die kanonische R-Modulstruktur auf $\prod_{i\in I} M_i$ ist die einzige, die die Projektionsabbildungen $p_i : \prod_{i\in I} M_i \to M_i$, $(m_j)_{j\in I} \mapsto m_i$ zu R-Modulhomomorphismen macht. Ist $\psi_i : L \to M_i$ eine Familie von R-Modulhomomorphismen, so existiert genau ein R-Modulhomomorphismus $\psi : L \to \prod_{i\in I} M_i$ mit $p_i \circ \psi = \psi_i$ für alle $i \in I$:*

$$\begin{tikzcd} M_i & L \arrow[l, "\psi_i"'] \arrow[dl, "\psi"] \\ \prod_{j\in I} M_j. \arrow[u, "p_i"] & \end{tikzcd} \tag{27}$$

Dies wird als die universelle Eigenschaft des direkten Produkts von Moduln bezeichnet und lässt sich prägnant durch die Isomorphie abelscher Gruppen

$$\mathrm{Hom}\Big(L, \prod_{i\in I} M_i\Big) \xrightarrow{\cong} \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(L, M_i), \qquad f \mapsto (p_i \circ f)_{i\in I}$$

beschreiben.

Beweis. (a) Dass die angegebene R-Modulstruktur auf M die Inklusionsabbildungen $\eta_i : M_i \to \bigoplus_{j\in I} M_j$ zu R-Modulhomomorphismen macht, folgt durch direktes Nachrechnen. Die Eindeutigkeit ergibt sich aus der Tatsache, dass sich jedes Element von M als *endliche* Summe von Elementen der Form $(m_i\delta_{ij})_{j\in I}$ schreiben lässt, die im Bild der Inklusionsabbildungen $\eta_i : M_i \to M$ liegen. Somit ist die R-Modulstruktur auf M durch die Forderung, dass die Inklusionsabbildungen R-Modulhomomorphismen sind, eindeutig bestimmt.

Ist $\varphi_i : M_i \to N$ eine Familie von R-Modulhomomorphismen, so erhält man durch

$$\varphi((m_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} \varphi_i(m_i)$$

einen R-Modulhomomorphismus $\varphi : \bigoplus_{i\in I} M_i \to N$, denn die Elemente $(m_i)_{i\in I} \in M$ enthalten nur endlich viele nicht verschwindenende Einträge m_j. Also ist die Summe auf der rechten Seite endlich. Direktes Nachrechnen zeigt, dass das Diagramm (26) kommutiert, und da die Bilder der Inklusionsabbildungen $\bigoplus_{i\in I} M_i$ erzeugen, ist φ durch die Forderung, dass das Diagramm kommutiert, eindeutig bestimmt.

(b) Dass die angegebene R-Modulstruktur auf $\prod_{i\in I} M_i$ die Projektionsabbildungen $p_i : \prod_{j\in I} M_j \to M_i$ zu R-Modulhomomorphismen macht, folgt durch direktes Nachrechnen. Andererseits ist die R-Modulstruktur auf $\prod_{i\in I} M_i$ durch die Bilder der Projektionsabbildungen eindeutig bestimmt.

Ist $\psi_i : L \to M_i$ eine Familie von R-Modulhomomorphismen, so erhält man durch

$$\psi(l) = (\psi_i(l))_{i\in I}$$

einen R-Modulhomomorphismus $\psi : L \to \prod_{i\in I} M_i$. Direktes Nachrechnen zeigt, dass das Diagramm (27) kommutiert, und die Forderung, dass das Diagramm kommutiert, bestimmt den R-Modulhomomorphismus $\psi : L \to \prod_{i\in I} M_i$ eindeutig. □

Offensichtlich stimmen die direkte Summe und das direkte Produkt von Moduln für endliche Indexmengen I überein, aber für unendliche Indexmengen ist dies nicht der Fall. Aus dem Beweis von Lemma 4.20 wird deutlich, warum man im Fall der direkten Summe mit Inklusionsabbildungen und im Fall des direkten Produkts mit Projektionsabbildungen arbeiten muss. Im Beweis der universellen Eigenschaft der direkten Summe wird zum Beweis der Eindeutigkeit der R-Modulstruktur und für die Wohldefiniertheit der Abbildung $\varphi : \bigoplus_{i\in I} M_i \to N$ die Tatsache benötigt, dass sich jedes Element von $\bigoplus_{i\in I} M_i$ als *endliche* Summen von Elementen im Bild der Inklusionsabbildungen darstellen lässt. Dies gilt nur für die direkte Summe, nicht aber das direkte Produkt, wo die Bilder der Inklusionsabbildungen lediglich den echten Untermodul $\bigoplus_{i\in I} M_i \subset \prod_{i\in I} M_i$ erzeugen. Umgekehrt lässt sich für den Fall der direkten Summe i.a. kein R-Modulhomomorphismus $L \to \bigoplus_{i\in I} M_i$ wie im Beweis des Lemmas definieren.

Beispiele 4.21. (a) Ist $R = \mathbb{K}$ ein Körper, so entspricht die direkte Summe von $\mathbb{K}$-Moduln gerade der direkten Summe von Vektorräumen und das direkte Produkt von $\mathbb{K}$-Moduln dem direkten Produkt von Vektorräumen (vgl. Abschnitt 2).

(b) Ist G eine Gruppe und $R = \mathbb{K}[G]$, so entspricht die direkte Summe von R-Moduln gerade der direkten Summe von Darstellungen der Gruppe G über $\mathbb{K}$ (vgl. Lemma 4.9).

4.2.2 Erzeuger und Relationen

Wir möchten uns nun mit der Frage befassen, wie sich Moduln über Ringen "konkret" beschreiben lassen, also indem man eine Teilmenge von Elementen eines Moduls angibt, aus der alle anderen Elemente entweder durch Summenbildung oder durch die Operation auf M entstehen. Im Fall von Moduln über Körpern, also Vektorräumen, ist dies bereits bekannt und führt auf den Begriff des Erzeugendensystems, d.h. einer Teilmenge eines Vektorraums, aus der sich alle anderen Elemente durch Bildung von Linearkombinationen zusammensetzen lassen. Ein besonders effizientes Erzeugendensystem ist eine Basis - ein Erzeugendensystem, zwischen dessen Elementen keinerlei lineare Abhängigkeiten mehr bestehen.

Die Begriffe eines Erzeugendensystems und der linearen Abhängigkeit lassen sich leicht auf Moduln verallgemeinern, aber man stellt fest, dass im Allgemeinen keine Basis existieren muss. Dadurch verliert man auch andere hilfreiche Eigenschaften von Vektorräumen, wie beispielsweise die Tatsache, dass zu jedem Untervektorraum $U \subset V$ ein Untervektorraum $U' \subset V$ mit $V = U \oplus U'$ existiert. Man sollte also nicht versuchen, aus der Theorie von Vektorräumen bekannte Beweismethoden unkritisch auf Moduln zu übertragen, sondern sich zunächst überlegen, ob die betreffenden Strukturen für Moduln tatsächlich existieren.

Um die Situation für Moduln zu verstehen, müssen wir uns systematisch mit deren Beschreibung durch Erzeugendensysteme befassen und Begriffe wie lineare Abhängigkeit auf Moduln verallgemeinern. Dies führt auf die folgende Definition.

Definition 4.22. Sei R ein Ring mit Eins.

(a) Für eine Menge S ist der *freie R-Modul* über S definiert als die Menge der Abbildungen

$$R^{(S)} := \{f : S \to R : \ f(s) = 0 \text{ für fast alle}^{8}\ s \in S\}$$

mit der kanonischen R-Modulstruktur

$$(f + r.g)(s) = f(s) + r.g(s) \qquad \text{für} \quad f, g \in R^{(S)}, r \in R, s \in S.$$

(b) Ist $S \subset M$ eine Teilmenge eines R-Moduls M, so ist der *von S erzeugte Untermodul* die Menge

$$\langle S \rangle_R := \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i s_i : n \in \mathbb{N}_0, r_i \in R, s_i \in S \right\} = \sum_{s \in S} Rs$$

mit der induzierten R-Modulstruktur.

[8] Mit "fast alle" meint man hier "alle bis auf endlich viele".

(c) Für eine Familie von Untermoduln $(M_i)_{i\in I}$ eines R-Moduls M ist die *Summe* der Untermoduln M_i der von ihrer Vereinigung erzeugte Untermodul:

$$\sum_{i\in I} M_i := \Big\langle \bigcup_{i\in I} M_i \Big\rangle_R .$$

Die Summe $\sum_{i\in I} M_i$ ist das Bild der direkten Summe $\bigoplus_{i\in I} M_i$ unter der Summationsabbildung $\varphi : \bigoplus_{i\in I} M_i \to M, (m_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} m_i$. Ist φ injektiv, so ist $\sum_{i\in I} M_i \cong \bigoplus_{i\in I} M_i$, und jedes Element von $\sum_{i\in I} M_i$ lässt sich eindeutig als Summe von Elementen $m_i \in M_i$ schreiben. Man bezeichnet die Summe $\sum_{i\in I} M_i$ dann als *innere direkte Summe*.

(d) Eine Teilmenge $S \subset M$ heißt *Erzeugendensystem* von M, wenn $\langle S\rangle_R = M$ gilt. Ein Erzeugendensystem von M heißt *Basis* von M, wenn es *linear unabhängig* ist:

$$(\forall (r_s)_{s\in S} \in R^{(S)}) \quad \sum_{s\in S} r_s.s = 0 \quad \Rightarrow \quad (\forall s \in S)\ r_s = 0,$$

d.h., wenn der surjektive Modul-Homomorphismus

$$R^{(S)} \to M, \quad (r_s)_{s\in S} \mapsto \sum_{s\in S} r_s.s$$

injektiv ist. Dann gilt insbesondere $M \cong R^{(S)}$.

Ein R-Modul M heißt

- *endlich erzeugt*, wenn er ein endliches Erzeugendensystem besitzt,
- *zyklisch*, wenn er ein Erzeugendensystem besitzt, das aus einem einzigen Element besteht, und
- *frei*, wenn er eine Basis besitzt.

(e) Für eine Teilmenge $B \subset R^{(S)}$ des von S erzeugten freien Moduls bezeichnen wir mit $\langle S|B\rangle_R$ den Quotientenmodul $R^{(S)}/\langle B\rangle_R$. Ist $M \cong \langle S|B\rangle_R$, so nennt man $\langle S|B\rangle_R$ eine *Präsentation* des R-Moduls M. Die Elemente von S heißen dann *Erzeuger* und die Elemente von B *Relationen*.

Bemerkung 4.23. (a) Da für einen unitalen Ring R jeder R-Modul ein Erzeugendensystem S besitzt (z.B. $S = M$), gibt es einen surjektiven Homomorphismus $R^{(S)} \twoheadrightarrow M$, so dass $M \cong R^{(S)}/N$ für einen Untermodul $N \subseteq R^{(S)}$ gilt. Daraus folgt, dass jeder Modul eine Präsentation besitzt. Ist M ein endlich erzeugter Modul mit m Erzeugern, so erhalten wir sogar $M \cong R^m/N$. Die Präsentation eines Moduls ist nicht eindeutig— man kann einen gegebenen Modul auf viele verschiedene Weisen als Quotienten von freien Moduln darstellen. In der Praxis bemüht man sich, mit möglichst wenigen Erzeugern und Relationen auszukommen.

(b) Ist M ein R-Modul und $S \subset M$ eine Teilmenge, so ist der von S erzeugte Untermodul der kleinste Untermodul von M, der S enthält:

$$\langle S\rangle_R = \bigcap_{N\subset M \text{ Untermodul}, S\subset N} N.$$

(c) Ist R unital, so ist eine Teilmenge $S \subset M$ genau dann eine *Basis von M*, wenn die natürliche Abbildung $R^{(S)} \to M, (r_s)_{s\in S} \mapsto \sum_{s\in S} r_s.s$ ein Isomorphismus ist. Insbesondere bilden die Deltafunktionen $\delta_s : S \to R$ mit $\delta_s(t) = \delta_{st}\mathbf{1}_R$ eine Basis des freien R-Moduls $R^{(S)}$.

(d) Ist M frei und endlich erzeugt, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $M \cong R^n$: Aus der Freiheit folgt zunächst $M \cong R^{(S)}$ für eine Menge S. Ist $x_1, \ldots, x_m$ ein endliches Erzeugendensystem, so hat jedes x_j nur endlich viele von 0 verschiedene Komponenten. Also existiert eine endliche Teilmenge $F \subseteq S$ mit $x_j \in R^{(F)}$ für alle j. Dann ist $R^{(S)} \subseteq R^{(F)}$, das ist aber für $R \neq \{0\}$ nur dann möglich, wenn $F = S$ ist. Ist $R = \{0\}$, so ist sowieso nichts zu zeigen.

(e) Ist R unital, so lässt sich auch die Präsentation/Freiheit von Moduln durch eine *universelle Eigenschaft* charakterisieren. Sei hierzu S ein Erzeugendensystem des R-Moduls M sowie N ein weiterer R-Modul und $f\colon S \to N$ eine Abbildung. Dann existiert zunächst genau ein R-Modulhomomorphismus $\pi : R^{(S)} \to M$ mit $\pi(\delta_s) = s$ für all $s \in S$. Wir erhalten also für $B := \ker\pi$ eine Darstellung $M \cong R^{(S)}/B \cong \langle S|B\rangle_R$ von M durch die Erzeugendenmenge S und die Relationenmenge B. Zu f finden wir dann genau einen Modulhomomorphismus $\widetilde{f}\colon R^{(S)} \to N$ mit $\widetilde{f}\circ\eta = f$, wobei $\eta : S \to R^{(S)}$, $s \mapsto \delta_s$ die Inklusionsabbildung bezeichnet. Aus der universellen Eigenschaft der Quotientenmoduln folgt dann, dass genau dann ein R-Modulhomomorphismus $\widehat{f} : M \cong \langle S|B\rangle_R \to N$ mit $\widehat{f}|_S = f$ existiert, wenn $B \subset \ker(\widetilde{f})$ gilt. Das bedeutet, dass für jede Relation $\sum_{s\in S} r_s.s = 0$ in M auch $\sum_{s\in S} r_s.f(s) = 0$ in N gilt.

(f) Man beachte, dass für eine Teilmenge $S \subset M$ eines R-Moduls M der von S erzeugte freie Modul $R^{(S)}$ und der von S erzeugte Untermodul $\langle S\rangle_R \subset M$ im allgemeinen nicht isomorph sind. Die erste Konstruktion liefert einen freien Modul, wärend die zweite Konstruktion einen Untermodul von M definiert, der im allgemeinen nicht frei ist. Betrachtet man beispielweise den $\mathbb{Z}$-Modul $M = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, so ist der von der Teilmenge $S = \{\overline{2}\} \subset M$ erzeugte freie Modul isomorph zu $\mathbb{Z}$, während der von S erzeugte Untermodul $\langle S\rangle_{\mathbb{Z}} = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist.

Beispiel 4.24. (a) Jeder unitale Ring R ist ein zyklischer freier Modul als Links- oder Rechtsmodul über sich selbst, denn es gilt $\langle\mathbf{1}\rangle_R = R$ und aus $r \cdot \mathbf{1} = 0$ oder $\mathbf{1} \cdot r = 0$ folgt $r = 0$.

(b) Im allgemeinen ist nicht jeder Modul frei. Ein Gegenbeispiel ist $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}$-Modul, denn jeder freie $\mathbb{Z}$-Modul $M \neq \{0\}$ ist unendlich.

(c) Eine Präsentation des $\mathbb{Z}$-Moduls $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist gegeben durch

$$\langle A \,|\, B\rangle_{\mathbb{Z}} = \langle 1|2\rangle_{\mathbb{Z}},$$

denn der von der Menge $A = \{1\}$ erzeugte freie Modul ist isomorph zu $\mathbb{Z}$, und der von $B = \{2\} \subset \mathbb{Z}^{(A)}$ erzeugte Untermodul $\langle B\rangle = 2\mathbb{Z}$ enthält die geraden Zahlen. Der Quotient ist also gegeben durch

$$\langle A|B\rangle_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Bemerkung 4.25. (a) Ist $R = \mathbb{K}$ ein Körper, so ist jeder Modul über $\mathbb{K}$ ein freier Modul, denn ein Modul über $\mathbb{K}$ ist ein Vektorraum, und jeder Vektorraum besitzt eine Basis. Dieser Sachverhalt lässt sich mit den gleichen Argumenten auf Schiefkörper verallgemeinern (Aufgabe 4.2).

(b) Da abelsche Gruppen nichts anderes als $\mathbb{Z}$-Moduln sind, erhalten wir aus Definition 4.22 insbesondere die Konzepte einer Präsentation einer abelschen Gruppe durch Erzeuger und Relationen, einer freien abelschen Gruppe sowie eines Erzeugendensystems und einer Basis für abelsche Gruppen.

Wir untersuchen nun, welche der aus der Theorie von Vektorräumen bekannten Aussagen über Basen und Erzeugendensysteme sich auf Moduln bzw. freie Moduln verallgemeinern lassen. Eine offensichtliche Frage ist zunächst, ob zumindest für freie Moduln ein Dimensionsbegriff existiert, also alle Basen eines freien Moduls gleich viele Elemente besitzen. Dies ist in der Tat der Fall, wenn man sich auf kommutative Ringe beschränkt.

Satz 4.26. *Ist R ein kommutativer Ring mit Eins und M ein freier R-Modul, dann haben zwei Basen B, C von M stets die gleiche Kardinalität, d.h. es gibt eine bijektive Abbildung $f\colon B \to C$.*

Die Anzahl der Elemente in einer Basis von M wird als *Rang* von M und mit $\mathrm{rang}(M)$ bezeichnet, also $\mathrm{Rang}(R^{(S)}) = |S|$.

Beweis. Die Beweisidee ist es, diese Aussage mittels Quotientenbildung bezüglich maximaler Ideale auf die entsprechende Aussage für Vektorräume zurückzuführen. Sei dazu $\mathfrak{a} \subset R$ ein maximales Ideal, d.h. ein Ideal, so dass kein Ideal $\mathfrak{b} \subset R$ mit $\mathfrak{a} \subsetneq \mathfrak{b} \subsetneq R$ existiert (Existenz folgt aus dem Zornschen Lemma; Aufgabe 4.3). Dann ist $\mathbb{K} := R/\mathfrak{a}$ ein Körper, die Menge

$$\mathfrak{a}.M = \mathrm{span}_{\mathbb{Z}}\{a.m : \ a \in \mathfrak{a}, m \in M\}$$

ist ein Untermodul von M und der Quotient $M/\mathfrak{a}.M$ ein Vektorraum über $\mathbb{K}$.

Da M frei ist, dürfen wir $M = R^{(S)}$ für eine Menge S annehmen. Dann ist $\mathfrak{a}.M = \mathfrak{a}^{(S)}$ und daher

$$M/\mathfrak{a}.M = R^{(S)}/\mathfrak{a}^{(S)} \cong \mathbb{K}^{(S)}$$

der freie $\mathbb{K}$-Vektorraum über der Menge S. Wir erhalten insbesondere

$$|S| = \dim_{\mathbb{K}}(M/\mathfrak{a}.M).$$

Da je zwei Basen des Vektorraums $\mathbb{K}^{(S)}$ die Kardinalität $|S|$ haben, folgt hieraus die Behauptung. Wir haben die Aussage also auf die analoge Aussage für Basen von Vektorräumen über Körpern zurückgeführt, die auch für unendlichdimensionale Vektorräume gilt, wenn man mit Mächtigkeiten von Mengen (Kardinalzahlen) arbeitet und den Satz von Cantor–Bernstein–Schröder verwendet, der aus der Existenz von injektiven Abbildungen $A \to B \to A$ die Existenz einer Bijektion $A \to B$ liefert. $\square$

Bemerkung 4.27. Für nichtkommutative Ringe folgt im allgemeinen aus der Isomorphie $R^n \cong R^m$ als Linksmoduln über sich selbst nicht $n = m$. Ein Gegenbeispiel ist der Nullring mit $\{0\}^n = \{0\}^m$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Ein interessanteres Beispiel ist der Ring $R = \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ für einen unendlich dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum (siehe Aufgabe 4.16).

Eine weitere naheliegende Frage ist, unter welchen Voraussetzungen ein Untermodul $N \subset M$ eines R-Moduls M ein Komplement besitzt, d.h. ein Untermodul $N' \subset M$ mit $M \cong N \oplus N'$ existiert. Im Fall von Vektorräumen über Körpern ist dies stets der Fall, wie man durch Benutzung von Basen zeigen kann. Im Fall von Moduln existiert im allgemeinen keine Basis, und man muss solche Komplemente auf anderen Wegen konstruieren sofern sie überhaupt existieren. Eine Möglichkeit ist es, hierzu Kerne und Bilder von R-Modulhomomorphismen zu betrachten. Ist ein gegebener Untermodul $N \subset M$ Kern eines R-Modulhomomorphismus $\varphi : M \to F$ in einen freien Modul F, so kann man unter Benutzung einer Basis von F versuchen, ein Komplement zu N als Bild eines R-Modulhomomorphismus $\psi : F \to M$ zu konstruieren. Das führt auf das wichtige Konzept eines spaltenden R-Modulhomomorphismus.

Satz 4.28. *Sei R ein Ring mit Eins, M ein R-Modul, F ein freier R-Modul und $\varphi : M \to F$ ein surjektiver R-Modulhomomorphismus. Dann existiert ein R-Modulhomomorphismus $\psi : F \to M$, so dass $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_F$ und $M \cong \mathrm{im}(\psi) \oplus \ker(\varphi)$.*

Man sagt, dass ψ den R-Modulhomomorphismus φ *spaltet*.

Beweis. Sei $(q_j)_{j \in J}$ eine Basis des freien R-Moduls F. Wir wählen Elemente $m_j \in M$ mit $\varphi(m_j) = q_j$ und erhalten so einen Modulhomomorphismus

$$\psi\colon F \to M, \quad \sum_{j \in J} r_j.q_j \mapsto \sum_{j \in J} r_j.m_j$$

mit $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_F$. Weiter erhalten wir einen Modulhomomorphismus

$$\Phi\colon \ker \varphi \oplus F \to M, \quad (n, q) \mapsto n + \psi(q).$$

Ist $\Phi(n, q) = 0$, so ist $\psi(q) = -n \in \ker\varphi$ und daher $q = \varphi(\psi(q)) = \varphi(-n) = 0$, und daher auch $n = 0$. Daher ist Φ injektiv. Da der Untermodul $\mathrm{im}(\Phi) = \ker\varphi + \psi(F)$ wegen $\varphi(\mathrm{im}(\Phi)) = \varphi(\psi(F)) = F$ alle Nebenklassen von $\ker\varphi$ enthält, stimmt er mit M überein. Also ist Φ auch surjektiv und damit ein Isomorphismus. □

Aus diesem Satz erhält man insbesondere eine Aussage über die Komplemente von Untermoduln $N \subset M$, für die der Quotient M/N die Struktur eines freien Moduls hat. Denn in diesem Fall kann man den surjektiven R-Modulhomomorphismus $\pi : M \to M/N$ betrachten und einen R-Modulhomomorphismus $\psi : M/N \to M$ konstruieren, der π spaltet.

Korollar 4.29. *Ist M ein R-Modul und $N \subset M$ ein Untermodul, so dass der Quotientenmodul M/N ein freier Modul ist, so existiert ein Untermodul $N' \subset M$ mit $N' \cong M/N$ und $M \cong N' \oplus N$.*

Beweis. Die kanonische Abbildung $M \to M/N$, $m \mapsto [m]$ ist ein surjektiver R-Modulhomomorphismus. Mit Satz 4.28 folgt, dass ein R-Modulhomomorphismus $\psi : M/N \to M$ existiert mit $\pi \circ \psi = \mathrm{id}_{M/N}$ und $M \cong \mathrm{im}(\psi) \oplus \ker(\pi) = \mathrm{im}(\psi) \oplus N$. Wir können also den Untermodul $N' = \mathrm{im}(\psi)$ wählen. Per Definition ist $\pi|_{N'} : N' \to M/N$ surjektiv, und wegen $\pi \circ \psi = \mathrm{id}_{M/N}$ ist $\pi|_{N'}$ injektiv. Also ist $\pi|_{N'} : N' \to M/N$ ein Isomorphismus. □

4.2.3 Tensorprodukte

Wir werden nun eine weitere wichtige Konstruktion für Moduln kennenlernen, die es uns erlaubt, aus zwei gegebenen Moduln über R eine abelsche Gruppe zu konstruieren, nämlich das Tensorprodukt von Moduln. Man beachte, dass man so im allgemeinen lediglich eine abelsche Gruppe, aber keinen R-Modul erhält. Wie auch im Fall der direkten Summen werden wir sowohl eine konkrete Definition als auch eine Charakterisierung mittels einer universellen Eigenschaft angeben. Für ersteres benötigen wir die die Beschreibung von Moduln durch Erzeuger und Relationen.

Definition 4.30. Sei R ein Ring, M ein Rechtsmodul und N ein Linksmodul über R. In der freien abelschen Gruppe $\mathbb{Z}^{(M\times N)}$ betrachten wir die Untergruppe B, die von den Elementen der Gestalt

$$\delta_{(m,n)} + \delta_{(m',n)} - \delta_{(m+m',n)}, \qquad \delta_{(m,n)} + \delta_{(m,n')} - \delta_{(m,n+n')}, \qquad \delta_{(m.r,n)} - \delta_{(m,r.n)}$$

für $m, m' \in M, n, n' \in N, r \in R$, erzeugt wird. Wir definieren das *Tensorprodukt* der Moduln M, N durch

$$M \otimes_R N := \mathbb{Z}^{(M\times N)}/B.$$

Ist $\pi\colon \mathbb{Z}^{(M\times N)} \to M \otimes_R N$ die Quotientenabbildung, so setzen wir

$$m \otimes n := \pi(\delta_{(m,n)}).$$

Bemerkung 4.31. (a) Offensichtlich bilden die Elemente $m \otimes n$ mit $m \in M$, $n \in N$ ein Erzeugendensystem der abelschen Gruppe $M \otimes_R N$, denn die kanonische Abbildung $\pi\colon \mathbb{Z}^{(M\times N)} \to M \otimes_R N$ ist surjektiv, und die Funktionen $\delta_{(m,n)}$ bilden ein Erzeugendensystem von $\mathbb{Z}^{(M\times N)}$. Jedes Element von $M \otimes N$ lässt sich als endliche Summe $\sum_{i=1}^k m_i \otimes n_i$ mit $m_i \in M$, $n_i \in N$ schreiben. Wir können $M \otimes_R N$ als die von der Menge $M \times N$ erzeugte abelschen Gruppe mit Relationen auffassen, die durch die Erzeuger von B spezifiziert werden: $M \otimes_R N \cong \langle M \times N | B\rangle_{\mathbb{Z}}$.

(b) Wir können die Relationen in Definition 4.30 auch als Rechenregeln in $M \otimes_R N$ auffassen:

$$\begin{aligned}(m+m')\otimes n &= m\otimes n + m'\otimes n,\\ m\otimes (n+n') &= m\otimes n + m\otimes n',\\ (m.r)\otimes n &= m\otimes (r.n) \qquad \text{für} \quad m,m'\in M, n,n'\in N, r\in R.\end{aligned}$$

(c) Da jeder R-Modul eine abelsche Gruppe ist, also ein $\mathbb{Z}$-Modul, kann man für beliebige Moduln Tensorprodukte über $\mathbb{Z}$ bilden. In diesem Fall ergibt sich die letzte Relation, $(m.r) \otimes n = m \otimes (r.n)$ für $r \in \mathbb{Z}$, als Folge der ersten beiden.

Wie der Begriff des Quotientenmoduls und der direkten Summe von Moduln lässt sich auch das Tensorprodukt von Moduln entweder durch eine konkrete Konstruktion wie in Definition 4.30 oder durch eine universelle Eigenschaft beschreiben. Dies ist jedoch etwas weniger offensichtlich als in den vorherigen Beispielen und benötigt den Begriff einer R-bilinearen Abbildung.

Definition 4.32. Sei R ein Ring, M ein R-Rechtsmodul, N ein R-Linksmodul und A eine abelsche Gruppe. Eine Abbildung $f : M \times N \to A$ heißt *R-bilinear*, wenn für alle $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ und $r \in R$ gilt:

$$\begin{aligned}f(m+m',n) &= f(m,n) + f(m',n),\\ f(m,n+n') &= f(m,n) + f(m,n'),\\ f(m.r,n) &= f(m,r.n).\end{aligned}$$

Satz 4.33. *Sei R ein Ring, M ein R-Rechtsmodul und N ein R-Linksmodul. Dann gilt:*
(a) *Die Abbildung $\otimes : M \times N \to M \otimes_R N$ ist R-bilinear.*

(b) (*Universelle Eigenschaft des Tensorprodukts*) *Ist A eine abelsche Gruppe und $f : M \times N \to A$ eine R-bilineare Abbildung, so existiert genau ein Gruppenhomomorphismus $\widehat{f} : M \otimes_R N \to A$, so dass das folgende Diagramm kommutiert*

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\otimes"] & A . \\ M \otimes_R N \arrow[ur, "\widehat{f}"'] & \end{tikzcd}$$

(c) *Das Paar* $(M \otimes_R N, \otimes)$ *ist im folgenden Sinne eindeutig bestimmt: Sei* B *eine abelsche Gruppe und* $\beta\colon M \times N \to B$ *eine* R*-bilineare Abbildung, so dass für jede* R*-bilineare Abbildung* $f\colon M \times N \to A$ *in eine abelsche Gruppe* A *genau ein Homomorphismus* $\widehat{f}\colon B \to A$ *mit* $\widehat{f} \circ \beta = f$ *existiert. Dann existiert genau ein Isomorphismus abelscher Gruppen* $\Phi\colon M \otimes_R N \to B$ *mit* $\Phi \circ \otimes = \beta$.

Beweis. (a) Dies gilt per Definition: die Relationen in Definition 4.30 sind gerade so gewählt, dass diese Bedingung erfüllt ist.

(b) Ist $f : M \times N \to A$ eine R-bilineare Abbildung, dann erhalten wir einen Gruppenhomomorphismus $\widetilde{f} : \mathbb{Z}^{(M\times N)} \to A$ durch $\widetilde{f}(\delta_{(m,n)}) := f(m,n)$ und additive Fortsetzung. Da es sich bei den Elementen $\delta_{(m,n)}$ um ein Erzeugendensystem der abelschen Gruppe $\mathbb{Z}^{(M\times N)}$ handelt, ist diese Abbildung dadurch eindeutig bestimmt. Da f bilinear ist, gilt

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}(\delta_{(m+m',n)}) &= f(m+m',n) = f(m,n) + f(m',n) = \widetilde{f}(\delta_{(m,n)} + \delta_{(m',n)})\\
\widetilde{f}(\delta_{(m,n+n')}) &= f(m,n+n') = f(m,n) + f(m,n') = \widetilde{f}(\delta_{(m,n)} + \delta_{(m,n')})\\
\widetilde{f}(\delta_{(m.r,n)}) &= f(m.r,n) = f(m,r.n) = \widetilde{f}(\delta_{(m,r.n)}).
\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass die Abbildung $\widetilde{f}$ zu einem Homomorphismus $\widehat{f}\colon M \otimes_R N \to A$ mit $\widehat{f} \circ \otimes = f$ faktorisiert. Die Eindeutigkeit von $\widehat{f}$ folgt aus der Tatsache, dass die abelsche Gruppe $M \otimes_R N$ von $\operatorname{im}(\otimes)$ erzeugt wird.

(c) Wir argumentieren wie bei der Eindeutigkeit der Tensorprodukte von Vektorräumen. Wegen (b) existiert zunächst ein Homomorphismus abelscher Gruppen $\Phi\colon M \otimes_R N \to B$ mit $\Phi \circ \otimes = \beta$. Weiter existiert ein Homomorphismus abelscher Gruppen $\Psi\colon B \to M \otimes_R N$ mit $\Psi \circ \beta = \otimes$. Dann ist $\Psi \circ \Phi \in \operatorname{End}(M \otimes_R N)$ mit $(\Psi \circ \Phi) \circ \otimes = \otimes$, so dass $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{M \otimes_R N}$ aus der Eindeutigkeit unter (b) folgt. Analog erhalten wir $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_B$. Also ist Φ ein Isomorphismus. □

Die Implikationen der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts lassen sich sehr gut anhand eines Beispiels studieren, nämlich der Konstruktion von Gruppenhomomorphismen $M \otimes_R N \to M' \otimes_R N'$ aus R-Modulhomomorphismen $M \to M'$, $N \to N'$.

Beispiel 4.34. (Tensorprodukte von Modulhomomorphismen) Sei R ein Ring mit Eins, M, M' R- Rechtsmoduln, N, N' R-Linksmoduln sowie $\varphi : M \to M'$ ein Homomorphismus von R-Rechtsmoduln und $\psi : N \to N'$ ein Homomorphismus von R-Linksmoduln. Dann ist $\otimes \circ (\varphi \times \psi) : M \times N \to M' \otimes_R N'$ eine R-bilineare Abbildung, und es existiert wegen der universellen Eigenschaft somit ein eindeutig bestimmer Homomorphismus abelscher Gruppen $\varphi \otimes \psi : M \otimes_R N \to M' \otimes_R N'$ mit

$$(\varphi \otimes \psi)(m \otimes n) = \varphi(m) \otimes \varphi(n) \qquad \text{für} \quad m \in M, n \in N.$$

Dieser wird als *Tensorprodukt* der R-Modulhomomorphismen φ und ψ bezeichnet. Da $\otimes$ additiv in beiden Argumenten ist, folgen die Identitäten:

$$(\varphi_1 + \varphi_2) \otimes \psi = \varphi_1 \otimes \psi + \varphi_2 \otimes \psi, \qquad \varphi \otimes (\psi_1 + \psi_2) = \varphi \otimes \psi_1 + \varphi \otimes \psi_2$$

für alle R-Rechtsmodulhomomorphismen $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 : M \to M'$ und R-Linksmodulhomomorphismen $\psi, \psi_1, \psi_2 : N \to N'$.

Bemerkung 4.35. (a) Ist M ein R-Rechtsmodul und N ein (R, S)-Bimodul, so hat die abelsche Gruppe $M \otimes_R N$ auch die Struktur eines S-Rechtsmoduls, die durch

$$(m \otimes n).s := m \otimes (n.s)$$

gegeben ist. Die Existenz der Abbildungen

$$\rho_s\colon M \otimes_R N \to M \otimes_R N \quad \text{mit} \quad \rho_s(m \otimes n) = m \otimes n.s \quad \text{für} \quad m \in M, n \in N, s \in S$$

erhalten wir aus der universellen Eigenschaft von $M \otimes_R N$, denn wegen

$$m.r \otimes n.s = m \otimes r.(n.s) = m \otimes (r.n).s$$

ist die Abbildung $f\colon M \times N \to M \otimes_R N, (m, n) \mapsto m \otimes n.s$ R-bilinear, faktorisiert also zu einer Abbildung ρ_s. Dass man so die Struktur eines S-Moduls auf $M \otimes_R N$ erhält, rechnet man sofort nach.

(b) Analog ist für einen (Q, R)-Bimodul M und einen R-Linksmodul N das Tensorprodukt $M \otimes_R N$ ein Q-Linksmodul mit $q.(m \otimes n) := (q.m) \otimes n$, und für einen (Q, R)-Bimodul M und einen (R, S)-Bimodul N trägt $M \otimes_R N$ die Struktur eines (Q, S)-Bimoduls. Insbesondere besitzt für einen kommutativen Ring R das Tensorprodukt zweier R-Moduln eine kanonische R-Modulstruktur.

Beispiele 4.36. (a) Ist R ein Ring mit Eins und $R^k := R \oplus R \oplus \ldots \oplus R$ dessen k-fache direkte Summe, dann gilt $R^m \otimes R^n \cong R^{nm}$.

Allgemeiner gilt für nichtleere Mengen S, T die Beziehung

$$R^{(S)} \otimes_R R^{(T)} \cong R^{(S \times T)}.$$

Diese Isomorphie verifiziert man, indem man zeigt, dass der kanonische Gruppenhomomorphismus

$$\varphi\colon R^{(S \times T)} \to R^{(S)} \otimes_R R^{(T)}, \quad \sum_{s,t} f(s,t)\delta_{(s,t)} \mapsto \sum_{s,t} f(s,t)\delta_s \otimes \delta_t$$

zu dem Homomorphismus

$$\psi\colon R^{(S)} \otimes_R R^{(T)} \to R^{(S \times T)},$$

den man durch Faktorisierung der R-bilinearen Abbildung

$$\widetilde{\psi}\colon R^{(S)} \times_R R^{(T)} \to R^{(S \times T)}, \quad \Big(\sum_s f(s)\delta_s, \sum_t h(t)\delta_t\Big) \mapsto \sum_{s,t} f(s)h(t)\delta_{(s,t)}$$

erhält, invers ist.

(b) Ist R ein kommutativer Ring und bezeichnet $R[X_1, \dots, X_n]$ den Polynomring über R in den Variablen $X_1, \dots, X_n$, so gilt

$$R[X] \otimes_R R[Y] \cong R[X, Y].$$

Die lässt sich aus (a) ableiten, da $R[X] \cong R[Y] \cong R^{(\mathbb{N}_0)}$ und $R[X, Y] \cong R^{(\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0)}$.

(c) Das Tensorprodukt der $\mathbb{Z}$-Moduln $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ für $n, m \in \mathbb{N}$ ist gegeben durch

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/\mathrm{ggT}(m, n)\mathbb{Z},$$

wobei $\mathrm{ggT}(m, n)$ den größten gemeinsamen Teiler von m und n bezeichnet.

Um das einzusehen, sei $d := \mathrm{ggT}(m, n)$. Wir betrachten die biadditive (=$\mathbb{Z}$-bilineare) Abbildung

$$\beta\colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, \quad (\overline{a}, \overline{b}) \mapsto \overline{ab}.$$

Wir zeigen, dass diese Abbildung die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts besitzt. Sei dazu $f\colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to A$ biadditiv und $g(a) := f(\overline{a}, \overline{1})$. Dann ist $g\colon \mathbb{Z} \to A$ additiv und $g(n) = 0$. Ebenso ist $g(m) = f(\overline{m}, \overline{1}) = f(\overline{1}, \overline{m}) = 0$, also $\ker g \supseteq \mathbb{Z}m + \mathbb{Z}n = \mathbb{Z}d$. Wir erhalen also einen Homomorphismus $\overline{g}\colon \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \to A, a \mapsto g(a)$ mit

$$\overline{g}(\overline{ab}) = g(ab) = f(\overline{ab}, \overline{1}) = f(\overline{a}, \overline{b}).$$

Also hat $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, \beta)$ die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts und wir erhalten mit Satz 4.33 die Behauptung.

(d) Es gilt $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \{0\}$, denn für alle $k, n \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{Q}$ ergibt sich:

$$\overline{k} \otimes q = \overline{k \cdot n} \otimes \frac{q}{n} = \overline{0} \otimes \frac{q}{n} = 0.$$

Allgemein gilt: Ist R ein Integritätsbereich, so vernichtet Tensorieren eines R-Moduls M mit dem Quotientenkörper des Integritätsbereichs R die Torsionselemente in M (Aufgabe 4.17).

Wir erfassen nun noch systematisch die wesentlichen Eigenschaften des Tensorprodukts.

Satz 4.37. (Eigenschaften des Tensorprodukts) *Seien R, S Ringe mit Eins, I eine Indexmenge, M, M_i R-Rechtsmoduln, N, N_i R-Linksmoduln für alle $i \in I$, P ein (R, S)-Bimodul und Q ein S-Linksmodul. Dann gilt:*

(a) $0 \otimes_R N \cong M \otimes_R 0 \cong 0$.

(b) $M \otimes_R R \cong M$, $R \otimes_R N \cong N$.

(c) $\left(\bigoplus_{i \in I} M_i\right) \otimes_R N \cong \bigoplus_{i \in I} M_i \otimes_R N$, $M \otimes_R \left(\bigoplus_{i \in I} N_i\right) \cong \bigoplus_{i \in I} M \otimes_R N_i$

(d) $(M \otimes_R P) \otimes_S Q \cong M \otimes_R (P \otimes_S Q)$,

wobei es sich jeweils um Isomorphismen von abelschen Gruppen handelt.

Beweis. (a) Dies folgt direkt aus $0 \otimes n = 0 \otimes 0 \cdot n = 0 \otimes 0$ für $n \in N$.

(b) Der Gruppenhomomorphismus $M \to M \otimes_R R$, $m \mapsto m \otimes 1$ hat die Umkehrabbildung $M \otimes_R R \to M$, $m \otimes r \mapsto m.r$ (Existenz aus der universellen Eigenschaft) und ist daher ein Isomorphismus. Der Beweis für $R \otimes_R N \cong N$ ist analog.

(c) Wir bezeichnen mit $\eta_i : M_i \to \bigoplus_{i \in I} M_i$ und $j_i : M_i \otimes_R N \to \bigoplus_{i \in I} M_i \otimes_R N$ die Inklusionsabbildungen und betrachten für $i \in I$ die Gruppenhomomorphismen

$$\varphi_i = \eta_i \otimes \mathrm{id}_N : M_i \otimes_R N \to \Big(\bigoplus_{i \in I} M_i\Big) \otimes_R N, \qquad \varphi_i(m_i \otimes n) = \eta_i(m_i) \otimes n.$$

Gemäß der universellen Eigenschaft der direkten Summe definiert dies einen eindeutig bestimmten Gruppenhomomorphismus $\varphi : \bigoplus_{i \in I}(M_i \otimes_R N) \to \big(\bigoplus_{i \in I} M_i\big) \otimes_R N$. Die Umkehrabbildung $\psi : \big(\bigoplus_{i \in I} M_i\big) \otimes_R N \to \bigoplus_{i \in I} M_i \otimes_R N$ von φ erhalten wir mit der universellen Eigenschaft durch Faktorisierung der R-bilinearen Abbildung

$$\widetilde{\psi} \colon \Big(\bigoplus_{i \in I} M_i\Big) \times N \to \bigoplus_{i \in I} M_i \otimes_R N, \quad \widetilde{\psi}\Big(\Big(\sum_{i \in J} \eta_i(m_i)\Big), n\Big) = \sum_{i \in J} j_i(m_i \otimes n).$$

Also handelt es sich bei φ um einen Isomorphismus. Der Beweis der Identität $M \otimes_R \big(\bigoplus_{i \in I} N_i\big) \cong \bigoplus_{i \in I} M \otimes_R N_i$ ist analog.

(d) Die abelsche Gruppe $M \otimes_R P$ hat eine kanonische S-Rechtsmodulstruktur mit $(m \otimes p).s = m \otimes (p.s)$ und die abelsche Gruppe $(P \otimes_S Q)$ eine R-Linksmodulstruktur mit $r.(p \otimes q) = (r.p) \otimes q$.

