

Funktionentheorie I

Karl-Hermann Neeb

July 11, 2022

Contents

1	Die komplexen Zahlen	1
1.1	Die komplexe Konjugation und der Betrag	2
1.2	Polarkoordinaten	3
1.3	Konvergenz und stetige Funktionen	4
2	Holomorphe Funktionen	7
2.1	Komplexe Differenzierbarkeit	8
2.2	Beispiele holomorpher Funktionen	10
2.3	Komplexe und reelle Differenzierbarkeit	12
3	Wegintegrale und Stammfunktionen	14
3.1	Wegintegrale	15
3.2	Zusammenhängende Teilmengen in $\mathbb{C}$	17
3.3	Mehrdeutigkeit von Stammfunktionen	18
3.4	Existenz von Stammfunktionen	19
3.5	Wegintegrale von z^n um die Null herum	24
4	Der Integralsatz von Cauchy	25
4.1	Integrale über allgemeine Wege	25
4.2	Homotopie von Wegen	29
4.3	Der Integralsatz	29
4.4	Die Integralformel von Cauchy	31
5	Potenzreihenentwicklung	35
5.1	Lokal gleichmäßige Konvergenz	35
5.2	Potenzreihen	37
5.3	Potenzreihenentwicklungssatz	38
5.4	Nullstellen	39
5.5	Komplexe Logarithmus-Funktionen	41
5.6	Die lokale Normalform holomorpher Funktionen	43
6	Laurententwicklung und Residuensatz	47
6.1	Isolierte Singularitäten	47
6.2	Laurententwicklung	48
6.3	Der Satz von Casorati–Weierstraß	51
6.4	Umlaufzahlen	51
6.5	Residuensatz	56
6.6	Anwendung auf reelle Integrale	57

7 Konforme Abbildungen	60
7.1 Das Schwarzsche Lemma	60
7.2 Konforme Abbildungen	61

Notation:

- $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$,
- $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$
- $K_r(z) = \{w \in \mathbb{C} : |z - w| < r\}$, offene Kreisscheibe vom Radius r
- $K_{\leq r}(z) = \{w \in \mathbb{C} : |z - w| \leq r\}$, abgeschlossene Kreisscheibe vom Radius r
- $K_r^\times(z) = \{w \in \mathbb{C} : 0 < |z - w| < r\}$, gelochte offene Kreisscheibe vom Radius r

1 Die komplexen Zahlen

In diesem Abschnitt werden wir uns mit dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen vertraut machen. Insbesondere werden wir die verschiedenen Beschreibungen komplexer Zahlen kennenlernen und sehen, wie man mit ihnen rechnet. Danach werden wir stetige Funktionen auf Teilmengen von $\mathbb{C}$ diskutieren.

Da die reellen Zahlen einen angeordneten Körper bilden, sind alle Quadrate nichtnegativ und die Zahl -1 ist in $\mathbb{R}$ kein Quadrat. Wir werden nun einen Körper konstruieren, der den Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen enthält und in dem die Gleichung

$$z^2 = -1 \tag{1}$$

eine Lösung besitzt. Hierzu betrachten wir auf $\mathbb{R}^2$ folgende Addition und Multiplikation

$$\begin{aligned}(a, b) + (c, d) &:= (a + c, b + d) \\ (a, b) \cdot (c, d) &:= (ac - bd, bc + ad).\end{aligned}$$

Die so entstandene algebraische Struktur nennen wir den Körper

$$\mathbb{C} := (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$$

der *komplexen Zahlen*. Der Nachweis der Körperaxiome ist eine elementare Verifikation (Aufgabe 1.1). Das Einselement ist

$$1 := (1, 0).$$

Das Element

$$i := (0, 1)$$

heißt *imaginäre Einheit*. Es genügt der Gleichung

$$i^2 = (-1, 0) = -1,$$

d.h., in $\mathbb{C}$ ist -1 ein Quadrat, so dass die Gleichung (1) eine Lösung besitzt. Eine zweite Lösung dieser Gleichung ist $-i$.

Die reellen Zahlen finden wir in $\mathbb{C}$ leicht wieder, da

$$(a, 0) + (c, 0) := (a + c, 0), \quad \text{und} \quad (a, 0) \cdot (c, 0) := (ac, 0) \quad \text{für} \quad a, c \in \mathbb{R}$$

gilt, d.h., die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad x \mapsto (x, 0)$$

ist eine Einbettung von Körpern. In diesem Sinne dürfen wir $\mathbb{R}$ als Unterkörper von $\mathbb{C}$ auffassen, was wir von nun an tun werden.

Da 1 und i eine Basis des $\mathbb{R}$ -Vektorraums $\mathbb{C}$ sind, lässt sich jede komplexe Zahl (x, y) in eindeutiger Weise schreiben als

$$(x, y) = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Von nun an werden wir komplexe Zahlen immer in dieser Form notieren. Addition und Multiplikation sehen in dieser Darstellung wie folgt aus:

$$\begin{aligned}(a + ib) + (c + id) &= (a + c) + i(b + d) \\ (a + ib)(c + id) &= (ac - bd) + i(bc + ad).\end{aligned}$$

1.1 Die komplexe Konjugation und der Betrag

Definition 1.1. Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ definieren wir

- (a) die *konjugierte Zahl* durch $\bar{z} := x - iy$.
- (b) den *Betrag von z* durch $|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$. Man beachte, dass die Wurzel wegen $x^2 + y^2 \geq 0$ existiert.
- (c) den *Realteil von z* : $\operatorname{Re} z := x$.
- (d) den *Imaginärteil von z* : $\operatorname{Im} z := y$.

Eine komplexe Zahl z heißt *reell*, falls $\operatorname{Im}(z) = 0$ ist, also $z \in \mathbb{R}$ gilt. Sie heißt *rein imaginär*, falls $\operatorname{Re}(z) = 0$ gilt, also wenn $z \in i\mathbb{R}$ ist. Offensichtlich sind Re und Im reell lineare Abbildungen $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$.

Im Folgenden schreiben wir

$$\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

für die Menge der von 0 verschiedenen komplexen Zahlen.

Lemma 1.2. (Rechenregeln für die Konjugation) Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

- (i) $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$.
- (ii) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$.
- (iii) Für $z \in \mathbb{C}^\times$ ist $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.
- (iv) $\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$ und $\operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.
- (v) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ und $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$.

Beweis. (i) und (ii) rechnet man direkt nach.

(iii) Wegen $z \neq 0$ ist $|z| > 0$, und die Behauptung ergibt sich aus (i) und $|z|^2 = z\bar{z}$ (siehe hierzu auch Aufgabe 1.1).

(iv)-(v) sind offensichtlich. □

Lemma 1.2(i) und (ii) bedeuten, dass die komplexe Konjugation ein Körperautomorphismus

$$\sigma: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \bar{z},$$

d.h. sie ist verträglich mit Addition und Multiplikation

$$\sigma(z + w) = \sigma(z) + \sigma(w) \quad \text{und} \quad \sigma(zw) = \sigma(z)\sigma(w)$$

und es gilt $\sigma(1) = 1$. Offenbar ist die komplexe Konjugation $\mathbb{R}$ -linear und $z = \bar{z}$ genau dann, wenn z reell ist. Weiter ist $\bar{z} = -z$ genau dann, wenn z rein imaginär ist.

Satz 1.3. (Rechenregeln für den Betrag) Es gelten für $z, w \in \mathbb{C}$:

- (i) $|0| = 0$ und $|z| > 0$ für $z \neq 0$.
- (ii) $|zw| = |z| \cdot |w|$ und $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$, falls $w \neq 0$.
- (iii) $|z + w| \leq |z| + |w|$ (Dreiecksungleichung; Subadditivität).
- (iv) $|z \pm w| \geq ||z| - |w||$.

Beweis. (i) Die Beziehung $|0| = 0$ ist trivial. Ist $z = x + iy \neq 0$, so ist $x \neq 0$ oder $y \neq 0$. Also ist $|z|^2 = x^2 + y^2 > 0$ und somit $|z| > 0$.

(ii) Die erste Behauptung ergibt sich direkt aus Lemma 1.2(i), denn

$$|zw| = \sqrt{zw\overline{zw}} = \sqrt{z\overline{z}w\overline{w}} = \sqrt{z\overline{z}}\sqrt{w\overline{w}} = |z| \cdot |w|$$

folgt aus den Rechenregeln für die reelle Quadratwurzel. Ist $z \neq 0$, so folgt hieraus

$$1 = |1| = |z| \cdot |z^{-1}|, \quad \text{also} \quad |z^{-1}| = \frac{1}{|z|}.$$

Hieraus folgt $|\frac{z}{w}| = |z||w^{-1}| = \frac{|z|}{|w|}$ falls $w \neq 0$ ist.

(iii) Wir erhalten mit Lemma 1.2(iv)

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) = z\overline{z} + w\overline{w} + w\overline{z} + z\overline{w} \\ &= |z|^2 + |w|^2 + \overline{z}w + z\overline{w} = |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) \\ &\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z\overline{w}| = |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| = (|z| + |w|)^2. \end{aligned}$$

(iv) Aus (iii) erhalten wir

$$|z| = |z + w - w| \leq |z + w| + |-w| = |z + w| + |w|$$

und analog $|w| \leq |z + w| + |z|$. Somit haben wir $|z| - |w| \leq |z + w|$ und $|w| - |z| \leq |z + w|$, also $||z| - |w|| \leq |z + w|$. Ersetzt man w durch $-w$, so ergibt sich $||z| - |w|| \leq |z + w|$. $\square$

1.2 Polarkoordinaten

Die Multiplikation komplexer Zahlen lässt sich am einfachsten mittels *Polarkoordinaten* beschreiben: Wie schon in der Grundvorlesung Analysis gezeigt wurde, lässt sich jeder Vektor $(0, 0) \neq (x, y) \in \mathbb{R}^2$ eindeutig schreiben in der Form

$$(x, y) = r(\cos \varphi, \sin \varphi) \quad \text{mit} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

Ist $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$, so erhalten wir den Winkel φ durch

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad \text{da} \quad \frac{y}{x} = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \tan(\varphi). \quad (2)$$

Mit [Ana1, Satz 5.4.15] erhalten wir:

Lemma 1.4. *Die Abbildung*

$$\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad (r, \varphi) \mapsto r(\cos \varphi, \sin \varphi)$$

ist eine Bijektion. Insbesondere ist die Abbildung

$$[0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (r, \varphi) \mapsto r(\cos \varphi, \sin \varphi)$$

surjektiv.

Identifizieren wir $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ mit $\mathbb{C}^\times$, so können wir also jede komplexe Zahl mittels Polarkoordinaten schreiben. Insbesondere existieren für $z \in \mathbb{C}^\times$ eindeutig bestimmte Zahlen $r > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (3)$$

Hierbei ist natürlich $r = |z|$ die euklidische Länge von z .

Die Multiplikation komplexer Zahlen lässt sich am elegantesten mittels Polarkoordinaten beschreiben, denn es gilt die *polare Multiplikationsformel*

$$r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot s(\cos \psi + i \sin \psi) = rs(\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)) \quad \text{für } r, s \geq 0, \varphi, \psi \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

In der Tat ist diese Formel äquivalent zu den Additionstheoremen für Sinus und Kosinus

$$\begin{aligned} \cos(\varphi + \psi) &= \cos(\varphi) \cos(\psi) - \sin(\varphi) \sin(\psi) \\ \sin(\varphi + \psi) &= \sin(\varphi) \cos(\psi) + \cos(\varphi) \sin(\psi) \quad \text{für } \varphi, \psi \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Aus der Multiplikationsformel erhalten wir sofort die *Inversionsformel*

$$(r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^{-1} = r^{-1}(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)) = r^{-1}(\cos \varphi - i \sin \varphi), \quad (5)$$

was sich auch direkt aus Lemma 1.2(iii) ergibt.

1.3 Konvergenz und stetige Funktionen

Um von Stetigkeit und Konvergenz im Kontext der komplexen Zahlen reden zu können, verwenden wir die *euklidische Metrik*

$$d(z, w) := |z - w| \quad \text{für } z, w \in \mathbb{C}. \quad (6)$$

Für $z = x + iy, w = u + iv$ ist dann

$$d(z, w) = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2},$$

was die aus der Analysis bekannte euklidische Metrik auf dem $\mathbb{R}^2$ ist.

Dass man durch (6) eine Metrik auf $\mathbb{C}$ erhält, folgt auch direkt aus Satz 1.3(i), (iii):

$$d(z, w) \geq 0, \quad d(z, w) = 0 \Leftrightarrow z = w, \quad d(z_1, z_3) \leq d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3) \quad (\text{Dreiecksungleichung})$$

für $z, w, z_j \in \mathbb{C}$ (Leichter Nachweis als Übung).

Damit übertragen sich die Begriffe wie Konvergenz von Folgen und Reihen und die Stetigkeit von Funktionen direkt vom $\mathbb{R}^2$ auf $\mathbb{C}$. Wir wiederholen kurz die wesentlichen Definitionen und fixieren unsere Notation.

Definition 1.5. (a) Für ein $z \in \mathbb{C}$ und eine reelle Zahl $r > 0$ definieren wir die *offene Kreisscheibe vom Radius r um z* durch

$$K_r(z) := \{w \in \mathbb{C} \mid |w - z| < r\}$$

und die *abgeschlossene Kreisscheibe vom Radius r um z* durch

$$K_{\leq r}(z) := \{w \in \mathbb{C} \mid |w - z| \leq r\}.$$

(b) Eine Teilmenge U von $\mathbb{C}$ heißt *offen*, falls für alle $z \in U$ ein $\varepsilon > 0$ mit $K_\varepsilon(z) \subset U$ existiert. Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{C}$ heißt *abgeschlossen*, falls ihr Komplement $A^c := \mathbb{C} \setminus A$ offen ist.

(c) Eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ heißt *konvergent* gegen $z \in \mathbb{C}$, geschrieben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \quad \text{oder} \quad z_n \rightarrow z,$$

wenn die reelle Folge $(|z_n - z|)_{n \in \mathbb{N}} = (d(z_n, z))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert; konkret

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N})(\forall n > N_\varepsilon) |z_n - z| < \varepsilon.$$

(d) Eine Reihe komplexer Zahle $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ heißt *konvergent*, wenn die Folge ihrer Teilsummen konvergiert. Sie heißt *absolut konvergent*, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < \infty$ ist. Aus der Analysis I wissen wir, dass Konvergenz aus absoluter Konvergenz folgt ([Ana1, Satz 3.3.13]).

- Beispiel 1.6.** (a) Offene Kreisscheiben $K_r(z)$ sind offen.
 (b) Abgeschlossene Kreisscheiben $K_{\leq r}(z)$ sind abgeschlossen.
 (c) Der Streifen $S := \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < 2\}$ ist offen.
 (d) $\mathbb{R}$ ist als Teilmenge von $\mathbb{C}$ abgeschlossen.
 (e) $K_1(1) \cup \{3 + 4i\}$ ist weder offen noch abgeschlossen.

Wie allgemein in jedem metrischen Raum (siehe Analysis) gilt nun:

Lemma 1.7. *Die offenen Teilmengen definieren eine Topologie auf $\mathbb{C}$, d.h.,*

(Top0) *Die Mengen $\emptyset$ und $\mathbb{C}$ sind offen.*

(Top1) *Beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen.*

(Top2) *Endliche Durchschnitte offener Mengen sind offen.*

Man spricht daher auch von dem *topologischen Raum* $\mathbb{C}$, wenn man sich auf das in Definition 1.5 spezifizierte System der offenen Mengen bezieht.

Bemerkung 1.8. Durch Übergang zu den Komplementen erhalten wir sofort:

- Die Mengen $\emptyset$ und $\mathbb{C}$ sind abgeschlossen.
- Beliebige Durchschnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.
- Endliche Vereinigungen abgeschlossener Menge sind abgeschlossen.

Definition 1.9. (a) Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Die Funktion f heißt *stetig in $z \in U$* , falls für jede Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in U gilt:

$$z_n \rightarrow z \quad \Rightarrow \quad f(z_n) \rightarrow f(z).$$

Die Funktion f heißt *stetig*, wenn sie in jedem Punkt $z \in U$ stetig ist.

(b) Sind allgemein (X_1, d_1) und (X_2, d_2) metrische Räume und $f: X_1 \rightarrow X_2$ eine Funktion, so heißt f stetig in $x \in X$, wenn für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X gilt:

$$x_n \rightarrow x \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \rightarrow f(x).$$

Aus den Grenzwertsätzen für Folgen ([Ana1, Satz 3.2.14]), erhalten wir die folgenden Permanenzeigenschaften der Stetigkeit.

Satz 1.10. *Sei $U, V \subseteq \mathbb{C}$ Teilmengen.*

- (a) *Sind $f, g: U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig in $z \in U$, so sind auch $f+g$ und $f \cdot g: U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig in z . Insbesondere sind Summen und Produkte stetiger Funktion stetig.*
- (b) *Ist $g: V \rightarrow \mathbb{C}$ stetig in z , $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig in $g(z)$ und $g(V) \subset U$, so ist die Komposition $f \circ g: V \rightarrow \mathbb{C}$ stetig in z . Insbesondere sind Kompositionen stetiger Funktionen stetig.*
- (c) *Ist $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ in z stetig und $f(z) \neq 0$, so ist die reziproke Funktion $\frac{1}{f}: f^{-1}(\mathbb{C}^\times) \rightarrow \mathbb{C}$ ebenfalls stetig in z . Ist f stetig, so ist $f^{-1}(\mathbb{C}^\times)$ offen in U .*

Beweis. Sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in U mit $z_n \rightarrow z$.

(a) Aus der Stetigkeit von f und g in z folgt

$$(f+g)(z_n) = f(z_n) + g(z_n) \rightarrow f(z) + g(z) = (f+g)(z)$$

und

$$(fg)(z_n) = f(z_n)g(z_n) \rightarrow f(z)g(z) = (fg)(z).$$

(b) Aus der Stetigkeit von g in z folgt $g(z_n) \rightarrow g(z)$ in U , so dass aus der Stetigkeit von f in $g(z)$ weiter

$$(f \circ g)(z_n) = f(g(z_n)) \rightarrow f(g(z)) = (f \circ g)(z)$$

folgt.

(c) Aus $f(z_n) \rightarrow f(z) \neq 0$ folgt zunächst, dass $f(z_n) \neq 0$ für fast alle (= alle bis auf endlich viele) $n \in \mathbb{N}$ gilt. Die Grenzwertsätze liefern nun

$$\frac{1}{f(z_n)} \rightarrow \frac{1}{f(z)}.$$

Sei nun $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Um zu sehen, dass

$$f^{-1}(\mathbb{C}^\times) = \{z \in U: f(z) \neq 0\}$$

in U offen ist, zeigen wir, dass das Komplement abgeschlossen ist. Ist $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in diesem Komplement, die gegen $z \in U$ konvergiert, so ist $0 = f(z_n) \rightarrow f(z)$, also $f(z) = 0$. Also ist $f^{-1}(\mathbb{C}^\times)^c = f^{-1}(0)$ abgeschlossen in U . $\square$

Da eine Folge $z_n = x_n + iy_n$ komplexer Zahlen genau dann konvergiert, wenn die Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Real- und Imaginärteile konvergieren ([Ana1, Aufg. 3.5]), erhalten wir sofort:

Lemma 1.11. *Eine Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann stetig, wenn ihr Realteil $\operatorname{Re} f: U \rightarrow \mathbb{R}$ und ihr Imaginärteil $\operatorname{Im} f: U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sind.*

Aufgaben zu Kapitel 1

Aufgabe 1.1. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $a \in \mathbb{K}$ und $\mathbb{F} := \mathbb{K}^2$, versehen mit der Multiplikation

$$(x, y) \cdot (x', y') := (xx' + ayy', xy' + x'y).$$

- (i) Zeige, dass $(\mathbb{F}, +, \cdot, (0, 0), (1, 0))$ ein Ring mit Eins ist.
- (ii) Für $(x, y) \in \mathbb{F}$ definiere $N(x, y) := x^2 - ay^2$. Dann gilt:

$$N((x, y)(x', y')) = N(x, y)N(x', y').$$

- (iii) $\mathbb{F}^\times = \{(x, y) \in \mathbb{F}: N(x, y) \neq 0\}$, und für $(x, y) \in \mathbb{F}^\times$ hat man

$$(x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{N(x, y)}, -\frac{y}{N(x, y)} \right).$$

- (iv) $\mathbb{F}$ ist genau dann ein Körper, wenn a kein Quadrat in $\mathbb{K}$ ist, d.h. wenn $a \neq b^2$ für alle $b \in \mathbb{K}$ gilt.
- (v) Zeige, dass für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $a = -1$ der Körper $\mathbb{F}$ der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist.
- (vi) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$. Für welche natürlichen Zahlen $a \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{F}$ ein Körper?

Aufgabe 1.2. Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ und $T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ die Abbildung $T(z) = \lambda z + \mu \bar{z}$. Man zeige, dass T genau dann bijektiv ist, wenn $|\lambda| \neq |\mu|$ ist.

Aufgabe 1.3. Sei $M_n(\mathbb{R})$ der Ring der $n \times n$ -Matrizen über den reellen Zahlen. Man betrachte in $M_2(\mathbb{R})$ die Teilmenge

$$\widetilde{\mathbb{C}} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Man zeige:

1. $\tilde{\mathbb{C}} \subset M_2(\mathbb{R})$ ist ein Unterring und sogar ein Körper.
2. $\tilde{\mathbb{C}}$ ist eine Körpererweiterung von $\mathbb{R}$ von Rang 2, also $\dim_{\mathbb{R}} \tilde{\mathbb{C}} = 2$.
3. Man gebe explizit einen Isomorphismus $\tilde{\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ an.
4. Wie sieht die komplexe Konjugation in $\tilde{\mathbb{C}}$ aus?

Aufgabe 1.4. Sei $n > 0$ und $\zeta_n := \sin(\frac{2\pi}{n}) + i \cos(\frac{2\pi}{n}) \in \mathbb{C}$. Man zeige $\zeta_n^n = 1$ und folgere, dass es genau n n -te Wurzeln von 1 in $\mathbb{C}$ gibt.

Hinweis: Aus (4) leite man die Gleichung

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$$

ab.

Aufgabe 1.5. Zeigen Sie, dass

$$C_n := \{z \in \mathbb{C}^\times : z^n = 1\}$$

eine zyklische Untergruppe der Ordnung n der multiplikativen Gruppe $\mathbb{C}^\times$ ist. Zeigen Sie weiter, dass jede endliche Untergruppe von $\mathbb{C}^\times$ von dieser Gestalt ist.

Aufgabe 1.6. (a) Zeigen Sie: Eine komplexe Zahlenfolge

$$(z_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_n + iy_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

konvergiert genau dann gegen die komplexe Zahl $z = x + iy$, wenn $x_n \rightarrow x$ und $y_n \rightarrow y$ gelten. Hinweis: $\max(|x_n - x|, |y_n - y|) \leq |z_n - z| \leq |x_n - x| + |y_n - y|$.

(b) Zeigen Sie: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} + i \frac{n^2}{2^{n+1}} = 1$.

Aufgabe 1.7. Man bestimme alle Körperautomorphismen $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, die $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ punktweise stabil halten (diese bilden die *Galoisgruppe* $\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$).

Aufgabe 1.8. Man bestimme alle Körperautomorphismen $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Hinweis: Jeder solche Automorphismus muss $\mathbb{Q}$ punktweise fest halten. Außerdem muss er die Ordnung auf $\mathbb{R}$ erhalten.

Aufgabe 1.9. Man zeige, dass jede komplexe Zahl eine n -te Wurzel besitzt. Man berechne alle Quadratwurzeln von $z = x + iy$ explizit in der Form $w = a + ib$.

Aufgabe 1.10. (Nichtexistenz einer stetigen Quadratwurzel) Man zeige, dass es keine stetige Funktion $f: \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ mit $f(z)^2 = z$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gibt.

Aufgabe 1.11. Zeigen Sie, dass für eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y) die folgenden Eigenschaften äquivalent sind:

- (i) f ist stetig.
- (ii) Für jede offene Teilmenge $O \subseteq Y$ ist $f^{-1}(O)$ offen in X .
- (iii) Für jede abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq Y$ ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in X .¹

Aufgabe 1.12. (Eindeutigkeit von Grenzwerten) Gilt $\lim a_n = z$ und $\lim a_n = w$ für eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ komplexer Zahlen, so ist $z = w$.

2 Holomorphe Funktionen

Nachdem wir Stetigkeit von Funktionen auf Teilmengen von $\mathbb{C}$ diskutiert haben, wenden wir uns in diesem Abschnitt komplex differenzierbaren Funktionen zu. Komplex differenzierbare Funktionen auf offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$ heißen *holomorph*.

¹Wir erinnern uns daran, dass A abgeschlossen heißt, wenn das Komplement A^c offen ist.

2.1 Komplexe Differenzierbarkeit

Wir beginnen mit einer kurzen Diskussion von Grenzwerten, um später Grenzwerte von Differenzenquotienten behandeln zu können.

Definition 2.1. Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, $a \in U$ und $f: U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Wir schreiben

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = w,$$

wenn die durch

$$\tilde{f}(z) := \begin{cases} f(z) & \text{für } z \neq a \\ w & \text{für } z = a \end{cases}$$

definierte Funktion $\tilde{f}: U \rightarrow \mathbb{C}$ in a stetig ist, also wenn für Folgen $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in U gilt:

$$z_n \rightarrow a \quad \Rightarrow \quad f(z_n) \rightarrow w.$$

Die komplexe Zahl w ist hierdurch eindeutig bestimmt (Nachweis als Übung). Sie heißt *Grenzwert* von $f(z)$ für $z \rightarrow a$.

