Skript zur Vorlesung LIE-ALGEBREN

im SS 02 an der TUD

Karl – Hermann Neeb

Inhalt

Lie-Algebren

I. Elementare Konstruktionen und Begriffe

In diesem Abschnitt werden wir uns mit dem Begriff der Lie-Algebra vertraut machen und sogleich sehen, daß Lie-Algebren in vielen Bereichen sehr natürlich auftreten. Durch die Kommutatorklammer trägt jede assoziative Algebra eine Lie-Algebra-Struktur, und für jede (nicht notwendigerweise assoziative) Algebra ist der Raum der Derivationen eine Lie-Algebra. Darüber hianaus liefern Lie-Algebren von Vektorfeldern und Poisson-Klammern weitere wichtige Beispiele. Im zweiten Abschnitt werden wir sehen, wie man viele Konzepte aus der Gruppentheorie auf Lie-Algebren übertragen kann. Hier werden insbesondere direkte und semidirekte Summen sowie Ideale und Quotienten diskutiert. In einem dritten Abschnitt werden wir kurz diskutieren, in welchem Sinn Lie-Algebren "abgeleitete Gruppen" sind.

In diesem Kapitel steht $\mathbb{K}$ für einen beliebigen Körper. Alle auftretenden Vektorräume sind Vektorräume über $\mathbb{K}$.

I.1. Lie-Algebren, assoziative Algebren und Derivationen

Lie-Algebren und assoziative Algebren

Definition I.1.1. (a) Eine *Algebra* A ist ein Vektorraum A, der mit einer bilinearen Abbildung

$$A \times A \to A, \quad (x,y) \mapsto x \cdot y,$$

der *Multiplikation der Algebra*, versehen ist.
(b) Eine Algebra A heißt *assoziativ*, wenn $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ für alle $x, y, z \in A$ gilt.

(c) Sei $\mathfrak{g}$ ein Vektorraum. Eine bilineare Abbildung

$$[\cdot,\cdot]\colon \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}, \quad (x,y)\mapsto [x,y]$$

heißt *Lie-Klammer*, wenn für alle $x,y,z\in\mathfrak{g}$ gilt:

(L1) $[x,x]=0$ und

(L2) $\big[x,[y,z]\big]+\big[y,[z,x]\big]+\big[z,[x,y]\big]=0$ (Jacobi-Identität) [1].

Ist $[\cdot,\cdot]$ eine Lie-Klammer auf $\mathfrak{g}$, so heißt das Paar $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot])$ eine *Lie-Algebra* [2] [3]. Hierbei lassen wir allerdings die Angabe der Lie-Klammer oft weg und sprechen von A als einer Lie-Algebra. ■

Aus (L1) folgt für $x,y\in\mathfrak{g}$ die Beziehung

$$0=[x+y,x+y]=[x,x]+[y,x]+[x,y]+[y,y]=[y,x]+[x,y],$$

also

$$[x,y]=-[y,x]. \tag{1.1}$$

Ist (1.1) erfüllt, so erhalten wir für $x=y$ die Beziehung $2[x,x]=0$, also (L1), falls $\operatorname{char}\mathbb{K}\neq 2$ ist.

Lemma I.1.2. *Ist A eine assoziative Algebra und definiert man die Kommutatorklammer durch $[x,y]:=x\cdot y-y\cdot x$, so ist $A_L:=(A,[\cdot,\cdot])$ eine Lie-Algebra.*

Beweis. Die Bedingung (L1) folgt sofort aus $[x,x]=x^2-x^2=0$. Für die Jacobi-Identität rechnen wir

$$\big[x,[y,z]\big]=x(yz-zy)-(yz-zy)x=xyz-xzy-yzx+zyx,$$

woraus sich

$$\begin{aligned}&\big[x,[y,z]\big]+\big[y,[z,x]\big]+\big[z,[x,y]\big]\\ &=(xyz-xzy-yzx+zyx)+(yzx-yxz-zxy+xzy)\\ &\quad+(zxy-zyx-xyz+yxz)=0\end{aligned}$$

ergibt. ■

Wir nennen die Lie-Algebra A_L die zu der assoziativen Algebra A *assoziierte Lie-Algebra.* Ist A eine kommutative assoziative Algebra, so ist $[x,y]=0$ für alle $x,y\in A_L$. Man nennt eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ mit $[x,y]=0$ für alle $x,y\in\mathfrak{g}$ *abelsch.*

---

[1] Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851), Mathematiker in Berlin und Königsberg (Kaliningrad). Er fand die berühmte Identität um 1830 im Kontext von Poisson-Klammern, die in der Hamiltonschen Mechanik auftreten.

[2] Marius Sophus Lie (1842–1899), norwegischer Mathematiker in Kristiania (Oslo) und Leipzig. Begründer der Theorie der Lieschen Transformationsgruppen, aus denen sich später das heutige Konzept der Lie-Gruppen entwickelte.

[3] Der Terminus Lie-Algebra wurde in den 1920er Jahren von Hermann Weyl zum ersten Mal, auf Vorschlag von N. Jacobson, verwendet. Bei Sophus Lie traten in erster Linie Lie-Algebren von Vektorfeldern auf, die er als infinitesimale Transformationsgruppen auffaßte. Der Terminus "Lie-Gruppe" tritt zuerst in den 1930er Jahren bei E. Cartan auf.

Beispiel I.1.3. (a) Ist V ein Vektorraum, so ist $\mathfrak{gl}(V) := \mathrm{End}(V)_L$ eine Lie-Algebra bzgl. $[x,y] = x \circ y - y \circ x$.
(b) Ist V eine Vektorraum, so wird durch $[v,w] := 0$ für $v, w \in V$ trivialerweise eine Lie-Klammer auf V definiert. In diesem Sinne fassen wir Vektorräume als abelsche Lie-Algebren auf. ■

Definition I.1.4. Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra.
(a) Sind $U, V \subseteq \mathfrak{g}$ Teilmengen, so setzen wir

$$[U,V] := \mathrm{span}\{[x,y]: x \in U, y \in V\}.$$

(b) Ein Untervektorraum $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ heißt *Unteralgebra* (*Ideal*), wenn $[\mathfrak{a},\mathfrak{a}] \subseteq \mathfrak{a}$ ($[\mathfrak{g},\mathfrak{a}] \subseteq \mathfrak{a}$) ist. Wir schreiben $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{g}$, wenn $\mathfrak{a}$ eine Unteralgebra ist, und $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$, wenn $\mathfrak{a}$ ein Ideal ist.
(c) Der Raum $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ heißt *Kommutatoralgebra von* $\mathfrak{g}$. Dies ist ein Ideal von $\mathfrak{g}$ (Nachweis!). ■

Es ist klar, daß jede Unteralgebra $\mathfrak{a}$ bzgl. der Einschränkung der Lie-Klammer von $\mathfrak{g}$ ebenfalls eine Lie-Algebra ist. Wir können nun aus Beispiel I.1.3 viele weitere Beispielklassen generieren.

Beispiel I.1.5. (a) Wir schreiben $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ für die assoziative Algebra der $(n \times n)$-Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{K}$ und $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K}) := \mathbb{M}(n,\mathbb{K})_L$ für die zugehörige Lie-Algebra, die *allgemeine lineare Lie-Algebra der Ordnung* n.
(b) Die Lie-Algebra

$$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K}) := \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K}): \mathrm{tr}\, X = 0\}$$

heißt die *spezielle lineare Lie-Algebra der Ordnung* n. Daß $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})$ eine Lie-Algebra ist, folgt aus

$$\mathrm{tr}([X,Y]) = \mathrm{tr}(XY - YX) = \mathrm{tr}(XY) - \mathrm{tr}(YX) = \mathrm{tr}(XY) - \mathrm{tr}(XY) = 0$$

für alle $X, Y \in \mathbb{M}(n,\mathbb{K})$. Es ist klar, daß $\dim \mathfrak{sl}(n,\mathbb{K}) = n^2 - 1$ ist.

Schreiben wir E_{jk} für die Matrix, die an der Stelle (j,k) den Eintrag 1 hat und sonst nur Nullen, so erhalten wir

$$[E_{jk}, E_{lm}] = \delta_{kl} E_{jm} - \delta_{jm} E_{lk}. \tag{1.2}$$

Hieraus leitet man

$$[\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K}), \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})] = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})$$

ab (Übung).
(c) Sei V ein Vektorraum und $\beta: V \times V \to \mathbb{K}$ eine bilineare Abbildung. Dann ist die Menge

$$\mathfrak{o}(V,\beta) := \{X \in \mathrm{End}(V): (\forall v, w \in V)\ \beta(X.v, w) + \beta(v, X.w) = 0\}$$

der β-schiefsymmetrischen Endomorphismen eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$ (Nachweis als Übung).

(d) Ist $V = \mathbb{K}^n$ und

$$\beta(x,y) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \quad \text{für} \quad x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n),$$

so ist β symmetrisch, d.h. es gilt $\beta(x,y) = \beta(y,x)$ für alle $x, y \in V$. In diesem Fall schreiben wir $\mathfrak{o}(n,\mathbb{K}) := \mathfrak{o}(V,\beta)$. Diese Lie-Algebra heißt *orthogonale Lie-Algebra der Ordnung* n. Identifizieren wir $\mathrm{End}(V)$ mit dem Raum $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ der $(n \times n)$-Matrizen (bzgl. der kanonischen Basis von $\mathbb{K}^n$), so besteht $\mathfrak{o}(n,\mathbb{K})$ aus den schiefsymmetrischen Matrizen (Übung). Hieraus ergibt sich für $\mathrm{char}\,\mathbb{K} \neq 2$ insbesondere

$$\dim \mathfrak{o}(n,\mathbb{K}) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Aus Gründen, die in der Gruppentheorie liegen, hat es sich eingebürgert, die Lie-Algebra $\mathfrak{o}(n,\mathbb{K})$ auch mit $\mathfrak{so}(n,\mathbb{K})$ zu bezeichnen. Das ist durch

$$\mathfrak{so}(n,\mathbb{K}) = \mathfrak{o}(n,\mathbb{K}) \cap \mathfrak{sl}(n,\mathbb{K}) = \mathfrak{o}(n,\mathbb{K})$$

gerechtfertig, denn im Fall $\mathrm{char}\,\mathbb{K} \neq 2$ gilt $\mathrm{tr}\,X = 0$ für jede schiefsymmetrische Matrix.

(e) Ist $V = \mathbb{K}^{2n}$ und

$$\beta(x,y) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_{n+j} - x_{n+j} y_j,$$

so ist β schiefsymmetrisch, d.h. es gilt $\beta(x,y) = -\beta(y,x)$ für alle $x, y \in V$. In diesem Fall schreiben wir $\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{K}) := \mathfrak{o}(V,\beta)$. Diese Lie-Algebra heißt *symplektische Lie-Algebra der Ordnung* n.

Um $\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{K})$ expliziter zu beschreiben, schreiben wir

$$\beta(v,w) = v^\top J w \quad \text{mit} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{pmatrix},$$

wobei wir $(2n \times 2n)$-Matrizen entsprechend der Zerlegung $\mathbb{K}^{2n} \cong \mathbb{K}^n \oplus \mathbb{K}^n$ als (2×2)-Blockmatrizen schreiben. Für $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathfrak{sp}(2n,\mathbb{K})$ ergibt sich so die Bedingung

$$0 = \beta(X.v, w) + \beta(v, X.w) = v^\top (X^\top J + JX) w,$$

also

$$\begin{aligned} 0 = X^\top J + JX &= \begin{pmatrix} A^\top & C^\top \\ B^\top & D^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -C^\top & A^\top \\ -D^\top & B^\top \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C & D \\ -A & -B \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

d.h.

$$A = -D^\top, \quad B = B^\top \quad \text{und} \quad C = C^\top.$$

Damit ergibt sich für die Dimension

$$\dim \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{K}) = n^2 + 2\frac{n(n+1)}{2} = 2n^2 + n.$$

(f) Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Ein Tupel $\mathcal{F} = (V_0, \ldots, V_n)$ von Untervektorräumen mit

$$\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \ldots \subseteq V_n = V$$

nennt man eine *Fahne* in V. Dann ist

$$\mathfrak{g}(\mathcal{F}) := \{X \in \mathfrak{gl}(V) \colon (\forall j) X.V_j \subseteq V_j\}$$

eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V) = \mathrm{End}(V)_L$ ($\mathfrak{g}(\mathcal{F})$ ist sogar eine assoziative Unteralgebra von $\mathrm{End}(V)$).

Wir wollen uns diese Lie-Algebra veranschaulichen. Hierzu führen wir eine Methode ein, die wir in dieser Vorlesung wiederholt benötigen werden, um uns gewisse Konstruktionen durch Matrizen zu veranschaulichen. Ist V ein Vektorraum, der eine direkte Summe $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_n$ von Unterräumen W_j, $j = 1, \ldots, n$, ist, so schreiben wir einen Endomorphismus $A \in \mathrm{End}(V)$ als eine $(n \times n)$-Blockmatrix

$$A = (A_{jk})_{j,k=1,\ldots,n} = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

wobei $A_{jk} \in \mathrm{Hom}(W_k, W_j)$ dadurch eindeutig bestimmt ist, daß das Bild eines Elements $v = (v_1, \ldots, v_n) \in V$ gegeben ist durch

$$A.v = \Big(\sum_{k=1}^n A_{jk}.v_k\Big)_{j=1,\ldots,n}.$$

Um mit dieser Methode ein Bild der Lie-Algebra $\mathfrak{g}(\mathcal{F})$ zu bekommen, wählen wir jeweils in V_j einen Unterraum W_j, so daß $V_j \cong V_{j-1} \oplus W_j$ ist. Für jeds j ist dann $V_j \cong W_1 \oplus \ldots \oplus W_j$ und insbesondere $V \cong W_1 \oplus \ldots \oplus W_n$. Die Elemente von $\mathfrak{g}(\mathcal{F})$ sind nun gegeben durch die oberen Dreiecksmatrizen:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & & \cdots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{nn} \end{pmatrix}. \qquad \blacksquare$$

Derivationen

Definition I.1.6. Sei A eine Algebra und $\mathrm{End}(A)$ der Raum der Vektorraumendomorphismen von A. Eine lineare Abbildung $D \in \mathrm{End}(A)$ heißt *Derivation*, wenn

$$D(x \cdot y) = D(x) \cdot y + x \cdot D(y) \quad \text{für alle } x, y \in A$$

gilt. Wir schreiben $\mathrm{der}(A)$ für die Menge der Derivationen von A. Es ist klar, daß $\mathrm{der}(A)$ ein Untervektorraum von $\mathrm{End}(A)$ ist. ∎

Beispiel I.1.7. (a) Wir betrachten den Raum $A = C^\infty(\mathbb{R})$ als eine $\mathbb{R}$-Algebra (versehen mit der punktweisen Multiplikation). Dann ist die Ableitung

$$D\colon A \to A, \quad f \mapsto f'$$

eine Derivation (Produktregel).
(b) Ist $A = \mathbb{K}[X]$ der Polynomring in einer Unbestimmten X über dem Körper $\mathbb{K}$ und $D\colon A \to A$ die lineare Abbildung mit $D(X^n) = nX^{n-1}$ für $n \geq 1$ und $D(1) = 0$, so ist D eine Derivation. ∎

Wir werden sogleich sehen, daß der Begriff der Derivation sehr eng an den Begriff der Lie-Algebra gekoppelt ist.

Lemma I.1.8. *Ist A eine Algebra, so ist* $\mathrm{der}(A)$ *eine Lie-Unteralgebra von* $\mathfrak{gl}(A) = \mathrm{End}(A)_L$.

Beweis. Seien $D_1, D_2 \in \mathrm{der}(A)$ und $x, y \in A$. Dann haben wir

$$\begin{aligned}
&[D_1, D_2](x \cdot y) \\
&= D_1 D_2(x \cdot y) - D_2 D_1(x \cdot y) \\
&= D_1\big(D_2(x) \cdot y + x \cdot D_2(y)\big) - D_2\big(D_1(x) \cdot y + x \cdot D_1(y)\big) \\
&= \big(D_1 D_2(x)\big) \cdot y + D_2(x) \cdot D_1(y) + D_1(x) \cdot D_2(y) + x \cdot \big(D_1 D_2(y)\big) \\
&\quad - \big(D_2 D_1(x)\big) \cdot y - D_1(x) \cdot D_2(y) - D_2(x) \cdot D_1(y) - x \cdot \big(D_2 D_1(y)\big) \\
&= [D_1, D_2](x) \cdot y + x \cdot [D_1, D_2](y).
\end{aligned}$$

Also ist $[D_1, D_2] \in \mathrm{der}(A)$. ∎

Da jede Lie-Algebra insbesondere eine Algebra im Sinne von Definition I.1.1 ist, interessieren wir uns besonders für die Derivationen von Lie-Algebren. Hierzu schauen wir uns zuerst an, was die Jacobi-Identität über Derivationen zu sagen hat.

Lemma I.1.9. *Ist* $[\cdot,\cdot]\colon \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ *eine bilineare Abbildung, die der Bedingung* $[x,x]=0$ *genügt, so ist* $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot])$ *genau dann eine Lie-Algebra, wenn für jedes* $x\in\mathfrak{g}$ *die Abbildung*

$$\operatorname{ad} x\colon \mathfrak{g}\to\mathfrak{g},\quad y\mapsto [x,y]$$

eine Derivation von $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot])$ *ist.*

Beweis. Wegen (L1) haben wir

$$\begin{aligned}&\operatorname{ad} x([y,z]) - ([\operatorname{ad} x(y),z]+[y,\operatorname{ad} x(z)])\\ =\ &\big[x,[y,z]\big]-\big(\big[[x,y],z\big]+\big[y,[x,z]\big]\big)\\ =\ &\big[x,[y,z]\big]+\big[y,[z,x]\big]+\big[z,[x,y]\big].\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung unmittelbar. ■

Poisson Algebren

Bemerkung I.1.10. Sei A eine assoziative Algebra und A_L die assoziierte Lie-Algebra. Wir wissen aus Lemma I.1.9, daß für jedes $x\in A$ der Operator $\operatorname{ad} x$ eine Derivation der Lie-Algebra A_L ist. Wegen

$$\begin{aligned}\operatorname{ad} x(y\cdot z) &= [x,y\cdot z] = x\cdot y\cdot z - y\cdot z\cdot x\\ &= (x\cdot y\cdot z - y\cdot x\cdot z)+(y\cdot x\cdot z - y\cdot z\cdot x)\\ &= \operatorname{ad} x(y)\cdot z + y\cdot \operatorname{ad} x(z)\end{aligned}$$

ist auch $\operatorname{ad} x\in\operatorname{der}(A)$, d.h. $\operatorname{ad} x$ ist eine Derivation für beide Algebra-Strukturen, die assoziative und die Lie-Klammer. ■

Definition I.1.11. Eine assoziative Algebra A, die zusätzlich mit der Struktur einer Lie-Algebra $\{\cdot,\cdot\}$ versehen ist, heißt *Poisson-Algebra*[2], wenn in ihr die Leibniz-Regel (Produktregel) gilt, d.h.

$$\{x,y\cdot z\} = \{x,y\}\cdot z + y\cdot\{x,z\}$$

für alle $x,y,z\in A$. ■

Beispiel I.1.12. (a) Ist A eine assoziative Algebra, so wird A durch $\{x,y\}:= x\cdot y - y\cdot x$ zu einer Poisson-Algebra (Bemerkung I.1.10). Ist A kommutativ, so erhält man so keine interessante neue Struktur.