Wir betrachten zunächst die Abbildung

$$f \colon M \times P \times Q \to M \otimes_R (P \otimes_S Q), \quad f(m, p, q) := m \otimes (p \otimes q).$$

Sie ist additiv in jedem Argument. Für $r \in R$ erhalten wir

$$f(m.r, p, q) = m.r \otimes (p \otimes q) = m \otimes r.(p \otimes q) = m \otimes (r.p \otimes q) = f(m, r.p, q)$$

Wir erhalten daher eine Abbildung

$$\widetilde{f} \colon (M \otimes_R P) \times Q \to M \otimes_R (P \otimes_S Q) \quad \text{mit} \quad \widetilde{f}(m \otimes p, q) = m \otimes (p \otimes q).$$

Für $s \in S$ ist nun

$$\widetilde{f}((m \otimes p).s, q) = \widetilde{f}(m \otimes p.s, q) = m \otimes (p.s \otimes q) = m \otimes (p \otimes s.q) = \widetilde{f}(m \otimes p, s.q).$$

Also faktorisiert $\widetilde{f}$ zu einem Gruppenhomomorphismus

$$\varphi : (M \otimes_R P) \otimes_S Q \to M \otimes_R (P \otimes_S Q)$$

mit

$$\varphi((m \otimes p) \otimes q) = m \otimes (p \otimes q) \qquad \text{für} \quad m \in M, p \in P, q \in Q.$$

Analog erhalten wir einen Gruppenhomomorphismus

$$\psi : M \otimes_R (P \otimes_S Q) \to (M \otimes_R P) \otimes_S Q$$

mit

$$\psi(m \otimes (p \otimes q)) = (m \otimes p) \otimes q \qquad \text{für} \quad m \in M, p \in P, q \in Q.$$

Die Behauptung folgt nun aus $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$ und $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$. □

Bemerkung 4.38. Ist R ein kommutativer Ring, dann kann man jeden R-Linksmodul auch als R-Rechtsmodul auffassen und umgekehrt. Das Tensorprodukt zweier R-Moduln M, N trägt dann eine kanonische R-Modulstruktur, die gegeben ist durch

$$r.(m \otimes n) := (r.m) \otimes n = m \otimes (r.n).$$

Bildet man das Tensorprodukt dreier R-Moduln M, N, P, so existiert ein kanonischer Isomorphismus $a_{M,N,P} : M \otimes_R (N \otimes_R P) \to (M \otimes_R N) \otimes_R P$, $m \otimes (n \otimes p) \mapsto (m \otimes n) \otimes p$.

Aufgaben zu Kapitel 4

Aufgabe 4.1. (Eindeutigkeit des Modulquotienten) Sei M ein R-Modul und N ein Untermodul sowie $q_N : M \to M/N$ der Quotientenhomomorphismus. Weiter sei (Q, q) ein Paar aus einem R-Modul Q und einem Modulhomomorphismus $q: M \to Q$, der folgende universelle Eigenschaft besitzt: Für einen Modulhomomorphismus $\varphi: M \to M'$ mit existiert genau dann ein eindeutig bestimmter Modulhomomorphismus $\overline{\varphi}: Q \to M'$ mit $\overline{\varphi} \circ q = \varphi$, wenn $N \subseteq \ker \varphi$ gilt. Zeigen Sie, dass ein Modulisomorphismus $\psi: M/N \to Q$ mit $\psi \circ q_N = q$ existiert.
Hinweis: Betrachten Sie $M' = Q$ und $\varphi = q$.

Aufgabe 4.2. Sie R ein Schiefkörper. Zeigen Sie, dass jeder R-Modul M frei ist, also eine Basis besitzt.
Hinweis: Finden Sie zuerst mit dem Zornschen Lemma eine maximale unabhängige Teilmenge und zeigen Sie, dass diese bereits eine Basis ist.

Aufgabe 4.3. Sei R ein unitaler Ring und $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein echtes Ideal. Zeigen Sie, dass ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \subseteq R$ existiert, das $\mathfrak{a}$ enthält.

Aufgabe 4.4. Sei R ein Ring, der isomorph zu seinem opponierten Ring R^{op} ist. Impliziert dies, dass R kommutativ ist? Beweisen Sie dies oder widerlegen Sie es durch ein Gegenbeispiel.

Aufgabe 4.5. Sei R ein Ring. Zeigen Sie, dass jeder R-Linksmodul $(M, +, \mu)$ durch $\mu' : M \times R^{\mathrm{op}} \to M$, $\mu'(m, r) = \mu(r, m)$ die Struktur eines R^{op}-Rechtsmoduls erhält und jeder R-Rechtsmodul $(M, +, \nu)$ durch $\nu' : R^{\mathrm{op}} \times M \to M$, $\nu'(r, m) = \nu(m, r)$ die Struktur eines R^{op}-Linksmoduls.

Aufgabe 4.6. Sei M eine abelsche Gruppe und R ein Ring. Beweisen Sie:

(a) Ist $\varphi : R \to \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(M)$ ein Ringhomomorphismus, dann ist eine R-Modulstruktur auf M gegeben durch $\mu : R \times M \to M$, $\mu(r, m) = \varphi(r)m$.

(b) Ist durch $\mu : R \times M \to M$ eine R-Modulstruktur auf M gegeben, dann definiert die Zuordnung $\rho\colon R \to \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(M), \rho(r)(m) = \mu(r, m)$ einen Ringhomomorphismus.

Aufgabe 4.7. Sei M eine abelsche Gruppe. Zeigen Sie:

(a) M trägt maximal eine $\mathbb{Q}$-Modulstruktur.

(b) Ist M endlich und $|M| > 1$, so hat M keine $\mathbb{Q}$-Modulstruktur.

(c) M trägt genau dann eine $\mathbb{Q}$-Modulstruktur, wenn M torsionfrei ist und *dividierbar*, d.h., die Abbildungen $M \to M, m \mapsto nm$, $n \in \mathbb{N}$, sind surjektiv.

Aufgabe 4.8. Ein Modul M eines unitalen Rings R heißt *zyklisch*, wenn ein Element $m \in M$ mit $M = R.m$ existiert. Zeigen Sie, dass jeder zyklische R-Modul isomorph ist zu einem Quotientenmodul der Form $R/\mathfrak{a}$ ist, wobei R als Linksmodul über sich selbst betrachtet wird und $\mathfrak{a} \subset R$ ein Linksideal ist.

Aufgabe 4.9. Bestimmen Sie den Annulator des $\mathbb{Z}$-Moduls $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Aufgabe 4.10. Wir betrachten den Gruppenring $\mathbb{Z}[G]$ einer Gruppe G. Zeigen Sie, dass ein $\mathbb{Z}[G]$-Modul M nichts anderes ist als eine abelsche Gruppe $(M, +)$ zusammen mit einem Gruppenhomomorphismus $\rho_M : G \to \mathrm{Aut}(M)$. Zeigen sie, dass ein $\mathbb{Z}[G]$-Modulhomomorphismus $f : M \to N$ nichts anderes ist als ein Gruppenhomomorphismus mit $f \circ \rho_M(g) = \rho_N(g) \circ f$ für alle $g \in G$.

Aufgabe 4.11. Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und $\mathbb{K}$ ein Körper. Ein Polynom über R ist eine Abbildung $p : \mathbb{N}_0 \to R, n \mapsto p_n$ mit $p_n = 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}_0$. Ein Polynom über R wird oft auch als $p(X) = \sum_{i=0}^{\infty} p_n X^n$ geschrieben. Zeigen Sie:

(a) Die Polynome bilden mit der punktweisen Addition und der Multiplikationsabbildung

$$(f \cdot g)(i) = \sum_{j=0}^{i} f(j)g(i-j) \qquad \text{für} \quad i \in \mathbb{N}_0$$

einen kommutativen Ring. Dieser heißt *Polynomring* und wird mit $R[X]$ bezeichnet.

(b) Ist M ein Modul über dem Polynomring $\mathbb{K}[X]$, so hat M die Struktur eines Vektorraums über $\mathbb{K}$ und $\varphi : M \to M, m \mapsto \mu(X, m)$ ist eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung (wobei X wie oben das Polynom p über $\mathbb{K}$ mit $p_n = \delta_{1,n}$ bezeichnet).

(c) Ist M ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $\varphi : M \to M$ eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung, so erhält M durch

$$\mu\Big(\sum_k f_k X^k, m\Big) = \sum_{k=0}^n f_k \varphi^k(m) \quad \text{mit} \quad \varphi^k = \underbrace{\varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{k\times}$$

die Struktur eines $\mathbb{K}[X]$-Moduls.

(d) Sind V, W Vektorräume über $\mathbb{K}$ mit linearen Abbildungen $\varphi_V \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$, $\varphi_W \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(W)$, so sind die $\mathbb{K}[X]$-Modulhomomorphismen zwischen V und W gerade die linearen Abbildungen $\psi : V \to W$ mit $\psi \circ \varphi_V = \varphi_W \circ \psi$.

Ein Modul über einem Polynomring $\mathbb{K}[X]$ ist also nichts anderes als ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ zusammen mit einer $\mathbb{K}$-linearen Abbildung.

Aufgabe 4.12. Wir betrachten für $\Lambda \in \mathbb{R}$ den Ring $R_\Lambda = (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ mit Ringaddition und Ringmultiplikation

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \qquad (a, b) \cdot (c, d) = (ac + \Lambda bd, ad + bc).$$

(a) Zeigen Sie, dass es sich dabei um einen kommutativen Ring mit Einselement handelt.

(b) Bestimmen Sie für $\Lambda = 0, 1, -1$ die Torsionselemente von R_Λ als R_Λ-Linksmodul über sich selbst und untersuchen Sie, ob die Menge der Torsionselemente einen Untermodul bildet.

Aufgabe 4.13. (Direkte Summen und direkte Produkte) Sei I eine Indexmenge, R ein Ring und $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von R-Moduln. Dann sind die direkte Summe $\bigoplus_{i\in I} M_i$ und das direkte Produkt $\prod_{i\in I} M_i$ gegeben durch die Mengen

$$\bigoplus_{i\in I} M_i = \{(m_i)_{i\in I} : \ m_i \in M_i, m_i = 0 \text{ für fast alle } i \in I\}$$
$$\prod_{i\in I} M_i = \{(m_i)_{i\in I} : \ m_i \in M_i\}$$

mit der R-Modulstruktur

$$(m_i)_{i\in I} + (m_i')_{i\in I} = (m_i + m_i')_{i\in I} \qquad r.(m_i)_{i\in I} = (r.m_i)_{i\in I}.$$

(a) Beweisen Sie, dass die R-Modulstruktur der direkten Summe die einzige R-Modulstruktur auf dieser Menge ist, die die Inklusionsabbildungen

$$\eta_j : M_j \to \bigoplus_{i\in I} M_i, \quad m \mapsto (0, \ldots, 0, m, 0, \ldots)$$

zu R-Modulhomomorphismen macht.

(b) Beweisen Sie, dass zu jeder Familie von R-Modulhomomorphismen $\varphi_i : M_i \to N$ ein eindeutig bestimmter R-Modulhomomorphismus $\varphi : \bigoplus_{i\in I} M_i \to N$ existiert, so dass für alle $i \in I$ das folgende Diagramm für jedes $j \in I$ kommutiert

$$\begin{tikzcd} M_j \arrow[r, "\varphi_j"] \arrow[d, "\eta_j"'] & N \\ \bigoplus_{i\in I} M_i. \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

(c) Beweisen Sie, dass die R-Modulstruktur des direkten Produkts die einzige R-Modulstruktur auf dieser Menge ist, die die Projektionsabbildungen

$$\pi_j : \prod_{i\in I} M_i \to M_j, \quad (m_i)_{i\in I} \mapsto m_j$$

zu R-Modulhomomorphismen macht.

(d) Beweisen Sie, dass zu jeder Familie von R-Modulhomomorphismen $\psi_i : L \to M_i$ ein eindeutig bestimmter R-Modulhomomorphismus $\psi : L \to \prod_{i\in I} M_i$ existiert, so dass das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} M_j & L \arrow[l, "\psi_j"'] \arrow[dl, "\psi"] \\ \prod_{i\in I} M_i \arrow[u, "\pi_j"] & \end{tikzcd}$$

Warum arbeitet man im Fall des direkten Produkts mit Projektions- und nicht mit Inklusionsabbildungen? Gilt eine Aussage analog zu b) auch für direkte Produkte?

Aufgabe 4.14. Sei R ein Ring mit Eins. Beweisen Sie, dass jeder R-Modul M eine Präsentation besitzt, sich also als Quotient $M \cong \widetilde{M}/\widetilde{N}$ eines freien Moduls $\widetilde{M}$ bezüglich eines geeigneten Untermoduls $\widetilde{N} \subset \widetilde{M}$ ausdrücken lässt. Zeigen Sie, dass man im Fall eines endlich erzeugten Moduls M als freien Modul $\widetilde{M} = R^m$ mit geeignetem $m \in \mathbb{N}$ wählen kann.

Aufgabe 4.15. Geben Sie eine Präsentation des $\mathbb{Z}$-Moduls $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ durch Erzeuger und Relationen an. Versuchen Sie dabei, mit möglichst wenigen Erzeugern und Relationen auszukommen.

Aufgabe 4.16. Diese Aufgabe hat das Ziel, zu zeigen, dass in nicht-kommutativen Ringen aus $R^n \cong R^m$ im allgemeinen nicht $n = m$ folgt. Sei dazu V ein unendlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit abzählbarer Basis $B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$ und $R = \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ der Ring der $\mathbb{K}$-linearen Abbildungen $V \to V$.

(a) Zeigen Sie, dass zu den $\mathbb{K}$-linearen Abbildungen $\varphi, \psi : V \to V$ mit

$$\varphi(b_{2n}) = b_n,\ \varphi(b_{2n-1}) = 0, \qquad \psi(b_{2n}) = 0,\ \psi(b_{2n-1}) = b_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\mathbb{K}$-lineare Abbildungen $\alpha, \beta : V \to V$ existieren mit $\mathbf{1}_R = \alpha \circ \varphi + \beta \circ \psi$.

(b) Folgern Sie, dass der Ring R als Linksmodul über sich selbst isomorph ist zu $R = R.\varphi \oplus R.\psi \cong R \oplus R$, wobei $R.m = \{r \cdot m :\ r \in R\}$.

(c) Folgern Sie: $R \cong R \oplus R$, und somit $R^k \cong R^\ell$ für alle $k, \ell \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4.17. Sei R ein Integritätsring, M ein Modul über R und $\mathbb{K}$ der zugehörige Quotientenkörper. Beweisen Sie, dass gilt:

$$\mathbb{K} \otimes_R \operatorname{tor}_R(M) = 0.$$

Aufgabe 4.18. (Bimoduln als Moduln) Seien R, S Ringe mit Eins.

(a) Zeigen Sie, dass das Tensorprodukt $R \otimes_{\mathbb{Z}} S$ eine kanonische Ringstruktur hat. Geben Sie die Ringmultiplikation explizit an, und bestimmen Sie für den Fall unitaler Ringe das neutrale Element.

(b) Beweisen Sie, dass (R, S)-Bimodulstrukturen auf einer abelschen Gruppe M eins-zu-eins den $R \otimes_{\mathbb{Z}} S^{\mathrm{op}}$-Linksmodulstrukturen auf M entsprechen.

Aufgabe 4.19. Seien R, S_1, S_2 kommutative Ringe mit Eins und $\eta_j \colon R \to S_j$, $j = 1, 2$, Homomorphismen von Ringen mit Eins. Auf S_j betrachten wir die durch $r.s := \eta_j(r)s$ definierte R-Modulstruktur. Zeigen Sie, dass $S := S_1 \otimes_R S_2$ nicht nur die Struktur einer abelschen Gruppe trägt, sondern sogar eine unitale Ringstruktur mit

$$(s_1 \otimes s_2)(s_1' \otimes s_2') = (s_1 s_1') \otimes (s_2 s_2') \quad \text{für} \quad s_1, s_1' \in S_1, s_2, s_2' \in S_2.$$

Hinweis: Für $\lambda_{s_j}(x) = s_j x$ betrachte man $\lambda_{s_1} \otimes \lambda_{s_2} \in \operatorname{End}_{\mathbb{Z}}(S)$ und zeige, dass die Zuordnung $(s_1, s_2) \mapsto \lambda_{s_1} \otimes \lambda_{s_2}$ über S faktorisiert.

Aufgabe 4.20. Sei R ein kommutativer unitaler Ring und $R[X_1, \ldots, X_n]$ den Polynomring über R in den Unbestimmten $X_1, \ldots, X_n$. Dann gilt

$$R[X] \otimes_R R[Y] \cong R[X, Y]$$

im Sinne der Ringstruktur aus Aufgabe 4.19, bei der $\eta_X \colon R \to R[X], \eta_Y \colon R \to R[Y]$ die kanonischen Einbettungen sind.

Aufgabe 4.21. Wir betrachten die endlichdimensionalen komplexen Darstellungen einer endlichen Gruppe G.

(a) Zeigen Sie, dass die Isomorphieklassen endlichdimensionaler komplexer Darstellungen von G mit der direkten Summe $\oplus$ und dem Tensorprodukt $\otimes$ von Darstellungen einen Ring R bilden. Dieser wird als *Darstellungsring* von G bezeichnet.

(b) Zeigen Sie, dass die Charaktere der Gruppe G einen Unterring des Rings der Klassenfunktionen auf G mit der punktweisen Multiplikation und Addition bilden, und dass dieser Unterring isomorph zum Darstellungsring von G ist.

Aufgabe 4.22. (Multiplikatorring eines Rings) Sei R ein Ring. Ein Paar (λ, ρ) von additive Abbildungen $R \to R$ heißt *Multiplikator*, wenn für alle $a, b \in R$ gilt:

(M1) $a\lambda(b) = \rho(a)b$.

(M2) $\lambda(ab) = \lambda(a)b$.

(M3) $\rho(ab) = a\rho(b)$.

Wir schreiben $M(R)$ für die Menge aller Multiplikatoren. Zeigen Sie:

(i) $M(R)$ ist ein Ring bzgl.
$$(\lambda, \rho) + (\lambda', \rho') := (\lambda + \lambda', \rho + \rho'), \qquad (\lambda, \rho)(\lambda', \rho') := (\lambda\lambda', \rho'\rho).$$

(ii) $\eta\colon R \to M(R), a \mapsto (\lambda_a, \rho_a)$, mit $\lambda_a(b) = ab$ und $\rho_a(b) := ba$, ist ein Ringhomomorphismus.

(iii) Hat R ein Einselement, so ist η ein Isomorphismus.

Aufgabe 4.23. Sei G eine Gruppe und X, Y Mengen. Sei $\rho\colon X \times G \to X, (x, g) \mapsto x.g$ eine Rechtswirkung und $\lambda\colon G \times Y \to Y, (g, y) \mapsto g.y$ eine Linkswirkung. Zeigen Sie:

(i) Auf $X \times Y$ erhalten wir durch $g.(x, y) := (x.g^{-1}, g.y)$ eine Linkswirkung von G. Wir schreiben $X \times_G Y := (X \times Y)/G$ für die Menge $[x, y] := G.(x, y)$ der Bahnen dieser Wirkung und $p\colon X \times Y \to X \times_G Y, (x, y) \mapsto [x, y]$ für die natürliche Abbildung.

(ii) $X \times_G Y$ hat folgende universelle Eigenschaft: Für eine Abbildung $f\colon X \times Y \to Z$ in eine Menge Z existiert genau dann eine Abbildung $\widehat{f}\colon X \times_G Y \to Z$ mit $\widehat{f} \circ p = f$, wenn $f(x.g, y) = f(x, g.y)$ für alle $g \in G, x \in X$ und $y \in Y$ gilt.

(iii) Wir betrachten auf den Vektorräumen $\mathbb{K}^{(X)}$ und $\mathbb{K}^{(Y)}$. Durch
$$\Big(\sum_{x\in X} f_x\delta_x\Big).\Big(\sum_{g\in G} h_g\delta_g\Big) := \sum_{x\in X, g\in G} f_x h_g \delta_{x.g} \quad \text{und} \quad \Big(\sum_{g\in G} h_g\delta_g\Big).\Big(\sum_{y\in Y} f_y\delta_y\Big) := \sum_{g\in G, y\in Y} h_g f_y \delta_{g.y}$$
erhalten wir auf $\mathbb{K}^{(X)}$ die Struktur eines $\mathbb{K}[G]$-Rechtsmoduls und auf $\mathbb{K}^{(Y)}$ die Struktur eines $\mathbb{K}[G]$-Linksmoduls. Dann gilt
$$\mathbb{K}^{(X \times_G Y)} \cong \mathbb{K}^{(X)} \otimes_{\mathbb{K}[G]} \mathbb{K}^{(Y)}.$$
Hinweis: Suchen Sie auf beiden Seiten nach geeigneten Basen.

Aufgabe 4.24. ("Vereinsung" eines Rings) Sei R ein Ring. Auf der abelschen Gruppe $\widetilde{R} := R \times \mathbb{Z}$ betrachten wir das Produkt

$$(r,t)(r',t') := (rr' + tr' + t'r, tt').$$

Zeigen Sie:

(a) $(\widetilde{R}, +, \cdot)$ ist eine Ring mit dem Einselement $\mathbf{1} := (0,1)$, der den Ring $R \cong R \times \{0\}$ als Ideal enthält.

(b) (Universelle Eigenschaft) Für jeden Homomorphismus $\varphi\colon R \to S$ des Ringes R in einen Ring S mit Eins existiert genau ein Homomorphismus $\widetilde{\varphi}\colon \widetilde{R} \to S$ von Ringen mit Eins, so dass $\widetilde{\varphi}(r,0) = \varphi(r)$ für alle $r \in R$ gilt.

Aufgabe 4.25. (Kardinalzahlen) Wir schreiben $|M|$ für die Kardinalität (Mächtigkeit) der Menge M und $|N| \leq |M|$, wenn N zu einer Teilmenge von M gleichmächtig ist.

(a) $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$.

(b) Jede unendliche Menge M lässt sich als disjunkte Vereinigung abzählbar unendlicher Teilmengen darstellen: $M \cong X \times \mathbb{N}$ (Hinweis: Finde mit dem Zornschen Lemma eine maximale Menge paarweise disjunkter abzählbar unendlicher Teilmengen).

(c) Ist M unendlich, so gilt $|M| = |M \times \mathbb{N}|$.

(d) Ist I unendlich und $M = \bigcup_{i\in I} M_i$, wobei die Teilmengen M_i höchstens abzählbar sind, so gilt $|M| \leq |I \times \mathbb{N}| = |I|$.

(e) (Cantor–Bernstein–Schröder) Existieren injektive Abbildungen $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to A$, so existiert eine Bijektion $h\colon A \to B$.
Hinweis: Setze $C_0 := A \setminus g(B)$ und $C_{n+1} := (g \circ f)(C_n)$ sowie $C := \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$. Definiere dann

$$h(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in C \\ g^{-1}(x) & \text{für } x \notin C. \end{cases}$$

(f) Sind $(b_i)_{i\in I}$ und $(c_j)_{j\in J}$ Basen des $\mathbb{K}$-Vektorraums V, so gilt $|J| = |I|$.
Hinweis: Für $i \in I$ und $b_i = \sum_j a_{ij} c_j$ betrachte die Teilmenge

$$J_i := \{j \in J\colon a_{ij} \neq 0\}$$

und zeige $J = \bigcup_{i\in I} J_i$. Schließen Sie hieraus $|J| \leq |I| \leq |J|$ und dann weiter mit (e).

5 Moduln über Hauptidealringen

Nachdem wir uns in den letzten Abschnitten mit grundlegenden Definitionen und Konstruktionen für Moduln über Ringen befasst haben, haben wir nun die nötigen Voraussetzungen, um die Struktur von Moduln zu untersuchen und Moduln unter bestimmten Zusatzannahmen vollständig zu klassifizieren (wobei man natürlich nur an der Klassifikation bis auf Isomorphie interessiert ist). Dabei sind prinzipiell zwei Arten von Zusatzannahmen denkbar: Einschränkungen an den zugrundeliegenden Ring und Einschränkungen an den Modul selbst. Im Fall der Klassifikation von Darstellungen einer endlichen Gruppe würde ersteres beispielsweise der Beschränkung auf den Fall, dass $\mathrm{char}(\mathbb{K})$ nicht die Gruppenordnung teilt, und letzeres der Beschränkung auf einfache oder halbeinfache Darstellungen entsprechen.

Wir befassen und zunächst mit der Klassifikation endlich erzeugter Moduln über Ringen, die eine besonders einfache Gestalt haben. Der einfachst mögliche Fall wäre hierbei zu fordern, dass der zugrundeliegende Ring ein Körper ist. Endlich erzeugte Moduln über einem Körper sind gerade endlichdimensionale Vektorräume. Die Klassifikation endlich erzeugter $\mathbb{K}$-Moduln bis auf Isomorphie entspricht der Aussage, dass jeder endlichdimensionale Vektorraum V über $\mathbb{K}$ isomorph zu $\mathbb{K}^{\dim_{\mathbb{K}}(V)}$ ist. Die Isomorphieklassen von $\mathbb{K}$-Moduln werden also durch Zahlen $n \in \mathbb{N}_0$ charakterisiert, die der Dimension des Vektorraums entsprechen.

Möchte man die einschränkenden Voraussetzungen an den zugrundeliegenden Ring lockern, um interessantere Moduln zu gewinnen, so ist der nächsteinfache Fall der eines Hauptidealrings, also eines kommutativen nullteilerfreien Ring, in dem jedes Ideal von der Form Ra, $a \in R$, ist.

In diesem Abschnitt werden wir also Moduln über Hauptidealringen betrachten und endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen bis auf Isomorphie vollständig klassifizieren. Dies stellt eine Verallgemeinerung der gerade betrachteten Klassifikation von Vektorräumen dar. Es ist offensichtlich, dass man hierbei nicht mehr mit dem Rang des Moduls als alleinigem Klassifikationsmerkmal auskommen wird, denn dieser existiert ja nur für freie Moduln, aber nicht jeder Modul über einem Hauptidealring ist frei. Neben Körpern $\mathbb{K}$ sind $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{K}[X]$ wichtige Beispiele von Hauptidealringen. Für $\mathbb{Z}$ sind die endlich erzeugten Moduln die endlich erzeugten abelschen Gruppen und für $\mathbb{K}[X]$ entspricht die Klassifikation der endlichdimensionalen Moduln genau der Klassifikation von Endomorphismen endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorräume bis auf Ähnlichkeit (Jordansche Normalform, wenn $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen ist).

Möchte man Moduln klassifizieren, so stellt sich insbesondere die Frage nach der Struktur ihrer Untermoduln, denn aus diesen kann man Moduln durch verschiedene Konstruktionen zusammensetzen. Im Fall von Moduln über Hauptidealringen ergibt sich dabei eine wichtige Vereinfachung, nämlich die Tatsache, dass jeder Untermodul eines freien Moduls frei ist.

5.1 Der Elementarteilersatz

Satz 5.1. *Ist M ein freier Modul über einem Hauptidealring R, so ist auch jeder Untermodul $U \subset M$ frei, und es gilt* $\mathrm{Rang}(U) \leq \mathrm{Rang}(M)$.

Beweis. Wir beweisen die Aussage für freie Moduln endlichen Rangs durch Induktion über $n := \mathrm{rang}(M)$. Der allgemeine Fall ist etwas aufwändiger und wird mit dem Zornschen Lemma bewiesen ([SS81, Satz III.B.3]). Sei M ein freier Modul vom Rang n mit Basis $\{m_1, \ldots, m_n\}$ und $U \subset M$ ein Untermodul.

1. Schritt: Für $n = 0$ folgt $M = \{0\}$ und die Aussage ist klar. Für $n = 1$ ist $M \cong R$ und wir dürfen $M = R$ annehmen. Nun ist $N \subseteq R$ ein Ideal. Da R ein Hauptidealring ist, existiert ein $n \in R$ mit $N = R.n$. Ist $n = 0$, so ist $N = \{0\}$ frei vom Rang 0. Ist $n \neq 0$, so folgt aus der Nullteilerfreiheit, dass die Abbildung $R \to N, r \mapsto rn$ ein Isomorphismus von R-Moduln ist. Also ist der R-Modul N frei vom Rang 1.

2. Schritt: Wir nehmen nun an, dass die Behauptung für Moduln von Rang $\leq n-1$ gilt. Dann ist per Induktionsvoraussetzung der Untermodul

$$U' := U \cap M' \quad \text{für} \quad M' = \langle m_2, \ldots, m_n \rangle_R = \sum_{i=2}^{n} R.m_i \cong R^{n-1}$$

frei als Untermodul des freien Moduls M', und es gilt $\mathrm{rang}(U') \leq \mathrm{rang}(M') = n - 1$.

Der Quotientenmodul $U/(U \cap M')$ ist ein Untermodul des freien Moduls $M/M' \cong R$ vom Rang 1, also frei nach dem 1. Schritt. Aus Korollar 4.29 folgt dann $U \cong (U \cap M') \oplus (U/(U \cap M'))$. Da beide Summanden frei sind, ist auch U ein freier Modul und aus der Konstruktion folgt $\mathrm{Rang}(U) \leq (n-1) + 1 = n$.

□

Aufgrund der Tatsache, dass Untermoduln von freien Moduln über Hauptidealringen frei sind, verhalten sich freie Moduln über Hauptidealringen in vielerlei Hinsicht wie Vektorräume. Indem wir endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen als Quotienten endlich erzeugter freier Moduln beschreiben, werden wir diese Moduln vollständig klassifizieren können. Ein wesentliches Hilfsmittel ist dabei die Darstellung von R-Modulhomomorphismen zwischen freien Moduln durch Matrizen, die die bekannte Beschreibung von Vektorraumhomomorphismen durch Matrizen verallgemeinert.

Bemerkung 5.2. (a) Ist $F \in M_{n,m}(R)$ eine Matrix, so erhalten wir mit der üblichen Matrizenmultiplikation einen Endomorphismus

$$\varphi\colon R^m \to R^n, \quad \varphi(x) = Fx, \tag{28}$$

wobei wir Elemente von R^m und R^n als Spaltenvektoren auffassen. Ist R nicht kommutativ, so ist φ i.a. nicht R-linear für die kanonische Linksmodulstruktur, aber für die kanonische Rechtsmodulstruktur. Das muss man beachten, wenn man Homomorphismen freier Moduln durch Matrizen beschreiben möchte.

(b) Sei R ein Ring und M, N endlich erzeugte freie Rechtsmoduln über R mit geordneten Basen $B_M = (b_1, \ldots, b_m)$ und $B_N = (c_1, \ldots, c_n)$. Dann ist jeder R-Modulhomomorphismus

$f : M \to N$ durch seine Werte auf B_M eindeutig bestimmt, und es existiert eine eindeutig bestimmte Matrix $F = (f_{jk}) \in M_{n,m}(R)$ mit

$$f(b_k) = \sum_{j=1}^{n} c_j.f_{jk}.$$

Umgekehrt definiert jede solche Matrix durch diese Formel und R-lineare Fortsetzung einen eindeutig bestimmten R-Modulhomomorphismus

$$f : M \to N, \qquad f\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k.x_k\Big) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} c_j.f_{jk}x_k = \sum_{j=1}^{m} c_j.\Big(\sum_{k=1}^{n} f_{jk}x_k\Big).$$

Für den Koordinatenvektor $x \in R^n$ ergeben sich die Koordinaten des Bildes also durch den Vektor Fx im Sinne von (28). Bezeichnen

$$\varphi_M : R^m \to M, \quad (r_1, \ldots, r_m) \mapsto \sum_{i=1}^{m} b_i.r_i$$

und

$$\varphi_N : R^n \to N, \quad (r_1, \ldots, r_n) \mapsto \sum_{j=1}^{n} c_j.r_j$$

die kanonischen R-Modulisomorphismen, dann sind die Spalten der Matrix F gerade die Bilder der Basisvektoren b_i unter dem R-Modulhomomorphismus $\varphi_N^{-1} \circ f$. Wir haben also

$$(\varphi_N^{-1} \circ f \circ \varphi_M)(x) = Fx.$$

Wie auch im Fall von Vektorräumen entspricht die Multiplikation von Matrizen der Komposition von linearen Abbildungen (Man beachte, dass man hierzu mit Rechtsmoduln arbeiten muss, was bei kommutativen Ringen unproblematisch ist).

Obwohl die Beschreibung von R-Modulhomomorphismen zwischen freien Moduln durch Matrizen im Prinzip für beliebige Ringe R mit Einselement möglich ist, ist sie im Fall kommutativer Ringe besonders hilfreich. Wir beschränken uns daher im Folgenden auf diesen Fall. Wie auch im Fall von Matrizen mit Einträgen aus Körpern kann man für Matrizen mit Einträgen aus kommutativen Ringen Zeilen- und Spaltenoperationen, Transponierte und Determinante definieren. Die Definition und die Eigenschaften dieser Begriffe sind völlig analog zum Fall von Matrizen mit Einträgen aus Körpern.

Definition 5.3. Sei R ein kommutativer Ring und $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in M_n(R)$ eine quadratische Matrix mit Einträgen in R. Dann ist die *Determinante* von A definiert als

$$\det(A) := \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\, a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}.$$

Wir schreiben

$$\mathrm{SL}_n(R) := \{A \in M_n(R) \colon \det(A) = 1\}$$

für die *spezielle lineare Gruppe* über R (Nachweis der Gruppeneigenschaft als Übung).

Die Determinante für Matrizen mit Einträgen in einem kommutativen Ring hat viele Eigenschaften mit den schon bekannten Matrizen über Körpern gemeinsam, und der Nachweis dieser Eigenschaften ist eine direkte Verallgemeinerung der entsprechenden Beweise für Matrizen mit Einträgen aus einem Körper.

Bemerkung 5.4. (a) Sind $A, B \in M_n(R)$, so gilt $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

(b) Eine Matrix $A \in M_n(R)$ ist genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante eine Einheit in R ist, d.h. ein multiplikatives Inverses besitzt. Das folgt aus der Cramerschen Regel, die auch über kommutativen Ringen gilt ([SS80, Satz 4.6.6]).

Bevor wir zum Beweis des Elementarteilersatzen kommen, stellen wir einige kleinere Beobachtungen und Wiederholungen vorweg.

Ab nun sei R immer ein Hauptidealring.

Bemerkung 5.5. (a) Über einem Körper $\mathbb{K}$ führen viele Normalformprobleme auf Matrizen mit den Einträgen 0 und 1, da sich jedes Element von $\mathbb{K}$ durch Multiplikation auf diese Gestalt bringen läßt.

In einem Hauptidealring R betrachtet man Elemente oft bis auf Multiplikation mit Elementen der Einheitengruppe $R^\times$. Wir schreiben dann $[a] := aR^\times \in R/R^\times$, wobei $R/R^\times = \{aR^\times \colon a \in R\}$ die Menge der Bahnen der Gruppe $R^\times$ bzgl. der Multiplikationswirkung ist. Ist R ein Körper, so ist $R/R^\times = \{[0], [1]\}$.

(b) Ist $x = dy$ für ein $d \neq 0$, so schreiben wir auch

$$\frac{x}{d} := y.$$

Das ist dadurch gerechtfertigt, dass y wegen der Nullteilerfreiheit von R eindeutig durch die Relation $x = dy$ bestimmt ist.

Lemma 5.6. *Für $a, b \in R$ gilt $Ra = Rb$ genau dann, wenn $r \in R^\times$ existiert mit $b = ra$.*

Die Abbildung

$$R/R^\times \to \mathrm{Ideal}(R), \quad a \mapsto Ra$$

ist also eine Bijektion.

Beweis. Ist $b = ra$ für ein $r \in R^\times$, so folgt sofort $Rb = Rra = Ra$.

Sei umgekehrt $Ra = Rb$. Ist $Ra = \{0\}$, so folgt $a = b = 0$. Wir nehmen daher $a \neq 0$ an. Dann existieren $r, s \in S$ mit $ra = b$ und $sb = a$. Damit erhalten wir $sra = a$ und aus der Nullteilerfreiheit folgt $sr = \mathbf{1}$. Also ist $r \in R^\times$. □

Lemma 5.7. *In R existiert keine unendliche strikt aufsteigende Folge von Idealen*

$$\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \mathfrak{a}_3 \subset \cdots \quad \textit{mit} \quad \mathfrak{a}_i \neq \mathfrak{a}_{i+1} \quad \textit{für alle} \quad i \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Sei $(\mathfrak{a}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine strikt aufsteigende Folge von Idealen in R. Da R ein Hauptidealring ist, ist das Ideal $\mathfrak{b} := \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathfrak{a}_j$ von einem Element $c \in R$ erzeugt. Dann existiert aber ein $n \in \mathbb{N}$ mit $c \in \mathfrak{a}_n$ und daher ist $\mathfrak{a}_n = \mathfrak{b}$, im Widerspruch zu $\mathfrak{a}_n \neq \mathfrak{a}_{n+1}$. $\square$

Definition 5.8. Sind $x, y \in R$, so ist $\langle x, y\rangle = Rx + Ry$ ein Hauptideal, also von der Form Rd, wobei d bis auf Multiplikation mit einer Einheit eindeutig bestimmt ist (Lemma 5.6). Wir schreiben dann

$$d = \mathrm{ggT}(x, y) \quad \text{und} \quad d = ux + vy \quad \text{für} \quad u, v \in R.$$

Die Koeffizienten u, v heißen dann *Bézout-Koeffizienten von d bzg. x, y.*

Wir beachten $\mathrm{ggT}(0, 0) = 0$ und dass d nur bis auf Multiplikation mit einer Einheit definiert ist. Streng genommen dürfte man daher nur

$$\mathrm{ggT}(x, y) = [d] = R^{\times} d$$

schreiben, aber das ist nicht üblich.

Lemma 5.9. *Sei $A \in M_2(R)$ und $d = \mathrm{ggT}(x, y)$ für $x, y \in R$.*

(a) (Zeilenoperationen) *Ist $A = \begin{pmatrix} x & * \\ y & * \end{pmatrix}$, so existiert $S \in \mathrm{SL}_2(R)$ mit $SA = \begin{pmatrix} d & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$.*

(b) (Spaltenoperationen) *Ist $A = \begin{pmatrix} x & y \\ * & * \end{pmatrix}$, so existiert $T \in \mathrm{SL}_2(R)$ mit $AT = \begin{pmatrix} d & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$.*

(c) (Diagonaloperationen) *Ist $A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$, so existieren $S, T \in \mathrm{SL}_2(R)$ mit $SAT = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}$ mit $d|e$.*

Beweis. Sind x, y beide 0, so setzen wir jeweils $S = T = \mathbf{1}$. Wir nehmen nun an, dass dies nicht der Fall ist. Dann ist auch $d \neq 0$. Sei $d = ux + vy$.

(a) Setze $S := \begin{pmatrix} u & v \\ -y/d & x/d \end{pmatrix}$.

(b) Setze $T := \begin{pmatrix} u & -y/d \\ v & x/d \end{pmatrix}$.

(c) Setze $S := \begin{pmatrix} u & v \\ -y/d & x/d \end{pmatrix}$ und $T := \begin{pmatrix} 1 & -vy/d \\ 1 & ux/d \end{pmatrix}$. Damit erhalten wir

$$e = vy\frac{y}{d}\frac{x}{d} + ux\frac{y}{d}\frac{x}{d} = d\frac{y}{d}\frac{x}{d}$$

und damit $d|e$. $\square$

Proposition 5.10. (Elementarteilersatz für 2×2-Matrizen) *Für* $A \in M_2(\mathbb{R})$ *existieren* $S, T \in \mathrm{GL}_2(R)$ *mit* $SAT = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}$ *und* $d|e$.

Beweis. (Algorithmus von Gauß–Bézout)

Wir betrachten den folgenden Verfahrensschritt: Lösche a_{21} mittels der Zeilenoperation aus Lemma 5.9(a) und anschliessend a_{12} mittels der Spaltenoperation aus Lemma 5.9(b). Wir erhalten so eine neue Matrix

$$A' = SAT = \begin{pmatrix} a'_{11} & 0 \\ a'_{21} & a'_{22} \end{pmatrix},$$

wobei a'_{11} ein Teiler von a_{11} ist. Wir wenden nun den gleichen Schritt wieder an, und erhalten so eine Folge von Matrizen

$$A^{(k)} = S_k A T_k = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & 0 \\ a_{21}^{(k)} & a_{22}^{(k)} \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N},$$

wobei $a_{11}^{(k)} | a_{11}^{(k-1)} | \cdots | a_{11}$. Daher ist $\mathfrak{a}_k := R a_{11}^{(k)}$ eine aufsteigende Folge von Idealen in R und wird daher nach Lemma 5.7 stationär. Es existiert also ein k mit $\mathfrak{a}_{k+1} = \mathfrak{a}_k$. Dann ist aber schon $a_{11}^{(k)}$ ein Teiler von $a_{21}^{(k)}$, so dass wir $a_{21}^{(k)}$ durch Subtraktion eines Vielfachen der 1. Zeile von der zweiten elimieren können, so dass $A^{(k+1)}$ eine Diagonalmatrix ist. Auf diese wenden wir schließlich die Diagonaloperation aus Lemma 5.9(c) an und sind fertig. □

Lemma 5.11. *Für* $x, y \in R$ *und* $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(R)$ *ist*

$$\langle x, y \rangle_R = \langle ax + by, cx + dy \rangle_R.$$

Beweis. Für $\mathbf{x} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sei $I_{\mathbf{x}} := \langle x, y \rangle_R$. Dann ist $I_{T\mathbf{x}} = \langle ax + by, cx + dy \rangle_R \subseteq I_{\mathbf{x}}$ für jede invertierbare Matrix $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(R)$. Damit ergibt sich

$$I_{\mathbf{x}} = I_{SS^{-1}\mathbf{x}} \subseteq I_{S^{-1}\mathbf{x}} \subseteq I_{\mathbf{x}}$$

und damit Gleichheit. □

Betrachtet man eine lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ zwischen endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorräumen, so kann man durch geeignete Wahl zweier Basen B_V von V und B_W von W stets erreichen, dass ihre darstellende Matrix Diagonalgestalt hat und in der Diagonale nur die Einträge 1 und 0 auftreten. Wir überlegen uns nun, wie das ensprechende Resultat für endlich erzeugte freie Moduln über Hauptidealringen aussieht. Da hier nicht jedes Element ein multiplikatives Inverses besitzt, ist in diesem Fall nicht damit zu rechnen, dass in der Diagonale nur 0 und 1 auftreten, aber es ist möglich, eine darstellende Matrix in Diagonalgestalt zu erhalten.

Der folgende Satz gibt vollständige Auskunft über das qualitative Verhalten von R-linearen Abbildungen zwischen endlich erzeugten freien Moduln.

Satz 5.12. (Elementarteilersatz) *Sei R ein Hauptidealring, M, N freie Moduln über R von Rang m, n und $f : M \to N$ ein R-Modulhomomorphismus. Dann existiert eine Diagonalmatrix $D = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_r), r = \min(n, m)$, mit*

$$d_1 | d_2 | \dots | d_r,$$

und Isomorphismen $\varphi : R^m \to M$, $\psi : R^n \to N$, so dass das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\quad f \quad} & N \\ \uparrow{\scriptstyle\varphi} & & \uparrow{\scriptstyle\psi} \\ R^m & \xrightarrow{\quad D \quad} & R^n \end{array}$$

Die Elemente $d_i \in R$ sind bis auf Multiplikation mit Einheiten eindeutig bestimmt.

Beweis. **Reduktion auf Matrizen:** Wir dürfen o.B.d.A. $M = R^m$ und $N = R^n$ annehmen. Der R-Modulhomomorphismus $f : M = R^m \to N = R^n$ lässt sich eindeutig durch seine darstellende Matrix $A = (a_{ij}) \in M_{n,m}(R)$ mit

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}.e_j$$

beschreiben. Da R kommutativ ist, müssen wir hierbei nicht zwischen Links- und Rechtsmoduln unterscheiden. Es reicht also, zu zeigen, dass invertierbare Matrizen $S \in \mathrm{SL}_n(R)$ und $T \in \mathrm{SL}_m(R)$ existieren, so dass die Matrix $D := SAT$ diagonal ist und ihre Einträge die Teilbarkeitsbedingung im Satz erfüllen.