Bemerkung 2.2. Eine Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann in $a \in U$ stetig, wenn $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = f(a)$ gilt.

Definition 2.3. Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine **offene** Teilmenge.

(a) Eine Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *komplex differenzierbar im Punkt* $a \in U$, falls der Grenzwert

$$f'(a) := \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

existiert.

(b) f heißt *holomorph* (oder *komplex differenzierbar*), falls f an jedem Punkt $a \in U$ komplex differenzierbar ist. Die Funktion $f': U \rightarrow \mathbb{C}$ heißt dann *Ableitung von* f .

Lemma 2.4. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $a \in U$. Die Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann in a komplex differenzierbar, wenn eine in a stetige Funktion $h: U \rightarrow \mathbb{C}$ existiert, so dass

$$f(z) = f(a) + h(z)(z - a) \quad \text{für alle } z \in U \quad (7)$$

gilt. In diesem Fall ist $h(a) = f'(a)$.

Beweis. Ist f in a differenzierbar mit Ableitung $f'(a)$, so ist die Funktion

$$h(z) := \begin{cases} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} & \text{für } z \neq a \\ f'(a) & \text{für } z = a \end{cases}$$

in a stetig und erfüllt (7).

Gilt umgekehrt (7) für eine in a stetige Funktion h , so ist $h(z) = \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$ für $z \neq a$ und der Grenzwert $f'(a) = h(a)$ existiert. $\square$

Wie im Reellen folgt auch im Komplexen aus der Differenzierbarkeit die Stetigkeit:

Lemma 2.5. *Holomorphe Funktionen sind stetig.*

Beweis. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $a \in U$. Dann existiert eine in a stetige Funktion h mit

$$f(z) = f(a) + h(z)(z - a) \quad \text{für } z \in U.$$

Hieraus folgt sofort die Stetigkeit von f in a mit Satz 1.10. $\square$

Lemma 2.6. (Ableitungsregeln) Seien $U, V \subset \mathbb{C}$ offen.

(i) Sind $f, g: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, so auch $f + g$ und fg und es gilt

$$(f + g)' = f' + g' \quad \text{und} \quad (fg)' = f'g + fg' \quad (\text{Produktregel}).$$

(ii) Ist $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $f(U) \subset V$ und $g: V \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, so ist $g \circ f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f' \quad (\text{Kettenregel}).$$

(iii) Sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist auch $\frac{1}{f}: U \setminus f^{-1}(0) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2} \quad (\text{Quotientenregel}).$$

Beweis. Wir verwenden Lemma 2.4. Hierzu nehmen wir an, dass f in a und g in b differenzierbar ist. Entsprechend schreiben wir

$$f(z) = f(a) + h(z)(z - a) \quad \text{und} \quad g(z) = g(b) + q(z)(z - b),$$

für eine in a stetige Funktion h und eine in b stetige Funktionen q .

(i) Für $b = a$ erhalten wir

$$(f + g)(z) = (f + g)(a) + (h(z) + q(z))(z - a),$$

wobei die Funktion $h + q$ in a stetig ist mit dem Wert $(h + q)(a) = h(a) + q(a) = f'(a) + g'(a)$. Ebenso erhalten wir

$$(fg)(z) = (fg)(a) + \underbrace{\left(f(a)q(z) + h(z)g(a) + h(z)q(z)(z - a)\right)}_{u(z) := \quad} (z - a),$$

wobei die Funktion $u(z)$ in a stetig ist und den Wert $u(a) = f(a)g'(a) + f'(a)g(a)$ annimmt. Hieraus folgt (i).

(ii) Für $b = f(a)$ erhalten wir

$$(g \circ f)(z) = g(f(z)) = g(f(a)) + q(f(z))(f(z) - f(a)) = g(f(a)) + q(f(z))h(z)(z - a)$$

mit der in a stetigen Funktion $v(z) := q(f(z))h(z)$ (Satz 1.10), die in a den Wert $v(a) = g'(f(a))f'(a)$ annimmt.

(iii) Aus Satz 1.10(c) wissen wir, dass $f^{-1}(\mathbb{C}^\times)$ in U offen ist, also auch in $\mathbb{C}$, da U selbst offen ist. Für $f(z) \neq 0$ erhalten wir

$$\frac{1}{f(z)} - \frac{1}{f(a)} = \frac{f(a) - f(z)}{f(a)f(z)} = -\frac{h(z)(z - a)}{f(a)f(z)} = -\frac{h(z)}{f(a)f(z)} \cdot (z - a),$$

wobei die Funktion $w(z) := -\frac{h(z)}{f(a)f(z)}$ in a stetig ist (Satz 1.10) und den Wert $w(a) = -\frac{f'(a)}{f(a)^2}$ annimmt. $\square$

2.2 Beispiele holomorpher Funktionen

Beispiel 2.7. (a) Die identische Funktion $f(z) := z$ ist holomorph mit $f'(z) = 1$. Aus Lemma 2.6 folgt nun induktiv, dass alle Polynomfunktionen

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$$

holomorph sind. Für die Ableitungen erhalten wir durch eine leichte Induktion wie im Reellen

$$p'(z) = a_1 + \cdots + a_n n z^{n-1}.$$

(b) Ist $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ eine rationale Funktion, so folgt aus Lemma 2.6, dass f auf der offenen Menge $U := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : q(z) = 0\} = q^{-1}(\mathbb{C}^\times)$ eine holomorphe Funktion definiert mit

$$f'(z) = \frac{p'(z)q(z) - p(z)q'(z)}{q(z)^2}.$$

Um kompliziertere holomorphe Funktionen zu konstruieren, betrachten wir *Potenzreihen* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Um zu zeigen, dass sie auf dem Innern ihres Konvergenzkreises holomorphe Funktionen definieren, schauen wir uns zuerst die Monome z^n quantitativ etwas genauer an.

Lemma 2.8. Für $z, w, h \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

(a) $(z^n - w^n) = (z - w) \sum_{k=0}^{n-1} z^k w^{n-1-k}.$

(b)

$$(z + h)^n - z^n - n z^{n-1} h = h^2 \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{k-1} (z + h)^j z^{n-2-j}.$$

Für $|z|, |z + h| < r$ ist also insbesondere

$$|(z + h)^n - z^n - n z^{n-1} h| \leq |h|^2 n^2 r^{n-2}. \quad (8)$$

Beweis. (a) Für $w = 0$ ist die Behauptung trivial. Für $w = 1$ ist es die geometrische Summenformel

$$z^n - 1 = (z - 1) \sum_{k=0}^{n-1} z^k, \quad (9)$$

die man leicht induktiv verifiziert. Für $w \neq 0$ setzen wir $\frac{z}{w}$ in (9) ein und multiplizieren mit w^n .

(b) Wir wenden (a) zweimal an und erhalten so

$$\begin{aligned} (z + h)^n - z^n - n z^{n-1} h &= h \sum_{k=0}^{n-1} ((z + h)^k z^{n-1-k} - z^{n-1}) \\ &= h \sum_{k=0}^{n-1} ((z + h)^k - z^k) z^{n-1-k} \\ &= h^2 \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{k-1} (z + h)^j z^{k-1-j} z^{n-1-k} \\ &= h^2 \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{k-1} (z + h)^j z^{n-2-j}. \end{aligned}$$

□

Lemma 2.8 liefert uns sofort das Werkzeug, um die Holomorphie von Funktionen zu verifizieren, die durch Potenzreihen dargestellt werden.

Satz 2.9. *Ist die Reihe $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ in $z_0 \neq 0$ konvergent und $r := |z_0|$, so definiert sie auf der offenen Kreisscheibe $K_r(0)$ eine holomorphe Funktion $f: K_r(0) \rightarrow \mathbb{C}$, deren Ableitung gliedweise berechnet werden kann:*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n z^{n-1} \quad \text{für } z \in K_r(0).$$

Beweis. Aus der Konvergenz der Reihe $\sum_n a_n z_0^n$ folgt $|a_n| r^n \rightarrow 0$. Für jedes $s < r$ sind daher die Reihen

$$\sum_n |a_n| s^n, \quad \sum_n n |a_n| s^n \quad \text{und} \quad \sum_n n^2 |a_n| s^n,$$

konvergent, da

$$n^2 |a_n| s^n = n^2 \left(\frac{s}{r}\right)^n \underbrace{|a_n| r^n}_{\text{beschränkt}}$$

und für $0 \leq q := \frac{s}{r} < 1$ die Reihe $\sum_n q^n n^2$ konvergiert (Analysis 1).

Hieraus folgt zunächst die Konvergenz der Reihe $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für $|z| < r$. Ebenso folgt die absolute Konvergenz der Reihe $w := \sum_{n=1}^{\infty} a_n n z^{n-1}$. Wir zeigen nun, dass die so definierte Funktion f in z differenzierbar ist mit $f'(z) = w$. Dazu sei $h \in \mathbb{C}$ mit $|h| < r - |z|$ und $s := |z| + |h|$. Aus der Abschätzung in Lemma 2.8(b) erhalten wir

$$|f(z+h) - f(z) - hw| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n ((z+h)^n - z^n - hn z^{n-1}) \right| \leq |h|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^2 s^{n-2}.$$

Aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| n^2 s^{n-2}$ folgt daher

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - w \right| \leq \lim_{h \rightarrow 0} |h| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^2 s^{n-2} = 0$$

und daher

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = w. \quad \square$$

Damit erhalten wir nun einen reichhaltigen Vorrat holomorpher Funktionen, die auf ganz $\mathbb{C}$ definiert sind (man nennt solche Funktionen auch *ganze Funktionen*):²

Die *Exponentialfunktion*: $\exp(z) := e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

Die *hyperbolische Sinusfunktion*: $\sinh(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$

Die *hyperbolische Kosinusfunktion*: $\cosh(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$

Die *Sinusfunktion*: $\sin(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \frac{\sinh(iz)}{i} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$

Die *Kosinusfunktion*: $\cos(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = \cosh(iz) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$

²Die absolute Konvergenz dieser Reihen folgt sofort aus der Konvergenz der entsprechenden Reihen im Reellen.

Aus den Definitionen erhalten wir sofort die Formel

$$e^z = \cosh(z) + \sinh(z), \quad (10)$$

wobei $\cosh$ der gerade und $\sinh$ der ungerade Anteil der Exponentialfunktion ist. Ebenso erhalten wir die *Eulersche Formel*

$$e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z), \quad (11)$$

wobei $\cos$ der gerade und $i \sin$ der ungerade Anteil von e^{iz} ist.

2.3 Komplexe und reelle Differenzierbarkeit

Seien $m, n > 0$ und $U \subset \mathbb{R}^m$ offen. Wir erinnern kurz an den Begriff der *reellen Ableitung* einer Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Definition 2.10. Sei $p \in U$. Die Funktion f heißt *in p reell differenzierbar* (oder *total differenzierbar*), falls es eine $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung $df(p): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ gibt, so daß

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(p+h) - f(p) - df(p)(h)\|}{\|h\|} = 0$$

gilt. Hier bezeichnet $\|\cdot\|$ die euklidische Norm auf dem $\mathbb{R}^m$ bzw. dem $\mathbb{R}^n$.

Die lineare Abbildung $df(p)$ ist dann eindeutig bestimmt und heißt *Differential* von f im Punkt p . In der Analysis II haben wir gesehen, dass eine in p reell differenzierbare Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ in alle Richtungen partiell differenzierbar ist und man ihre Richtungsableitung durch Auswerten des Differentials erhält:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(p+th) = df(p)(h).$$

Bzgl. der kanonischen Basis wird $df(p)$ durch die *Jacobi-Matrix*

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \right)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} = (df_i(p)(e_j))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$$

dargestellt. Ist umgekehrt $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig partiell differenzierbar in alle Koordinatenrichtungen, so ist f reell differenzierbar.

Satz 2.11. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $p \in U$ und $f = u + iv: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion mit Realteil u und Imaginärteil v . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) f ist in p komplex differenzierbar.
- (ii) f ist in p reell differenzierbar und das Differential $df(p): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist komplex linear.
- (iii) f ist in p reell differenzierbar und es gelten die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(p) = \frac{\partial v}{\partial y}(p) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(p) = -\frac{\partial v}{\partial x}(p).$$

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ in p komplex differenzierbar und

$$f(z) = f(p) + h(z)(z - p)$$

mit einer in p stetigen Funktion h auf U für die $h(p) = f'(p)$ gilt. Dann ist

$$\lim_{z \rightarrow p} \frac{|f(z) - f(p) - f'(p)(z - p)|}{|z - p|} = \lim_{z \rightarrow p} |h(z) - f'(p)| = 0.$$

Also ist f reell differenzierbar in p , wobei

$$\mathbf{d}f(p): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \mathbf{d}f(p)(z) = f'(p)z$$

die Multiplikation mit $f'(p)$ ist. Insbesondere ist $\mathbf{d}f(p)$ komplex linear.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Ist f in p reell differenzierbar und $\mathbf{d}f(p): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ komplex linear, so ist $\mathbf{d}f(p)$ die Multiplikation mit einer komplexen Zahl $w \in \mathbb{C}$. Aus

$$0 = \lim_{z \rightarrow p} \frac{|f(z) - f(p) - w(z - p)|}{|z - p|} = \lim_{z \rightarrow p} \left| \frac{f(z) - f(p)}{z - p} - w \right|$$

folgt sofort die komplexe Differenzierbarkeit von f in p mit $f'(p) = w$.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): Bzgl. der Basis $(1, i)$ des reellen Vektorraums $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ ist die lineare Abbildung $\mathbf{d}f(p)$ durch die Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(p) & \frac{\partial u}{\partial y}(p) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(p) & \frac{\partial v}{\partial y}(p) \end{pmatrix} \quad (12)$$

gegeben. Andererseits ist die lineare Abbildung

$$L: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad L(x + iy) = (ax + by) + i(cx + dy),$$

die bzgl. der reellen Basis $(1, i)$ durch die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gegeben ist, genau dann komplex linear, wenn $b + id = L(i) = iL(1) = i(a + ic) = -c + ia$ ist. Diese Bedingung ist äquivalent zu $a = d$ und $b = -c$. Für die Matrix (12) von $\mathbf{d}f(p)$ ist dies gleichbedeutend mit den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. $\square$

Aufgaben zu Kapitel 2

Aufgabe 2.1. Man beweise, dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

- (a) $\exp(w + z) = \exp(w)\exp(z)$. Hinweis: Cauchy-Produktformel
- (b) $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$.
- (c) $|\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re} z)$.
- (d) $|\exp(ix)| = 1$ für $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2.2. Zeigen Sie, dass $\exp: (\mathbb{C}, +) \rightarrow (\mathbb{C}^\times, \cdot)$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus ist. Hinweis: Polarkoordinaten.

Aufgabe 2.3. Zeigen Sie:

- (a) $\exp' = \exp$, $\cosh' = \sinh$, $\sinh' = \cosh$, $\cos' = -\sin$ und $\sin' = \cos$.
- (b) $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
- (c) $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 2.4. (Möbiustransformationen) Sei $g := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{GL}_2(\mathbb{C})$ eine invertierbare komplexe 2×2 -Matrix und $U_g := \{z \in \mathbb{C} : cz + d \neq 0\}$, also $U_g = \mathbb{C}$ für $c = 0$ und $U_g = \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ sonst. Wir definieren die Funktion

$$m_g: U_g \rightarrow \mathbb{C}, \quad m_g(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Zeigen Sie:

- (i) m_g ist holomorph.
- (ii) Für $g, h \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ ist $U := m_h^{-1}(U_g) \subseteq U_{gh}$ und auf dieser Menge gilt $m_{gh}(z) = m_a(m_b(z))$.

Die Abbildungen m_A heißen *Möbiustransformationen*.

Aufgabe 2.5. (Möbiustransformationen) Sei $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ und $m_g: U_g \rightarrow \mathbb{C}$ die zugehörige Möbiustransformation aus Aufgabe 2.4. Zeigen Sie:

- (a) Man kann m_g in natürlicher Weise zu einer Bijektion $\hat{m}_g$ von $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ fortsetzen.
- (b) $\hat{m}_g \circ \hat{m}_h = \hat{m}_{gh}$ für $g, h \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Wir erhalten also einen Gruppenhomomorphismus von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ in die Gruppe der Bijektionen von $\mathbb{C}_\infty$.

Aufgabe 2.6. Wir identifizieren $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ auf die übliche Weise. Sei $T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ die $\mathbb{R}$ -lineare Funktion mit

$$T(x + iy) = (ax + by) + i(cx + dy) \quad \text{mit} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Die lineare Abbildung T ist also in der Standardbasis durch die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gegeben. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Bedingungen:

- (a) T ist komplex linear.
- (b) T ist komplex differenzierbar in 0.
- (c) $a = d$ und $b = -c$.

Hinweis: Man betrachte die Richtungsableitung entlang der reellen und der imaginären Achse.

Aufgabe 2.7. Sei U offen in $\mathbb{C}$ und $f: U \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und für alle $s \in [a, b]$ sei die Abbildung

$$f^s: U \rightarrow \mathbb{C}, \quad f^s(z) := f(z, s)$$

holomorph. Dann ist auch die Abbildung

$$F: U \rightarrow \mathbb{C}, \quad F(z) = \int_a^b f(z, s) ds$$

holomorph und es gilt

$$F'(w) = \int_a^b (f^s)'(w) ds.$$

Aufgabe 2.8. Zeigen Sie: Ist $f = u + iv: U \rightarrow \mathbb{C}$ zweimal komplex differenzierbar, so ist u eine *harmonische Funktion* d.h.

$$\Delta u = 0, \quad \text{für} \quad \Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2.$$

Der Operator Δ heißt *Laplace-Operator*. Ist der Imaginärteil auch harmonisch?

3 Wegintegrale und Stammfunktionen

Nachdem wir wissen, was komplexe Differenzierbarkeit bedeutet und einer holomorphen Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ ihre Ableitung $f': U \rightarrow \mathbb{C}$ zuordnen können, stellt sich natürlich die Frage, welche Funktionen $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine Stammfunktion, also eine holomorphe Funktion $F: U \rightarrow \mathbb{C}$ mit $F' = f$ besitzen. Im eindimensionalen reellen Kontext wird diese Frage im wesentlichen durch den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung beantwortet: Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so wird durch

$$F(x) := c + \int_a^x f(t) dt$$

eine Stammfunktion F von f mit $F(a) = c$ definiert. Im Komplexen wollen wir ähnlich vorgehen und müssen uns dazu überlegen, welche Art von Integral wir hier verwenden können. Dies führt uns auf die komplexen Wegintegrale. Diese Wegintegrale werden uns zeigen, wie man die Veränderung einer Funktion entlang eines Weges durch ein Integral beschreibt. Die Frage danach, welche Punkte in einer offenen Menge U sich durch einen Weg verbinden lassen, führt schließlich auf den Begriff des Wegzusammenhangs.

3.1 Wegintegrale

Definition 3.1. Seien $a < b$ reelle Zahlen.

- (a) Ein *Weg* ist eine stetige Abbildung $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Die Werte $\gamma(a)$ und $\gamma(b)$ heißen *Anfangs-* bzw. *Endpunkt* von γ . Der Weg γ heißt *geschlossen*, wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$ gilt.
- (b) Ein Weg γ heißt *stetig differenzierbar*, falls die Ableitung $\gamma': [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ existiert und stetig ist, also wenn $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ eine C^1 -Abbildung ist.
- (c) Ein *Integrationsweg* ist eine stückweise stetig differenzierbarer Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Das bedeutet, dass es eine Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ gibt, so dass die Abbildung $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ stetig differenzierbar ist.
- (d) Eine *Polygonzug* ist ein Integrationsweg, für den eine Unterteilung derart existiert, dass

$$\gamma(t) = \gamma(t_j) + \frac{t - t_j}{t_{j+1} - t_j}(\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)) \quad \text{für} \quad t_j \leq t \leq t_{j+1}$$

gilt. Man nennt solche Kurven auch *stückweise linear*. Ein Polygonzug heißt *achsenparallel*, wenn die Differenzen $\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)$ jeweils alle reell oder rein imaginär sind.

Definition 3.2. Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann definieren wir das Integral von f über $[a, b]$ als

$$\int_a^b f(t) dt := \int_a^b \operatorname{Re} f(t) dt + i \int_a^b \operatorname{Im} f(t) dt.$$

Definition 3.3. Sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion.

- (a) Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein stetig differenzierbarer Weg mit $\gamma([a, b]) \subset U$. Dann heißt

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

das *Wegintegral* oder *Kurvenintegral* von f längs γ .

- (b) Ist $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein Integrationsweg und $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ eine Unterteilung, so dass $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ stetig differenzierbar ist, so definieren wir das Wegintegral von f bzgl. γ durch

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \sum_{j=0}^{n-1} \int_{\gamma|_{[t_j, t_{j+1}]}} f(z) dz$$

und beachten, dass die rechte Seite nicht von der gewählten Zerlegung abhängt (Aufgabe 3.1). Ist γ ein geschlossener Weg, so schreiben wir auch

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz,$$

um die Geschlossenheit des Weges in der Notation anzudeuten.

- (c) Sind p, q zwei Punkte in U , deren Verbindungsstrecke $[p, q] := \{p + t(q - p) : 0 \leq t \leq 1\}$ ganz in U liegt, so schreiben wir auch

$$\int_{[p, q]} f(z) dz := \int_0^1 f(p + t(q - p)) \cdot (q - p) dt$$

für das zugehörige Wegintegral.

Satz 3.4. (Unabhängigkeit von der Parametrisierung) Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ stetig differenzierbar und $f: \gamma([a, b]) \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Ist $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ stetig differenzierbar und $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$, dann gilt

$$\int_{\gamma \circ \varphi} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Beweis. Es ist $(\gamma \circ \varphi)'(t) = \gamma'(\varphi(t))\varphi'(t)$ nach der Kettenregel. Daher gilt

$$\begin{aligned} \int_{\gamma \circ \varphi} f(z) dz &= \int_c^d f(\gamma \circ \varphi(t))(\gamma \circ \varphi)'(t) dt && \text{(Definition)} \\ &= \int_c^d f(\gamma \circ \varphi(t))\gamma'(\varphi(t))\varphi'(t) dt \\ &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt && \text{(Substitutionsregel)} \\ &= \int_{\gamma} f(z) dz. && \text{(Definition)} \quad \square \end{aligned}$$

Definition 3.5. Die Integrationswege $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ und $\eta: [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ heißen *komponierbar*, falls $\gamma(b) = \eta(c)$. Dann können wir einen zusammengesetzten Weg

$$\gamma \diamond \eta: [a, b + d - c] \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto \begin{cases} \gamma(t) & \text{für } t \in [a, b] \\ \eta(t + c - b) & \text{für } t \in [b, b + d - c] \end{cases}$$

definieren. Offenbar ist dann auch $\gamma \diamond \eta: [a, d + b - c] \rightarrow \mathbb{C}$ ein Integrationsweg.

Außerdem erhalten wir aus γ einen *inversen Weg*

$$\bar{\gamma}: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \bar{\gamma}(t) = \gamma(a + b - t) \quad \text{mit} \quad \bar{\gamma}(a) = \gamma(b), \bar{\gamma}(b) = \gamma(a).$$

Dies ist ebenfalls ein Integrationsweg und die Komposition $\gamma \diamond \bar{\gamma}$ ist ein geschlossener Weg.

Lemma 3.6. Sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Sind γ und η komponierbar Integrationswege, die ganz in U verlaufen, so gilt

$$\int_{\gamma \diamond \eta} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\eta} f(z) dz \quad \text{und} \quad \int_{\bar{\gamma}} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Beweis. Die erste Gleichung folgt direkt aus der Intervalladditivität des Riemann-Integrals, wenn man Unterteilungen von γ und η in stetig differenzierbare Wege betrachtet und die Definition des Integrals über $\gamma \diamond \eta$ bzgl. der zusammengesetzten Unterteilung hinschreibt.

Um die zweite Gleichung zu zeigen, rechnen wir mit der Substitutionsregel (markiert durch !):

$$\begin{aligned} \int_{\bar{\gamma}} f(z) dz &= \int_a^b f(\bar{\gamma}(t))\bar{\gamma}'(t) dt = \int_a^b f(\gamma(a + b - t))\gamma'(a + b - t)(-1) dt \\ &\stackrel{!}{=} \int_b^a f(\gamma(t))\gamma'(t) dt = - \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt = - \int_{\gamma} f(z) dz. \quad \square \end{aligned}$$

Sei nun $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ nicht nur stetig, sondern sogar stetig komplex differenzierbar. Dann existiert die komplexe Ableitung $f': U \rightarrow \mathbb{C}$ und ist stetig. Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ ein stetig differenzierbarer Weg. Dann ist offenbar $f \circ \gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ reell differenzierbar und es gilt

$$(f \circ \gamma)'(t) = \mathbf{d}f(\gamma(t))(\gamma'(t)).$$

Da die lineare Abbildung $\mathbf{d}f(\gamma(t))$ die Multiplikation mit der komplexen Zahl $\gamma'(t)$ ist, können wir dies auch schreiben als

$$(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t). \quad (13)$$

Satz 3.7. (Wegintegral einer Ableitung) Ist $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig komplex differenzierbar und ist $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ ein Integrationsweg, so ist

$$\int_{\gamma} f'(z) dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)). \quad (14)$$

Ist γ geschlossen, so erhalten wir insbesondere

$$\oint_{\gamma} f'(z) dz = 0. \quad (15)$$

Beweis. Sei zunächst γ stetig differenzierbar. Dann ist

$$\int_{\gamma} f'(z) dz = \int_a^b f'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b (f \circ \gamma)'(t) dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)). \quad (16)$$

Also folgt (16) aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Für Integrationswege folgt (14) nun, indem wir das eben bewiesene Resultat auf eine geeignete Unterteilung anwenden. $\square$

Definition 3.8. Wir nennen eine holomorphe Funktion $F: U \rightarrow \mathbb{C}$ mit $F' = f$ eine *Stammfunktion* von f .