[2] Siméon Denis Poisson (1781–1840), französischer Mathematiker und Physiker in Paris. Er hat viel zur Mechanik und Stochastik beigetragen.

(b) Ist $U \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ eine offenen Teilmenge und schreiben wir Elemente $x \in \mathbb{R}^{2n}$ als $2n$-Tupel $x = (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$, so definieren wir auf $C^\infty(U, \mathbb{R})$ die *Poisson-Klammer* durch

$$\{f, h\} = \sum_{j=1}^{n} \Big(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial h}{\partial p_j} - \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial f}{\partial p_j} \Big).$$

Dann ist $C^\infty(U)$ zusammen mit der Multiplikation von Funktionen eine Poisson-Algebra (Übung).

(c) Sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale reelle Lie-Algebra. Für $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ und $f \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ identifizieren wir das lineare Funktional $df(\alpha)\colon \mathfrak{g}^* \to \mathbb{R}$ in $(\mathfrak{g}^*)^* \cong \mathfrak{g}$ mit einem Element aus $\mathfrak{g}$. Dann wird $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ mit

$$\{f, h\}(\alpha) := \alpha\big([df(\alpha), dh(\alpha)]\big)$$

für $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ zu einer Poisson-Algebra (Übung).

Die Beispiele (b) und (c) spielen eine wichtige Rolle in der *symplektischen Geometrie* und der *Darstellungstheorie von Lie-Gruppen.* ■

Die adjungierte Darstellung

Definition I.1.13. Sind $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ Lie-Algebren, so heißt eine lineare Abbildung $\varphi\colon \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ ein *Homomorphismus* (*von Lie-Algebren*), wenn $\varphi([x,y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$ für alle $x, y \in \mathfrak{g}_1$ gilt. Ein *Isomorphismus* ist ein bijektiver Homomorphismus. ■

Wegen Lemma I.1.9 ist für jedes $x \in \mathfrak{g}$ die lineare Abbildung $\operatorname{ad} x \in \operatorname{der} \mathfrak{g}$, und wir erhalten eine lineare Abbildung $\operatorname{ad}\colon \mathfrak{g} \to \operatorname{der} \mathfrak{g}$. Derivationen der Gestalt $\operatorname{ad} x$ heißen *innere Derivationen.* In Anlehnung an den Begriff des Zentrums einer Gruppe bzw. einer assoziativen Algebra definieren wir das *Zentrum einer Lie-Algebra* $\mathfrak{g}$ als

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) := \{x \in \mathfrak{g}\colon (\forall y \in \mathfrak{g})[x,y] = 0\}.$$

Der folgende Satz gibt genauere Auskunft über die Eigenschaften von ad.

Satz I.1.14.

(i) $\operatorname{ad}\colon \mathfrak{g} \to \operatorname{der}(\mathfrak{g})$ *ist ein Homomorphismus von Lie-Algebren.*

(ii) $\ker \operatorname{ad} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

(iii) *Für* $D \in \operatorname{der} \mathfrak{g}$ *und* $x \in \mathfrak{g}$ *gilt* $[D, \operatorname{ad} x] = \operatorname{ad} D(x)$. *Insbesondere ist* $\operatorname{ad} \mathfrak{g} \trianglelefteq \operatorname{der} \mathfrak{g}$ *ein Ideal.*

Beweis. (i) Wir haben

$$\begin{aligned}\operatorname{ad}[x,y](z) &= \big[[x,y],z\big] = -\big[z,[x,y]\big] = -\big[[z,x],y\big] - \big[x,[z,y]\big] \\ &= -\operatorname{ad} y \circ \operatorname{ad} x(z) + \operatorname{ad} x \circ \operatorname{ad} y(z) = [\operatorname{ad} x, \operatorname{ad} y](z).\end{aligned}$$

Also ist ad ein Homomorphismus von Lie-Algebren.
(ii) Das folgt sofort aus der Definition des Zentrums.
(iii) Sei $D \in \operatorname{der} \mathfrak{g}$ und $x, y \in \mathfrak{g}$. Dann haben wir

$$[D, \operatorname{ad} x](y) = D([x,y]) - [x, D(y)] = [D(x), y] = \big(\operatorname{ad} D(x)\big)(y).$$

Somit ist $[D, \operatorname{ad} x] = \operatorname{ad} D(x)$. Hieraus folgt sofort, daß $\operatorname{ad} \mathfrak{g}$ ein Ideal von $\operatorname{der} \mathfrak{g}$ ist. ■

Definition I.1.15. Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra und V ein Vektorraum. Ein Homomorphismus von Lie-Algebren

$$\rho: \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V) = \operatorname{End}(V)_L$$

heißt *Darstellung von* $\mathfrak{g}$ *auf* V, d.h. eine lineare Abbildung $\rho: \mathfrak{g} \to \operatorname{End}(V)$ is genau dann eine Darstellung, wenn

$$\rho([x,y]) = \rho(x)\rho(y) - \rho(y)\rho(x) \quad \text{für alle } x, y \in \mathfrak{g}$$

gilt. ■

Beispiel I.1.16. Wir kennen schon ein Beispiel für eine Darstellung, nämlich die *adjungierte Darstellung*

$$\operatorname{ad}: \mathfrak{g} \to \operatorname{der} \mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}), \quad x \mapsto \operatorname{ad} x$$

(Satz I.1.14(i)). ■

Bemerkung I.1.17. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum (also isomorph zu $\mathbb{R}^n$) und $U \subseteq V$ eine offene Teilmenge. Ein *Vektorfeld auf* U ist eine glatte (=beliebig oft differenzierbare Funktion) $X: U \to V$. Wir schreiben $\mathcal{V}(U)$ für den Vektorraum der Vektorfelder auf U.
(a) Für jedes Vektorfeld $X \in \mathcal{V}(U)$ definiert

$$D_X: C^\infty(U, \mathbb{R}) \to C^\infty(U, \mathbb{R}), \quad f \mapsto X.f$$

mit

$$(X.f)(p) := df(p)X(p) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\big(f(p + hX(p)) - f(p)\big)$$

eine Derivation. In der Tat folgt dies sofort aus der Produktregel:

$$d(fg) = f \cdot dg + g \cdot df.$$

(b) Die Abbildung $D: \mathcal{V}(U) \to \operatorname{der}(C^\infty(M, \mathbb{R}))$ ist injektiv: Sei $f \in V^*$ ein lineares Funktional auf V. Dann ist $df(p) = f$ für alle $p \in U$ und daher $D_X(f) = Xf = f \circ X$. Verschwinden alle Funktionen $f \circ X$, so auch X, da V^* die Punkte von V trennt.

(c) Durch
$$[X,Y](p) := dY(p)X(p) - dX(p)Y(p)$$
wird auf $\mathcal{V}(U)$ eine Lie-Klammer definiert. Wir zeigen hierzu zuerst

$$D_{[X,Y]} = D_X D_Y - D_Y D_X. \tag{1.3}$$

Hierbei verwenden wir die zweite Ableitung von f:

$$d^2 f(p)(v,w) := \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(df(p+hw)(v) - df(p)(v)\big).$$

Aus der Analysis wissen wir, daß für jedes $p \in U$ die Abbildung

$$d^2 f(p): V \times V \to \mathbb{R}$$

bilinear und symmetrisch ist (Satz von Schwarz). Daher fällt der Term

$$d^2 f(p)(X(p), Y(p)) - d^2 f(p)(Y(p), X(p))$$

in folgender Rechnung weg:

$$\begin{aligned}
&(D_X D_Y - D_Y D_X)(f)(p)\\
&= (X.(Y.f))(p) - (Y.(X.f))(p)\\
&= d(Y.f)(p)X(p) - d(X.f)(p)Y(p)\\
&= d^2 f(p)(X(p), Y(p)) + df(p)dY(p)X(p)\\
&\quad - d^2 f(p)(Y(p), X(p)) - df(p)dX(p)Y(p)\\
&= df(p)\big(dY(p)X(p) - dX(p)Y(p)\big) = ([X,Y].f)(p).
\end{aligned}$$

Aus (1.3) erhalten wir nun direkt

$$\begin{aligned}
&D_{[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]}\\
&= [D_X, [D_Y, D_Z]] + [D_Y, [D_Z, D_X]] + [D_Z, [D_X, D_Y]] = 0
\end{aligned}$$

(Lemma I.1.2). Da D injektiv ist, ist $(\mathcal{V}(U), [\cdot,\cdot])$ eine Lie-Algebra und $\mathcal{V}(U) \to \mathrm{der}(C^\infty(U,\mathbb{R}), X \mapsto D_X$ eine Darstellung. ■

Bemerkung I.1.18. (Gegenüberstellung mit Gruppen) Viele Begriffe in der Theorie der Lie-Algebren sind entsprechenden Begriffen aus der Gruppentheorie nachempfunden:

(1) Genauso, wie die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(A,\cdot)$ einer Algebra $(A,\cdot)$ eine Gruppe ist, ist $\mathrm{der}(A,\cdot)$ eine Lie-Algebra (Automorphismen bilden Gruppen; Derivationen bilden Lie-Algebren).

(2) Der adjungierten Darstellung $\mathrm{ad}: \mathfrak{g} \to \mathrm{der}(\mathfrak{g})$ einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ entspricht die Konjugationsdarstellung $c: G \to \mathrm{Aut}(G), c(g)(x) := gxg^{-1}$ einer Gruppe G.

(3) Ideale sind Unteralgebren, die unter $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ invariant sind, und Normalteiler von Gruppen sind Untergruppen, die unter $c(G)$ invariant sind.

(4) Der Lie-Klammer $[x,y]$ in $\mathfrak{g}$ entspricht auf Gruppenebene der Kommutator $(x,y) := xyx^{-1}y^{-1}$. Abelsche Gruppen sind solche, für die alle Kommutatoren trivial, d.h. $= 1$ sind; entsprechend sind abelsche Lie-Algebren definiert.

(5) Die *Kommutatorgruppe* (G,G) einer Gruppe ist die normale Untergruppe, die von allen Kommutatoren erzeugt wird; für eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist die Kommutatoralgebra $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ das Ideal, das von allen Klammern erzeugt wird.

(6) Für eine Gruppe ist das *Zentrum* definiert durch

$$Z(G) := \{x \in G\colon (\forall y \in G) xy = yx\}$$

und die Bedingung $xy = yx$ bedeutet $(x,y) = 1$; entsprechend ist $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g}\colon [x,\mathfrak{g}] = \{0\}\}$.

Später werden wir nilpotente, auflösbare und einfache Lie-Algebren kennenlernen; auch diese Begriffe sind den entsprechenden für Gruppen nachempfunden. ∎

I.2. Ideale, Kerne, Homomorphiesätze

In diesem Abschnitt sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra über dem Körper $\mathbb{K}$.

Lemma I.2.1. *Sei $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ ein Ideal und $\mathfrak{q} := \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ der Quotientenvektorraum. Durch*

$$[x + \mathfrak{a}, y + \mathfrak{a}] := [x,y] + \mathfrak{a}$$

wird auf $\mathfrak{q}$ die Struktur einer Lie-Algebra definiert, so daß die Quotientenabbildung $\pi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{q}, x \mapsto x + \mathfrak{a}$ ein surjektiver Homomorphismus von Lie-Algebren wird.

Beweis. Wir beachten zunächst für $z, z' \in \mathfrak{a}$, daß $[x+z, y+z'] - [x,y] \in \mathfrak{a}$ ist, so daß die Klammer auf $\mathfrak{q}$ wohldefiniert ist. Die Klammer auf $\mathfrak{q}$ ist gerade so gemacht, daß $\pi([x,y]) = [\pi(x), \pi(y)]$ gilt. Aus der Gültigkeit der Axiome (L1) und (L2) in $\mathfrak{g}$ und der Surjektivität von π folgt nun, daß (L1) und (L2) auch in $\mathfrak{q}$ gelten. Also ist $\mathfrak{q}$ eine Lie-Algebra und π ein surjektiver Homomorphismus von Lie-Algebren. ∎

Lemma I.2.2. *Ein Untervektorraum $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ ist genau dann ein Ideal, wenn er Kern eines Homomorphismus von Lie-Algebren ist.*

Beweis. In Lemma I.2.1 haben wir gesehen, daß jedes Ideal Kern eines geeigneten Homomorphismus ist. Ist umgekehrt $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ ein Homomorphismus von Lie-Algebren, so ist $\ker\varphi$ ein Ideal, da $\varphi([\mathfrak{g}, \ker\varphi]) \subseteq [\varphi(\mathfrak{g}), \{0\}] = \{0\}$ gilt. ∎

Lemma I.2.3. (Homomorphiesatz) *Sei* $\varphi\colon \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ *ein Homomorphismus von Lie-Algebren und* $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}_1$ *ein Ideal sowie* $\pi\colon \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_1/\mathfrak{a}$ *der Quotientenhomomorphismus. Genau dann existiert ein Homomorphismus* $\widetilde{\varphi}\colon \mathfrak{g}_1/\mathfrak{a} \to \mathfrak{g}_2$ *mit* $\widetilde{\varphi} \circ \pi = \varphi$*, wenn* $\mathfrak{a} \subseteq \ker \varphi$ *gilt. Der Homomorphismus* $\widetilde{\varphi}$ *ist durch* $\widetilde{\varphi} \circ \pi = \varphi$ *eindeutig bestimmt.*

Beweis. Existiert $\widetilde{\varphi}$, so ist $\ker \varphi = \ker(\widetilde{\varphi} \circ \pi) \supseteq \ker \pi = \mathfrak{a}$.

Ist umgekehrt die Bedingung $\mathfrak{a} \subseteq \ker \varphi$ erfüllt, so ist $\widetilde{\varphi}\colon \mathfrak{g}_1/\mathfrak{a} \to \mathfrak{g}_2$ durch $\widetilde{\varphi}(x + \mathfrak{a}) := \varphi(x)$ wohldefiniert und wegen

$$\widetilde{\varphi}\big([\pi(x), \pi(y)]\big) = \widetilde{\varphi}\big(\pi([x, y])\big) = \varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] = [\widetilde{\varphi}\big(\pi(x)\big), \widetilde{\varphi}\big(\pi(y)\big)]$$

ist $\widetilde{\varphi}$ ein Homomorphismus von Lie-Algebren.

Daß $\widetilde{\varphi}$ durch $\widetilde{\varphi} \circ \pi = \varphi$ eindeutig bestimmt ist, folgt sofort aus der Surjektivität von π. ∎

Lemma I.2.4. *Für einen Homomorphismus* $\varphi\colon \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ *von Lie-Algebren gelten folgende Aussagen:*

(i) $\varphi(\mathfrak{g}_1)$ *ist eine Unteralgebra von* $\mathfrak{g}_2$.

(ii) $\varphi(\mathfrak{g}_1) \cong \mathfrak{g}_1/\ker \varphi$.

(iii) $\varphi = j \circ \widetilde{\varphi} \circ \pi$*, wobei* $\pi\colon \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_1/\ker \varphi$ *der Quotientenhomomorphismus ist,* $j\colon \varphi(\mathfrak{g}_1) \to \mathfrak{g}_2$ *die Einbettungsabbildung, und* $\widetilde{\varphi}\colon \mathfrak{g}_1/\ker \varphi \to \varphi(\mathfrak{g}_1)$ *ein Isomorphismus.*

Beweis. (i) folgt aus $[\varphi(\mathfrak{g}_1), \varphi(\mathfrak{g}_1)] = \varphi([\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1]) \subseteq \varphi(\mathfrak{g}_1)$ (Definition I.1.11).
(ii), (iii): Die Existenz der Zerlegung $\varphi = j \circ \widetilde{\varphi} \circ \pi$ folgt sofort aus Lemma I.2.3. Die Abbildung $\widetilde{\varphi}$ ist dann injektiv und surjektiv, also eine Bijektion, folglich ein Isomorphismus von Lie-Algebren. ∎

Die Zerlegung $\varphi = j \circ \widetilde{\varphi} \circ \pi$ von φ in einen injektiven, bijektiven und surjektiven Anteil nennt man die *kanonische Zerlegung von* φ.

Lemma I.2.5. *Seien* $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ *und* $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{g}$.

(i) $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ *ist eine Unteralgebra von* $\mathfrak{g}$.

(ii) $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{a} \cong \mathfrak{b}/(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a})$.

Beweis. (i) $[\mathfrak{a} + \mathfrak{b}, \mathfrak{a} + \mathfrak{b}] \subseteq [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] + [\mathfrak{b}, \mathfrak{a}] + [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] \subseteq \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$.
(ii) Sei $\pi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ die Quotientenabbildung. Dann ist $\pi(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$, und wegen Lemma I.2.4 ist

$$\pi(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \cong (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\big(\ker \pi \cap (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})\big) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{a}.$$

Andererseits ist $\pi(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \pi(\mathfrak{b}) \cong \mathfrak{b}/(\mathfrak{b} \cap \ker \pi) = \mathfrak{b}/(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a})$. ∎

Semidirekte Summen

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir gesehen, daß man für jedes Ideal $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ die Faktoralgebra $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ bilden kann. In diesem Sinn stellt man sich vor, daß $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ Bausteine sind, aus denen sich die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ zusammensetzt. In diesem Abschnitt werden wir eine Methode kennenlernen, mit der man verschiedene Lie-Algebren $\mathfrak{g}$ aus zwei Lie-Algebren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ derart bauen kann, daß $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ ein Ideal wird und $\mathfrak{b} \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ gilt.

Definition I.2.6. Sei $(\mathfrak{g}_j)_{j\in J}$ eine Familie von Lie-Algebren und $\mathfrak{g} = \bigoplus_{j\in J} \mathfrak{g}_j$ die direkte Summe der Vektorräume $\mathfrak{g}_j$. Wir schreiben die Elemente von $\mathfrak{g}$ als J-Tupel $x = (x_j)_{j\in J}$. Dann definiert

$$\Big[(x_j)_{j\in J}, (y_j)_{j\in J}\Big] := ([x_j, y_j])_{j\in J}$$

die Struktur einer Lie-Algebra auf $\mathfrak{g}$. Die so entstandene Lie-Algebra nennt man die *direkte Summe* der Lie-Algebren $\mathfrak{g}_j$, $j \in J$. Man beachte, daß man hierbei $\mathfrak{g}_j$ kanonisch mit dem entsprechenden Unterraum von $\mathfrak{g}$ identifiziern kann, der sogar ein Ideal ist. In diesem Sinne kann man ein Tupel $x = (x_j)_{j\in J}$ auch schreiben als $x = \sum_{j\in J} x_j$, wobei man beachten muß, daß nur endlich viele der x_j von 0 verschieden sind. ■

Lemma I.2.7. *Ist die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ die direkte Vektorraumsumme der Ideale $\mathfrak{g}_j$, $j \in J$, so ist die Abbildung*

$$S\colon \bigoplus_{j\in J} \mathfrak{g}_j \to \mathfrak{g}, \quad (x_j)_{j\in J} \mapsto \sum_{j\in J} x_j$$

ein Isomorphismus von Lie-Algebren.

Beweis. Nach Voraussetzung ist S eine bijektive lineare Abbildung. Sind $j \neq k \in J$, so ist $[\mathfrak{g}_j, \mathfrak{g}_k] \subseteq \mathfrak{g}_j \cap \mathfrak{g}_k = \{0\}$, da beide Ideale sind, deren Summe direkt ist. Hieraus erhalten wir $[S(x), S(y)] = S([x,y])$, d.h. S ist ein Isomorphismus von Lie-Algebren. ■

Betrachtet man den Spezialfall von zwei Summanden, so zeigt Lemma I.2.7, wie man eine Lie-Algebra zerlegen kann, wenn sie direkte Vektorraumsumme zweier Ideale ist. Wir schwächen diese Bedingung ab, um eine viel größere Klasse von Zerlegungen erfassen zu können.