Algorithmus von Gauß-Bézout: Wir wenden die Reduktionsschritte aus Lemma 5.9 jeweils auf zwei Zeilen, Spalten oder Diagonaleinträge von A an. Wir verfahren ansonsten analog zum Fall von 2×2-Matrizen.
Schritt I: Lösche sukzessive die Einträge a_{i1}, $i = n, \dots, 2$ in der 1. Spalte durch Anwendung der Zeilenoperation aus Lemma 5.9(a) auf die Zeilen a_i und a_{i-1}. Lösche anschließend die Einträge a_{1j}, $j = m, \dots, 2$ in der 1. Zeile durch Anwendung der Spaltenoperation aus Lemma 5.9(b) auf die Spalten a^j und a^{j-1} von A. Wir erhalten so eine neue Matrix $A' = SAT$, $S \in \mathrm{SL}_n(R)$, $T \in \mathrm{SL}_m(R)$, in der die Einträge a_{1j}, $j > 1$, alle verschwinden und $a'_{11} | a_{11}$.

Wir wenden nun den gleichen Schritt wieder an, und erhalten so eine Folge von Matrizen $A^{(k)} = S_k A T_k$, $S_k \in \mathrm{SL}_n(R)$, $T_k \in \mathrm{SL}_m(R)$, wobei die Einträge $a_{1j}^{(k)}$, $j > 1$, in der 1. Zeile verschwinden. Bei jedem Schritt wird hierbei $a_{11}^{(k)}$ durch einen Teiler $a_{11}^{(k+1)}$ ersetzt. Da die aufsteigende Folge von Idealen $\mathfrak{a}_k := Ra_{11}^{(k)}$ nach Lemma 5.7 stationär wird, existiert ein k mit

$\mathfrak{a}_{k+1} = \mathfrak{a}_k$. Dann ist aber schon $a_{11}^{(k)}$ ein Teiler aller Einträge in der 1. Spalte der Matrix $A^{(k)}$. Daher können wir durch Subtraktion eines geeigneten Vielfachen der 1. Zeile von den anderen erreichen, dass in der nun entstehenden Matrix $\widetilde{A}$ außer $\widetilde{a}_{11}$ alle Einträge in der 1. Spalte und der 1. Zeile verschwinden.

Schritt II: Wir haben gesehen, dass eine Anwendung des Schritts I auf die Matrix A zu einer Matrix

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11} & 0 \\ 0 & \widetilde{A}' \end{pmatrix}$$

führt, wobei die Länge der Diagonale in $\widetilde{A}'$ um 1 kleiner ist als bei $\widetilde{A}$ bzw. A. Anwendung von Schritt I auf die Matrix $\widetilde{A}'$ führt nun rekursiv zu einer Diagonalmatrix

$$D^{(0)} = SAT \quad \text{mit} \quad S \in \mathrm{SL}_n(R), T \in \mathrm{SL}_m(R).$$

Wobei die Matrizen S und T jeweils die Produkte der Matrizen sind, die durch Links- bzw. Rechtsmultiplikation die Zeilen- bzw. Spaltenoperationen gemäß Lemma 5.9(a,b) beschreiben.

Schritt III: (Teilerbedingung) Wir haben jetzt noch durch Diagonaloperationen gemäß Lemma 5.9(c) die Teilerbedingungen sicherzustellen.

Hierzu wenden wir zuerst die Diagonaloperation auf die Einträge vom $D^{(0)}$ in den Positionen

$$(r-1, r), (r-2, r-1), \ldots, (1, 2)$$

an. Wir erhalten so eine Diagonalmatrix $D^{(1)} = S_1 D^{(0)} T_1$, bei der $d_1^{(1)}$ alle anderen Einträge teilt. Nun wenden wir die Diagonaloperation auf die Einträge in den Positionen

$$(r-1, r), (r-2, r-1), \ldots, (2, 3)$$

von $D^{(1)}$ an und erhalten so eine Diagonalmatrix $D^{(2)} = S_2 D^{(1)} T_2$ mit $d_1^{(2)} = d_1^{(1)} | d_2^{(2)}$, bei der zusätzlich $d_2^{(2)}$ alle Einträge $d_j^{(2)}$, $j > 2$ teilt. Verfahren wir induktiv so weiter, erhalten wir schließlich eine Diagonalmatrix $D = D^{(r)} = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_r)$ mit $d_1 | d_2 | \cdots | d_r$.

Schritt IV: (Eindeutigkeit bis auf Einheiten) Für $A \in M_{nm}(R)$ und

$$I = \{i_1 < \ldots < i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}, \quad J = \{j_1 < \ldots < j_k\} \subseteq \{1, \ldots, m\}$$

sei $A_I^J \in M_k(R)$ die quadratische $k \times k$-Matrix $(a_{ij})_{i \in I, j \in J}$. Wir betrachten das Ideal

$$\langle A \rangle_k := \langle \det(A_I^J) \colon |I| = |J| = k \rangle \subseteq R,$$

das von allen $k \times k$-Minoren von A erzeugt wird.

Für $S \in \mathrm{SL}_n(R)$ erhalten wir mit der Cauchy–Binet Formel

$$\det((SA)_I^J) = \det(S_I A^J) = \sum_{|K|=k} \det(S_I^K) \det(A_K^J).$$

Hieraus ergibt sich

$$\langle SA\rangle_k \subseteq \langle A\rangle_k = \langle S^{-1}SA\rangle_k \subseteq \langle SA\rangle_k$$

und damit die Gleichheit $\langle A\rangle_k = \langle SA\rangle_k$. Analog erhalten wir für $T \in \mathrm{SL}_m(R)$ die Relation $\langle AT\rangle_k = \langle A\rangle_k$. Damit hängt

$$d_1 \cdots d_k R = \langle D\rangle_k = \langle A\rangle_k$$

nur von der Matrix A ab und ändert sich nicht bei Zeilen-, Spalten- oder Diagonaltransformationen. Sind $a_1, \ldots, a_r$ Erzeuger der Ideale $\langle A\rangle_k$, so erhalten wir die Relationen

$$d_1 \cdots d_k \in a_k R^\times.$$

Modulo $R^\times$ ist daher

$$[d_1] = [a_1] \quad \text{und} \quad [d_k] := [a_k/a_{k-1}] \quad \text{für} \quad a_{k-1} \neq 0.$$

Ist $a_{k-1} = 0$, so folgt aus $a_k R = d_k a_{k-1} R = \{0\}$ auch $a_k = 0$. Ist j minimal mit $a_j = 0$, so ist entweder $j = 1$ und daher $d_1 = 0$. Wegen der Teilerbedingung verschwinden dann alle d_j. Oder $j > 1$ und $[d_j] = \left[\frac{a_j}{a_{j-1}}\right] = 0$. Hieraus folgt $d_i = 0$ für $i \geq j$. In allen Fällen sind die Klassen der d_j modulo $R^\times$ bestimmt sind durch die Ideale $\langle A\rangle_k$.

Alternativer Beweis für die Invarianz von $\langle A\rangle_k$: Man kann auch direkt die Invarianz der Ideale $\langle A\rangle_k$ und unter Links- bzw. Rechtsmultiplikationen mit Matrizen $S \in \mathrm{SL}_n(R)$ und $T \in \mathrm{SL}_m(R)$ zeigen, die jeweils nur Transformationen zweier Zeilen bzw. Spalten betreffen.

Sei hierzu $S \in \mathrm{SL}_n(R)$ eine Matrix, die eine Transformation mit den Zeilen $i < j$ beschreibt und I und J wie oben. Enthält I weder i noch j, so gilt

$$\det((SA)_I^J) = \det(A_I^J).$$

Sind $i, j \in I$, so erhalten wir ebenfalls

$$\det((SA)_I^J) = \det(S)\det(A_I^J) = \det(A_I^J).$$

Sei nun $i \in I$ und $j \notin I$. Wir betrachten dann die Menge $I' := (I \setminus \{i\}) \cup \{j\}$, die j aber nicht i enthält. Für $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ergibt sich durch Entwicklung nach der i. Zeile bzw. der j. Zeile

$$\det((SA)_I^J) = a\det(A_I^J) + b\det(A_{I'}^J), \quad \det((SA)_{I'}^J) = c\det(A_I^J) + d\det(A_{I'}^J).$$

Wegen $\det(S) = 1$ ist daher

$$\mathrm{ggT}(\det(A_I^J), \det(A_{I'}^J)) = \mathrm{ggT}(\det((SA)_I^J), \det((SA)_{I'}^J))$$

(Lemma 5.11).

Den anderen Fall $j \in I$ und $i \notin I$ behandelt man analog. Ebenso zeigt man die Invarianz für Spaltenoperationen. $\square$

5.2 Struktur endlich erzeugter Moduln

Mit Hilfe des Elementarteilersatzes können wir nun endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen durch die Quotienten $R/\mathfrak{a}_i$ bezüglich einer aufsteigenden Kette von Idealen

$$\mathfrak{a}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{a}_s \subsetneq R$$

charakterisieren. Diese ergeben sich aus den Diagonalelementen d_i der Matrix in Satz 5.12. Dadurch reduziert sich die Klassifikation von endlich erzeugten Moduln über Hauptidealringen auf die Klassifikation der entsprechenden Ideale.

Satz 5.13. *Sei M ein endlich erzeugter Modul über einem Hauptidealring R. Dann existiert eine aufsteigende Kette $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{a}_s \subsetneq R$ von echten Idealen von R, so dass*

$$M \cong R/\mathfrak{a}_1 \oplus \ldots \oplus R/\mathfrak{a}_s,$$

wobei auch $\mathfrak{a}_j = \{0\}$ zugelassen ist. Insbesondere ist M direkte Summe zyklischer Untermoduln.

Beweis. **1. Schritt:** Sei M ein endlich erzeugter Modul mit n Erzeugern. Nach Bemerkung 4.23 existiert ein Untermodul $U \subset R^n$ mit $M \cong R^n/U$. Dieser ist nach Satz 5.1 als Untermodul eines endlich erzeugten freien Moduls ebenfalls wieder ein endlich erzeugter freier Modul vom Rang $m \leq n$. Also existiert ein R-Modulhomomorphismus $f : R^m \to R^n$ mit $M \cong R^n/\operatorname{im}(f)$.
2. Schritt: Nach dem Elementarteilersatz 5.12 (für $r = m$) gibt es R-Modulautomorphismen $B : R^n \to R^n$, $C : R^m \to R^m$ und eine Diagonalmatrix $D \in M_{n,m}(R)$, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
R^m \arrow[r, "f"] & R^n \arrow[d, "\cong"', "C"] \\
R^m \arrow[u, "B", "\cong"'] \arrow[r, "D"'] & R^n
\end{tikzcd}$$

kommutiert und die Einträge von D die Teilbarkeitsbedingung $d_1|d_2|\ldots|d_m$ erfüllen. Also gilt

$$M \cong R^n/\operatorname{im}(f) \cong R^n/\operatorname{im}(D) \cong R^{n-m} \oplus (R/d_mR) \oplus \ldots \oplus (R/d_1R).$$

Setzen wir $\mathfrak{a}_i = \{0\}$ für $1 \leq i \leq n-m$ und $\mathfrak{a}_{n-i} = \langle d_{i+1} \rangle$ für $i = 0, \ldots, m-1$, so erhalten wir eine aufsteigende Kette von Idealen $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{a}_n \subset R$, denn aus $d_i|d_{i+1}$ folgt $\langle d_{i+1} \rangle \subset \langle d_i \rangle$. Sei $s = \max\{i : \mathfrak{a}_i \neq R\}$. Dann gilt $R/\mathfrak{a}_i = \{0\}$ für alle $i > s$ und $\mathfrak{a}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{a}_s \subsetneq R$ ist die gewünschte Kette von Idealen. □

Mit Satz 5.13 haben wir die endlich erzeugten Moduln über einem Hauptidealring schon recht weitgehend klassifiziert. Allerdings lässt sich die Aussage noch in einer konkreteren und eingängigeren Form formulieren. Dazu benutzt man, dass jedes Ideal in R ein Hauptideal ist, also von einem Element $r_i \in R$ erzeugt wird. Ist $r_i = 0$, so gilt ohnehin $R/\mathfrak{a}_i \cong R$ und es lässt sich nichts weiter vereinfachen. Andernfalls zerlegt man die Elemente $r_i \in R$, die die Ideale $\mathfrak{a}_i$ erzeugen, in ihre Primfaktoren. So erhält man eine eindeutige Charakterisierung eines endlich erzeugten Moduls M durch Primpotenzen in R.

Satz 5.14. *Sei M ein endlich erzeugter Modul über einem Hauptidealring R. Dann existieren Primpotenzen $q_1, \ldots, q_\ell \in R$ und ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit*

$$M \cong R^n \oplus R/q_1R \oplus \ldots \oplus R/q_\ell R. \tag{29}$$

Die Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ ist eindeutig bestimmt und die Primpotenzen q_i sind eindeutig bis auf Multiplikation mit Einheiten und die Reihenfolge.

Beweis. **1. Schritt:** Nach Satz 5.13 existiert eine aufsteigende Kette von Idealen

$$\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{a}_s \subsetneq R \quad \text{mit} \quad M \cong R/\mathfrak{a}_1 \oplus \ldots \oplus R/\mathfrak{a}_s.$$

Da R ein Hauptidealring ist, existiert zu jedem Ideal $\mathfrak{a}_i$ ein $r_i \in R$ mit $\mathfrak{a}_i = r_iR$. Sei $n := \max\{i : \; \mathfrak{a}_i = \{0\}\}$. Dann lassen sich für $i > n$ die Zahlen r_i als Produkte von Primpotenzen schreiben

$$r_i = \prod_{j=1}^{s_i} q_{ij} \qquad \text{mit paarweise teilerfremden Primpotenzen} \quad q_{ij}.$$

und nach dem Chinesischen Restsatz (vgl. Algebra-Vorlesung) gilt dann

$$R/\mathfrak{a}_i = R/\langle r_i \rangle = R/\langle q_{i1} \rangle \oplus \ldots \oplus R/\langle q_{is_i} \rangle.$$

Dies beweist die Existenz der Zerlegung.
2. Schritt: Wir beweisen die Eindeutigkeit der Zahl n, indem wir diese auf eine Weise charakterisieren, die nicht von der Zerlegung abhängt. Sei $\mathbb{K}$ der Quotientenkörper von R. Dann gilt aufgrund der universellen Eigenschaft der direkten Summe

$$\mathrm{Hom}_R(M, \mathbb{K}) \cong \mathrm{Hom}_R(R^n, \mathbb{K}) \times \mathrm{Hom}_R(R/q_1R, \mathbb{K}) \times \ldots \times \mathrm{Hom}_R(R/q_\ell R, \mathbb{K}).$$

Da jeder R-Modulhomomorphismus $f : R \to \mathbb{K}$ wegen $f(r) = r.f(\mathbf{1})$ durch $f(1)$ eindeutig bestimmt ist, gilt $\mathrm{Hom}_R(R, \mathbb{K}) \cong \mathbb{K}$. Insbesondere ist jeder nicht verschwindende R-Modulhomomorphimus $f : R \to \mathbb{K}$ injektiv. Ist $\mathfrak{a} \neq \{0\}$ ein Ideal in R, so ergibt sich aus der universellen Eigenschaft des Quotienten

$$\mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, \mathbb{K}) \cong \{f \in \mathrm{Hom}_R(R, \mathbb{K}) : \; \mathfrak{a} \subseteq \ker f\} = \{0\}.$$

Also ergibt sich

$$\mathrm{Hom}_R(M, \mathbb{K}) = \mathrm{Hom}_R(R^n, \mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^n,$$

und die Zahl $n = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Hom}_R(M, \mathbb{K})$ hängt daher nicht von der Wahl der Zerlegung ab.

3. Schritt: Wir beweisen die Eindeutigkeit der Primpotenzen q_i bis auf Multiplikation mit Einheiten und Reihenfolge. Dazu überlegen wir uns das Folgende: Für jedes Primelement $p \in R$ ist das Ideal pR maximal und daher $R_p := R/pR$ ein Körper. Ist nun M ein R-Modul, so ist für alle $k \in \mathbb{N}$ der Quotient $p^{k-1}M/p^kM$ ein Vektorraum über dem Körper R_p. Wir betrachten seine Dimension

$$d_p^k(M) := \dim_{R_p}\big(p^{k-1}M/p^kM\big).$$

Offensichtlich gilt $d_p^k(M \oplus N) = d_p^k(M) + d_p^k(N)$ für alle endlich erzeugten R-Moduln N, M. Wir berechnen nun die Dimension $d_p^k(M)$ für den Modul M in (29), und zeigen, dass diese die Primfaktoren q_i in der Zerlegung bestimmen. Dazu betrachten wir die folgenden drei Fälle:

I) Ist $M = R$, so definiert die Multiplikation mit p^{k-1} einen R-linearen Isomorphismus

$$f : R/pR \xrightarrow{\sim} p^{k-1}R/p^kR, \quad [r] \mapsto [p^{k-1}r] \tag{30}$$

und es folgt $d_p^k(R) = 1$.

II) Ist $M = R/p^mR$ für ein $m \geq 1$, so gilt $p^{k-1}(R/p^mR) = \{0\}$ für $k > m$. Ist $1 \leq k \leq m$, so haben wir

$$p^{m+k-1}R \subseteq p^kR \subseteq p^{k-1}R$$

und daher nach den Noetherschen Isomorphiesätzen und I)

$$\begin{aligned}\big(p^{k-1}(R/p^mR)\big)/\big(p^k(R/p^mR)\big) &= \big(p^{k-1}R/p^mR\big)/\big(p^kR/p^mR\big)\\ &\cong p^{k-1}R/p^kR \cong R/pR = R_p.\end{aligned}$$

Daher it $d_p^k(R/p^mR) = 1$ für $k \leq m$ und 0 sonst.

III) Sei nun $M = R/q^mR$ für ein Primelement q, das nicht von p geteilt wird, d.h. $\langle p, q\rangle_R = R$. Dann ist die Restklasse von p eine Einheit im Ring $R' = R/q^mR$ (Chinesischer Restsatz). Die Multiplikation mit p^n definiert also einen Isomorphismus $R/q^mR \to R/q^mR$ und somit $d_p^k(R/q^mR) = 0$.

Durch Kombination dieser drei Fälle ergibt sich:

$$d_p^k(M) = n + |\{i : \; p^k|q_i\}|$$

und somit

$$|\{i \colon q_i \in R^\times p^k\}| = d_p^k(M) - d_p^{k+1}(M).$$

Daher ist die Anzahl der Faktoren $R/q_iR \cong R/p^kR$ für alle Primelemente p und $k \in \mathbb{N}$ eindeutig bestimmt. Dies legt die Primpotenzen q_i bis auf Multiplikation mit Einheiten und deren Reihenfolge fest. $\square$

Damit haben wir die endlich erzeugten Moduln über einem Hauptidealring R vollständig klassifiziert. Solche Moduln sind isomorph zu einer direkten Summe eines freien Moduls der Form R^n und Moduln der Form R/q_iR mit Primpotenzen q_i.

Insbesondere erlaubt es uns diese Charakterisierung von endlich erzeugten Moduln über Hauptidealringen, das Konzept der Torsion besser zu verstehen. Ist R ein Hauptidealring und M ein Modul über R, so bilden die Torsionselemente von M nach Satz 4.18 einen Untermodul von M. Mit Hilfe von Satz 5.14 können wir diesen nun explizit bestimmen.

Korollar 5.15. *Jeder endlich erzeugte Modul M über einem Hauptidealring R ist von der Form*

$$M \cong \mathrm{tor}_R(M) \oplus R^n$$

mit eindeutig bestimmtem $n \in \mathbb{N}_0$. Insbesondere ist jeder torsionsfreie endlich erzeugte Modul M über R frei.

Beweis. Nach Satz 5.14 existiert eine Zerlegung

$$M \cong R^n \oplus M', \qquad M' = R/q_1R \oplus \ldots \oplus R/q_\ell R \quad \text{mit Primpotenzen} \quad q_i.$$

Jedes Element von $R/q_1R \oplus \ldots \oplus R/q_\ell R$ ist ein Torsionselement und somit $M' \subset \mathrm{tor}_R(M)$. Andererseits folgt aus $r.(m_1 + m_2) = 0$ mit $m_1 \in R^n$ und $m_2 \in M'$, dass $r = 0$ oder $m_1 = 0$ gelten muss. Also ist $\mathrm{tor}_R(M) = M'$, und die Behauptung ist bewiesen. □

Eine weitere nützliche Folgerung aus Satz 5.13 und 5.14 ist eine vollständige Klassifikation endlich erzeugter abelscher Gruppen. Denn abelsche Gruppen sind ja nichts anderes als Moduln über dem Hauptidealring $R = \mathbb{Z}$. Wendet man diese Sätze also auf den Fall endlich erzeugter $\mathbb{Z}$-Moduln an, so erhält man:

Korollar 5.16. *Sei G eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Dann gilt:*

(a) *Es existieren eindeutig bestimmte Zahlen $d_1, \ldots, d_r \in \{0, 2, 3, 4, \ldots\}$ mit $d_i | d_{i+1}$ für alle $i \in \{1, \ldots, r\}$, so dass*

$$G \cong \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z}.$$

(b) *Es existieren eindeutig bestimmte Primzahlpotenzen $q_1, \ldots, q_\ell$ und ein eindeutig bestimmtes $s \in \mathbb{N}_0$ mit*

$$G \cong \mathbb{Z}^s \oplus \mathbb{Z}/q_1\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/q_\ell\mathbb{Z}.$$

Bemerkung 5.17. Ein weiterer wichtiger Typ von von Hauptidealringen ist der Polynomring $R = \mathbb{K}[X]$ für einen Körper $\mathbb{K}$. In diesem Fall sind die Primelemente $p \in \mathbb{K}[X]$ genau die irreduziblen Polynome, $\langle p \rangle = p\mathbb{K}[X]$ ist ein maximales Ideal und $\mathbb{K}_p = \mathbb{K}[X]/p\mathbb{K}[X]$ eine Körpererweiterung von $\mathbb{K}$, deren Dimension über $\mathbb{K}$ der Grad von p ist.

Ist $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen, sind alle Primelemente (bis auf Einheiten) vom Typ $X - \lambda$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Die Bausteine im Struktursatz sind also vom Typ

$$M_{\lambda,k} := \mathbb{K}[X]/\langle (X - \lambda)^k \rangle.$$

Ist $\mathbb{K}$ nicht algebraisch abgeschlossen, so existieren Polynome vom Grad > 1, die irreduzibel sind. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ trifft dies für alle Polynome $f = X^2 + pX + q$ mit $p^2 < 4q$ zu, denn in diesem Fall existiert keine reelle Nullstelle. Dann ist der Körper $\mathbb{R}_f$ eine zweidimensionale Körpererweiterung von $\mathbb{R}$, also isomorph zu $\mathbb{C}$ und die Klasse $\overline{X}$ von X in $\mathbb{R}_f \cong \mathbb{C}$ ist eine Nullstelle des Polynoms f. Sie kann also mit der komplexen Zahl

$$x + iy = -\frac{p}{2} + i\sqrt{q - p^2/4}$$

identifiziert werden. Bzgl. der Basis $1, i$ des rellen Vektorraums $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}_f$ ist die Matrix der Multiplikation mit $\overline{X}$ also gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}.$$

In Aufgabe 5.2 wird gezeigt, wie man mit diesem Vorüberlegungen den Satz über die Jordansche Normalform über algebraisch abgeschlossenen Körpern und $\mathbb{R}$ aus dem Struktursatz für endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen gewinnen kann.

Aufgaben zu Kapitel 5

Aufgabe 5.1. Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Zeigen Sie, dass R genau dann ein Hauptidealring ist, wenn jeder Untermodul eines freien R-Moduls M vom Rang 1 torsionsfrei und frei vom Rang 1 ist.

Aufgabe 5.2. (Darstellungen von $\mathbb{K}[X]$ und Jordansche Normalform) Wir betrachten den Polynomring $\mathbb{K}[X]$ über einem Körper $\mathbb{K}$. In Aufgabe 4.11 wurde gezeigt, dass ein Modul (M, μ) über $\mathbb{K}[X]$ nichts anderes ist als ein $\mathbb{K}$-Vektorraum M zusammen mit einer linearen Abbildung $\varphi : M \to M$.

Die Vektorraumstruktur auf M und die lineare Abbildung φ sind dann gegeben durch

$$\lambda \cdot m = \mu(\lambda \mathbf{1}, m) = (\lambda \mathbf{1}).m \qquad \varphi(m) = \mu(X, m) = X.m,$$

Umgekehrt liefert ein $\mathbb{K}$-Vektorraum M zusammen mit einer linearen Abbildung $\varphi : M \to M$ eine $\mathbb{K}[X]$-Modulstruktur auf M mit Strukturabbildung

$$\mu\Big(\sum_k f_k X^n, m\Big) = \sum_{k=0}^{n} f_k \varphi^k(m) \quad \text{mit} \quad \varphi^k = \underbrace{\varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{k\times}.$$

(a) Zum Aufwärmen: Vergewissern Sie sich, dass es sich bei dem Polynomring $\mathbb{K}[X]$ um einen Hauptidealring handelt, und geben Sie jeweils ein Element von $\mathbb{K}[X]$ an, das die folgenden Ideale erzeugt:

$$\mathfrak{a} = \langle X^2 - X, X^2 - 1\rangle \qquad \mathfrak{b} = \langle X + 1, (X^2 - 1)^2, X^2 + 1\rangle.$$

(b) Zeigen Sie: Ein $\mathbb{K}[X]$-Modul M ist direkte Summe $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ von $\mathbb{K}[X]$-Untermoduln $M_1, \ldots, M_n$ genau dann, wenn der zugehörige Vektorraum M direkte Summe der Vektorräume M_i ist und die zugehörige lineare Abbildung $\varphi : M \to M$ die Bedingung $\varphi(M_i) \subset M_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ erfüllt. Was bedeutet das für die beschreibende Matrix der Abbildung φ bezüglich einer geeignet gewählten Basis des $\mathbb{K}$-Vektorraums M?

(c) Zeigen Sie, dass ein freier $\mathbb{K}[X]$-Modul vom Rang eins identifiziert werden kann mit dem Vektorraum $\mathbb{K}^{(\mathbb{N}_0)}$ der $\mathbb{K}$-wertigen Folgen, bei denen nur endlich viele Folgenglieder nicht verschwinden, zusammen mit der linearen Abbildung $\varphi(a_0, a_1, a_2, \ldots) = (0, a_0, a_1, \ldots)$.

(d) Zeigen Sie: Ein zyklischer $\mathbb{K}[X]$-Modul M, der von einem Element $m \in M$ erzeugt wird, entspricht einem $\mathbb{K}$-Vektorraum M zusammen mit einer linearen Abbildung $\varphi : M \to M$ so dass $\{m, \varphi(m), \varphi^2(m), \ldots\}$ ein Erzeugendensystem von M ist.

(e) Zeigen Sie, dass der $\mathbb{K}[X]$-Modul $\mathbb{K}[X]/f\mathbb{K}[X]$ mit einem Polynom

$$f = a_0 + a_1 X + \ldots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n$$

einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V zusammen mit einer linearen Abbildung $\varphi : V \to V$ entspricht, so dass V eine Basis $B = \{v_0, \ldots, v_{n-1}\}$ besitzt mit

$$\varphi(v_i) = \begin{cases} v_{i+1} & \text{für } 0 \le i \le n-2 \\ -a_0 v_0 - a_1 v_1 - \ldots - a_{n-1} v_{n-1} & \text{für } i = n-1. \end{cases}$$

Geben Sie die beschreibende Matrix von φ bezüglich der Basis B an.

(f) Geben Sie die Primelemente und Primpotenzen in $\mathbb{C}[X]$ und $\mathbb{R}[X]$ an.

(g) Zeigen Sie, dass ein $\mathbb{K}[X]$-Modul der Form $\mathbb{K}[X]/q\mathbb{K}[X]$ mit $q = (X - \lambda)^n$ einem Vektorraum V zusammen mit einer linearen Abbildung $\varphi : V \to V$ entspricht, so dass für eine geeignete Basis $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ gilt:

$$\varphi(v_i) = \begin{cases} \lambda v_i + v_{i+1} & \text{für } 1 \le i \le n-1 \\ \lambda v_n & \text{für } i = n. \end{cases}$$

Wie sieht die beschreibende Matrix von φ bezüglich dieser Basis aus?

(h) Zeigen Sie mit (e), dass für den $\mathbb{K}[X]$-Modul $\mathbb{K}[X]/f\mathbb{K}[X]$ das Polynom f dem charakteristischen Polynom der linearen Abbildung $\varphi : V \to V$ entspricht und dass gilt $f(\varphi) = 0$ (Satz von Cayley-Hamilton).

(i) Welche aus der linearen Algebra bekannter Satz entspricht der Aussage, dass für einen algebraisch abgeschlossenen Körper $\mathbb{K}$ jeder endlichdimensionale $\mathbb{K}[X]$-Modul isomorph zu einem Modul der Form

$$\mathbb{K}[X]/\langle (X - \lambda_1)^{k_1} \rangle \oplus \ldots \oplus \mathbb{K}[X]/\langle (X - \lambda_m)^{k_m} \rangle$$

ist? Fassen Sie Ihre Ergebnisse zusammen, indem Sie sie in die folgende Tabelle eintragen.

(j) Sehen Sie, wie man auf diesem Weg die reelle Jordansche Normalform zeigen kann?

$\mathbb{K}[X]$-Modul M	$\mathbb{K}$-Vektorraum M mit linearer Abbildung $\varphi_M : M \to M$	Matrix-Schreibweise
direkte Summe von $\mathbb{K}[X]$-Moduln		
freier $\mathbb{K}[X]$-Modul vom Rang eins		
zyklischer $\mathbb{K}[X]$-Modul		
Quotient $\mathbb{K}[X]/f\mathbb{K}[X]$		
Quotient $\mathbb{C}[X]/q\mathbb{C}[X]$, $q = (X - \lambda)^m$ Primpotenz		
Klassifikation von $\mathbb{C}[X]$-Moduln		

Aufgabe 5.3. Wir betrachten die $\mathbb{Z}$-Moduln mit Erzeugern x, y und Relationen

(a) $x + 4y = 0$,

(b) $x + 3y = 0$, $6y = 0$,

(c) $3x + 4y = 0$.

(d) $2x + 4y = 0$.

Geben Sie jeweils einen $\mathbb{Z}$-Modul der Form

$$\mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}/q_1\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/q_\ell\mathbb{Z}$$

mit $n \in \mathbb{N}_0$ und Primpotenzen $q_1, \ldots, q_\ell$ an, zu dem die betrachteten Moduln isomorph sind.

Aufgabe 5.4. Wir betrachten die abelsche Gruppe G mit Erzeugern x, y und einer Relation der Form $ax + by = 0$ für vorgegebene $a, b \in \mathbb{Z}$. Geben Sie eine abelsche Gruppe der Form

$$\mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}/q_1\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/q_\ell\mathbb{Z}$$

mit $n \in \mathbb{N}_0$ und Primpotenzen $q_1, \ldots, q_\ell$ an, zu der die abelsche Gruppe G isomorph ist.

Aufgabe 5.5. Klassifizieren Sie bis auf Isomorphie alle abelschen Gruppen der Ordnung $m = 400$, d.h. geben Sie alle abelschen Gruppen der Form

$$\mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}/q_1\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/q_\ell\mathbb{Z}$$

mit $n \in \mathbb{N}_0$ und Primpotenzen $q_1, \ldots, q_\ell$ an, zu denen eine abelsche Gruppe der Ordnung $m = 400$ isomorph sein kann.

Aufgabe 5.6. Sei A eine abelsche Torsionsgruppe, d.h. $A = \operatorname{tor}(A)$. Für eine Primzahl p sei

$$A_p = \bigcup_n A[p^n] = \{a \in A \colon (\exists n \in \mathbb{N})\ p^n a = 0\}.$$

Zeigen Sie $A = \bigoplus_{p \text{ prim}} A_p$.

Aufgabe 5.7. Bringen Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 48 & 12 & 18 \\ 36 & 21 & 9 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{Z})$$

mit dem Algorithmus von Gauß–Bézout auf Elementarteilerform.

Aufgabe 5.8. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper der Charakteristik 0. Bringen Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} X^2 - 1 & X^3 - 1 \\ X^2 - 2X + 1 & X^4 - X^3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K}[X])$$

mit dem Algorithmus von Gauß–Bézout auf Elementarteilerform.

Aufgabe 5.9. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und

$$R := \mathbb{K}[[X]] = \Big\{ f(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \colon a_n \in \mathbb{K} \Big\}$$

den Ring der *formalen Potenzreihen mit Koeffizienten in* $\mathbb{K}$ auf dem Addition und Multiplikation definiert sind durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) X^n$$

und

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \Big) \cdot \Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n \Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \Big) X^n.$$

Zeigen Sie:

(a) $R^\times = \{f \in R \colon f(0) = a_0 \neq 0\}$.

(b) Was ist das Inverse von $f(X) = 1 - X$?

(c) Für jedes $f \in R \setminus \{0\}$ existiert genau ein $k \in \mathbb{N}_0$ und eine Einheit $r \in R^\times$ mit $f = r \cdot X^k$.

(d) R ist ein Hauptidealring.

(e) Seien $f, g \in R$. Wie kann man an f und g ablesen, ob f ein Teiler von g ist?

6 Halbeinfache Moduln und Ringe

6.1 Einfache Moduln

Wie im Fall von Gruppendarstellungen möchten wir uns nun den Moduln widmen, die eine besonders "einfache" Gestalt besitzen, d.h. keine echten Untermoduln haben oder sich zumindest als direkte Summe von einfachen Moduln beschreiben lassen. Die Begriffsbildung ist analog zum Fall von Gruppendarstellungen.

Definition 6.1. Sei R ein Ring.

(a) Ein R-Modul $M \neq \{0\}$ heißt *einfach* oder *irreduzibel*, wenn er keine echten Untermoduln besitzt.

(b) Ein R-Modul $M \neq \{0\}$ heißt *unzerlegbar*, wenn er nicht isomorph zu einer direkten Summe $M_1 \oplus M_2$ nichttrivialer R-Moduln ist.

(c) Ein R-Modul M heißt *halbeinfach*, wenn er isomorph zur direkten Summe einfacher R-Moduln ist.

Beispiele 6.2. (a) Ist G eine Gruppe, so ist ein (halb-)einfacher $\mathbb{K}[G]$-Modul nichts anderes als eine (halb-)einfache Darstellung von G über $\mathbb{K}$, und unzerlegbare $\mathbb{K}[G]$-Moduln entsprechen unzerlegbaren Darstellungen. Insbesondere sind nach dem Satz von Maschke für endliche Gruppen G und $\mathrm{char}\,\mathbb{K} \not| \, |G|$ alle $\mathbb{K}[G]$-Moduln halbeinfach.

(b) Ist $\mathbb{K}$ ein Körper, so sind die einfachen $\mathbb{K}$-Moduln gerade die eindimensionalen Vektorräume über $\mathbb{K}$. Jeder einfache $\mathbb{K}$-Modul ist also isomorph zu $\mathbb{K}$. Außerdem ist jeder $\mathbb{K}$-Modul halbeinfach, denn jeder $\mathbb{K}$-Vektorraum besitzt eine Basis und lässt sich als direkte Summe der von den Basisvektoren erzeugten einfachen $\mathbb{K}$-Moduln schreiben.

(c) Ein Ring als Links-/Rechts-/Bi-Modul über sich selbst ist ein einfacher Modul, wenn er keine links-/rechts-/beideitigen Ideale außer $\{0\}$ und R besitzt.

(d) Offensichtlich ist nicht jeder Modul halbeinfach oder zerlegbar, denn es gibt Moduln mit Untermoduln, die kein Komplement besitzen (z.B. $2\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$). Hat ein Modul M einen echten Untermodul $\{0\} \neq N \subset M$, so dass M/N ein freier Modul ist, so ist der Modul nach Korollar 4.29 zerlegbar.

(e) Jeder freie R-Modul $M \cong R^{(I)}$ mit $|I| > 1$ ist zerlegbar. Jeder einfache freie Modul muss daher vom Rang eins sein. Ein freier Modul vom Rang eins ist einfach, genau dann, wenn der zugrundeliegende Ring R keine echten Linksideale besitzt.

(f) Ist R ein Hauptidealring und $M = R/p^nR$ für ein Primelement R, so ist M genau dann einfach, wenn $n = 1$ ist. In diesem Fall ist $M = R_p = R/pR$ ein Körper. Für $n > 1$ ist pR/p^nR ein echter Untermodul.

Wir zeigen, dass M unzerlegbar ist. Sei dazu $M = M_1 \oplus M_2$ für echte Untermoduln $M_{1/2}$. Da diese Untermoduln direkte Summanden sind, sind sie auch Quotienten von M und damit zyklisch, also $M_i \cong R/q_iR$. Aus $p^n.M = \{0\}$ folgt nun $p^n.M_i = \{0\}$ und somit $q_i | p^n$, also $q_i = p^{n_i}$ mit $1 \leq n_i \leq n$. Dann erhalten wir mit den Rechnungen aus dem Beweis von Satz 5.14 den Widerspruch

$$1 = d_p^1(R/p^nR) = d_p^1(M) = d_p^1(M_1) + d_p^1(M_2) = d_p^1(R/p^{n_1}R) + d_p^1(R/p^{n_2}R) = 1 + 1.$$

Wie im Fall der Darstellungen von Gruppen, beschäftigen wir uns zunächst mit einfachen Moduln, und untersuchen dabei insbesondere die Struktur der Modulhomomorphismen zwischen einfachen R-Moduln. Hierbei ergeben sich Aussagen, die die entsprechenden Aussagen über Homomorphismen von Darstellungen zwischen einfachen Gruppendarstellungen verallgemeinern. Insbesondere existieren nur sehr wenige R-Modulhomomorphismen zwischen einfachen Moduln gibt.

Lemma 6.3. (1. Lemma von Schur für Moduln) *Sei M ein R-Modul und N ein einfacher R-Modul. Dann gilt:*

(a) *Jeder Homomorphismus $\varphi : N \to M$ von R-Moduln ist injektiv oder null.*

(b) *Jeder Homomorphismus $\varphi : M \to N$ von R-Moduln ist surjektiv oder null.*

(c) *Der Endomorphismenring $\mathrm{End}_R(N)$ ist ein Schiefkörper.*

Beweis. (a) Ist $\varphi : N \to M$ ein Homomorphismus von R-Moduln, so ist $\ker(\varphi) \subset N$ ein Untermodul, und da N einfach ist, folgt $\ker(\varphi) = \{0\}$, also ist φ injektiv, oder $\ker(\varphi) = N$ und $\varphi = 0$.

(b) Ist $\varphi : M \to N$ ein Homomorphismus von R-Moduln, so ist $\mathrm{im}(\varphi) \subset N$ ein Untermodul, und da N einfach ist folgt $\mathrm{im}(\varphi) = N$, also φ surjektiv, oder $\mathrm{im}(\varphi) = \{0\}$ und $\varphi = 0$.

(c) Ein Schiefkörper ist ein Ring, in dem jedes Element außer 0 ein multiplikatives Inverses besitzt. Aus (a) und (b) folgt, dass jedes Element $0 \neq \varphi \in \mathrm{End}_R(N)$ bijektiv ist, also ein multiplikatives Inverses bezüglich der Komposition besitzt. □

Dieses Lemma legt es nahe, nach einem Analogon des zweiten Schurschen Lemmas für Moduln zu suchen. Allerdings gilt bereits das zweite Schursche Lemma für Gruppendarstellungen nur über algebraisch abgeschlossenen Körpern, und es ist zunächst unklar, was eine adäquate Einschränkung für Homomorphismen von Moduln sein sollte. In der Tat findet man zunächst, dass sich eine Version des zweiten Schurschen Lemmas für Moduln nur dann angeben lässt, wenn der zugrundeliegende Ring auch gleichzeitig die Struktur eines Vektorraums über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $\mathbb{K}$ hat, und diese Vektorraumstruktur kompatibel mit der Ringmultiplikation ist. Man betrachtet also Moduln über unitalen $\mathbb{K}$-Algebren für algebraisch abgeschlossene Körper $\mathbb{K}$.

Korollar 6.4. (2. Lemma von Schur für Moduln) *Sei $\mathbb{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, $\mathcal{A}$ eine unitale Algebra über $\mathbb{K}$ und M ein einfacher $\mathcal{A}$-Modul. Dann hat M die Struktur eines $\mathbb{K}$-Vektorraums und ist $\dim_{\mathbb{K}}(M)$ endlich, so folgt $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(M) \cong \mathbb{K}$.*

Beweis. Die $\mathbb{K}$-Vektorraumstruktur von M ist gegeben durch die Strukturabbildung: $\lambda m = (\lambda \mathbf{1}_A).m$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$, $m \in M$. Insbesondere folgt, das alle $\mathcal{A}$-Modul-Endomorphismen von M auch lineare Abbildungen sind:

$$\varphi(\lambda m) = \varphi((\lambda \mathbf{1}_A).m) = (\lambda \mathbf{1}_A).\varphi(m) = \lambda\varphi(m) \qquad \text{für} \quad \lambda \in \mathbb{K}, m \in M, \varphi \in \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(M).$$

Da M ein einfacher $\mathcal{A}$-Modul ist, folgt $M \neq \{0\}$. Jeder Endomorphismus $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(M)$ hat wegen der algebraischen Abgeschlossenheit von $\mathbb{K}$ mindestens einen Eigenwert λ. Der zugehörige Eigenraum $M_\lambda(\varphi) = \ker(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_M)$ ist somit ein $\mathcal{A}$-Untermodul. Da M einfach ist, folgt $M_\lambda(\varphi) = M$ und somit $\varphi = \lambda\,\mathrm{id}_M$. □

Dass das zweite Schursche Lemma für Moduln tatsächlich eine Verallgemeinerung des zweiten Schurschen Lemmas für Gruppendarstellungen ist, ergibt sich, wenn man als Algebra $\mathcal{A}$ die Gruppenalgebra $\mathbb{K}[G]$ betrachtet. So erhält man schon bekannte Aussagen über Darstellungen von Gruppen als Spezialfälle allgemeinerer Aussage für Moduln.

Beispiel 6.5. (a) Schurs Lemma für Darstellungen von Gruppen: Die Gruppenalgebra $\mathcal{A} = \mathbb{K}[G]$ ist eine Algebra über $\mathbb{K}$ und die einfachen $\mathbb{K}[G]$-Moduln entsprechen gerade den einfachen Darstellungen von G. Die $\mathbb{K}[G]$-Modulendomorphismen eines einfachen Moduls V entsprechen gerade den Endomorphismen von Darstellungen. Mit Schurs Lemma für Moduln folgt, dass jeder Endomorphismus von Darstellungen über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $\mathbb{K}$ von der Form $\lambda\,\mathrm{id}_V$ mit $\lambda \in \mathbb{K}$ ist.

(b) Jede einfache Darstellung (ρ, V) einer endlichdimensionalen kommutativen Algebra $\mathcal{A}$ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $\mathbb{K}$ ist eindimensional. Denn da $\mathcal{A}$ kommutativ ist, gilt $\rho(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(V)$. Ist V ein einfacher $\mathcal{A}$-Modul, so ist V zyklisch und daher wegen $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{A} < \infty$ auch endlichdimensional. Daher folgt $\rho(\mathcal{A}) \subseteq \mathbb{K}\,\mathrm{id}_V$ und wegen der Einfachheit somit $\dim_{\mathbb{K}}(V) = 1$.