Wir stellen uns nun die Frage nach der Existenz und der Mehrdeutigkeit von Stammfunktionen.

3.2 Zusammenhängende Teilmengen in $\mathbb{C}$

Definition 3.9. (a) Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ heißt *zusammenhängend*, wenn sie nicht disjunkte Vereinigung von zwei in U offenen nichtleeren Teilmengen ist.³ D.h., sind $U_1, U_2 \subseteq U$ offen mit

$$U = U_1 \cup U_2 \quad \text{und} \quad U_1 \cap U_2 = \emptyset, \quad (17)$$

so ist eine der Mengen U_j leer.

- (b) Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ heißt *wegzusammenhängend*, wenn je zwei Punkte $x, y \in U$ sich durch einen Weg in U verbinden lassen, wenn es also eine stetige Abbildung $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$ gibt.
- (c) Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ heißt (*achsenparallel*) *polygon-zusammenhängend*, wenn je zwei Punkte $x, y \in U$ sich durch einen (achsenparallelen) Polygonzug in U verbinden lassen.

Beispiel 3.10. (a) Leere und einpunktige Teilmengen sind wegzusammenhängend.

(b) Wir nennen $U \subseteq \mathbb{C}$ *sternförmig bzgl. p* , wenn für jeden Punkt $q \in U$ die Verbindungsstrecke

$$[p, q] = \{p + t(q - p) : 0 \leq t \leq 1\}$$

ganz in U liegt. Dann ist U wegzusammenhängend, denn $[q_1, p] \cup [p, q_2]$ liefert einen Weg von q_1 nach q_2 .

Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ ist genau dann konvex, wenn sie sternförmig bzgl. jedem ihrer Punkte ist.

(c) Kreisscheiben $K_r(p)$ und $K_{\leq r}(p)$ sind wegzusammenhängend, denn diese Mengen sind konvex.

(d) Ist $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein Weg, so ist $\gamma([a, b])$ wegzusammenhängend.

³Wir erinnern daran, dass eine Teilmenge $A \subseteq U$ der Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ *offen* heißt, wenn zu jedem $a \in A$ ein $\varepsilon > 0$ mit $K_{\varepsilon}(a) \cap U \subseteq A$ existiert. Ist U selbst offen in $\mathbb{C}$, so dürfen wir ε so klein wählen, dass $K_{\varepsilon}(a) \subseteq U$ ist und dann ist $A \subseteq U$ genau dann offen in U , wenn A offen in $\mathbb{C}$ ist.

Lemma 3.11. (Polygonzuglemma) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $x \in U$. Dann ist die Menge $C(x)$ aller Punkte in U , für die ein achsenparalleler Polygonzug von x nach y existiert, offen und ihr Komplement $U \setminus C(x)$ ist ebenfalls offen.

Beweis. Sei $y \in C(x)$. Dann existiert ein achsenparalleler Polygonzug $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$. Da U offen ist, existiert ein $r > 0$ mit $K_r(y) \subseteq U$. Für $z \in U$ ist der Weg

$$\eta_{y,z}: [0, 2] \rightarrow U, \quad \eta_{y,z}(t) := \begin{cases} y + t \operatorname{Re}(z - y) & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(y) + (t - 1)i \operatorname{Im}(z - y) & \text{für } 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

mit γ komponierbar und $\gamma \diamond \eta_{y,z}$ ist ein achsenparalleler Polygonzug von x nach z . Also ist $K_r(y) \subseteq C(x)$. Da $y \in C(x)$ beliebig war, ist $C(x)$ offen.

Ist $y \in U \setminus C(x)$ und $K_r(y) \subseteq U$, so ist kein $z \in K_r(y)$ in $C(x)$ enthalten, denn sonst könnten wir einen achsenparallelen Polygonzug von x nach z mit dem Weg $\eta_{z,y} := \overline{\eta_{y,z}}$ zusammensetzen, um einen achsenparallelen Polygonzug von x nach y zu erhalten. Also ist $K_r(y) \subseteq U \setminus C(x)$ und das Komplement von $C(x)$ somit offen. $\square$

Mit dem Polygonlemma sehen wir nun leicht, dass für offene Teilmengen von $\mathbb{C}$ die vier Zusammenhangsbegriffe zusammenfallen:

Lemma 3.12. Für eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ sind folgende Bedingungen äquivalent:

- (a) U ist achsenparallel polygon-zusammenhängend.
- (b) U ist polygon-zusammenhängend.
- (c) U ist wegzusammenhängend.
- (d) U ist zusammenhängend.

Nichtleere offene Teilmengen mit dieser Eigenschaft heißen *Gebiete*.

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) ist klar.

(c) $\Rightarrow$ (d): Sei U wegzusammenhängend. Seien $A, B \subset \mathbb{C}$ offen, $A \cap B = \emptyset$, $U = A \cup B$ und $A \neq \emptyset$. Wir müssen zeigen, dass B leer ist. Dazu nehmen wir an, dass ein $y \in B$ existiert. Sei $x \in A$ und sei $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ ein Weg von x nach y . Die Menge

$$J := \{t \in [a, b]: \gamma(t) \in B\} = \gamma^{-1}(B)$$

ist offen in $[a, b]$, da B offen ist und γ stetig (Aufgabe 1.11). Ebenso ist ihr Komplement $\gamma^{-1}(A)$ offen und diese Menge enthält a . Also ist J abgeschlossen und wegen $a \notin J$ ist $c := \inf J$ in J enthalten. Also ist $a < c$. Wegen der Offenheit von J in $[a, b]$ kann J aber kein minimales Element besitzen, das von a verschieden ist. Dieser Widerspruch zeigt, dass B leer ist. Also ist U zusammenhängend.

(d) $\Rightarrow$ (a): Sei U zusammenhängend und $x, y \in U$. Aus Lemma 3.11 folgt, dass sowohl die Menge $A := C(x)$ als auch ihr Komplement $B := U \setminus C(x)$ offen sind. Aus dem Zusammenhang von U folgt jetzt, dass B leer sein muss. Also ist $y \in C(x)$ und somit sind x und y durch einen achsenparallelen Polygonzug verbunden. $\square$

3.3 Mehrdeutigkeit von Stammfunktionen

Satz 3.13. Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig komplex differenzierbar. Dann ist f genau dann konstant, wenn $f' = 0$ ist.

Beweis. Ist f konstant, so ist $f' = 0$, wie sofort aus der Definition folgt.

Sei umgekehrt $f' = 0$ und $x, y \in U$. Da U ein Gebiet ist, folgt aus dem Polygonzuglemma 3.11 die Existenz eines Polygonzugs $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ von x nach y . Dieser Weg ist insbesondere ein Integrationsweg. Dann erhalten wir mit Satz 3.7

$$f(y) - f(x) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = \int_{\gamma} f'(z) dz = 0.$$

Also ist f konstant. □

Beispiel 3.14. Die Voraussetzung des Zusammenhangs in Satz 3.13 ist wesentlich. Die offene Menge

$$U := K_1(0) \cup K_1(2 + 3i)$$

ist nicht zusammenhängend und die Funktion

$$f: U \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) := \begin{cases} 0 & \text{für } z \in K_1(0) \\ 1 & \text{für } z \in K_1(2 + 3i) \end{cases}$$

ist nicht konstant, aber holomorph und $f' = 0$.

Definition 3.15. Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge. Eine Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *lokal konstant*, wenn es für jeden Punkt $z \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gilt, so dass f auf $K_\varepsilon(z)$ konstant ist.

Folgerung 3.16. Eine holomorphe Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann lokal konstant, wenn $f' = 0$ ist.

Beweis. Sei zuerst f lokal konstant. Zu $p \in U$ finden wir dann eine Kreisscheibe $K_\varepsilon(p) \subseteq U$, auf der f konstant ist. Hieraus folgt $f'(p) = 0$. Da $p \in U$ beliebig war, ist $f' = 0$.

Ist umgekehrt $f' = 0$ und $\varepsilon > 0$, so dass $K_\varepsilon(p) \subseteq U$ ist, so folgt aus dem Zusammenhang von $K_\varepsilon(p)$ und Satz 3.13, dass f auf $K_\varepsilon(p)$ konstant ist. □

3.4 Existenz von Stammfunktionen

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Eine *Stammfunktion* von f ist eine holomorphe Funktion $F: U \rightarrow \mathbb{C}$ mit $F' = f$. Ist U zusammenhängend, so ist F nach Satz 3.13 eindeutig bestimmt bis auf Addition einer Konstanten, d.h. die Stammfunktionen von f sind genau die Funktionen der Gestalt $F + c$, $c \in \mathbb{C}$.

Satz 3.17. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Eine stetige Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ besitzt genau dann eine Stammfunktion, wenn

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

für jeden geschlossenen Integrationsweg $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ gilt.

Ist diese Bedingung erfüllt, U zusammenhängend, $p \in U$ und $c \in \mathbb{C}$, so erhalten wir durch

$$F(w) := c + \int_{\gamma_w} f(z) dz, \quad \gamma_w \text{ ein Integrationsweg von } p \text{ nach } w,$$

eine Stammfunktion F von f mit $F(p) = c$.

Beweis. Besitzt f eine Stammfunktion, so gilt $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ für jeden geschlossenen Integrationsweg γ nach Satz 3.7.

Wir zeigen nun die Umkehrung. Sei dazu also $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und gelte $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ für jeden geschlossenen Integrationsweg γ in U . Da U eine Partition in offene zusammenhängende Teilmengen besitzt (Aufgabe 3.5, Lemma 3.11), reicht es aus zu zeigen, dass auf jeder zusammenhängenden offenen Teilmenge von U eine Stammfunktion von f existiert. Wir können daher annehmen, dass U wegzusammenhängend ist.

Nun fixieren wir einen Punkt $p \in U$. Sei $w \in U$ und $\gamma_w: I \rightarrow U$ ein Integrationsweg mit Anfangspunkt p und Endpunkt w (Polygonlemma). Zuerst zeigen wir, dass $\int_{\gamma_w} f(z) dz$ nur von w abhängt, aber nicht von der Wahl von γ_w . Ist η_w ein zweiter Integrationsweg von p nach w , so ist der Weg $\gamma_w \diamond \overline{\eta_w}$, den wir erhalten, indem wir zuerst γ_w durchlaufen und dann η_w in die umgekehrte Richtung, geschlossen (und natürlich ein Integrationsweg). Wir erhalten daher mit Lemma 3.6

$$0 = \int_{\gamma_w \diamond \overline{\eta_w}} f(z) dz = \int_{\gamma_w} f(z) dz + \int_{\overline{\eta_w}} f(z) dz = \int_{\gamma_w} f(z) dz - \int_{\eta_w} f(z) dz,$$

also $\int_{\gamma_w} f(z) dz = \int_{\eta_w} f(z) dz$.

Wir können also eine Funktion $F: U \rightarrow \mathbb{C}$ definieren durch

$$F(w) = c + \int_{\gamma_w} f(z) dz.$$

Erster Beweis: Wir behaupten nun, dass F komplex differenzierbar ist und dass $F' = f$ gilt. Sei dazu $K_{\leq r}(w) \subseteq U$ und $|h| < r$. Für $\eta_h(t) := w + th$, $0 \leq t \leq 1$, ist dann $\gamma_w \diamond \eta_h$ ein Integrationsweg von p nach $w + h$. Daher ist

$$F(w+h) - F(w) = \int_{\gamma_w \diamond \eta_h} f(z) dz - \int_{\gamma_w} f(z) dz = \int_{\eta_h} f(z) dz = \int_0^1 f(w+th) h dt = h \int_0^1 f(w+th) dt.$$

Wir zeigen nun noch, dass die Funktion

$$q: K_r(0) \rightarrow \mathbb{C}, \quad q(h) := \int_0^1 f(w+th) dt$$

stetig ist. Hieraus ergibt sich mit Lemma 2.4 die Differenzierbarkeit von F in w mit

$$F'(w) = q(0) = \int_0^1 f(w) dt = f(w).$$

Um die Stetigkeit von q einzusehen, beachten wir, dass f auf der kompakten Menge $K_{\leq r}(w)$ stetig ist, also gleichmäßig stetig (Analysis II). Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert also ein $\delta > 0$ mit

$$(\forall z, z' \in K_{\leq r}(w)) |z - z'| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z')| < \varepsilon.$$

Für $|h - h'| < \delta$ ist

$$|(w+th) - (w+th')| = t|h - h'| < \delta$$

und daher

$$|f(w+th) - f(w+th')| < \varepsilon.$$

Hieraus erhalten wir

$$|q(h) - q(h')| \leq \int_0^1 |f(w+th) - f(w+th')| dt \leq \int_0^1 \varepsilon dt = \varepsilon.$$

Also ist q stetig.

Zweiter Beweis: Um die Differenzierbarkeit von F nachzuweisen, können wir auch alternativ auf Satz 2.11 zurückgreifen. Dazu zeigen wir, daß F stetig partiell nach x und nach y differenzierbar ist und dass

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = if$$

gelten. Wir werden daraus die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen folgern und somit, dass F komplex differenzierbar ist und $F' = f$ gilt (Satz 2.11).

Um nun zu zeigen, dass F in $w \in U$ partiell nach x differenzierbar ist, hängen wir an den Weg γ_w noch das Geradenstück $[w, w+x]$ für $x \in \mathbb{R}$ in die x -Richtung an, wobei wir annehmen, dass $[w, w+x] \subseteq U$ ist (was für kleine x der Fall ist). Konkret parametrisieren wir den Weg von w nach $w+x$ durch $\eta_{w,w+x}(t) = w+t$ für $0 \leq t \leq x$. Dann ist

$$\begin{aligned} F(w+x) - F(w) &= c + \int_{\gamma_w \diamond [w, w+x]} f(z) dz - \left(c + \int_{\gamma_w} f(z) dz \right) \\ &= \int_{\gamma_w} f(z) dz + \int_{\eta_{w,w+x}} f(z) dz - \int_{\gamma_w} f(z) dz = \int_0^x f(w+t) dt, \end{aligned}$$

und wir folgern $\frac{\partial F}{\partial x}(w) = f(w)$ aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Analog können wir das Geradenstück $[w, w+iy]$ in die y -Richtung an γ_w anhängen und erhalten

$$F(w+iy) - F(w) = \int_{[w, w+iy]} f(z) dz = \int_0^y if(w+it) dt, \quad \text{also} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(w) = if(w).$$

Wir erhalten also $\frac{\partial F}{\partial y} = i \frac{\partial F}{\partial x}$. Für $F = u + iv$ mit $u = \operatorname{Re} F$ und $v = \operatorname{Im} F$ ergibt sich damit

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x},$$

also die Cauchy–Riemann Gleichungen. □

Bemerkung 3.18. Aus dem Beweis von Satz 3.17 folgt, dass wir für den Fall, dass U ein Gebiet ist und $p \in U$, die Bedingung $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ nur für geschlossenen Wege $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ mit $\gamma(a) = \gamma(b) = p$ benötigen. Der Satz zeigt dann insbesondere, dass diese Bedingung dann automatisch für alle anderen geschlossenen Integrationswege in U erfüllt ist.

Die Problematik von Satz 3.17 ist, dass er zwar eine Bedingung an eine stetige Funktion beschreibt, die zur Existenz einer Stammfunktion äquivalent ist, aber diese Bedingung ist in konkreten Fällen nie direkt verifizierbar, da man hierzu ja alle Integrale über geschlossene Wege kennen müsste. Dies vereinfacht sich ganz wesentlich, wenn man sich auf Rechteckswege einschränkt, die wir nun diskutieren.

Bemerkung 3.19. Ein *Rechtecksweg* ist ein Integrationsweg γ , der entlang der Kanten eines achsenparallelen Rechtecks

$$R = \{p + z: 0 \leq \operatorname{Re} z \leq x, 0 \leq \operatorname{Im} z \leq y\}$$

mit den Ecken $p, p+x, p+x+iy, p+iy$ verläuft, also

$$\gamma = \gamma_{p,p+x} \diamond \gamma_{p+x,p+x+iy} \diamond \gamma_{p+x+iy,p+iy} \diamond \gamma_{p+iy,p} \quad \text{für} \quad \gamma_{x,y}(t) := x + t(y-x).$$

Wir schreiben dann

$$\begin{aligned}\oint_{\partial R} f(z) dz &:= \int_{\gamma} f(z) dz \\ &= \int_{\gamma_{p,p+x}} f(z) dz + \int_{\gamma_{p+x,p+x+iy}} f(z) dz + \int_{\gamma_{p+x+iy,p+iy}} f(z) dz + \int_{\gamma_{p+iy,p}} f(z) dz\end{aligned}$$

für das Wegintegral entlang dem Rand des Rechtecks (Lemma 3.6).

Konkret erhalten wir mit der vereinfachten Bedingungen für Rechteckswegen den folgenden Satz:

Satz 3.20. *Ist $f: K_r(p) \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, für die alle Integrale über geschlossene Rechteckswegen verschwinden, so besitzt f eine Stammfunktion.*

Beweis. Wir definieren eine Funktion $F: K_r(p) \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$F(p+x+iy) := \int_{\gamma_{p,p+x}} f(z) dz + \int_{\gamma_{p+x,p+x+iy}} f(z) dz = \int_0^x f(p+t) dt + i \int_0^y f(p+x+is) ds$$

für $|x+iy| < r$. Hieraus erhalten wir sofort die stetige Differenzierbarkeit nach y mit

$$\frac{\partial F}{\partial y}(w) = if(w) \quad \text{für } w \in K_r(p).$$

Da das Integral von f über den Rechtecksweg

$$\gamma_{p,p+x} \diamond \gamma_{p+x,p+x+iy} \diamond \gamma_{p+x+iy,p+iy} \diamond \gamma_{p+iy,p}$$

verschwindet, erhalten wir mit Lemma 3.6

$$F(p+x+iy) = \int_{\gamma_{p,p+iy}} f(z) dz + \int_{\gamma_{p+iy,p+x+iy}} f(z) dz = i \int_0^y f(p+is) ds + \int_0^x f(p+t+iy) dt$$

und daher

$$\frac{\partial F}{\partial x}(w) = f(w) \quad \text{für } w \in K_r(p).$$

Wie im zweiten Beweis von Satz 3.17 folgt hieraus, dass F komplex differenzierbar ist mit der Ableitung $F' = f$. $\square$

Satz 3.20 ist sehr viel brauchbarer als Satz 3.17. Wir verwenden ihn nun, um zu zeigen, dass holomorphe Funktionen auf Kreisscheiben immer eine Stammfunktion besitzen. Wir werden später sehen, dass Funktionen mit einer Stammfunktion selbst holomorph sein müssen (Satz 4.15), so dass die Annahme der Holomorphie keine wesentliche Einschränkung ist.

Satz 3.21. (Satz von Goursat) *Sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $R \subset U$ ein Rechteck. Dann ist*

$$\int_{\partial R} f(z) dz = 0.$$

Beweis. Wir unterteilen das Rechteck in vier gleichgroße Teilrechtecke $R_{(j)}$, $j = 1, 2, 3, 4$. Dann ist

$$\int_{\partial R} f(z) dz = \sum_{j=1}^4 \int_{\partial R_{(j)}} f(z) dz, \quad (18)$$

da sich auf der rechten Seite alle Integrale über Rechteckskanten im Inneren von R aufheben. Sei $R_1 \in \{R_{(j)} : j = 1, 2, 3, 4\}$ das Rechteck, für das der Betrag des Wegintegrals $\int_{\partial R_{(j)}} f(z) dz$ maximal ist. Dann folgt aus (18)

$$\left| \int_{\partial R} f(z) dz \right| \leq 4 \cdot \left| \int_{\partial R_1} f(z) dz \right|.$$

Fahren wir fort mit solchen Unterteilungen, so finden wir eine Folge $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Rechtecken mit $R_{n+1} \subseteq R_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass gilt:

$$\left| \int_{\partial R} f(z) dz \right| \leq 4^n \cdot \left| \int_{\partial R_n} f(z) dz \right| \quad \text{und} \quad \text{diam}(R_n) = 2^{-n} \text{diam}(R).$$

Nun gibt es nach dem Intervallschachtelungsprinzip (Aufgabe 3.7) genau einen Punkt p , der in allen R_n enthalten ist. Da f holomorph ist, ist

$$f(z) = f(p) + (z - p)f'(p) + (z - p)\varepsilon(z)$$

für eine in p stetige Funktion ε mit $\varepsilon(p) = 0$. Also ist

$$\int_{\partial R_n} f(z) dz = \int_{\partial R_n} f(p) + (z - p)f'(p) + (z - p)\varepsilon(z) dz.$$

Der lineare Anteil $f(p) + (z - p)f'(p)$ besitzt offenbar die Stammfunktion

$$f(p)z + f'(p)\frac{(z - p)^2}{2},$$

sein Integral über ∂R_n ist also Null. Wir erhalten also

$$\int_{\partial R_n} f(z) dz = \int_{\partial R_n} (z - p)\varepsilon(z) dz.$$

Ist $d = \text{diam}(R)$ die Länge der Diagonale in R , so gilt für alle z auf dem Rand von R_n die Abschätzung $|z - p| \leq 2^{-n}d$. Bezeichnet L den Umfang von R , so ist $2^{-n}L$ der Umfang von R_n . Wir erhalten mit Aufgabe 3.2 die Abschätzung

$$\left| \int_{\partial R_n} f(z) dz \right| \leq (2^{-n}L)(2^{-n}d) \sup_{z \in \partial R_n} |\varepsilon(z)|.$$

Also ist

$$\left| \int_{\partial R} f(z) dz \right| \leq L \cdot d \cdot \sup_{z \in \partial R_n} |\varepsilon(z)|.$$

Die rechte Seite konvergiert aber für $n \rightarrow \infty$ gegen Null, da ε in p stetig ist und $\varepsilon(p) = 0$. Also ist die linke Seite ebenfalls Null. $\square$

Kombinieren wir den Satz von Goursat 3.21 mit Satz 3.20, so erhalten wir:

Folgerung 3.22. (Existenz von Stammfunktionen auf Kreisscheiben) *Jede holomorphe Funktion $f: K_r(p) \rightarrow \mathbb{C}$ besitzt eine Stammfunktion.*

3.5 Wegintegrale von z^n um die Null herum

Lemma 3.23. Sei $n \in \mathbb{Z}$ und $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \gamma(t) := e^{it}$. Dann gilt

$$\oint_{\gamma} z^n dz = \begin{cases} 0, & \text{für } n \neq -1, \\ 2\pi i, & \text{für } n = -1. \end{cases}$$

Beweis. Für $n \in \mathbb{Z}$ haben wir auf $\mathbb{C}^\times$ für $p_n(z) = z^n$ die Relation $p'_n(z) = nz^{n-1}$ (Übung; Lemma 2.6). Also hat p_n für $n \neq -1$ eine Stammfunktion auf $\mathbb{C}^\times$. Daher ist $\oint_{\gamma} z^n dz = 0$ für $n \neq -1$ (Satz 3.7). Für $n = -1$ rechnen wir direkt

$$\oint_{\gamma} z^{-1} dz = \int_0^{2\pi} e^{-it} i e^{it} dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i. \quad \square$$

Folgerung 3.24. Für $n \in \mathbb{Z}$ hat die Funktion $p_n(z) = z^n$ auf $\mathbb{C}^\times$ genau dann eine Stammfunktion, wenn $n \neq -1$ ist.

Aufgaben zu Kapitel 3

Aufgabe 3.1. In Definition 3.3(b) hängt das Integral nicht von der gewählten Unterteilung ab.

Aufgabe 3.2. Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein stetig differenzierbarer Weg. Die *Bogenlänge* von γ ist definiert durch

$$L(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Man beweise die *Standardabschätzung*: Ist $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und beschränkt, d.h., es existiert ein $C \in \mathbb{R}$ mit $|f(z)| \leq C$ für alle $z \in U$, so ist

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq C \cdot L(\gamma)$$

für jeden stetig differenzierbaren Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow U$.

Aufgabe 3.3. Sei $(U_j)_{j \in J}$ eine Familie wegzusammenhängender Teilmengen von $\mathbb{C}$. Zeigen Sie: Ist $\bigcap_{j \in J} U_j \neq \emptyset$, so ist $\bigcup_{j \in J} U_j$ wegzusammenhängend.

Aufgabe 3.4. Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge. Eine Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *lokal konstant*, wenn es für jeden Punkt $z \in U$ eine offene Teilmenge $V \subset U$ gibt, die z enthält, so dass f auf V konstant ist. Zeigen Sie, dass U genau dann zusammenhängend ist, wenn jede auf U definierte lokal konstante Funktion konstant ist.

Aufgabe 3.5. (Zusammenhangskomponenten) Zeigen Sie, dass jede offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ paarweise disjunkte Vereinigung offener zusammenhängender Teilmengen ist. Diese Teilmengen heißen *Zusammenhangskomponenten* von U .

Hinweis: Polygonzuglemma; zeigen Sie, dass die Mengen $(C(x))_{x \in U}$, eine Partition von U bilden, d.h., $C(x) \cap C(y) = \emptyset$ oder $C(x) = C(y)$.

Aufgabe 3.6. Zeigen Sie:

(a) Auf der offenen Kreisscheibe $K_1(1)$ wird durch

$$\log(1+z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$$

eine holomorphe Funktion definiert, die der Differentialgleichung

$$\log'(z) = \frac{1}{z}$$

genügt. Sie ist also auf $K_1(1)$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{z}$.

- (b) Für $|z| < \log 2$ ist $e^z \in K_1(1)$ und $\log(e^z) = z$. Hinweis: Satz 3.13.
 (c) Für $|z - 1| < 1$ ist $e^{\log z} = z$. Hinweis: Zeigen Sie, dass $F(z) := \frac{e^{\log z}}{z}$ konstant ist.