Definition I.2.8. Ist $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra, $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ ein Ideal und $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{g}$ eine Unteralgebra, so daß $\mathfrak{g}$ die direkte Vektorraumsumme von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ist, so nennt man $\mathfrak{g}$ eine *semidirekte Summe* von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$. ■

Ist $\mathfrak{g} := \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ die direkte Summe der beiden Lie-Algebren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ und identifizieren wir $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ mit den entsprechenden Unteralgebren von $\mathfrak{g}$, so ist $\mathfrak{g}$ natürlich auch eine semidirekte Summe von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$. Allerdings ist $\mathfrak{b}$ dann auch ein Ideal. Ist andererseits $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ eine semidirekte Summe, für die nicht nur $\mathfrak{a}$, sondern auch $\mathfrak{b}$ ein Ideal ist, so folgt aus Lemma I.2.7, daß $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ ist. Eine semidirekte Summe ist also genau dann direkt, wenn beide Summanden Ideale sind.

Lemma I.2.9. *Ist $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ und $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{g}$, so ist*

$$\delta\colon \mathfrak{b} \to \mathrm{der}(\mathfrak{a}), \quad x \mapsto \mathrm{ad}\, x|_{\mathfrak{a}}$$

ein Homomorphismus von Lie-Algebren.

Beweis. Das ist eine direkte Konsequenz aus Satz I.1.12. ∎

Lemma I.2.10. *Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Lie-Algebren und $\delta\colon \mathfrak{b} \to \mathrm{der}(\mathfrak{a})$ ein Homomorphismus, so wird durch*

$$(*) \qquad [(x,y),(x',y')] := ([x,x'] + \delta(y).x' - \delta(y').x, [y,y'])$$

auf $\mathfrak{g} := \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ die Struktur einer Lie-Algebra definiert, so daß $\mathfrak{a}$ ein Ideal ist und $\mathfrak{b}$ eine Unteralgebra, d.h. $\mathfrak{g}$ ist eine semidirekte Summe von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$. Ist $\mathfrak{g}$ andererseits eine semidirekte Summe des Ideals $\mathfrak{a}$ und der Unteralgebra $\mathfrak{b}$ und δ wie in Lemma I.2.9*, so ist $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \to \mathfrak{g}, (x,y) \mapsto x + y$ ein Isomorphismus von Lie-Algebren, wenn $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ mit der Lie-Klammer $(*)$ versehen ist.*

Beweis. Zunächst ist

$$[(x,y),(x,y)] := ([x,x] + \delta(y).x - \delta(y).x, [y,y])) = (0,0),$$

und hieraus folgt $(L1)$. Um die Jacobi-Identität nachzuweisen, setzen wir

$$J(x,y,z) := \big[x,[y,z]\big] + \big[y,[z,x]\big] + \big[z,[x,y]\big]$$

für $x,y,z \in \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ und beachten $J(x,y,z) = J(y,z,x) = J(z,x,y)$. Wegen der Trilinearität von $J\colon \mathfrak{g}^3 \to \mathfrak{g}$ reduziert sich der Nachweis von $J = 0$ auf die folgenden 4 Spezialfälle:

(1) $x,y,z \in \mathfrak{a}$: $J(x,y,z) = 0$ gilt, da $\mathfrak{a}$ eine Lie-Algebra ist.

(2) $x,y \in \mathfrak{a}$, $z \in \mathfrak{b}$: $J(x,y,z) = -[x,\delta(z).y] - [\delta(z).x,y] + \delta(z).[x,y] = 0$ folgt aus $\delta(z) \in \mathrm{der}(\mathfrak{a})$.

(3) $x \in \mathfrak{a}$, $y,z \in \mathfrak{b}$: $J(x,y,z) = -\delta([y,z]).x + \delta(y)\delta(z).x - \delta(z)\delta(y).x = 0$ folgt aus der Tatsache, daß δ ein Homomorphismus ist.

(4) $x,y,z \in \mathfrak{b}$: $J(x,y,z) = 0$ gilt, da $\mathfrak{b}$ eine Lie-Algebra ist.

Hiermit ist gezeigt, daß $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ mit der oben definierten Klammer eine Lie-Algebra ist. Die Beziehungen $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ und $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{g}$ sind klar.

Ist umgekehrt $\mathfrak{g}$ eine semidirekte Summe des Ideals $\mathfrak{a}$ und der Unteralgebra $\mathfrak{b}$ sowie δ wie in Lemma I.2.9, so ist $\mathfrak{g}$ die direkte Vektorraumsumme $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ dieser beiden Unterräume und für $x,x' \in \mathfrak{a}$ und $y,y' \in \mathfrak{b}$ haben wir

$$[x+y, x'+y'] = \underbrace{[x,x'] + [y,x'] + [x,y']}_{\in \mathfrak{a}} + \underbrace{[y,y']}_{\in \mathfrak{b}}.$$

Hieraus folgt die zweite Behauptung wegen $\delta(y)(x) = [y,x]$ für $y \in \mathfrak{b}$ und $x \in \mathfrak{a}$. ∎

Die so konstruierte Lie-Algebra bezeichnet man mit $\mathfrak{a} \rtimes_\delta \mathfrak{b}$ oder auch kürzer mit $\mathfrak{a} \rtimes \mathfrak{b}$, wenn klar ist, was δ ist. Man nennt sie die *semidirekte Summe von* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *bzgl.* δ.

Beispiel I.2.11. (1) Sei $\delta\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ ist eine Darstellung von $\mathfrak{g}$. Wir fassen V als abelsche Lie-Algebra auf (Beispiel I.1.3(b)). Dann ist $\operatorname{der}(V) = \mathfrak{gl}(V)$ und somit wird $V \rtimes \mathfrak{g}$ zu einer Lie-Algebra mit

$$[(x,y),(x',y')] := (\delta(y).x' - \delta(y').x, [y,y']).$$

Der Unterraum V ist dann ein abelsches Ideal von $V \rtimes \mathfrak{g}$.
(2) Sei V ein Vektorraum. Wir betrachten den Vektorraum $\mathfrak{aff}(V)$ der affinen Abbildungen

$$L_{A,v}\colon V \to V, \quad x \mapsto A.x + v,$$

wobei $A \in \mathfrak{gl}(V)$ ist. Dann ist $\mathfrak{aff}(V)$ eine Lie-Algebra bzgl. der Klammer

$$[L_{A,v}, L_{A',v'}] = L_{[A,A'],A.v'-A'.v}.$$

Also ist $\mathfrak{aff}(V) \cong V \rtimes \mathfrak{gl}(V)$ im Sinne von (1).
(3) In $\mathfrak{gl}(n+1,\mathbb{K})$ betrachten wir die Lie-Unteralgebra

$$\mathfrak{g} := \left\{ \widetilde{L}_{A,v} = \begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K}), v \in \mathbb{K}^n \right\}.$$

Dann ist $\widetilde{L}_{A,v} \circ \widetilde{L}_{A',v'} = \widetilde{L}_{AA',Av'}$ und daher

$$[\widetilde{L}_{A,v}, \widetilde{L}_{A',v'}] = \widetilde{L}_{[A,A'],A.v'-A'.v}.$$

Folglich ist $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{aff}(\mathbb{K}^n) \cong \mathbb{K}^n \rtimes \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$.
(4) Ist $\mathcal{F} = (V_0,\ldots,V_n)$ eine Fahne in V, so haben wir in Beispiel I.1.5(f) schon die Lie-Algebra

$$\mathfrak{g}(\mathcal{F}) = \{x \in \mathfrak{gl}(V)\colon (\forall j) x.V_j \subseteq V_j\}$$

kennengelernt. Sei

$$\mathfrak{g}_n(\mathcal{F}) := \{x \in \mathfrak{gl}(V)\colon (\forall j > 0) x.V_j \subseteq V_{j-1}\}.$$

Dann ist $\mathfrak{g}_n(\mathcal{F})$ ein Ideal in $\mathfrak{g}(\mathcal{F})$.

Seien nun $W_1,\ldots,W_n$ Unterräume von V mit $V_{j+1} \cong V_j \oplus W_j$ für $j = 1,\ldots,n$. Dann ist

$$\mathfrak{g}_s(\mathcal{F}) := \{x \in \mathfrak{gl}(V)\colon (\forall j) x.W_j \subseteq W_j\} \subseteq \mathfrak{g}(\mathcal{F})$$

eine Unteralgebra, und es gilt

$$\mathfrak{g}(\mathcal{F}) \cong \mathfrak{g}_n(\mathcal{F}) \rtimes \mathfrak{g}_s(\mathcal{F}) \quad \text{mit} \quad \mathfrak{g}_s(\mathcal{F}) \cong \bigoplus_{j=1}^n \mathfrak{gl}(W_j).$$

Beschreibt man die Elemente von $\mathfrak{g}(\mathcal{F})$ wie in Beispiel I.1.5(f) durch Blockmatrizen, so entspricht obige Zerlegung der Lie-Algebra der Zerlegung einer oberen Dreiecksmatrix in eine strikte obere Dreiecksmatrix und eine Diagonalmatrix. Für $n = 3$ sieht das folgendermaßen aus:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ 0 & 0 & A_{33} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{pmatrix}}_{\in \mathfrak{g}_s(\mathcal{F})} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ 0 & 0 & A_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\in \mathfrak{g}_n(\mathcal{F})}.$$

I.3. Lie-Algebren als "Ableitungen" von Gruppen

Wir haben in Abschnitt I.1 gesehen, daß Derivationen in vielen Kontexten Lie-Algebren bilden, also daß Lie-Algebra-Strukuren an "Ableitungen" geknüpft sind. Dies ist kein Zufall. Man kann sogar sehr gut die Philosophie vertreten, daß Lie-Algebren diejenigen Strukturen sind, die man durch "Ableiten" aus Gruppenstrukturen gewinnt. Dieser Ableitungsprozeß und seine Umkehrung sind Gegenstand der Theorie Liescher Gruppen. In diesem Abschnitt werden wir nur kurz einige Grundideen anreisen.

Wir betrachten hierzu eine offen Nullumgebung U in einem endlichdimensionalen Vektorraum V (den wir uns als $\mathbb{R}^d$ denken dürfen). Weiter nehmen wir an, daß wir zwei glatte Abbildungen

$$m: U \times U \to V, \quad (x, y) \mapsto xy := x * y := m(x, y)$$

und

$$\eta: U \to V, \quad x \mapsto x^{-1} := \eta(x)$$

haben. Weiter sei $W \subseteq U$ eine offene Nullumgebung mit $W * W \subseteq U$. Wir nehmen an, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) $x * 0 = 0 * x = x$ für alle $x \in U$.

(2) $(x * y) * z = x * (y * z)$ für alle $x, y, z \in W$.

(3) $\eta(W) = W$ und $x * x^{-1} = x^{-1} * x = 0$ für $x \in W$.

Man nennt das Quintupel $(V, 0, U, m, \eta)$ dann eine *lokale Gruppe*, wobei wir uns m als die Gruppenmultiplikation und η als die Inversion denken. Man muß hier allerdings etwas aufpassen, weil diese Abbildungen nicht auf ganz $V \times V$ bzw. V definiert sind.

Wir betrachten nun die Taylorentwicklung der Multiplikationsabbildung in $(0, 0) \in V \times V$ (wegen $0 * 0 = 0$ ist der konstante Term trivial):

$$x * y = T_1(x, y) + T_2(x, y) + T_3(x, y) + \ldots,$$

wobei die Abbildungen $T_k: V \times V \to V$ polynomial vom Grad k sind, d.h. $T_1 = dm(0, 0)$ ist linear, und für alle k und $t \in \mathbb{R}$ gilt $T_k(tx, ty) = t^k T_k(x, y)$.

Aus $x = x * 0 = 0 * x$ erhalten wir

$$T_1(x,0) = T_1(0,x) = x \quad \text{und} \quad T_2(x,0) = T_2(0,x) = 0$$

für alle $x \in V$. Da T_1 linear ist, ergibt sich hieraus

$$T_1(x,y) = T_1(x,0) + T_1(0,y) = x + y.$$

Die Abbildung $T_2(h) := \frac{1}{2}(d^2m)(0,0)(h,h)$ ist quadratisch, und für die bilineare symmetrische Abbildung

$$B := \frac{1}{2}d^2m(0,0)\colon (V \times V) \times (V \times V) \to V$$

gilt

$$T_2(x,y) = B((x,y),(x,y)) = B((x,0),(x,0)) + B((0,y),(0,y)) + 2B((x,0),(0,y)).$$

Da $T_2(x,0) = B((x,0),(x,0))$ und $T_2(0,y) = B((0,y),(0,y))$ für alle $x, y \in V$ verschwinden, erhalten wir

$$T_2(x,y) = B((x,0),(0,y)).$$

Insbesondere ist T_2 eine bilineare Abbildung.

Sei $\eta(x) = S_1(x) + S_2(x) + \cdots$ die Taylorentwicklung von η in 0. Aus $x * x^{-1} = 0$ folgt dann

$$0 = x * (S_1(x) + S_2(x) + \cdots) = \big(x + S_1(x)\big) + \big(S_2(x) + T_2(x, S_1(x))\big) + \cdots.$$

Hieraus ergibt sich

$$S_1(x) = -x \quad \text{und} \quad S_2(x) = -T_2(x, S_1(x)) = T_2(x,x),$$

da T_2 bilinear ist.

Sind x, y ausreichend nahe bei 0, so ist $c_x(y) := x * y * x^{-1}$ definiert, und Terme bis zur Ordnung 2 der Taylorreihe erhalten wir aus

$$\begin{aligned} x * y * x^{-1} &= (x + y + T_2(x,y) + \cdots) * (-x + T_2(x,x) + \cdots) \\ &= (x + y - x) + T_2(x,y) + T_2(x,x) + T_2(x+y, -x) + \cdots \\ &= y + T_2(x,y) - T_2(y,x) + \cdots \end{aligned}$$

Für den Kommutator $(x,y) := x * y * x^{-1} * y^{-1}$ ergibt sich damit

$$\begin{aligned} x * y * x^{-1} * y^{-1} &= (y + T_2(x,y) - T_2(y,x) + \cdots) * (-y + T_2(y,y) + \cdots) \\ &= T_2(x,y) - T_2(y,x) + T_2(y,y) + T_2(y,-y) + \cdots \\ &= T_2(x,y) - T_2(y,x) + \cdots \end{aligned}$$

Lemma I.3.1. *Sei G eine Gruppe, $c_a(b) := aba^{-1}$ und $(a,b) := aba^{-1}b^{-1}$ der Kommutator. Dann gilt für alle $x, y, z \in G$ die Kommutatoridentität*

$$((x,y), c_y(z))((y,z), c_z(x))((z,x), c_z(x)) = \mathbf{1}.$$

Beweis. Das rechnet man einfach nach. Wegen

$$((x,y), c_y(z)) = xyx^{-1}y^{-1}yzy^{-1}yxy^{-1}x^{-1}yz^{-1}y^{-1} = xyx^{-1}zxy^{-1}x^{-1}yz^{-1}y^{-1}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} &((x,y), c_y(z))((y,z), c_z(x))((z,x), c_z(x)) \\ = {}&xyx^{-1}zxy^{-1}x^{-1}yz^{-1}y^{-1}yzy^{-1}xyz^{-1}y^{-1}zx^{-1}z^{-1} \\ &zxz^{-1}yzx^{-1}z^{-1}xy^{-1}x^{-1} = \mathbf{1}. \end{aligned}$$

■

Satz I.3.2. *Die bilineare Abbildung*

$$V \times V \to V, \quad [x,y] := T_2(x,y) - T_2(y,x)$$

ist eine Lie-Klammer.

Beweis. Es gilt trivialerweise $[x,x] = 0$, und wir haben die Taylorentwicklungen bis zur zweiten Ordnung:

$$c_x(y) = y + [x,y] + \cdots \qquad \text{und} \qquad (x,y) = [x,y] + \cdots$$

Hieraus ergibt sich wieder durch Einsetzen für x, y, z ausreichend nahe bei 0:

$$\begin{aligned}((x,y), c_y(z)) &= ([x,y] + \cdots, z + [y,z] + \cdots) \\ &= \big[[x,y], z\big] + \big[[x,y],[y,z]\big] + \cdots = \big[[x,y], z\big] + \cdots\end{aligned}$$

Aus der Identität

$$((x,y), c_y(z))((y,z), c_z(x))((z,x), c_z(x)) = 0$$

für x, y, z nahe bei 0 (Lemma I.3.1) erhalten wir als Term dritter Ordnung in der Taylorreihe

$$0 = \big[[x,y], z\big] + \big[[y,z], x\big] + \big[[z,x], y\big].$$

Also ist $[\cdot,\cdot]$ eine Lie-Klammer auf V. ∎

Bemerkung I.3.3. (a) Ist $V := \mathrm{End}(W)$ für einen endlichdimensionalen Vektorraum W, so ist

$$U := \mathrm{GL}(W) - \mathbf{1} = \{x \in V \colon \det(\mathbf{1} + x) \neq 0\}$$

offen. Auf dieser Menge erhalten wir durch

$$x * y := (\mathbf{1} + x)(\mathbf{1} + y) - \mathbf{1} = x + y + xy$$

eine glatte Gruppenstruktur mit dem Einselement 0. In diesem Fall ist

$$T_2(x,y) = xy \qquad \text{und} \qquad [x,y] = xy - yx.$$

(b) Sei $V = \mathrm{End}(W)$ wie oben und $V_0 \subseteq V$ eine offene Nullumgebung, auf der die Exponentialfunktion $\exp\colon \mathrm{End}(W) \to \mathrm{GL}(W)$ einen Diffeomorphismus $\exp|_{V_0}\colon V_0 \to \exp(V_0)$ auf eine offene Teilmenge von V liefert. Wir definieren dann $\log := (\exp|_{V_0})^{-1}\colon \exp(V_0) \to V_0$ und erhalten auf der offenen Menge $U := \{(x,y) \in V_0 \colon \exp x \exp y \in \exp(V_0)\}$ durch

$$x * y := \log(\exp x \exp y)$$

eine glatte Multiplikation $U \to V$. In der Theorie der Lie-Gruppen zeigt man, daß für ausreichend kleine x, y die Formel

$$x * y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (\exp x \exp y - \mathbf{1})^n$$

gilt und leitet daraus die sogenannte Baker-Campbell-Hausdorff-Formel her, die eine explizite Reihendarstellung von $x * y$ liefert. Die ersten Terme ergeben sich zu

$$x * y = x + y + \frac{1}{2}[x,y] + \frac{1}{12}([[x,y],y] + [[y,x],x]) + \cdots.$$

In diesem Fall ist also $T_2(x,y) = \frac{1}{2}[x,y]$. ∎

I.4. Lineare Lie-Gruppen

I.4. Die Exponentialfunktion

In diesem Abschnitt werden wir einige Techniken der Theorie der Lieschen Gruppen kennenlernen. Zentrales Werkzeug hierzu ist die Exponentialfunktion.

Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, den wir mit einer Norm $\|\cdot\|$ versehen wollen. Zur Erinnerung: das ist eine Funktion $\|\cdot\|\colon V \to \mathbb{R}^+$ mit den Eigenschaften:

(1) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Subadditivität).

(2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ für $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in V$.

(3) $\|x\| > 0$ für $x \neq 0$.

Auf dem Raum $\mathrm{End}(V)$ erhalten wir dann eine Norm durch

$$\|A\| = \sup\{\|A.x\|\colon \|x\| \leq 1\},$$

die man die zugehörige *Operatornorm* nennt. Man überzeugt sich leicht davon, daß man so wirklich eine Norm auf $\mathrm{End}(V)$ bekommt, die zusätzlich *submultiplikativ* ist, d.h.