Wir möchten uns nun etwas genauer mit der Struktur einfacher Moduln befassen und insbesondere deren Erzeugendensysteme untersuchen. Dabei stellt sich heraus, dass die einfachen Moduln über einem Ring R in enger Beziehung zu den zyklischen Moduln stehen.

Lemma 6.6. (Charakterisierung einfacher Moduln)

(a) *Sei R ein Ring und M ein R-Modul. Dann ist M einfach genau dann, wenn jedes Element $m \in M \setminus \{0\}$ den Modul M erzeugt. Insbesondere sind einfache Moduln zyklisch.*

(b) *Sei R unital. Für jeden Erzeuger m eines zyklischen Moduls M ist die Abbildung $\varphi_m : R \to M$, $r \mapsto r.m$ surjektiv und ihr Kern ist ein Linksideal in R. Dieses ist genau dann maximal, wenn M einfach ist.*

Beweis. (a) Ist M einfach, so ist für jedes Element $0 \neq m \in M$ der von m erzeugte Untermodul ganz M. Erzeugt umgekehrt jedes Element $m \in M \setminus \{0\}$ den ganzen Modul M, so kann er keinen echten Untermodul haben, denn jedes Element $0 \neq n$ eines Untermoduls N wäre ein Erzeuger von M.

(b) Betrachtet man R als Linksmodul über sich selbst, so ist die Abbildung $\varphi_m : R \to M$ ein R-Modulhomomorphismus, und da m den Modul erzeugt, ist φ_m surjektiv. Weiter ist $\ker \varphi_m$ ein Untermodul von R als Modul über sich selbst, also ein Linksideal.

Ist M' ein Untermodul mit $\{0\} \neq M' \subsetneq M$, also M nicht einfach, so ist $(\varphi_m)^{-1}(M')$ ein Linksideal in R mit $\ker(\varphi_m) \subsetneq (\varphi_m)^{-1}(M') \subsetneq R$, denn φ^m ist surjektiv. Also ist $\ker(\varphi^m)$ kein maximales Linksideal. Ist umgekehrt M einfach, so ist für jedes Linksideal $\mathfrak{a} \subset R$ mit $\ker(\varphi^m) \subsetneq \mathfrak{a}$ das Bild ein Untermodul von M mit $\{0\} \neq \varphi^m(\mathfrak{a})$ und somit $\varphi^m(\mathfrak{a}) = M$. Aus $\ker(\varphi_m) \supseteq \mathfrak{a}$ folgt daher $\mathfrak{a} = R$. Also ist $\ker(\varphi^m)$ ein maximales Linksideal. □

Beispiel 6.7. (a) Eine abelsche Gruppe G ist ein einfacher $\mathbb{Z}$-Modul genau dann, wenn G eine zyklische Gruppe ist, die keine echte Untergruppe besitzt, also wenn $G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ für eine Primzahl p.

(b) Der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ ist zyklisch, aber nicht einfach, denn die Elemente $\overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{6}$ erzeugen echte Untermoduln.

(c) Jede einfache Darstellung (ρ, V) einer Gruppe G über $\mathbb{K}$ ist zyklisch, und für jedes Element $v \in V \setminus \{0\}$ gilt $\mathrm{Span}\{\rho(g)v : \; g \in G\} = V$.

Wir möchten nun die Struktur von Moduln analysieren, indem wir sie auf einfache Moduln zurückführen. Im Fall von halbeinfachen Moduln ist es offensichtlich möglich, sich dabei auf direkte Summen einfacher Moduln zu beschränken. Allerdings möchte man auch allgemeine Aussagen über Moduln treffen, die nicht halbeinfach sind. Insbesondere sind die $\mathbb{Z}$-Moduln $C_{p^n} \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ mit p prim und $n > 1$ nicht halbeinfach, denn sie besitzen echte Untermoduln $C_{p^k} \cong \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ für $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Andererseits sind sie nicht zerlegbar, denn für jede Zerlegung $C_{p^n} \cong A \oplus B$ müssen A und B zyklische Gruppen, also $A \cong \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$, $B \cong \mathbb{Z}/p^\ell\mathbb{Z}$ mit $p + \ell = n$. Dies widerspricht der Tatsache, dass C_{p^n} nur eine Untergruppe der Ordnung p enthält, was aber auch für A und B gilt (vgl. auch das allgemeinere Argument in Beispiele 6.2(f)). Ausgehend von den Ergebnissen für Hauptidealringe, ist es naheliegend, Moduln zu untersuchen, die sich als (endliche) aufsteigende Kette von Untermoduln ausdrücken lassen, so dass die Quotienten aufeinanderfolgender Untermoduln einfach sind. Dies führt auf das Konzept eines Moduls endlicher Länge und der Kompositionsreihe.

6.2 Moduln endlicher Länge

Definition 6.8. Sei R ein Ring und M ein R-Modul. Dann heißt M *Modul endlicher Länge* über R, wenn es eine endliche Kette von Untermoduln

$$\{0\} = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_n = M$$

gibt, so dass alle Quotientenmoduln M_i/M_{i-1} einfach sind. Eine solche Kette bezeichnet man als *Kompositionsreihe* von M und die Moduln M_i/M_{i-1} als *Subquotienten* oder *Kompositionsfaktoren*. Die *Länge* $\ell(M)$ des Moduls M ist die minimale Länge n einer Kompositionsreihe von M.

Allgemein nennt man eine endliche Kette von Untermoduln

$$\{0\} = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_n = M$$

eine *Filtrierung von M*.

Beispiel 6.9. (a) Jede endliche direkte Summe einfacher Moduln ist ein Modul endlicher Länge. Denn ist $M = \bigoplus_{i=1}^n N_i$ mit einfachen R-Moduln $N_1, \ldots, N_n$ und setzt man $M_k = \bigoplus_{i=1}^k N_i$, so definiert dies eine Kompositionsreihe von M

$$0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_{n-1} \subset M_n = M$$

mit $M_i/M_{i-1} \cong N_i$.

(b) Der $\mathbb{Z}$-Modul $C_{12} \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ ist nicht halbeinfach, aber ein Modul der Länge drei. Die Kompositionsreihen von C_{12} sind gegeben durch

$$\{1\} \subseteq C_3 \subseteq C_6 \subseteq C_{12}, \quad \{1\} \subseteq C_2 \subseteq C_6 \subseteq C_{12}, \quad \{1\} \subseteq C_2 \subseteq C_4 \subseteq C_{12}.$$

(c) Der Ring $\mathbb{Z}$ als Linksmodul über sich selbst ist kein Modul endlicher Länge. In der Tat folgt aus Beispiel 6.7(a), dass jeder $\mathbb{Z}$-Modul endlicher Länge endlich ist, da alle einfachen $\mathbb{Z}$-Moduln endlich sind.

(d) Ist R ein Hauptidealring und $p \in R$ ein Primelement, so ist $M := R/p^nR$ ein Modul der Länge n. In der Tat erhalten wir durch

$$M_j := p^{n-j}R/p^nR, \quad j = 0, \ldots, n$$

eine Filtrierung von M mit

$$M_j/M_{j-1} \cong (p^{n-j}R/p^nR)/(p^{n-j+1}R/p^nR) \cong p^{n-j}R/p^{n-j+1}R \cong R/pR.$$

Für diese Rechnung verwenden wir einerseits die Noether-Sätze (Lemma 4.17) und die letzte Isomorphie folgt wie im Beweis des 3. Schritts im Beweis von Satz 5.14. Da R/pR ein Körper ist, ist es insbesondere ein einfacher R-Modul und die angegebene Filtrierung somit eine Kompositionsreihe.

Anhand von Beispiel 6.9 wird deutlich, dass es sich bei Moduln endlicher Länge um eine Verallgemeinerung endlich erzeugter halbeinfacher Moduln handelt, und da nicht jeder Modul endlicher Länge halbeinfach ist, ist dies eine echte Verallgemeinerung.

Aus den Beispielen ergibt sich außerdem, das die Kompositionsreihen für einen Modul keineswegs eindeutig sind. Allerdings haben in beiden Beispielen die verschiedenen Kompositionsreihen stets die gleiche Länge, und im ersten Beispiel sind die Subquotienten eindeutig bestimmt bis auf deren Reihenfolge.

Ebenso fällt auf, dass im zweiten Beispiel in allen drei Kompositionsreihen jeweils zweimal der Subquotient

$$C_2 \cong C_{12}/C_6 \cong C_6/C_3 \cong C_4/C_2$$

und einmal der Subquotient

$$C_3 \cong C_{12}/C_4 \cong C_6/C_2$$

auftritt. Analog könnte man zeigen, dass für den $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ gerade die Moduln $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ für die Primteiler p von n als Subquotienten auftreten und zwar jeweils so oft wie p in der Primfaktorzerlegung von n vorkommt. Dass dies Teil eines allgemeineren Musters ist, ist die Aussage des Satzes von Jordan–Hölder.

Satz 6.10. (Satz von Jordan–Hölder)

(a) *Ist M ein R-Modul endlicher Länge, so auch jeder Quotienten- und Untermodul von M, und es gilt für jeden Untermodul $N \subset M$:*

$$\ell(M/N) + \ell(N) = \ell(M).$$

(b) *Zwei Kompositionsreihen eines R-Moduls M haben die gleiche Länge und bis auf die Reihenfolge isomorphe Subquotienten: Sind*

$$\{0\} = M_0 \subset \ldots \subset M_n = M \quad \text{und} \quad \{0\} = M'_0 \subset \ldots \subset M'_k = M$$

Kompositionsreihen, so ist $k = n$, und es treten, inklusive Vielfachheiten, die gleichen Kompositionsfaktoren auf.

Beweis. (a) Sei $\{0\} = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_n = M$ eine Kompositionsreihe von M und $N \subset M$ ein Untermodul. Wir zeigen zunächst, dass wir aus dieser Kompositionsreihe von M Kompositionsreihen des Untermodul $N \subset M$ und des Quotienten M/N konstruieren können, so dass die Summe derer Längen gerade die Länge der Kompositionsreihe von M ist.

Sei dazu $\pi : M \to \overline{M} = M/N$ die kanonische Surjektion. Wir setzen $N_i = M_i \cap N$, $\overline{M}_i := \pi(M_i)$ und betrachten die Filtrierungen

$$\{0\} = \overline{M_0} \subset \overline{M}_1 \subset \ldots \subset \overline{M_n} = M/N, \quad \{0\} = N_0 \subset N_1 \subset \ldots \subset N_n = N.$$

Wir zeigen zunächst, dass jeder Subquotient dieser Filtrierungen $\{0\}$ oder einfach ist. Dazu betrachten wir die R-Modulhomomorphismen

$$f_i : N_i/N_{i-1} \to M_i/M_{i-1}, \quad [n]_{N_{i-1}} \mapsto [n]_{M_{i-1}}$$

und die von der kanonischen Surjektion $\pi : M \to M/N$ induzierten R-Modulhomomorphismen

$$g_i : M_i/M_{i-1} \to \overline{M_i}/\overline{M_{i-1}}, \quad [m]_{M_{i-1}} \mapsto [\pi(m)]_{\pi(M_{i-1})}.$$

Da M_i/M_{i-1} einfach ist, folgt mit Lemma 6.3, dass f_i surjektiv oder 0 ist und g_i injektiv oder $g_i = 0$ gilt. Außerdem ist f_i injektiv, denn aus $f_i([n]_{N_{i-1}}) = 0$ mit $n \in N_i$ folgt $n \in M_{i-1} \cap N_i = N_{i-1}$ und somit $[n]_{N_{i-1}} = 0$. Es ist klar, dass g_i surjektiv ist. Außerdem gilt

$$\ker(g_i) = \big((M_{i-1} + N) \cap M_i\big)/M_{i-1} = (M_{i-1} + N_i)/M_{i-1} = \mathrm{im}(f_i)$$

und somit $\mathrm{im}(f_i) = \ker(g_i)$.

Setzt man diese Aussagen zusammen, so erhält man, dass entweder f_i bijektiv ist und $g_i = 0$ oder $f_i = 0$ und g_i bijektiv ist. Im ersten Fall hat man $\overline{M_i}/\overline{M_{i-1}} = \{0\}$ und $N_i/N_{i-1} \cong M_i/M_{i-1}$, im zweiten $\overline{M_i}/\overline{M_{i-1}} \cong M_i/M_{i-1}$ und $N_i/N_{i-1} = \{0\}$.

Wir entfernen nun aus der Filtrierung $\{0\} = N_0 \subset N_1 \subset \ldots \subset N_n = N$ alle Untermoduln N_i mit $N_i/N_{i-1} = \{0\}$ und aus der Filtrierung $\{0\} = \overline{M_0} \subset \overline{M_1} \subset \ldots \subset \overline{M_n} = N$ alle Untermoduln $\overline{M_i}$ mit $\overline{M_i}/\overline{M_{i-1}} = \{0\}$. Damit haben wir Kompositionsreihen von N und $\overline{M} = M/N$ konstruiert, deren Längen zusammen gerade die Länge der Kompositionsreihe von M ergeben. Damit folgt insbesondere, dass jeder Untermodul und Quotient eines Moduls endlicher Länge ein Modul endlicher Länge ist.

(b) Wir beweisen nun, dass je zwei Kompositionsreihen eines Moduls die gleiche Länge haben. Die Beweisidee ist Induktion über die Länge des Moduls. Existiert eine Kompositionsreihe der Länge null, so ist offensichtlich, dass auch alle weiteren Kompositionsreihen Länge null haben. Sei nun bereits gezeigt, dass für Moduln der Länge $r \leq n$ folgt, dass *alle* Kompositionsreihen des Moduls Länge r haben. Sei M ein Modul der Länge $n+1$ mit einer Kompositionsreihe

$$\{0\} = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_{n+1} = M \quad \text{ und } \quad \{0\} = M'_0 \subset M'_1 \subset \ldots \subset M'_k = M$$

eine weitere Kompositionsreihe von M. Dann erhält man durch Faktorisierung nach dem Untermodul $M_1 \neq \{0\}$ zwei Kompositionsreihen des Moduls M/M_1. Nach dem ersten Beweisschritt haben diese Länge n und $k-1$, denn $\{0\} \subset M_1$ ist eine Kompositionsreihe des Moduls M_1 der Länge eins. Mit der Induktionsvoraussetzung folgt nun $n = k-1$ und somit haben die zwei betrachteten Kompositionsreihen die gleiche Länge.

(c) Wir beweisen die Eindeutigkeit der Subquotienten bis auf deren Reihenfolge und Isomorphie. Dazu betrachten wir die folgende Situation: Ist $N \subset M$ ein *einfacher* Untermodul und $\{0\} = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_n = M$ eine beliebige Kompositionsreihe eines Moduls M, so ist für jeden Untermodul M_i der Modul $N_i = N \cap M_i$ ein Untermodul von N und daher $N \cap M_i = \{0\}$ oder $N \cap M_i = N$. Also existiert genau ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $N \cap M_{i-1} = \{0\}$ und $N \cap M_i = N$. Es folgt $N \cong M_i/M_{i-1}$, und nach (a) ist

$$\{0\} \subset \pi(M_1) \subset \ldots \subset \pi(M_{i-1}) \subset \pi(M_{i+1}) \subset \ldots \subset \pi(M_n) = M/N$$

mit der kanonischen Surjektion $\pi : M \to M/N$ eine Kompositionsreihe des Moduls M/N.

Die Eindeutigkeit der Subquotienten folgt mit vollständiger Induktion über die Länge des Moduls. Für $\ell(M) = 1$ ist sie offensichtlich. Sei die Aussage nun bereits bewiesen für Moduln der Länge $\ell(M) \leq n-1$. Sei M ein Modul der Länge $\ell(M) = n$ und

$$\{0\} \subset M_1 \subset \ldots \subset M_n = M, \qquad \{0\} \subset M_1' \subset \ldots \subset M_n' = M \tag{31}$$

zwei Kompositionsreihen von M. Dann ist $M_1 \subset M$ ein einfacher Untermodul von M und somit existiert genau ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $M_1 \cap M_{i-1}' = \{0\}$, $M_1 \cap M_i' = M_1$ (also $M_1 \subseteq M_i'$) und somit $M_i'/M_{i-1}' \cong M_1$ bzw. $M_i' = M_1 + M_{i-1}'$. Durch Quotientenbildung erhält man nun zwei Kompositionsreihen

$$\{0\} \subset M_2/M_1 \subset \ldots \subset M_n/M_1 = M/M_1$$

und

$$\{0\} \subset \pi(M_1') \subset \ldots \subset \pi(M_{i-1}') \subset \pi(M_{i+1}') \subset \ldots \subset \pi(M_n') = M/M_1,$$

wobei $\pi : M \to M/M_1$ die kanonische Surjektion bezeichnet.

Nach Induktionsvoraussetzung stimmen die auftretenden Kompositionsfaktoren

$$(M_{j+1}/M_1)/(M_j/M_1) \cong M_{j+1}/M_j, \quad j = 1, \ldots, n-1,$$

bis auf ihre Reihenfolge genau mit den folgenden Kompositionsfaktoren überein:

$$\begin{aligned}
\pi(M_{j+1}')/\pi(M_j') &\cong \big((M_{j+1}' + M_1)/M_1\big)/\big((M_j' + M_1)/M_1\big) \cong M_{j+1}'/M_j', \quad 0 \leq j \leq i-2 \\
\pi(M_{j+1}')/\pi(M_j') &\cong (M_{j+1}'/M_1)/(M_j'/M_1) \cong M_{j+1}'/M_j', \qquad\qquad i+1 \leq j \leq n-1 \\
\pi(M_{i+1}')/\pi(M_{i-1}') &\cong (M_{i+1}'/M_1)/\big((M_{i-1}' + M_1)/M_1\big) \cong M_{i+1}'/(M_1 + M_{i-1}') \cong M_{i+1}'/M_i'.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass die Kompositionsfaktoren der Kompositionsreihen in (31) bis auf die Reihenfolge die gleichen sind. Die Aussage ist damit bewiesen für Moduln der Länge $\ell(M) \leq n$. $\square$

Aus dem Satz von Jordan–Hölder lassen sich insbesondere Aussagen über Ringe gewinnen, die als Linksmodul über sich selbst ein Modul endlicher Länge sind. In diesem Fall folgt insbesondere, dass jeder einfache R-Modul als Quotient in einer Kompositionsreihe von R auftritt. Bezüglich der Kompositionsreihen spielt R als Modul über sich selbst also eine ähnliche Rolle wie die reguläre Darstellung einer endlichen Gruppe G: Jeder einfache Modul tritt als Subquotient in dieser Kompositionsreihe auf, genau wie jede einfache Darstellung einer endlichen Gruppe G in der regulären Darstellung enthalten ist (Satz 3.27).

Korollar 6.11. *Sei R ein Ring, der als Linksmodul über sich selbst endliche Länge hat. Dann tritt jeder einfache R-Modul in jeder Kompositionsreihe von R als Subquotient auf.*

Beweis. Sei M ein einfacher R-Modul. Dann ist nach Lemma 6.6 jedes Element $m \in M \setminus \{0\}$ ein Erzeuger von M, und wir erhalten einen surjektiven R-Modulhomomorphismus

$$\varphi_m : R \to M, \quad r \mapsto r.m,$$

also $M \cong R/\mathfrak{a}$ für $\mathfrak{a} := \ker(\varphi_m)$ (Lemma 4.17). Ist

$$\{0\} = \mathfrak{a}_0 \subset \ldots \subset \mathfrak{a}_k = \mathfrak{a}$$

eine Kompositionsreihe (deren Existenz folgt aus dem Satz von Jordan–Hölder), so ist $\{0\} = \mathfrak{a}_0 \subset \ldots \subset \mathfrak{a} \subset R$ eine Kompositionsreihe von R und nach Satz 6.10 tritt der Subquotient $M \cong R/\mathfrak{a}$ somit in jeder Kompositionsreihe von R als Subquotient auf. □

Beispiel 6.12. (Matrizenringe) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $R := M_n(\mathbb{K})$ der Ring der $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{K}$. Für jedes $k \leq n$, erhalten wir ein Linksideal

$$\mathfrak{a}_k := \{A = (a_{ij})\colon j > k \Rightarrow (\forall i)\ a_{ij} = 0\}.$$

Die Elemente von $\mathfrak{a}_k$ sind also Matrizen der Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\{0\} \subset \mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \cdots \mathfrak{a}_n = R$$

und die Moduln $\mathfrak{a}_{i+1}/\mathfrak{a}_i$ sind jeweils isomorph zum Modul $\mathbb{K}^n$ der Spaltenvektoren mit $A.\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ (Matrixprodukt). Da diese Moduln einfach sind (Übung), bilden die $\mathfrak{a}_i$ eine Kompositionsreihe des Linksmoduls $M_n(\mathbb{K})$ über sich selbst. Der Modul hat also insbesondere die Länge n.

Insbesondere kann man den Satz von Jordan–Hölder dazu benutzen, um in bestimmten Spezialfällen eine Aussage über die Anzahl der Isomorphieklassen einfacher R-Moduln zu gewinnen. Dazu betrachtet man Ringe wie etwa den Gruppenring $R = \mathbb{K}[G]$ oder den Endomorphismenring $R = \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ eines $\mathbb{K}$-Vektorraums, die einen Körper $\mathbb{K}$ als Teilring enthalten. In diesem Fall ist jeder R-Modul auch ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Insbesondere gilt das für den Ring R als Linksmodul über sich selbst und für jeden Subquotienten in seiner Kompositionsreihe. Die Dimension von R ist dann die Summe der Dimensionen der Subquotienten, und man erhält eine Beziehung zwischen der Länge einer Kompositionsreihe und der Dimension von R.

Korollar 6.13. *Sei R ein Ring, der einen Körper $\mathbb{K}$ als unitalen Unterring enthält. Dann ist R ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Ist R endlichdimensional, so gibt es maximal $\dim_{\mathbb{K}}(R)$ verschiedene Isomorphieklassen von einfachen R-Moduln.*

Beweis. Ist $\mathbb{K}$ ein Unterring von R, so ist jeder R-Modul M auch ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Insbesondere gilt dies für R als Linksmodul über sich selbst. Da dieser nach Voraussetzung ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist, folgt außerdem, dass R ein Modul endlicher Länge ist. Denn jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset R$ ist ein Untervektorraum von R und aus $\mathfrak{a} \subsetneq \mathfrak{a}'$ folgt $\dim_{\mathbb{K}}(\mathfrak{a}') > \dim_{\mathbb{K}}(\mathfrak{a})$. Jede Filtrierung durch Linksideale ist also in einer maximalen Filtrierung enthalten und diese ist eine Kompositionsreihe. Nun tritt nach Korollar 6.11 jeder einfache R-Modul M als ein Subquotient in einer Kompositionsreihe $\{0\} = R_0 \subset \ldots \subset R_k = R$ von R auf und es folgt:

$$\dim_{\mathbb{K}}(R) = \dim_{\mathbb{K}} M_1 + \dim_{\mathbb{K}}(M_2/M_1) + \ldots + \dim_{\mathbb{K}}(R/M_{k-1}) \geq k.$$

Also kann es maximal $\dim_{\mathbb{K}}(R)$ Isomorphieklassen einfacher R-Moduln geben. □

6.3 Halbeinfache Moduln

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Struktur halbeinfacher Moduln, also von Moduln, die direkte Summen einfacher Moduln sind. Das Ziel ist eine Verallgemeinerung der Resultate, die in Kapitel 3 für die endlichdimensionalen halbeinfachen Darstellungen endlicher Gruppen erzielt wurden. Dazu müssen wir uns zunächst noch genauer mit den Eigenschaften der Untermoduln halbeinfacher Moduln befassen.

Satz 6.14. *Sei R ein Ring und M ein R-Modul. Dann sind äquivalent:*

(i) *M ist halbeinfach.*

(ii) *M ist die (nicht-notwendigerweise direkte) Summe einfacher Untermoduln.*

(iii) *Jeder Untermodul $N \subset M$ besitzt ein Komplement, d.h. es existiert ein Untermodul $N' \subset M$ mit $M = N \oplus N'$.*

Beweis. Offensichtlich gilt (i) ⇒ (ii). Wir zeigen (ii) ⇒ (iii) und (iii) ⇒ (i).

(ii) ⇒ (iii): Sei M Summe einfacher Moduln und $N \subseteq M$ ein Untermodul. Wir betrachten die Menge $\mathcal{M}$ aller Mengen einfacher Untermoduln, deren Summe N nur in der 0 schneidet. Wir ordnen sie durch Inklusion. Dann hat jede Kette in $\mathcal{M}$ eine obere Schranke (ihre Vereinigung), und das Zornsche Lemma liefert ein maximales Element $\{V_i : i \in I\}$ von $\mathcal{M}$. Sei $N' := \sum_{i \in I} V_i$. Wir haben zu zeigen, dass N' ein Modulkomplement von N ist. Zunächst ist $N \cap N' = \{0\}$ und es bleibt $N + N' = M$ zu zeigen.

Ist dies nicht der Fall, so existiert wegen (ii) ein einfacher Untermodul $W \subseteq M$, der nicht in $N + N'$ enthalten ist und damit (wegen der Einfachheit von W) $W \cap (N + N') = \{0\}$ erfüllt.

Also ist die Summe $N + N' + W \cong N \oplus N' \oplus W$ direkt. Wegen der Maximalität von N' ist $(N' + W) \cap N \neq \{0\}$, im Widerspruch zur Direktheit der Summe. Also ist $M = N + N'$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): (a) Wir zeigen zuerst, dass sich die Eigenschaft (iii) auf Untermoduln vererbt. Dazu nehmen wir an, dass M (iii) erfüllt und $N \subseteq M$ ein Untermodul ist. Ist nun $U \subseteq N$ ein Untermodul und $U' \subseteq M$ dazu ein Modulkomplement, so folgt aus $M = U \oplus U'$ und $U \subseteq N$ schon $N = U \oplus (U' \cap N)$.

(b) Jetzt zeigen wir, dass jeder Modul W, der die Bedingung (iii) erfüllt, einen einfachen Untermodul enthält. Dazu sei $0 \neq w \in W$ und $W = \langle w \rangle_R \oplus W'$. Da auch $\langle w \rangle_R$ nach (a) die Bedingung (iii) erfüllt, dürfen wir $W = \langle w \rangle_R$ annehmen. Wir betrachten die Menge $\mathcal{M}$ aller Untermoduln $U \subseteq W$, die w nicht enthalten und ordnen $\mathcal{M}$ durch Mengeninklusion. Man sieht nun leicht ein, dass jede Kette in $\mathcal{M}$ eine obere Schranke hat (ihre Vereinigung), so dass die Existenz eines maximalen Elements $U \in \mathcal{M}$ aus dem Zornschen Lemma folgt. Nach Voraussetzung existiert ein komplementärer Untermodul U' zu U in W. Ist nun $\{0\} \neq U_1' \subseteq U'$ ein Untermodul, so folgt aus der Maximalität von U, dass $w \in U + U_1'$ ist. Aus $W = \langle w \rangle_R$ folgt daher $W = U + U_1'$, also $U_1' = U'$, da $W \cong U \oplus U'$. Hieraus folgt, dass U' einfach ist.

(c) Jetzt zeigen wir, dass (i) aus (iii) folgt. Hierzu betrachten wir die Menge $\mathcal{M}$ aller Mengen einfacher Untermoduln, deren Summe direkt ist. Wir ordnen die Menge $\mathcal{M}$ durch Inklusion. Dann hat jede Kette eine obere Schranke (ihre Vereinigung), und das Zornsche Lemma liefert ein maximales Element $\{V_i \colon i \in I\}$ von $\mathcal{M}$. Sei $W := \sum_{i \in I} V_i \cong \bigoplus_{i \in I} V_i$. Wir haben $W = M$ zu zeigen. Sei hierzu $M = W \oplus W'$ für ein Modulkomplement W'. Ist $W' \neq \{0\}$, so existiert wegen (a) ein einfacher Untermodul $U \subseteq W'$. Also ist die Summe $U + \sum_{i \in I} V_i$ direkt, im Widerspruch zur Maximalität der Familie $\{V_i \colon i \in I\}$. Wir erhalten daher (i). □

Korollar 6.15. *Jeder Untermodul und jeder Quotient eines halbeinfachen Moduls ist halbeinfach.*

Beweis. Unter (a) im Beweis von Satz 6.14 (iii)$\Rightarrow$ (ii) haben wir bereits gesehen, dass sich Halbeinfachheit auf Untermoduln vererbt.

Ist $U \subseteq M$ ein Untermodul, so existiert nach Satz 6.14 ein Komplement U' mit $M = U \oplus U'$. Daraus folgt $M/U \cong U'$, und nach dem ersten Beweisschritt ist U' halbeinfach. □

Man kann einen halbeinfachen Modul M beschreiben, indem man eine Menge einfacher Untermoduln von M betrachtet, die zusammen den Modul M erzeugen. Da es dabei auch nicht zueinander isomorphe einfache Untermoduln geben kann, stellt sich allerdings die Frage, ob man so bis auf Isomorphie alle einfachen Untermoduln von M erfasst hat, oder ob es weitere einfache Untermoduln oder einfache Quotienten bezüglich Untermoduln gibt, die in dieser Sammlung von erzeugenden Untermoduln nicht auftreten. Dass dies nicht der Fall ist, zeigt das folgende Lemma.

Lemma 6.16. *Sei M ein halbeinfacher R-Modul und $(L_i)_{i \in I}$ eine Familie einfacher Untermoduln mit $M = \sum_{i \in I} L_i$. Dann existiert zu jedem einfachen Untermodul $L \subset M$ ein i mit*

$L \cong L_i$ und zu jedem Untermodul $N \subset M$, für den der Quotient M/N einfach ist, ein $j \in I$ mit $M/N \cong L_j$,

Beweis. (a) Sei $N \subset M$ ein Untermodul von M und M/N einfach sowie $\pi : M \to M/N$ die kanonische Surjektion. Dann existiert mindestens ein $i \in I$ mit $\pi(L_i) \neq \{0\}$. Die Abbildung $\pi|_{L_i} : L_i \to M/N$ ist ein R-Modulhomomorphismus zwischen einfachen Moduln und wegen $\pi(L_i) \neq \{0\}$ nach dem ersten Schurschen Lemma 6.3 ein Isomorphismus.

(b) Sei nun $L \subset M$ ein einfacher Untermodul. Da M halbeinfach ist, gibt es nach Satz 6.14 einen Untermodul $L' \subset M$ mit $M = L \oplus L'$. Also ist $M/L' \cong L$ einfach, und nach (a) existiert ein $i \in I$ mit $L \cong M/L' \cong L_i$. □

Dieses Ergebnis suggeriert, dass es sinnvoll ist, habeinfache Moduln über einem Ring R durch ihre einfachen Untermoduln zu charakterisieren. Wie im Fall der Klassifikation von Darstellungen interessiert man sich dabei für die einfachen Moduln jeweils nur bis auf Isomorphie. Daher betrachtet man die Summe seiner einfachen R-Moduln einer bestimmten Isomorphieklasse. Dies führt auf das Konzept der isotypischen Komponenten.

Definition 6.17. Sei R ein Ring. Wir schreiben

$$\widehat{R} = \{[L] \colon L \text{ einfacher } R\text{-Modul } \}$$

für die Menge der Äquivalenzklassen einfacher R-Moduln.

Sei M ein R-Modul. Für jeden einfachen R-Modul L ist die *isotyische Komponente* von M vom Typ L definiert als die Summe

$$M_L = \sum_{U \subset M \text{ Untermodul}, U \cong L} U.$$

Da dieser Untermodul nur von der Äquivalenzklasse $[L]$ von L abhängt, setzen wir auch

$$M_{[L]} := M_L.$$

Der *Sockel* von M ist die Summe aller einfachen Untermoduln von M

$$\mathrm{Soc}(M) = \sum_{U \subset M \text{ einfacherUntermodul}} U.$$

Satz 6.18. (Isotypische Zerlegung des Sockels)

(a) *Der Sockel eines R-Moduls M ist der größte halbeinfache Untermodul von M in dem Sinne, dass er jeden halbeinfachen Untermodul enthält. Insbesondere ist M halbeinfach genau dann, wenn $M = \mathrm{Soc}(M)$.*

(b) $\mathrm{Soc}(M) \cong \bigoplus_{[L] \in \widehat{R}} M_{[L]}$.

Beweis. (a) Nach Satz 6.14 ist der Sockel von M ein halbeinfacher Untermodul von M. Ist $N \subseteq M$ ein weiterer halbeinfacher Untermodul von M, so ist N die Summe seiner einfachen Untermoduln F. Da alle solche Untermoduln F im Sockel enthalten sind, ist $N \subseteq \mathrm{Soc}(M)$.

(b) Als halbeinfacher Modul ist $\mathrm{Soc}(M)$ nach Satz 6.14 die Summe einfacher Untermoduln. Also gilt $\mathrm{Soc}(M) = \sum_{[L]\in\widehat{R}} M_{[L]}$. Zu zeigen ist, dass diese Summe direkt ist, also

$$M_{[L]} \cap \Big(\sum_{[L']\neq[L]} M_{[L']} \Big) = \{0\} \quad \text{für alle} \quad [L] \in \widehat{R}.$$

Ist dies nicht der Fall, so existiert ein $[L]$ mit

$$U := M_{[L]} \cap \Big(\sum_{[L']\neq[L]} M_{[L']} \Big) \neq \{0\}.$$

Dann ist auch der Modul U als Untermodul des halbeinfachen Moduls M halbeinfach und enthält daher einen einfachen Untermodul N. Dies impliziert $N \subset M_{[L]}$, und mit Lemma 6.16 folgt $N \cong L$. Andererseits ist $N \subset \sum_{[L']\neq[L]} M_{[L']}$, und mit Lemma 6.16 folgt $N \cong L'$ für ein $[L'] \neq [L]$. Dies ist ein Widerspruch. □

Beispiel 6.19. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über dem algebraisch abgeschlossenen Körper $\mathbb{K}$ und $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$. Wir betrachten V als Modul des Rings $R := \mathbb{K}[X]$ mit $X.v := \varphi(v)$ (Aufgabe 4.11). Die Untermoduln von V sind dann genau die φ-invarianten Unterräume $W \subseteq V$. Ist $W \neq \{0\}$, so besitzt $\varphi|_W$ einen Eigenvektor. Die einfachen Untermoduln sind also eindimensional und erzeugt von einem Eigenvektor. Daher ist der Sockel $\mathrm{Soc}(V)$ der Unterraum, der von den Eigenvektoren von φ aufgespannt wird.

Die isotypische Zerlegung charakterisiert halbeinfache Moduln vollständig durch einfache Untermoduln. Insbesondere erhalten wir daraus die Folgerung, dass jeder endlich erzeugte halbeinfache Modul ein Modul endlicher Länge ist, sowie eine explizite Beschreibung halbeinfacher Moduln endlicher Länge.

Korollar 6.20. *Für einen halbeinfachen R-Modul M sind äquivalent:*

(a) *M ist ein Modul endlicher Länge.*

(b) *M ist endlich erzeugt.*

(c) *$M \cong \bigoplus_{i=1}^r L_i^{n_i}$, wobei die Moduln L_i einfach und paarweise nicht isomorph sind sowie $n_i \in \mathbb{N}_0$.*

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b): Sei $M_0 = \{0\} \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_n = M$ eine Kompositionsreihe von M und $m_i \in M_i \setminus M_{i-1}$ für $i = 1, \ldots, n$. Wir zeigen durch Induktion nach k, dass $M_k = \langle m_1, \ldots, m_k \rangle_R$ gilt. Für $k = 0$ ist das klar. Gilt es für ein $k < n$, so ist $N := \langle m_1, \ldots, m_{k+1} \rangle_R \subseteq M_{k+1}$ ein

Untermodul, der M_k echt enthält. Da M_{k+1}/M_k einfach ist, folgt $N = M_{k+1}$. Für $k = n$ sehen wir, dass M endlich erzeugt ist.

(b) $\Rightarrow$ (c): Ist $M = \bigoplus_{i\in I} L_i$ mit einfachen Moduln L_i, so ist jedes Element m eines Erzeugendensystems von M eine endliche Summe $m = \ell_{i_1} + \ldots + \ell_{i_n}$ mit $\ell_{i_k} \in L_{i_k}$. Da ein endliches Erzeugendensystem existiert, muss es somit eine endliche Teilmenge $J \subset I$ geben mit $M = \bigoplus_{i\in J} L_i$ und damit auch $I = J$. Fassen wir jeweils isomorphe Summanden zusammen, so erhalten wir eine Zerlegung wie unter (c).

(c) $\Rightarrow$ (a) folgt aus Beispiel 6.9(a). $\square$

Als eine weitere wichtige Konsequenz von Satz 6.18 erhalten wir eine Verallgemeinerung des zweiten Schurschen Lemmas für Moduln. Nach dem ersten Schurschen Lemma 6.3 ist der Endomorphismenring eines einfachen Moduls ein Schiefkörper. Der Satz über die isotypische Zerlegung erlaubt es uns, jetzt auch explizit die Endomorphismenringe halbeinfacher Moduln endlicher Länge zu bestimmen.

Satz 6.21. *Sei M ein halbeinfacher Modul endlicher Länge über einem Ring R und $M = \bigoplus_{i=1}^r L_i^{m_i}$ seine isotypische Zerlegung sowie $\mathbb{D}_i := \mathrm{End}_R(L_i)$. Dann ist*

$$\mathrm{End}_R(M) \cong \bigoplus_{i=1}^r M_{m_i}(\mathbb{D}_i)$$

eine endliche direkte Summe von Matrixringen über Schiefkörpern.

Beweis. Da nach Lemma 6.3 $\mathrm{Hom}_R(L_i, L_j) = \{0\}$ für $i \neq j$ gilt, folgt

$$\mathrm{Hom}_R(L_i^{m_i}, L_j^{m_j}) \cong \mathrm{Hom}_R(L_i, L_j)^{m_i m_j} = \{0\} \quad \text{für} \quad i \neq j.$$

Also ist

$$\begin{aligned} \mathrm{End}_R(M) &\cong \bigoplus_{i,j=1}^r \mathrm{Hom}_R(L_i^{m_i}, L_j^{m_j}) \cong \bigoplus_{i=1}^r \mathrm{End}_R(L_i^{m_i}) \\ &\cong M_{m_1}(\mathrm{End}_R(L_1)) \oplus \ldots \oplus M_{m_r}(\mathrm{End}_R(L_r)) \end{aligned}$$

(vgl. Bemerkung 2.5), und nach Lemma 6.3 sind die Endomorphismenringe $\mathbb{D}_i = \mathrm{End}_R(L_i)$ Schiefkörper. $\square$

Wir möchten uns nun noch detaillierter mit den Endomorphismen halbeinfacher R-Moduln M beschäftigen, die mit allen R-Modulendomorphismen kommutieren. Es wird sich zeigen, dass diese ein sehr nützliches Hilfsmittel zur Klassifizierung von halbeinfachen Moduln darstellen.

Beispiel 6.22. Für jeden R-Modul M bilden die R-Modulendomorphismen von M mit der punktweisen Addition und der Verkettung einen Ring, der als *Endomorphismenring* des R-Moduls M und mit $R'_M := \mathrm{End}_R(M)$ bezeichnet wird. Die abelsche Gruppe M ist dann auch ein Modul über dem Ring R'_M mit Strukturabbildung

$$\mu : R'_M \times M \to M, \quad \mu(\varphi, m) = \varphi.m = \varphi(m).$$

Die Modulendomorphismen des R'_M-Moduls M bilden wieder einen Ring $R''_M := \mathrm{End}_{\mathrm{End}(R)}(M)$ (Aufgabe 6.1). Per Definition enthält dieser den Ring

$$R_M := \{\varphi_r \colon r \in R\}, \qquad \varphi_r(m) = r.m,$$

denn für jeden R-Modulhomomorphismus $\varphi : M \to M$ ist $\varphi(r.m) = r.\varphi(m)$. Da R''_M ein Unterring von $\mathrm{End}(M)$ ist, ist die Abbildung $\Phi : R \to R''_M, r \mapsto \varphi_r$ ein Ringhomomorphismus. Dieser spielt eine wichtige Rolle, und wir werden ihn in Abschnitt 6.3 noch genauer untersuchen.

Dabei stellte sich insbesondere die Frage nach der Injektivität und Surjektivität von Φ. Diese Fragen werden wir nun unter geeigneten Voraussetzungen beantworten. Um uns mit diesen Strukturen vertraut zu machen, betrachten wir zunächst einige Beispiele.

Beispiele 6.23. (a) Sei $R = \mathbb{K}$ ein Körper und $\{0\} \neq V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum positiver Dimension. Dann ist der Ringhomomorphismus $\Phi : \mathbb{K} \to \mathbb{K}''_V = \mathrm{End}_{\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)}(V)$, $\lambda \mapsto \lambda\,\mathrm{id}_V$ offensichtlich injektiv. Der Ring $\mathbb{K}''_V$ ist der Ring der Gruppenhomomorphismen $V \to V$, die mit allen Vektorraumendomorphismen $V \to V$ kommutieren. Insbesondere müssen solche Gruppenhomomorphismen $\mathbb{K}$-linear sein, denn $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ enthält alle Skalarmultiplikationen $\mathbb{K}\,\mathrm{id}_V$. Ein Vektorraumendomorphismus, der mit allen Vektorraumendomorphismen $V \to V$ kommutiert, ist notwendigerweise ein Vielfaches der Identität (Aufgabe 6.3) und somit ist Φ auch surjektiv. d.h. $\mathbb{K}_V = \mathbb{K}''_V$.

(b) Allgemein gilt für einen kommutativen Ring R und einen R-Modul M die Beziehung $R_M \subseteq R'_M = \mathrm{End}_R(M)$. Also ist für kommutative Ringe R der Ring der R''_M ein Unterring von R'_M. Wir haben dann

$$R''_M = Z(R'_M) = \{\psi \in \mathrm{End}_R(M) \colon (\forall \varphi \in \mathrm{End}_R(M))\ \varphi\psi = \psi\varphi\}$$

und insbesondere ist R''_M auch kommutativ.

(c) Ist R ein Schiefkörper und $M \neq \{0\}$, so ist $\Phi : R \to R''_M$ injektiv, denn $\{0\}$ ist das einzige echte Ideal von R. Wir werden später zeigen, dass Φ in diesem Fall auch surjektiv, also ein Isomorphismus ist (Satz 6.33).

(d) Für $\mathbb{Z}$ als Linksmodul über sich selbst ist der Ringhomomorphismus Φ sowohl surjektiv als auch injektiv, denn jeder Endomorphismus $\psi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ist durch $\psi(1)$ eindeutig bestimmt. Ist $\psi(1) = n \in \mathbb{Z}$, so folgt $\psi(z) = n \cdot z$ für alle $z \in \mathbb{Z}$. Wir haben also einen Ringisomorphismus

$$\mathrm{End}(\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}, +, \cdot).$$

(e) Für $R = \mathbb{Z}$ und $M = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist der Ringhomomorphismus $\Phi : \mathbb{Z} \to \mathrm{End}(M)$ nicht injektiv, denn $\varphi_n : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\overline{z} \mapsto n.\overline{z} = \overline{n.z} = 0$ ist die Nullabbildung. Allerdings ist Φ surjektiv, denn jeder Gruppenendomorphismus $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist von der Form $\varphi_r : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\overline{z} \mapsto r.\overline{z} = \overline{r \cdot z}$:

$$\mathrm{End}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot).$$

Allgemein gilt ja für jeden unitalen kommutativen Ring $\mathrm{End}_R(R) \cong R$ (Beispiel 4.8).