Aufgabe 3.7. Sei $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine absteigende Folge nichtleerer kompakter Teilmengen von $\mathbb{C}$, d.h., $K_{n+1} \subseteq K_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

- (a) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ nicht leer.
 Hinweis: Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.
 (b) Gilt $\text{diam}(K_n) \rightarrow 0$, so enthält $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ genau einen Punkt.

4 Der Integralsatz von Cauchy

In diesem Abschnitt lernen wir einige zentrale Resultate der Funktionentheorie kennen. Wir beginnen mit der Verallgemeinerung von Wegintegralen holomorpher Funktionen auf allgemeine Wege. Damit erhalten wir die Werkzeuge, um zu sehen, dass sich Wegintegrale bei kontinuierlichen Deformationen (Homotopien) nicht ändern. Hieraus leiten wir den Cauchyschen Integralsatz ab (Wegintegrale über zusammenziehbare geschlossene Wege verschwinden). Dieser führt uns zur Cauchyschen Integralformel, die die Werte holomorpher Funktionen auf offenen Kreisscheiben durch ein Wegintegral über den Rand darstellt. Wichtige Folgerungen hieraus sind die Holomorphie der Ableitungen holomorpher Funktionen, der Satz von Liouville (beschränkte holomorphe Funktionen auf $\mathbb{C}$ sind konstant) und der Fundamentalsatz der Algebra (Polynome ohne Nullstellen sind konstant).

4.1 Integrale über allgemeine Wege

In diesem Abschnitt werden wir Wegintegrale $\int_{\gamma} f(z) dz$ für eine beliebige holomorphe Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ und einen beliebigen Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ definieren. Ermöglicht wird dies durch Folgerung 3.22, die uns zeigt, dass auf jeder Kreisscheibe $K_r(p) \subseteq U$ für f eine Stammfunktion existiert. Wir nennen eine Zerlegung

$$\mathcal{Z} = (t_0, \dots, t_n), \quad t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b$$

zulässig, wenn offene Kreisscheiben $K_j \subseteq U$ existieren, so dass

$$\gamma([t_{j-1}, t_j]) \subseteq K_j \quad \text{für} \quad j = 1, \dots, n$$

gilt. In Lemma 4.2 werden wir zeigen, dass zulässige Zerlegungen immer existieren. Sei also $\mathcal{Z}$ eine zulässige Zerlegung. Auf jeder Kreisscheibe K_j existiert nun eine Stammfunktion F_j von f (Folgerung 3.22).

Ist γ ein Integrationsweg, so gilt wegen Satz 3.7

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}} f(z) dz = \sum_{j=1}^n F_j(\gamma(t_j)) - F_j(\gamma(t_{j-1})). \quad (19)$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite ist aber auch definiert wenn γ kein Integrationsweg ist. Wir wollen ihn daher zur Definition des Integrals verwenden. Hierzu haben wir nachzuweisen, dass er nicht von der Zerlegung $\mathcal{Z}$ sowie der Wahl der Stammfunktionen F_j und der Kreisscheiben K_j abhängt. Wir betrachten daher für $\mathcal{Z}$, K_j und F_j die Summe

$$S_{\mathcal{Z}}(f) := \sum_{j=1}^n F_j(\gamma(t_j)) - F_j(\gamma(t_{j-1})).$$

Unabhängigkeit von den Paaren (K_j, F_j) : Seien $\tilde{K}_j \subseteq U$, $j = 1, \dots, n$, ebenfalls Kreisscheiben, die $\gamma([t_{j-1}, t_j])$ enthalten und $\tilde{F}_j$ eine Stammfunktion von f auf $\tilde{K}_j$. Dann ist $\gamma([t_{j-1}, t_j]) \subseteq K_j \cap \tilde{K}_j =: D_j$ und auf dem konvexen Gebiet D_j (Durchschnitte konvexer Mengen sind konvex) sind sowohl F_j als auch $\tilde{F}_j$ Stammfunktionen von f . Daher ist die Differenz $\tilde{F}_j - F_j$ auf D_j konstant. Wir erhalten also

$$\tilde{F}_j(\gamma(t_j)) - \tilde{F}_j(\gamma(t_{j-1})) = F_j(\gamma(t_j)) - F_j(\gamma(t_{j-1})) \quad \text{für } j = 1, \dots, n.$$

Hieraus folgt, dass $S_{\mathcal{Z}}(f)$ lediglich von der Zerlegung $\mathcal{Z}$ abhängen kann. Aber das ist auch nicht der Fall:

Unabhängigkeit von der Zerlegung: Ist $\mathcal{Z}' = (s_0, \dots, s_m)$ eine weitere zulässige Zerlegung des Intervalls $[a, b]$, so erhalten wir insbesondere durch die gemeinsame Verfeinerung $\mathcal{Z}''$ von $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{Z}'$ eine zulässige Zerlegung mit den Unterteilungspunkten $\{t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n, s_1, \dots, s_{m-1}\}$. Wenn wir zeigen, dass sich $S_{\mathcal{Z}}(f)$ bei einer Verfeinerung der Zerlegung nicht ändert, erhalten wir daher

$$S_{\mathcal{Z}}(f) = S_{\mathcal{Z}''}(f) = S_{\mathcal{Z}'}(f).$$

Jede Verfeinerung entsteht durch das sukzessive Hinzufügen von Unterteilungspunkten. Eine leichte Induktion zeigt daher, dass es ausreicht zu zeigen, dass die Hinzunahme eines Unterteilungspunkts $t^* \in (t_{j-1}, t_j)$ den Wert der Summe $S_{\mathcal{Z}}(f)$ nicht ändert, also dass für

$$\mathcal{Z}^* := (t_0, \dots, t_{j-1}, t^*, t_j, \dots, t_n), \quad t_{j-1} < t^* < t_j, \quad \text{gilt} \quad S_{\mathcal{Z}^*}(f) = S_{\mathcal{Z}}(f).$$

Das folgt aber sofort aus

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{Z}^*}(f) &:= \left(\sum_{k \neq j}^n F_k(\gamma(t_k)) - F_k(\gamma(t_{k-1})) \right) + F_j(\gamma(t_j)) - F_j(\gamma(t^*)) + F_j(\gamma(t^*)) - F_j(\gamma(t_{j-1})) \\ &= \left(\sum_{k \neq j}^n F_k(\gamma(t_k)) - F_k(\gamma(t_{k-1})) \right) + F_j(\gamma(t_j)) - F_j(\gamma(t_{j-1})) = S_{\mathcal{Z}}(f). \end{aligned}$$

Hierbei verwenden wir, dass die Kurvenssegmente $\gamma([t_{j-1}, t^*])$ und $\gamma([t^*, t_j])$ beide in K_j enthalten sind.

Damit haben wir gezeigt, dass $S_{\mathcal{Z}}(f)$ auch nicht von der Wahl der zulässigen Zerlegung $\mathcal{Z}$ anhängt, so dass wir das Integral einer **holomorphen** Funktion f über einen beliebigen Weg definieren können:

Definition 4.1. Ist $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ ein Weg und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, so definieren wir

$$\int_{\gamma} f(z) dz := S_{\mathcal{Z}}(f) = \sum_{j=1}^n F_j(\gamma(t_j)) - F_j(\gamma(t_{j-1})),$$

wobei $\mathcal{Z}$ eine zulässige Zerlegung ist und die K_j , F_j wie oben. In (19) haben wir schon gesehen, dass wir für Integrationswege so die bekannte Definition des Wegintegrals erhalten. Unsere Begriffsbildungen sind also konsistent.

Damit all das sinnvoll ist, zeigen wir zuerst die Existenz einer zulässigen Zerlegung.

Lemma 4.2. Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ ein Weg, so existiert eine Folge $K_1, \dots, K_n$ von Kreisscheiben $K_j = K_{r_j}(p_j) \subseteq U$ und eine Zerlegung

$$\mathcal{Z} = (t_0, \dots, t_n), \quad t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b \quad \text{mit} \quad \gamma([t_{j-1}, t_j]) \subseteq K_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Beweis. Für jedes $t \in [a, b]$ finden wir wegen der Offenheit von U zunächst ein $\varepsilon_t > 0$ mit $K_{2\varepsilon_t}(\gamma(t)) \subseteq U$. Dann ist

$$\gamma([a, b]) \subseteq \bigcup_{t \in [a, b]} K_{\varepsilon_t}(\gamma(t)),$$

und da $\gamma([a, b])$ kompakt und die Kreisscheiben $K_{\varepsilon_t}(\gamma(t))$ offen sind, existiert definitionsgemäß eine endliche Teilüberdeckung, also $s_1, \dots, s_k \in [a, b]$ mit

$$\gamma([a, b]) \subseteq \bigcup_{j=1}^k K_{\varepsilon_{s_j}}(\gamma(s_j)). \quad (20)$$

Sei

$$\varepsilon := \min\{\varepsilon_{s_j} : j = 1, \dots, k\}.$$

Dann gilt

$$K_\varepsilon(\gamma(t)) \subseteq U \quad \text{für alle } t \in [a, b], \quad (21)$$

denn zu jedem $t \in [a, b]$ existiert ein s_j mit $\gamma(t) \in K_{\varepsilon_{s_j}}(\gamma(s_j))$ und dann ist

$$K_\varepsilon(\gamma(t)) \subseteq K_{\varepsilon + \varepsilon_{s_j}}(\gamma(s_j)) \subseteq K_{2\varepsilon_{s_j}}(\gamma(s_j)) \subseteq U.$$

Da γ stetig ist und $[a, b]$ kompakt, ist γ gleichmäßig stetig ([Ana1, Satz 4.2.16]). Es existiert also ein $\delta > 0$, so dass für $t, s \in [a, b]$ gilt

$$|t - s| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\gamma(t) - \gamma(s)| < \varepsilon.$$

Wir wählen nun eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ so fein, dass $|t_j - t_{j-1}| < \delta$ für alle j gilt. Dann ist $|\gamma(t) - \gamma(t_j)| < \varepsilon$ für $t \in [t_{j-1}, t_j]$, also $\gamma([t_{j-1}, t_j]) \subseteq K_\varepsilon(\gamma(t_j))$. Mit $K_j := K_\varepsilon(\gamma(t_j))$ erhalten wir also die Behauptung. $\square$

Definition 4.3. Sind $\gamma, \eta: [a, b] \rightarrow U$ zwei Wege in der offenen Teilmenge U , so heißt eine Zerlegung

$$\mathcal{Z} = (t_0, \dots, t_n), \quad a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

zulässig für γ und η , wenn offene Kreisscheiben $K_j \subseteq U$ existieren, so dass

$$\gamma([t_{j-1}, t_j]) \cup \eta([t_{j-1}, t_j]) \subseteq K_j \quad \text{für } j = 1, \dots, n$$

gilt. Falls eine solche Zerlegung existiert, nennen wir γ und η benachbart.

Das folgende Lemma zeigt uns, dass Wege, die nahe beieinander liegen, tatsächlich in obigem Sinn benachbart sind.

Lemma 4.4. Ist die Zerlegung $\mathcal{Z}$ zulässig für den Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow U$, so existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass sie ebenfalls zulässig ist für jeden Weg $\eta: [a, b] \rightarrow U$ mit

$$\|\gamma - \eta\|_\infty := \sup\{|\gamma(t) - \eta(t)| : t \in [a, b]\} < \varepsilon,$$

d.h., γ und η sind benachbart.

Beweis. Ist $\mathcal{Z} = (t_0, \dots, t_n)$ zulässig für γ , so existieren Kreisscheiben $K_{r_j}(z_j) \subseteq U$, $j = 1, \dots, n$, die $\gamma([t_{j-1}, t_j])$ enthalten. Das bedeutet, dass

$$|\gamma(t) - z_j| < r_j \quad \text{für } t_{j-1} \leq t \leq t_j$$

gilt. Da γ stetig und $[t_{j-1}, t_j]$ kompakt ist, ist

$$s_j := \sup\{|\gamma(t) - z_j| : t_{j-1} \leq t \leq t_j\} = \max\{|\gamma(t) - z_j| : t_{j-1} \leq t \leq t_j\} < r_j.$$

Wir wählen nun

$$\varepsilon := \min\{r_j - s_j : j = 1, \dots, n\}.$$

Ist $\|\eta - \gamma\|_\infty < \varepsilon$, so erhalten wir für $t_{j-1} \leq t \leq t_j$

$$|\eta(t) - z_j| \leq |\eta(t) - \gamma(t)| + |\gamma(t) - z_j| < \varepsilon + s_j \leq (r_j - s_j) + s_j = r_j.$$

Also ist $\eta([t_{j-1}, t_j]) \subseteq K_{r_j}(z_j)$. □

Wir stellen nun fest, dass sich Integrale holomorpher Funktionen über benachbarte Wege in zwei Fällen gleichen.

Lemma 4.5. *Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $\gamma, \eta : [a, b] \rightarrow U$ benachbarte Wege. Dann gilt*

$$\int_\gamma f(z) dz = \int_\eta f(z) dz$$

in den beiden folgenden Fällen:

- (i) $\gamma(a) = \eta(a)$ und $\gamma(b) = \eta(b)$ (gleiche Endpunkte).
- (ii) $\gamma(a) = \gamma(b)$ und $\eta(a) = \eta(b)$ (geschlossene Wege).

Beweis. Sei $\mathcal{Z} = (t_0, \dots, t_n)$ eine zulässige Zerlegung für γ und η und die Kreisscheiben K_j wie in Definition 4.3. Weiter sei $F_j : K_j \rightarrow \mathbb{C}$ eine Stammfunktion von $f|_{K_j}$. Für

$$z_j := \gamma(t_j), \quad w_j := \eta(t_j) \quad \text{und} \quad a_j := F_j(z_j) - F_j(w_j), \quad b_j := F_j(z_{j-1}) - F_j(w_{j-1})$$

erhalten wir dann

$$\int_\gamma f(z) dz - \int_\eta f(z) dz = \sum_{j=1}^n F_j(z_j) - F_j(z_{j-1}) - (F_j(w_j) - F_j(w_{j-1})) = \sum_{j=1}^n a_j - b_j.$$

Wir zeigen nun durch Induktion, dass

$$\sum_{j=1}^n a_j - b_j = a_n - b_1. \tag{22}$$

Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist die Behauptung trivial.

Induktionsschritt: Gilt $\sum_{j=1}^{n-1} a_j - b_j = a_{n-1} - b_1$ für $n > 1$, so erhalten wir

$$\sum_{j=1}^n a_j - b_j = a_n - b_n + \sum_{j=1}^{n-1} a_j - b_j = a_n - b_n + a_{n-1} - b_1 = a_n - b_1,$$

denn

$$\begin{aligned} b_n - a_{n-1} &= F_n(z_{n-1}) - F_n(w_{n-1}) - (F_{n-1}(z_{n-1}) - F_{n-1}(w_{n-1})) \\ &= (F_n - F_{n-1})(z_{n-1}) - (F_n - F_{n-1})(w_{n-1}) = 0 \end{aligned}$$

folgt aus der Tatsache, dass $F_n - F_{n-1}$ auf $K_n \cap K_{n-1} \supseteq \{z_{n-1}, w_{n-1}\}$ konstant ist.

Im Fall (i) ist $z_0 = w_0$ und $z_n = w_n$, so dass

$$a_n - b_1 = \underbrace{F_n(z_n) - F_n(w_n)}_{=0} - \underbrace{(F_1(z_0) - F_1(w_0))}_{=0} = 0$$

ist. Im Fall (ii) ist $z_0 = z_n$ und $w_0 = w_n$, so dass

$$a_n - b_1 = F_n(z_n) - F_n(w_n) - (F_1(z_0) - F_1(w_0)) = \underbrace{(F_n - F_1)(z_0)}_{=0} - \underbrace{(F_n - F_1)(w_0)}_{=0} = 0$$

aus der Tatsache folgt, dass F_n und F_1 auf dem Gebiet $K_1 \cap K_n \supseteq \{z_0, w_0\}$ beide Stammfunktionen von f sind, ihre Differenz also konstant ist. $\square$

4.2 Homotopie von Wegen

Definition 4.6. Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $\gamma_0, \gamma_1: [a, b] \rightarrow U$ Wege in U .

- (a) Die Wege $\gamma_0, \gamma_1: [a, b] \rightarrow U$ heißen *homotop (mit festen Endpunkten)*, falls es eine stetige Abbildung $h: [a, b] \times [0, 1] \rightarrow U$ gibt, so dass für die Wege $h_s(t) := h(t, s)$ gilt:

$$h_0 = \gamma_0 \quad \text{und} \quad h_1 = \gamma_1, \quad \text{also} \quad h(t, 0) = \gamma_0(t), \quad h(t, 1) = \gamma_1(t) \quad \text{für} \quad t \in [a, b],$$

und

$$h_s(a) = \gamma_0(a) = \gamma_1(a), \quad h_s(b) = \gamma_0(b) = \gamma_1(b) \quad \text{für alle} \quad s \in [0, 1].$$

- (b) Zwei geschlossene Wege $\gamma_0, \gamma_1: [a, b] \rightarrow U$ heißen *frei homotop (in U)*, falls eine stetige Abbildung $h: [0, 1] \times [a, b] \rightarrow U$ existiert mit $h_0 = \gamma_0$ und $h_1 = \gamma_1$, so dass für alle $s \in [0, 1]$ der Weg h_s geschlossen ist. Im Unterschied zu (a) verlangen wir also nicht, dass alle Wege h_s denselben Anfangs- bzw. Endpunkt besitzen.
- (c) Ein geschlossener Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ heißt *zusammenziehbar (oder nullhomotop) (in U)*, falls γ frei homotop zu einem konstanten Weg ist.

Die Abbildung h heißt *Homotopie von γ_0 nach γ_1* .

4.3 Der Integralsatz

Der folgende Satz ist eine weitreichende Verallgemeinerung des Satzes von Goursat.

Integralsatz von Cauchy

Satz 4.7. Sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ ein geschlossener in U zusammenziehbarer Weg. Dann gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Wir zeigen zunächst:

Homotopiesatz

Satz 4.8. Seien $\gamma_0, \gamma_1: [a, b] \rightarrow U$ Wege und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ sei holomorph. Sind γ_0 und γ_1 geschlossen und frei homotop oder homotop mit festen Endpunkten, so ist

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz.$$

Der Cauchysche Integralsatz folgt hieraus sofort, da zusammenziehbare Wege zum konstanten Weg homotop sind, für den alle Wegintegrale verschwinden.

Beweis. Sei $h: [a, b] \times [0, 1] \rightarrow U$ eine Homotopie mit $h_0 = \gamma_0$ und $h_1 = \gamma_1$. Hierbei sollen entweder alle Wege h_s geschlossen sein oder die Endpunkte fest sein, also $h_s(a) = \gamma_0(a)$ und $h_s(b) = \gamma_0(b)$ für alle s gelten.

Da das Rechteck $[a, b] \times [0, 1]$ kompakt ist und h stetig, ist h gleichmäßig stetig ([Ana2, Satz 10.5.9]). Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert also ein $\delta > 0$, so dass

$$\max(|t - t'|, |s - s'|) < \delta \quad \Rightarrow \quad |h(t, s) - h(t', s')| < \varepsilon$$

gilt. Hieraus folgt insbesondere

$$\|h_s - h_{s'}\|_\infty = \max\{|h_s(t) - h_{s'}(t)| : t \in [a, b]\} < \varepsilon \quad \text{für} \quad |s - s'| < \delta.$$

Ist $s' \in [0, 1]$ und ε ausreichend klein, so folgt aus Lemma 4.4, dass die Wege h_s und $h_{s'}$ für $|s - s'| < \delta$ benachbart sind. Lemma 4.5 zeigt uns nun, dass dann $\int_{h_s} f(z) dz = \int_{h_{s'}} f(z) dz$ gilt. Die Kurve

$$\zeta: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \zeta(s) := \int_{h_s} f(z) dz$$

ist also lokal konstant und damit konstant (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). Hieraus folgt die Behauptung. $\square$

Definition 4.9. Ein Gebiet U in $\mathbb{C}$ heißt *einfach zusammenhängend*, wenn jeder geschlossene Weg in U zusammenziehbar ist.

Kombinieren wir den Cauchyschen Integralsatz mit Satz 3.17, so erhalten wir den folgenden allgemeinen Existenzsatz für Stammfunktionen.

Existenzsatz für Stammfunktionen

Folgerung 4.10. Ist $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und U ein einfach zusammenhängendes Gebiet, so besitzt f auf U eine Stammfunktion. Konkret erhalten wir für $p \in U$ und $c \in \mathbb{C}$ durch

$$F(w) := c + \int_{\gamma_w} f(z) dz, \quad \gamma_w \text{ ein Integrationsweg von } p \text{ nach } w,$$

eine Stammfunktion F von f mit $F(p) = c$.

Lemma 4.11. Jede sternförmige Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ ist einfach zusammenhängend.

Beweis. Ist U sternförmig bzgl. $p \in U$, so liegt für jeden Punkt $q \in U$ die Verbindungsstrecke $[p, q]$ ganz in U . Ist $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ ein geschlossener Weg, so liefert

$$h_s(t) := sp + (1 - s)\gamma(t)$$

eine freie Homotopie zum konstanten Weg p . $\square$

Beachte: Sind $(U_j)_{j \in J}$ Teilmengen, die alle bzgl. dem gleichen Punkt $p \in \bigcap_{j \in J} U_j$ sternförmig sind, so ist auch $U := \bigcup_{j \in J} U_j$ sternförmig bzgl. p . Im Allgemeinen ist eine Vereinigung sternförmiger Teilmengen natürlich nicht sternförmig. Das Beispiel $U_1 = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ und $U_2 = \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ zeigt sogar, dass die Vereinigung $\mathbb{C}^\times = U_1 \cup U_2$ der beiden sternförmigen Gebiete U_1 und U_2 nicht einfach zusammenhängend sein muss.

4.4 Die Integralformel von Cauchy

Definition 4.12. Ist $K_r(p)$ eine Kreisscheibe in $\mathbb{C}$ und

$$\gamma = \gamma_{p,r}: [0, 2\pi] \rightarrow \partial K_r(p), \quad \gamma(t) := p + re^{it}$$

die natürliche Parametrisierung ihres Randes, so schreiben wir

$$\int_{\partial K_r(p)} f(z) dz := \int_{\gamma} f(z) dz. \quad (23)$$

Cauchy-Integralformel

Satz 4.13. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_R(p)} \frac{f(z)}{z - w} dz \quad \text{für } w \in K_R(p) \subseteq K_{\leq R}(p) \subseteq U.$$

Dieser Satz beschreibt ein völlig neues Phänomen, das wir aus dem Reellen nicht kennen. Die Werte einer holomorphen Funktionen auf einer abgeschlossenen Kreisscheibe sind vollständig durch ihre Randwerte bestimmt. Eine analoge Aussage gilt im reell-Eindimensionalen nur für affine Funktionen f auf Intervallen $[a, b]$. Sie sind durch ihre beiden Randwerte eindeutig bestimmt:

$$f(x) = f(a) + \frac{x - a}{b - a} f(b).$$

Sucht man hier nach Gemeinsamkeiten, stößt man auf die Bedingung $f'' = 0$, die affine Funktionen charakterisiert. Im Höherdimensionalen wird dies zur Bedingung $\Delta f = 0$ ($\Delta = \sum_j \partial_j^2$ ist der Laplace-Operator), die *harmonische Funktionen* charakterisiert. In Aufgabe 2.8 haben wir gesehen, dass Real- und Imaginärteil einer holomorphen Funktion harmonisch sind. Damit haben wir eine Brücke zwischen den Phänomenen im Reellen und dem Komplexen geschlagen.