(4) $\|A \circ B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

Für $X \in \mathrm{End}(V)$ betrachten wir nun die *Exponentialreihe*

$$e^X \colon= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n.$$

Lemma I.4.1.

(i) *Die Exponentialreihe konvergiert gleichmäßig auf jeder beschränkten Teilmenge von* $\mathrm{End}(V)$.

(ii) *Durch* $\exp(X) := e^X$ *wird eine stetige Funktion*

$$\exp\colon \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V)$$

definiert.

Beweis. (i), (ii) Sei $B \subseteq \mathrm{End}(V)$ beschränkt und $\|X\| \leq C$ für all $X \in B$. Dann erhalten wir die Abschätzung

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\|X^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} C^n = e^C.$$

Also konvergiert die Exponentialreihe gleichmäßig auf B. Da die Funktionen $s_m(X) := \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n!} X^n$ stetig sind, folgt so die Stetigkeit der Exponentialfunktion. ∎

Satz I.4.2. *Für $X, Y \in \mathrm{End}(V)$ gelten folgende Rechenregeln:*

(i) $e^{\mathbf{0}} = \mathbf{1}$.

(ii) $e^{X+Y} = e^X e^Y$ *falls* $XY = YX$.

(iii) $\gamma_X : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(V), t \mapsto e^{tX}$ *ist ein beliebig oft differenzierbarer Gruppenhomomorphismus.*

(iv) *Für* $g \in \mathrm{GL}(V)$ *ist* $ge^X g^{-1} = e^{gXg^{-1}}$.

(v) $\det e^X = e^{\operatorname{tr} X}$.

Beweis. (i) Klar.

(ii) Da X und Y vertauschen, haben wir $(X+Y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k Y^{n-k}$ und weiter wegen der Cauchy-Produkt-Formel:

$$\begin{aligned} e^{X+Y} &= \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}(X+Y)^n = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k Y^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} X^k Y^{n-k} = e^X e^Y. \end{aligned}$$

(iii) Aus (ii) folgt zunächst $e^X e^{-X} = e^{\mathbf{0}} = \mathbf{1}$, d.h. $e^X \in \mathrm{GL}(V)$ für alle $X \in \mathrm{End}(V)$. Weiter haben wir

$$\begin{aligned} \gamma_X'(t) &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\big(\gamma_X(t+h) - \gamma_X(t)\big) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\big(\gamma_X(t)\gamma_X(h) - \gamma_X(t)\big) \\ &= \gamma_X(t) \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\big(e^{hX} - \mathbf{1}\big) = \gamma_X(t) X. \end{aligned}$$

Insbesondere ist γ_X beliebig oft differenzierbar mit $\gamma_X^{(n)}(t) = \gamma_X(t) X^n$.

(iv) Das folgt aus $gX^n g^{-1} = (gXg^{-1})^n$ und der Stetigkeit der Abbildung $c_g : Y \mapsto gYg^{-1}$ auf $\mathrm{End}(V)$.

(v) Sei $\alpha(t) := \det(\beta(t))$ für $\beta(t) := e^{tX}$. Dann ist $\alpha : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^\times, \cdot)$ ein differenzierbarer Gruppenhomomorphismus. In $t = 0$ erhalten wir die Ableitung

$$\alpha'(0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \beta(t)_{1,\sigma(1)} \cdots \beta(t)_{n,\sigma(n)}.$$

Für $i \neq j$ ist $\beta(0)_{ij} = \delta_{ij}$, so daß wegen

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \beta(t)_{1,\sigma(1)} \cdots \beta(t)_{n,\sigma(n)} = \sum_i \beta(0)_{1,\sigma(1)} \cdots \beta'(0)_{i,\sigma(i)} \cdots \beta(0)_{n,\sigma(n)}$$

nur $\sigma = \mathrm{id}$ einen Beitrag zu $\alpha'(0)$ liefert, und dieser Beitrag ist

$$\sum_i \beta'(0)_{ii} = \sum_i X_{ii} = \operatorname{tr} X.$$

Also haben wir $\alpha'(0) = \operatorname{tr} X$. Wie oben folgt hieraus $\alpha(t) = e^{t\alpha'(0)} = e^{t \operatorname{tr} X}$, da α die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems $\alpha'(t) = (\operatorname{tr} X)\alpha(t)$ mit $\alpha(0) = 1$ ist. ∎

Lemma I.4.3. *Auf jeder beschränkten Teilmenge konvergiert die Funktionenfolge* $e_n(X) := (\mathbf{1} + \frac{1}{n}X)^n$ *gleichmäßig gegen* $\exp$. *Insbesondere folgt für* $X_n \to X$ *die Beziehung*

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\mathbf{1} + \frac{1}{n} X_n\Big)^n = e^X.$$

Beweis. Zuerst eine allgemeine Überlegung. Wir werden einen Ausdruck der Gestalt $A^n - B^n$ abzuschätzen haben. Hierzu schreiben wir

$$\begin{aligned} A^n - B^n &= (A^n - A^{n-1}B) + (A^{n-1}B - A^{n-2}B^2) + \ldots + (AB^{n-1} - B^n) \\ &= A^{n-1}(A-B) + A^{n-2}(A-B)B + \ldots + (A-B)B^{n-1} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} A^j (A-B) B^{n-1-j}. \end{aligned}$$

Nehmen wir an, daß eine Nonstante $C > 0$ mit $\|A^j\|, \|B^j\| \leq C$ für alle $j \leq n$ existiert, so ergibt sich als Abschätzung

$$(*) \qquad \|A^n - B^n\| \leq \sum_{j=0}^{n-1} \|A^j\| \cdot \|B^{n-1-j}\| \cdot \|A - B\| \leq nC^2 \|A - B\|.$$

Sei $A := (\mathbf{1} + \frac{X}{n})$ und $B := e^{\frac{X}{n}}$. Wegen Satz I.4.2 ist dann $A^n - B^n = e_n(X) - e^X$. Sei $\|X\| \leq M$. Für $k \leq n$ haben wir dann

$$\|A^k\| \leq \Big(1 + \frac{\|X\|}{n}\Big)^k \leq \Big(1 + \frac{\|X\|}{n}\Big)^n \leq e^{\|X\|} \leq e^M$$

und

$$\|B^k\| = \|e^{\frac{k}{n}X}\| \leq e^{\frac{k}{n}\|X\|} \leq e^M.$$

Also ist

$$\|A^n - B^n\| \leq e^{2M} \|n(A-B)\|.$$

Weiter ist

$$\|n(B-A)\| = \Big\|n\Big(e^{\frac{X}{n}} - \mathbf{1} - \frac{X}{n}\Big)\Big\| = \Big\|n \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{X^j}{n^j}\Big\| \leq \frac{1}{n} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j!} M^j \to 0.$$

Hieraus folgt die gleichmäßige Konvergenz von e_n gegen $\exp$ auf jeder beschränkten Teilmenge von $\mathrm{End}(V)$.

Sei nun $X_n \to X$. Dann ist die Menge $\{X\} \cup \{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt. Also gilt

$$\|e_n(X_n) - e^X\| \leq \|e_n(X_n) - e^{X_n}\| + \|e^{X_n} - e^X\| \to 0 + 0 = 0,$$

da die Exponentialfunktion stetig ist und die Konvergenz von e_n gegen $\exp$ auf jeder beschränkten Menge gleichmäßig. ∎

Satz I.4.4. *Seien $X, Y \in \mathrm{End}(V)$. Dann gelten folgende Formeln:*

(i) (Die Trotter-Produkt-Formel)

$$\lim_{k\to\infty} \left(e^{\frac{1}{k}X} e^{\frac{1}{k}Y}\right)^k = e^{X+Y}.$$

(ii) (Die Kommutatorformel)

$$\lim_{k\to\infty} \left(e^{\frac{1}{k}X} e^{\frac{1}{k}Y} e^{-\frac{1}{k}X} e^{-\frac{1}{k}Y}\right)^{k^2} = e^{XY-YX}.$$

Beweis. (i) Wegen Lemma I.4.3 haben wir nur

$$e^{\frac{1}{k}X} e^{\frac{1}{k}Y} = \mathbf{1} + \frac{X+Y+Z_k}{k}$$

mit $Z_k \to 0$ zu zeigen. Dies folgt aber sofort aus der Beschränktheit der Folgen $e^{\frac{X}{k}}$ sowie

$$e^{\frac{1}{k}X} = \mathbf{1} + \frac{X}{k} + O(k^{-2}),$$

woraus sich

$$e^{\frac{1}{k}X} e^{\frac{1}{k}Y} = \left(\mathbf{1} + \frac{X}{k} + O(k^{-2})\right)\left(\mathbf{1} + \frac{Y}{k} + O(k^{-2})\right) = \mathbf{1} + \frac{X+Y}{k} + O(k^{-2})$$

ergibt.

(ii) Wegen Lemma I.4.3 haben wir jetzt

$$e^{\frac{1}{k}X} e^{\frac{1}{k}Y} e^{-\frac{1}{k}X} e^{-\frac{1}{k}Y} = \mathbf{1} + \frac{[X,Y]+Z_k}{k^2}$$

mit $Z_k \to 0$ zu zeigen. Hierzu beachten wir zunächst

$$e^{\frac{1}{k}X} = \mathbf{1} + \frac{X}{k} + \frac{X^2}{2k^2} + O(k^3),$$

woraus sich

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{k}X} e^{\frac{1}{k}Y} &= \left(\mathbf{1} + \frac{X}{k} + \frac{X^2}{2k^2}\right)\left(\mathbf{1} + \frac{Y}{k} + \frac{Y^2}{2k^2}\right) + O(k^3) \\ &= \mathbf{1} + \frac{X+Y}{k} + \frac{X^2+Y^2+2XY}{2k^2} + O(k^3) \end{aligned}$$

ergibt. Damit erhalten wir weiter

$$\begin{aligned} &e^{\frac{1}{k}X} e^{\frac{1}{k}Y} e^{-\frac{1}{k}X} e^{-\frac{1}{k}Y} \\ &= \big(\mathbf{1} + \frac{X+Y}{k} + \frac{X^2+Y^2+2XY}{2k^2}\big)\big(\mathbf{1} - \frac{X+Y}{k} + \frac{X^2+Y^2+2XY}{2k^2}\big) + O(k^3) \\ &= \mathbf{1} + \frac{X^2+Y^2+2XY}{k^2} - \frac{(X+Y)^2}{k^2} + O(k^3) \\ &= \mathbf{1} + \frac{[X,Y]}{k^2} + O(k^3). \end{aligned}$$

■

Lie-Algebren linearer Lie-Gruppen

Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, den wir wie in Abschnitt I.3 mit einer Norm versehen. Wir erhalten so auf $\mathrm{End}(V)$ eine Norm und somit auch eine Metrik. In diesem Sinne betrachten wir die Gruppe $\mathrm{GL}(V)$ aller linearer Automorphismen von V als metrischen Raum mit der Metrik $d(X,Y) = \|X - Y\|$.

Definition I.4.5. (a) Eine abgeschlossene Untergruppe $H \subseteq \mathrm{GL}(V)$ heißt *lineare Lie-Gruppe.*
(b) Für eine Untergruppe $H \subseteq \mathrm{GL}(V)$ definieren wir

$$\mathbf{L}(H) := \{X \in \mathrm{End}(V) \colon \exp \mathbb{R}X \subseteq H\}. \qquad \blacksquare$$

Lemma I.4.6. *Für eine lineare Lie-Gruppe H ist $\mathbf{L}(H)$ eine Lie-Unteralgebra von $\mathrm{End}(V)_L$.*

Beweis. (i) Für $X, Y \in \mathbf{L}(H)$ ist trivialerweise auch $\mathbb{R}X, \mathbb{R}Y \subseteq \mathbf{L}(H)$. Für $k \in \mathbb{N}$ sind daher $\exp \frac{1}{k}X, \exp \frac{1}{k}Y \in H$ und mit der Trotter-Produkt-Formel aus Satz I.4.4 sehen wir

$$\exp(X+Y) = \lim_{k\to\infty} \left(\exp \frac{X}{k} \exp \frac{Y}{k}\right)^k \in H,$$

da H abgeschlossen ist. Wegen $\mathbb{R}X, \mathbb{R}Y \subseteq \mathbf{L}(H)$ folgt daher auch $X + Y \in \mathbf{L}(H)$.
(ii) Analog zu (i) haben wir wegen der Kommutatorformel (Satz I.4.4):

$$\exp t[X,Y] = \lim_{k\to\infty} \left(\exp \frac{tX}{k} \exp \frac{Y}{k} \exp -\frac{tX}{k} \exp -\frac{Y}{k}\right)^{k^2} \in H. \qquad \blacksquare$$

Definition I.4.7. Die Lie-Algebra $\mathbf{L}(H)$ heißt die *Lie-Algebra der linearen Lie-Gruppe H.* ■

Für $H = \mathrm{GL}(V)$ erhalten wir natürlich

$$\mathbf{L}(\mathrm{GL}(V)) = \mathfrak{gl}(V) = \mathrm{End}(V)_L.$$

Für $V = \mathbb{R}^n$ ergibt sich entsprechend

$$\mathbf{L}(\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})) = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}).$$

Beispiel I.4.8. (Die spezielle lineare Gruppe) Die Menge

$$\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) = \{g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \colon \det(g) = 1\}$$

heißt *spezielle lineare Gruppe.* Sie ist eine lineare Lie-Gruppe mit

$$\mathbf{L}\big(\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})\big) = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \colon \mathrm{tr}\, X = 0\}$$

(Übung; siehe Satz I.4.2). ■

Bevor wir uns weitere Beispiele von Lie-Algebren linearer Gruppen anschauen, zuerst ein nützliches Lemma.

Lemma I.4.9. *Seien V und W endlichdimensionale reelle Vektorräume,*

$$\beta\colon V \times V \to W$$

eine bilineare Abbildung und $X \in \mathrm{End}(V)$, $Y \in \mathrm{End}(W)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\beta(X.v, v') + \beta(v, X.v') = Y.\beta(v, v')$ *für alle* $v, v' \in V$.

(ii) $\beta(e^{tX}.v, e^{tX}.v') = e^{tY}.\beta(v, v')$ *für alle* $v, v' \in V$, $t \in \mathbb{R}$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Induktiv erhalten wir

$$Y^n.\beta(v, v') = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \beta(X^k.v, X^{n-k}.v').$$

Bilden wir nun die Exponentialreihe, so folgt hieraus

$$\begin{aligned} e^Y.\beta(v, v') &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \beta(X^k.v, X^{n-k}.v) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \beta\left(\frac{1}{k!} X^k.v, \frac{1}{(n-k)!} X^{n-k}.v'\right) \\ &= \sum_{m,k=0}^{\infty} \beta\left(\frac{1}{k!} X^k.v, \frac{1}{m!} X^m.v'\right) \\ &= \beta\left(e^X.v, e^X.v'\right). \end{aligned}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i): Durch Ableiten in $t = 0$ erhalten wir aus (ii) die Beziehung

$$\beta(X.v, v') + \beta(v, X.v') = Y.\beta(v, v').$$ ■

Beispiel I.4.10. (Die unitäre Gruppe) Wir betrachten den endlichdimensionalen Hilbertraum $\mathbb{C}^n$ mit dem Skalarprodukt $\langle v, w\rangle = \sum_{j=1}^n v_j \overline{w}_j$. Sei

$$\begin{aligned} \mathrm{U}(n) &:= \{g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \colon (\forall v \in \mathbb{C}^n) \|g.v\| = \|v\|\} \\ &= \{g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \colon (\forall v, w \in \mathbb{C}^n) \langle g.v, g.w\rangle = \langle v, w\rangle\} \end{aligned}$$

die Gruppe der Isometrien von $\mathbb{C}^n$ (*die unitäre Gruppe*). Es ist klar, daß $\mathrm{U}(n)$ abgeschlossen ist (Sie ist sogar kompakt!).

Um die Lie-Algebra $\mathfrak{u}(n) := \mathbf{L}\big(\mathrm{U}(n)\big)$ zu berechnen, setzen wir in Lemma I.4.9 $V = \mathbb{C}^n$, $W = \mathbb{C}$ und $\beta(v, w) = \langle v, w\rangle$. Als Bedingung für $X \in \mathfrak{u}(n)$ erhalten wir so für alle $v, w \in \mathbb{C}^n$:

$$\langle X.v, w\rangle + \langle v, X.w\rangle = 0,$$

d.h.

$$\mathfrak{u}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \colon X^* = -X\}$$

ist der Raum der *schiefhermiteschen Abbildungen.* ■

Beispiel I.4.11. (Die orthogonale Gruppe) Ist $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ die Menge der orthogonalen $n \times n$-Matrizen, so erhalten wir die Lie-Algebra

$$\mathfrak{so}(n) := \mathbf{L}\left(\mathrm{O}(n,\mathbb{R})\right) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})\colon X^\top = -X\}.$$

Wir haben dazu in Lemma I.4.9 nur $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}$ und $\beta(v,w) = \langle v,w\rangle$ zu setzen. ■

Beispiel I.4.12. (Die Automorphismengruppe einer Lie-Algebra) Ist $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale reelle Lie-Algebra, so definieren wir die Automorphismengruppe

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) := \{g \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g})\colon (\forall X,Y \in \mathfrak{g})g.[X,Y] = [g.X,g.Y]\}.$$

Das ist eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$. Setzen wir in Lemma I.4.8 $V = W = \mathfrak{g}$ und $\beta(X,Y) = [X,Y]$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathfrak{aut}(\mathfrak{g}) &:= \mathbf{L}\left(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})\right) \\ &= \{D \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})\colon (\forall X,Y \in \mathfrak{g})D.[X,Y] = [D.X,Y] + [X,D.Y]\} = \mathrm{der}(\mathfrak{g}).\end{aligned}$$

■

Lemma I.4.13. *Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $W \subseteq V$ ein Untervektorraum und $X \in \mathrm{End}(V)$. Dann sind äquivalent:*
(i) $e^{tX}.W \subseteq W$ *für alle* $t \in \mathbb{R}$.
(ii) $X.W \subseteq W$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $w \in W$. Dann ist $\alpha(t) := e^{tX}.w$ eine differenzierbare Kurve in W, also auch $\alpha'(0) = X.w \in W$.
(ii) $\Rightarrow$ (i): Gilt $X.W \subseteq W$, so ist auch $X^n.W \subseteq W$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und wegen der Abgeschlossenheit von W folgt $e^{tX}.W \subseteq W$. ■

Beispiel I.4.14. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Ein Tupel $\mathcal{F} = (V_0,\ldots,V_n)$ aus Untervektorräumen mit

$$V_0 = \{0\} \subseteq V_1 \subseteq \ldots \subseteq V_n = V$$

nennt man eine *Fahne* in V. Wir betrachten die Gruppe

$$G(\mathcal{F}) := \{g \in \mathrm{GL}(V)\colon (\forall j)g.V_j \subseteq V_j\}.$$

Dann ist $G(\mathcal{F})$ eine lineare Lie-Gruppe mit

$$\mathfrak{g}(\mathcal{F}) := \mathbf{L}\left(G(\mathcal{F})\right) := \{X \in \mathfrak{gl}(V)\colon (\forall j)X.V_j \subseteq V_j\}$$

(vgl. Lemma I.4.13). ■

II. Halbeinfache Lie-Algebren und Moduln

In diesem Abschnitt werden wir uns einer besonders schönen Klasse von Darstellungen bzw. Moduln von Lie-Algebren zuwenden, den halbeinfachen. Halbeinfache Moduln lassen sich unter anderem dadurch charakterisieren, daß sie eine direkte Summe von einfachen Moduln sind, d.h. sie lassen sich problemlos aus einfachen Moduln zusammensetzen. Eng verwandt mit dieser Klasse von Moduln sind die Klassen der halbeinfachen und der reduktiven Lie-Algebren.