Offensichtlich spiegeln sich in dem Ringhomomorphismus $\Phi : R \to R''_M$, $r \mapsto \varphi_r$ wichtige Eigenschaften des Rings R und des Moduls M wieder. Insbesondere suggeriert das erste Beispiel, dass die Surjektivität von Φ etwas mit der Frage zu tun haben könnte, ob der Modul M halbeinfach ist. Wir werden nun für halbeinfache Moduln über beliebigen Ringen zeigen, dass R_M in einem gewissen Sinn dicht in R''_M ist.

Theorem 6.24. (Dichtesatz von Jacobson) *Sei M ein halbeinfacher Modul des unitalen Rings R. Dann existiert zu jedem $\psi \in R''_M$ und zu endlich vielen $m_1, \dots, m_n \in M$ stets ein $r \in R$ mit $\psi(m_i) = r.m_i$ für alle $i = 1, \dots, n$.*

Beweis. (a) Sei zunächst $n = 1$. Dann ist für jedes $m \in M$ der Modul $R.m$ ein Untermodul des halbeinfachen Moduls M und besitzt nach Satz 6.14 ein Komplement. Es existiert also ein Untermodul $N \subset M$ mit $M = R.m \oplus N$. Sei $p_1 \colon M \to M, (a, b) \mapsto (a, 0)$ die Projektion auf den ersten Summanden. Dann ist p_1 ein Endomorphismus von R-Moduln und kommutiert somit mit jedem $\psi \in R''_M$. Also folgt $\psi(m) = \psi \circ p_1(m) = p_1 \circ \psi(m) \in R.m$. Somit existiert ein $r \in R$ mit $\psi(m) = r.m$.

(b) Für $n > 1$ und vorgegebene $m_1, \dots, m_n \in M$, $\psi \in R''_M$ betrachten wir die n-fache direkte Summe $M^n = M^{\oplus n}$, den R-Modulhomomorphismus

$$\psi^{\oplus n} = (\psi, \dots, \psi) : M^{\oplus n} \to M^{\oplus n}$$

und das Element $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_n)$. Dann ist

$$\psi^{\oplus n} = \mathrm{diag}(\psi, \dots, \psi) \in M_n(\mathrm{End}_R(M))' \cong \mathrm{End}_R(M^n)' = (R_{M^n})''.$$

Da M ein halbeinfacher R-Modul ist, ist auch die direkte Summe $M^{\oplus n}$ wieder ein halbeinfacher R-Modul (Satz 6.14), und die Aussage folgt dann mit dem ersten Teil des Beweises. $\square$

Der Dichtesatz von Jacobson besagt also, dass für halbeinfache Moduln M Endomorphismen $\psi : M \to M$, die mit allen R-Modulhomomorphismen kommutieren, sich auf einer beliebigen Anzahl vorgegebener Punkte durch einen R-Modulhomomorphismus der Form $\varphi_r : m \mapsto r.m$ darstellen lassen. Ist der $\mathrm{End}_R(M)$-Modul M endlich erzeugt, so bestimmt dies ψ eindeutig, und wir erhalten das folgende Korollar:

Korollar 6.25. *Sei M ein halbeinfacher R-Modul, so dass M als R'_M-Modul endlich erzeugt ist. Dann ist $R_M = R''_M$.*

Beweis. Seien $m_1, \ldots, m_n$ Erzeuger des R'_M-Moduls M. Dann existiert zu jedem $\psi \in R''_M$ nach dem Dichtesatz von Jacobson ein $r \in R$ mit $\psi(m_i) = r.m_i$, $i = 1, \ldots, n$. Da $m_1, \ldots, m_n$ ein Erzeugendensystem bzgl. R'_M ist, folgt $\psi = \varphi_r \in R_M$, da $\ker(\psi - \varphi_r)$ ein Untermodul ist. □

Als ein weiteres Korollar aus dem Satz von Jacobson erhalten wir den Satz von Wedderburn. Dieser ergibt sich, wenn wir Unterringe des Endomorphismenring eines Vektorraums über einem algebraisch abgeschlossenen Körper betrachten, so dass der Vektorraum als Modul über dem Unterring einfach ist.

Korollar 6.26. (Satz von Wedderburn) *Sei $\mathbb{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $R \subset \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ ein Unterring, so dass V ein einfacher R-Modul ist. Dann gilt $R = \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$.*

Beweis. Nach dem zweiten Schurschen Lemma (Korollar 6.4) gilt $R'_M = \mathrm{End}_R(V) = \mathbb{K}\mathbf{1} \cong \mathbb{K}$, so dass Korollar 6.25 wegen $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$ anwendbar ist. Wir erhalten daher $R = R_M = R''_M = \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$. □

Bemerkung 6.27. In der Sprache der linearen Algebra besagt der Satz von Wedderburn das Folgende: Ist $R \subset \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ ein Unterring des Rings der linearen Abbildungen $V \to V$ und existiert zu jedem Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ und $w \in V$ ein $\varphi \in R$ mit $w = \varphi(v)$, so muss R der ganze Endomorphismenring $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ sein.

Bemerkung 6.28. Sei M ein halbeinfacher R-Modul und $M = \bigoplus_{i=1}^r L_i^{m_i}$ seine isotypische Zerlegung sowie $\mathbb{D}_i := \mathrm{End}_R(L_i)$. Wir haben in Satz 6.21 gesehen, dass

$$R'_M = \mathrm{End}_R(M) \cong \bigoplus_{i=1}^r M_{m_i}(\mathbb{D}_i).$$

Da R'_M insbesondere die Projektionen auf die isotypischen Komponenten enthält, bildet R''_M ebenfalls die isotypischen Komponenten $M_{[L_i]} = L_i^{m_i}$ alle in sich ab. Wir erhalten so

$$R''_M \cong \bigoplus_{i=1}^r M_{m_i}(\mathbb{D}_i)',$$

wobei $M_{m_i}(\mathbb{D}_i)'$ für den Kommutanten von $M_{m_i}(\mathbb{D}_i)$ in $\mathrm{End}(L_i^{m_i}) \cong M_{m_i}(\mathrm{End}(L_i))$ steht. Da jede Matrix, die mit $M_{m_i}(\mathbb{Z})$ vertauscht, von der Gestalt $A \cdot \mathbf{1}$ ist (Aufgabe 6.14), erhalten wir

$$M_{m_i}(\mathbb{D}_i)' \cong \mathbb{D}'_i = \mathrm{End}_{\mathbb{D}_i}(L_i).$$

Ist L_i ein endlich erzeugter $\mathbb{D}_i$-Modul, so folgt aus Korollar 6.25 $R_{L_i} = R''_{L_i} = \mathbb{D}'_i$ und damit

$$R''_M \cong \bigoplus_{i=1}^{r} R_{L_i}.$$

Andrerseits ist dann auch $M = \bigoplus_{i=1}^{r} L_i^{m_i}$ als R'_M-Modul endlich erzeugt und daher

$$R_M = R''_M \cong \bigoplus_{i=1}^{r} R_{L_i}.$$

Ist die Darstellung von R auf M injektiv, so erhalten wir also eine direkte Zerlegung von R:

$$R \cong R_M \cong \bigoplus_{i=1}^{r} R_{L_i}.$$

6.4 Strukturtheorie halbeinfacher Ringe

Wir möchten die Resultate über (halb)einfache Moduln nun insbesondere auf Ringe anwenden, also Ringe betrachten, die (halb)einfach als Modul über sich selbst sind, und anschliessend die Moduln über solchen Ringen klassifizieren. Dabei ist zu beachten, dass ein Ring sowohl die Struktur eines R-Linksmoduls als auch eines R-Rechtsmoduls und eines (R, R)-Bimoduls über sich selbst besitzt. Wenn wir von halbeinfachen oder einfachen Ringen sprechen, müssen wir daher genau spezifizieren, auf welche dieser Modulstrukturen wir uns beziehen.

Definition 6.29. (a) Ein Ring R heißt *links(halb)einfach*, wenn er (halb)einfach als Linksmodul über sich selbst ist und *rechts(halb)einfach*, wenn er (halb)einfach als Rechtsmodul über sich selbst ist.

(b) Für einen linkshalbeinfachen Ring verwenden wir auch die abkürzende Bezeichnung *halbeinfacher Ring*.

(c) Ein Ring R heißt *einfach*, wenn er halbeinfach ist und außer $\{0\}$ und R keine *zweiseitigen* Ideale besitzt.

Bemerkung 6.30. Offensichtlich ist ein Ring linkseinfach (rechtseinfach), wenn er außer $\{0\}$ und sich selbst keine Linksideale (Rechtsideale) besitzt. Ein linkseinfacher oder rechtseinfacher Ring ist immer einfach, denn jedes zweiseitige Ideal ist ein Linksideal und ein Rechtsideal. Die Umkehrung gilt aber nicht. Ein Ring, dessen einzige zweiseitige Ideale Null und er selbst sind, muss nicht einmal halbeinfach sein, weswegen man dies in der Definition eines einfachen Rings zusätzlich fordert (Matrixringe).

Beispiele 6.31. (a) Der Ring $\mathbb{Z}$ ist nicht halbeinfach.

(b) Der Ring $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist genau dann halbeinfach, wenn in der Primfaktorzerlegung von n jede Primzahl maximal einmal auftritt, denn für $n = p_1^{m_1} \cdots p_s^{m_s}$ mit paarweise verschiedenen Primzahlen p_i und $m_i \in \mathbb{N}$ folgt mit dem chinesischen Restsatz

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p_1^{m_1}\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/p_s^{m_s}\mathbb{Z}$$

(als Isomorphie von Ringen), und der $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-Untermodul $\mathbb{Z}/p_i^{s_i}\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist genau dann einfach wenn $s_i = 1$ ist.

(c) Der Ring $M_n(\mathbb{K})$ der $n \times n$-Matrizen mit Einträgen in einem Körper $\mathbb{K}$ ist einfach, aber für $n > 1$ nicht linkseinfach (siehe Aufgabe 3.6.12).

(d) Ist R ein Schiefkörper, dann ist R als Linksmodul (Rechtsmodul) über sich selbst linkseinfach (rechtseinfach). Denn ist $U \subset R$ ein Linksideal (Rechtsideal), so existiert zu jedem $u \in U \setminus \{0\}$ ein multiplikatives Inverses $u^{-1} \in R$ mit $u \cdot u^{-1} = u^{-1} \cdot u = \mathbf{1}_R$. Also gilt entweder $U = \{0\}$ oder $\mathbf{1}_R \in U$, und letzeres impliziert $r = r \cdot \mathbf{1}_R = \mathbf{1}_R \cdot r \in U$ für alle $r \in R$, also $U = R$.

(e) Ist G eine endliche Gruppe und $\operatorname{char} \mathbb{K} \nmid |G|$, so ist der Gruppenring $\mathbb{K}[G]$ halbeinfach, denn $\mathbb{K}[G]$ ist als Linksmodul über sich selbst durch die reguläre Darstellung von G gegeben, die sich nach dem Satz von Maschke 3.20 als direkte Summe einfacher Darstellungen schreiben lässt.

Wir interessieren uns nun zunächst dafür, halbeinfache Ringe so weit wie möglich zu klassifizieren und wollen anschließend die Moduln über solchen halbeinfachen Ringen betrachten. Eine explizite Charakterisierung halbeinfacher Ringe erhält man direkt aus den Ergebnissen des letzten Abschnitts. Kombiniert man Satz 6.21 mit dem Satz über die isotypische Zerlegung, so findet man nämlich, dass sich jeder halbeinfache Ring als Produkt von Matrixringen über Schiefkörpern schreiben lässt.

Satz 6.32. (Struktursatz von Wedderburn) *Sei R ein halbeinfacher Ring mit $\mathbf{1}$. Dann existieren Schiefkörper $K_1, \ldots, K_r$ und natürliche Zahlen $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}$, so dass*

$$R \cong M_{m_1}(K_1) \oplus \ldots \oplus M_{m_r}(K_r).$$

Die Paare (m_1, K_1), $\ldots$, (m_r, K_r) sind eindeutig bestimmt bis auf Permutationen. Genau dann ist R kommutativ, wenn alle Schiefkörper K_i Körper und alle $m_i = 1$ sind, so dass R eine direkte Summe endlich vieler Körper ist.

Beweis. Da R halbeinfach ist und als Linksmodul über sich selbst endlich erzeugt, ist R nach Korollar 6.20 ein Modul endlicher Länge als Linksmodul über sich selbst, und seine isotypische Zerlegung ist von der Form $R = \bigoplus_{i=1}^r L_i^{m_i}$ mit L_i einfach, $L_i \not\cong L_j$ für $i \neq j$ und $m_i \in \mathbb{N}$. Mit Satz 6.21 ergibt sich

$$\operatorname{End}_R(R) \cong M_{m_1}(\operatorname{End}_R(L_1)) \oplus \ldots \oplus M_{m_r}(\operatorname{End}_R(L_r)),$$

wobei die Endomorphismenringe $\mathrm{End}_R(L_i)$ nach Lemma 6.3 Schiefkörper sind.

In Beispiel 4.8 haben wir gesehen, dass die Abbildung $\Psi : R^{\mathrm{op}} \to \mathrm{End}_R(R), r \mapsto \rho_r$ mit $\rho_r(r') = r' \cdot r$ für alle $r' \in R$ ein Ringisomorphismus ist. Damit folgt $\mathrm{End}_R(R) \cong R^{\mathrm{op}}$, und wir erhalten

$$\begin{aligned} R \cong (R^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} \cong (\mathrm{End}_R(R))^{\mathrm{op}} &= M_{m_1}(\mathrm{End}_R(L_1))^{\mathrm{op}} \oplus \ldots \oplus M_{m_r}(\mathrm{End}_R(L_r))^{\mathrm{op}} \\ &\cong M_{m_1}(K_1) \oplus \ldots \oplus M_{m_r}(K_r), \end{aligned}$$

wobei $K_i := \mathrm{End}_R(L_i)^{\mathrm{op}}$ den Schiefkörper $\mathrm{End}_R(L_i)$ mit der umgekehrten Multiplikation bezeichnet. Der Ringisomorphismus wird durch die Transpositionsabbildung

$$T : M_n(K) \to M_n(K^{\mathrm{op}}), \quad A = (a_{ij}) \mapsto A^\top = (a_{ji})$$

induziert.

Hier ist m_i die Vielfachheit des einfaches Linksideals L_i in R, also eindeutig durch R bestimmt, was ebenso für $K_i = \mathrm{End}_R(L_i)^{\mathrm{op}}$ gilt.

Der Ring $M_n(K)$, K ein Schiefkörper, ist genau dann kommutativ, wenn $n = 1$ und K ein Körper ist. Hieraus ergibt sich die letzte Behauptung. □

Nun widmen wir uns Moduln über halbeinfachen Ringen. Wir haben schon mehrfach gesehen, dass es einen Zusammenhang zwischen Untermoduln eines gegebenen R-Moduls M und Linksidealen im Ring R gibt. Dies suggeriert, dass die Moduln über einem linkshalbeinfachen Ring eine besonders einfache Form haben sollten, denn linkshalbeinfache Ringe lassen sich als direkte Summe von Linksidealen ohne echte Unterideale schreiben. Tatsächlich findet man, dass jeder Modul über einem (links)halbeinfachen Ring halbeinfach ist.

Satz 6.33. *Ist R ein halbeinfacher Ring, so ist jeder R-Modul halbeinfach.*

Beweis. Jeder Modul über R ist Quotient eines freien Moduls, und jeder Quotient eines halbeinfachen Moduls ist nach Satz 6.14 halbeinfach. Es reicht also, zu zeigen, dass jeder freie Modul über R halbeinfach ist. Da direkte Summen halbeinfacher Moduln halbeinfach sind, folgt aus der Halbeinfachheit von R, dass auch $R^{(I)}$ für jede Menge I halbeinfach ist. □

Dieses Ergebnis kann man wie folgt als Verallgemeinerung des Satzes von Maschke interpretieren. Er ergibt sich aus Satz 6.33 zusammen mit der Aussage, dass für eine endliche Gruppe der Gruppenring $\mathbb{K}[G]$ halbeinfach ist sofern $\mathrm{char}\,\mathbb{K} \nmid |G|$. Mit Hilfe von Satz 6.33 können wir insbesondere die Eigenschaften des Ringhomomorphismus $\Phi : R \to R''_M, r \mapsto \varphi_r$ mit $\varphi_r(m) = r.m$ aus Beispiel 6.22 untersuchen. Indem wir Satz 6.33 mit dem Satz von Jacobson bzw. Korollar 6.25 kombinieren, erhalten wir insbesondere, dass dieser Ringhomomorphismus ein Isomorphismus ist, falls es sich bei R um einen Schiefkörper handelt.

Satz 6.34. *Ist $M \neq \{0\}$ ein Modul über einem Schiefkörper R, so gilt:*

(i) *M is frei und halbeinfach.*

(ii) *Der Ringhomomorphismus* $\Phi : R \to R''_M, r \mapsto \varphi_r$ *mit* $\varphi_r(m) = r.m$ *ein Isomorphismus.*

Beweis. (i) Zunächst enthält R außer $\{0\}$ und R keine weitere Links- oder Rechstideale (Beispiele 6.31(d)). Insbesondere ist R ein halbeinfacher Ring. Aus Satz 6.33 folgt daher zunächst, dass jeder R-Modul M halbeinfach ist.

Ist N ein einfacher R-Modul, so ist N zyklisch, also von der Form $R/\mathfrak{a}$ für ein echtes Linksideal $\mathfrak{a}$. Aus $\mathfrak{a} = \{0\}$ folgt nun $N \cong R$ (als Linksmodul) und damit $M \cong R^{(I)}$ für eine Menge I.

(ii) Offensichtlich ist Φ injektiv, denn $\Phi \neq 0$, so dass $\ker \Phi$ kein invertierbares Element enthält und daher $\ker \Phi = \{0\}$ ist.

Jetzt zeigen wir, dass M als R'_M-Modul zyklisch ist. Aus (i) wissen wir, dass $M \cong R^{(I)}$ gilt. Sind $(e_i)_{i \in I}$ die zugehörigen Basiselemente, so erhalten wir durch R-lineare Fortsetzung jeder Permutation $\sigma \in S_I$ ein Element $\varphi_\sigma \in R'_M$ mit $\varphi_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$ für alle i. Insbesondere ist jedes Basiselement e_{i_0} zyklisch für R'_M. Die Behauptung folgt nun aus Korollar 6.25 (aus dem Dichtesatz von Jacobsen). □

Wir möchten nun die Klassifikation von Moduln über halbeinfachen Ringen auf die Klassifikation von Idealen in halbeinfachen Ringen zurückführen. Dies kann man als eine Verallgemeinerung von Korollar 3.54 ansehen, das besagt, dass über einem algebraisch abgeschlossenen Körper dessen Charakteristik nicht die Gruppenordnung teilt, jede endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Darstellung (ρ, V) einer endlichen Gruppe G als Summand in der Zerlegung der regulären Darstellung auf $\mathbb{K}^G$ mit Vielfachheit $\dim_{\mathbb{K}}(V)$ auftritt. Die reguläre Darstellung entspricht dabei offensichtlich dem Gruppenring $\mathbb{K}[G]$ als Linksmodul über sich selbst, und die einfachen Darstellungen entsprechen einfachen $\mathbb{K}[G]$-Moduln. Betrachtet man statt dem Gruppenring $\mathbb{K}[G]$ einen halbeinfachen Ring R, so würde die entsprechende Aussage lauten, dass jeder einfache R-Modul als Summand in der Zerlegung von R als Linksmodul über sich selbst auftreten muss. Allerdings ist in diesem fall das Konzept der Vielfachheit nicht so leicht zu fassen, da wir auch unendliche Summen einfacher R-Moduln betrachten. Daher erscheint es sinnvoll, hier stattdessen die Struktur der isotypische Zerlegung von R als Linksmodul über sich selbst zu untersuchen.

Kombiniert man den Satz über die isotypische Zerlegung mit der Beobachtung, dass ein Ring R als Linksmodul über sich selbst von seinem Einselement $\mathbf{1}_R$ erzeugt wird, so erhält man den folgenden Satz.

Satz 6.35. *Sei R ein halbeinfacher unitaler Ring. Dann gilt:*

(a) *Es gibt nur endlich viele Isomorphieklassen einfacher R-Moduln*

(b) *Ist L ein einfacher R-Modul, so ist die isotypische Komponente $R_{[L]} \subset R$ ein zweiseitiges Ideal in R.*

(c) *Wir haben eine direkte Summenzerlegung von unitalen Ringen:*

$$R \cong \bigoplus_{[L] \in \widehat{R}} R_{[L]} \quad \text{mit} \quad R_{[L]} R_{[L']} = \{0\} \quad \text{für} \quad [L] \neq [L'],$$

wobei die Ideale $R_{[L]}$ Matrizringe über Schiefkörpern sind:

$$R_{[L]} \cong M_{m_L}(\mathbb{D}_L) \quad \textit{für} \quad \mathbb{D}_L := \mathrm{End}_R(L)^{\mathrm{op}}.$$

Beweis. (a) Nach dem Satz über die isotypische Zerlegung haben wir die isotypische Zerlegung $R = \bigoplus_{[L]\in\widehat{R}} R_{[L]}$. Insbesondere können wir das Einselement als Summe $\mathbf{1}_R = \sum_{[L]} e_L$ mit $e_L \in R_{[L]}$ schreiben. Aus der Definition der direkten Summe folgt, dass $e_L \neq \{0\}$ nur für endlich viele $[L]$ gilt. Nun ist aber $R = \langle \mathbf{1}_R \rangle$ und daher treten nur endlich viele isotypische Komponenten auf.

Andererseits ist jeder einfache R-Modul L ein Quotient von R, so dass $R_{[L]} \neq \{0\}$ sein muss, denn für $[L'] \neq [L]$ ist $\mathrm{Hom}_R(R_{[L']}, L) = \{0\}$. Also ist die Menge $\widehat{R}$ endlich.

(b) Die Rechtsmultiplikationen $\rho_r(s) := sr$ auf R sind R-linear und lassen daher die isotypischen Komponenten invariant (vgl. Bemerkung 6.28). Also sind die isotypischen Komponenten $R_{[L]}$ zweiseitige Ideale in R.

(c) Wir zeigen zunächst, dass die Elemente $e_L \in R_{[L]}$ aus (a) multiplikative Einheiten in $R_{[L]}$ sind. Da die $R_{[L]}$ zweiseitige Ideale sind, gilt für $[L'] \neq [L]$ die Beziehung

$$R_{[L]} \cdot R_{[L']} \subseteq R_{[L]} \cap R_{[L']} = \{0\}.$$

Wir haben also für $r \in R_{[L]}$:

$$r = \mathbf{1}_R \cdot r = \sum_{[L']} e_{L'} \cdot r = e_L \cdot r \quad \text{und} \quad r = r \cdot \mathbf{1}_R = \sum_{[L']} r \cdot e_{L'} = r \cdot e_L.$$

Also ist jede isotypische Komponente $R_{[L]}$ ein Ring mit Einselement e_L. Wegen $R_{[L]} \cdot R_{[L']} = \{0\}$ für $[L] \neq [L']$ ist die Summenabbildung

$$\bigoplus_{[L]\in\widehat{R}} R_{[L]} \to R, \quad (r_L)_{[L]\in\widehat{R}} \mapsto \sum_{[L]} r_L$$

ein Isomorphismus unitaler Ringe. Alles weitere folgt aus dem Struktursatz von Wedderburn 6.26. □

Satz 6.33 bringt die Klassifikation einfacher Moduln über einem halbeinfachen Ring R in Zusammenhang mit der Zerlegung des Rings als kartesisches Produkt von zweiseitigen Idealen. Ist letztere bekannt, so erhält man aus ihr unmittelbar alle einfachen Untermoduln. Als eine weitere wichtige Konsequenz ergibt sich für jeden R-Modul M eine Charakterisierung der isotypischen Komponenten durch die Summanden e_L in der direkten Summenzerlegung der multiplikativen Einheit $\mathbf{1}_R$. Die Elemente e_L sind zentrale Idempotente in R.

Korollar 6.36. *Ist M ein Modul über dem halbeinfachen Ring R mit isotypischer Zerlegung $M = \bigoplus_{[L]\in\widehat{R}} M_{[L]}$ und $e_L \in R_{[L]}$ das Einselement, so gilt so gilt $M_{[L]} = e_L.M$.*

Beweis. Sei $\rho\colon R \to \mathrm{End}(M)$ gegeben durch $\rho(r)m := r.m$. Dann ist

$$\mathrm{id}_M = \rho(\mathbf{1}_R) = \sum_{[L]\in\widehat{R}} \rho(e_L)$$

eine Darstellung von id_M als endliche Summe von Idempotenten $p_L := \rho(e_L)$ mit $p_L p_{L'} = 0$ für $[L] \neq [L']$. Also ist

$$M = \bigoplus_{[L]} p_L(M) = \bigoplus_{[L]} e_L.M$$

eine direkte Summe abelscher Gruppen und die Projektion auf $e_L.M$ ist durch Anwenden von e_L gegeben.

Wegen $\mathrm{Hom}(R_{[L]}, M_{[L']}) = \{0\}$ für $[L] \neq [L']$ ist $R_{[L]}.M_{[L']} = \{0\}$, denn für jedes $m \in M$ ist $\varphi_m\colon R \to M, r \mapsto r.m$ eine R-lineare Abbildung. Daher ist $e_L.M_{[L']} = \{0\}$ für $[L] \neq [L']$ und hieraus ergibt sich

$$M_{[L]} = \mathbf{1}_R.M_{[L]} = e_L.M_{[L]} = e_L.M. \qquad \square$$

6.5 Anwendung: Fouriertransformation für endliche Gruppen

Wir behandeln nun eine interessante Anwendung der im letzten Abschnitt entwickelten Theorie auf die Darstellungstheorie von Gruppen. Dazu erinnern wir zunächst daran, dass jede Darstellung (ρ, V) einer Gruppe G über einem Körper $\mathbb{K}$ einen Ringhomomorphismus

$$\widehat{\rho} : \mathbb{K}[G] \to \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V), \qquad f = \sum_{g\in G} f(g)\delta_g \mapsto \sum_{g\in G} f(g)\rho(g)$$

induziert (Korollar 3.35). Hierbei ergab sich insbesondere die Frage, wann dieser Homomorphismus surjektiv bzw. injektiv ist. Die erste Frage lässt sich zumindest für den Fall eines algebraisch abgeschlossenen Körpers mit Hilfe des Satzes von Wedderburn (Korollar 6.26) leicht beantworten.

Satz 6.37. *Sei $\mathbb{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und (ρ, V) eine irreduzible endlichdimensionale Darstellung einer Gruppe G über $\mathbb{K}$. Dann ist der Ringhomomorphismus $\widehat{\rho} : \mathbb{K}[G] \to \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ surjektiv.*

Beweis. Offensichtlich ist das Bild $R := \mathrm{im}(\widehat{\rho}) \subset \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ ein Unterring des Endomorphismenrings. Der endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorraum V ist ein einfacher R-Modul, da es sich um eine einfache Darstellung handelt. Somit folgt mit dem Satz von Wedderburn (Korollar 6.26) die Identität $\mathrm{im}(\widehat{\rho}) = \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$. $\square$

Nun interessieren wir uns für den Kern dieses Ringhomomorphismus und untersuchen, unter welchen zusätzlichen Voraussetzungen dieser Ringhomomorphismus ein Isomorphismus ist. Intuitiv ist es naheliegend, hier eine direkte Summe einfacher Darstellungen zu betrachten, in der jede einfache endlichdimensionale Darstellung genau einmal auftritt. So wird einerseits sichergestellt, dass alle in den einfachen Darstellungen enthaltene Information über $\mathbb{K}[G]$ erfasst wird, andererseits aber die Darstellung nicht unnötig kompliziert gewählt.

Satz 6.38. (Fouriertransformation für endliche Gruppen) *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, G eine endliche Gruppe mit $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \nmid |G|$ und $(\rho_1, V_1), \ldots, (\rho_N, V_N)$ ein Repräsentantensystem der einfachen endlichdimensionalen Darstellungen von G über $\mathbb{K}$. Dann erhalten wir einen Ringisomorphismus*

$$\Psi = (\widehat{\rho}_1, \ldots, \widehat{\rho}_N) : \mathbb{K}[G] \to \mathrm{End}_{\mathbb{D}_1}(V_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{End}_{\mathbb{D}_N}(V_N) \quad \text{für} \quad \mathbb{D}_i := \mathrm{End}_G(V_i).$$

Ist $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen, so ist $\mathbb{D}_i = \mathbb{K}$ für alle i.

Beweis. Aus dem Satz von Maschke folgt, dass die reguläre Darstellung von G halbeinfach ist und somit $\mathbb{K}[G]$ ein halbeinfacher Ring ist. Mit Satz 6.35 erhalten wir einen Isomorphismus

$$\mathbb{K}[G] \cong M_{s_1}(\mathbb{K}_1) \oplus \ldots \oplus M_{s_N}(\mathbb{K}_N)$$

zu einer direkten Summe von Matrizenringen über Schiefkörpern $\mathbb{K}_i = \mathrm{End}_G(V_i)^{\mathrm{op}} = \mathbb{D}_i^{\mathrm{op}}$, wobei s_i die Vielfachheit von V_i in $\mathbb{K}[G]$ ist. Aus Korollar 6.36 folgt sofort, dass $M_{s_i}(\mathbb{K}_i) \subseteq \ker \widehat{\rho}_j$ für $j \neq i$ gilt. Bis auf Isomorphie ist der Spaltenraum $\mathbb{K}_i^{s_i}$ der einzige einfache Modul von $M_{s_i}(\mathbb{K}_i)$ (Aufgabe 6.8), so dass wir $V_i \cong \mathbb{K}_i^{s_i}$ erhalten, wobei das Ideal $M_{s_i}(\mathbb{K}_i)$ durch Linksmultiplikation operiert. Hierbei besteht $\mathbb{D}_i = \mathrm{End}_G(V_i)$ aus den Rechtsmultiplikationen mit Elementen von $\mathbb{K}_i$ (Nachweis!). Also ist $\mathbb{D}_i \cong \mathbb{K}_i^{\mathrm{op}}$ und $\widehat{\rho}_i$ bildet $M_{s_i}(\mathbb{K}_i)$ bijektiv auf $\mathrm{End}_{\mathbb{D}_i}(\mathbb{K}_i^{s_i}) \cong M_{s_i}(\mathbb{K}_i)$ ab. Daher ist Ψ ein Isomorphismus.

Ist $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen, so folgt $\mathbb{D}_i = \mathrm{End}_G(V_i) \cong \mathbb{K}$ aus dem zweiten Schurschen Lemma (Korollar 6.4). □

Die Bezeichnung "Fouriertransformation" für den Ringisomorphismus in Satz 6.38 ist zweifach gerechtfertigt. Zunächst ist die Multiplikation im Gruppenring durch die Faltung von Funktionen $f : G \to \mathbb{K}$ gegeben, und die Ringmultiplikation in

$$\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V_n)$$

ist die Komposition von Endomorphismen. Im Fall einer eindimensionalen Darstellung entspricht diese Komposition gerade der Multiplikation von Elementen im Körper $\mathbb{K}$. Die Beziehung zwischen den zwei Ringmultiplikationen verallgemeinert also die von den Fouriertransformationen bekannte Beziehung $\widehat{f \star g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$ zwischen der Faltung zweier Funktionen und der punktweisen Multiplikation ihrer Fouriertransformierten.

Der zweite Grund für diese Bezeichnung ist, dass sich die übliche Fouriertransformierte auch als Ringhomomorphismus zwischen einer Verallgemeinerung des Gruppenrings und dem Endomorphismenring ihrer Darstellungsräume verstehen lässt.

Beispiel 6.39. Wir betrachten die Gruppe $G = \mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$ mit der durch die Multiplikation komplexer Zahlen gegebenen Gruppenmultiplikation. Da es sich um eine abelsche Gruppe handelt, sind alle einfachen endlichdimensionalen komplexen Darstellungen eindimensional und entsprechen somit Gruppenhomomorphismen $\mathbb{T} \to \mathrm{GL}_1(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^\times$. Man kann zeigen, dass die *stetigen* einfachen endlichdimensionalen komplexen Darstellungen genau den Gruppenhomomorphismen $\rho_n : \mathbb{T} \to \mathbb{C}^\times, z \mapsto z^n$ für $n \in \mathbb{Z}$ entsprechen.

Verallgemeinert man den Gruppenring, indem man stetige Funktionen $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ zulässt und die endlichen Summen durch Integrale ersetzt, so ist die Darstellung einer stetigen Funktion gegeben durch

$$\widehat{\rho}_n(f) = \int_{\mathbb{T}} f(z)\rho_n(z)\, dz = \int_{\mathbb{T}} f(z)z^n\, dz = \int_0^1 f(e^{2\pi ix})e^{2\pi inx}\, dx.$$

Identifiziert man die Funktion f mit einer $\mathbb{Z}$-periodischen Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $g(x) = f(e^{2\pi ix})$ so sieht man, dass $\widehat{\rho}_n(g)$ gerade durch Multiplikation mit den Fourierkoeffizienten

$$g_n = \int_0^1 g(x)e^{2\pi inx}dx$$

von g operiert. Die Verallgemeinerung des Ringisomorphismus aus Satz 6.38 ordnet einer periodischen Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $g(x + 1) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also gerade deren Fourierkoeffizienten zu.

Aufgaben zu Kapitel 6

Aufgabe 6.1. Sei M eine abelsche Gruppe. Für eine Teilmenge $S \subseteq \mathrm{End}(M)$ betrachten wir den *Kommutanten*

$$S' := \{\varphi \in \mathrm{End}(M) \colon (\forall \psi \in S)\, \varphi\psi = \psi\varphi\}.$$

Zeigen Sie für Teilmengen $E, F \subseteq \mathrm{End}(M)$:

(i) $E \subseteq F' \Leftrightarrow F \subseteq E'$.

(ii) $E \subseteq E''$.

(iii) $E \subseteq F \Rightarrow F' \subseteq E'$.

(iv) $E' = E'''$.

(v) $E = E''$ genau dann, wenn $E = F'$ für eine Teilmenge $F \subseteq \mathrm{End}(M)$.

(vi) E' ist ein Unterring von $\mathrm{End}(M)$.

Aufgabe 6.2. Geben Sie alle Kompositionsreihen des $\mathbb{Z}$-Moduls $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ an.

Aufgabe 6.3. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ ein linearer Endomorphismus, der mit allen $\psi \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ vertauscht. Dann ist $\varphi \in \mathbb{K}\,\mathrm{id}_V$.

Aufgabe 6.4. Beweisen Sie, dass der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ halbeinfach ist genau dann, wenn jeder Primfaktor in einer Primfaktorzerlegung von n höchstens einmal auftritt, also $n = p_1 \cdots p_m$ mit paarweise verschiedenen Primzahlen p_i und $m \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 6.5. Zeigen Sie, dass der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Q}$ weder einfache noch maximale Untermoduln besitzt. (Erinnerung: Ein maximaler Untermodul eines R-Moduls M ist ein Untermodul $N \subsetneq M$, so dass kein Untermodul $N' \subset M$ mit $N \subsetneq N' \subsetneq M$ existiert.)

Aufgabe 6.6. Geben Sie einen Ring R, einen R-Modul M und einen Untermodul $N \subset M$ an, so dass N und M/N halbeinfach sind, aber M nicht.

Aufgabe 6.7. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über dem algebraisch abgeschlossenen Körper $\mathbb{K}$ und $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass der zugehörige $\mathbb{K}[X]$-Modul V genau dann halbeinfach ist, wenn φ diagonalisierbar ist. Gilt eine analoge Aussage für Vektorräume V über beliebigen Körpern? Beweisen Sie dies, oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 6.8. Sei $\mathbb{D}$ ein Schiefkörper und $M_n(\mathbb{D})$ der Ring der $(n \times n)$-Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{D}$. Zeigen Sie, dass der Spaltenraum $\mathbb{D}^n$ mit $A.\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ (Matrixprodukt) ein einfacher $M_n(\mathbb{D})$-Modul ist und dass jeder einfache $M_n(\mathbb{D})$-Modul hierzu isomorph ist. Hinweis: Beispiel 6.12.

Aufgabe 6.9. Sei R ein unitaler Ring und M ein R-Modul. Dann ist nach Vorlesung der Annulator einer Teilmenge $S \subset M$

$$\mathrm{Ann}(S) = \{r \in R : \ r.s = 0 \text{ für alle } s \in S\}$$

ein Linksideal in R. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist M ein zyklischer R-Modul mit Erzeuger $m \in M$, so gilt $M \cong R/\mathrm{Ann}(m)$.

(b) Ein zyklischer R-Modul M mit Erzeuger $m \in M$ ist einfach genau dann, wenn $\mathrm{Ann}(m)$ ein maximales Linksideal in R ist.

(c) Ist $\mathfrak{a} \subset R$ ein zweiseitiges Ideal in R, so gilt $\mathrm{Ann}(R/\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$.

(d) Ist R kommutativ, so induziert die Abbildung $\mathfrak{a} \to R/\mathfrak{a}$ eine Bijektion zwischen der Menge der maximalen Linksideale in R und den Isomorphieklassen einfacher R-Moduln. Was kann man im Fall eines nichtkommutativen Rings sagen?

Aufgabe 6.10. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ und $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung, die bezüglich einer bestimmten Basis von V durch eine obere Dreiecksmatrix gegeben ist. Geben Sie eine Kompositionsreihe für V als $\mathbb{K}[X]$-Modul an.

Aufgabe 6.11. Ist R ein Ring, der als Linksmodul über sich selbst halbeinfach ist und $\mathfrak{a} \subset R$ ein *zweiseitiges* Ideal in R, dann ist auch $R/\mathfrak{a}$ ein halbeinfacher R-Modul.

Aufgabe 6.12. Zeigen Sie, dass der Ring $M_n(\mathbb{D})$ der $(n \times n)$-Matrizen mit Einträgen aus einem Schiefkörper $\mathbb{D}$ einfach ist.

Aufgabe 6.13. Sei S ein Ring und $R = M_n(S)$ der Ring der $(n \times n)$-Matrizen mit Einträgen in S (mit der üblichen Matrixmultiplikation und Addition). Zeigen Sie:

(a) Ist M ein S-Modul, so ist $M^n = \underbrace{M \oplus \ldots \oplus M}_{n\times}$ mit der Strukturabbildung

$$\mu : R \times M^n \to M^n, \quad \mu(A, (m_1, \ldots, m_n)) = \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}.m_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{nj}.m_j\Big),$$

ein R-Modul, und für jeden S-Untermodul $L \subset M$ ist $L^n \subset M^n$ ein R-Untermodul.

(b) Jeder R-Untermodul $N \subset M^n$ ist von der Form $N = L^n$ für einen S-Untermodul $L \subset M$.

(c) Ist M ein einfacher S-Modul, so ist M^n ein einfacher R-Modul.

(d) Sind L_1, L_2 zwei S-Moduln und $\varphi : L_1 \to L_2$ ein S-Modulhomomorphismus, so ist die Abbildung

$$\varphi^n : L_1^n \to L_2^n, \quad (\ell_1, \ldots, \ell_n) \mapsto (\varphi(\ell_1), \ldots, \varphi(\ell_n))$$

ein R-Modulhomomorphismus.

(e) Die Abbildung $\psi : \mathrm{End}_S(L) \to \mathrm{End}_R(L^n)$, $\varphi \mapsto \varphi^n$ ist ein Ringhomomorphismus.

(f) Ist S ein Schiefkörper, so ist S^n (wobei S als Linksmodul über sich selbst betrachtet wird) ein einfacher R-Modul.

Aufgabe 6.14. Sei R ein Ring mit Eins und $X \in M_n(R)$ eine Matrix, die mit allen ganzzahligen Matrizen $Z \in M_n(\mathbb{Z}) \subseteq M_n(R)$ vertauscht. Dann ist $X = a \cdot \mathbf{1}$ für ein $a \in R$.

Aufgabe 6.15. Sei S ein Schiefkörper und $R \subset M_n(S)$ ein Unterring des Rings $M_n(S)$. Zeigen Sie: Ist S^n ein halbeinfacher R-Modul (mit der R-Modulstruktur aus der vorherigen Aufgabe), so ist R halbeinfach.

Aufgabe 6.16. Geben Sie einen Ring R und einen R-Modul M an, so dass M nicht einfach ist, aber $\mathrm{End}_R(M)$ ein Schiefkörper ist.

Aufgabe 6.17. Ist I eine Indexmenge und R_i ein Ring für alle $i \in I$, dann ist der *Produktring* $P := \prod_{i \in I} R_i$ definiert durch punktweisen Addition und Multiplikation

$$(x_i)_{i\in I} + (y_i)_{i\in I} = (x_i + y_i)_{i\in I}, \qquad (x_i)_{i\in I} \cdot (y_i)_{i\in I} = (x_i \cdot y_i)_{i\in I}.$$

(a) Zeigen Sie: P ist ein Ring. Bestimmen Sie die neutralen Elemente der Multiplikation und Addition.

(b) Sei nun $\mathbb{K}$ ein Körper und $S = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Zeigen Sie: die Elemente $s_j = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $x_i = \delta_{ij}$ erzeugen einfache Untermoduln von S als Linksmodul über sich selbst, und die Summe der Untermoduln $\langle s_i\rangle_S \subset S$ ist direkt.

(c) Zeigen Sie, dass der Ring S nicht halbeinfach ist.

Aufgabe 6.18. Sei G eine endliche Gruppe und $\mathbb{K}$ ein Körper mit $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \nmid |G|$. Zeigen Sie, dass dann der Gruppenring von der Form

$$\mathbb{K}[G] \cong M_{m_1}(K_1) \oplus \ldots \oplus M_{m_r}(K_r)$$

mit $m_i \in N$ und Schiefkörpern K_i ist. Drücken Sie die Zahlen m_i und die Schiefkörper K_i durch darstellungstheoretische Größen aus. Was können Sie über diese Größen folgern, wenn $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen ist?

Aufgabe 6.19. Zeigen Sie: Ist R ein einfacher Ring und $L \subset R$ ein einfaches Linksideal, so ist der Ringhomomorphismus

$$\Phi : R \to R_L'' = \mathrm{End}_{\mathrm{End}_R(L)}(L), \quad r \mapsto \varphi_r \quad \text{mit } \varphi_r(l) = r \cdot l$$

ein Ringisomorphismus.

Aufgabe 6.20. (Schiefkörper) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit $\mathrm{char}\,\mathbb{K} \neq 2$, $\sigma\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}, x \mapsto \overline{x}$ ein involutorischer Körperautomorphismus ($\sigma \neq \mathrm{id}$) und $\mathbb{L} := \mathrm{Fix}(\sigma)$. Zeigen Sie:

(a) $\mathbb{L}$ ist ein Unterkörper von $\mathbb{K}$ und $\dim_{\mathbb{L}} \mathbb{K} = 2$. Hinweis: σ lässt sich über $\mathbb{L}$ diagonalisieren.