Beweis. Für $w \in K_R(p)$ betrachten wir die glatte Parametrisierung von $\partial K_R(p)$ der Gestalt

$$\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \partial K_R(p), \quad \gamma(t) := w + r(t)e^{it},$$

wobei $r: [0, 2\pi] \rightarrow (0, \infty)$ eindeutig durch die Bedingung $|\gamma(t) - p| = R$ bestimmt ist.⁴

Ist $K_{\leq \delta}(w) \subseteq K_R(p)$, so ist $r(t) > \delta$ für alle t und damit

$$r(t) \geq sr(t) + (1 - s)\delta \geq \delta > 0 \quad \text{für } 0 \leq t \leq 2\pi, 0 \leq s \leq 1.$$

Wir erhalten daher eine stetige Funktion

$$h: [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow U \setminus \{w\}, \quad h(t, s) := h_s(t) := s\gamma(t) + (1 - s)(w + \delta e^{it}) = w + (sr(t) + (1 - s)\delta)e^{it},$$

⁴Für jedes $t \in [0, 2\pi]$ hat die quadratische Gleichung

$$R^2 = |\gamma(t) - p|^2 = |w - p|^2 + 2 \operatorname{Re}(r(t)e^{it}(w - p)) + r(t)^2 = |w - p|^2 + 2 \operatorname{Re}(e^{it}(w - p))r(t) + r(t)^2$$

genau eine positive Lösung $r(t) > 0$, denn es gilt $|w - p|^2 - R^2 < 0$. Die Mitternachtsformel liefert

$$r(t) = -\operatorname{Re}(e^{it}(w - p)) + \sqrt{\operatorname{Re}(e^{it}(w - p))^2 + R^2 - |w - p|^2} = -\operatorname{Re}(e^{it}(w - p)) + \sqrt{R^2 - \operatorname{Im}(e^{it}(w - p))^2}$$

und dies ist eine beliebig oft differenzierbare Funktion.

die eine Homotopie von $h_0(t) = w + \delta e^{it}$ und $h_1 = \gamma$ beschreibt. Da die Funktion $\frac{f(z)}{z-w}$ auf $U \setminus \{w\}$ holomorph ist, folgt aus der Parametrisierungsinvarianz von Wegintegralen (Satz 3.4) und dem Homotopiesatz 4.8

$$\int_{\partial K_R(p)} \frac{f(z)}{z-w} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-w} dz = \int_{\partial K_\delta(w)} \frac{f(z)}{z-w} dz. \quad (24)$$

Insbesondere hängt dieses Integral nicht von δ ab. Ausrechnen des rechten Wegintegrals führt auf

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_\delta(w)} \frac{f(z)}{z-w} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(w + \delta e^{it})}{\delta e^{it}} i \delta e^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(w + \delta e^{it}) dt$$

und das ist der Mittelwert der Funktion f auf $\partial K_\delta(w)$. Da diese Integrale wegen (24) nicht von δ abhängen, stimmen sie mit dem Grenzwert für $\delta \rightarrow 0$ überein. Wegen der Stetigkeit von f ist dieser $f(w)$, denn

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(w + \delta e^{it}) dt - f(w) \right| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(w + \delta e^{it}) - f(w) dt \right| \leq \sup\{|f(z) - f(w)| : |z - w| = \delta\}$$

und die rechte Seite wird für $\delta \rightarrow 0$ beliebig klein, da f in w stetig ist. $\square$

Die Cauchysche Integralformel erlaubt uns nun einzusehen, dass holomorphe Funktionen beliebig oft differenzierbar sind. Hierzu müssen wir das “Ableitungen unter dem Integral” (AudI) rechtfertigen, wobei uns das folgende Lemma hilft:

Lemma 4.14. (AudI-Lemma) *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f: U \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Für jedes $t \in [a, b]$ sei*

$$f_t = f(\cdot, t): U \rightarrow \mathbb{C}$$

holomorph. Die Funktion

$$\frac{\partial f}{\partial z}: U \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, \quad (z, t) \mapsto f'_t(z)$$

sei ebenfalls stetig. Dann ist auch

$$F: U \rightarrow \mathbb{C}, \quad F(z) := \int_a^b f(z, t) dt \quad \text{holomorph und} \quad \frac{\partial F}{\partial z}(z) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(z, t) dt.$$

Beweis. Wegen der Stetigkeit der Funktionen f und $\frac{\partial f}{\partial z}$ existieren die Integrale

$$F(z) = \int_a^b f(z, t) dt \quad \text{und} \quad G(z) := \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(z, t) dt \quad \text{für alle} \quad z \in U.$$

Wir erhalten so zwei Funktionen $F, G: U \rightarrow \mathbb{C}$.

Ist $z \in U$ und $[z, z+h] \subseteq U$, so erhalten wir mit Satz 3.7

$$\begin{aligned} F(z+h) - F(z) &= \int_a^b f(z+h, t) - f(z, t) dt = \int_a^b \left(\int_{[z, z+h]} \frac{\partial f}{\partial z}(w, t) dw \right) dt \\ &= \int_a^b \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(z+sh, t) h ds \right) dt \\ &= h \int_a^b \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(z+sh, t) ds \right) dt. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für $h \neq 0$ und $[z, z+h] \subseteq U$:

$$\begin{aligned} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - G(z) &= \int_a^b \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(z+sh, t) ds \right) dt - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(z, t) dt \\ &= \int_a^b \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial z}(z+sh, t) - \frac{\partial f}{\partial z}(z, t) \right) ds dt. \end{aligned}$$

Sei $\delta > 0$ mit $K_{\leq \delta}(z) \subseteq U$. Dann ist $K_{\leq \delta}(z) \times [a, b] \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^3$ abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. Daher ist die stetige Funktion $\frac{\partial f}{\partial z}$ auf dieser Teilmenge gleichmäßig stetig. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert daher ein positives $\delta' < \delta$, so dass für $(w, t), (w', t') \in K_{\leq \delta}(z) \times [a, b]$ gilt:

$$|w - w'| + |t - t'| < \delta' \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{\partial f}{\partial z}(w, t) - \frac{\partial f}{\partial z}(w', t') \right| < \varepsilon.$$

Also gilt

$$|h| < \delta', 0 \leq s \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{\partial f}{\partial z}(z+sh, t) - \frac{\partial f}{\partial z}(z, t) \right| < \varepsilon.$$

Daraus erhalten wir mit der üblichen Integralabschätzung

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - G(z) \right| = \left| \int_a^b \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(z+sh, t) - \frac{\partial f}{\partial z}(z, t) ds \right) dt \right| \leq (b-a)\varepsilon.$$

Hieraus folgt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - G(z) \right| = 0$$

und damit schließlich

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = G(z).$$

Hieraus folgt, dass F holomorph ist und $G = F'$ die Ableitung dieser Funktion. $\square$

Satz 4.15. Die Ableitung einer holomorphen Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ ist selbst holomorph. Für die n -te Ableitung von f gilt

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial K_r(p)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw \quad \text{für } z \in K_r(p) \subseteq K_{\leq r}(p) \subseteq U.$$

Beweis. Für $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow U, \gamma(t) = p + re^{it}$ betrachten wir für $n \geq 0$ die stetige Funktion

$$g_n: K_r(p) \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \quad g_n(z, t) = \frac{f(\gamma(t))}{(\gamma(t) - z)^{n+1}} \gamma'(t).$$

Dann gilt $\frac{\partial g_n}{\partial z} = (n+1)g_{n+1}$. Insbesondere erfüllen die g_n die Voraussetzungen von Lemma 4.14. Nach der Cauchy-Integralformel (Satz 4.13) ist

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} g_0(z, t) dt \quad \text{für } z \in K_r(p)$$

und wir erhalten aus Lemma 4.14

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} g_1(z, t) dt \quad \text{für } z \in K_r(p).$$

Erneut können wir Lemma 4.14 anwenden und erkennen, dass auch f' wieder in z holomorph ist mit Ableitung

$$f^{(2)}(z) = \frac{2}{2\pi i} \int_0^{2\pi} g_2(z, t) dt \quad \text{für } z \in K_r(p).$$

Durch Induktion folgt, dass die $(n-1)$ -te Ableitung wieder holomorph ist und in $z = w$ erhalten wir den Wert

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \int_0^{2\pi} g_n(w, t) dt = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial K_r(p)} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}} dz. \quad \square$$

Satz von Liouville

Satz 4.16. *Jede beschränkte holomorphe Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist konstant.*

Oft werden holomorphe Funktionen, die auf ganz $\mathbb{C}$ definiert sind auch *ganze Funktionen* genannt. In diesem Sinn besagt der Satz von Liouville, dass beschränkte ganze Funktionen konstant sind.

Beweis. Sei $|f(z)| \leq C$ für alle $z \in \mathbb{C}$, $w \in \mathbb{C}$ sei beliebig und $r > 0$. Dann gilt nach Satz 4.15

$$f'(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(w)} \frac{f(z)}{(z-w)^2} dz,$$

also insbesondere die Integralabschätzung

$$|f'(w)| \leq \frac{2\pi r \sup\{|f(z)| : z \in \partial K_r(w)\}}{2\pi r^2} \leq \frac{C}{r}.$$

Für $r \rightarrow \infty$ strebt die rechte Seite gegen Null, da f beschränkt ist. Also ist $f' = 0$ und f daher konstant. $\square$

Fundamentalsatz der Algebra

Satz 4.17. *Ist $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ ein Polynom ohne Nullstelle, so ist f konstant.*

Beweis. Wir dürfen o.B.d.A. $a_n = 1$ annehmen, da wir f durch $a_n^{-1}f$ ersetzen dürfen. Dann ist $f(z) = z^n + g(z)$ mit $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{g(z)}{z^n} = 0$. Es existiert also ein $r > 0$, so dass $|g(z)| \leq \frac{1}{2}|z|^n$ für $|z| > r$ gilt. Für $|z| > r$ ist dann

$$|f(z)| = |z^n + g(z)| \geq |z|^n - \frac{1}{2}|z|^n = \frac{1}{2}|z|^n \geq \frac{r^n}{2}$$

(umgekehrte Dreiecksungleichung).

Wir nehmen an, dass f keine Nullstelle besitzt. Dann ist $F := \frac{1}{f}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine auf ganz $\mathbb{C}$ definierte holomorphe Funktion. Wir behaupten, dass sie beschränkt ist. Für $|z| > r$ haben wir $|F(z)| \leq \frac{2}{r^n}$ gemäß der obigen Überlegung. Da F auf der kompakten Kreisscheibe $K_{\leq r}(0)$ stetig ist, ist sie darauf auch beschränkt ([Ana2, Satz X.5.4]). Insgesamt ergibt sich damit die Beschränktheit von F auf $\mathbb{C}$. Die Behauptung folgt nun aus dem Satz von Liouville. $\square$

Aufgaben zu Kapitel 4

Aufgabe 4.1. Sei $\mathbb{C}^- := \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$ die *geschlitzte* komplexe Zahlenebene. Wir definieren eine Funktion $F: \mathbb{C}^- \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$F(w) = \int_{\gamma_w} \frac{1}{z} dz,$$

wobei γ_w ein Weg in $\mathbb{C}^-$ von 1 nach $w \in \mathbb{C}^-$ sei. Man berechne $F(re^{i\varphi})$ für $r > 0, \varphi \in [0, 2\pi], \varphi \neq \pi$, indem man für $w = re^{i\varphi}$ den Weg auswählt, der zunächst von 1 bis r entlang der reellen Achse läuft und dann einen Kreisbogen von r bis w beschreibt.

Aufgabe 4.2. Jede holomorphe Funktion auf einem Sterngebiet besitzt eine Stammfunktion.

Aufgabe 4.3. Sei $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion für die ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $C > 0$ existiert, so dass

$$|f(z)| \leq C(1 + |z|^n) \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

gilt. Zeigen Sie, dass f ein Polynom vom Grad $\leq n$ ist.

5 Potenzreihenentwicklung

In diesem Abschnitt schlagen wir die Brücke von holomorphen Funktionen zu analytischen Funktionen, d.h. Funktionen, die sich lokal durch eine konvergente Potenzreihe darstellen lassen. Wir hatten ja schon in Satz 2.9 gesehen, dass konvergente Potenzreihen auf Kreisscheiben holomorphe Funktionen definieren. Wir werden nun insbesondere eine “Umkehrung” hiervon zeigen, nämlich dass jede holomorphe Funktion $f: K_r(p) \rightarrow \mathbb{C}$ auf einer Kreisscheibe durch eine konvergente Potenzreihe dargestellt wird.

5.1 Lokal gleichmäßige Konvergenz

Definition 5.1. Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge und $f_n: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine Folge von Funktion sowie $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine weitere Funktion.

- (1) Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *konvergiert punktweise* gegen f , falls $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$ für jedes $z \in U$ gilt.
- (2) Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *konvergiert gleichmäßig* gegen f , falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N > 0$ gibt, so dass $|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon$ für alle $z \in U$ und $n > N$ gilt.
- (3) Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *konvergiert lokal gleichmäßig* gegen f , falls es für jeden Punkt $z \in U$ eine Umgebung V von z in U gibt, so dass $(f_n|_V)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $f|_V$ konvergiert.

Entscheidend für die gleichmäßige Konvergenz ist, dass die Grenze N nicht von z abhängt (aber natürlich von ε). Offenbar haben wir folgende Implikationen

$$\begin{aligned} \text{gleichmäßige Konvergenz} &\Rightarrow \text{lokal gleichmäßige Konvergenz} \\ &\Rightarrow \text{punktweise Konvergenz.} \end{aligned}$$

Für konkrete Anwendungen ist das folgende Lemma sehr nützlich:

Lemma 5.2. *Konvergiert die Folge $f_n: D \rightarrow \mathbb{C}$ lokal gleichmäßig gegen die Funktion f , so konvergiert sie auf jeder kompakten Teilmenge $C \subseteq D$ gleichmäßig.*

Beweis. Da die Folge lokal gleichmäßig konvergiert, existiert zu jedem Punkt $c \in C$ ein ε_c , so dass die Folge (f_n) auf der Menge $D \cap K_{\varepsilon_c}(c)$ gleichmäßig konvergiert. Wegen der Kompaktheit von C , wird C von endlich vielen dieser Kreisscheiben überdeckt

$$C \subseteq K_{\varepsilon_{c_1}}(c_1) \cup \dots \cup K_{\varepsilon_{c_k}}(c_k).$$

Da die Folge (f_n) auf jeder Teilmenge $C_j := C \cap K_{\varepsilon_j}(c_j)$ gleichmäßig konvergiert, existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $N_j \in \mathbb{N}$, so dass

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \quad \text{für} \quad n \geq N_j, z \in C_j$$

gilt. Für $N := \max\{N_1, \dots, N_k\}$ erhalten wir dann

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \quad \text{für} \quad n \geq N, z \in C.$$

Also konvergiert die Folge (f_n) auf C gleichmäßig gegen f . □

Satz 5.3. Sei $f_n: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine Folge stetiger Funktionen, die lokal gleichmäßig gegen $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ konvergiert. Dann gilt:

(a) f ist stetig.

(b) Ist $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ ein Integrationsweg, so ist

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz.$$

(c) Ist $U \subset \mathbb{C}$ offen, sind alle Funktionen $f_n: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $f_n \rightarrow f$ lokal gleichmäßig, so ist auch f holomorph und $f'_n \rightarrow f'$ lokal gleichmäßig.

Beweis. (a) Den Beweis der Stetigkeit des Grenzwerts einer lokal gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen führt man wie im Reellen mit einem $\frac{\varepsilon}{3}$ -Argument. Sei dazu $p \in U$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine Umgebung $K_r(p)$ von p auf der die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergiert. Es existiert also ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für} \quad z \in K_r(p), n \geq N.$$

Da f_N in p stetig ist, existiert ein $\delta \in (0, r)$, so dass

$$|f_N(z) - f_N(p)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für} \quad z \in K_{\delta}(p)$$

gilt. Dann ist aber auch

$$|f(z) - f(p)| \leq |f(z) - f_N(z)| + |f_N(z) - f_N(p)| + |f_N(p) - f(p)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

und f daher in p stetig.

(b) Das Bild $\gamma([a, b])$ von γ ist kompakt, also konvergiert f_n auf dem Bild von γ gleichmäßig gegen f (Lemma 5.2). Falls $|f_n(z) - f(z)| \leq \varepsilon$ für alle $z \in \text{im } \gamma$ gilt, ist

$$\left| \int_{\gamma} f_n(z) dz - \int_{\gamma} f(z) dz \right| = \left| \int_{\gamma} f_n(z) - f(z) dz \right| \leq L(\gamma)\varepsilon,$$

Daraus folgt (b).

(c) Sei γ ein in U zusammenziehbarer Integrationsweg. Nach dem Integralsatz von Cauchy ist

$$\int_{\gamma} f_n(z) dz = 0 \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nach (b) ist dann auch $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ und nach Satz 3.17 besitzt f auf jeder offenen Kreisscheibe in U eine Stammfunktion und ist daher nach Satz 4.15 selbst holomorph.

Sei nun $p \in U$ und $r > 0$ so klein, dass $K_{\leq r}(p) \subseteq U$ ist und $0 < s < r$. Wir zeigen, dass die Folge f'_n der Ableitungen auf der Kreisscheibe $K_s(p)$ gleichmäßig gegen f' konvergiert. Für $w \in K_s(p) \subseteq K_r(p)$ folgt zunächst aus der Cauchy-Integralformel

$$f'_n(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(p)} \frac{f_n(z)}{(z-w)^2} dz \quad \text{und} \quad f'(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(p)} \frac{f(z)}{(z-w)^2} dz.$$

Für $|z-p| = r$ und $|w-p| < s$ folgt aus der Dreiecksungleichung $|z-w| \geq r-s$ und damit

$$\left| \frac{1}{(z-w)^2} \right| \leq \frac{1}{(r-s)^2}.$$

Wir erhalten daher mit der Standard-Abschätzung (Aufgabe 3.2)

$$\begin{aligned} |f'(w) - f'_n(w)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(p)} \frac{f(z)}{(z-w)^2} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(p)} \frac{f_n(z)}{(z-w)^2} dz \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(p)} \frac{f(z) - f_n(z)}{(z-w)^2} dz \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi r}{(r-s)^2} \sup_{|z-p|=r} |f(z) - f_n(z)| = \frac{r}{(r-s)^2} \sup_{|z-p|=r} |f(z) - f_n(z)|. \end{aligned}$$

Die gleichmäßige Konvergenz der Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf $\partial K_r(p)$ (Lemma 5.2) liefert also die gleichmäßige Konvergenz der Folge $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Ableitungen auf der kleineren Kreisscheibe $K_s(p)$. $\square$

5.2 Potenzreihen

Eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $p \in \mathbb{C}$ ist ein Ausdruck der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-p)^n = a_0 + a_1(z-p) + a_2(z-p)^2 + \dots$$

mit komplexen Zahlen a_n . Wir fassen jeden solchen Ausdruck als Folge der Polynomfunktionen $f_m(z) := \sum_{n=0}^m a_n(z-p)^n$ auf. Insbesondere können wir nun von punktwiser oder gleichmäßiger Konvergenz der Potenzreihe sprechen. Wir nehmen im Folgenden der Einfachheit halber $p = 0$ an.

Das folgende Lemma verschärft Satz 2.9 in dem Sinn, dass wir jetzt zusätzlich festhalten, dass die Konvergenz der Potenzreihe lokal gleichmäßig ist.

Lemma 5.4. *Konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ für ein $z_0 \in \mathbb{C}$, so konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ für alle w mit $|w| < |z_0|$. Auf jeder offenen Kreisscheibe $K_r(0)$ mit $r < |z_0|$ konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ absolut und gleichmäßig.*

Beweis. Da $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ konvergiert, ist die Folge der Summanden $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Nullfolge. Also existiert ein $B > 0$ mit $|a_n z_0^n| < B$ für alle n . Ist nun $z \in K_r(0)$ und $r < |z_0|$, so ist

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \left| \frac{z^n}{z_0^n} \right| \leq B \left| \frac{z^n}{z_0^n} \right| \leq B \left(\frac{r}{|z_0|} \right)^n.$$

Wir haben also auf $K_r(0)$ eine uniforme Majorante gefunden und hieraus folgt auf $K_r(0)$ die gleichmäßige Konvergenz der Reihe aus

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n z^n| \leq B \sum_{n=N}^{\infty} \left(\frac{r}{|z_0|} \right)^n \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad N \rightarrow \infty,$$

denn die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{|z_0|} \right)^n$ konvergiert. $\square$

Definition 5.5. Der *Konvergenzradius* der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ist definiert durch

$$R := \sup \left\{ |z| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ konvergiert} \right\} \in [0, \infty].$$

Bemerkung 5.6. (a) Ist $R > 0$, so folgt aus Lemma 5.4, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ auf $K_R(0)$ eine holomorphe Funktion definiert deren Ableitung durch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}z^n$ gegeben ist (nach Satz 5.3 oder auch schon wegen Satz 2.9).

(b) Aus Lemma 5.4 folgt ebenfalls, dass die Reihe $\sum_n a_n z^n$ für $|z| < R$ absolut konvergiert. Wir haben daher die Gleichheit

$$R = \sup \left\{ r \geq 0 : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < \infty \right\},$$

die sich nur auf reelle Zahlen bezieht. Insbesondere erhalten wir damit aus der Analysis I mit dem Wurzelkriterium die *Formel von Hadamard*

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \in [0, \infty],$$

wobei wir $\frac{1}{0} = \infty$ und $\frac{1}{\infty} = 0$ setzen. Aus dieser Formel folgt insbesondere, dass $\sum_n a_n z^n$ und $\sum_n p(n) a_n z^n$ für jedes Polynom $p(n)$ den gleichen Konvergenzradius besitzen, da $\sqrt[n]{n^k} = \sqrt[n]{n^k} \rightarrow 1$.

5.3 Potenzreihenentwicklungssatz

Potenzreihenentwicklungssatz

Satz 5.7. Sei $K \subset \mathbb{C}$ eine offene Kreisscheibe mit Zentrum p und $f: K \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann ist f genau dann holomorph, wenn f auf K durch eine konvergente Potenzreihe mit Entwicklungspunkt p dargestellt werden kann, d.h. falls eine komplexe Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existiert, so dass $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-p)^n$ für alle $z \in K$ gilt. In diesem Fall ist

$$a_n = \frac{f^{(n)}(p)}{n!}.$$

Beweis. Ist $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-p)^n$ für alle $z \in K$, so ist f holomorph und die Formel für die Ableitungen gilt (Satz 2.9).

Sei umgekehrt f holomorph. Zur Vereinfachung der Notation nehmen wir $p = 0$ an bzw. ersetzen f durch die Funktion $\tilde{f}(z) := f(z+p)$. Sei $|w| < |z| = r$. Dann ist

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z} \left(\frac{1}{1 - (w/z)} \right) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w}{z} \right)^n,$$

wobei die Konvergenz der Reihe für festes w gleichmäßig in $z \in \partial K_r(0)$ ist, da

$$\left| \frac{1}{z} \sum_{n=N}^{\infty} \left(\frac{w}{z} \right)^n \right| \leq \frac{1}{r} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{|w|^n}{r^n} \rightarrow 0.$$

Wir erhalten daher aus der Cauchy-Integralformel

$$\begin{aligned} f(w) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(0)} \frac{f(z)}{z-w} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(0)} f(z) \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w}{z} \right)^n dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(0)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \right) w^n \stackrel{4.15}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} w^n. \end{aligned}$$

Also ist f auf $K_r(0)$ durch eine Potenzreihe darstellbar. □

Definition 5.8. Man nennt die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(p)}{n!} (z-p)^n$$

die *Taylorreihe* von f am Entwicklungspunkt p .

Aus Satz 5.7 erhalten wir nun sofort:

Folgerung 5.9. Ist $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $K_r(p) \subseteq U$ eine offene Kreisscheibe, so wird die Funktion f auf $K_r(p)$ durch ihre konvergente Taylorreihe dargestellt:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(p)}{n!} (z-p)^n \quad \text{für } z \in K_r(p).$$

Das bemerkenswerte an dieser Folgerung ist, dass man sie auf die größtmögliche Kreisscheibe in U anwenden kann.

Beispiel 5.10. Die entsprechende Aussage im Reellen ist falsch. So ist z.B. die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

reell analytisch, d.h., jeder Punkt $p \in \mathbb{R}$ hat eine Umgebung auf der f durch die konvergente Taylorreihe dargestellt wird. Allerdings ist der Konvergenzradius nie unendlich. Warum das so ist, sieht man erst im Komplexen. Die Funktion

$$F: \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

ist holomorph und stimmt auf der reellen Achse mit f überein. Für $p \in \mathbb{R}$ stimmen also die Taylorreihen von f und F in p überein. Da F in $\pm i$ eine Singularität besitzt, zeigt uns Folgerung 5.9, dass in jedem $p \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ der Konvergenzradius R_p der Taylorreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(p)}{n!} (z-p)^n$$

gegeben ist durch $R_p = \min(|p-i|, |p+i|)$, also durch den Radius der maximalen Kreisscheibe um p , die in $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ enthalten ist. Für $p \in \mathbb{R}$ erhalten wir insbesondere $R_p = \sqrt{1+p^2}$. Dieses Beispiel zeigt sehr klar, dass man Konvergenzradien von Potenzreihen im Reellen oft nur schwer berechnen kann, aber dass dies im Komplexen oft durch geometrische Überlegungen mit maximalen Kreisscheiben leichter möglich ist. Insbesondere haben wir die Taylorreihe von F in p gar nicht explizit berechnen müssen, um ihren Konvergenzradius zu bestimmen.

5.4 Nullstellen

Definition 5.11. Ein $p \in U$ heißt *Nullstelle* einer Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, falls $f(p) = 0$ gilt.

Satz 5.12. Sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $p \in U$ eine Nullstelle von f . Verschwindet f auf keiner Umgebung von p , so verschwinden nicht alle Ableitungen von f in p .

Ist das der Fall und

$$k := \min\{n \in \mathbb{N}: f^{(n)}(p) \neq 0\},$$

so existiert eine offene Umgebung V von p in U und eine holomorphe Funktion $g: U \rightarrow \mathbb{C}$ mit $g(V) \subseteq \mathbb{C}^\times$, so dass

$$f(z) = (z - p)^k g(z) \quad \text{für alle } z \in U$$

gilt. Insbesondere ist dann p die einzige Nullstelle von f in V .

Beweis. Wir nehmen an, dass f auf keiner Umgebung von p verschwindet. Dann müssen wir zeigen, dass es eine Umgebung von p in U gibt, die neben p keine weitere Nullstelle von f enthält. Dazu entwickeln wir f auf einer Kreisscheibe $K = K_r(p) \subseteq U$ in eine Potenzreihe: Es ist also

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(p)}{n!} (z - p)^n \quad \text{für alle } z \in K_r(p).$$

Da f auf K nicht verschwindet, existiert ein kleinstes $k > 0$ mit $f^{(k)}(p) \neq 0$. Dann ist

$$f(z) = (z - p)^k g(z) \quad \text{mit} \quad g(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{f^{(n)}(p)}{n!} (z - p)^{n-k}.$$

Da sie durch eine auf K konvergente Potenzreihe dargestellt wird, ist die Funktion g holomorph auf K mit $g(p) \neq 0$. Durch

$$g(z) := \frac{f(z)}{(z - p)^k} \quad \text{für } z \in U \setminus \{p\}$$

erhalten wir so eine holomorphe Funktion $g: U \rightarrow \mathbb{C}$.