In diesem Abschnitt bezeichnet $\mathbb{K}$ wieder einen beliebigen Körper und $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra.

II.1. Halbeinfache Moduln

Zuerst machen wir uns mit einigen Begriffen aus der Darstellungstheorie vertraut.

Definition II.1.1. (a) Ist (ρ, V) eine Darstellung der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, so nennen wir V einen $\mathfrak{g}$*-Modul*. Schreiben wir kürzer $X.v := \rho(X)(v)$, so erhalten wir eine bilineare Abbildung

$$\mathfrak{g} \times V \to V, \quad (X, v) \mapsto X.v$$

mit

$$(1.1) \qquad [X,Y].v = X.(Y.v) - Y.(X.v) \quad \text{für alle} \quad X, Y \in \mathfrak{g}, v \in V.$$

Ist umgekehrt eine bilineare Abbildung $\mathfrak{g} \times V \to V$ gegeben, die (1.1) erfüllt, und definieren wir $\rho_V \colon \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ durch $\rho_V(X)(v) := X.v$, so ist ρ_V ein Homomorphismus von Lie-Algebren. In diesem Sinn sind die Begriffe „Darstellung“ und „Modul“ äquivalent. Es sind zwei Aspekte der gleichen Struktur.

(b) Sind V_1 und V_2 Moduln der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, so nennt man eine lineare Abbildung $\varphi\colon V_1 \to V_2$ einen *Homomorphismus von* $\mathfrak{g}$*-Moduln* oder $\mathfrak{g}$*-Homomorphismus*, wenn

$$\varphi(X.v) = X.\varphi(v) \quad \text{für alle} \quad X \in \mathfrak{g}, v \in V_1$$

gilt. Auf der Ebene der Darstellungen bedeutet diese Bedingung

$$\varphi \circ \rho_{V_1}(X) = \rho_{V_2}(X) \circ \varphi \quad \text{für alle } X \in \mathfrak{g}.$$

In diesem Sinn nennt man einen $\mathfrak{g}$-Homomorphisms auch einen *Vertauschungsoperator*. Er „vertauscht“ die Darstellung von $\mathfrak{g}$ auf V_1 mit der auf V_2. Wir schreiben $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_1, V_2)$ für den Vektorraum der $\mathfrak{g}$-Modulhomomorphismen von V_1 nach V_2.

Ist V ein $\mathfrak{g}$-Modul, so schreiben wir $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(V) := \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, V)$ für den Raum der $\mathfrak{g}$-Endomorphismen von V. Man sieht leicht ein, daß $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(V)$ eine assoziative Unteralgebra von $\mathrm{End}(V)$, d.h. unter Komposition abgeschlossen ist (Übung!). Wegen

$$\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(V) = \{A \in \mathrm{End}(V) \colon (\forall X \in \mathfrak{g})\ \rho_V(X)A = A\rho_V(X)\}$$

nennt man $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(V)$ auch den *Kommutanten von* $\rho(\mathfrak{g})$. ■

Definition II.1.2. (a) Ist $(\rho_j, V_j)_{j \in J}$ eine Familie von $\mathfrak{g}$-Moduln, so wird die direkte Summe $V := \bigoplus_{j \in J} V_j$ durch

$$X.(v_j)_{j \in J} := (X.v_j)_{j \in J}$$

zu einem $\mathfrak{g}$-Modul (Nachweis!). D.h. man wendet die Elemente von $\mathfrak{g}$ auf ein Tupel $v = (v_j)_{j \in J} \in V$ komponentenweise an.

Ist $J = \{1, \ldots, n\}$ und $\rho \colon \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ die Darstellung von $\mathfrak{g}$ auf $V := V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$, so kann man sich die linearen Abbildungen $\rho(X)$, $X \in \mathfrak{g}$, als Blockmatrizen vorstellen, wenn man V gemäß der Zerlegung $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$ aufspaltet:

$$\rho(X) = \begin{pmatrix} \rho_1(X) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \rho_2(X) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \rho_n(X) \end{pmatrix}.$$

(b) Ein Untervektorraum W eines $\mathfrak{g}$-Moduls V heißt *Untermodul*, wenn $\mathfrak{g}.W \subseteq W$ gilt, d.h. wenn W unter $\mathfrak{g}$ invariant ist. Natürlich ist W in diesem Fall ebenfalls ein $\mathfrak{g}$-Modul, wobei die zugehörige Darstellung ρ_W durch $\rho_W(X) := \rho_V(X)\,|_W$ für $X \in \mathfrak{g}$ gegeben ist. Man sieht leicht, daß Kerne und Bilder von Modulhomomorphismen wieder Untermoduln sind.

Ist $W \subseteq V$ ein Untermodul und $W' \subseteq V$ ein Vektorraumkomplement von W, so daß $V = W + W'$ eine direkte Vektorraumsumme ist, so haben die Blockmatrizen, die zu den Operatoren $\rho_V(X)$, $X \in \mathfrak{g}$, gehören, die Gestalt

$$\rho_V(X) = \begin{pmatrix} \rho_W(X) & * \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

Im folgenden werden wir einfach $V = W \oplus W'$ schreiben – auch wenn wir damit eigentlich nur meinen, daß die kanonische Additionsabbildung $W \oplus W' \to V, (w, w') \mapsto w + w'$ bijektiv ist.

(c) Ist $W \subseteq V$ ein Untermodul des $\mathfrak{g}$-Moduls V, so erhalten wir in natürlicher Weise auf dem Quotientenraum V/W die Struktur eines $\mathfrak{g}$-Moduls durch $\rho_{V/W}(X)(v+W) := \rho_V(X)(v) + W$ für $X \in \mathfrak{g}$, $v \in V$ (Nachweis!). Man beachte, daß die linke Seite wohldefiniert ist, da $X.W \subseteq W$ gilt. Den $\mathfrak{g}$-Modul V/W nennt man *Quotientenmodul von V und W*.

Beschreiben wir die Operatoren auf V wie unter (a) durch Blockmatrizen, so ist

$$\rho_V(X) = \begin{pmatrix} \rho_W(X) & * \\ 0 & \rho_{V/W}(X) \end{pmatrix},$$

wenn wir V/W mit einem komplementären Unterraum W' zu W über den Vektorraumisomorphismus $W' \to V/W, w' \mapsto w' + W$ identifizieren.
(d) Ist W ein Untermodul, so nennt man einen Untermodul $W' \subseteq V$ ein *Modulkomplement*, wenn die Abbildung

$$S \colon W \oplus W' \to V, \quad (w, w') \mapsto w + w'$$

eine Bijektion ist, d.h., wenn V die direkte Vektorraumsumme von W und W' ist. Man verifiziert sofort, daß die Abbildung S in diesem Fall sogar ein Isomorphismus von $\mathfrak{g}$-Moduln ist, d.h. die für Vektorräume eingeführte Notation $V = W \oplus W'$ ist auch für $\mathfrak{g}$-Moduln gerechtfertigt.

In diesem Fall haben die Blockmatrizen, die bzgl. der Zerlegung $V = W \oplus W'$ zu den Operatoren $\rho_V(X)$, $X \in \mathfrak{g}$, gehören, sogar Blockdiagonalgestalt:

$$\rho_V(X) = \begin{pmatrix} \rho_W(x) & 0 \\ 0 & \rho_{W'}(x) \end{pmatrix}.$$

(e) Ein $\mathfrak{g}$-Modul $V \neq \{0\}$ heißt *einfach*, wenn $\{0\}$ und V die einzigen Untermoduln von V sind. Er heißt *halbeinfach*, wenn jeder Untermodul ein Modulkomplement besitzt.

Ein $\mathfrak{g}$-Modul V heißt *trivial*, wenn $\mathfrak{g}.V = \{0\}$ gilt. Der eindimensionale triviale $\mathfrak{g}$-Modul $V = \mathbb{K}$ ist ein einfacher Modul.
(f) Ist $(U_j)_{j \in J}$ eine Familie von Untermoduln von V, so ist $\bigcap_{j \in J} U_j$ ebenfalls ein Untermodul. Ist $E \subseteq V$ eine Teilmenge, so heißt

$$\langle E \rangle_{\mathrm{Mod}} := \bigcap \{U \subseteq V \colon U \text{ Untermodul}, \ E \subseteq U\}$$

der von E erzeugte Untermodul von V. Das ist der kleinste Untermodul von V, der E enthält. ■

Der Gegenstand dieses Abschnitts ist die Struktur halbeinfacher $\mathfrak{g}$-Moduln.

Lemma II.1.3. *Untermoduln und Quotienten halbeinfacher Moduln sind halbeinfach.*

Beweis. Sei V ein halbeinfacher Modul und $W \subseteq V$ ein Untermodul.

Wir zeigen zuerst, daß W halbeinfach ist. Sei dazu $U \subseteq W$ ein Untermodul. Wir haben ein Komplement zu U in W zu finden. Dazu sei $U' \subseteq V$ ein

Modulkomplement des Untermoduls U von V. Dann ist $U' \cap W$ ein Modulkomplement zu U in W, denn $U \cap (U' \cap W) \subseteq U \cap U' = \{0\}$ und wegen $W \subseteq U + U'$ und $U \subseteq W$ gilt auch $W \subseteq U + (U' \cap W)$.

Jetzt zeigen wir, daß auch V/W ein halbeinfacher $\mathfrak{g}$-Modul ist. Sei dazu $\pi: V \to V/W$ die kanonische Projektion und $W' \subseteq V$ ein Modulkomplement zu W. Dann ist $\pi|_{W'}: W' \to V/W$ ein Modulisomorphismus. Da W' wegen dem ersten Teil halbeinfach ist, gilt dies auch für V/W. ■

Wesentliches Hilfsmittel zum Erkennen halbeinfacher Moduln ist der folgende Satz II.1.4. Vor allen Dingen (2) ist am einfachsten nachzuprüfen.

Hauptsatz über halbeinfache Moduln

Satz II.1.4. *Für einen $\mathfrak{g}$-Modul V sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *V ist ein halbeinfacher Modul.*

(2) *V ist Summe einfacher Moduln.*

(3) *V ist direkte Summe einfacher Moduln.*

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2): Wir zeigen zuerst, daß jeder halbeinfache $\mathfrak{g}$-Modul $W \neq \{0\}$ einen von $\{0\}$ verschiedenen einfachen Untermodul enthält. Sei dazu $0 \neq w \in W$ und o.B.d.A. W von w erzeugt (Definition II.1.2(f)), denn nach Lemma II.1.3 ist auch jeder Untermodul von W halbeinfach.

Wir betrachten die Menge $\mathcal{M}$ aller Untermoduln von W, die w nicht enthalten, und ordnen $\mathcal{M}$ durch die Mengeninklusion. Man sieht nun leicht ein, daß jede Kette in $\mathcal{M}$ eine obere Schranke hat, so daß die Existenz eines maximalen Elements $M \in \mathcal{M}$ aus dem Zornschen Lemma folgt. Nach Voraussetzung ist W halbeinfach, und wir finden einen komplementären Untermodul M' zu M in W. Ist nun $\{0\} \neq M_1' \subseteq M'$ ein Untermodul, so folgt aus der Maximalität von M, daß $w \in M + M_1'$ ist. Da W von w erzeugt wird, folgt daher $W = M + M_1'$, also $M_1' = M'$, da $W \cong M \oplus M'$ eine direkte Vektorraumsumme ist. Hieraus folgt, daß M' ein einfacher $\mathfrak{g}$-Modul ist.

Sei nun V ein halbeinfacher $\mathfrak{g}$-Modul und $V_0 \subseteq V$ die Summe aller einfachen Untermoduln. Wir finden zu V_0 ein Modulkomplement U, das nach Lemma II.1.3 halbeinfach ist. Ist $U \neq \{0\}$, so liefert das Argument von oben einen einfachen Untermodul von U, und wir erhalten einen Widerspruch zur Konstruktion von V_0. Also ist $U = \{0\}$ und $V = V_0$, d.h. V ist Summe einfacher Moduln.

(2) $\Rightarrow$ (3): Wir betrachten nun die Menge $\mathcal{M}$ aller Mengen einfacher Untermoduln, deren Summe direkt ist. Wir ordnen die Menge $\mathcal{M}$ durch Inklusion. Dann hat jede Kette eine obere Schranke, und das Zornsche Lemma liefert ein maximales Element $\{V_i : i \in I\}$ von $\mathcal{M}$. Sei $W := \sum_{i \in I} V_i \cong \bigoplus_{i \in I} V_i$. Wir haben zu zeigen, daß $W = V$ ist. Nehmen wir an, das sei nicht so. Dann existiert nach Voraussetzung ein einfacher Modul $U \subseteq V$ mit $W + U \neq W$. Da U einfach ist, und $U \not\subseteq W$ gilt, ist $U \cap W = \{0\}$. Also ist die Summe $U + \sum_{i \in I} V_i$ direkt, im Widerspruch zur Maximalität der Familie $\{V_i : i \in I\}$.

(3) $\Rightarrow$ (1): Sei $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$ und $W \subseteq V$ ein Untermodul. Mit dem Zornschen Lemma finden wir eine maximale Teilmenge $J \subseteq I$ mit $W \cap (\sum_{i \in J} V_i) = \{0\}$.

Wir setzen $W' := \sum_{i \in J} V_i$. Dann ist $W \cap W' = \{0\}$. Es bleibt $W + W' = V$ zu zeigen.

Sei dazu $i \in I$ beliebig. Ist $i \in J$, so ist $V_i \subseteq W' \subseteq W + W'$. Für $i \notin J$ haben wir wegen der Maximalität von J die Beziehung $(W' + V_i) \cap W \neq \{0\}$ und damit $(W + W') \cap V_i \neq \{0\}$. Wegen der Einfachheit von V_i folgt hieraus $V_i \subseteq W + W'$ und damit die Behauptung. ∎

Die folgende Eigenschaft halbeinfacher Moduln wird uns noch oft sehr nützlich sein.

Lemma II.1.5. *Sei V ein halbeinfacher $\mathfrak{g}$-Modul. Wir setzen*

$$V_{\rm fix} := \{v \in V : \mathfrak{g}.v = \{0\}\} \quad \text{und} \quad V_{\rm eff} := \operatorname{span} \mathfrak{g}.V.$$

Dann ist $V \cong V_{\rm fix} \oplus V_{\rm eff}$ eine direkte Summe von $\mathfrak{g}$-Moduln.

Beweis. Zunächst ist $V_{\rm eff}$ ein Untermodul von V. Wegen der Halbeinfachheit finden wir ein Modulkomplement W zu $V_{\rm eff}$. Damit ist $\mathfrak{g}.W \subseteq W \cap V_{\rm eff} = \{0\}$, d.h. $W \subseteq V_{\rm fix}$. Wir haben also $V = V_{\rm eff} + V_{\rm fix}$. Ist nun $U \subseteq V_{\rm eff}$ ein Modulkomplement zu $V_{\rm eff} \cap V_{\rm fix}$, so haben wir $\mathfrak{g}.V = \mathfrak{g}.V_{\rm eff} = \mathfrak{g}.U \subseteq U$, also $V_{\rm eff} \subseteq U$. Damit ist $V_{\rm fix} \cap V_{\rm eff} = \{0\}$. ∎

Lemma II.1.6. (Schursches Lemma) *Für einfache Moduln V und W der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ gilt:*

(i) $\operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W) = \{0\}$, *falls V und W nicht isomorph sind.*

(ii) $\operatorname{End}_{\mathfrak{g}}(V)$ *ist eine Divisionsalgebra, d.h. jedes von Null verschiedene Element ist invertierbar.*

(iii) *Ist V endlichdimensional und $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen, so ist*

$$\operatorname{End}_{\mathfrak{g}}(V) = \mathbb{K}\mathbf{1}.$$

Beweis. (i) Sei $A: V \to W$ ein Homomorphismus von $\mathfrak{g}$-Moduln. Ist $A \neq 0$, so ist $A(V) \subseteq W$ ein Untermodul, der von $\{0\}$ verschieden ist, also $A(V) = W$, da W einfach ist. Ebenso sieht man $\ker A = \{0\}$ ein. Also ist A bijektiv, d.h. eine Isomorphismus und somit $V \cong W$.

(ii) Es ist klar, daß $\operatorname{End}_{\mathfrak{g}}(V)$ eine Algebra ist. Da jedes von Null verschiedene Element $A \in \operatorname{End}_{\mathfrak{g}}(V)$ nach den Überlegungen aus (i) invertierbar ist, ist $\operatorname{End}_{\mathfrak{g}}(V)$ eine Divisionsalgebra.

(iii) Sei $A \in \operatorname{End}_{\mathfrak{g}}(V)$. Da $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen ist, hat das charakteristische Polynom $\det(A - t\mathbf{1})$ eine Nullstelle λ. Daher existiert ein Eigenvektor $0 \neq v \in V$ zu einem Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$. Da der Eigenraum $V^\lambda(A)$ von A zu diesem Eigenwert ein Untermodul ist (Nachweis!), folgt $V^\lambda(A) = V$ aus der Einfachheit von V. Also ist $A = \lambda\mathbf{1}$ und somit $\operatorname{End}_{\mathfrak{g}}(V) = \mathbb{K}\mathbf{1}$. ∎

II.2. Halbeinfache und reduktive Lie-Algebren

Definition II.2.1. (a) Eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt *reduktiv*, wenn $\mathfrak{g}$ bzgl. der adjungierten Darstellung ein halbeinfacher Modul ist. Da die Untermoduln bzgl. der adjungierten Darstellung gerade die Ideale von $\mathfrak{g}$ sind, bedeutet dies, daß zu jedem Ideal $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ ein komplementäres Ideal $\mathfrak{b} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ existiert.
(b) Eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt *perfekt*, wenn $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ ist. Man beachte, daß $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ ein Ideal von $\mathfrak{g}$ ist.
(c) Eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt *einfach*, wenn $\mathfrak{g}$ ein nichttrivialer einfacher $\mathfrak{g}$-Modul bzgl. der adjungierten Darstellung ist.