(b) Der $\mathbb{L}$-Untervektorraum

$$\mathbb{D} := \left\{ \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{K} \right\} \subseteq M_2(\mathbb{K})$$

ist eine 4-dimensionale $\mathbb{L}$-Unteralgebra. Gilt $a\overline{a} + b\overline{b} \neq 0$ für $(a,b) \neq (0,0)$, so ist $\mathbb{D}$ ein Schiefkörper. Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und σ die komplexe Konjugation, so ist $\mathbb{D} = \mathbb{H}$ der *Quaternionenschiefkörper*.

(c) Ist $\zeta \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{L}$ mit $\overline{\zeta} = -\zeta$, so ist $a := \zeta^2 \in \mathbb{K}$ und $\mathbb{K} \cong \mathbb{L}[\sqrt{a}]$. Dann ist

$$(x + \zeta y)\overline{(x + \zeta y)} = x^2 - ay^2 \quad \text{für} \quad x, y \in \mathbb{L}.$$

Ist umgekehrt $a \in \mathbb{L}$ kein Quadrat und $\mathbb{K} := \mathbb{L}[\sqrt{a}]$, so definiert $\sigma(x + \sqrt{a}y) := x - \sqrt{a}y$ einen involutorischen Automorphismus von $\mathbb{K}$. Damit $\mathbb{D}$ ein Schiefkörper wird, benötigt man die Bedingung

$$x^2 + y^2 - a(u^2 + v^2) \neq 0 \quad \text{für} \quad (x, y, u, v) \neq (0, 0, 0, 0).$$

Warum ist diese Bedingung für $\mathbb{D} = \mathbb{H}$ erfüllt?

Aufgabe 6.21. Seien $\mathbb{D}_1, \ldots, \mathbb{D}_r$ Schiefkörper und $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}$ sowie

$$R := \bigoplus_{i=1}^{r} M_{m_i}(\mathbb{D}_i).$$

Zeigen Sie, dass R ein halbeinfacher Ring ist und dass für jeden einfachen R-Modul L ein $i \in \{1, \ldots, r\}$ existiert, so dass

$$L \cong \mathbb{D}_i^{m_i} \quad \text{mit} \quad (A_1, \ldots, A_r).\mathbf{x} = A_i\mathbf{x},$$

wobei $\mathbf{x} \in \mathbb{D}_i^{m_i}$ ein Spaltenvektor ist. Hinweis: Aufgabe 9.7.

7 Kategorien und Funktoren

7.1 Kategorien, Funktoren und natürliche Transformationen

Wie vielleicht schon im Verlauf dieser und früherer Vorlesungen beobachtet, ergibt sich eine gewisse Systematik in der Untersuchung algebraischer Strukturen. So folgt beispielsweise auf die Definition eines Vektorraums direkt der Begriff der linearen Abbildung (Vektorraumhomomorphismus) und analog auf die Begriffe der Gruppe, des Rings, des Körpers und der Algebra direkt die Begriffe des Gruppen-, Ring- und Körper- und Algebrahomomorphismus. Ebenso ergab sich in dieser Vorlesung direkt nach dem Begriff der Gruppendarstellung der Begriff eines Homomorphismus von Darstellungen und auf den Begriff des Moduls folgte die Definition des Modulhomomorphismus.

In all diesen Fällen wurde zunächst eine mathematische Struktur definiert (Vektorraum, Gruppe, Ring, Körper, Algebra, Gruppendarstellung, Modul) und anschliessend die Abbildungen zwischen solchen Strukturen untersucht, die die Strukturmerkmale erhalten. So sind Homomorphismen von Vektorräumen, Gruppen, Ringen, Körpern, Algebren, Darstellungen, Moduln jeweils dadurch charakterisiert, dass sie kompatibel mit der Vektorraum- Gruppen-, Ring-, Körper-, Algebra-, Darstellungs- und Modulstruktur sind, also mit den entsprechenden Strukturabbildungen vertauschen. In all diesen Fällen ergibt die Verkettung von zwei Homomorphismen wieder einen Homomorphismus, die Verkettung ist assoziativ, und es existieren jeweils Identitätshomomorphismen.

Diese Betrachtungsweise lässt sich auch auf andere Gebiete der Mathematik anwenden. So ist beispielsweise ein topologischer Raum eine Menge zusammen mit einem System bestimmter ausgezeichneter Teilmengen, die als offene Mengen bezeichnet werden. Eine Abbildung zwischen topologischen Räumen heißt stetig, wenn das Urbild jeder offenen Menge eine offene Menge ist, wenn sie also mit der Topologie kompatibel ist. Die Verkettung stetiger Abbildungen ist wieder stetig und zu jedem topologischen Raum ist die Identitätsabbildung stetig. Man kann also stetige Abbildungen als Homomorphismen von toplogischen Räumen betrachten. Ein weiteres einfaches Beispiel sind Mengen und Abbildungen zwischen Mengen. Auch hier gibt es jeweils eine Identitätsabbildung, und Abbildungen von Mengen können verkettet werden. Man kann also Abbildungen als Homomorphismen von Mengen auffassen.

Es bietet sich nun an, diese Zusammenhänge systematisch zu untersuchen, um die Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen diesen Strukturen klar herauszuarbeiten. Ein weiterer Grund, dieses Vorgehen zu systematisieren, ergibt sich aus dem Wunsch, Beziehungen zwischen verschiedenen Teilgebieten der Mathematik herzustellen. Nun stellt sich aber die Frage, welche mathematischen Begriffe dafür geeignet sind, um Beziehungen zwischen beispielsweise Topologie und Gruppentheorie auszudrücken. Es ist unmittelbar einleuchtend, dass dafür geignete mathematischen Begriffe so detailarm und allgemein wie möglich sein müssen. Dies führt auf den Begriff der Kategorie. Der zentrale Punkt bei diesem Begriff ist, dass man hier die mathematischen Strukturen und die damit kompatiblen Abbildungen jeweils gemeinsam behandelt.

7.1.1 Kategorien

Definition 7.1. Eine *Kategorie* $\mathcal{C}$ besteht aus:

(a) einer Klasse $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ von *Objekten* [9]

(b) für je zwei Objekte $X, Y \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$ einer Menge $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ von *Morphismen*

(c) für je drei Objekte X, Y, Z einer *Kompositionsabbildung*

$$\circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z),$$

so dass die folgenden Axiome erfüllt sind:

(K1) Die Morphismenmengen $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ sind paarweise disjunkt.

(K2) Die Komposition ist assoziativ: $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ für alle Objekte W, X, Y, Z und Morphismen $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$

[9] Dieser Begriff kommt aus der Mengenlehre von von Neumann–Bernays–Gödel. Jede Menge ist eine Klasse, aber es gibt auch die "Klasse aller Mengen". Unter den Klassen sind die Mengen genau diejenigen, die Element einer Klasse sein können. Zum Beispiel bildet die Gesamtheit der Kardinalzahlen (=Mächtigkeiten von Mengen) eine Klasse, die keine Menge ist.

(K3) Für jedes Objekt X existiert ein Morphismus $\mathbf{1}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X)$ mit $\mathbf{1}_X \circ f = f$ und $g \circ \mathbf{1}_X = g$ für alle $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W,X)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$. Diese Morphismen werden als *Identitätsmorphismen* bezeichnet.

Statt $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ schreibt man auch $f : X \to Y$. Das Objekt X heißt dann *Quelle* und das Objekt Y *Ziel* des Morphismus f.

Definition 7.2. (a) Ein Morphismus $f : X \to Y$ heißt *Isomorphismus* , wenn es einen Morphismus $g : Y \to X$ mit $g \circ f = \mathbf{1}_X$ und $f \circ g = \mathbf{1}_Y$ gibt. Zwei Objekte X und Y heißen *isomorph*, wenn ein Isomorphismus zwischen ihnen existiert.

(b) Eine Kategorie, in der alle Morphismen Isomorphismen sind, nennt man ein *Gruppoid*.

Beispiele 7.3. (a) Die Kategorie **Set** der Mengen: die Objekte sind Mengen, die Morphismen Abbildungen, und die Isomorphismen Bijektionen.

(b) Die Kategorie $\mathbf{Set}^*$ der *punktierten Mengen*: die Objekte sind Paare (m, M) einer Menge M und eines Elements $m \in M$, die Morphismen $f : (m, M) \to (n, N)$ Abbildungen von M nach N, die das Element m auf das Element n abbilden. Die Isomorphismen sind die Bijektionen mit dieser Eigenschaft.

(c) Die Kategorie

- **Grp** der Gruppen (Objekte: Gruppen, Morphismen: Gruppenhomomorphismen)
- **Ring** der Ringe (Objekte: Ringe, Morphismen: Ringhomomorphismen)
- $\mathbf{Ring}^1$ der Ringe mit Eins (Objekte: Ringe mit Eins, Morphismen: Ringhomomorphismen φ mit $\varphi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$)
- $\mathbb{K}$**-Alg** der Algebren über $\mathbb{K}$ (Objekte: $\mathbb{K}$-Algebren, Morphismen: Algebrahomomorphismen).

(d) Eine Kategorie mit nur einem Objekt ist nichts anderes als ein *Monoid*. Eine Kategorie mit einem Objekt, in der alle Morphismen Isomorphismen sind, ist eine Gruppe.

(e) Die Kategorie **Top** der topologischen Räume (Objekte: topologische Räume, Morphismen: stetige Abbildungen, Isomorphismen: Homöomorphismen).

Ebenso kann man eine Kategorie der *punktierten topologischen Räume* definieren, deren Objekte Paare (x, X) aus einem topologischen Raum X und einem ausgezeichneten Basispunkt $x \in X$ und deren Morphismen $f : (x, X) \to (y, Y)$ basispunkterhaltende stetige Abbildungen sind, also stetige Abbildungen $f : X \to Y$ mit $f(x) = y$.

Diese und noch einige weitere Beispiele sind in Abbildung 7.1.1 dargestellt.

Kategorie	**Objekte**	**Morphismen**	**Isomorphismen**
Set	Mengen	Abbildungen	Bijektionen
Set*	punktierte Mengen	basispunkterhaltende Abbildungen	basispunkterhaltende Bijektionen
Grp	Gruppen	Gruppenhomomorphismen	bijektive Homomorphismen
Ab	abelsche Gruppen	Gruppenhomomorphismen	bijektive Homomorphismen
Ring	Ringe	Ringhomomorphismen	bijektive Homomorphismen
Ring^1	unitale Ringe	Ringhomom. mit $\varphi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$	bijektive Homomorphismen
Vect$(\mathbb{K})$	$\mathbb{K}$-Vektorräume	$\mathbb{K}$-lineare Abbildungen	bijektive lineare Abb.
$\mathbb{K}$-**Alg**	Algebren über $\mathbb{K}$	Algebrahomomorphismen	bijektive Homomorphismen
R-**Mod**	R-Moduln	R-Modulhomomorphismen	bijektive Homomorphismen
Mod-R	R-Rechtsmoduln	R-Modulhomomorphismen	bijektive Homomorphismen
$\mathbf{Rep}_{\mathbb{K}}(G)$	Darstellungen der Gruppe G über $\mathbb{K}$	Homomorphismen von Darstellungen	Isomorphismen von Darstellungen
Top	topologische Räume	stetige Abbildungen	Homöomorphismen
Top*	punktierte topologische Räume	basispunkterhaltende stetige Abbildungen	basispunkterhaltende Homöomorphismen
hTop	topologische Räume	Homotopieklassen stetiger Abbildungen	Homotopieäquivalenzen

Abbildung 2: Beispiele von Kategorien

Beispiel 7.4. (Quotientenkategorien) (a) Ist $\mathcal{C}$ eine Kategorie und für je zwei Objekte X, Y $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(X, Y)$, so dass aus $f \sim g \in \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(X, Y)$ und $h \sim k \in \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(Y, Z)$ folgt $h \circ f \sim k \circ g$ (Kongruenzrelation), dann erhält man eine neue Kategorie $\mathcal{C}'$ mit

$$\mathrm{Ob}\, \mathcal{C} = \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}' \quad \text{und} \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, Y) = \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(X, Y)/\sim$$

mit der durch die Komposition in $\mathcal{C}$ induzierte Komposition: $[h] \circ [f] = [h \circ f]$.

(b) Ein Beispiel dieser Konstruktion ist die Homotopiekategorie topologischer Räume **hTop**: Zwei stetige Abbildungen $f, g : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißen *homotop*, $f \sim g$, wenn eine stetige Abbildung $h : [0, 1] \times X \to Y$ existiert mit $h(0, x) = f(x)$ und $h(1, x) = g(x)$ für alle $x \in X$. Man kann zeigen, dass Homotopie eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf der Menge der stetigen Abbildungen $X \to Y$ definiert, und für alle stetigen Abbildungen $f, g : X \to Y$ und $h, k : Y \to Z$ mit $f \sim g$ und $h \sim k$ folgt $h \circ f \sim k \circ g$ (Übung).

Die zugehörige Kategorie, deren Objekte topologische Räume und deren Morphismen die Homotopieäquivalenzklassen stetiger Abbildungen sind, bezeichnet man als *Homotopiekategorie* topologischer Räume und mit **hTop**. Die Isomorphismen in **hTop** sind die Homotopieäquivalenzklassen stetiger Abbildungen $f : X \to Y$ für die eine stetige Abbildung $g : Y \to X$ mit $g \circ f \sim \mathrm{id}_X$ und $f \circ g \sim \mathrm{id}_Y$ existiert. Solche Abbildungen $f : X \to Y$ bezeichnet man als *Homotopiäquivalenzen* (siehe Aufgabe 7.8).

Man beachte, dass in der Definition einer Kategorie zwar gefordert wird, dass die *Morphismen* zwischen zwei gegebenen Objekten X, Y in einer Kategorie eine Menge $\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(X, Y)$ bilden, nicht jedoch, dass die *Objekte* eine Menge bilden. Eine Kategorie, in der auch die Objekte eine Menge bilden heißt *kleine Kategorie*. Zu fordern, dass die Morphismen Mengen bilden, ist notwendig, um eine vernünftige Definition zu erhalten, mit der man in der Praxis arbeiten kann. Der Grund, warum man dies bei Objekten nicht fordert ist, dass man so wichtige Beispiele verlieren würde, nämlich die Kategorie Set der Mengen. Wie oben angedeutet, sollen die Objekte dieser Kategorie Mengen sein und die Morphismen Abbildungen zwischen Mengen. Würde man fordern, dass die Objekte einer Kategorie eine Menge bilden, so müsste man die Menge aller Mengen betrachten, was bekannterweise problematisch ist. Deswegen beschränkt man sich in der Definition darauf, zu fordern, dass die Morphismen Mengen bilden und fordert es nicht für Objekte.

Wie auch im Fall der bisher untersuchten Strukturen gibt es bei Kategorien einige naheliegende Konstruktionen, mit Hilfe derer man aus gegebenen Kategorien neue Kategorien konstruieren kann. Wie im Fall der Ringmultiplikation kann man die Verknüpfung von Morphismen in einer Kategorie umdrehen, man kann Produkte verschiedener Kategorien betrachten und Unterkategorien konstruieren, indem man auf konsistente Weise Objekte und Morphismen aus einer Kategorie entfernt.

Definition 7.5. Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien.

(a) Die zu $\mathcal{C}$ *opponierte Kategorie* $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ ist die Kategorie mit denselben Objekten wie $\mathcal{C}$, umgedrehten Morphismen $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(Y, X)$ und umgedrehter Komposition $f \circ_{\mathrm{op}} g = g \circ_\mathcal{C} f$.

(b) Das *kartesische Produkt* $\mathcal{C}\times\mathcal{D}$ ist die Kategorie, deren Objekte Paare (X, Y) von Objekten $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ und $Y \in \text{Ob } \mathcal{D}$ sind und deren Morphismen durch

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}((U, V), (X, Y)) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, X) \times \text{Hom}_{\mathcal{D}}(V, Y)$$

gegeben sind.

(c) Eine *Unterkategorie* einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist eine Kategorie $\mathcal{D}$, deren Objekte eine Teilklasse $\text{Ob } \mathcal{D} \subset \text{Ob } \mathcal{C}$ bilden, so dass $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) \subset \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ für alle $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{D}$ und die Verknüpfungen solcher Morphismen in $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ übereinstimmen. Eine Unterkategorie heißt *voll*, wenn für alle $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{D}$ gilt $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

Beispiele 7.6. (a) Die Kategorie $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}$ der endlichdimensionalen Vektorräume über $\mathbb{K}$ ist eine volle Unterkategorie der Kategorie $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ aller $\mathbb{K}$-Vektorräume.

(b) Die Kategorie **Ab** der abelschen Gruppen ist eine volle Unterkategorie der Kategorie **Grp** aller Gruppen.

(c) Für jede Kategorie $\mathcal{C}$ erhält man eine Kategorie $\mathcal{C}^\times$, deren Objekte die Objekte in $\mathcal{C}$ und deren Morphismen die Isomorphismen in $\mathcal{C}$ sind. Diese ist im Allgemeinen nicht voll, sonder nur wenn $\mathcal{C}$ schon ein Gruppoid war, also wenn $\mathcal{C} = \mathcal{C}^\times$ gilt.

(d) Die Kategorie $\mathbf{Ring}^1$ der unitalen Ringe ist eine Unterkategorie der Kategorie **Ring** der Ringe. Sie ist nicht voll, da nicht jeder Homomorphismus $\varphi\colon R \to S$ von Ringen, die Einselemente besitzen, auch $\varphi(\mathbf{1}_R) = \mathbf{1}_S$ erfüllen muss. Das einfachste Beispiel ist $\varphi = 0$.

Aus den Beispielen wird deutlich, dass es sich bei Kategorien um eine sehr flexible und allgemeine Struktur handelt, die sich auf ganz verschiedene Teilgebiete der Mathematik anwenden lässt. Die Frage ist nun, wie man Beziehungen zwischen verschiedenen Kategorien charakterisiert, also etwa die Kategorie punktierter topologischer Räume mit der Kategorie der Gruppen in Beziehung setzt. Dies führt auf das Konzept des Funktors.

Definition 7.7. (a) Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien. Ein (kovarianter) *Funktor* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ besteht aus einer Vorschrift, die

(a) jedem Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ein Objekt $F(X) \in \text{Ob } \mathcal{D}$ zuordnet und

(b) für je zwei Objekte X, Y in $\mathcal{C}$, jedem Morphismus $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ einen Morphismus $F(f) \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$,

so dass:

$$\begin{aligned} F(f \circ g) &= F(f) \circ F(g) && \text{für} \quad f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y), g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X) \\ F(\mathbf{1}_X) &= \mathbf{1}_{F(X)} && \text{für} \quad X \in \text{Ob } \mathcal{C}. \end{aligned}$$

(b) Ein Funktor $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ wird oft als *Endofunktor* bezeichnet. Ein *kontravarianter Funktor* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ist ein Funktor $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$.

(c) Sind $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ Funktoren, so ist die *Verkettung* $FG : \mathcal{B} \to \mathcal{D}$ definiert durch $(FG)(X) := F(G(X))$ für Objekte $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{B}$ und $(FG)(f) := F(G(f))$ für Morphismen.

Beispiele 7.8. (a) Der Identitätsfunktor $\mathrm{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, der jedes Objekt und jeden Morphismus sich selbst zuordnet.

(b) Der Funktor $R - \mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$, der einem R-Modul M die zugrundeliegende abelsche Gruppe M zuordnet.

(c) Die Funktoren $\mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$, $\mathbf{Ring} \to \mathbf{Set}$, $\mathbb{K}$-$\mathbf{Alg} \to \mathbf{Set}$, $R - \mathbf{Mod} \to \mathbf{Set}$, die einer Gruppe, einem Ring, einer Algebra, einem R-Modul die zugrundeliegende Menge zuordnen. Solche Funktoren heißen *Vergissfunktoren*.

(d) (Skalarwechsel) Jeder Ringhomomorphismus $\varphi : R \to S$ liefert durch Restriktion der Skalare einen Funktor $S-\mathbf{Mod} \to R - \mathbf{Mod}$, der einem S-Modul M mit Strukturabbildung μ_S den R-Modul M mit Strukturabbildung $\mu_R(r, m) = \mu_S(\varphi(r), m)$ zuordnet und einem S-Modulhomomorphismus $\psi : (M, \mu_S) \to (N, \nu_S)$ den R-Modulhomomorphismus $\psi : (M, \mu_R) \to (N, \nu_R)$.

(e) Der Funktor $* : \mathbf{Vect}(\mathbb{K}) \to \mathbf{Vect}(\mathbb{K})^{\mathrm{op}}$, der jedem $\mathbb{K}$-Vektorraum V seinen Dualraum V^* und jeder $\mathbb{K}$-linearen Abbildung $f : V \to W$ die dazu duale Abbildung $f^* : W^* \to V^*$, $f^*(\alpha) = \alpha \circ f$ für alle $\alpha \in W^*$ zuordnet.

(f) **Tensorprodukte:** Der Funktor $\otimes_R : R^{\mathrm{op}} - \mathbf{Mod} \times R - \mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$, der einem R-Modul M und einem R^{op}-Modul (also R-Rechtsmodul) N das Tensorprodukt $M \otimes_R N$ und einem R-Modulhomomorphismus $f : M \to M'$ und einem R^{op}-Modulhomomorphismus $g : N \to N'$ den Gruppenhomomorphismus $f \otimes g : M \otimes_R N \to M' \otimes_R N'$ zuordnet, der in Beispiel 4.34 konstruiert wurde. Ist R kommutativ erhält man so sogar einen Funktor $R^{\mathrm{op}} - \mathbf{Mod} \times R - \mathbf{Mod} \to R - \mathbf{Mod}$.

(g) Die **Hom-Funktoren**: Ist $\mathcal{C}$ eine Kategorie und X ein Objekt von $\mathcal{C}$, dann erhält man einen Funktor

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -) : \mathcal{C} \to \mathbf{Set},$$

der einem Objekt Y in $\mathcal{C}$ die Menge $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ und einem Morphismus $f : Y \to Z$ in $\mathcal{C}$ die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, f) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z), \quad g \mapsto f \circ g$$

zuordnet.

Ebenso erhält man einen kontravarianten Funktor

$$\mathrm{Hom}(-, X) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set},$$

der einem Objekt W in $\mathcal{C}$ die Menge $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X)$ und einem Morphismus $f : V \to W$ in $\mathcal{C}$ die Abbildung

$$\mathrm{Hom}(f, X) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V, X), \quad g \mapsto g \circ f$$

zuordnet.

(h) Ist R ein unitaler Ring, so erhält man durch die Zuordnung F_R, die einer Menge A den von A erzeugten freien R-Modul $R^{(A)}$ zuordnet, und die Abildung, die einer Abbildung $f : A \to B$ den zugehörigen R-Modulhomomorphismus $F_R(f)\colon R^{(A)} \to R^{(B)}$ zuordnet, einen Funktor $F_R\colon$ $\mathbf{Set}$ $\to \mathrm{R}-\mathbf{Mod}$.

Wir möchten nun noch zwei wichtige und weniger offensichtliche Funktoren betrachten, die sich aus der Darstellungstheorie von Gruppen ergeben. Diese sind Funktoren zwischen der Kategorie $\mathbf{Rep}_{\mathbb{K}}(G)$ der Darstellungen einer Gruppe G und der Kategorie $\mathbf{Rep}_{\mathbb{K}}(H)$ einer darin enthaltenen Untergruppe $H \subseteq G$ und werden als Restriktion bzw. Induktion von Darstellungen bezeichnet.

Beispiel 7.9. (Restriktion und Induktion von Darstellungen)

(a) Sei G eine Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe. Dann definiert jede Darstellung (ρ, V) von G über $\mathbb{K}$ eine Darstellung $(\rho|_H, V)$ der Untergruppe H und jeder Homomorphismus $\varphi : (\rho, V) \to (\tau, W)$ von Darstellungen von G einen Homomorphismus von Darstellungen von H. Man erhält einen Funktor

$$\mathrm{Res}^G_H : \mathbf{Rep}_{\mathbb{K}}(G) \to \mathbf{Rep}_{\mathbb{K}}(H).$$

Dies ist ein Spezialfall von Beispiel 7.8(c), wobei der Ringhomomorphismus $\varphi : \mathbb{K}[H] \to \mathbb{K}[G]$ durch die Inklusionsabbildung $\iota : H \to G$ gegeben ist, und wird als *Restriktion von Darstellungen* bezeichnet.

(b) Ist umgekehrt eine Darstellung (η, V) von H über $\mathbb{K}$ gegeben, so erhält man eine Darstellung von G auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathrm{Ind}^G_H(V)$ der Abbildungen $G \to V$, die mit der Wirkung der Gruppe H verträglich sind

$$\mathrm{Ind}^G_H(V) = \{f : G \to V :\ (\forall h \in H, g \in G)\ f(gh) = \eta(h)^{-1} f(g)\}$$

mit der Darstellung

$$\widetilde{\eta} : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(\mathrm{Ind}^G_H(V)), \quad (\widetilde{\eta}(g)f)(u) = f(g^{-1}u) \qquad \text{für} \quad g, u \in G, f \in \mathrm{Ind}^G_H(V).$$

Diese wird als die von (η, V) *induzierte Darstellung* $\mathrm{Ind}_H^G(\eta)$ bezeichnet. Ist $\varphi : (\eta, V) \to (\kappa, W)$ ein Homomorphismus von Darstellungen von H, so erhält man durch $f \mapsto \varphi \circ f$ einen Homomorphismus von Darstellungen $\mathrm{Ind}_H^G(\varphi) : \mathrm{Ind}_H^G(V) \to \mathrm{Ind}_H^G(W)$ von G, denn es gilt:

$$(\varphi \circ f)(gh) = \varphi(\eta(h)^{-1}.f(g)) = \kappa(h)^{-1}.(\varphi \circ f)(g) \qquad \text{für} \quad h \in H, g \in G, f \in \mathrm{Ind}_H^G V.$$

Die Induktion von Darstellungen definiert einen Funktor $\mathrm{Ind}_H^G : \mathbf{Rep}_{\mathbb{K}}(H) \to \mathbf{Rep}_{\mathbb{K}}(G)$.

Interessante Beziehungen zwischen verschiedenen Teilgebieten der Mathematik nehmen häufig die Form von Funktoren an. Beispiele solcher Funktoren finden sich beispielsweise in der algebraischen Topologie, die die Kategorie der topologischen Räume und stetigen Abbildungen mit Kategorien aus dem Bereich der Algebra wie der Kategorien der Gruppen, der abelschen Gruppen oder der Moduln über einem Ring in Verbindung bringt. Ein wichtiges Beispiel eines solchen Funktors ist die Fundamentalgruppe.

Beispiel 7.10. (Fundamentalgruppe) Sei X ein topologischer Raum. Ein *Weg* in X mit Anfangspunkt $x \in X$ und Endpunkt $y \in X$ ist eine stetige Abbildung $c : [0,1] \to X$ mit $c(0) = x$ und $c(1) = y$. Für zwei Wege $c, d : [0,1] \to X$ mit $c(1) = d(0)$ definiert man die Verkettung $d \star c : [0,1] \to X$ als

$$(d \star c)(t) = \begin{cases} c(2t) & \text{für} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ d(2t-1) & \text{für} \quad \frac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases}$$

Zwei Wege $c, c' : [0,1] \to X$ mit $c(0) = c'(0) = x$ und $c(1) = c'(1) = y$ heißen *homotop*, wenn eine stetige Abbildung $h : [0,1] \times [0,1] \to X$ mit $h(t,0) = c(t)$, $h(t,1) = c'(t)$ für alle $t \in [0,1]$ und $h(0,s) = x$, $h(1,s) = y$ für alle $s \in [0,1]$ existiert.

Man kann zeigen, dass die Homotopie von Wegen eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Wege mit Anfangspunkt x und Endpunkt y definiert, und aus $c \sim c'$, $d \sim d'$ folgt $d \star c \sim d' \star c'$ für alle Wege $c, c', d, d' : [0,1] \to X$ mit $c(0) = c'(0) = x$, $c(1) = c'(1) = d(0) = d'(0) = y$ und $d(1) = d'(1) = z$.

Also kann man eine Verkettung von Homotopieäquivalenzklassen von Wegen definieren durch $[d] \cdot [c] = [d \star c]$. Man kann zeigen, dass die Homotopieäquivalenzklassen von Wegen mit dieser Komposition ein Gruppoid bilden, das *Fundamentalgruppoid* $\pi_1(X)$ von X. Man kann diese Struktur als Kategorie auffassen, deren Objekte die Punkte von X sind und deren Morphismen von x nach y die Homotopieklassen $[c]$ von Wegen von x nach y sind.

Beschränkt man sich auf geschlossene Wege mit einem festen Anfangs- und Endpunkt $x \in X$, so erhält man eine Gruppe $\pi_1(x, X)$, die *Fundamentalgruppe* des topologischen Raums X mit Basispunkt x (siehe Aufgabe 7.9). Ist $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen, die den Basispunkt $x \in X$ auf $y \in Y$ abbildet, so erhält man durch $\pi_1(f)([c]) := [f \circ c]$ einen Gruppenhomomorphismus $\pi_1(f) : \pi_1(x, X) \to \pi_1(y, Y)$.

Dies definiert einen Funktor $\pi_1 : \mathrm{Top}^* \to \mathbf{Grp}$ von der Kategorie punktierter topologischer Räume in die Kategorie der Gruppen, der einem punktierten topologischen Raum (x, X) die *Fundamentalgruppe* $\pi_1(x, X)$ und einer basispunkterhaltenden stetigen Abbildung $f : X \to Y$ den Gruppenhomomorphismus $\pi_1(f) : \pi_1(x, X) \to \pi_1(y, Y)$ zuordnet (siehe Aufgabe 7.11).

7.1.2 Isomorphie von Kategorien

Nachdem wir mit dem Begriff des Funktors Beziehungen zwischen verschiedenen Kategorien herstellen können, stellt sich insbesondere die Frage, wann wir zwei Kategorien als “im wesentlichen gleich” betrachten wollen, wie wir das beispielsweise mit isomorphen Vektorräumen, Gruppen oder Moduln tun. Verallgemeinert man diese Isomorphiebegriffe direkt auf Kategorien, so erhält man die folgende Definition.

Definition 7.11. Zwei Kategorien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ heißen *isomorph*, wenn Funktoren $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ mit $G \circ F = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ und $F \circ G = \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ existieren.

Beispiele 7.12. (a) Ist R ein Ring, dann ist die Kategorie der R-Linksmoduln isomorph zur Kategorie der R^{op}-Rechtsmoduln.

(b) Ist $\mathbb{K}$ ein Körper, dann ist die Kategorie $\mathbb{K}$-**Mod** der $\mathbb{K}$-Moduln isomorph zur Kategorie $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ der $\mathbb{K}$-Vektorräume und $\mathbb{K}$-linearen Abbildungen.

(c) Ist $\mathbb{K}$ ein Körper und G eine Gruppe, dann ist die Kategorie der $\mathbb{K}[G]$-Moduln isomorph zur Kategorie $\mathbf{Rep}_{\mathbb{K}}(G)$ der Darstellungen von G über $\mathbb{K}$.

(d) Die Kategorie $\mathbb{Z}$-**Mod** der $\mathbb{Z}$-Moduln und $\mathbb{Z}$-Modulhomomorphismen ist isomorph zur Kategorie **Ab** der abelschen Gruppen und Gruppenhomomorphismen.

7.1.3 Natürliche Transformationen

Schon anhand der Schwierigkeit, interessante Beispiele für isomorphe Kategorien zu finden, kommt der Verdacht auf, dass der Begriff der Isomorphie von Kategorien eventuell zu streng ist, und gelockert werden muss, um auf ein interessantes Konzept zu führen. Dies bedeutet, dass die Bedingungen $F \circ G = \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ und $G \circ F = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ durch eine allgemeinere Beziehung zwischen den Funktoren $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ ersetzt werden muss. Dazu müssen wir uns aber zunächst mit Beziehungen zwischen Funktoren befassen und verschiedene Funktoren miteinander in Verbindung bringen können, also im wesentlichen Morphismen von Funktoren definieren. Dies führt auf den Begriff der natürlichen Transformation.

Definition 7.13. Seien $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ Funktoren von einer Kategorie $\mathcal{C}$ in eine Kategorie $\mathcal{D}$. Eine *natürliche Transformation* $\eta : F \to G$ ist eine Vorschrift, die jedem Objekt X in $\mathcal{C}$ einen Morphismus $\eta_X : F(X) \to G(X)$ zuordnet, so dass für jeden $\mathcal{C}$-Morphismus $f : X \to Y$ das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "F(f)"] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\eta_Y"] & G(Y). \end{tikzcd}$$

Sind für alle Objekte X in $\mathcal{C}$ die Morphismen $\eta_X : F(X) \to G(X)$ Isomorphismen, so nennt man $\eta : F \to G$ einen *natürlichen Isomorphismus* und schreibt $\eta : F \xrightarrow{\sim} G$.

Beispiel 7.14. Für jeden Funktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ wird durch $\eta_X := \mathrm{id}_{F(X)}$ ein natürlicher Isomorphismus $\eta\colon F \to F$ definiert.

Bemerkung 7.15. Ist $\mathcal{C}$ eine kleine Kategorie und $\mathcal{D}$ eine Kategorie, so bilden die Funktoren $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und die natürlichen Transformationen $\eta : F \to G$ zwischen solchen Funktoren eine Kategorie, die als *Funktorkategorie* und mit $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ bezeichnet wird. (Aufgabe 7.16).

Beispiele 7.16. (a) In der Kategorie $\mathcal{C} = \mathbf{Vect}(\mathbb{K})$ existiert zwischen den Funktoren

$$\mathrm{id} : \mathbf{Vect}(\mathbb{K}) \to \mathbf{Vect}(\mathbb{K}) \quad \text{und} \quad ** : \mathbf{Vect}(\mathbb{K}) \to \mathbf{Vect}(\mathbb{K})$$

eine natürliche Transformation $\eta : \mathrm{id} \to **$. Die Morphismen

$$\eta_V : V \to (V^*)^*, \quad \eta_V(v)(\alpha) := \alpha(v)$$

sind gerade die natürlichen linearen Abbildungen, die einen Vektorraum V in seinen Bidualraum $(V^*)^*$ einbetten.

(b) Ist G eine Gruppe und $g \in G$ ein fest gewähltes Element, so erhält man einen (inneren) Automorphismus $\varphi = c_g : G \to G$, $h \mapsto g \cdot h \cdot g^{-1}$ und durch Restriktion der Skalare einen Funktor $F_g : \mathbf{Rep}_{\mathbb{K}}(G) \to \mathbf{Rep}_{\mathbb{K}}(G)$, der eine Darstellung (ρ, V) auf die Darstellung $(\widetilde{\rho}, V)$ mit $\widetilde{\rho} = \rho \circ \varphi$ abbildet. Dies ist offensichtlich ein Spezialfall von Beispiel 7.8(d).

Behauptung: die linearen Abbildungen $\eta_{(\rho,V)} = \rho(g) : V \to V$ definieren einen natürlichen Isomorphismus $\eta : \mathrm{id}_{\mathbf{Rep}_{\mathbb{K}}(G)} \to F_g$.

Beweis: Es handelt sich bei den linearen Abbildungen $\eta_{(\rho,V)} : V \to V$ um Homomorphismen von Darstellungen $\eta_{(\rho,V)} : (\rho, V) \to (\widetilde{\rho}, V)$, also um Morphismen in $\mathbf{Rep}_{\mathbb{K}}(G)$:

$$\widetilde{\rho}(h) \circ \eta_{(\rho,V)} = \rho(g \cdot h \cdot g^{-1}) \circ \rho(g) = \rho(g) \circ \rho(h) = \eta_{(\rho,V)} \circ \rho(h) \qquad \text{für} \quad h \in G.$$

Außerdem ist jeder Morphismus $\eta_{(\rho,V)}$ invertierbar mit $(\eta_{\rho,V})^{-1} = \rho(g^{-1})$. Ist $f : (\rho, V) \to (\tau, W)$ ein Homomorphismus von Darstellungen, so gilt

$$f \circ \eta_{(\rho,V)} = f \circ \rho(g) = \tau(g) \circ f = \eta_{(\tau,W)} \circ f.$$

Also kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
(\rho, V) \arrow[r, "\eta_{(\rho,V)}"] \arrow[d, "f"'] & (\widetilde{\rho}, V) \arrow[d, "f=F_g(f)"] \\
(\tau, W) \arrow[r, "\eta_{(\tau,W)}"] & (\widetilde{\tau}, W)
\end{tikzcd}$$

und die Morphismen $\eta_{(\rho,V)} : (\rho, V) \to (\widetilde{\rho}, V)$ definieren einen natürlichen Isomorphismus $\eta : \mathrm{id}_{\mathbf{Rep}_{\mathbb{K}}(G)} \to F_g$.

(c) Wir betrachten die Kategorie $\mathbf{Ring}^1$ der unitalen Ringe und Ringhomomorphismen und die Kategorie **Grp** der Gruppen. Dann erhält man einen Funktor

$$\mathrm{GL}_1 : \mathbf{Ring}^1 \to \mathbf{Grp}, \quad R \mapsto R^\times$$

indem man jedem unitalen Ring R die Gruppe $R^\times$ seiner Einheiten zuordnet und jedem unitalen Ringhomomorphismus $\varphi\colon R \to S$ den induzierten Gruppenhomomorphismus $\varphi|_{R^\times} : R^\times \to S^\times$.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ erhält man Funktoren $\mathrm{GL}_n : \mathbf{Ring}^1 \to \mathbf{Grp}$, die jedem unitalen Ring R die Gruppe $\mathrm{GL}_n(R) = M_n(R)^\times$ der invertierbaren Matrizen mit Einträgen in R zuordnen und jedem Ringhomomorphismus $f : R \to S$ den zugehörigen Gruppenhomomorphismus

$$\mathrm{GL}_n(f) : \mathrm{GL}_n(R) \to \mathrm{GL}_n(S), \qquad (a_{ij}) \mapsto (f(a_{ij})).$$

Auf der Kategorie $\mathbf{CRing}^1$ der unitalen kommutativen Ringe, definiert die Determinante dann eine natürliche Transformation $\eta : \mathrm{GL}_n \to \mathrm{GL}_1$, denn für jeden Ringhomomorphismus $f : R \to S$ kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{GL}_n(R) \arrow[r, "\det"] \arrow[d, "\mathrm{GL}_n(f)"'] & R^\times \arrow[d, "f|_{R^\times}"] \\
\mathrm{GL}_n(S) \arrow[r, "\det"] & S^\times.
\end{tikzcd}$$

Weiter erhalten wir natürliche Transformationen $T_n\colon\ \mathrm{GL}_n \to \mathrm{GL}_{n+1}$ durch

$$T(g) = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{für} \quad g \in \mathrm{GL}_n(R).$$

7.1.4 Äquivalenz von Kategorien

Mit Hilfe des Begriffs der natürlichen Transformation können wir nun die Bedingungen aus Definition 7.11 abschwächen. Anstatt zu fordern, dass die Funktoren $GF : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ und $FG : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ mit den Identitätsfunktoren *übereinstimmen*, fordern wir nur noch, dass diese zu Identitätsfunktoren *natürlich isomorph* sind. Dies führt auf den Begriff der Äquivalenz von Kategorien. Es wird sich zeigen, dass dieser Begriff viel brauchbarer ist als der Isomorphiebegriff, der sich als naive Verallgemeinerung der schon bekannten Isomorphiebegriffe auf Funktoren und Kategorien ergeben hat.

Definition 7.17. Ein Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ von einer Kategorie $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$ heißt *Äquivalenz von Kategorien*, wenn ein Funktor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ und natürliche Isomorphismen $\epsilon : FG \to \mathrm{id}_\mathcal{D}$, $\eta : \mathrm{id}_\mathcal{C} \to GF$ existieren. Die Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ heißen *äquivalent*, wenn eine Äquivalenz von Kategorien $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ existiert.

Diese Definition ist konzeptionell und einleuchtend, aber in der Praxis oft schwer zu handhaben, da sie dazu zwingt, die natürlichen Isomorphismen explizit zu konstruieren. Schon im Fall von linearen Abbildungen zwischen Vektorräumen ist es oft deutlich einfacher, zu zeigen, dass eine lineare Abbildung surjektiv und injektiv ist, als zu versuchen eine Umkehrabbildung explizit zu konstruieren. Wir suchen also nach einem Kriterium, das es uns erlaubt, festzustellen, ob ein gegebener Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ eine Äquivalenz von Kategorien ist, ohne einen Funktor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ und natürliche Isomorphismen $\eta : \mathrm{id}_\mathcal{C} \to GF$ und $\epsilon : \mathrm{id}_\mathcal{D} \to FG$ explizit anzugeben. Dies führt auf das Konzept des wesentlich surjektiven und (voll)treuen Funktors.

Definition 7.18. Ein Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ heißt

- *volltreu* (*treu*), wenn für alle Paare von Objekten $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ die Abbildung

$$F_{X,Y} : \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_\mathcal{D}(F(X), F(Y)), \quad f \mapsto F(f)$$

  eine Bijektion (Injektion) ist.

- *wesentlich surjektiv*, wenn zu jedem Objekt Y in $\mathcal{D}$ ein Objekt X in $\mathcal{C}$ mit $Y \cong F(X)$ existiert.

Ein wesentlich surjektiver Funktor ist also ein Funktor, der bis auf Isomorphie surjektiv auf den Objekten ist, und ein volltreuer Funktor, ein Funktor, der für je zwei Objekte eine Bijektion zwischen deren Hom-Mengen und den Hom-Mengen ihrer Bilder definiert. Mit Hilfe dieser Konzepte erhalten wir den folgenden Satz, der uns eine in der Praxis besser zu handhabende Beschreibung von Äquivalenzen von Kategorien liefert.

Satz 7.19. (Charakterisierung von Äquivalenzen) *Ein Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ist genau dann eine Äquivalenz von Kategorien, wenn er volltreu und wesentlich surjektiv ist.*

Beweis. (a) Sei $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ eine Äquivalenz von Kategorien. Dann existiert ein Funktor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ und natürliche Isomorphismen $\epsilon : FG \to \mathrm{id}_\mathcal{D}$, $\eta : \mathrm{id}_\mathcal{C} \to GF$. Dies impliziert, dass F wesentlich surjektiv ist, denn zu einem gegebenen Objekt D in $\mathcal{D}$ existiert ein Objekt $F(G(D))$ und ein Isomorphismus $\epsilon_D : FG(D) \to D$. Analog folgt, dass G wesentlich surjektiv ist.

Um zu zeigen, dass F und G treu sind, betrachten wir Morphismen $f, f' : X \to Y$ in $\mathcal{C}$ mit $F(f) = F(f')$. Dann folgt aus der Kommmutativität der Diagramme für den natürlichen Isomorphismus $\eta : \mathrm{id}_\mathcal{C} \to GF$

$$\begin{tikzcd} GF(X) \arrow[d, "GF(f)"] & X \arrow[l, "\eta_X"'] \arrow[d, "f"] \\ GF(Y) & Y \arrow[l, "\eta_Y"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} GF(X) \arrow[d, "GF(f')"] & X \arrow[l, "\eta_X"'] \arrow[d, "f'"] \\ GF(Y) & Y \arrow[l, "\eta_Y"'] \end{tikzcd}$$

die Identität

$$f = \eta_Y^{-1} \circ GF(f) \circ \eta_X = \eta_Y^{-1} \circ GF(f') \circ \eta_X = f'.$$

Analog erhält man mit Hilfe des natürlichen Isomorphismus $\epsilon : FG \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$, dass aus $G(g) = G(g')$ für Morphismen $g, g' : W \to Z$ in $\mathcal{D}$ folgt $g = g'$. Also sind F und G treu.