Da g stetig ist, existiert $s \in (0, r)$, so dass $K_s(p)$ außer p keine weitere Nullstelle von g enthält. Dann besitzt f auf $K_s(p)$ außer p keine Nullstelle. $\square$

Definition 5.13. Sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Eine Nullstelle p von f , die in einer offenen Teilmenge von U die einzige Nullstelle von f ist, heißt *isolierte Nullstelle*. Dann heißt

$$k = \min\{n \in \mathbb{N}: f^{(n)}(p) \neq 0\}$$

die *Ordnung der Nullstelle* p . Aus Satz 5.12 folgt dann die Existenz einer holomorphen Funktion $g: U \rightarrow \mathbb{C}$ mit $g(p) \neq 0$, so dass $f(z) = (z - p)^k g(z)$ für alle $z \in V$ gilt.

Identitätssatz

Satz 5.14. Sei U ein Gebiet und $f_1, f_2: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen. Stimmen f_1 und f_2 auf einer Teilmenge $D \subseteq U$ mit einem **Häufungspunkt** in U überein, so ist $f_1 = f_2$.

Hierbei versteht man unter einem *Häufungspunkt* p einer Teilmenge M einen Punkt, für den jede Kreisscheibe $K_r(p)$, $r > 0$, unendliche viele Punkte aus M enthält. Ein Punkt p ist also **kein** Häufungspunkt von M , wenn ein $r > 0$ existiert, so dass $K_r(p) \cap M \subseteq \{p\}$ ist.

Beweis. Wir betrachten die Differenz $f := f_1 - f_2$. Wir haben zu zeigen, dass eine holomorphe Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, deren Nullstellenmenge einen Häufungspunkt besitzt, die Nullfunktion ist.

Hierzu betrachten wir die Teilmenge

$$Z := \{z \in U: (\forall n \in \mathbb{N}_0) f^{(n)}(z) = 0\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} Z_n \quad \text{mit} \quad Z_n := \{z \in U: f^{(n)}(z) = 0\}.$$

Da alle Ableitungen $f^{(n)}$ holomorph und damit insbesondere stetig sind, sind die Mengen Z_n abgeschlossen in U (Aufgabe 1.11). Damit ist auch ihr Durchschnitt Z abgeschlossen, also $U \setminus Z$ offen.

Ist $z \in Z$, so folgt aus dem Potenzreihenentwicklungssatz (Satz 5.7), dass f auf einer Kreisscheibe $K_\varepsilon(z)$ verschwindet. Dann verschwinden auf $K_\varepsilon(z)$ auch alle Ableitungen von f und somit ist $K_\varepsilon(z) \subseteq Z$. Hieraus folgt, dass Z auch offen ist.

Ist $z_0 \in Z$ ein Häufungspunkt von Nullstellen, so folgt aus Satz 5.12, dass alle Ableitungen von f in z_0 verschwinden. Also ist $z_0 \in Z$ und damit $Z \neq \emptyset$.

Da U zusammenhängend ist und Z nicht leer, erhalten wir aus der Zerlegung $U = Z \cup (U \setminus Z)$ in zwei offene Teilmengen von U , dass $Z = U$ gilt. Insbesondere ist somit $f = 0$. $\square$

Beispiel 5.15. Die Funktion

$$f: \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) := \sin \frac{1}{z}$$

ist holomorph. Die Nullstellen $\pm \frac{1}{n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$, häufen sich bei Null, dennoch ist $f \neq 0$. Es ist also notwendig, im Identitätssatz zu fordern, dass der Häufungspunkt zum Definitionsbereich gehört.

5.5 Komplexe Logarithmus-Funktionen

In diesem Abschnitt werfen wir einen systematischen Blick auf die Existenz komplexer Logarithmus-Funktionen. Die Problematik hierbei ist, dass die Existenz solcher Funktionen zunächst nur auf einfach zusammenhängenden Gebieten in $\mathbb{C}$ gewährleistet ist. Ein natürliches maximales Gebiet ist daher die rechts-geschlitzte Ebene $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ (Aufgabe 5.7).

Definition 5.16. Sei $U \subseteq \mathbb{C}^\times$ ein Gebiet. Eine holomorphe Funktion $L: U \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *Logarithmus-Funktion*, wenn $\exp \circ L = \text{id}_U$ gilt, also $e^{L(z)} = z$ für alle $z \in U$.

Beispiel 5.17. Schon bekannt ist die Logarithmus-Funktion, die man durch die Potenzreihe

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$$

auf der offenen Kreisscheibe $K_1(1)$ erhält (Aufgabe 3.6). Insbesondere ist $\log(1) = 0$.

Lemma 5.18. Sei $U \subseteq \mathbb{C}^\times$ ein Gebiet und $L: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann sind äquivalent:

- (i) L ist eine Logarithmus-Funktion.
- (ii) Es existiert ein $z_0 \in U$ mit $e^{L(z_0)} = z_0$ und $L'(z) = \frac{1}{z}$ für alle $z \in U$, d.h., L ist eine Stammfunktion von $\frac{1}{z}$.
- (iii) Es existiert ein $z_0 \in U$ mit $e^{L(z_0)} = z_0$ und

$$L(z) = L(z_0) + \int_{\gamma} \frac{dz}{z} \tag{25}$$

für jeden Integrationsweg $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ mit $\gamma(a) = z_0$ und $\gamma(b) = z$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $z_0 \in U$. Dann gilt insbesondere $e^{L(z_0)} = z_0$. Durch Ableiten der Relation $z = e^{L(z)}$ erhalten wir mit der Kettenregel $1 = e^{L(z)} L'(z) = z L'(z)$ und daher $L'(z) = \frac{1}{z}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Da L eine Stammfunktion von $\frac{1}{z}$ ist, folgt (iii) wegen Satz 3.17 aus (ii).

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Aus (25) folgt, dass für jeden geschlossenen Integrationsweg $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ mit $\gamma(a) = \gamma(b) = z_0$ das Wegintegral $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$ verschwindet. Die Existenz einer Stammfunktion folgt damit aus Satz 3.17 (siehe hierzu auch Bemerkung 3.18), der insbesondere zeigt, dass (25) eine Stammfunktion liefert.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Da U ein Gebiet ist, existiert zu jedem $z \in U$ ein Integrationsweg $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ mit $\gamma(a) = z_0$ und $\gamma(b) = z$ (Lemma 3.12). Dann gilt für jedes t in dem γ differenzierbar ist (die Unterteilungspunkte muss man ausnehmen)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\gamma(t)e^{-L(\gamma(t))}) &= \gamma'(t)e^{-L(\gamma(t))} + \gamma(t)e^{-L(\gamma(t))}(-L'(\gamma(t))\gamma'(t)) \\ &= e^{-L(\gamma(t))}\gamma'(t)\left(1 - \gamma(t)L'(\gamma(t))\right) = 0. \end{aligned}$$

Also erhalten wir

$$ze^{-L(z)} = \gamma(b)e^{-L(\gamma(b))} = \gamma(a)e^{-L(\gamma(a))} = z_0e^{-L(z_0)} = 1$$

und somit $z = e^{L(z)}$. Daher ist L eine Logarithmus-Funktion. $\square$

Bemerkung 5.19. Sei $U \subseteq \mathbb{C}^\times$ ein Gebiet. Mit Lemma 5.18 haben wir Logarithmusfunktionen im wesentlichen als Stammfunktionen der Funktion $\frac{1}{z}$ charakterisiert.

Ist $L: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{z}$, so ist auch die Summe $L + c$ für jedes $c \in \mathbb{C}$ eine Stammfunktion. Sei nun $z_0 \in U$. Dann ist $z_0e^{-L(z_0)} \neq 0$. Es existiert also ein $c \in \mathbb{C}$ mit $e^c = z_0e^{-L(z_0)}$. Dann ist $e^{L(z_0)+c} = e^{L(z_0)}e^c = z_0$ und somit ist $L + c$ eine Logarithmus-Funktion.

Die Existenz einer Stammfunktion von $\frac{1}{z}$ hat also die Existenz einer Logarithmus-Funktion zur Folge. Sei L eine Logarithmus-Funktion auf U . Wir möchten alle Logarithmus-Funktionen auf U beschreiben. Da U zusammenhängend ist, haben alle anderen Stammfunktionen von $\frac{1}{z}$ die Gestalt $L + c$, $c \in \mathbb{C}$. Die Bedingung $z_0 = e^{L(z_0)+c} = e^{L(z_0)}e^c = z_0e^c$ ist äquivalent zu $e^c = 1$, was genau dann der Fall ist, wenn $c \in 2\pi i\mathbb{Z}$ ist.

Ist L_0 eine Logarithmus-Funktion auf dem Gebiet U , so erhalten wir durch

$$L_k := L_0 + 2\pi ik, \quad k \in \mathbb{Z}$$

also alle Logarithmus-Funktionen auf U .

Mit diesen allgemeinen Vorüberlegungen können wir nun auch etwas zur Existenz sagen. Eine hinreichende Bedingung an das Gebiet ist der einfache Zusammenhang.

Satz 5.20. Auf jedem einfach zusammenhängenden Gebiet $U \subseteq \mathbb{C}^\times$ existiert eine Logarithmusfunktion L . Für je zwei Logarithmusfunktionen L_1, L_2 existiert ein $k \in \mathbb{Z}$, so dass $L_1 - L_2 = 2\pi ik$ konstant ist.

Beweis. Aus Folgerung 4.10 folgt auf U die Existenz einer Stammfunktion zu $\frac{1}{z}$, so dass der Rest aus Bemerkung 5.19 folgt. $\square$

Bemerkung 5.21. (a) Das Gebiet $\mathbb{C}^\times = \exp(\mathbb{C})$ ist leider nicht einfach zusammenhängend und da es geschlossene Wege γ in $\mathbb{C}^\times$ gibt, für die $\int_{\gamma} \frac{dz}{z} \neq 0$ ist, gibt es auf $\mathbb{C}^\times$ keine Logarithmusfunktion, da $\frac{1}{z}$ auf $\mathbb{C}^\times$ keine Stammfunktion besitzt (Folgerung 3.24).

(b) Allerdings ist $U = \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ sternförmig bzgl. 1 und daher insbesondere einfach zusammenhängend (Aufgabe 4.2). Auf diesem Gebiet lässt sich eine Logarithmus-Funktion $L: U \rightarrow \mathbb{C}$ mit $L(1) = 0$ leicht durch Integration bestimmen. Wir erhalten in Polarkoordinaten

$$L(re^{i\theta}) = \log r + i\theta \quad \text{für } r > 0, \theta \in]-\pi, \pi[.$$

Man nennt diese Funktion den *Hauptzweig des komplexen Logarithmus* (Aufgaben 4.1 und 5.9).

Bemerkung 5.22. Mit einer Logarithmus-Funktion $L: U \rightarrow \mathbb{C}$ kann man natürlich auch beliebige *Potenzfunktionen* definieren. Für $\alpha \in \mathbb{C}$ setzen wir

$$z^\alpha := e^{\alpha L(z)} \quad \text{für} \quad z \in U.$$

Dann gelten die Potenzregeln:

$$z^0 = 1, \quad z^1 = z \quad \text{und} \quad z^{\alpha+\beta} = z^\alpha z^\beta \quad \text{für} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Sind $z, w \in U$, so dass auch $zw \in U$ ist, so erhalten wir weiter

$$z^\alpha w^\alpha = e^{\alpha(L(z)+L(w))} \quad \text{und} \quad (zw)^\alpha = e^{\alpha L(zw)}.$$

Diese beiden komplexen Zahlen sind aber im Allgemeinen verschieden. Aus $e^{L(z)}e^{L(w)} = zw = e^{L(zw)}$ folgt

$$L(zw) - L(z) - L(w) \in 2\pi i\mathbb{Z},$$

aber diese Zahl muss nicht verschwinden.

Für den Hauptzweig des Logarithmus haben wir z.B. für $z = w = e^{\frac{3}{4}\pi i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + i)$ zunächst $z^2 = e^{\frac{3}{2}\pi i} = -i$ und daher

$$L(z^2) = -\frac{\pi}{2}i \neq \frac{3}{2}\pi i = 2 \cdot \frac{3}{4}\pi i = 2L(z).$$

5.6 Die lokale Normalform holomorpher Funktionen

Definition 5.23. (a) Seien $U, V \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine holomorphe Funktion $f: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{C}$ heißt *biholomorph*, wenn sie bijektiv ist und die Umkehrfunktion $f^{-1}: V \rightarrow U$ ebenfalls holomorph. Wir sprechen dann auch von einer *holomorphen Einbettung* $f: U \rightarrow \mathbb{C}$.

(b) Injektive holomorphe Funktionen $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ nennt man auch *schlichte* Funktionen.

Biholomorphe Funktionen sind insbesondere schlicht. Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, dass jede schlichte Funktion biholomorph auf ihr Bild ist.

Wir zitieren hier einen Satz aus der reellen Analysis (im zweidimensionalen Spezialfall).

Satz 5.24. (Satz über die Umkehrfunktion) *Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar. Ist das Differential $df(p): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ von f in $p \in U$ invertierbar, so existiert eine offene Umgebung V von p in U , so dass $f|_V: V \rightarrow f(V)$ ein C^1 -Diffeomorphismus auf eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist, d.h., $f|_V$ ist injektiv und $(f|_V)^{-1}$ ist ebenfalls stetig differenzierbar mit*

$$d(f|_V)^{-1}(f(x)) = (df(x))^{-1}, \quad x \in V.$$

Satz 5.25. (Satz über die Umkehrfunktion für holomorphe Funktionen) *Ist $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $f'(p) \neq 0$ für ein $p \in U$, so gibt es eine offene Umgebung V von p in U , so dass $f|_V: V \rightarrow f(V)$ biholomorph ist, d.h., $f|_V$ ist injektiv, $f(V)$ ist offen und die Umkehrabbildung $(f|_V)^{-1}: f(V) \rightarrow \mathbb{C}$ ist ebenfalls holomorph mit*

$$((f|_V)^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}, \quad z \in V. \quad (26)$$

Beweis. Nach dem Satz über die Umkehrabbildung 5.24 gibt es eine offene Umgebung V von p in U , so dass $f|_V$ ein C^1 -Diffeomorphismus auf eine offene Teilmenge $f(V)$ ist. Das bedeutet, dass $f: V \rightarrow f(V)$ eine bijektive, stetig differenzierbare Funktion mit stetig differenzierbarer Umkehrabbildung ist. Dann ist $f^{-1}: f(V) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, denn das Differential

$$d(f^{-1})(f(q)) = df(q)^{-1}: \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$$

ist für $q \in V$ die Umkehrabbildung von $df(q): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Da letztere Abbildung wegen der Holomorphie von f komplex linear ist:

$$df(q)w = f'(q)w,$$

ist auch $d(f^{-1})(f(q))$ komplex linear und gegeben durch

$$d(f|_V^{-1})(f(q))w = \frac{w}{f'(q)}.$$

Also ist f^{-1} nach Satz 2.11 holomorph und es gilt (26). □

Satz 5.26. (Die lokale Normalform holomorpher Funktionen) *Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $p \in U$ und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine nicht-konstante holomorphe Funktion sowie*

$$k := \min\{n \in \mathbb{N}: f^{(n)}(p) \neq 0\}.$$

Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ und eine holomorphe Einbettung $\eta: K_\varepsilon(0) \rightarrow U$ mit $\eta(0) = p$, so dass

$$(f \circ \eta)(z) = f(p) + z^k \quad \text{für alle } z \in K_\varepsilon(0)$$

gilt.

Beweis. Ersetzen wir f durch $\tilde{f}(z) := f(z + p) - f(p)$, so dürfen wir $p = f(p) = 0$ annehmen. Da f nicht konstant ist, ist f auch auf keiner Umgebung von 0 konstant (Satz 5.14) und daher verschwinden nicht alle Ableitungen von f in 0 (Satz 5.12). Aus Satz 5.12 folgt nun die Existenz einer offenen Kreisscheibe $V \subseteq U$ um den Nullpunkt und einer holomorphen Funktion $g: V \rightarrow \mathbb{C}^\times$ mit

$$f(z) = z^k g(z) \quad \text{für } z \in V.$$

Da g stetig ist, dürfen wir nach Verkleinerung von V sogar annehmen, dass $g(V) \subseteq K_r(g(0))$ für $r := |g(0)|$ gilt. Auf der offenen Kreisscheibe $K_r(g(0))$ existiert eine Logarithmusfunktion L und damit auch eine k . Wurzelfunktion $r(z) := z^{1/k} := e^{\frac{L(z)}{k}}$ (Bemerkung 5.22). Dann ist $h := r \circ g$ holomorph auf U . Weiter gilt $f(z) = (zh(z))^k$ für alle $z \in K$.

Die Einschränkung der Funktion $H(z) := zh(z)$ auf eine ausreichend kleine Kreisscheibe W um 0 ist eine holomorphe Einbettung nach U , denn wegen $H'(0) = h(0) \neq 0$ folgt dies aus dem Satz 5.25 über die Umkehrfunktion für holomorphe Funktionen. Für $\eta := (H|_W)^{-1}$ ist dann

$$f(\eta(z)) = H(\eta(z))^k = z^k \quad \text{für } z \in H(W). \quad \square$$

Folgerungen aus dem Normalformsatz

Satz von der Gebietstreue

Satz 5.27. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant. Dann ist auch $f(U) \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet.*

Beweis. Nach dem Identitätssatz ist die Funktion f auf keiner offenen Kreisscheibe $K_\varepsilon(p)$ in U konstant. Aus Satz 5.26 folgt daher, dass $f(U)$ eine Kreisscheibe um $f(p)$ enthält. Also ist $f(U)$ offen.

Dass $f(U)$ zusammenhängend ist, folgt aus der Stetigkeit von f : Ist $f(U) = V_1 \dot{\cup} V_2$ mit zwei offenen Teilmengen V_1, V_2 , so sind die Urbilder $U_j := f^{-1}(V_j)$ ebenfalls offen und $U = U_1 \dot{\cup} U_2$. Da U zusammenhängend ist, ist eine der beiden Menge U_j leer, folglich auch $V_j = \emptyset$. Also ist $f(U)$ zusammenhängend. □

Im Reellen gilt dieser Satz nicht, denn das Bild $[-1, 1]$ der Sinusfunktion $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist nicht offen. Wir halten eine interessante Folgerung fest:

Satz der offenen Abbildung

Satz 5.28. Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine nicht konstante holomorphe Funktion, so ist f eine offene Abbildung, d.h., für jede offene Teilmenge $V \subseteq U$ ist $f(V)$ offen in $\mathbb{C}$.

Beweis. Da $f(\emptyset) = \emptyset$ offen ist, dürfen wir $V \neq \emptyset$ annehmen. Zu $p \in V$ existiert dann ein $\varepsilon > 0$ mit $K_\varepsilon(p) \subseteq V$. Dann ist $f|_{K_\varepsilon(p)}$ wegen dem Identitätssatz 5.14 nicht konstant und nach dem Satz von der Gebietstreue ist $f(K_\varepsilon(p))$ offen. Insbesondere enthält $f(V)$ eine Umgebung von $f(p)$. Da $p \in V$ beliebig war, folgt hieraus, dass $f(V)$ offen ist. $\square$

Maximumprinzip

Satz 5.29. Sei U ein Gebiet und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Ist

$$|f(p)| = \max\{|f(z)|: z \in U\} \quad \text{für ein } p \in U,$$

so ist f konstant.

Beweis. Ist f nicht konstant, so ist $f(U)$ nach dem Satz von der Gebietstreue 5.27 offen und enthält damit eine Kreisscheibe $K_\varepsilon(f(p))$ für ein $\varepsilon > 0$. Das widerspricht der Maximalität von $|f(p)|$. $\square$

Satz 5.30. (Schlichte Funktionen sind biholomorph) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und injektiv. Dann ist $f(U)$ ebenfalls offen und $f^{-1}: f(U) \rightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph.

Beweis. Nach dem Satz von der Gebietstreue 5.27 ist $f(U)$ offen, denn wegen der Injektivität ist f nicht konstant. Daher ist die Umkehrfunktion f^{-1} auf der offenen Teilmenge $f(U)$ definiert.

Existiert ein $p \in U$ mit $f'(p) = 0$, so ist

$$k := \inf\{n \in \mathbb{N}: f^{(n)}(p) \neq 0\} > 1.$$

Aus dem Normalformsatz 5.26 folgt dann die Existenz einer holomorphen Einbettung $h: K_\varepsilon(0) \rightarrow V$ mit $h(0) = p$ auf eine offene Umgebung V von p in U , so dass

$$f(h(z)) = f(p) + z^k \quad \text{für } |z| < \varepsilon$$

gilt. Da die Potenzfunktion $z \mapsto z^k$ für $k > 1$ in keiner Nullumgebung injektiv ist, widerspricht dies der Injektivität von f . Daher hat die Ableitung f' keine Nullstelle. Nun folgt die Holomorphie von f^{-1} aus der holomorphen Variante des Satzes über die Umkehrfunktion (Satz 5.25). $\square$

Aufgaben zu Kapitel 5

Aufgabe 5.1. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie: Verschwinden alle Ableitungen $f^{(n)}(p)$, $n \in \mathbb{N}_0$, in einem Punkt $p \in G$, so ist f identisch 0.

Aufgabe 5.2. Sei $f_n: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktionenfolge und $C_1, \dots, C_k \subseteq D$ Teilmengen. Zeigen Sie: Konvergiert die Folge (f_n) gleichmäßig auf jeder der Teilmengen C_j , so auch auf deren Vereinigung $C_1 \cup \dots \cup C_k$.

Aufgabe 5.3. Zeigen Sie, dass jede lokal gleichmäßig konvergente Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von lokal beschränkten Funktionen $f_n: U \rightarrow \mathbb{C}$ lokal beschränkt ist.

Aufgabe 5.4. Seien $f_n, g_n : U \rightarrow \mathbb{C}$ [lokal] gleichmäßig konvergente Folgen [lokal] beschränkter Funktionen mit $f_n \rightarrow f$ und $g_n \rightarrow g$. Zeigen Sie, dass das Produkt $(f_n g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ [lokal] gleichmäßig gegen $f \cdot g$ konvergiert.

Definition: Die Folge (f_n) konvergiert *kompakt* gegen f , wenn (f_n) auf jeder kompakten Teilmenge $A \subset D$ gleichmäßig gegen f konvergiert.

Aufgabe 5.5. Sei $D \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge, $(f_n : D \rightarrow \mathbb{C})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion.

- (a) Ist $D \subset \mathbb{C}$ kompakt, so konvergiert (f_n) genau dann lokal gleichmäßig gegen f , wenn (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert.
- (b) Ist $D \subset \mathbb{C}$ offen, so konvergiert (f_n) genau dann lokal gleichmäßig gegen f , wenn (f_n) kompakt gegen f konvergiert.

Aufgabe 5.6. Man finde ein Beispiel einer injektiven, reell differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, deren Umkehrabbildung aber nicht differenzierbar ist.

Aufgabe 5.7. (Maximalität von Logarithmusfunktionen) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, das die links-geschlitzte Ebene $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ echt enthält. Zeigen Sie, dass auf U keine Logarithmus-Funktion existiert.

Aufgabe 5.8. Sei $U \subseteq \mathbb{C}^\times$ ein Gebiet und $1 \in U$ sowie $L : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine Logarithmus-Funktion mit $L(1) = 0$. Weiter sei $U_1 \subseteq U$ ein Teilgebiet mit $1 \in U_1$ und

$$U_1 \cdot U_1 \subseteq U, \quad \text{d.h.} \quad zw \in U \quad \text{für} \quad z, w \in U_1.$$

Zeigen Sie

$$L(zw) = L(z) + L(w) \quad \text{für alle} \quad z, w \in U_1.$$

Aufgabe 5.9. (Hauptzweig des komplexen Logarithmus) Zeigen Sie, dass auf der linksgeschlitzten komplexen Ebene $U := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ durch

$$L(re^{i\theta}) = \log r + i\theta \quad \text{für} \quad r > 0, \theta \in]-\pi, \pi[$$

eine holomorphe Logarithmus-Funktion mit $L(1) = 0$ gegeben ist und dass diese eindeutig ist.

Hinweis: Verwenden Sie Lemma 5.18, wobei Sie den Weg γ von 1 zu $z = re^{i\theta}$ so wählen, dass er zuerst zu r und von dort auf einem Kreisbogen zu z läuft.

Aufgabe 5.10. (Konvergenzradien) Seien $p, q : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ Polynomfunktionen und q nicht identisch 0, so dass die Menge $N := \{z \in \mathbb{C} : q(z) = 0\}$ der Nullstellen von q endlich ist. Wir nehmen weiter an, dass p und q keine gemeinsamen Linearfaktoren besitzen, so dass N keine Nullstellen von p enthält. Wir betrachten die holomorphe Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus N \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}.$$

Zeigen Sie: Für jeden Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ ist der Konvergenzradius der Taylorreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

von f in z_0 gegeben durch

$$R_{z_0} := \min\{|z_0 - w| : w \in N\}.$$

Hinweis: Für $w \in N$ ist $\lim_{z \rightarrow w} |f(z)| = \infty$.

Aufgabe 5.11. (Taylorreihen ganzer Funktionen) Zeigen Sie:

- (a) Ist $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, so wird f auf ganz $\mathbb{C}$ durch die Taylorreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

dargestellt.

- (b) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge komplexer Zahlen. Dann definiert $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ genau dann eine auf $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0.$$

6 Laurententwicklung und Residuensatz

In diesem Abschnitt wenden wir uns nun den Singularitäten holomorpher Funktionen zu. Hier werden wir holomorphe Funktionen auf Gebieten der Art $U = K_r(p) \setminus \{p\}$ (gelochte Kreisscheiben) betrachten. Das zentrale Ergebnis ist eine Klassifikation der Singularitäten in drei Typen: hebbare, Polstellen und wesentliche Singularitäten. Das Werkzeug, das wir hierzu verwenden, ist die Laurententwicklung holomorpher Funktionen auf Kreisingen. Sie verallgemeinert die Potenzreihenentwicklung holomorpher Funktionen auf offenen Kreisscheiben.