Ist $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ eine Lie-Algebra, die außer $\{0\}$ und $\mathfrak{g}$ keine Ideale enthält, so gibt es für das Ideal $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ zwei Möglichkeiten. Ist $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \{0\}$, so ist $\mathfrak{g}$ abelsch und daher $\mathfrak{g} \cong \mathbb{K}$, da jeder Untervektorraum von $\mathfrak{g}$ ein Ideal ist. Diesen Fall hat man in der Definition einfacher Lie-Algebren ausgeschlossen. Ist $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq \{0\}$, so ist $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Eine einfache Lie-Algebra ist also insbesondere perfekt.
(d) Eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt *halbeinfach*, wenn sie eine direkte Summe von einfachen Idealen ist. ■

Lemma II.2.2. *Ist $\mathfrak{g}$ halbeinfach, so gilt:*
(i) $\mathfrak{g}$ *ist perfekt.*
(ii) $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$.
(iii) $\mathfrak{g}$ *ist reduktiv.*

Beweis. Da $\mathfrak{g}$ halbeinfach ist, gilt $\mathfrak{g} \cong \bigoplus_{j \in J} \mathfrak{g}_j$ mit einfachen Lie-Algebren $\mathfrak{g}_j$.
(i) Daher ist $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \bigoplus_{j \in J} [\mathfrak{g}_j, \mathfrak{g}_j] = \bigoplus_{j \in J} \mathfrak{g}_j = \mathfrak{g}$.
(ii) Da $\mathfrak{g}_j$ nicht abelsch ist, ist $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_j)$ ist ein echtes Ideal, also $\{0\}$, da $\mathfrak{g}_j$ einfach ist. Weiter ist $\mathfrak{g}$ eine direkte Summe, und daher

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cong \bigoplus_{j \in J} \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_j) = \{0\}.$$

(iii) Jedes der einfachen Ideale $\mathfrak{g}_j$ ist ein einfacher $\mathfrak{g}$-Modul, so daß aus Satz II.1.4 folgt, daß $\mathfrak{g}$ ein halbeinfacher $\mathfrak{g}$-Modul, also eine reduktive Lie-Algebra ist. ■

Satz II.2.3. *Sei $\mathfrak{g}$ eine reduktive Lie-Algebra.*
(i) *Ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal, so sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ reduktiv.*
(ii) $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *und* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *ist halbeinfach.*
(iii) $\mathfrak{g}$ *ist genau dann halbeinfach, wenn $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$ ist.*

Beweis. (i) Nach Voraussetzung existiert ein Ideal $\mathfrak{b} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$. Dann ist $[\mathfrak{b}, \mathfrak{a}] = \{0\}$, so daß jedes Ideal von $\mathfrak{a}$ auch ein Ideal von $\mathfrak{g}$ ist. Die Ideale von $\mathfrak{a}$ sind also genau die $\mathfrak{g}$-Untermoduln von $\mathfrak{a}$ bzgl. der adjungierten Darstellung. Aus Lemma II.1.3 folgt, daß $\mathfrak{a}$ ein halbeinfacher $\mathfrak{g}$-Modul ist, also existiert zu jedem Ideal von $\mathfrak{a}$ ein komplementäres Ideal, d.h. $\mathfrak{a}$ ist eine reduktive Lie-Algebra.

Wegen $\mathfrak{g}/\mathfrak{a} \cong \mathfrak{b}$ folgt die Reduktivität von $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ direkt aus dem ersten Teil, den wir auf das Ideal $\mathfrak{b}$ anwenden.

(ii) Aus Lemma II.1.5 erhalten wir die $\mathfrak{g}$-Modulzerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\text{fix}} \oplus \mathfrak{g}_{\text{eff}}$. Die erste Behauptung folgt nun aus $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}_{\text{fix}}$ und $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}_{\text{eff}}$.

Wegen (i) ist $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ reduktiv, also ein halbeinfacher $\mathfrak{g}$-Modul und somit wegen Satz II.1.4 eine direkte Summe einfacher Untermoduln $\mathfrak{g}_j$, $j \in J$. Jeder dieser Untermoduln ist ein Ideal von $\mathfrak{g}$. Mit der Überlegung aus (i) sieht man, daß $\mathfrak{g}_j$ außer $\{0\}$ und $\mathfrak{g}_j$ keine Ideale besitzt. Ist $\mathfrak{g}_j$ abelsch, so folgt $\mathfrak{g}_j \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ aus $[\mathfrak{g}_j, \mathfrak{g}_k] = \{0\}$ für $k \neq j$, im Widerspruch zu $\mathfrak{g}_j \subseteq [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ und dem ersten Teil von (ii). Also ist $\mathfrak{g}_j$ einfach und $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ damit halbeinfach.

(iii) Ist $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$, so folgt die Halbeinfachheit von $\mathfrak{g}$ aus (ii). Ist andererseits $\mathfrak{g}$ halbeinfach, so folgt $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$ aus Lemma II.2.2. ■

Satz II.2.4. (Ideale halbeinfacher Lie-Algebren) *Sei $\mathfrak{g} = \bigoplus_{j\in J} \mathfrak{g}_j$ eine halbeinfache Lie-Algebra, wobei alle Ideale $\mathfrak{g}_j$ einfach sind. Dann ist die Abbildung*

$$\mathfrak{P}(J) \to \mathrm{Ideal}(\mathfrak{g}), \quad M \mapsto \mathfrak{g}_M := \sum_{j\in M} \mathfrak{g}_j$$

eine Bijektion der Menge $\mathfrak{P}(J)$ aller Teilmengen von J auf die Menge Ideal($\mathfrak{g}$) *der Ideale von $\mathfrak{g}$. Insbesondere ist jedes Ideal von $\mathfrak{g}$ halbeinfach und alle homomorphen Bilder von $\mathfrak{g}$ sind halbeinfach.*

Beweis. Da $\mathfrak{g}_M$ eine Summe von Idealen ist, ist $\mathfrak{g}_M$ für jede Teilmenge $M \subseteq J$ ein Ideal von $\mathfrak{g}$. Weiter ist klar, daß die Zuordnung $M \mapsto \mathfrak{g}_M$ injektiv ist.

Sei nun $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ ein Ideal. Wir setzen $M := \{j \in J \colon \mathfrak{g}_j \subseteq \mathfrak{a}\}$. Dann ist $\mathfrak{g}_M \subseteq \mathfrak{a}$. Wir haben nur noch zu zeigen, daß $\mathfrak{g}_M = \mathfrak{a}$ ist. Sei dazu $x = (x_j)_{j\in J} \in \mathfrak{a}$. Ist $x_j \neq 0$, so erhalten wir wegen $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_j) = \{0\}$

$$\{0\} \neq [x_j, \mathfrak{g}_j] = [x, \mathfrak{g}_j] \subseteq \mathfrak{g}_j \cap \mathfrak{a}.$$

Da $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_j \trianglelefteq \mathfrak{g}_j$ ein Ideal ist, folgt hieraus wegen der Einfachheit von $\mathfrak{g}_j$ die Beziehung $\mathfrak{g}_j = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_j \subseteq \mathfrak{a}$. Folglich ist $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}_M$, also $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}_M$.

Aus $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}_M \oplus \mathfrak{g}_{J\setminus M}$ folgt sofort, daß der Quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_M \cong \mathfrak{g}_{J\setminus M}$ ebenfalls halbeinfach ist. ■

Beispiel II.2.5. Wir werden später sehen, daß die folgenden Lie-Algebren Beispiele für einfache Lie-Algebren über $\mathbb{K}$ liefern, und daß man so die wichtigsten Beispiele erfaßt hat.

Typ A_n: Die Algebra $\mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{K})$ für $n \in \mathbb{N}$ und $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$.
Typ B_n: Die Algebra $\mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{K}) = \mathfrak{o}(2n+1,\mathbb{K})$ für $n \geq 2$.
Typ C_n: Die Algebra $\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{K})$ für $n \geq 1$.
Typ D_n: Die Algebra $\mathfrak{so}(2n,\mathbb{K}) = \mathfrak{o}(2n,\mathbb{K})$ für $n \geq 3$.

Unter diesen Algebren gibt es für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ einige Isomorphismen, die man nicht auf den ersten Blick sieht:

$$\mathfrak{so}(3,\mathbb{C}) \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) = \mathfrak{sp}(2,\mathbb{C}).$$

Die Lie-Algebra

$$\mathfrak{so}(4,\mathbb{C}) \cong \mathfrak{so}(3,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{so}(3,\mathbb{C})$$

ist nicht einfach, sondern Summe zweier einfacher Ideale.

Uns stehen an dieser Stelle noch nicht die Mittel zur Verfügung, um die Einfachheit obiger Lie-Algebren direkt zu beweisen. Wir betrachten daher nur den kleinsten Spezialfall $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$, $\operatorname{char}\mathbb{K} \neq 2$. Diese Lie-Algebra wird von den Elementen

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

aufgespannt, wobei

$$[h,e] = 2e, \quad [h,f] = -2f \quad \text{und} \quad [e,f] = h.$$

Damit ist klar, daß $\mathfrak{g}$ perfekt ist. Um einzusehen, daß $\mathfrak{g}$ einfach ist, zeigen wir, daß jedes Ideal $\mathfrak{a} \neq \{0\}$ schon mit $\mathfrak{g}$ übereinstimmt. An den Kommutatorformeln sieht man $(\operatorname{ad} f)^2(\mathfrak{g}) = \mathbb{K}f$ und $\ker(\operatorname{ad} f)^2 = \mathbb{K}f + \mathbb{K}h$. Ist $(\operatorname{ad} f)^2(\mathfrak{a}) = \{0\}$, so ist $\mathfrak{a}$ in der zweidimensionalen Unteralgebra $\mathbb{K}f + \mathbb{K}h$ enthalten. Ist $\operatorname{ad} f(\mathfrak{a}) = \{0\}$, so folgt $\mathfrak{a} = \mathbb{K}f$, ein Widerspruch zu $[e,f] = h \notin \mathfrak{a}$. Also ist $[f,\mathfrak{a}] \neq \{0\}$ und damit $\mathbb{K}f = [f,\mathfrak{a}] \subseteq \mathfrak{a}$. Damit ist $e \in (\operatorname{ad} e)^2(\mathfrak{a})$, im Widerspruch zu $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}h + \mathbb{K}f$. Also ist $\mathbb{K}f \subseteq (\operatorname{ad} f)^2(\mathfrak{a})$, und damit $h = [e,f] \in \mathfrak{a}$ sowie $e \in \mathbb{K}[e,h] \subseteq \mathfrak{a}$, d.h. $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}$. ■

II.3. Die Jordan-Zerlegung

In diesem Abschnitt werden wir uns einige Konsequenzen der Jordan-Zerlegung [1] eines Endomorphismus eines Vektorraums für die Theorie der Lie-Algebren ansehen. Die Grundideen der Jordan-Zerlegung durchziehen wie ein roter Faden die gesamte endlichdimensionale Darstellungstheorie sowie die Theorie der endlichdimensionalen Lie-Algebren.

In diesem Abschnitt sind alle Vektorräume und Lie-Algebren über einem Körper $\mathbb{K}$ der Charakteristik 0 definiert, d.h., $\mathbb{Q}$ ist ein Unterkörper von $\mathbb{K}$.

[1] Camille Jordan (1838–1922), frz. Mathematiker in Paris. Er schrieb in den 1870er Jahren das erste Lehrbuch, das die Galoissche Theorie der Polynomgleichungen behandelte. Hierdurch machte er die Galoisschen Ideen der mathematischen Fachwelt zugänglich, was der noch jungen Gruppentheorie wichtige Impulse gab. Unter anderem regte es Sophus Lie an, über eine Galoissche Theorie der Differentialgleichungen nachzudenken, auf der die moderne Theorie der Symmetrien von Differentialgleichungen beruht.

Definition II.3.1. (a) Sei V ein Vektorraum, $M \in \mathrm{End}(V)$ sowie $\lambda \in \mathbb{K}$. Wir definieren den *Eigenraum zum Eigenwert* λ als $V^\lambda(M) := \ker(M - \lambda\mathbf{1})$ und den *verallgemeinerten Eigenraum zum Eigenwert* λ als

$$V_\lambda(M) := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \ker(M - \lambda\mathbf{1})^n.$$

Man beachte hierbei, daß die aufsteigende Folge $\ker(M - \lambda\mathbf{1})^n$ schließlich konstant wird, falls $\dim V < \infty$ ist.
(b) Wir nennen M *diagonalisierbar*, wenn $V = \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{K}} V^\lambda(M)$ gilt, d.h. V ist direkte Summe der Eigenräume von M.
(c) Wir nennen M *halbeinfach*, wenn V als Modul der Lie-Algebra $\mathbb{K}M \subseteq \mathrm{End}(V)$ halbeinfach ist, d.h., wenn zu jedem M-invarianten Unterraum U ein komplementärer M-invarianter Unterraum U' mit $V = U \oplus U'$ existiert.
(d) Ein Endomorphismus $M \in \mathrm{End}(V)$ heißt *nilpotent*, wenn ein $n \in \mathbb{N}$ mit $M^n = 0$ existiert.

Ist M nilpotent, so gilt insbesondere $V = V_0(M)$, aber wenn V unendlichdimensional ist, gilt die Umkehrung i.a. nicht (Übung). ■

Lemma II.3.2. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $M \in \mathrm{End}(V)$. Dann gelten folgende Aussagen:*

(i) *Ist $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen, so ist M ist genau dann halbeinfach, wenn M diagonalisierbar ist.*

(ii) *Seien $M, N \in \mathrm{End}(V)$ mit $[M, N] = 0$. Dann gilt:*

  (a) *Sind M und N diagonalisierbar, so ist auch die Summe $M + N$ diagonalisierbar.*

  (b) *Sind M und N nilpotent, so ist auch die Summe $M + N$ nilpotent.*

Beweis. (i) Ist M diagonalisierbar, so ist V direkte Summe der Eigenräume. Damit ist V auch Summe von eindimensionalen M-invarianten Unterräumen, die natürlich einfache Untermoduln der Lie-Algebra $\mathbb{K}M$ sind. Die Halbeinfachheit folgt damit aus Satz II.1.4.

Ist M halbeinfach, so ist V nach Satz II.1.4 direkte Summe von einfachen $\mathbb{K}M$-Untermoduln. Es reicht daher zu zeigen, daß jeder einfache $\mathbb{K}M$-Modul eindimensional ist, denn jeder eindimensionale $\mathbb{K}M$-Untermodul wird von einem Eigenvektor von M aufgespannt.

Wir nehmen daher an, daß $\{0\} \neq V$ außer V und $\{0\}$ keinen M-invarianten Unterraum enthält. Wir müssen zuerst aussschließen, daß V unendlichdimensional ist. Sei dazu $v \in V\setminus\{0\}$. Dann ist $V = \mathrm{span}\{M^n.v : n \in \mathbb{N}_0\}$, da die rechte Seite ein M-invarianter Unterraum ist, der v enthält. Sind alle Elemente der Gestalt $M^n.v$, $n \in \mathbb{N}_0$, linear unabhängig, so ist $\mathrm{span}\{M^n.v : n \in \mathbb{N}\}$ ein echter M-invarianter Unterraum von V, im Widerspruch zu unserer Annahme. Also existiert ein $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, \ldots, a_{n-1}$ mit $M^n.v = \sum_{j=0}^{n-1} a_j M^j.v$. Hieraus ergibt sich induktiv sofort, daß sich jedes Element $M^m.v$, $m \geq n$, als Linearkombination von $v, M.v, \ldots, M^{n-1}.v$, darstellen läßt, d.h. V is endlichdimensional. Also hat M in V einen Eigenvektor, da $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen ist. Wegen der Minimalität von V ist $\dim V = 1$.

(ii) Für jeden Eigenvektor $v \in V^\lambda(M)$ gilt

$$M(Nv) = N(Mv) = \lambda Nv.$$

Also läßt N die Eigenräume von M invariant. Da N diagonalisierbar ist, gilt dies wegen (i) und Lemma II.1.3 auch für die Einschränkung von N auf die Eigenräume von M (Für den Fall allgemeiner Körper ist man hierbei nicht auf (i) angewiesen. Er wurde in den Übungen behandelt). Damit ist klar, daß $M+N$ diagonalisierbar ist.
(iii) Sei $M^m = N^n = 0$. Dann haben wir wegen $[M,N] = 0$ und der binomischen Formel

$$(M+N)^k = \sum_{i+j=k} \binom{k}{i} M^i N^j.$$

Ist $k \geq n+m-1$, so ist entweder $i \geq m$ oder $j \geq n$, d.h. alle Summanden verschwinden. Folglich ist $(M+N)^k = 0$, d.h. $M+N$ ist nilpotent. ∎

Für den Rest dieses Abschnitts werden wir voraussetzen, daß $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen ist.

Die Jordan-Zerlegung eines Endomorphismus

Theorem II.3.3. *Sei $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen und V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zu jedem $M \in \mathrm{End}(V)$ existieren eine diagonalisierbare lineare Abbildung M_s und eine nilpotente lineare Abbildung M_n, so daß*

(i) $M = M_s + M_n$.

(ii) *Die Eigenräume von M_s sind genau die verallgemeinerten Eigenräume von M, d.h. $V^\lambda(M_s) = V_\lambda(M)$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$.*

(iii) *Es existieren Polynome $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ ohne konstanten Term mit $M_s = P(M)$ und $M_n = Q(M)$.*

(iv) *Vertauscht $L \in \mathrm{End}(V)$ mit M, so auch mit M_s und M_n.*

(v) (Eindeutigkeit der Jordan-Zerlegung) *Sind $S, N \in \mathrm{End}(V)$, S diagonalisierbar und N nilpotent mit $[S,N] = 0$, so ist $S = M_s$ und $N = M_n$.*

Beweis. Sei zunächst $f \in \mathbb{K}[X]$ das Minimalpolynom von M, sowie

$$f = (X-\lambda_1)^{k_1}(X-\lambda_2)^{k_2}\cdots(X-\lambda_m)^{k_m}$$

die Zerlegung in Linearfaktoren, die existiert, da $\mathbb{K}$ ist algebraisch abgeschlossen ist. Sei $f_i := f/(X-\lambda_i)^{k_i}$. Wir betrachten das Ideal

$$I = (f_1) + \ldots + (f_m) \subseteq \mathbb{K}[X].$$

Dieses Ideal wird von einem Element g erzeugt, das gemeinsamer Teiler aller Polynome f_i ist. Also ist g konstant und somit $I = \mathbb{K}[X]$. Wir finden daher Polynome $r_1, \ldots, r_m \in \mathbb{K}[X]$ mit

$$1 = r_1 f_1 + \ldots + r_m f_m.$$

Sei $E_i := (r_i f_i)(M) \in \mathrm{End}(V)$. Dann kommutieren die Abbildungen E_i mit allen linearen Abbildungen, die mit M kommutieren, denn sie sind Polynome in M. Für $i \neq j$ ist f ein Teiler von $r_i f_i r_j f_j$. Wegen $f(M) = 0$ ist daher $E_i E_j = 0$. Daraus folgt $E_i^2 = E_i\big(\sum_{j=1}^m E_j\big) = E_i$. Also sind die E_i kommutierende Projektoren auf Unterräume $V_i \subseteq V$ mit $V = \bigoplus_{i=1}^m V_i$ (wegen $\sum_{i=1}^m E_i$). Die Abbildung $M_s := \sum_{i=1}^m \lambda_i E_i$ ist also diagonalisierbar mit $V_i = V^{\lambda_i}(M_s)$.

Wegen $[M, E_i] = 0$ läßt M die Unterräume V_i invariant. Damit läßt auch $f_i(M)$ den Unterraum V_i invariant. Wegen

$$\mathrm{id}_{V_i} = E_i\,|_{V_i} = r_i(M) f_i(M)\,|_{V_i}$$

ist die Einschränkung von $f_i(M)$ auf V_i sogar invertierbar. Mit $f(M) = 0$ folgt daher

$$(M - \lambda_i \mathbf{1})^{k_i}(V_i) = (M - \lambda_i \mathbf{1})^{k_i}\big(f_i(M)(V_i)\big) = f(M)(V_i) = \{0\},$$

d.h. $V_i \subseteq V_{\lambda_i}(M)$.

Setzen wir $M_n := M - M_s$ und $k_0 := \max\{k_i \colon i = 1, \ldots, m\}$, so folgt damit sofort, daß $M_n^{k_0} = 0$ ist.