Sei nun $g : F(X) \to F(Y)$ ein Morphismus in $\mathcal{D}$. Dann gilt $g = F(f)$ für $f = \eta_Y^{-1} \circ G(g) \circ \eta_X : X \to Y$. Denn aus den kommutativen Diagrammen folgt

$$\eta_Y^{-1} \circ GF(f) \circ \eta_X = f = \eta_Y^{-1} \circ G(g) \circ \eta_X$$

und somit $GF(f) = G(g)$. Da der Funktor G treu ist, folgt $F(f) = g$. Also ist F volltreu.

(b) Sei nun $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein wesentlich surjektiver und volltreuer Funktor. Dann wählen wir zu jedem Objekt W in $\mathcal{D}$ ein Objekt X_W in $\mathcal{C}$ mit $F(X_W) \cong W$ und einen Isomorphismus $\epsilon_W : F(X_W) \to W$. Wir setzen $G(W) := X_W$. Für einen Morphismus $g : W \to Z$ in $\mathcal{D}$ betrachten wir den wegen der Volltreue von F eindeutig bestimmten Morphismus

$$G(g) : G(W) \to G(Z) \quad \text{mit} \quad F(G(g)) = \epsilon_Z^{-1} \circ g \circ \epsilon_W : FG(W) \to FG(Z).$$

Eine kurze Rechnung (Übung) zeigt, dass dies einen Funktor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ definiert und dass die Morphismen $\epsilon_W : FG(W) \to W$ einen natürlichen Isomorphismus $\epsilon : FG \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ definieren.

Wir definieren für jedes Objekt X in $\mathcal{C}$ einen Isomorphismus $\eta_X : X \to GF(X)$ als den wegen der Volltreue von F eindeutig bestimmten Isomorphismus mit

$$F(\eta_X) = \epsilon_{F(X)}^{-1} : F(X) \to FGF(X).$$

Eine kurze Rechnung zeigt, dass dies einen natürlichen Isomorphismus $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to GF$ definiert. Also ist $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ eine Äquivalenz von Kategorien. □

Bemerkung 7.20. Der Beweis von Satz 7.19 zeigt außerdem, dass die natürlichen Isomorphismen $\epsilon : FG \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$, $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to GF$ für alle Objekte X in $\mathcal{C}$ und W in $\mathcal{D}$ die Beziehungen

$$\epsilon_{F(X)} \circ F(\eta_X) = \mathbf{1}_{F(X)} \qquad G(\epsilon_W) \circ \eta_{G(W)} = \mathbf{1}_{G(W)}$$

erfüllen. Eine Äquivalenz von Kategorien, bei der für die natürlichen Isomorphismen solche Beziehungen gelten, bezeichnet an auch als *adjungierte Äquivalenz*.

Wir werden nun noch einige wichtige Beispiele für Äquivalenzen von Kategorien betrachten, die zeigen, dass dieser Begriff ergiebiger und interessanter ist als der zu eng gefasste Begriff der Isomorphie in Definition 7.11.

Beispiele 7.21. (a) Die Kategorie $\mathbf{Vect}^{\mathrm{fin}}(\mathbb{K})$ der endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorräume ist äquivalent zu der Kategorie $\mathcal{C}$ deren Objekte nichtnegative ganze Zahlen $n \in \mathbb{N}_0$ und deren Morphismen $f : n \to m$ Matrizen $M_{m,n}(\mathbb{K})$ sind. Die Komposition von Morphismen entspricht der Matrixmultiplikation.

Die Äquivalenz von Kategorien erhält man, indem man jedem endlichdimensionalen Vektorraum V seine Dimension und jeder linearen Abbildung die beschreibende Matrix bezüglich fest gewählter Basen zuordnet. Offensichtlich definiert dies einen Funktor, denn die Verkettung von linearen Abbildung entspricht gerade der Multiplikation von Matrizen. Ebenso ist der Funktor wesentlich surjektiv und volltreu, denn jede natürliche Zahl tritt als Dimension eines Vektorraums auf und die Wahl zweier Basen definiert eine Bijektion zwischen den linearen Abbildungen $g : V \to W$ und Matrizen in $M_{\dim(W),\dim(V)}(\mathbb{K})$.

(b) Ein *Skelett* einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist eine volle Unterkategorie $\mathcal{D}$ von $\mathcal{C}$, so dass jedes Objekt von $\mathcal{C}$ isomorph ist zu genau einem Objekt von $\mathcal{D}$. Jedes Skelett von $\mathcal{C}$ ist äquivalent zu $\mathcal{C}$, und der Inklusionsfunktor $\iota : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ definiert eine Äquivalenz von Kategorien. Denn per Definition ist jedes Objekt von $\mathcal{C}$ isomorph zu genau einem Objekt $\iota(D)$, $D \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$, also ist $\iota : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ wesentlich surjektiv. Da $\mathcal{D}$ eine volle Unterkategorie ist, gilt außerdem per Definition $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\iota(D), \iota(D')) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(D, D')$.

Offensichtlich ist das erste Beispiel ein Spezialfall dieser Konstruktion. Allgemeiner ist das Angeben eines Skeletts für eine gegebene Kategorie $\mathcal{C}$ äquivalent zur Klassifikation ihrer Objekte bis auf Isomorphie. Man kann zeigen (siehe Aufgabe 7.23), dass zwei Kategorien mit Skeletten genau dann äquivalent sind, wenn ihre Skelette isomorph sind.

(c) Die Kategorie $\mathbf{Set}^{\mathrm{fin}}$ der *endlichen* Mengen hat als Skelett die Kategorie der endlichen Kardinalzahlen mit Objekten $\underline{0} = \emptyset$, $\underline{1} = \{0\}$, ..., $\underline{n} = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ und Morphismen $f : \underline{n} \to \underline{m}$ die Abbildungen $\{0, 1, \ldots, n-1\} \to \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Somit ist die Kategorie $\mathbf{Set}^{\mathrm{fin}}$ der endlichen Mengen äquivalent zur Kategorie der endlichen Kardinalzahlen, die eine kleine Kategorie ist.

7.2 Universelle Eigenschaften und adjungierte Funktoren

Nachdem wir uns mit den grundlegenden Begriffen in Kategorien befasst haben, möchten wir nun untersuchen, wie wir Konstruktionen, die mit universellen Eigenschaften einhergehen, und wie sich aus der Algebra bekannte Konstruktionen wie beispielsweise das direkte Produkt und die direkte Summe im Rahmen von Kategorien formulieren lassen. Die zentrale Idee ist es dabei, die universellen Eigenschaften solcher Konstruktionen zu benutzen und diese als Abbildungen zwischen den Morphismenmengen in der Kategorie zu interpretieren.

Wir präzisieren dies am Beispiel der direkten Summe und des direkten Produkts von R-Moduln. Betrachtet man für einen gegebenen Ring R die Kategorie R-Mod der Moduln über R, so sind die direkte Summe und das direkte Produkt einer Familie $(M_i)_{i\in I}$ von R-Moduln offensichtlich wieder Objekte in R-Mod. Diese sind aber nicht nur Objekte, sondern Objekte zusammen mit einer Familie von Morphismen, nämlich respektive, die Inklusionsabbildungen $\eta_i : M_i \to \bigoplus_{i\in I} M_i$ und die Projektionsabbildungen $\pi_i : \Pi_{i\in I} M_i \to M_i$. Die direkte Summe und das direkte Produkt sind durch ihre universellen Eigenschaften charakterisiert.

Die universelle Eigenschaft der direkten Summe besagt, dass zu jeder Familie von R-Modulhomomorphismen $(f_i : M_i \to N)_{i\in I}$ ein eindeutig bestimmter R-Modulhomomorphismus $f : \bigoplus_{i\in I} M_i \to N$ mit $f \circ \eta_i = f_i$ existiert, also dass es für jedes Objekt N eine

Bijektion von Hom-Räumen

$$\mathrm{Hom}_{R-\mathbf{Mod}}\Big(\bigoplus_{i\in I} M_i, N\Big) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{R-\mathbf{Mod}}(M_i, N)$$

gibt, wobei $\prod_{i\in I} A_i$ das kartesische Produkt der Mengen A_i bezeichnet. Analog findet man, dass sich die universelle Eigenschaft des direkten Produkts für jedes Objekt L eine Bijektion von Hom-Räumen

$$\mathrm{Hom}_{R-\mathbf{Mod}}\Big(L, \prod_{i\in I} M_i\Big) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{R-\mathbf{Mod}}(L, M_i)$$

verstehen lässt. Verallgemeinert man diese Aussagen auf beliebige Kategorien, so erhält man die folgende Definition.

Definition 7.22. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie von Objekten in $\mathcal{C}$.

(a) Ein Object X in $\mathcal{C}$ zusammen mit einer Familie von Morphismen $\eta_i : X_i \to X$ heißt *Koprodukt* der Objekte X_i und wird mit $\coprod_{i\in I} X_i$ bezeichnet, wenn für jedes Objekt Y von $\mathcal{C}$ die Morpismen $\eta_i : X_i \to X$ eine Bijektion von Mengen induzieren:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) &\xrightarrow{\sim} \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, Y) = \{(g_i)_{i\in I} :\ g_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, Y)\} \\ f &\mapsto (f \circ \eta_i)_{i\in I}. \end{aligned}$$

(b) Ein Objekt Y zusammen mit einer Familie von Morphismen $\pi_i : Y \to Y_i$ heißt *Produkt* der Objekte Y_i und wird mit $\prod_{i\in I} Y_i$ bezeichnet, wenn die für alle Objekte Y in $\mathcal{C}$ die Morphismen $\pi_i : Y \to Y_i$ eine Bijektion von Mengen induzieren

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y) &\xrightarrow{\sim} \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y_i) = \{(g_i)_{i\in I} :\ g_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y_i)\} \\ g &\mapsto (\pi_i \circ g)_{i\in I}. \end{aligned}$$

Eine leichte Umformulierung dieser Definition liefert das exakte Gegenstück der Formulierung in Lemma 4.20 für den Fall der R-Moduln. Die Isomorphismen von Hom-Räumen in der Definition beschreiben also gerade die universelle Eigenschaft des direkten Produkts und der direkten Summe.

Bemerkung 7.23. (a) Ein Koprodukt von Objekten A_i in $\mathcal{C}$ ist ein Objekt $\coprod_{i\in I} A_i$ in $\mathcal{C}$ zusammen mit Morphismen $\eta_j : A_j \to \coprod_{i\in I} A_i$, so dass zu jeder Familie von Morphismen $f_i : A_i \to Y$ ein eindeutig bestimmter Morphismus $f : \coprod_{i\in I} A_i \to Y$ existiert, so dass für alle $j \in I$ das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} A_j \arrow[r, "\eta_j"] \arrow[d, "f_j"'] & \coprod_{i\in I} A_i \arrow[dl, "f"] \\ Y. & \end{tikzcd}$$

Dies wird als die *universelle Eigenschaft* des Koprodukts bezeichnet.

(b) Ein Produkt von Objekten A_i in $\mathcal{C}$ ist ein Objekt $\prod_{i\in I} A_i$ in $\mathcal{C}$ zusammen mit Morphismen $\pi_j : \prod_{i\in I} A_i \to A_j$, so dass für jede Familie von Morphismen $g_i : W \to A_i$ ein eindeutig bestimmter Morphismus $g : W \to \prod_{i\in I} A_i$ existiert, so dass für alle $j \in I$ das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} A_j & \prod_{i\in I} A_i \arrow[l, "\pi_j"'] \\ W. \arrow[u, "g_j"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Dies wird als die *universelle Eigenschaft* des Produkts bezeichnet.

(c) Im Allgemeinen muss in einer Kategorie $\mathcal{C}$ für beliebige Objekte das Koprodukt oder Produkt nicht unbedingt existieren. Z.B. existieren in der Kategorie $\mathbf{Set}^{\text{fin}}$ keine unendlichen Koprodukte nichtleerer Mengen und in der Kategorie $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}$ keine unendlichen Produkte von nicht-trivialen Vektorräumen. Wenn Produkte oder Koprodukte existieren, sind sie aber eindeutig bestimmt. Dies beweist man analog zum Beweis der universellen Eigenschaft von direkten Summen und Produkten von R-Moduln (Lemma 4.20).

Beispiele 7.24. (a) Die direkte Summe von Moduln ist ein kategorielles Koprodukt und das direkte Produkt von Moduln ein kategorielles Produkt in der Kategorie von R-Moduln.

(b) Das Tensorprodukt $R\otimes_{\mathbb{Z}} S$ von kommutativen unitalen Ringen über dem Teilring $\mathbb{Z}$ ist ein kategorielles Koprodukt in der Kategorie der kommutativen Ringe. Beachte, dass dieser Ring trivial sein kann. Z.B. ist

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{0\}.$$

(c) Das kartesische Produkt von unitalen Ringen ist ein kategorielles Produkt.

(d) Die disjunkte Vereinigung von Mengen ist ein Koprodukt in der Kategorie Set.

(e) Die Summe und das Produkt topologischer Räume sind ein Koprodukt und ein Produkt in der Kategorie Top der topologischen Räume.

Existieren in einer Kategorie alle Produkte und Koprodukte, so lassen diese sich auch als Funktoren zwischen der Kategorie und einem mehrfachen Produkt der Kategorie mit sich selbst interpretieren. Auf diese Weise erhalten wir eine interessante Interpretation ihrer universellen Eigenschaften als Beziehung zwischen zwei Funktoren.

Bemerkung 7.25. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, in der alle Produkte und Koprodukte existieren, I eine Indexmenge und $\mathcal{C}^I$ bezeichne die Produktkategorie, deren Objekte und Morphismen Tupel $(X_i)_{i\in I}$ und $(f_i)_{i\in I}$ von Objekten X_i und Morphismen f_i in $\mathcal{C}$ sind.

Dann definieren Produkt und Koprodukt (über I) Funktoren $\prod, \coprod : \mathcal{C}^I \to \mathcal{C}$, die einem Objekt von $\mathcal{C}^I$, also einer Familie $(A_i)_{i\in I}$ von Objekten A_i in $\mathcal{C}$, das Produkt $\prod_{i\in I} A_i$ bzw. Koprodukt $\coprod_{i\in I} A_i$ zuordnen und einem Morphismus in $\mathcal{C}^I$, also einer Familie von Morphismen $(f_i : A_i \to B_i)_{i\in I}$ von Morphismen in $\mathcal{C}$, den durch die universelle Eigenschaft eindeutig bestimmten Morphismus

$$\prod_{i\in I} f_i : \prod_{i\in I} A_i \to \prod_{i\in I} B_i \qquad \text{bzw.} \qquad \coprod_{i\in I} f_i : \coprod_{i\in I} A_i \to \coprod_{i\in I} B_i.$$

Andererseits erhält man einen Diagonalenfunktor $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^I$, der einem Objekt C in $\mathcal{C}$ die konstante Familie von Objekten $(C)_{i\in I} = (C, C, \ldots)$ und einem Morphismus $f : C \to C'$ die konstante Familie von Morphismen $(f)_{i\in I} = (f, f, \ldots)$ zuordnet.

Die Bedingungen an die Hom-Räume in Definition 7.22 besagen dann, dass für jedes Objekt $D = (A_i)_{i\in I}$ in $\mathcal{C}^I$ und jedes Objekt C von $\mathcal{C}$ Bijektionen zwischen den folgenden Hom-Räumen existieren

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\Big(\coprod_{i\in I} A_i, C\Big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^I}((A_i)_{i\in I}, \Delta(C))$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\Big(C, \prod_{i\in I} A_i\Big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^I}(\Delta(C), (A_i)_{i\in I}).$$

Ebenso zeigt man leicht, dass dieser Zusammenhang kompatibel mit der Komposition von Morphismen ist, d.h. die folgenden Diagramme und ihre Gegenstücke für das Koprodukt kommutieren für alle Familien von Morphismen $g_i : B_i \to A_i$ und Morphismen $f : C \to D$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\Big(\coprod_{i\in I} A_i, C\Big) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "h\mapsto h\circ(\coprod_{i\in I} g_i)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^I}((A_i)_{i\in I}, \Delta(\mathcal{C})) \arrow[d, "h\mapsto h\circ(g_i)_{i\in I}"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\Big(\coprod_{i\in I} B_i, C\Big) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^I}((B_i)_{i\in I}, \Delta(C))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\Big(\coprod_{i\in I} A_i, C\Big) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "h\mapsto f\circ h"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^I}((A_i)_{i\in I}, \Delta(\mathcal{C})) \arrow[d, "h\mapsto \Delta(f)\circ h"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\Big(\coprod_{i\in I} A_i, D\Big) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^I}((B_i)_{i\in I}, \Delta(D))
\end{tikzcd}$$

Die Ausdrücke in Bemerkung 7.25 erinnern an die Definition einer adjungierten Abbildung in unitären Vektorräumen, wobei die Ausdrücke $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\ ,\ )$ und $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\ ,\ )$ die Rolle des Skalarprodukts einnehmen und die Bijektionen zwischen Hom-Räumen das Gleichheitszeichen ersetzen. Verallgemeinert man diese Beziehung zwischen den Funktoren $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $\prod, \coprod : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ auf beliebige Kategorien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ und beliebige Funktoren $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, so erhält man das Konzept des links- und rechtsadjungierten Funktors.

Definition 7.26. (Adjungierte Funktoren) Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien. Ein Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ heißt *linksadjungiert* zu einem Funktor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, $F \dashv G$, oder äquivalent, G *rechtsadjungiert* zu F, wenn zu je zwei Objekten $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$ und $Y \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{D}$ eine Bijektion

$$\varphi_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y)$$

existiert, so dass für alle Morphismen $f : X' \to X$ in $\mathcal{C}$ und $g : Y \to Y'$ in $\mathcal{D}$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)) \arrow[r, "\mathrm{Hom}(f,G(g))", "h \mapsto G(g)\circ h \circ f"'] \arrow[d, "\varphi_{X,Y}"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', G(Y')) \arrow[d, "\varphi_{X',Y'}"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \arrow[r, "\mathrm{Hom}(F(f),g)", "h \mapsto g \circ h \circ F(f)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X'), Y')
\end{tikzcd}$$

kommutiert, d.h.

$$\varphi_{X',Y'}(G(g) \circ h \circ f) = g \circ \varphi_{X,Y}(h) \circ F(f).$$

Dies bezeichnet man als die *Natürlichkeit* der Bijektionen $\varphi_{X,Y}$.

Beispiele 7.27. (a) **Produkte, Koprodukte und der Diagonalenfunktor:**

Nach Bemerkung 7.25 ist für jede Kategorie $\mathcal{C}$, in der alle Produkte und Koprodukte existieren, und jede fest gewählte Indexmenge I der Funktor $\coprod_{i\in I} \mathcal{C}^I \to \mathcal{C}$ linksadjungiert zum Funktor $\Delta_I : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^I$ und der Funktor $\prod_{i\in I} \mathcal{C}^I \to \mathcal{C}$ rechtsadjungiert zum Funktor $\Delta_I : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^I$.

(b) **Vergissfunktoren und freie Moduln:**

Sei R ein unitaler Ring und $G : R-\mathbf{Mod} \to \mathbf{Set}$ der Vergissfunktor, der jedem R-Modul M die zugrundeliegende Menge M und jedem R-Modulhomomorphismus $\varphi : M \to N$ die zugrundeliegende Abbildung $\varphi : M \to N$ zuordnet. Dann ist der Funktor

$$F_R : \mathbf{Set} \to R - \mathbf{Mod},$$

der jeder Menge A den von ihr erzeugten freien R-Modul $R^{(A)}$ und jeder Abbildung $f : A \to B$ den zugehörigen R-Modulhomomorphismus $F_R(f) : R^{(A)} \to R^{(B)}$ zuordnet, linksadjungiert zu G (Beispiele 7.8(h)). Der Isomorphismus

$$\varphi_{A,M} : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(A, G(M)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{R-\mathbf{Mod}}(R^{(A)}, M),$$

ergibt sich, indem man einer Abbildung $f : A \to G(M)$ den eindeutig bestimmten R-Modulhomomorphismus $\widetilde{f} : R^{(A)} \to M$ mit $\widetilde{f}(\delta_a) = f(a)$ für alle $a \in A$ zuordnet. Man rechnet leicht nach, dass dies eine Bijektion ist und die natürliche Eigenschaft besitzt. Somit ist der durch die freie Erzeugung definierte Funktor linksadjungiert zum Vergissfunktor. Insbesondere lässt sich dies auf die Fälle $R = \mathbb{Z}$ (Kategorie **Ab** der abelschen Gruppen), $R = \mathbb{K}$ (Kategorie $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ der $\mathbb{K}$-Vektorräume) und $R = \mathbb{K}[G]$ (Darstellungskategorie $\mathbf{Rep}_{\mathbb{K}}(G)$ einer Gruppe G) spezialisieren.

(c) **Freie Gruppen:**

Wie betrachten den Vergissfunktor $V\colon \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$, der jeder Gruppe G die unterliegende Menge $V(G)$ zuordnet.

Für eine Menge M sei $F(M)$ die *freie Gruppe über* M. Ihre Elemente sind Wörter

$$g_1^{\varepsilon_1} \cdots g_n^{\varepsilon_n}, \quad g_i \in M, \varepsilon_i \in \{\pm 1\}, n \in \mathbb{N}_0,$$

die durch Konkatenation multipliziert werden. Hierbei kürzt man alle Ausdrücke der Gestalt gg^{-1} und $g^{-1}g$. Man erhält so eine Gruppe, deren Einselement e das leere Wort ist $(n = 0)$ und die Inversion in $F(M)$ ist gegeben durch

$$(g_1^{\varepsilon_1} \cdots g_n^{\varepsilon_n})^{-1} = g_n^{-\varepsilon_1} \cdots g_1^{-\varepsilon_n}.$$

Zu jeder Mengenabbildung $f\colon M \to N$, existiert dann ein eindeutig bestimmter Gruppenhomomorphismus

$$F(f)\colon F(M) \to F(N), \quad g_1^{\varepsilon_1} \cdots g_n^{\varepsilon_n} \mapsto f(g_1)^{\varepsilon_1} \cdots f(g_n)^{\varepsilon_n}.$$

Wir erhalten so einen Funktor $F\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Grp}$.

Der Funktor F ist linksadjungiert zu dem Vergissfunktor V. Der Isomorphismus

$$\varphi_{M,G} : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(M, V(G)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}(F(M), G),$$

ergibt sich, indem man einer Abbildung $f : M \to V(G)$ den eindeutig bestimmten Gruppenhomomorphismus

$$\widetilde{f}\colon F(M) \to G \quad \text{mit} \quad \widetilde{f}(g_1^{\varepsilon_1} \cdots g_n^{\varepsilon_n}) = f(g_1)^{\varepsilon_1} \cdots f(g_n)^{\varepsilon_n}$$

zuordnet. Man verifiziert leicht, dass dies eine natürliche Bijektion ist (universelle Eigenschaft der freien Gruppe über M). Daher ist der freie Gruppenfunktor F linksadjungiert zu dem Vergissfunktor V.

(d) **Grothendieck-Gruppen von Monoiden:**

Wie betrachten den Vergissfunktor $V\colon \mathbf{Grp} \to \mathbf{Mon}$, der jeder Gruppe G das unterliegende Monoid $(G, \cdot, e)$ zuordnet.

Ist $M = (M, \cdot, e)$ ein Monoid, so betrachten wir in der freien Gruppe $F(M)$ den Normalteiler N, der von den Elementen der Gestalt

$$ab(ab)^{-1} \quad \text{für} \quad a, b \in M$$

erzeugt wird. Wir erhalten so eine Gruppe

$$G(M) := F(M)/N$$

mit der universellen Eigenschaft, dass für jeden Monoidhomomorphismus $f\colon M \to G$ in eine Gruppe G genau ein Homomorphismus

$$\widehat{f}\colon G(M) \to G, \quad m_1^{\varepsilon_1} \cdots m_n^{\varepsilon_n} N \mapsto f(m_1)^{\varepsilon_1} \cdots f(m_n)^{\varepsilon_n}$$

existiert. Hierbei haben wir verwendet, dass $f(a)f(b)f(ab)^{-1} = e$ in G für alle $a, b \in M$ gilt. Wir erhalten so einen Funktor $G\colon$ **Mon** $\to$ **Grp**, der jedem Monoid M eine Gruppe zuordnet; seine *Grothendieck-Gruppe*. Z.B. gilt

$$G(\mathbb{N}_0) \cong \mathbb{Z},$$

so dass man mit dem Grothendieck-Funktor insbesondere die negativen ganzen Zahlen gewinnen kann.

Der Funktor G ist linksadjungiert zu V, denn

$$\varphi_{M,G} : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mon}}(M, V(G)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}(G(M), G), \qquad f \mapsto \widehat{f}$$

ist eine natürliche Bijektion. Daher ist der Funktor G linksadjungiert zu dem Vergissfunktor V.

(e) **Abelsche Gruppen und Abelisierung:**

Der Inklusionsfunktor G : **Ab** $\to$ **Grp** von der Kategorie der abelschen Gruppen in die Kategorie der Gruppen hat als linksadjungierten Funktor den Funktor F : **Grp** $\to$ **Ab**, der jeder Gruppe G ihre Abelisierung $G/[G,G]$ und jedem Gruppenhomomorphismus $f : G \to H$ den zugehörigen Homomorphismus von abelschen Gruppen $\widetilde{f} : G/[G,G] \to H/[H,H]$ zuordnet.

(f) **Vergissfunktoren ohne Linksadjungierte:**

Der Vergissfunktor G : Field $\to$ **Set**, der einem Körper die zugrundeliegende Menge zuordnet, hat keinen linksadjungierten Funktor. Denn gäbe es einen linksadjungierten Funktor F : **Set** $\to$ Field, so ergäbe sich für alle Mengen A und Körper $\mathbb{K}$ eine Bijektion

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(A, G(\mathbb{K})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Field}}(F(A), \mathbb{K}).$$

Insbesondere müsste also der leeren Menge $A = \emptyset$ ein Körper $F(\emptyset)$ zugeordnet werden, so dass für alle Körper $\mathbb{K}$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\emptyset, G(\mathbb{K})) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Field}}(F(\emptyset), \mathbb{K}).$$

Da es zu jeder Menge B genau eine Abbildung $f_B : \emptyset \to B$ gibt, würde dies bedeuten, dass $F(\emptyset)$ ein Körper sein müsste, so dass zu jedem anderen Körper $\mathbb{K}$ genau ein Körperhomomorphismus $g : F(\emptyset) \to \mathbb{K}$ existiert. Da Körperhomomorphismen injektiv sind, wäre $F(\emptyset)$ damit Unterkörper jedes anderen Körpers $\mathbb{K}$. Ein solcher Körper existiert nicht (Nachweis!).

(g) **Tensorprodukte und Hom-Funktoren:**

Sei R ein Ring und M ein R-Rechtsmodul. Dann definiert das Tensorprodukt von R-Moduln einen Funktor $F_M = M \otimes_R - : R - \mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$, der einem R-Linksmodul L die abelsche Gruppe $M \otimes_R L$ und einem R-Modulhomomorphismus $f : L \to L'$ den Gruppenhomomorphismus $F_M(f) = \mathrm{id}_M \otimes f : M \otimes_R L \to M \otimes_R L'$ aus Beispiel 4.34 zuordnet.

Ebenso erhält man einen Funktor

$$\mathrm{Hom}(M, -) : \mathbf{Ab} \to R - \mathbf{Mod}, \quad A \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, A),$$

der einer abelschen Gruppe A den R-Modul $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, A)$ mit der durch die R-Rechtsmodulstruktur von M definierten R-Linksmodulstruktur $(r.\psi)(m) = \psi(m.r)$ für alle $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, A)$, $r \in R$, $m \in M$, zuordnet und einem Gruppenhomomorphismus $f : A \to A'$ den R-Modulhomomorphismus

$$\mathrm{Hom}(M, f) : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, A) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, A'), \qquad \psi \mapsto f \circ \psi.$$

Der Funktor F_M ist linksadjungiert zu G_M. Denn für alle abelschen Gruppen A und R-Linksmoduln L erhält man einen Isomorphismus

$$\varphi_{L,A} : \mathrm{Hom}_R(L, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, A)) \cong \mathrm{Bil}_R(M \times L, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R L, A),$$

der einem R-Modulhomomorphismus $\psi : L \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, A), \ell \mapsto \psi_\ell$ die Abbildung

$$\widehat{\psi} : L \otimes M \to A, \quad (\ell, m) \mapsto \psi_\ell(m)$$

zuordnet. Hierbei beachten wir, dass sich für einen Homomorphismus $\psi : L \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, A)$ die R-Linerität ausdrückt durch

$$\psi_{r.\ell}(m) = (r.\psi_\ell)(m) = \psi_\ell(m.r)$$

und das ist genau die R-Bilinearität der zugehörigen Abbildung $M \times L \to A, (m, \ell) \mapsto \psi_\ell(m)$. Die Existenz von $\widehat{\psi}$ folgt daher aus der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts.

Das Inverse des Isomorphismus $\varphi_{L,A}$ ordnet einem Gruppenhomomorphismus

$$\chi : M \otimes_R L \to A$$

den Gruppenhomomorphismus

$$\check{\chi} : L \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, A), \quad \ell \mapsto \check{\chi}_\ell \quad \text{mit} \quad \check{\chi}_\ell(m) = \chi(m \otimes_R \ell)$$

zu, der die Bedingung

$$\check{\chi}_{r.\ell}(m) = \chi(m \otimes_R (r.\ell)) = \chi((m.r) \otimes_R \ell) = \check{\chi}\psi_\ell(m.r)$$

erfüllt und somit ein R-Modulhomomorphismus ist.

Sind $f : L' \to L$ und $g : A \to A'$ Morphismen in R-Mod, so zeigt eine kurze Rechnung, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R(L, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, A)) \arrow[r, "h \mapsto \mathrm{Hom}(M,g)\circ h \circ f"] \arrow[d, "\varphi_{L,A}"] & \mathrm{Hom}_R(L', \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, A')) \arrow[d, "\varphi_{L',A'}"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R L, A) \arrow[r, "k \mapsto g \circ k \circ (\mathrm{id}_M \otimes_R f)"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R L', A')
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Also ist der Funktor $F_M = M \otimes_R - : R - \mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$ linksadjungiert zu $G_M = \mathrm{Hom}(M, -) : \mathbf{Ab} \to R - \mathbf{Mod}$. Analog kann man zeigen, dass für jeden R-Linksmodul M der Funktor $F'_M = - \otimes_R M : R^{\mathrm{op}} - \mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$ linksadjungiert zum Funktor $\mathrm{Hom}(M, -) : \mathbf{Ab} \to R^{\mathrm{op}} - \mathbf{Mod}$ ist.

Ein weiteres sehr wichtiges Beispiel für adjungierte Funktoren ergibt sich aus der Restriktion der Skalare und dem Tensorprodukt von R-Moduln. Ist $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus, so erhält man durch die Restriktion der Skalare jeder S-Modul die Struktur eines R-Moduls, und nach Beispiel 7.8 definiert dies einen Funktor S-Mod$\to$ R-Mod. Wir zeigen nun, dass dieser Funktor einen links- und rechtsadjungierten Funktor besitzt.

Satz 7.28. *Seien R, S unitale Ringe, $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus und*

$$\Phi : S{-}\mathbf{Mod} \to R - \mathbf{Mod}$$

der durch Restriktion der Skalare definierte Funktor aus Beispiel 7.8. *Dann gilt:*

(a) *Der* Induktionsfunktor

$$F = S \otimes_R - : R - \mathbf{Mod} \to S{-}\mathbf{Mod} \quad \textit{mit} \quad F(M) = S \otimes_R M, \qquad F(f) = \mathrm{id}_S \otimes f$$

für R-Moduln M und $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ ist linksadjungiert zu Φ.

(b) *Der* Koinduktionsfunktor

$$G = \mathrm{Hom}(S, -) : R - \mathbf{Mod} \to S{-}\mathbf{Mod} \quad \textit{mit} \quad G(M) = \mathrm{Hom}_R(S, M),\ G(f) = f\circ$$

für R-Moduln M und $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ ist rechtsadjungiert zu Φ.

Beweis. (a) Wir versehen den Ring S mit der durch $\varphi : R \to S$ und durch die Linksmultiplikation in S definierten (S, R)-Bimodulstruktur: $s'.s.r = s' \cdot s \cdot \varphi(r)$ für alle $r \in R$, $s, s' \in S$, wodurch die abelsche Gruppe $S \otimes_R M$ die Struktur eines S-Linksmoduls erhält. Also ordnet F jedem R-Linksmodul M einen S-Linksmodul $S \otimes_R M$ zu und nach Beispiel 4.34 jedem R-Modulhomomorphismus $f : M \to N$ einen S-Modulhomomorphismus $\mathrm{id}_S \otimes_R f$. Diese Zuordnung ist verträglich mit den Identitätsmorphismen und der Komposition und definiert somit einen Funktor $F : R - \mathbf{Mod} \to S{-}\mathbf{Mod}$.

Um zu zeigen, dass F linksadjungiert zu Φ ist, betrachten wir die Gruppenhomomorphismen

$$\begin{aligned} \Phi_{M,N} &: \mathrm{Hom}_R(M, \Phi(N)) \to \mathrm{Hom}_S(S \otimes_R M, N), \qquad && f \mapsto (s \otimes m \to s.f(m)) \\ \Psi_{M,N} &: \mathrm{Hom}_S(S \otimes_R M, N) \to \mathrm{Hom}_R(M, \Phi(N)), \qquad && g \mapsto (m \mapsto g(\mathbf{1}_S \otimes m)) \end{aligned}$$

Eine direkte Rechnung zeigt, dass diese zueinander invers und somit Isomorphismen von abelschen Gruppen sind. Die Natürlichkeitseigenschaft beweist man durch direktes Nachrechnen: Zu zeigen ist, dass für alle R-Modulhomomorphismen $f : M' \to M$, S-Modulhomomorphismen $g : N \to N'$ und R-Modulhomomorphismen $h : M \to \Phi(N)$ die Bedingung

$$\Phi_{M',N'}(\Phi(g) \circ h \circ f) = g \circ \Phi_{M,N}(h) \circ F(f) \colon S \otimes_R M' \to N'$$

gilt. Der Morphismus auf der linken Seite ist gegeben durch

$$s \otimes m' \mapsto s.(g \circ h \circ f(m')) \qquad \forall s \in S, m' \in M',$$

und der Morphismus auf der rechten Seite durch

$$s \otimes m' \xrightarrow{\mathrm{id}_S \otimes f} s \otimes f(m') \xrightarrow{\Phi_{M,N}(h)} s.h(f(m')) \xrightarrow{g} g(s.h(f(m'))) = s.(g \circ h \circ f(m')),$$

wobei im letzten Schritt benutzt wurde, dass g ein S-Modulhomomorphismus ist. Also ist die Natürlichkeitsbedingung erfüllt und F ist linksadjungiert zu Φ.

(b) Wir versehen den Ring S mit der durch $\varphi : R \to S$ induzierten R-Linksmodulstruktur $r.s = \varphi(r) \cdot s$ und die abelsche Gruppe $\mathrm{Hom}_R(S, M)$ mit der natürlichen S-Linksmodulstruktur $s'.f(s) := f(s \cdot s')$. Also ordnet G jedem R-Linksmodul M den S-Linksmodul $\mathrm{Hom}_R(S, M)$ und jedem R-Modulhomomorphismus $f : M \to N$ den S-Modulhomomorphismus

$$\mathrm{Hom}(S, f) : \mathrm{Hom}_{R-\mathbf{Mod}}(S, M) \to \mathrm{Hom}_{R-\mathbf{Mod}}(S, N)$$

zu, der einen R-Modulhomomorphismus $g : S \to M$ auf den R-Modulhomomorphismus $G(g) = f \circ g : M \to N$ abbildet. Die Zuordnung ist verträglich mit den Identitätsmorphismen und der Komposition und definiert daher einen Funktor $G : R - \mathbf{Mod} \to S{-}\mathbf{Mod}$. Um zu zeigen, dass G rechtsadjungiert zu Φ ist, betrachten wir die Gruppenhomomorphismen

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_R(\Phi(N), M) &\to \mathrm{Hom}_S(N, \mathrm{Hom}_R(S, M)), \qquad && f \mapsto (n \mapsto (s \mapsto f(s.n))) \\ \mathrm{Hom}_S(N, \mathrm{Hom}_R(S, M)) &\to \mathrm{Hom}_R(\Phi(N), M), \qquad && g \mapsto (n \mapsto g(n)(\mathbf{1}_S)). \end{aligned}$$

Wie im ersten Beweisschritt kann man zeigen, dass diese zueinander invers und natürlich sind. Also ist G rechtsadjungiert zu Φ. □

Ein wichtiger Spezialfall dieses Satzes ergibt sich, wenn man man Darstellungen einer Gruppe G und einer Untergruppe $H \subset G$ über einem Körper $\mathbb{K}$ betrachtet und als Ringhomomorphismus $\varphi : \mathbb{K}[H] \to \mathbb{K}[G]$ den durch die Inklusionsabbildung $H \to G$ induzierten Ringhomomorphismus wählt. In diesem Fall entspricht der Funktor Φ aus Satz 7.28 der Restriktion von Darstellungen (siehe Beispiel 7.9) und die Koinduktion entspricht der Induktion von Darstellungen.

Beispiel 7.29. (Frobenius-Reziprozität) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, G eine Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe. Dann definiert die Inklusionsabbildung $\iota : H \to G$ einen Ringhomomorphismus $\varphi : \mathbb{K}[H] \to \mathbb{K}[G]$, und der zugehörige Funktor

$$\Phi : \mathbf{Rep}_{\mathbb{K}}(G) \cong \mathbb{K}[G] - \mathbf{Mod} \to \mathbf{Rep}_{\mathbb{K}}(H) \cong \mathbb{K}[H] - \mathbf{Mod}$$

ist die Restriktion von Darstellungen Res^G_H aus Beispiel 7.9.

Der Funktor

$$\mathrm{Coind}^G_H = \mathrm{Hom}(\mathbb{K}[G], -) : \mathbf{Rep}_{\mathbb{K}}(H) \to \mathbf{Rep}_{\mathbb{K}}(G), \qquad \mathrm{Coind}^G_H(M) = \mathrm{Hom}_H(\mathbb{K}[G], M)$$

aus Satz 7.28 ordnet jedem H-Modul M den G-Modul der H-Modulmorphismen $f : \mathbb{K}[G] \to M$ zu. Ein solcher H-Modulmorphismus ist charakterisiert durch die Eigenschaft

$$\delta_h.f(\delta_g) = f(\delta_h \star \delta_g) = f(\delta_{h\cdot g}) \qquad \forall h \in H, g \in G, f : \mathbb{K}[G] \to M.$$

Identifiziert man die Deltafunktionen δ_g mit Gruppenelementen $g \in G$ so sieht man, dass das gerade der $\mathbb{K}[G]$-Modul $\mathrm{Ind}^G_H(M)$ aus Beispiel 7.9 ist. Der Funktor

$$\mathrm{Ind}^G_H : \mathbf{Rep}_{\mathbb{K}}(H) \to \mathbf{Rep}_{\mathbb{K}}(G)$$

ist also rechtsadjungiert zu dem Funktor $\mathrm{Res}^G_H : \mathbf{Rep}_{\mathbb{K}}(G) \to \mathbf{Rep}_{\mathbb{K}}(H)$.

Der Funktor $F : \mathbf{Rep}_{\mathbb{K}}(H) \to \mathbf{Rep}_{\mathbb{K}}(G)$ aus Satz 7.28 ordnet jedem H-Modul M das Tensorprodukt $\mathbb{K}[G] \otimes_{\mathbb{K}[H]} M$ zu, wobei $\mathbb{K}[G]$ mit der $(\mathbb{K}[G], \mathbb{K}[H])$-Bimodulstruktur $\delta_{g'}.\delta_g.\delta_h = \delta_{g'} \star \delta_g \star \delta_h = \delta_{g'\cdot g \cdot h}$ versehen wird. Ist (ρ, M) eine Darstellung von H, so definiert dies eine Darstellung der Gruppe G auf dem Vektorraum $\mathbb{K}[G] \otimes_{\mathbb{K}[H]} M$.

7.2.1 Charakterisierung durch natürliche Transformationen

Die Charakterisierung adjungierter Funktoren durch Bijektionen von Hom-Räumen in Definition 7.26 ist günstig für praktische Anwendungen, da sie sich in konkreten Beispielen leicht nachrechnen lässt. Allerdings ist sie etwas technisch und unkonzeptionell, da sie nicht von den Strukturen Gebrauch macht, die Funktoren zueinander in Beziehung setzen, nämlich den natürlichen Transformationen. Wir betrachten daher noch eine alternative Charakterisierung adjungierter Funktoren durch natürliche Transformationen.

Satz 7.30. (a) *Ein Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ist linksadjungiert zu einem Funktor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ genau dann, wenn es natürliche Transformationen $\epsilon : FG \to \mathrm{id}_\mathcal{D}$ und $\eta : \mathrm{id}_\mathcal{C} \to GF$ gibt, so dass für alle Objekte $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ und $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ gilt:*

$$G(\epsilon_Y) \circ \eta_{G(Y)} = \mathbf{1}_{G(Y)} \colon G(Y) \to GFG(Y) \to G(Y)$$
$$\epsilon_{F(X)} \circ F(\eta_X) = \mathbf{1}_{F(X)} \colon F(X) \to FGF(X) \to F(X).$$

(b) *Ein Paar adjungierter Funktoren $F \dashv G$ definiert genau dann eine Äquivalenz von Kategorien, wenn die natürlichen Transformationen $\epsilon : FG \to \mathrm{id}_\mathcal{D}$ und $\eta : \mathrm{id}_\mathcal{C} \to GF$ natürliche Isomorphismen sind.*

Beweis. (a) Sei $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ linksadjungiert zu $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. Dann folgt aus der Definition, dass für jedes Paar von Objekten D, D' in $\mathcal{D}$ und jedes Paar von Objekten C, C' in $\mathcal{C}$ Bijektionen

$$\varphi_{G(D),D'} : \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(G(D), G(D')) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_\mathcal{D}(FG(D), D')$$
$$\varphi^{-1}_{C,F(C')} : \mathrm{Hom}_\mathcal{D}(F(C), F(C')) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(C, GF(C'))$$

existieren. Für jedes Objekt D in $\mathcal{D}$ bezeichnen wir mit $\epsilon_D : FG(D) \to D$ das Bild des Identitätsmorphismus $\mathbf{1}_{G(D)}$ unter der ersten Bijektion und für jedes Objekt C in $\mathcal{C}$ mit $\eta_C : C \to GF(C)$ das Bild des Identitätsmorphismus $\mathbf{1}_{F(C)}$ unter der zweiten Bijektion. Wir zeigen nun, dass diese Morphismen natürliche Transformationen $\epsilon : FG \to \mathrm{id}_\mathcal{D}$ und $\eta : \mathrm{id}_\mathcal{C} \to GF$ definieren. Aus dem kommutierenden Diagramm in Definition 7.26 erhält man für alle Morphismen $f : D \to D'$ in $\mathcal{D}$:

$$\begin{aligned}\epsilon_{D'} \circ FG(f) =& \varphi_{G(D'),D'}(\mathbf{1}_{G(D')}) \circ FG(f) = \varphi_{G(D),D'}(\mathbf{1}_{G(D')} \circ G(f))\\ =& \varphi_{G(D),D'}(G(f) \circ \mathbf{1}_{G(D)}) = f \circ \varphi_{G(D),D}(\mathbf{1}_{G(D)}) = f \circ \epsilon_D.\end{aligned}$$

Diess zeigt, dass die Morphismen $\epsilon_D : FG(D) \to D$ eine natürliche Transformation $\epsilon : FG \to \mathrm{id}_\mathcal{D}$ definieren. Ebenso ergibt sich aus dem kommutierenden Diagramm in Definition 7.26

$$\begin{aligned}\epsilon_{F(X)} \circ F(\eta_X) =& \varphi_{GF(X),F(X)}(\mathbf{1}_{GF(X)}) \circ F(\varphi^{-1}_{X,F(X)}(\mathbf{1}_{F(X)}))\\ =& \varphi_{X,F(X)}(\mathbf{1}_{GF(X)} \circ \varphi^{-1}_{X,F(X)}(\mathbf{1}_{F(X)}))\\ =& \varphi_{X,F(X)} \circ \varphi^{-1}_{X,F(X)}(\mathbf{1}_{F(X)}) = \mathbf{1}_{F(X)},\end{aligned}$$

also die zweite Identität in der Definition. Der Beweis, dass die Morphismen $\eta_C : C \to GF(C)$ eine natürliche Transformation $\eta : \mathrm{id}_\mathcal{C} \to GF$ definieren, und der Beweis der ersten Identität im Satz sind analog.