6.1 Isolierte Singularitäten

Definition 6.1. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $p \in U$. Ist $f: U \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, so heißt p *isolierte Singularität* von f in U .

- Gibt es eine holomorphe Funktion $g: U \rightarrow \mathbb{C}$ mit $g(z) = f(z)$ für alle $z \in U \setminus \{p\}$, so nennt man p eine *hebbare* Singularität.
- Ist p nicht hebbar, gibt es aber ein $k \in \mathbb{N}$, so dass p eine hebbare Singularität von $(z-p)^k f(z)$ ist, so nennt man p einen *Pol* von f . Ist p ein Pol von f , so heißt die kleinste Zahl k , für die $(z-p)^k f(z)$ eine hebbare Singularität in p hat, die *Polordnung* von f in p .
- Ist p weder hebbar noch ein Pol, so heißt p eine *wesentliche* Singularität.

Riemannscher Hebbbarkeitssatz

Satz 6.2. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $p \in U$ und $f: U \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Existiert eine Umgebung V von p , so dass f auf $V \setminus \{p\}$ beschränkt ist, so ist p eine hebbare Singularität.

Beweis. Ersetzen wir f durch $\tilde{f}(z) := f(p+z)$, so dürfen wir $p = 0$ annehmen. Wir dürfen ebenfalls annehmen, dass f in keiner 0-Umgebung identisch 0 ist, denn dann ist 0 trivialerweise hebbar.

Die Funktion

$$g: U \rightarrow \mathbb{C}, \quad g(z) := \begin{cases} z^2 f(z) & \text{für } z \neq 0 \\ 0 & \text{für } z = 0 \end{cases}$$

ist eine stetige und auf $U \setminus \{0\}$ holomorphe Funktion. Wegen

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{g(z) - g(0)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = 0$$

ist g sogar in 0 komplex differenzierbar mit $g'(0) = 0$, also holomorph auf U .

Da g auf keiner Nullumgebung verschwindet, erhalten wir mit Satz 5.12 ein $k \in \mathbb{N}$ und eine auf einer offenen 0-Umgebung V holomorphe Funktion $h: V \rightarrow \mathbb{C}^\times$ mit

$$h(0) \neq 0 \quad \text{und} \quad g(z) = z^k h(z) \quad \text{für alle } z \in V.$$

Wegen $0 = g'(0) = 0^{k-1} h(0)$ ist $k \geq 2$. Daher ist

$$f(z) = z^{k-2} h(z) \quad \text{für } z \in V \setminus \{0\}$$

und wir erhalten durch $\tilde{f}(0) := 0^{k-2} h(0)$ eine holomorphe Fortsetzung von f . Also ist 0 eine hebbare Singularität von f . $\square$

Beispiel 6.3. (a) Die holomorphe Funktion $f: \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) := \frac{\sin z}{z}$ hat in 0 eine hebbare Singularität, da 0 eine Nullstelle der Sinusfunktion ist (Satz 5.12).

(b) Die holomorphe Funktion $g: \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, $g(z) := \frac{z}{\sin z}$ besitzt in 0 eine hebbare Singularität und alle anderen Singularitäten sind Polstellen erster Ordnung, da die Nullstellen der Sinusfunktion einfach sind (Satz 5.12). Für die Nullstelle $z_k := k\pi$ der Sinusfunktion ist $\sin'(z_k) = \cos(z_k) \neq 0$, daher ist sie einfach. In einer Umgebung von z_k haben wir daher $\sin(z) = (z - z_k)h_k(z)$ für eine holomorphe Funktion h_k mit $h_k(z_k) \neq 0$. Für $k \neq 0$ hat

$$g(z)(z - z_k) = \frac{z}{h_k(z)}$$

daher in z_k eine hebbare Singularität und folglich ist z_k ein Pol erster Ordnung für g .

(c) Sind $g, h: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen auf dem Gebiet U und beide nicht identisch 0, so betrachten wir auf $U' := U \setminus h^{-1}(0)$ die holomorphe Funktion

$$f: U' \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) := \frac{g(z)}{h(z)}.$$

Ist $h(p) = 0$, so ist p eine isolierte Nullstelle von h und somit eine isolierte Singularität von f . Wir finden daher mit Satz 5.12 ein $k \in \mathbb{N}$ und eine auf einer offenen Umgebung V von p in U holomorphe Funktion $H: V \rightarrow \mathbb{C}^\times$, so dass $h(z) = (z - p)^k H(z)$ für $z \in V$ gilt. Ist $g(p) = 0$, so finden wir ebenfalls $m \in \mathbb{N}$ und eine auf einer offenen Umgebung $W \subseteq V$ von p holomorphe Funktion $G: W \rightarrow \mathbb{C}^\times$ mit $g(z) = (z - p)^m G(z)$ für $z \in W$. Ist $g(p) \neq 0$, so setzen wir $m = 0$ und $G = g$. Für $z \in W \setminus \{p\}$ haben wir dann

$$f(z) = \frac{G(z)}{H(z)}(z - p)^{m-k}.$$

Da $G(p)$ und $H(p)$ nicht 0 sind, können wir am Exponenten $m - k$ ablesen, welcher Typ von Singularität vorliegt. Für $m \geq k$ ist sie hebbar und für $m < k$ liegt ein Pol der Ordnung $k - m$ vor.

6.2 Laurententwicklung

Definition 6.4. (a) Eine *Laurentreihe* mit Entwicklungspunkt $p \in \mathbb{C}$ ist ein Ausdruck der Form

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - p)^n$$

mit komplexen Zahlen a_n .

(b) Eine Laurentreihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - p)^n$ *konvergiert in* z , wenn die beiden Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - p)^n \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - p)^{-n}$$

konvergieren. Der *Grenzwert* ist dann die Summe der beiden Grenzwerte.

(c) Sei R der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - p)^n$ und sei r' der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - p)^{-n}$. Man nennt R den *äußeren Konvergenzradius* und $r := 1/r' \in [0, \infty]$ den *inneren Konvergenzradius* der Laurentreihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - p)^n$.

Definition 6.5. Sei $0 \leq r < R \leq \infty$ und $p \in \mathbb{C}$. Dann heißt

$$K_{r,R}(p) := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - p| < R\}$$

der *Kreisring* um p mit *innerem Radius* r und *äußerem Radius* R .

Aus Lemma 5.4 folgt sofort:

Lemma 6.6. Die Laurentreihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-p)^n$ divergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-p| > R$ oder $|z-p| < r$. Die Reihe konvergiert auf dem Kreisring $K_{r,R}(p)$. Für $r < r' < R' < R$ konvergiert die Laurentreihe gleichmäßig auf $K_{r',R'}(p)$, d.h. beide Teilreihen konvergieren gleichmäßig.

Satz über die Laurententwicklung

Satz 6.7. Sei $K := K_{r,R}(p)$ ein offener Kreisring und $f: K \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann lässt sich f auf K in eine Laurentreihe entwickeln, d.h. es existieren $a_n \in \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(z-p)^n \quad \text{für alle } z \in K.$$

Die Koeffizienten sind dabei gegeben durch

$$a_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_s(p)} \frac{f(z)}{(z-p)^{n+1}} dz \quad \text{für jedes } s \in \mathbb{R} \quad \text{mit } r < s < R \quad \text{und } n \in \mathbb{Z}. \quad (27)$$

Die Reihendarstellung

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(z-p)^n$$

nennt man *Laurententwicklung von f auf K* .

Beweis. Ersetzen wir f durch $\tilde{f}(z) := f(z+p)$, so dürfen wir $p = 0$ annehmen. Sei nun $w \in K$ und $r < r' < |w| < R' < R$. Aus Satz 5.12 folgt die Existenz einer holomorphen Funktion $h: K \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f(z) - f(w) = (z-w)h(z) \quad \text{für } z \in K.$$

Aus dem Homotopiesatz 4.8 folgt dann

$$\int_{\partial K_{r'}(0)} \frac{f(z) - f(w)}{z-w} dz = \int_{\partial K_{r'}(0)} h(z) dz \stackrel{!}{=} \int_{\partial K_{R'}(0)} h(z) dz = \int_{\partial K_{R'}(0)} \frac{f(z) - f(w)}{z-w} dz. \quad (28)$$

Aus $r' < |w|$ folgt

$$\int_{\partial K_{r'}(0)} \frac{f(w)}{z-w} dz = 0$$

mit dem Cauchyschen Integralsatz, da der Integrand auf $K_{|w|}(0)$ holomorph ist. Weiter folgt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_{R'}(0)} \frac{f(w)}{z-w} dz = f(w)$$

aus der Cauchyschen Integralformel (Satz 4.13), angewandt auf die konstante Funktion $z \mapsto f(w)$. Damit erhalten wir durch Umstellen von (28) die folgende Integraldarstellung von f auf dem offenen Kreisring $K_{r',R'}(0)$:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\partial K_{R'}(0)} \frac{f(z)}{z-w} dz - \int_{\partial K_{r'}(0)} \frac{f(z)}{z-w} dz \right). \quad (29)$$

Für $|w| < |z| < R$ konvergiert die Reihe

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{w}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{z^{n+1}}$$

gleichmäßig auf $\partial K_{R'}(0)$. Für $r < |z| < |w|$ konvergiert die Reihe

$$-\frac{1}{z-w} = \frac{1}{w} \left(\frac{1}{1-\frac{z}{w}} \right) = \frac{1}{w} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{w^n} = \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{w^n}{z^{n+1}}$$

gleichmäßig auf $\partial K_{r'}(0)$. Wie im Beweis von Satz 5.7 schließen wir jeweils aus der gleichmäßigen Konvergenz dieser Reihen dass man sie gliedweise integrieren kann. Durch Einsetzen der Reihendarstellungen in (29) erhalten wir also

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n w^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n w^n$$

mit

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_{R'}(0)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \quad \text{für } n \geq 0$$

und

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_{r'}(0)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \quad \text{für } n < 0.$$

Mit dem Homotopiesatz sehen wir nun, dass beide Integrale auf jeder Kreislinie $\partial K_s(0)$ für $r < s < R$ denselben Wert liefern. Damit ist (27) gezeigt. $\square$

Ist $p \in U$ eine isolierte Singularität von $f: U \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{C}$, so können wir insbesondere die Laurententwicklung von f auf dem Kreisring $K_{0,R}(p) \subset U$ (mit geeignetem $R > 0$) betrachten: Es ist dann also

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-p)^n \quad \text{für } z \in K_{0,R}(p).$$

Aus der Laurententwicklung $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-p)^n$ auf einer gelochten Kreisscheibe $K_{0,R}(p)$ erhalten wir unmittelbar:

Folgerung 6.8. *Die isolierte Singularität p von f ist*

- (a) *hebbar, falls $a_n = 0$ für alle $n < 0$,*
- (b) *ein Pol der Ordnung $k \in \mathbb{N}$, falls $a_{-k} \neq 0$ und $a_n = 0$ für alle $n < -k$,*
- (c) *wesentlich, falls es unendlich viele negative n mit $a_n \neq 0$ gibt.*

Beweis. (a) Ist $a_n = 0$ für alle $n < 0$, so liefert $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-p)^n$ eine holomorphe Fortsetzung von f auf die gesamte Kreisscheibe $K_R(p)$ mit $F(p) = a_0$.

(b) Ist $f(z) = \sum_{n \geq -k} a_n (z-p)^n$ mit $a_{-k} \neq 0$, so definiert

$$F(z) := (z-p)^k f(z) = \sum_{n \geq -k} a_n (z-p)^{n+k}$$

auf $K_R(p)$ eine holomorphe Funktion mit $F(p) = a_{-k} \neq 0$. Weiter ist k minimal mit dieser Eigenschaft, denn für $m < k$ ist

$$(z-p)^m f(z) = (z-p)^{m-k} F(z),$$

wobei $|z-p|^{m-k} \rightarrow \infty$ für $z \rightarrow p$ gilt. Also besitzt f in p einen Pol der Ordnung k .

(c) In diesem Fall erhalten wir für kein $k \in \mathbb{Z}$ eine hebbare Singularität von

$$(z-p)^k f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-p)^{n+k},$$

da auf der rechten Seite immer Summanden mit negativem Exponenten auftreten und die Laurententwicklung eindeutig ist. Daher ist die Singularität von f in p wesentlich. $\square$

Mit dieser Folgerung sehen wir sofort Beispiele für wesentliche Singularitäten. Auf $\mathbb{C}^\times$ hat die holomorphe Funktion

$$f(z) := e^{z^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!}$$

z.B. eine wesentliche Singularität in 0, da die Laurentreihe unendlich viele Summanden mit negativem Exponenten enthält.

6.3 Der Satz von Casorati–Weierstraß

Satz 6.9. Ist $p \in U$ eine wesentliche Singularität der holomorphen Funktion $f: U \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{C}$, so ist $f(U \setminus \{p\})$ dicht in $\mathbb{C}$.

Beweis. Ist $f(U \setminus \{p\})$ nicht dicht, so gibt es ein $w \in \mathbb{C}$ und ein $\varepsilon > 0$, mit

$$K_\varepsilon(w) \cap f(U \setminus \{p\}) = \emptyset.$$

Dann definiert $\frac{1}{f(z)-w}$ eine beschränkte holomorphe Funktion auf $U \setminus \{p\}$. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz 6.2 lässt sich diese Funktion zu einer holomorphen Funktion $h: U \rightarrow \mathbb{C}$ fortsetzen. Nun hat h keine Nullstelle auf $U \setminus \{p\}$, ist also von der Form $h(z) = (z-p)^k j(z)$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$ und eine holomorphe Funktion $j: U \rightarrow \mathbb{C}$ mit $j(p) \neq 0$ (Satz 5.12). Dann hat

$$f(z) = \frac{1}{h(z)} + w = (z-p)^{-k} j(z)^{-1} + w$$

aber eine hebbare Singularität (für $k = 0$) oder einen Pol bei p (für $k > 0$), aber keine wesentliche Singularität, im Widerspruch zur Annahme. $\square$

6.4 Umlaufzahlen

In diesem Abschnitt werden wir einem Paar aus einem Weg γ in der komplexen Ebene und einem Punkt w die sogenannte Umlaufzahl $\text{Um}_\gamma(w)$ zuordnen. Wir werden sehen, dass diese Größe für geschlossene Wege ganzzahlig ist und zählt wie oft der Weg γ den Punkt w „umläuft“. Dieses Konzept stellt eine sehr fruchtbare Verbindung zwischen Funktionentheorie (Wegintegrale) und Topologie (Umlaufzahlen, Abbildungsgrad) her.

Definition 6.10. Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein Integrationsweg und $w \notin \text{im } \gamma$. Die *Umlaufzahl* von γ bezüglich w ist definiert durch

$$\text{Um}_\gamma(w) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z-w} dz.$$

Zunächst ist gar nicht klar, dass diese Zahlen für geschlossene Wege immer ganz sind. Um dies einzusehen, werden wir unten die komplexe Logarithmus-Funktion verwenden. Hat der Weg γ die Gestalt

$$\gamma = \gamma_{r,k}: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{w\}, \quad \gamma(t) = w + r e^{ikt}, k \in \mathbb{Z},$$

so berechnet man sofort

$$\text{Um}_\gamma(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-w} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{r i k e^{ikt}}{r e^{ikt}} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k dt = k \in \mathbb{Z}.$$

Andererseits folgern wir aus dem Homotopiesatz 4.8, dass in $\mathbb{C} \setminus \{w\}$ frei homotope geschlossene Wege die gleiche Umlaufzahl haben, aber noch nicht, dass alle geschlossenen Wege zu einem Weg der Gestalt $\gamma_{r,k}$ homotop sind. Diese Lücke werden wir jetzt schließen.

Satz 6.11. (Homotopieklassifikation von Wegen) *Sei $w \in \mathbb{C}$. Dann gilt:*

- (a) *Für jeden geschlossenen Integrationsweg $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{w\}$ ist $\text{Um}_\gamma(w) \in \mathbb{Z}$.*
- (b) *Sind $\gamma_0, \gamma_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{w\}$ zwei geschlossene Integrationswege, so sind sie genau dann frei homotop, wenn ihre Umlaufzahlen übereinstimmen.*

Beweis. (a) Sei zunächst $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{w\}$ ein geschlossener Integrationsweg und $\gamma(a) = w + e^c$ (eine solche komplexe Zahl c existiert, da $\gamma(a) \neq w$ ist). Für

$$\eta: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \eta(t) := c + \int_{\gamma|_{[a,t]}} \frac{dz}{z-w} = c + \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-w} ds$$

gilt dann $\eta'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-w}$ für jedes t , in dem γ differenzierbar ist (die Unterteilungspunkte muss man ausnehmen). Hieraus erhalten wir

$$\frac{d}{dt} ((\gamma(t) - w)e^{-\eta(t)}) = \gamma'(t)e^{-\eta(t)} + (\gamma(t) - w)e^{-\eta(t)} (-\eta'(t)) = \gamma'(t)e^{-\eta(t)} - \gamma'(t)e^{-\eta(t)} = 0.$$

Dies führt wegen $\eta(a) = c$ auf

$$(\gamma(t) - w)e^{-\eta(t)} = (\gamma(a) - w)e^{-\eta(a)} = (\gamma(a) - w)e^{-c} = 1,$$

so dass

$$\gamma(t) = w + e^{\eta(t)} \quad \text{für} \quad a \leq t \leq b$$

gilt. Für $t = b$ erhalten wir insbesondere aus $\gamma(a) = \gamma(b)$ die Beziehung $e^{\eta(b)} = e^{\eta(a)}$, also $\eta(b) - \eta(a) \in 2\pi i\mathbb{Z}$. Nun ist aber $\eta(b) - \eta(a) = 2\pi i \text{Um}_\gamma(w)$ und somit

$$\text{Um}_\gamma(w) \in \mathbb{Z}.$$

(b) Aus dem Homotopiesatz 4.8, wissen wir schon, dass in $\mathbb{C} \setminus \{w\}$ frei homotope geschlossene Wege die gleiche Umlaufzahl haben. Seien nun $\gamma_0, \gamma_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{w\}$ geschlossene Integrationswege mit der gleichen Umlaufzahl $\text{Um}_{\gamma_0}(w) = \text{Um}_{\gamma_1}(w)$. Wir definieren $\eta_j: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ für $j = 0, 1$ wie oben. Dies sind stückweise stetig differenzierbare Kurven mit

$$\eta_1(b) - \eta_1(a) = 2\pi i \text{Um}_{\gamma_1}(w) = 2\pi i \text{Um}_{\gamma_0}(w) = \eta_0(b) - \eta_0(a).$$

Nun ist

$$h: [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \quad h(t, s) := s\eta_1(t) + (1-s)\eta_0(t)$$

eine Homotopie von η_0 nach η_1 . Also ist

$$H(t, s) := w + e^{h(t,s)}$$

eine Homotopie von γ_0 nach γ_1 . Wegen

$$h(b, s) - h(a, s) = s(\eta_1(b) - \eta_1(a)) + (1-s)(\eta_0(b) - \eta_0(a)) = 2\pi i \text{Um}_{\gamma_1}(w) \in 2\pi i\mathbb{Z}$$

sind die Wege $t \mapsto H(t, s)$ alle geschlossen, so dass eine freie Homotopie geschlossener Wege vorliegt. $\square$

Da wir nun wissen, dass die Umlaufzahl ganzzahlig ist, können wir eine weitere Folgerung ableiten:

Folgerung 6.12. (Die Umlaufzahl als Funktion) Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein geschlossener Integrationsweg. Dann ist $U := \mathbb{C} \setminus \text{im}(\gamma)$ offen und

$$\text{Um}_\gamma: U \rightarrow \mathbb{Z}$$

ist eine stetige Funktion, insbesondere konstant auf jeder Zusammenhangskomponente von U . Weiter existiert ein $R > 0$, so dass $K_{>R}(0) := \{z \in \mathbb{C}: |z| > R\} \subseteq U$ ist und auf diesem Gebiet verschwindet Um_γ .

Beweis. Wir betrachten hier nur den Fall, dass γ ein C^1 -Weg ist. Für den allgemeinen Fall muss man die Integrale jeweils in endlich viele Summanden aufspalten. Aus der Formel

$$\text{Um}_\gamma(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{1}{z-w} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-w} dt$$

und aus der Stetigkeit des Integranden als Funktion von (t, w) in der Menge $[a, b] \times U$ folgt die Stetigkeit der Funktion Um_γ auf U ([Ana2, Satz 12.3.1]). Da sie Werte in $\mathbb{Z}$ annimmt, ist sie auf jeder Zusammenhangskomponente von U konstant.

Da $\text{im}(\gamma)$ eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist, ist sie insbesondere beschränkt und es existiert daher ein $R > 0$ mit $\text{im}(\gamma) \cap K_{>R}(0) = \emptyset$. Da $K_{>R}(0)$ zusammenhängend ist, ist Um_γ darauf konstant. Andererseits gilt für die Länge $L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$ und $|w| > R$ sowie $|\gamma(t)| \leq R$ die Abschätzung

$$|\gamma(t) - w| \geq |w| - |\gamma(t)| \geq |w| - R$$

und daher

$$\left| \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-w} dt \right| \leq \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{|\gamma(t)-w|} dt \leq \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{|w|-R} dt = \frac{L(\gamma)}{|w|-R}.$$

Hieraus folgt $\lim_{w \rightarrow \infty} \text{Um}_\gamma(w) = 0$. Da Um_γ auf der Menge $K_{>R}(0)$ ganzzahlig und konstant ist, ist $\text{Um}_\gamma(w) = 0$ für $|w| > R$. $\square$

Der folgende Satz ist ein wichtiges Hilfsmittel zur Berechnung der Umlaufzahlfunktion Um_γ auf dem Komplement der kompakten Menge $\text{im}(\gamma)$.

Satz 6.13. Sei $\eta: [0, 2\pi] \rightarrow \partial K$ der positiv orientierte Rand der offenen Kreisscheibe K und $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein geschlossener Integrationsweg, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (i) $\text{im}(\eta) \cap \text{im}(\gamma) = \{p, q\}$ mit $p = \eta(0)$.
- (ii) $\eta = \eta_1 \diamond \eta_2$, wobei η_1 der Teilweg von p nach q sowie η_2 der Teilweg von q nach p ist.
- (iii) $\gamma = \gamma_1 \diamond \gamma_2$, wobei γ_1 der Teilweg von p nach q sowie γ_2 der Teilweg von q nach p ist.
- (iv) $\text{im}(\gamma_2) \cap K = \emptyset$.
- (v) $\text{im}(\gamma_1) \cap K = \text{im}(\gamma_1) \setminus \{p, q\}$.
- (vi) $K \setminus \text{im}(\gamma) = K_1 \cup K_2$, wobei K_1 und K_2 disjunkte Gebiete sind und $\partial K_1 = \text{im}(\gamma_1) \cup \text{im}(\eta_1)$ sowie $\partial K_2 = \text{im}(\gamma_1) \cup \text{im}(\eta_2)$.

Dann gilt

$$\text{Um}_\gamma(w) = \text{Um}_\gamma(z) + 1 \quad \text{für } z \in K_1, w \in K_2.$$

Beweis. Sei $z \in K_1$ und $w \in K_2$.