(ii) Wir zeigen jetzt noch, daß $V_i = V_{\lambda_i}(M)$ ist. Hieraus folgt schließlich (ii). Die Inklusion $V_i \subseteq V_{\lambda_i}(M)$ haben wir schon eingesehen, bleibt also nur noch die andere zu zeigen. Sei also $v \in V_{\lambda_i}(M)$, sowie $v = \sum_{j=1}^m v_j$ mit $v_j \in V_j$. Dann folgt aus der Invarianz von V_j unter M sofort, daß $v_j \in V_{\lambda_i}(M)$ ist. Ist $v_j \neq 0$, so existiert also ein Eigenvektor $v_j' \in V^{\lambda_i}(M) \cap V_j$. Hierzu setze man $v_j' = (M - \lambda_i \mathbf{1})^k.v_j$, wobei k maximal ist mit der Eigenschaft, daß dieser Vektor nicht verschwindet. Nun ist $(M - \lambda_j \mathbf{1})^{n_j}.v_j' = (\lambda_i - \lambda_j)^{n_j} v_j' = 0$, also $\lambda_j = \lambda_i$, d.h. $j = i$. Hieraus folgt $v = v_i \in V_i$ und damit $V_{\lambda_i}(M) = V_i$.

(iii) Wir haben schon gesehen, daß $M_s = P_1(M)$ und $M_n = Q_1(M)$ für gewisse Polynome $P_1, Q_1 \in \mathbb{K}[X]$ gelten. Es bleibt zu zeigen, daß man diese Polynome so wählen kann, daß sie keinen konstanten Term haben. Existiert ein j mit $\lambda_j = 0$, so ist $\{0\} \neq V^0 := \ker M \subseteq V_j$. Wegen $M_s\,|_{V^0} = 0$ hat P_1 dann keinen konstanten Term. Nun verschwindet auch $M_n = M - M_s$ auf V^0, so daß auch Q_1 keinen konstanten Term hat. Wir setzen in diesem Fall $P := P_1$ und $Q := Q_1$.

Sind alle $\lambda_j \neq 0$, so hat das Minimalpolynom f einen konstanten Term. Die Polynome

$$P := P_1 - \frac{P_1(0)}{f(0)} f \quad \text{ und } \quad Q := Q_1 - \frac{Q_1(0)}{f(0)} f$$

haben keinen konstanten Term und wegen $f(M) = 0$ gilt $P(M) = M_s$ sowie $Q(M) = M_n$.

(iv) folgt direkt aus (iii).

(v) Da N und S mit $M = N + S$ vertauschen, vertauschen sie wegen (iii) auch mit M_n und M_s. Aus $M = S + N = M_s + M_n$ und Lemma II.3.2 folgt daher, daß

$$S - M_s = M_n - N$$

sowohl nilpotent als auch diagonalisierbar ist. Da alle Eigenwerte 0 sind, ist $0 = S - M_s = M_n - N$, also $M_n = N$ und $M_s = S$. ■

Die Zerlegung $M = M_s + M_n$ heißt *Jordan-Zerlegung* des Endomorphismus M. Die Abbildung M_s heißt *halbeinfache* und M_n *nilpotente Jordan-Komponente* von M.

Ist $M = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ein Jordan-Kästchen, so ist die Jordan-Zerlegung von M natürlich gegeben durch

$$M = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}}_{M_s} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{M_n}.$$

Die Matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ dagegeben ist diagonalisierbar und somit $M = M_s$. In diesem Fall ist also

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nicht die Jordan-Zerlegung, obwohl der erste Summand diagonalisierbar und der zweite nilpotent ist. Man verifiziert leicht, daß beide Summanden nicht miteinander vertauschen.

Satz II.3.4. (Eigenschaften der Jordan-Zerlegung) *Sei $M \in \mathrm{End}(V)$ und V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum sowie $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen.*
(a) *Ist $M' \in \mathrm{End}(V')$ und $f: V \to V'$ mit $f \circ M = M' \circ f$, so gilt*

$$f \circ M_s = M'_s \circ f \quad \textit{und} \quad f \circ M_n = M'_n \circ f.$$

(b) *Ist $W \subseteq V$ ein M-invarianter Unterraum, so ist*

$$(M|_W)_s = M_s|_W \quad \textit{und} \quad (M|_W)_n = M_n|_W.$$

Insbesondere ist W invariant unter M_s und M_n. Ist $\overline{M}$ der induzierte Endomorphismus von V/W, so haben wir

$$(\overline{M})_s = \overline{M_s} \quad \textit{und} \quad (\overline{M})_n = \overline{M_n}.$$

(c) *Sind $U \subseteq W$ Unterräume von V, so gilt $M.W \subseteq U$ genau dann, wenn $M_s.W \subseteq U$ und $M_n.W \subseteq U$ gelten.*

Beweis. (a) Sei $W := V \oplus V'$, $L := M \oplus M'$, und die lineare Abbildung $\varphi: W \to W$ sei definiert durch $\varphi(v, v') = \big(0, f(v)\big)$. Dann gilt $\varphi \circ L = L \circ \varphi$ und somit $\varphi L_s = L_s \varphi$ und $\varphi L_n = L_n \varphi$. Weiter ist $L_s = M_s \oplus M'_s$ und $L_n = M_n \oplus M'_n$ wegen Theorem II.3.3(v) und der Diagonalisierbarkeit von $M_s \oplus M'_s$. Damit ist

$$M'_s \circ f = f \circ M_s \quad \text{und} \quad M'_n \circ f = f \circ M_n.$$

(b) Man wende (a) auf die Inklusion $j: W \to V$ und die Quotientenabbildung $p: V \to V/W$ an.
(c) Das ist eine direkte Konsequenz aus Theorem II.3.3(iii). ■

Satz II.3.5. *Sei V endlichdimensional und $x \in \mathfrak{gl}(V)$. Ist x nilpotent (diagonalisierbar), so auch* $\operatorname{ad} x$.

Beweis. Sei $L_x : \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}(V), y \mapsto xy$ und $R_x : \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}(V), y \mapsto yx$. Dann ist $\operatorname{ad} x = L_x - R_x$ und $[L_x, R_x] = 0$. Wegen Lemma II.3.2 müssen wir also nur einsehen, daß L_x bzw. R_x die Nilpotenz bzw. Diagonalisierbarkeit von x erbt.

Ist $x^n = 0$, so auch $L_x^n = L_{x^n} = 0 = R_x^n$. Sei nun x diagonalisierbar und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die verschiedenen Eigenwerte von x. Wir betrachten die Zerlegung $V = \bigoplus_{j=1}^n V^{\lambda_j}(x)$. Ist $y \in \operatorname{End}(V)$, so schreiben wir $y = \sum_{j,k=1}^n y_{jk}$, wobei $y_{jk}.V^{\lambda_k}(x) \subseteq V^{\lambda_j}(x)$ gilt. Wir betrachten also die Blockmatrix von y bzgl. der Zerlegung von V in Eigenräume (vgl. Beispiel I.1.5(f)). Dann ist $L_x y_{jk} = \lambda_j y_{jk}$ und $R_x y_{jk} = \lambda_k y_{jk}$ (Nachrechnen!). Folglich sind L_x und R_x diagonalisierbare Endomorphismen von $\mathfrak{gl}(V)$. ∎

Korollar II.3.6. *Für $x \in \mathfrak{gl}(V)$ ist $\operatorname{ad} x = \operatorname{ad}(x_s) + \operatorname{ad}(x_n)$ die Jordan-Zerlegung von* $\operatorname{ad} x$.

Beweis. Aus Satz II.3.5 folgt, daß $\operatorname{ad}(x_s)$ diagonalisierbar ist und $\operatorname{ad}(x_n)$ nilpotent. Wegen $[\operatorname{ad}(x_s), \operatorname{ad}(x_n)] = \operatorname{ad}[x_s, x_n] = 0$ folgt die Behauptung daher aus der Eindeutigkeit der Jordan-Zerlegung (Theorem II.3.3(v)). ∎

Satz II.3.7. *Ist A eine endlichdimensionale Algebra und $D \in \operatorname{der}(A)$, so auch $D_s, D_n \in \operatorname{der}(A)$.*

Beweis. Da $\operatorname{der}(A)$ ein Vektorraum ist, reicht es $D_s \in \operatorname{der}(A)$ zu zeigen.

Für $a, b \in A$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Formel

$$\big(D - (\lambda+\mu)\mathbf{1}\big)^n.(ab) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (D - \lambda\mathbf{1})^k(a) \cdot (D - \mu\mathbf{1})^{n-k}(b) \tag{3.1}$$

(Nachweis als Übung).

Sind nun $a \in A^\lambda(D_s) = A_\lambda(D)$ und $b \in A^\mu(D_s) = A_\mu(D)$, so folgt $ab \in A_{\lambda+\mu}(D) = A^{\lambda+\mu}(D_s)$. Andererseits ist $D_s(a)b + aD_s(b) = \lambda ab + \mu ab = (\lambda+\mu)ab = D_s(ab)$. Da $A = \sum_{\lambda \in \mathbb{K}} A^\lambda(D_s)$ ist, folgt hieraus, daß D_s eine Derivation ist. ∎

II.4. Multilineare Algebra von Moduln

In diesem Abschnitt werden wir einige Konstruktionen diskutieren, die es erlauben, aus gegebenen Moduln neue zu bauen. In Definition II.1.2 haben wir schon einige Konstruktionen dieser Art diskutiert. Hier wenden wir uns nun solchen zu, die Hilfsmittel aus der multilinearen Algebra erfordern, die wir sogleich entwickeln werden. In diesem Abschnitt bezeichnet $\mathbb{K}$ einen beliebigen Körper.

Tensorprodukte

Definition II.4.1. Sei M eine Menge. Wir schreiben $F(M) := \mathbb{K}^{(M)}$ für den *freien Vektorraum über* M. Das ist der Unterraum des kartesischen Produkts $\mathbb{K}^M$, der aus den Elementen $(z_j)_{j\in M}$ besteht, für die nur endlich viele Komponenten z_j von Null verschieden sind. ■

Lemma II.4.2. *Die Abbildung $\eta_M\colon M \to F(M)$ mit $\eta_M(j) = \delta_j := (\delta_{ij})_{i\in M}$ hat die folgende universelle Eigenschaft. Zu jeder Abbildung $f\colon M \to V$ in einen Vektorraum V existiert genau eine lineare Abbildunge $F(f)\colon F(M) \to V$ mit $F(f)\circ\eta_M = f$.*

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt aus der Tatsache, daß $F(M)$ von $\eta_M(M)$ als Vektorraum erzeugt wird. Die Existenz folgt aus der Beobachtung, daß $\eta_M(M)$ eine Basis von $F(M)$ ist. ■

Im folgenden werden wir die Abbildung η_M unterdrücken und die Elemente $m \in M$ mit den entsprechenden Elementen $\eta_M(m) = \delta_m$ von $F(M)$ identifizieren. Andernfalls würde die Notation schnell sehr schwerfällig werden.

Definition II.4.3. (Tensorprodukt zweier Vektorräume) Seien V und W Vektorräume. In dem freien Vektorraum $F(V\times W)$ betrachten wir den Unterraum U, der von allen Elementen der Gestalt

$$(v_1+v_2,w)-(v_1,w)-(v_2,w),\quad (v,w_1+w_2)-(v,w_1)-(v,w_2),$$

und

$$(\lambda v,w)-(v,\lambda w),\quad \lambda(v,w)-(\lambda v,w)$$

erzeugt wird. Wir definieren

$$V\otimes W := F(V\times W)/U \quad\text{ und }\quad v\otimes w := (v,w)+U.$$ ■

Lemma II.4.4. *Die Abbildung $b\colon V\times W \to V\otimes W, (v,w)\mapsto v\otimes w$ ist bilinear und hat die folgende universelle Eigenschaft: Zu jeder bilinearen Abbildung*

$$f\colon V\times W\to X$$

in einen Vektorraum X existiert genau eine lineare Abbildung

$$\widetilde{f}\colon V\otimes W\to X$$

mit $\widetilde{f}\circ b = f$, d.h. $\widetilde{f}(v\otimes w) = f(v,w)$ für alle $v\in V$, $w\in W$.

Beweis. Die Bilinearität von b folgt aus der Definition von $V\otimes W$. Z.B. ist

$$b(v_1+v_2,w) = (v_1+v_2,w)+U = (v_1,w)+(v_2,w)+U = b(v_1,w)+b(v_2,w)$$

und
$$b(\lambda v, w) = (\lambda v, w) + U = \lambda(v, w) + U.$$
Ebenso folgt die Linearität im zweiten Argument.

Sei nun $f: V \times W \to X$ eine bilineare Abbildung. Da $F(V \times W)$ von der Teilmenge $V \times W$ erzeugt wird (wir erinnern uns daran, daß wir $V \times W$ als eine Teilmenge von $F(V \times W)$ auffassen), wird der Quotientenraum $V \otimes W$ von $b(V \times W) = (V \times W) + U$ erzeugt. Hieraus folgt sofort die Eindeutigkeit von $\widetilde{f}$.

Um die Existenz von $\widetilde{f}$ einzusehen, verwenden wir zuerst die universelle Eigenschaft von $F(V \times W)$ (Lemma II.4.2), um eine lineare Abbildung $F(f): F(V \times W) \to X$ mit $F(f)(v, w) = f(v, w)$ für alle $(v, w) \in V \times W$ zu erhalten. Aus der Bilinearität von f folgt nun $U \subseteq \ker F(f)$. Also faktorisiert $F(f)$ zu einer linearen Abbildung $\widetilde{f}: V \otimes W \to X$ mit $\widetilde{f}(v \otimes w) = f(v, w)$ für alle $(v, w) \in V \times W$. ■

Aufgabe II.4.1. Ziel dieser Aufgabe ist es, eine bessere Vorstellung des Tensorprodukts zweier Vektorräume V und W zu bekommen. Dazu sei $B_V = \{e_i : i \in I\}$ bzw. $B_W = \{f_j : j \in J\}$ eine Basis von V bzw. W.

(a) Jede Funktion $f: B_V \times B_W \to \mathbb{K}$ läßt sich eindeutig zu einer bilinearen Abbildung $\widetilde{f}: V \times W \to \mathbb{K}$ fortsetzen.

(b) Die Menge $B_V \otimes B_W = \{e_i \otimes f_j : i \in I, j \in J\}$ ist eine Basis des Vektorraums $V \otimes W$.

(c) Jedes Element $x \in V \otimes W$ läßt sich in eindeutiger Weise darstellen als eine endliche Summe $x = \sum_{i \in I} e_i \otimes w_i$ mit $w_i \in W$ (Man fasse die Darstellung eines Elements, die man aus (b) erhält, geeignet zusammen). Man folgere hieraus
$$V \otimes W \cong \bigoplus_{i \in I} e_i \otimes W \cong W^{(I)}.$$

(d) Sind V_1 und V_2 Vektorräume, so gilt $(V_1 \oplus V_2) \otimes W \cong (V_1 \otimes W) \oplus (V_2 \otimes W)$ (Man verwende (c)).

(e) $V \otimes W$ und $W \otimes V$ sind isomorphe Vektorräume. ■

Definition II.4.5. Sind $V_1, \ldots, V_n$ Vektorräume und $n \geq 3$, so definieren wir rekursiv
$$V_1 \otimes \ldots \otimes V_n := (V_1 \otimes \ldots \otimes V_{n-1}) \otimes V_n$$
und analog
$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_n := (v_1 \otimes \ldots \otimes v_{n-1}) \otimes v_n.$$
■

Lemma II.4.6. *Sind $V_1, \ldots, V_n$ Vektorräume, so ist*
$$m: V_1 \times \ldots \times V_n \to V_1 \otimes \ldots \otimes V_n, \quad (v_1, \ldots, v_n) \mapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$$
eine n-lineare Abbildung, d.h. linear in jedem Argument. Zu jeder n-linearen Abbildung $f: V_1 \times \ldots \times V_n \to X$ in einen Vektorraum X existiert genau eine lineare Abbildung $\widetilde{f}: V_1 \otimes \ldots \otimes V_n \to X$ mit $\widetilde{f} \circ m = f$.

Beweis. Zuerst zeigen wir die n-Linearität von $m_n := m$. Wir setzen hierzu

$$m_{n-1}: V_1 \times \ldots \times V_{n-1} \to V_1 \otimes \ldots \otimes V_{n-1}, \quad (v_1, \ldots, v_{n-1}) \mapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_{n-1}.$$

Ist $n = 2$, so ist nichts mehr zu zeigen (Lemma II.4.4). Wir dürfen daher induktiv annehmen, daß die Abbildung m_{n-1} in jedem Argument linear ist. Nach Lemma II.4.4 ist die Abbildung

$$b: (V_1 \otimes \ldots \otimes V_{n-1}) \times V_n \to (V_1 \otimes \ldots \otimes V_{n-1}) \otimes V_n, \quad (x, w) \mapsto x \otimes w$$

bilinear. Daher ist

$$m_n(v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n) = b\big(m_{n-1}(v_1, \ldots, v_{n-1}), v_n\big)$$

in den ersten $n-1$ Argumenten als Komposition von zwei linearen Abbildungen linear. Im letzten Argument ist sie nach Lemma II.4.4 linear, d.h. m_n ist n-linear.

Die Existenz und Eindeutigkeit von $\widetilde{f}$ zeigt man ebenfalls induktiv. Wir dürfen daher annehmen, daß zu jedem $w \in V_n$ genau eine lineare Abbildung $\widetilde{f}_w: V_1 \otimes \cdots \otimes V_{n-1} \to X$ mit

$$\widetilde{f}_w(v_1 \otimes \ldots \otimes v_{n-1}) = f(v_1, \ldots, v_{n-1}, w)$$

existiert, denn wenn wir das letzte Argument $v_n = w$ fixieren, wird f zu einer $(n-1)$-linearen Abbildung. Wegen der Eindeutigkeit von $\widetilde{f}_w$ für jedes w ist die Zuordnung

$$V_n \to \mathrm{Hom}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_{n-1}, X), \quad w \mapsto \widetilde{f}_w$$

linear, d.h. die Abbildung

$$(V_1 \otimes \cdots \otimes V_{n-1}) \times V_n \to X, \quad (x, w) \mapsto \widetilde{f}_w(x)$$

ist bilinear. Mit Lemma II.4.4 finden wir daher eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung

$$\widetilde{f}: (V_1 \otimes \cdots \otimes V_{n-1}) \otimes V_n = V_1 \otimes \cdots \otimes V_{n-1} \otimes V_n \to X$$

mit

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_{n-1} \otimes v_n) &= \widetilde{f}\big((v_1 \otimes \cdots \otimes v_{n-1}) \otimes v_n\big) \\ &= \widetilde{f}_{v_n}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_{n-1}) = f(v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n). \end{aligned}$$

■

Definition II.4.7. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $V^{\otimes n}$ das n-fache Tensorprodukt von V mit sich selbst, $V^{\otimes 0} = \mathbb{K}$ und $V^{\otimes 1} = V$. Sind $n, k \in \mathbb{N}_0$, so existiert genau eine bilineare Abbildung $m_{n,k}: V^{\otimes n} \times V^{\otimes k} \to V^{\otimes (n+k)}$ mit

$$m_{n,k}\big((v_1 \otimes \ldots \otimes v_n), (v_{n+1} \otimes \ldots \otimes v_{n+k})\big) = v_1 \otimes \ldots \otimes v_{n+k}$$

für $v_1, \ldots, v_{n+k} \in V$. In der Tat ist für jedes $x \in V^{\otimes n}$ die Abbildung

$$m_x: V^k \to V^{\otimes (n+k)}, \quad (w_1, \ldots, w_k) \mapsto x \otimes w_1 \otimes \ldots \otimes w_k$$

nach Lemma II.4.6 eine k-lineare Abbildung, und wir erhalten eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung

$$\widetilde{m}_x: V^{\otimes k} \to V^{\otimes (n+k)} \quad \text{mit} \quad \widetilde{m}_x(w_1 \otimes \cdots \otimes w_k) = m_x(w_1, \ldots, w_k).$$

Da diese Abbildung ebenfalls linear in x ist, was aus Lemma II.4.6 (angewandt auf $V^{\otimes n} \otimes V \otimes \cdots \otimes V$) folgt, erhalten wir eine eindeutig bestimmte bilineare Abbildung $m_{n,k}: V^{\otimes n} \times V^{\otimes k} \to V^{\otimes (n+k)}$ mit

$$\begin{aligned} &m_{n,k}\big((v_1 \otimes \ldots \otimes v_n), (v_{n+1} \otimes \ldots \otimes v_{n+k})\big) \\ = \ &\widetilde{m}_{(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n)}(v_{n+1} \otimes \ldots \otimes v_{n+k}) = v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \otimes v_{n+1} \otimes \ldots \otimes v_{n+k}. \end{aligned}$$

Weiter definieren wir Abbildungen

$$m_{0,n}: V^{\otimes 0} \times V^{\otimes n} = \mathbb{K} \times V^{\otimes n} \to V^{\otimes n}, \quad (\lambda, v) \mapsto \lambda v$$

und

$$m_{n,0}: V^{\otimes n} \otimes V^{\otimes 0} = V^{\otimes n} \times \mathbb{K} \to V^{\otimes n}, \quad (v, \lambda) \mapsto \lambda v.$$

Setzen wir schließlich alle Abbildungen $m_{n,k}$, $n, k \in \mathbb{N}_0$, zusammen, so erhalten wir eine Multiplikation auf dem Vektorraum $\mathcal{T}(V) = \oplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n}$. Die so erhaltene Algebra ist assoziativ und besitzt ein Einselement $\mathbf{1} \in V^{\otimes 0}$ (Nachweis!). Sie heißt *Tensoralgebra* über V. ■

Lemma II.4.8. (Universelle Eigenschaft der Tensoralgebra) *Ist A eine assoziative $\mathbb{K}$-Algebra mit Einselement $\mathbf{1}_A$ und V ein Vektorraum, so existiert zu jeder linearen Abbildung $f: V \to A$ genau ein Algebra-Homomorphismus $\widetilde{f}: \mathcal{T}(V) \to A$ mit $\widetilde{f}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}_A$ und $\widetilde{f}(v) = f(v)$ für alle $v \in V$.*

Beweis. Für die Eindeutigkeit bemerken wir zunächst, daß aus der Forderung, daß $\widetilde{f}$ ein Algebra-Homomorphismus ist, die Beziehung

$$\widetilde{f}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = \widetilde{f}(v_1) \cdots \widetilde{f}(v_n) = f(v_1) \cdots f(v_n)$$

folgt. Damit ist die Eindeutigkeit gezeigt.