(b) Seien nun $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ Funktoren, für die natürliche Transformationen $\epsilon : FG \to \mathrm{id}_\mathcal{D}$ und $\eta : \mathrm{id}_\mathcal{C} \to GF$ existieren, die die Bedingungen in Satz 7.30 erfüllen. Dann erhält man für alle Objekte X in $\mathcal{C}$ und Y in $\mathcal{D}$ Abbildungen

$$\varphi_{X,Y} : \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(X, G(Y)) \xrightarrow{F} \mathrm{Hom}_\mathcal{D}(F(X), FG(Y)) \xrightarrow{g \mapsto \epsilon_Y \circ g} \mathrm{Hom}_\mathcal{D}(F(X), Y)$$
$$\psi_{X,Y} : \mathrm{Hom}_\mathcal{D}(F(X), Y) \xrightarrow{G} \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(GF(X), G(Y)) \xrightarrow{h \mapsto h \circ \eta_X} \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(X, G(Y)).$$

Nun gilt für alle Morphismen $f : X \to G(Y)$ in $\mathcal{C}$ und alle Morphismen $g : F(X) \to Y$ in $\mathcal{D}$

$$\psi_{X,Y} \circ \varphi_{X,Y}(f) = G(\epsilon_Y) \circ GF(f) \circ \eta_X = G(\epsilon_Y) \circ \eta_{G(Y)} \circ f = f$$
$$\varphi_{X,Y} \circ \psi_{X,Y}(g) = \epsilon_Y \circ FG(g) \circ F(\eta_X) = g \circ \epsilon_{F(X)} \circ F(\eta_X) = g,$$

wobei die Natürlichkeit von ϵ und η und die Identitäten aus Satz 7.30 benutzt wurden. Dies zeigt, dass die Abbildung $\varphi_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y)$ bijektiv ist.

Zu zeigen ist noch die universelle Eigenschaft aus Definition 7.26. Seien dazu $f : X \to X'$, $h : X \to G(Y)$ Morphismen in $\mathcal{C}$ und $g : Y \to Y'$ ein Morphismus in $\mathcal{D}$. Einsetzen der Definition von $\varphi_{X,Y}$ und Ausnutzen der Natürlichkeit von ϵ ergibt dann

$$\begin{aligned}\varphi_{X',Y'}(G(g) \circ h \circ f) &= \epsilon_{Y'} \circ FG(g) \circ F(h) \circ F(f) = g \circ \epsilon_Y \circ F(h) \circ F(f)\\ &= g \circ \varphi_{X,Y}(h) \circ F(f).\end{aligned}$$

(c) Sind $F \dashv G$ ein Paar adjungierter Funktoren, so dass die natürlichen Transformationen $\epsilon : FG \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ und $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to GF$ Isomorphismen sind, so sind nach Definition 7.17 F und G Äquivalenzen von Kategorien. Bilden umgekehrt $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ eine Äquivalenz von Kategorien, so folgt aus dem Beweis von Satz 7.19 (siehe Bemerkung 7.20 und (a)), dass diese auch zueinander adjungiert sind mit natürlichen Isomorphismen $\epsilon : FG \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ und $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to GF$. □

7.2.2 Das Yoneda-Lemma

Aufgrund der bisherigen Ergebnisse ist es naheliegend, die Eigenschaften von adjungierten Funktoren wie beispielsweise die Existenz und Eindeutigkeit von links- oder rechts-adjungierten Funktoren genauer zu untersuchen. Ebenso möchte man den Zusammenhang zwischen adjungierten Funktoren und Produkten detaillierter untersuchen.

Dies erfordert, dass wir uns zunächst genauer mit Funktoren von einer gegebenen Kategorie $\mathcal{C}$ in die Kategorie Set der Mengen und Abbildungen befassen. Beispiele solcher Funktoren sind die Hom-Funktoren aus Beispiel 7.8. Ist X ein Objekt in der Kategorie $\mathcal{C}$, so erhält man nach Beispiel 7.8 Funktoren

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}(X,-) : \mathcal{C} \to \mathbf{Set} && \mathrm{Hom}(-,X) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}\\ &Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) && W \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W,X)\\ &f \mapsto \mathrm{Hom}(X,f) : g \mapsto f \circ g && h \mapsto \mathrm{Hom}(h,X) : g \mapsto g \circ h.\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich nun die Frage, *welche* Funktoren $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ sich als Funktoren $\mathrm{Hom}(X,-) : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ beschreiben lassen bzw. zu solchen Funktoren isomorph sind. Dies führt auf den Begriff der Darstellbarkeit von Funktoren.

Definition 7.31. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Ein Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ heißt *darstellbar*, wenn ein Objekt $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ und ein natürlicher Isomorphismus $\eta : F \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(X,-)$ existiert. Ein solches Objekt X wird als *darstellendes Objekt* von F bezeichnet. Analog definiert man Darstellbarkeit für kontravariante Funktoren $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$.

Aus dieser Definition ergibt sich sofort die Frage nach der Eindeutigkeit des darstellenden Objekts für einen darstellbaren Funktor. Ebenso muss man sich für einen gegebenen Funktor $\mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ und ein gegebenes Objekt X mit der Existenz und Eindeutigkeit von natürlichen Transformationen $\eta : \mathrm{Hom}(X, -) \to F$ befassen. Das zentrale Resultat, dass diese Frage beantwortet ist das Yoneda-Lemma, das besagt, dass jede natürliche Transformation $\eta : \mathrm{Hom}(X, -) \to F$ durch ihren Wert $\eta_X(\mathbf{1}_X) : F(X) \to F(X)$ eindeutig bestimmt ist. Dies erlaubt es einem oft, durch "Raten" von X und $\eta_X(\mathbf{1}_X)$ einen natürlichen Isomorphismus $\eta : \mathrm{Hom}(X, -) \to F$ und damit ein darstellendes Objekt zu einem F zu konstruieren.

Lemma 7.32. (Yoneda-Lemma) *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ ein Funktor und X ein Objekt in $\mathcal{C}$. Dann bilden die natürlichen Transformationen $\eta : \mathrm{Hom}(X, -) \to F$ eine Menge $M_{X,F}$ und die Yoneda-Abbildung $M_{X,F} \to F(X)$, $\eta \mapsto \eta_X(\mathbf{1}_X)$ ist eine Bijektion.*

Beweis. (a) **Injektivität der Yoneda-Abbildung:** Eine natürliche Transformation

$$\eta : \mathrm{Hom}(X, -) \to F$$

definiert für jedes Objekt Y von $\mathcal{C}$ eine Abbildung $\eta_Y : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to F(Y)$, so dass für jeden Morphismus $f : Y \to Y'$ das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \arrow[r, "\eta_Y", "g\mapsto g\circ\varepsilon^{-1}"'] \arrow[d, "g\mapsto f\circ g"'] & F(Y) \arrow[d, "F(f)"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y') \arrow[r, "\eta_{Y'}", "g\mapsto g\circ\varepsilon^{-1}"'] & F(Y'). \end{tikzcd}$$

Setzt man $X = Y$ und betrachtet das Bild von $\mathbf{1}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ unter diesen Abbildungen, so erhält man

$$F(f) \circ \eta_X(\mathbf{1}_X) = \eta_{Y'}(f) \qquad \forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y').$$

Dies zeigt, dass die Abbildung $\eta_{Y'} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y') \to F(Y')$ durch F und $\eta_X(\mathbf{1}_X)$ eindeutig bestimmt ist. Somit ist die Yoneda-Abbildung $M_{X,F} \to F(X)$ injektiv.

(b) **Surjektivität der Yoneda-Abbildung:** Um zu zeigen, dass die Yoneda-Abbildung surjektiv ist, müssen wir zu jedem Element $x \in F(X)$ eine natürliche Transformation $\tau : \mathrm{Hom}(X, -) \to F$ konstruieren mit $\tau_X(\mathbf{1}_X) = x$. Dazu betrachten wir für gegebenes $x \in F(X)$ die Abbildung

$$\tau_Y : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to F(Y), \quad h \mapsto F(h)(x)$$

Offensichtlich gilt

$$\tau_X(\mathbf{1}_X) = F(\mathbf{1}_X)(x) = \mathbf{1}_{F(X)}(x) = \mathrm{id}_{F(X)}(x) = x.$$

Dass die Morphismen $\tau_Y : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to F(Y)$ eine natürliche Transformation definieren ist äquivalent zur Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \arrow[r, "\tau_Y"] \arrow[d, "g\mapsto f\circ g"'] & F(Y) \arrow[d, "F(f)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y') \arrow[r, "\tau_{Y'}"'] & F(Y')
\end{tikzcd}$$

für alle Morphismen $f : Y \to Y'$. Diese ergibt sich durch direktes Nachrechnen:

$$F(f)(F(h)(x)) = F(f) \circ F(h)(x) = F(f \circ h)(x).$$

Also kommutiert das Diagramm und die Morphismen $\tau_Y : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to F(Y)$ definieren eine natürliche Transformation $\tau : \mathrm{Hom}(X,-) \to F$ mit $\tau_X(\mathbf{1}_X) = x$. Die Yoneda- Abbildung ist also surjektiv. □

Das Yoneda-Lemma hat viele wichtige Anwendungen, da es erlaubt aus Abbildungen zwischen Mengen natürliche Transformationen zu konstruieren. Ein weiteres schönes Ergebnis, das sich direkt aus dem Yoneda-Lemma ergibt, ist eine Eindeutigkeitsaussage für darstellende Objekte von Funktoren.

Korollar 7.33. *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Dann gilt:*

(a) *Die Funktoren* $\mathrm{Hom}(X,-) : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$, $\mathrm{Hom}(Y,-) : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ *für zwei Objekte X, Y in $\mathcal{C}$ sind genau dann isomorph, wenn die Objekte X und Y isomorph sind.*

(b) *Ist ein Funktor $F : \mathcal{C} \to$* $\mathbf{Set}$ *darstellbar, so ist das darstellende Objekt eindeutig bis auf Isomorphie.*

(c) *Analoge Aussagen gelten für die kontravarianten Funktoren* $\mathrm{Hom}(-,X) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$.

Beweis. (a) Existiert ein Isomorphismus $\epsilon : X \xrightarrow{\sim} Y$, so definieren die Abbildungen

$$\eta_Z : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z), \quad g \mapsto g \circ \epsilon^{-1}$$

für jedes Objekt Z eine Bijektion zwischen $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z)$ und $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)$. Diese setzten sich zu einem natürlichen Isomorphismus $\eta : \mathrm{Hom}(X,-) \to \mathrm{Hom}(Y,-)$ zusammen, denn für alle Morphismen $f : Z \to W$ kommutiert das folgende Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z) \arrow[r, "\eta_Z"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(X,f)"', "g\mapsto f\circ g"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(Y,f)"', "g\mapsto f\circ g"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,W) \arrow[r, "\eta_W"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,W).
\end{tikzcd}$$

Existiert umgekehrt ein natürlicher Isomorphismus $\eta : \mathrm{Hom}(X,-) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(Y,-)$, so existiert ein Morphismus $f : X \to Y$ mit $\eta_Y(f) = \mathbf{1}_Y$, denn

$$\eta_Y : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Y)$$

ist eine Bijektion. Wir setzen $h := \eta_X(\mathbf{1}_X) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$. Wegen der Natürlichkeit von η kommutieren außerdem die Diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(X,f)"', "g\mapsto f\circ g"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(Y,f)"', "g\mapsto f\circ g"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \arrow[r, "\eta_Y"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Y).
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Y) \arrow[r, "\eta_Y^{-1}"] \arrow[d, "g\mapsto h\circ g"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \arrow[d, "g\mapsto h\circ g"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X) \arrow[r, "\eta_X^{-1}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X),
\end{tikzcd}$$

und es folgt

$$\begin{aligned}
f \circ h &= \eta_Y(f \circ \mathbf{1}_X) = \eta_Y(f) = \mathbf{1}_Y \\
h \circ f &= h \circ \eta_Y^{-1}(\mathbf{1}_Y) = \eta_X^{-1}(h \circ \mathbf{1}_Y) = \eta_X^{-1}(h) = \mathbf{1}_X
\end{aligned}$$

Also sind $f : X \to Y$ und $h : Y \to X$ zueinander inverse Isomorphismen.

(b) Dies ergibt sich direkt aus der Definition. Sind X, X' zwei darstellende Objekte von $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$, dann existieren natürliche Isomorphismen

$$\eta : F \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(X,-) \quad \text{und} \quad \eta' : F \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(X',-)$$

und somit sind auch die Funktoren $\mathrm{Hom}(X,-)$ und $\mathrm{Hom}(X',-)$ isomorph. Aus (a) folgt dann $X \cong X'$. □

Dieses Korollar und das Yoneda-Lemma sind deswegen so hilfreich, weil sich damit Aussagen über Funktoren und natürliche Transformationen in Aussagen über die Isomorphie von Hom-Räumen übersetzen lassen. Insbesondere lassen sich diese Ergebnisse leicht auf Funktoren anwenden, die gerade über Beziehungen zwischen Hom-Räumen charakterisiert sind, wie die links- oder rechtsadjungierten Funktoren eines gegebenen Funktors. Wir erhalten den folgenden Satz, dessen Beweis noch einmal die Nützlichkeit des Yoneda-Lemmas verdeutlicht.

Satz 7.34. *Besitzt ein Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ einen linksadjungierten oder einen rechtsadjungierten Funktor, so ist dieser eindeutig bestimmt bis auf Isomorphie.*

Beweis. Seien $F, F' : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ zwei Linksadjungierte zu einem Funktor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. Dann hat man für alle Objekte C in $\mathcal{C}$ und D in $\mathcal{D}$ Isomorphismen:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C),D) \xrightarrow{\varphi_{C,D}^{-1}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,G(D)) \xrightarrow{\varphi'_{C,D}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F'(C),D),$$

und die Isomorphismen $\varphi_{C,D}$, $\varphi'_{C,D}$ erfüllen die Natürlichkeitsbedingung aus Definition 7.26. Dies definiert für jedes Objekt C einen natürlichen Isomorphismus

$$\eta^{(C)}\colon \operatorname{Hom}(F(C),-) \to \operatorname{Hom}(F'(C),-), \qquad \eta^{(C)}_D = \varphi'_{C,D} \circ \varphi^{-1}_{C,D}$$

denn das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C),D) \arrow[r, "\varphi^{-1}_{C,D}"] \arrow[d, "g\mapsto f\circ g"'] \arrow[rr, bend left, "\eta^{(C)}_D"] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(C,G(D)) \arrow[r, "\varphi'_{C,D}"] \arrow[d, "g\mapsto G(f)\circ g"'] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F'(C),D) \arrow[d, "g\mapsto f\circ g"'] \\
\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C),E) \arrow[r, "\varphi^{-1}_{C,E}"] \arrow[rr, bend right, "\eta^{(C)}_E"'] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(C,G(E)) \arrow[r, "\varphi'_{C,E}"] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F'(C),E)
\end{tikzcd} \tag{32}$$

kommutiert für alle $\mathcal{D}$-Morphismen $f\colon D \to E$ wegen der Natürlichkeitseigenschaft in Definition 7.26. Also ergibt sich aus dem Beweis von Korollar 7.33, dass für alle Objekte C ein Isomorphismus $\tau_C = \eta^{(C)}_{F(C)}(\mathbf{1}_{F(C)}) : F'(C) \to F(C)$ existiert. Aus der Natürlichkeitseigenschaft in Definition 7.26 folgt dann, dass das folgende Diagramm für alle Morphismen $f : B \to C$ kommutiert

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C),D) \arrow[r, "\varphi^{-1}_{C,D}"] \arrow[d, "g\mapsto g\circ F(f)"'] \arrow[rr, bend left, "\eta^{(C)}_D"] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(C,G(D)) \arrow[r, "\varphi'_{C,D}"] \arrow[d, "g\mapsto g\circ f"'] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F'(C),D) \arrow[d, "g\mapsto g\circ F'(f)"'] \\
\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(B),D) \arrow[r, "\varphi^{-1}_{B,D}"] \arrow[rr, bend right, "\eta^{(B)}_D"'] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(B,G(D)) \arrow[r, "\varphi'_{B,D}"] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F'(B),D).
\end{tikzcd} \tag{33}$$

Setzt man darin $D = F(C)$ und betrachtet das Bild des Morphismus $\mathbf{1}_{F(C)}$, so erhält man

$$\begin{aligned}
\tau_C \circ F'(f) &\overset{(33)}{=} \eta^{(B)}_{F(C)}(\mathbf{1}_{F(C)} \circ F(f)) = \eta^{(B)}_{F(C)}(F(f) \circ \mathbf{1}_{F(B)}) \\
&\overset{(32)}{=} F(f) \circ \eta^{(B)}_{F(B)}(\mathbf{1}_{F(B)}) = F(f) \circ \tau_B,
\end{aligned}$$

wobei wieder die Natürlichkeitseigenschaft in Definition 7.26 benutzt wurde. Also bilden die Isomorphismen $\tau_C : F'(C) \to F(C)$ einen natürlichen Isomorphismus $\eta : F \xrightarrow{\sim} F'$. $\square$

Mit Hilfe dieser Ergebnisse können wir nun auch die Beziehung zwischen adjungierten Funktoren und den Produkten und Koprodukten in einer Kategorie klären. Die Definition eines links- bzw. rechtsadjungierten Funktors ergab sich ja gerade als Verallgemeinerung der Beziehung zwischen den durch Produkte und Koprodukte definierten Funktoren und dem Diagonalenfunktor. Wir zeigen nun, dass rechts- bzw. linksadjungierte Funktoren mit Produkten und Koprodukten in den zugrundeliegenden Kategorien kompatibel sind, d.h. bis auf Isomorphie Produkte und Koprodukte erhalten.

Satz 7.35. *Sei $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ linksadjungiert zu $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. Dann vertauscht G mit Produkten und F mit Koprodukten:*

$$G\Big(\prod_{i\in I} D_i\Big) \cong \prod_{i\in I} G(D_i) \qquad \textit{und} \qquad F\Big(\coprod_{i\in I} C_i\Big) \cong \coprod_{i\in I} F(C_i).$$

Beweis. Wir beweisen die Aussage für Produkte. Der Beweis der Aussage für Koprodukte ist analog. Sei $\Pi_{i\in I} D_i$ ein Produkt in $\mathcal{D}$ und C ein beliebiges Objekt in $\mathcal{C}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, G(\Pi_{i\in I} D_i)) &\overset{F\vdash G}{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), \Pi_{i\in I} D_i) \overset{\substack{\text{univ. Eigenschaft}\\ \text{von }\Pi}}{\cong} \Pi_{i\in I}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), D_i)\\ &\overset{F\vdash G}{\cong} \Pi_{i\in I}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, G(D_i)) \overset{\substack{\text{univ. Eigenschaft}\\ \text{von }\Pi}}{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, \Pi_{i\in I} G(D_i)).\end{aligned}$$

Diese Isomorphismen definieren einen natürlichen Isomorphismus $\eta : \mathrm{Hom}(-, G(\Pi_{i\in I} D_i)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(-, \Pi_{i\in I} G(D_i))$, denn das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, G(\Pi_{i\in I} D_i)) \arrow[r, "\eta_C"] \arrow[d, "g\mapsto g\circ f"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, \Pi_{i\in I} G(D_i)) \arrow[d, "g\mapsto g\circ f"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C', G(\Pi_{i\in I} D_i)) \arrow[r, "\eta_{C'}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C', \Pi_{i\in I} G(D_i))
\end{tikzcd}$$

kommutiert für alle Morphismen $f : C' \to C$. Dies ergibt sich aus der obige Kette von Isomorphismen, indem man die universelle Eigenschaft der Produkte sowie die kommutierenden Diagramme in Definition 7.26 benutzt. Mit Korollar 7.33 folgt nun, dass die Objekte $G(\Pi_{i\in I} D_i)$ und $\Pi_{i\in I} G(D_i)$ isomorph sind. □

Aufgaben zu Kapitel 7

Aufgabe 7.1. Zeigen Sie, dass eine Kategorie $\mathcal{C}$ existiert, deren Objekte die Mengen sind und deren Morphismen alle injektiven Abbildungen.

Aufgabe 7.2. Sei V eine Menge und $E \subseteq V^2$ eine Teilmenge. Unter welchen Bedingungen an E erhalten wir durch $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) = V$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) = \begin{cases} \{(y, x)\} & \text{falls } (x, y) \in E \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad (x, y) \circ (y, z) := (x, z)$$

eine Kategorie? Wann ist diese Kategorie ein Gruppoid (alle Pfeile sind invertierbar)?

Aufgabe 7.3. (Quotientenkategorien) Ist $\mathcal{C}$ eine Kategorie und für je zwei Objekte $X, Y \sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, so dass aus $f \sim g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ und $h \sim k \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ folgt $h \circ f \sim k \circ g$ (Kongruenzrelation), dann erhält man eine neue Kategorie $\mathcal{C}'$ mit

$$\mathrm{Ob}\, \mathcal{C} = \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}' \quad \text{und} \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)/\sim$$

mit der durch die Komposition in $\mathcal{C}$ induzierte Komposition: $[h] \circ [f] = [h \circ f]$.

Aufgabe 7.4. (Kategorie der Mengenpaare) Zeigen Sie die Existenz einer Kategorie $\mathcal{C}$ deren Objekte Paare von Mengen (A, X) mit $A \subseteq X$ und deren Morphismen $f\colon (A, X) \to (A', X')$ alle Abbildungen $f\colon X \to X'$ mit $f(A) \subseteq A'$. Wann sind zwei Paare (A, X) und (A', X') isomorph?

Aufgabe 7.5. (Freie Gruppen) Verifizieren Sie die folgenden Behauptungen: Für eine Menge M sei $F(M)$ die *freie Gruppe über* M. Ihre Elemente sind Wörter

$$g_1^{\varepsilon_1} \cdots g_n^{\varepsilon_n}, \quad g_i \in M, \varepsilon_i \in \{\pm 1\}, n \in \mathbb{N}_0,$$

die durch Konkatenation multipliziert werden. Hierbei kürzt man alle Ausdrücke der Gestalt gg^{-1} und $g^{-1}g$. Man erhält so eine Gruppe, deren Einselement e das leere Wort ist ($n = 0$) und die Inversion in $F(M)$ ist gegeben durch

$$(g_1^{\varepsilon_1} \cdots g_n^{\varepsilon_n})^{-1} = g_n^{-\varepsilon_n} \cdots g_1^{-\varepsilon_1}.$$

Zu jeder Mengenabbildung $f\colon M \to N$, existiert ein eindeutig bestimmter Gruppenhomomorphismus

$$F(f)\colon F(M) \to F(N), \quad g_1^{\varepsilon_1} \cdots g_n^{\varepsilon_n} \mapsto f(g_1)^{\varepsilon_1} \cdots f(g_n)^{\varepsilon_n}.$$

Zu jeder Abbildung $f\colon M \to G$ der Menge M in eine Gruppe G existiert genau ein Gruppenhomomorphismus

$$\widetilde{f}\colon F(M) \to G \quad \text{mit} \quad \widetilde{f}(g_1^{\varepsilon_1} \cdots g_n^{\varepsilon_n}) = f(g_1)^{\varepsilon_1} \cdots f(g_n)^{\varepsilon_n}.$$

Aufgabe 7.6. Ist $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor und $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ein Isomorphismus, so ist auch $F(\varphi) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ ein Isomorphismus.

Aufgabe 7.7. Für eine Gruppe G ist die Kommutatorgruppe $[G, G]$ die von Elementen $[g, h] = g \cdot h \cdot g^{-1} \cdot h^{-1}$ mit $g, h \in G$ erzeugte Untergruppe. Sie bildet eine normale Untergruppe von G, und die Faktorgruppe $G/[G, G]$ ist eine abelsche Gruppe. Wir bezeichnen mit $\pi_G : G \to G/[G, G]$ die kanonische Surjektion. Zeigen Sie:

(a) Ist $f : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus, so existiert genau ein Gruppenhomomorphismus $\widetilde{f} : G/[G, G] \to H/[H, H]$ mit $\widetilde{f} \circ \pi_G = \pi_H \circ f$.

(b) Die Zuordnungen $G \to G/[G, G]$, $f \to \widetilde{f}$ definiert einen Funktor $F : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Grp}$.

(c) Die kanonischen Surjektionen $\pi_G : G \to G/[G, G]$ definiert eine natürliche Transformation zwischen dem Identitätfunktor $\mathrm{id}_{\mathbf{Grp}} : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Grp}$ und dem Funktor $F : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Grp}$.

Aufgabe 7.8. Seien X, Y topologische Räume. Zwei stetige Abbildungen $f, g : X \to Y$ heißen *homotop*, $f \sim g$, wenn eine stetige Abbildung $h : X \times [0,1] \to Y$ mit $h(x,0) = f(x)$ und $h(x,1) = g(x)$ für alle $x \in X$ existiert.

(a) Zeigen Sie, dass die Homotopie von Abbildungen eine Äquivalenzrelation auf der Menge der stetigen Abbildungen von X nach Y definiert.

(b) Zeigen Sie, dass für topologische Räume X, Y, Z und stetige Abbildungen $f, g : X \to Y$, $h, k : Y \to Z$ aus $f \sim g$ und $h \sim k$ folgt $h \circ f \sim k \circ g$.

(c) Zeigen Sie, dass die topologischen Räume und die Homotopieäquivalenzklassen stetiger Abbildungen eine Kategorie hTop bilden und bestimmen Sie die Isomorphismen in dieser Kategorie.

(d) Zeigen Sie, dass dies einen Funktor π : Top $\to$ hTop definiert, der wesentlich surjektiv, aber nicht volltreu ist.

Aufgabe 7.9. Sei X ein topologischer Raum. Ein *Weg* in X ist eine stetige Abbildung $c : [0,1] \to X$. Die Verkettung zweier Wege $c, d : [0,1] \to X$ mit $c(1) = d(0)$ ist der Weg $d \star c : [0,1] \to X$ mit

$$d \star c(t) = \begin{cases} c(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ d(2t-1) & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Zwei Wege $c, c' : [0,1] \to X$ mit gleichen Anfangs- und Endpunkten $c(0) = c'(0)$, $c(1) = c'(1)$ heißen *homotop*, $c \sim c'$, wenn eine stetige Abbildung $h : [0,1] \times [0,1] \to X$ mit $h(t,0) = c(t)$, $h(t,1) = c'(t)$ für alle $t \in [0,1]$ und $h(0,s) = c(0)$, $h(1,s) = c(1)$ für alle $s \in [0,1]$ existiert.

(a) Untersuchen Sie, ob die Verkettung von Wegen assoziativ ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Homotopie von Wegen eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Wege $c : [0,1] \to X$ mit festem Anfangs- und Endpunkt $c(0) = x_0$, $c(1) = x_1$ definiert.

(c) Zeigen Sie: Sind $c, c', d, d' : [0,1] \to X$ Wege mit $c(0) = c'(0)$, $c(1) = c'(1) = d(0) = d'(0)$ und $d(1) = d'(1)$, so dass gilt $c \sim c'$, $d \sim d'$, dann folgt $d \star c \sim d' \star c'$.

(d) Zeigen Sie, dass man eine Kategorie erhält, deren Objekte Punkte des topologischen Raums X und deren Morphismen Homotopieäquivalenzklassen von Wegen in X sind. Überlegen Sie sich, dass das nicht der Fall ist, wenn man versucht, als Morphismen Wege in X zu wählen.

(e) Zeigen Sie, dass die Kategorie aus Aufgabenteil (d) ein Gruppoid ist. Sie wird als *Fundamentalgruppoid* des topologischen Raums X bezeichnet.

(f) Zeigen Sie: Ist eine Kategorie $\mathcal{C}$ ein Gruppoid, so bilden für jedes Objekt X in $\mathcal{C}$ die Morphismen $f : X \to X$ eine Gruppe. Folgern Sie, dass für jeden fest gewählten Punkt $x \in X$ die Homotopieklassen von Wegen $c : [0,1] \to X$ mit $c(0) = c(1) = x$ eine Gruppe bilden. Diese wird als *Fundamentalgruppe* des topologischen Raums X mit *Basispunkt* x und mit $\pi_1(x, X)$ bezeichnet.

Aufgabe 7.10. Zeigen Sie, dass das Tensorprodukt von R-Moduln einen Funktor

$$\otimes_R : R^{\mathrm{op}} - \mathbf{Mod} \times R - \mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$$

definiert.

Aufgabe 7.11. Seien X, Y, Z topologische Räume mit ausgewählten Punkten $x \in X, y \in Y, z \in Z$ und $\pi_1(x, X)$, $\pi_1(y, Y)$, $\pi_1(z, Z)$ die zugehörigen Fundamentalgruppen. Für Wege $c : [0,1] \to X$ mit $c(0) = c(1) = x$ bezeichnen wir mit $[c]_X$ die entsprechende Homotopieklasse in $\pi_1(x, X)$ und analog für Y und Z. Zeigen Sie:

(a) Ist $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung mit $f(x) = y$, dann erhält man durch $\pi_1(f)([c]) := [f \circ c]$ einen Gruppenhomomorphismus $\pi_1(f) : \pi_1(x, X) \to \pi_1(y, Y)$.

(b) Es gilt $\pi_1(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\pi_1(x,X)}$ und für alle stetigen Abbildungen $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ mit $f(x) = y$, $g(y) = z$ folgt $\pi_1(g \circ f) = \pi_1(g) \circ \pi_1(f)$.

(c) Die Zuordnungen $(x, X) \to \pi_1(x, X)$ und $f \to \pi_1(f)$ definieren einen Funktor

$$\pi_1 : \mathbf{Top}^* \to \mathbf{Grp}$$

von der Kategorie Top* der punktierten topologischen Räume in die Kategorie **Grp** der Gruppen.

Aufgabe 7.12. (Grothendieckgruppen von Monoiden) Sei $M = (M, \cdot, e)$ ein Monoid und $G(M)$ seine Grothendieck–Gruppe. Zeigen Sie:

(a) Sei $\eta \colon M \to G(M)$ die kanonische Abbildung. Dann wird $G(M)$ von $\eta(M)$ erzeugt.

(b) Ist M kommutativ, so auch $G(M)$, und in diesem Fall gilt $G(M) = \eta(M)\eta(M)^{-1}$.

(c) Sei $(M, +, e)$ kommutativ mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass für $a, b \in M$ ein $c \in M$ existiert, so dass $b = a + c$ oder $a = b + c$ gilt und die Additionsabbildungen $\lambda_a(b) = a + b$ injektiv sind. Wir betrachten die Menge M^2 mit der Monoidstruktur, die gegeben ist durch

$$e_{M^2} = (e, e) \quad \text{und} \quad (m, n) + (m', n') := (m + m', n + n').$$

Zeigen Sie:

(i) Durch $(m, n) \sim (m', n')$, falls ein $a \in M$ existiert mit $(m', n') = (m + a, n + a)$ oder $(m, n) = (m' + a, n' + a)$ wird auf M^2 eine Äquivalenzrelation definiert.

(ii) Die Menge $M^2/\sim$ trägt eine natürliche Gruppenstruktur, so dass die Quotientenabbildung $M^2 \to M^2/\sim$ ein Homomorphismus ist.

(iii) Die Abbildung $f \colon M^2/\sim \to G(M), (m, n) \mapsto m - n$ ist ein Gruppenisomorphismus.

(iv) $G(\mathbb{N}_0) \cong \mathbb{Z}$ und $G((\mathbb{Z} \setminus \{0\}, 1)) \cong \mathbb{Q}^\times$.

Aufgabe 7.13. Sei R ein Ring (ohne Eins) und

$$\widetilde{R} := R \oplus \mathbb{Z}, \quad \text{mit} \quad (r, n)(s, m) := (rs + ns + mr, nm), \qquad r, s \in R, n, m \in \mathbb{Z}$$

die zugehörige "Vereinsung" mit dem Einselement $\mathbf{1} = (0, 1)$. Zeigen Sie:

(i) Durch $\varphi \colon R \to \widetilde{R}, r \mapsto (r, 0)$ wird ein injektiver Homomorphismus von Ringen definiert, der R auf ein Ideal von $\widetilde{R}$ abbildet.

(ii) Der zugehörige Vergissfunktor

$$V: \widetilde{R} - \mathbf{Mod} \to R - \mathbf{Mod}$$

ist ein Isomorphismus von Kategorien. Hierbei sind die Modulstrukturen in $\widetilde{R} - \mathbf{Mod}$ immer mit $\mathbf{1}.m = m$ zu verstehen.

Aufgabe 7.14. Sei $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor. Zeigen Sie, dass F genau dann ein Isomorphismus von Kategorien ist, wenn F volltreu ist und für jedes Objekt $Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ genau ein $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ mit $F(X) = Z$ existiert.

Aufgabe 7.15. Sind $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ Äquivalenzen von Kategorien, so auch $G \circ F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{E}$.

Aufgabe 7.16. Zeigen Sie: ist $\mathcal{C}$ eine kleine Kategorie und $\mathcal{D}$ eine Kategorie, so bilden die Funktoren $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und die natürlichen Transformationen $\eta : F \to G$ eine Kategorie.

Aufgabe 7.17. Zeigen Sie, dass die Kategorie $\mathbf{Vect}^{\mathrm{fin}}(\mathbb{K})$ der endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorräume äquivalent ist zur Kategorie der nichtnegativen ganzen Zahlen mit Matrixen $M \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ als Morphismen $M : n \to m$, indem sie eine Äquivalenz von Kategorien und die zugehörigen natürlichen Isomorphismen explizit angeben.

Aufgabe 7.18. Betrachten Sie den Beweis der Aussage, dass ein Funktor genau dann eine Äquivalenz von Kategorien ist, wenn er wesentlich surjektiv und volltreu ist (Satz 7.19), und ergänzen Sie alle Schritte, die dort nicht genau ausgeführt sind. Zeigen Sie, dass die in diesem Beweis definierten natürlichen Isomorphismen $\epsilon : FG \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ und $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\sim} GF$ die Bedingungen

$$\epsilon_{F(X)} \circ F(\eta_X) = \mathbf{1}_{F(X)} \qquad G(\epsilon_W) \circ \eta_{G(W)} = \mathbf{1}_{G(W)}$$

erfüllen und somit die Funktoren F, G eine adjungierte Äquivalenz bilden.

Aufgabe 7.19. Seien G_1, G_2 Gruppen mit neutralen Elementen e_1 und e_2 und $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. [10] Dann ist das *freie Produkt* $G_1 \star G_2$ definiert als die Menge der *freien Wörter* in G_1 und G_2

$$G_1 \star G_2 = \{(g_1, g_2, \ldots, g_n) : \; n \in \mathbb{N}_0, g_j \in (G_1 \setminus \{e_1\}) \cup (G_2 \setminus \{e_2\}), g_i \in G_1 \Leftrightarrow g_{i+1} \in G_2\},$$

mit der Verknüpfung

$$(g_1, \ldots, g_n)\cdot(h_1, \ldots, h_m) = \begin{cases} (g_1, \ldots, g_{n-k-1}, g_{n-k} \cdot h_{k+1}, \ldots, h_m) & \text{falls } g_{n-s} \cdot h_{1+s} = e_{i_s} \text{ für } 0 \leq s < k \\ & \text{und } g_{n-k}, h_{k+1} \in G_{i_k} \text{ mit} \\ & g_{n-k} \cdot h_{k+1} \neq e_{i_k} \\ (g_1, \ldots, g_{n-k}, h_{k+1}, \ldots, h_m) & \text{falls } g_{n-s} \cdot h_{1+s} = e_{i_s} \text{ für } 0 \leq s < k \\ & \text{und } g_{n-k} \in G_i, h_{k+1} \in G_j \text{ mit } i \neq j \end{cases}$$

[10]Diese Voraussetzung beschränkt die Allgemeinheit der Definition nicht—man kann ansonsten eine der beiden Gruppen durch eine dazu isomorphe Gruppe ersetzen.

Die *Inklusionsabbildungen* $\iota_i : G_i \to G_1 \star G_2$ sind definiert durch

$$\iota_i(g) = \begin{cases} (g) & g \neq e_i \\ () & g = e_i. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) Die Menge $G_1 \star G_2$ mit dieser Verknüpfung bildet eine Gruppe mit dem leeren Wort () als neutralem Element und Inversen $(g_1, \ldots, g_n)^{-1} = (g_n^{-1}, \ldots, g_1^{-1})$.

(b) Ist H eine Gruppe und $\varphi_1 : G_1 \to H$, $\varphi_2 : G_2 \to H$ Gruppenhomomorphismen, so existiert genau ein Gruppenhomomorphismus $\varphi_1 \star \varphi_2 : G_1 \star G_2 \to H$, so dass das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} & G_1 \arrow[dl, "\iota_1"'] \arrow[dr, "\varphi_1"] & \\ G_1 \star G_2 \arrow[rr, "\varphi_1 \star \varphi_2"] & & H \\ & G_2 \arrow[ul, "\iota_2"] \arrow[ur, "\varphi_2"'] & \end{tikzcd}.$$

Dies nennt man die *universelle Eigenschaft des freien Produktes von Gruppen.*

(c) Das freie Produkt von Gruppen ist assoziativ.

(d) Sind $G_1, \ldots, G_n$ Gruppen mit $G_i \cap G_j = \emptyset$ für $i \neq j$, so ist das freie Produkt

$$G_1 \star G_2 \star \ldots \star G_n$$

ein Koprodukt der Objekte $G_1, \ldots, G_n$ in der Kategorie **Grp**.

Aufgabe 7.20. Wir betrachten den Funktor $F : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Ab}$, der einer Gruppe G die abelsche Gruppe $G/[G,G]$ und einem Gruppenhomomorphismus $f : G \to H$ den eindeutig bestimmten Gruppenhomomorphismus $F(f) : G/[G,G] \to H/[H,H]$ mit $F(f) \circ \pi_G = \pi_H \circ f$ zuordnet, wobei $\pi_G : G \to G/[G,G]$ die kanonische Surjektion bezeichnet. Zeigen Sie, dass dieser Funktor linksadjungiert zum Inklusionsfunktor $\iota : \mathbf{Ab} \to \mathbf{Grp}$ ist.

Aufgabe 7.21. Wir betrachten die Körper $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ und den durch die Inklusionsabbildung definierten Ringhomomorphismus $\iota : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie, dass der durch Restriktion von Skalaren definierte Funktor $\Phi : \mathbf{Vect}(\mathbb{C}) \to \mathbf{Vect}(\mathbb{R})$ gerade die kanonischen Struktur eines rellen Vektorraums für jeden komplexen Vektorraum V angibt. Überlegen Sie sich, wie man aus einer Basis des komplexen Vektorraums V eine Basis des reellen Vektorraums $\Phi(V)$ erhält.

(b) Zeigen Sie, dass der dazu linksadjungierte Funktor $F : \mathbf{Vect}(\mathbb{R}) \to \mathbf{Vect}(\mathbb{C})$ mit $F(V) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ und $F(f) = \mathrm{id}_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{R}} f$ gerade der Komplexifizierung von Vektorräumen entspricht. Geben Sie für eine gegebene Basis B des reellen Vektorraums V eine Basis des komplexen Vektorraums $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ an.

(c) Zeigen Sie, dass der Endofunktor $\Phi \circ F\colon \mathbf{Vect}(\mathbb{R}) \to \mathbf{Vect}(\mathbb{R})$ äquivalent ist zum Verdopplungsfunktor, der durch $D(V) = V \oplus V$ und $D(f) = f \oplus f$ gegeben ist.

(d) Zeigen Sie, dass der Endofunktor $F \circ \Phi\colon \mathbf{Vect}(\mathbb{C}) \to \mathbf{Vect}(\mathbb{C})$ äquivalent ist zum Endofunktor, der durch $D(V) = V \oplus \overline{V}$ und $D(f) = f \oplus f$ gegeben ist. Hierbei ist $\overline{V}$ der komplexe Vektorraum mit der Skalarmultiplikation $\lambda * v := \overline{\lambda} v$.

(e) Sei $G\colon \mathbf{Vect}(\mathbb{R}) \to \mathbf{Vect}(\mathbb{C})$ der Funktor, der einem rellen Vektorraum V den komplexen Vektorraum $G(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, V)$ mit $(\lambda f)(z) := f(z\lambda)$ zugeordnet und einer $\mathbb{R}$-linearen Abbildung $f : V \to W$ die $\mathbb{C}$-lineare Abbildung

$$G(f) : \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, V) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, W), \quad g \mapsto f \circ g.$$

Konstruieren Sie zu einer gegebenen Basis B von V eine Basis des komplexen Vektorraums $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, V)$.

(f) Zeigen Sie, dass die komplexen Vektorräume $F(V) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ und $G(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, V)$ stets isomorph sind. Erhält man so eine natürliche Transformation $\tau\colon F \to G$?

Aufgabe 7.22. Geben Sie ein Skelett in der Kategorie $\mathbf{Vect}^{\mathrm{fin}}(\mathbb{K})$ der endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorräume an.

Aufgabe 7.23. Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien, $\mathcal{S}_{\mathcal{C}}$ ein Skelett von $\mathcal{C}$ und $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$ ein Skelett von $\mathcal{D}$. Zeigen Sie, dass die Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ genau dann äquivalent sind, wenn die Kategorien $\mathcal{S}_{\mathcal{C}}$ und $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$ isomorph sind.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass die Inklusionen $\mathcal{S}_{\mathcal{C}} \to \mathcal{C}$ und $\mathcal{S}_{\mathcal{D}} \to \mathcal{D}$ eine Äquivalenz von Kategorien definieren.

Aufgabe 7.24. Seien $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $E : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ und $H : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ Funktoren und $\eta : F \to G$ eine natürliche Transformation. Zeigen Sie, dass dies natürliche Transformationen $\eta E : FE \to GE$ und $H\eta : HF \to HG$ definiert und $H(\eta E) = (H\eta)E$.

Literatur

[EN27] Noether, E., *Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern*, Mathematische Annalen **96:1** (1927), 26–61

[La93] Lang, S., “Algebra,” 3rd edn., Addison Wesley Publ. Comp., London, 1993

[SS80] Scheja, G., und U. Storch, “Lehrbuch der Algebra, Teil 1,” Teubner Verlag, Stuttgart, 1980

[SS81] Scheja, G., und U. Storch, “Lehrbuch der Algebra, Teil 3,” Teubner Verlag, Stuttgart, 1981