(a) Wegen $z \in K_1$ liegt z in der unbeschränkten Komponente von $\mathbb{C} \setminus (\text{im}(\gamma_1 \diamond \eta_2))$. In der Tat ist das der Fall für alle Punkte $\neq p, q$ auf η_1 , die in ∂K_1 liegen, so dass diese Behauptung aus Korollar 6.12 folgt. Also gilt

$$\text{Um}_{\gamma_1}(z) + \text{Um}_{\eta_2}(z) = \text{Um}_{\gamma_1 \diamond \eta_2}(z) = 0. \quad (30)$$

(b) Wie in (a) folgt, dass der Punkt $w \in K_2$ in der unbeschränkten Komponente von $\mathbb{C} \setminus (\text{im}(\eta_1 \diamond \overline{\gamma_1}))$ liegt. Also gilt

$$\text{Um}_{\eta_1}(w) - \text{Um}_{\gamma_1}(w) = \text{Um}_{\eta_1 \diamond \overline{\gamma_1}}(w) = 0. \quad (31)$$

Mit (30) erhalten wir daher

$$\text{Um}_{\gamma_1}(w) - \text{Um}_{\gamma_1}(z) = \text{Um}_{\eta_1}(w) + \text{Um}_{\eta_2}(z). \quad (32)$$

(c) Aus $z, w \in K \subseteq \mathbb{C} \setminus \text{im}(\gamma_2 \diamond \eta_1)$ ergibt sich mit Korollar 6.12

$$\text{Um}_{\gamma_2}(z) + \text{Um}_{\eta_1}(z) = \text{Um}_{\gamma_2}(w) + \text{Um}_{\eta_1}(w),$$

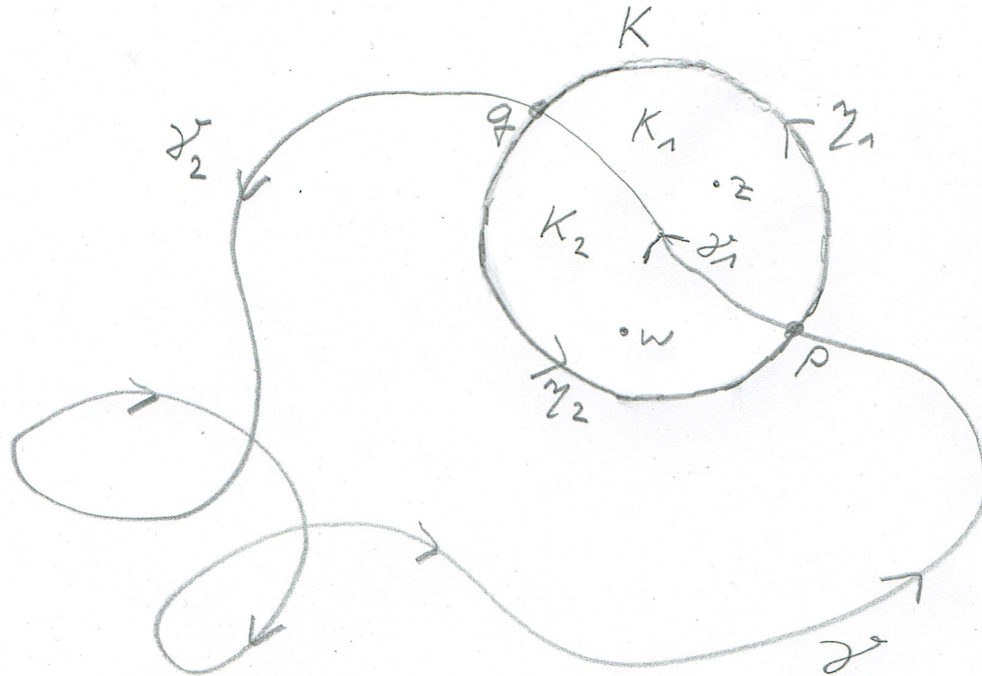
also

$$\text{Um}_{\gamma_2}(w) - \text{Um}_{\gamma_2}(z) = \text{Um}_{\eta_1}(z) - \text{Um}_{\eta_1}(w). \quad (33)$$

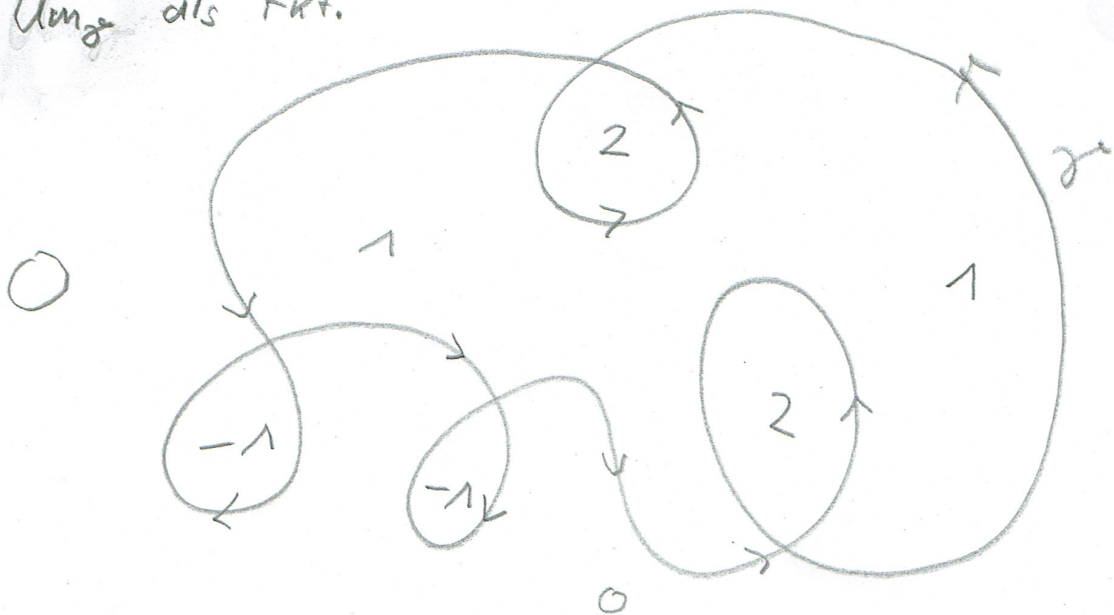
Kombination von (33) mit (32) führt schließlich zu

$$\begin{aligned} \text{Um}_{\gamma}(w) - \text{Um}_{\gamma}(z) &= \text{Um}_{\gamma_1}(w) + \text{Um}_{\gamma_2}(w) - \text{Um}_{\gamma_1}(z) - \text{Um}_{\gamma_2}(z) \\ &= (\text{Um}_{\gamma_1}(w) - \text{Um}_{\gamma_1}(z)) + (\text{Um}_{\gamma_2}(w) - \text{Um}_{\gamma_2}(z)) \\ &= \text{Um}_{\eta_1}(w) + \text{Um}_{\eta_2}(z) + \text{Um}_{\eta_1}(z) - \text{Um}_{\eta_1}(w) \\ &= \text{Um}_{\eta_1}(z) + \text{Um}_{\eta_2}(z) = \text{Um}_{\eta}(z) = 1. \end{aligned} \quad \square$$

Zu Satz 6.13.



Umgebung als Fkt.



6.5 Residuensatz

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $p \in U$ und $f: U \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion.

Definition 6.14. Sei $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-p)^n$ die Laurententwicklung von f bei der isolierten Singularität p . Dann heißt

$$\operatorname{Res}_p f := a_{-1}$$

das *Residuum von f bei p* .

Bemerkung 6.15. (a) Nach der Formel für die a_n im Satz 6.7 über die Laurententwicklung gilt

$$\operatorname{Res}_p f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_\varepsilon(p)} f(z) dz \quad (34)$$

für ausreichend kleine $\varepsilon > 0$, d.h., wenn $K_{\leq \varepsilon}(p) \subseteq U$ ist.

(b) Besitzt f in p einen Pol der Ordnung 1 oder eine hebbare Singularität, so erhalten wir sofort die folgende Formel für das Residuum

$$\operatorname{Res}_p(f) = \lim_{z \rightarrow p} (z-p)f(z), \quad (35)$$

denn $a_n = 0$ für $n < -1$. Ist g eine Funktion, die in einer Umgebung von p holomorph ist, so ergibt sich hieraus die nützliche Formel

$$\operatorname{Res}_p(gf) = g(p) \cdot \operatorname{Res}_p(f). \quad (36)$$

(c) Liegt in p ein Pol der Ordnung $k > 1$ vor, so wird durch

$$F(z) := (z-p)^k f(z) \quad \text{und} \quad F(0) := a_{-k} \neq 0$$

(wobei a_k die Laurentkoeffizienten sind) eine auf einer Umgebung von p holomorphe Funktion definiert und $a_{-1} = \operatorname{Res}_p(f)$ ist der Koeffizient von $(z-p)^{k-1}$ in der Taylorreihe von F in p . Damit erhalten wir die Formel

$$\operatorname{Res}_p(f) = \frac{F^{(k-1)}(p)}{(k-1)!},$$

die sich für $k = 1$ auf (35) spezialisiert.

Wir kommen nun zu einem der wichtigsten Sätze der Funktionentheorie:

Residuensatz

Satz 6.16. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $P \subset U$ eine endliche Teilmenge und $f: U \setminus P \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Sei γ ein geschlossener Weg in $U \setminus P$, der in U zusammenziehbar ist. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{p \in P} \operatorname{Um}_{\gamma}(p) \operatorname{Res}_p f.$$

Beweis. Sei $p \in P$ und $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-p)^n$ die Laurententwicklung von f um p . Dann ist

$$h_p(z) := \sum_{n \leq -2} a_n(z-p)^n$$

eine auf $\mathbb{C} \setminus \{p\}$ holomorphe Funktion, denn wir wissen schon, dass die Laurentreihe $h_p(z)$ auf einem Kreisring der Form $K_{0,R}(p)$ für ein $R > 0$ konvergiert. Der innere Konvergenzradius ist also

$r = 0$. Da die Laurentreihe keine Summanden mit positiven Exponenten besitzt, ist der äußere Konvergenzradius $R = \infty$, so dass die Reihe auf $K_{0,\infty}(p) = \mathbb{C} \setminus \{p\}$ lokal gleichmäßig konvergiert und daher eine holomorphe Funktion definiert.

Aus der Reihendarstellung von h_p erhalten wir sofort eine Stammfunktion

$$H_p(z) := \sum_{n \leq -2} \frac{a_n}{n+1} (z-p)^{n+1}.$$

Also verschwindet jedes Integral $\int_\gamma h_p(z) dz$. Die Funktion

$$F(z) := f(z) - \sum_{p \in P} h_p(z) - \sum_{p \in P} \frac{\text{Res}_p f}{z-p}$$

hat nun in allen $p \in P$ hebbare Singularitäten, lässt sich also zu einer holomorphen Funktion auf U fortsetzen. Nach dem Homotopiesatz 4.8 ist daher

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\gamma \left(f(z) - \sum_{p \in P} h_p(z) - \sum_{p \in P} \frac{\text{Res}_p f}{z-p} \right) dz = \int_\gamma f(z) dz - \sum_{p \in P} \text{Res}_p f \cdot \int_\gamma \frac{1}{z-p} dz \\ &= \int_\gamma f(z) dz - 2\pi i \sum_{p \in P} \text{Res}_p f \cdot \text{Um}_\gamma(p). \end{aligned} \quad \square$$

6.6 Anwendung auf reelle Integrale

In diesem Abschnitt sehen wir, wie sich der Residuensatz bei der Berechnung reeller Integrale verwenden lässt. Die Grundidee besteht darin, das reelle Integrationsintervall als Teil eines geschlossenen Integrationswegs in $\mathbb{C}$ aufzufassen für den man das Wegintegral durch den Residuensatz berechnen kann. So lassen sich insbesondere bestimmte Integrale berechnen, bei denen für den Integranden keine explizite Formel für eine Stammfunktion bekannt ist. Die Kunst bei dieser Methode ist nun, in einem geeigneten Gebiet in $\mathbb{C}$ eine holomorphe Fortsetzung des Integranden zu betrachten, so dass sich der Residuensatz anwenden lässt. Für uneigentliche Integrale muss man hierbei insbesondere voraussetzen, dass die holomorphe Fortsetzung im Unendlichen genügend schnell verschwindet.

Satz 6.17. *Sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$, die die abgeschlossene obere Halbebene*

$$\overline{\mathbb{C}_+} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z \geq 0\}$$

umfasst. Sei $P \subset U$ eine endliche Menge mit $P \cap \mathbb{R} = \emptyset$. Weiter sei $f: U \setminus P \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Wir nehmen an, dass das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ existiert und dass

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$$

gilt. Dann ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{w \in P, \text{Im } w > 0} \text{Res}_w f.$$

Beweis. Für ausreichend große $r > 0$ gilt $P \subset K_r(0)$. Sei $\delta_r: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\delta_r(t) = r e^{it}$, der Weg von $+r$ nach $-r$ auf einem Halbkreisbogen in der oberen Halbebene. Dann erhalten wir

$$\int_{-r}^r f(x) dx + \int_{\delta_r} f(z) dz = 2\pi i \sum_{w \in P, \text{Im } w > 0} \text{Res}_w f$$

aus dem Residuensatz, denn für den Weg $\gamma := \delta_r \diamond [-r, r]$ und $w \in P$ gilt $\text{Um}_\gamma(w) = 0$ für $\text{Im } w < 0$ und $\text{Um}_\gamma(w) = 1$ für $\text{Im } w > 0$ (Satz 6.13). Nach der Standardabschätzung ist

$$\left| \int_{\delta_r} f(z) dz \right| \leq \pi r C(r) \quad \text{mit} \quad C(r) := \sup_{|z|=r} |f(z)|.$$

Wegen $\lim_{r \rightarrow \infty} r C(r) = 0$ (nach Voraussetzung) folgt die Behauptung. $\square$

Bemerkung 6.18. Wir erinnern uns daran, dass rationale Funktionen

$$r(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m}$$

auf dem Komplement der Nullstellenmenge des Polynoms q eine holomorphe Funktion definieren (Lemma 2.6). Ist $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ eine rationale Funktion (also q nicht konstant 0) und $U = \mathbb{C}$ sowie $P := q^{-1}(0)$ die endliche Menge der Nullstellen von q , so sind die Voraussetzungen von Satz 6.17 insbesondere dann erfüllt, wenn

$$\deg(q) = m \geq n + 2 = \deg(p) + 2 \quad \text{und} \quad P \cap \mathbb{R} = \emptyset$$

gelten. In der Tat erhalten wir für $a_n, b_m \neq 0$:

$$R(z) = z^{n-m} \tilde{R}(z) = z^{n-m} \frac{a_0 z^{-n} + a_1 z^{1-n} + \cdots + a_n}{b_0 z^{-m} + b_1 z^{1-m} + \cdots + b_m}$$

mit $\lim_{z \rightarrow \infty} \tilde{R}(z) = \frac{a_n}{b_m} \neq 0$, so dass sich die Behauptung für $m - n \geq 2$ ergibt.

Beispiel 6.19. Für $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\pi i \text{Res}_i(f),$$

denn $\pm i$ sind die Nullstellen des Nenners und nur i liegt in der oberen Halbebene. Wegen

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)(z-i)}$$

folgt $\text{Res}_i(f) = \frac{1}{2i}$ aus Bemerkung 6.15(b). Damit ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi,$$

was mit der bekannten Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{r \rightarrow \infty} \arctan(r) - \arctan(-r) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi,$$

die man durch die Stammfunktion $\arctan$ erhält, verträglich ist.

Satz 6.20. (Integrale periodischer Funktionen) *Seien $p, q \in \mathbb{R}[x, y]$ reelle Polynomfunktionen auf $\mathbb{R}^2$, q nicht konstant 0, und*

$$r: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}, \quad r(x, y) := \frac{p(x, y)}{q(x, y)} \quad \text{für} \quad q(x, y) \neq 0$$

die zugehörige rationale Funktion. Besitzt das Polynom Q keine Nullstelle auf dem Einheitskreis $\partial K_1(0)$, so gilt

$$\int_0^{2\pi} r(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi = 2\pi \sum_{w \in K_1(0)} \operatorname{Res}_w(\tilde{r}),$$

wobei

$$\tilde{r}(z) := \frac{1}{z} r\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right).$$

Beweis. Wir setzen $z = e^{i\varphi}$. Dann gilt $\cos(\varphi) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ und $\sin \varphi = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$, also

$$\int_0^{2\pi} r(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi = \frac{1}{i} \int_{\partial K_1(0)} r\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \frac{dz}{z} = \frac{1}{i} \int_{\partial K_1(0)} \tilde{r}(z) dz.$$

Hieraus folgt die Behauptung mit dem Residuensatz, da der rationale Integrand auf $\partial K_1(0)$ keine Singularität besitzt und im Innern des Einheitskreises höchstens endliche Singularitäten vorliegen. $\square$

Beispiel 6.21. Für $a > 1$ möchten wir das Integral

$$\int_0^\pi \frac{dt}{a + \cos t} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \cos t}$$

berechnen. Hierzu betrachten wir die rationale Funktion $r(x, y) = \frac{1}{a+x}$ auf $\mathbb{R}^2$, die zur komplexen rationalen Funktion

$$\tilde{r}(z) = \frac{1}{z} \frac{1}{a + \frac{1}{2}\left(z + z^{-1}\right)} = \frac{2}{z^2 + 2az + 1}$$

führt. Die Nullstellen des Nenners sind die beiden reellen Zahlen

$$z_{1/2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}.$$

Nun ist $z_2 < -1 < -1$ nicht in $K_1(0)$. Weiter ist $z_1 < 0$, da $a^2 - 1 < a^2$ ist. Es ist aber auch

$$-1 < z_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1},$$

da $(a-1)^2 < a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$ gilt. Also ist $z_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1}$ in $K_1(0)$. Aus $z^2 + 2az + 1 = (z - z_1)(z - z_2)$ ergibt sich nun

$$\operatorname{Res}_{z_1}(\tilde{r}) = 2 \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{z - z_1}{(z - z_1)(z - z_2)} = \frac{2}{z_1 - z_2} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

und damit wegen Satz 6.20

$$\int_0^\pi \frac{dt}{a + \cos t} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \cos t} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

Aufgaben zu Kapitel 6

Aufgabe 6.1. Sei $w \in \mathbb{C}$, $\eta: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stückweise stetig differenzierbar und

$$\gamma(t) = w + e^{2\pi i \eta(t)}. \quad (37)$$

Zeigen Sie:

- (i) γ ist genau dann geschlossen, wenn $\eta(b) - \eta(a) \in \mathbb{Z}$ ist.

- (ii) Ist γ geschlossen, so ist $\text{Um}_\gamma(w) = \eta(b) - \eta(a)$.
- (iii) Jeder stückweise stetig differenzierbare Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{w\}$ lässt sich wie in (37) darstellen.

Aufgabe 6.2. Sei $w \in \mathbb{C}$ und $\gamma_0, \gamma_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{w\}$ zwei geschlossene Integrationswege. Zeigen Sie, dass γ_0 und γ_1 genau dann homotop sind (ohne feste Endpunkte), wenn ihre Umlaufzahlen übereinstimmen. Hinweis: Verwenden Sie die Darstellung aus Aufgabe 6.1, um eine Homotopie der Gestalt $H(t, s) = w + e^{h(t, s)}$ zu konstruieren, für die alle Kurven $H_s(t) := H(t, s)$ geschlossen sind.

Aufgabe 6.3. Sei U ein Gebiet und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen für ein Gebiet $U \subseteq \mathbb{C}^\times$ äquivalent sind:

- (a) Die Funktion $q(z) = \frac{1}{z}$ besitzt auf U eine Stammfunktion.
- (b) Auf U existiert eine Logarithmusfunktion.
- (c) Für jeden geschlossenen Integrationsweg γ in U gilt $\text{Um}_\gamma(0) = 0$.

Hinweis: Satz 3.17.

7 Konforme Abbildungen

In diesem Abschnitt reisen wir nur kurz die Thematik der konformen Abbildungen zwischen Gebieten der komplexen Ebene an. Ein zentrales Ergebnis dieser Theorie, das im zweiten Teil der Vorlesung bewiesen wird, ist der

Riemannsche Abbildungssatz

Theorem 7.1. Zu einem echten Teilgebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ existiert genau dann eine biholomorphe Abbildung $f: G \rightarrow E := K_1(0)$ auf die Einheitskreisscheibe E , wenn G einfach zusammenhängend ist.

Aufgrund des Riemannschen Abbildungssatzes spielt der Einheitskreis E eine besondere Rolle als Prototyp eines einfach zusammenhängenden Gebiets in $\mathbb{C}$. Wir interessieren uns daher insbesondere für die Gruppe $\text{Aut}(E)$ der biholomorphen Abbildungen von E auf sich.

7.1 Das Schwarzsche Lemma

Wir bezeichnen im folgenden mit

$$E := K_1(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

die offene Einheitskreisscheibe.

Schwarzsches Lemma

Lemma 7.2. Sei $f: E \rightarrow E$ eine holomorphe Funktion mit $f(0) = 0$. Dann gilt:

- (a) Für alle $z \in E$ ist $|f(z)| \leq |z|$,
- (b) $|f'(0)| \leq 1$,
- (c) Gilt $|f(z)| = |z|$ für ein $z \in E$, $z \neq 0$, oder gilt $|f'(0)| = 1$, so ist f eine Drehung, d.h. es gibt ein $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $|\zeta| = 1$ und $f(z) = \zeta z$ für alle $z \in E$.

Beweis. Nach dem Satz über das Abspalten von Linearfaktoren in Nullstellen (Satz 5.12), wird durch

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & \text{für } z \neq 0 \\ f'(0) & \text{für } z = 0 \end{cases}$$

eine holomorphe Funktion $g: E \rightarrow \mathbb{C}$ definiert. Wir zeigen nun $|g(z)| \leq 1$, woraus (a) und (b) folgen.

Für jedes $r \in (0, 1)$ folgt

$$|g(z)| \leq \sup_{|w|=r} |g(w)|,$$

aus dem Maximumprinzip (Satz 5.29), da die stetige Funktion $z \mapsto |g(z)|$ auf der kompakten Kreisscheibe $K_{\leq r}(0)$ ihr Maximum auf dem Rand annehmen muss. Sei nun $\varepsilon > 0$ und $\frac{1}{1+\varepsilon} < r < 1$. Wegen $|f(z)| \leq 1$ für alle $z \in E$ gilt dann

$$|g(z)| \leq \frac{1}{r} < 1 + \varepsilon \quad \text{für } r \leq |z| < 1.$$

Mit der Vorüberlegung von oben erhalten wir $|g(z)| \leq 1 + \varepsilon$ für alle $z \in E$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, gilt $|g(z)| \leq 1$ für alle $z \in E$. Hieraus folgen (a) und (b).

Ist $|g(z)| = 1$ für ein $z \in E$, so nimmt g also ein Maximum an, muss also nach dem Maximumprinzip (Satz 5.29) konstant sein $g(z) = \zeta$ mit $|\zeta| = 1$. Dann ist $f(z) = \zeta z$ eine Drehung. $\square$

Satz 7.3. Die Gruppe $\text{Aut}(E)$ der biholomorphen Selbstabbildungen von E besteht aus den gebrochen rationalen Abbildungen der Form

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{\bar{a}z - 1} \quad \text{für } |a| < 1, \theta \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Sei zuerst $a \in E$ und

$$f_a(z) := \frac{z - a}{\bar{a}z - 1}.$$

Für $|z| < 1$ ist $|\bar{a}z| < 1$, so dass der Nenner in $\bar{a}z - 1$ keine Nullstellen besitzt. Für $|z| = 1$ ist

$$|f_a(z)| = \frac{|z - a|}{|\bar{a}z - 1|} = \frac{|z - a|}{|\bar{a} - \bar{z}|} = \frac{|z - a|}{|a - z|} = 1.$$

Also folgt $|f_a(z)| < 1$ für $z \in E$ aus dem Maximumprinzip. Daher ist $f_a(E) \subset E$. Nun verifiziert man durch Nachrechnen $f_a \circ f_a = \text{id}_E$. Daher ist $f_a: E \rightarrow E$ bijektiv und selbstinvers, insbesondere also $f_a \in \text{Aut}(E)$. Wir haben

$$f_a(a) = 0 \quad \text{und} \quad f_a(0) = a.$$

Ist nun $f \in \text{Aut}(E)$ beliebig und $a := f^{-1}(0)$, so ist $g := f \circ f_a \in \text{Aut}(E)$ mit $g(0) = 0$. Nach dem Lemma von Schwarz ist also $|g(z)| \leq |z|$ für alle $z \in E$. Für die Umkehrabbildung gilt ebenfalls $|g^{-1}(z)| \leq |z|$, also $|g(z)| = |z|$ für alle $z \in E$. Das Lemma von Schwarz zeigt daher, dass g eine Drehung ist, also $g(z) = e^{i\theta} z$ für ein $\theta \in \mathbb{R}$. Daher ist $f = g \circ f_a$ wie behauptet. $\square$

7.2 Konforme Abbildungen

Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ das Euklidische Skalarprodukt.

Definition 7.4. Eine $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt

- (a) *orientierungstreu*, wenn die Determinante von T positiv ist.

(b) *winkeltreu*, wenn T den Winkel zwischen zwei Vektoren erhält, wenn also für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\|T(x)\| \cdot \|T(y)\| \langle x, y \rangle = \|x\| \cdot \|y\| \langle T(x), T(y) \rangle$$

gilt. Ist T injektiv und $x, y \neq 0$, so lässt sich diese Relation auch wie folgt schreiben:

$$\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} = \frac{\langle T(x), T(y) \rangle}{\|T(x)\| \cdot \|T(y)\|}$$

und diese Ausdrücke entsprechen jeweils dem Kosinus des eingeschlossenen Winkels.

Bemerkung 7.5. Für $n = 2$ sind die orientierungs- und winkeltreuen linearen Abbildungen T genau die *Drehstreckungen*, also genau die Abbildungen, die unter der Identifikation von $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ der Multiplikation mit einer komplexen Zahl entsprechen.⁵

Definition 7.6. Seien $U, U' \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine differenzierbare Funktion $f: U \rightarrow U'$ heißt *konforme Abbildung*, falls sie bijektiv ist und an jedem Punkt $a \in U$ die Abbildung

$$df(a): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

orientierungs- und winkeltreu ist.

Satz 7.7. Für offene Teilmengen $U, U' \subset \mathbb{C}$ ist eine bijektive Abbildung $f: U \rightarrow U'$ genau dann konform, wenn sie biholomorph ist. Insbesondere ist f^{-1} dann ebenfalls konform.

Beweis. Nach Satz 2.11 ist f genau dann konform, wenn f holomorph ist. Nach Satz 5.30 ist die Umkehrabbildung $f^{-1}: U' \rightarrow U$ ebenfalls holomorph, also auch konform. $\square$

Literatur

- [Ana1] Neeb, K.-H., “Analysis 1”, Vorlesungsskript, WS 2019/20
- [Ana2] Neeb, K.-H., “Analysis 2”, Vorlesungsskript, SS 2020
- [BF06] Busam, R., und E. Freitag, “Funktionentheorie I”, Springer, 2006
- [FL83] Fischer, W., und I. Lieb, “Funktionentheorie,” Vieweg Studium **47**, Vieweg Verlag, 1983
- [Ja80] Jänich, K., “Einführung in die Funktionentheorie,” 2. Auflage, Hochschultext, Springer, 1980
- [La99] Lang, S., “Complex Analysis”, Graduate Texts in Math. **103**, Springer, 1999

⁵Es ist klar, dass Drehungen und Streckungen Winkel und Orientierung erhalten. Da man jeden Vektor $0 \neq z \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ durch eine Drehstreckung auf 1 abbilden kann, müssen wir daher nur winkel- und orientierungstreue Abbildungen T mit $T(1) = 1$ betrachten. Wegen der Winkeltreue ist dann jeder Vektor $e^{i\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von T . Damit ist aber $T \in \mathbb{R} \text{id}$ und somit $T = \text{id}$ wegen $T(1) = 1$.