Für die Existenz fixieren wir zunächst ein $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Abbildung

$$f_n: V^n \to A, \quad (v_1, \ldots, v_n) \mapsto f(v_1) \cdots f(v_n)$$

n-linear, und wir erhalten eine lineare Abbildung

$$\widetilde{f}_n \colon V^{\otimes n} \to A \quad \text{mit} \quad \widetilde{f}_n(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = f(v_1) \cdots f(v_n).$$

Wir setzen nun die linearen Abbildungen $\widetilde{f}_n$ zu einer linearen Abbildung

$$\widetilde{f} \colon \mathcal{T}(V) \to A \quad \text{mit} \quad \widetilde{f}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}_A$$

zusammen. Aus der Konstruktion folgt sofort $\widetilde{f}(v) = f(v)$ für alle $v \in V$.

Es bleibt einzusehen, daß $\widetilde{f}$ ein Homomorphismus von Algebren ist. Da $\mathcal{T}(V)$ von den Elementen der Gestalt $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ aufgespannt wird, reicht es aus, zu zeigen, daß

$$\widetilde{f}\big((v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \cdot (w_1 \otimes \cdots \otimes w_k)\big) = \widetilde{f}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)\widetilde{f}(w_1 \otimes \cdots \otimes w_k)$$

für alle $v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_k \in V$ gilt. Hierzu muß man sich nur an die Definition von $\widetilde{f}$ erinnern, die zeigt, daß beide Seiten der gewünschten Gleichung mit

$$f(v_1) \cdots f(v_n) \cdot f(w_1) \cdots f(w_k)$$

übereinstimmen. ■

Symmetrische und alternierende Produkte

Definition II.4.9. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $n \geq 2$. Wir definieren

$$S^n(V) := V^{\otimes n}/U,$$

wobei U der von den Elementen der Gestalt

$$v_1 \otimes \ldots \otimes v_n - v_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(n)}, \quad \sigma \in S_n,$$

aufgespannte Untervektorraum ist. Der Raun $S^n(V)$ heißt *$n$te symmetrische Potenz von V*. Wir setzen

$$v_1 \vee \cdots \vee v_n := v_1 \otimes \cdots \otimes v_n + U$$

und beachten, daß dieses Produkt in dem Sinne symmetrisch ist, daß

$$v_1 \vee \cdots \vee v_n = v_{\sigma(1)} \vee \cdots \vee v_{\sigma(n)}$$

für alle $\sigma \in S_n$ und $(v_1, \ldots, v_n) \in V^n$ gilt. Für $n = 2$ bedeutet dies

$$v_1 \vee v_2 = v_2 \vee v_1$$

für $v_1, v_2 \in V$.

Für $n \leq 1$ setzen wir $S^0(V) = \mathbb{K}$ und $S^1(V) = V$. ■

Lemma II.4.10. (Universelle Eigenschaft von $S^n(V)$) *Sind V und X Vektorräume und $f\colon V^n \to X$ eine symmetrische n-lineare Abbildung, d.h. für jede Permutation $\sigma \in S_n$ gilt*

$$f(v_1, \ldots, v_n) = f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)})$$

für alle $v \in V^n$, so existiert genau eine lineare Abbildung $\widetilde{f}\colon S^n(V) \to X$ mit

$$\widetilde{f}(v_1 \vee \cdots \vee v_n) = f(v_1, \ldots, v_n).$$

Beweis. Zunächst erhalten wir mit der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $f_0\colon V^{\otimes n} \to X$ mit

$$f_0(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = f(v_1, \ldots, v_n) \quad \text{für alle} \quad v_1, \ldots, v_n \in V.$$

Wegen der Symmetrieeigenschaft von f verschwindet f_0 auf dem Unterraum U, faktorisiert also zu einer linearen Abbildung $\widetilde{f}\colon S^n(V) \to X$ mit der gewünschten Eigenschaft. ■

Definition II.4.11. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$ und $n \geq 2$. Sei $\varepsilon\colon S_n \to \{1, -1\}$ der Signaturhomomorphismus. Wir definieren

$$\Lambda^n(V) := V^{\otimes n}/U,$$

wobei U von den Elementen der Gestalt

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_n - \varepsilon(\sigma) v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}, \quad \sigma \in S_n$$

aufgespannt wird. Der Raun $\Lambda^n(V)$ heißt *n te äußere Potenz von V*. Wir setzen

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_n := v_1 \otimes \cdots \otimes v_n + U$$

und beachten, daß dieses Produkt in dem Sinne alternierend ist, daß

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_n = \varepsilon(\sigma) v_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge v_{\sigma(n)}$$

für alle $\sigma \in S_n$ und $(v_1, \ldots, v_n) \in V^n$ gilt. Für $n = 2$ bedeutet dies

$$v_1 \wedge v_2 = -v_2 \wedge v_1$$

für $v_1, v_2 \in V$. Weiter definiert man $\Lambda^0(V) := \mathbb{K}$ und $\Lambda^1(V) := V$. ■

Lemma II.4.12. (Universelle Eigenschaft von $\Lambda^n(V)$) *Sind V und X Vektorräume und $f\colon V^n \to X$ eine alternierende n-lineare Abbildung, d.h. für jede Permutation $\sigma \in S_n$ gilt*

$$f(v_1, \ldots, v_n) = \varepsilon(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)})$$

für alle $v \in V^n$, so existiert genau eine lineare Abbildung $\widetilde{f}\colon \Lambda^n(V) \to X$ mit

$$\widetilde{f}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) = f(v_1, \ldots, v_n).$$

Beweis. Der Beweis ist vollkommen analog zu dem Beweis von Lemma II.4.10. ■

Anwendungen auf Moduln

Alle Konstruktionen, die wir in diesem Abschnitt kennengelernt haben, lassen sich auf Moduln von Lie-Algebren anwenden. Man muß lediglich sagen, wie die Lie-Algebra auf Tensorprodukten, symmetrischen Potenzen etc. wirken soll.

Satz II.4.13. (a) *Seien $V_1, \ldots, V_n$ Moduln der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Dann ist*

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$$

ein $\mathfrak{g}$-Modul bzgl.

$$X.(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = X.v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n + \ldots + v_1 \otimes \cdots \otimes v_{n-1} \otimes X.v_n.$$

(b) *Ist V ein $\mathfrak{g}$-Modul und $n \in \mathbb{N}_0$, so ist $S^n(V)$ ein $\mathfrak{g}$-Modul bzgl.*

$$X.(v_1 \vee \cdots \vee v_n) = X.v_1 \vee v_2 \vee \cdots \vee v_n + \ldots + v_1 \vee \cdots \vee v_{n-1} \vee X.v_n.$$

(c) *Ist V ein $\mathfrak{g}$-Modul und $n \in \mathbb{N}_0$, so ist $\Lambda^n(V)$ ein $\mathfrak{g}$-Modul bzgl.*

$$X.(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) = X.v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n + \ldots + v_1 \wedge \cdots \wedge v_{n-1} \wedge X.v_n.$$

Beweis. (a) Zuerst hat man zu zeigen, daß durch die angegebene Formel überhaupt ein Endomorphismus von $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ definiert wird. Dies folgt aus der universellen Eigenschaft und der Tatsache, daß für jedes $X \in \mathfrak{g}$ die Abbildung

$$(v_1, \ldots, v_n) \mapsto X.v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n + \ldots + v_1 \otimes \cdots \otimes v_{n-1} \otimes X.v_n$$

in jedem Argument linear, d.h. n-linear, ist. Der Rest ist nun eine einfache Rechnung.
(b) Wir schreiben $S^n(V) = V^{\otimes n}/U$ gemäß der Definition von $S^n(V)$. Nun überzeugt man sich davon, daß $U \subseteq V^{\otimes n}$ ein Untermodul bzgl. der Modulstruktur aus (a) ist. Die Wirkung von $\mathfrak{g}$ auf $S^n(V)$ entspricht nun gerade der Wirkung auf dem Quotientenmodul $V^{\otimes n}/U$.
(c) folgt analog zu (b). ∎

III. Die Struktur endlichdimensionaler Lie-Algebren

In diesem Abschnitt lernen wir zwei wichtige Klassen von Lie-Algebren kennen, die insbesondere in der endlichdimensionalen Theorie eine zentrale Rolle spielen. Nilpotente Lie-Algebren sind solche, in denen iterierte Klammern der Gestalt $[x_1, [x_2, [x_3, [x_4, [\cdots]]]]]$ von ausreichend hoher Ordnung verschwinden. Auflösbare Lie-Algebren sind durch eine ähnliche, aber schwächere Bedingung charakterisiert. Die wichtigsten Ergebnisse dieses Abschnitts sind der Satz von Lie über die Darstellungen auflösbarer Lie-Algebren und die Cartan-Kriterien, die es erlauben, die Auflösbarkeit einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ am Verschwinden von

$$\mathrm{tr}(\mathrm{ad}[x,y]\,\mathrm{ad}\,z), \quad x,y,z \in \mathfrak{g}$$

abzulesen. Diese Kriterien sind auch von zentraler Bedeutung für die Struktur- und Darstellungstheorie halbeinfacher Lie-Algebren.

Alle in diesem Abschnitt betrachteten Lie-Algebren seien endlichdimensional über einem Körper $\mathbb{K}$ der Charakteristik 0. Manchmal werden wir auch voraussetzen müssen, daß $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen ist, aber das werden wir explizit sagen.

III.1.Nilpotente Lie-Algebren

Definition III.1.1. Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra. Die *absteigende Zentralreihe* von $\mathfrak{g}$ ist definiert durch

$$C^0(\mathfrak{g}) := \mathfrak{g} \quad \text{und} \quad C^n(\mathfrak{g}) := [\mathfrak{g}, C^{n-1}(\mathfrak{g})]$$

für $n \in \mathbb{N}$. Mit $C^1(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{g}$ erhalten wir induktiv sofort $C^n(\mathfrak{g}) \subseteq C^{n-1}(\mathfrak{g})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere sind alle $C^n(\mathfrak{g})$ Ideale von $\mathfrak{g}$. ■

Lemma III.1.2. $[C^r(\mathfrak{g}), C^s(\mathfrak{g})] \subseteq C^{r+s+1}(\mathfrak{g})$ *für* $r, s \in \mathbb{N}$.

Beweis. Für $r = 0$ gilt die Behauptung nach Definition. Wir zeigen sie durch vollständige Induktion nach r. Dazu rechnen wir mit der Jacobi-Identität

$$\begin{aligned}
[C^{r+1}(\mathfrak{g}), C^s(\mathfrak{g})] &= \big[[\mathfrak{g}, C^r(\mathfrak{g})], C^s(\mathfrak{g})\big] \\
&\subseteq \big[[\mathfrak{g}, C^s(\mathfrak{g})], C^r(\mathfrak{g})\big] + \big[\mathfrak{g}, [C^s(\mathfrak{g}), C^r(\mathfrak{g})]\big] \\
&\subseteq [C^r(\mathfrak{g}), C^{s+1}(\mathfrak{g})] + [\mathfrak{g}, C^{s+r+1}(\mathfrak{g})] \\
&\subseteq C^{r+s+2}(\mathfrak{g}) + C^{r+s+2}(\mathfrak{g}) = C^{r+s+2}(\mathfrak{g}).
\end{aligned}$$

■

Definition III.1.3. Eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt *nilpotent*, wenn ihre absteigende Zentralreihe in $\{0\}$ endet, d.h. es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $C^n(\mathfrak{g}) = \{0\}$. Ist n minimal mit dieser Eigenschaft, so heißt $n-1$ die *Nilpotenzstufe von* $\mathfrak{g}$.

Gilt in einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ lediglich

$$C^\infty(\mathfrak{g}) := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C^n(\mathfrak{g}) = \{0\},$$

so heißt $\mathfrak{g}$ *residuell nilpotent*. Für endlichdimensionale Lie-Algebren fallen beide Begriffe zusammen (Übung!). ■

Bemerkung III.1.4. Ist $\mathfrak{g}$ eine nilpotente Lie-Algebra und $C^n(\mathfrak{g}) = \{0\}$, so ist

$$\mathcal{F} := \big(C^n(\mathfrak{g}), C^{n-1}(\mathfrak{g}), \ldots, C^1(\mathfrak{g}), C^0(\mathfrak{g})\big)$$

eine Fahne in $\mathfrak{g}$ mit $\operatorname{ad}\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{g}_n(\mathcal{F})$.

Ist umgekehrt $\mathcal{F} = (\mathfrak{g}_0, \ldots, \mathfrak{g}_n)$ eine Fahne in $\mathfrak{g}$ mit $\operatorname{ad}\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{g}_n(\mathcal{F})$, so erhalten wir induktiv $C^k(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{g}_{n-k}$ und damit $C^n(\mathfrak{g}) = \{0\}$.

Eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist also genau dann nilpotent, wenn eine Fahne $\mathcal{F}$ in $\mathfrak{g}$ mit $\operatorname{ad}\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{g}_n(\mathcal{F})$ existiert. ■

Lemma III.1.5. *Für eine nilpotente Lie-Algebra* $\mathfrak{g}$ *gelten folgende Aussagen:*

(i) *Ist* $\mathfrak{g} \neq \{0\}$*, so ist* $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$ *und* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq \mathfrak{g}$.

(ii) *Jede Unteralgebra von* $\mathfrak{g}$ *ist nilpotent.*

(iii) *Homomorphe Bilder von* $\mathfrak{g}$ *sind nilpotent.*

(iv) *Ist* $\mathfrak{g}$ *eine Lie-Algebra,* $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ *ein zentrales Ideal und* $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ *nilpotent, so ist* $\mathfrak{g}$ *nilpotent.*

Beweis. (i) Sei $n \in \mathbb{N}$ maximal mit $C^n(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$. Dann ist $[\mathfrak{g}, C^n(\mathfrak{g})] = \{0\}$, d.h. $C^n(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Da die absteigende Zentralreihe in 0 endet, gilt auch $C^1(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq \mathfrak{g}$.

(ii) Ist $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{g}$ eine Unteralgebra, so haben wir $C^n(\mathfrak{a}) \subseteq C^n(\mathfrak{g})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist $\mathfrak{a}$ nilpotent.

(iii) Ist $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ ein surjektiver Homomorphismus von Lie-Algebren, so haben wir $\varphi\big(C^n(\mathfrak{g})\big) = C^n(\mathfrak{h})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (Nachweis durch Induktion!). Also ist $\mathfrak{h}$ nilpotent.

(iv) Sei $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ die Quotientenabbildung. Da $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ nilpotent ist, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $C^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}) = \{0\}$. Wie wir in (iii) gesehen haben, ist daher $\varphi\big(C^n(\mathfrak{g})\big) = C^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}) = \{0\}$. Folglich ist $C^n(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ und somit $C^{n+1}(\mathfrak{g}) \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{z}(\mathfrak{g})] = \{0\}$. ■

Betrachten wir die zweidimensionale Lie-Algebra $\mathfrak{g} = \mathbb{K}e + \mathbb{K}f$ mit $[e, f] = f$, so ist $\mathfrak{a} = \mathbb{K}f$ ein abelsches Ideal, $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ ist abelsch und $C^n(\mathfrak{g}) = \mathbb{K}f$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist $\mathfrak{g}$ nicht nilpotent. In diesem Sinn kann man Lemma III.1.5(iv) nicht in dem Sinne verallgemeinern, daß man von $\mathfrak{a}$ lediglich die Nilpotenz fordert.

Man nennt eine Eigenschaft von Lie-Algebren eine *Erweiterungseigenschaft*, wenn eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ mit einem Ideal $\mathfrak{a}$ sie genau dann hat, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ sie haben. In diesem Sinne ist Nilpotenz keine Erweiterungseigenschaft.

Beispiel III.1.6. (a) Ist $\mathcal{F} = (V_0, \ldots, V_n)$ eine Fahne in V, so ist $\mathfrak{g}_n(\mathcal{F})$ eine nilpotente Lie-Algebra, denn über vollständige Induktion sieht man leicht ein, daß

$$C^m\big(\mathfrak{g}_n(\mathcal{F})\big).V_n \subseteq V_{n-m-1}$$

gilt. Damit ist $C^{n-1}\big(\mathfrak{g}_n(\mathcal{F})\big) = \{0\}$.

(b) Seien V und W Vektorräume und $B\colon V \times V \to W$ eine schiefsymmetrische Abbildung mit $B(v,v) = 0$ für alle $v \in V$. Dann ist $\mathfrak{g} = V \times W$ eine nilpotente Lie-Algebra bzgl.

$$[(v,w),(v',w')] = \big(0, B(v,v')\big).$$

In diesem Fall ist $C^2(\mathfrak{g}) = \{0\}$. Lie-Algebren dieser Bauart nennt man *verallgemeinerte Heisenberg-Algebren.*

(c) Ein besonders einfaches Beispiel für Lie-Algebren, die unter (b) beschrieben werden, ist die *dreidimensionale Heisenberg-Algebra* $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1$. Sie besitzt eine Basis aus drei Elementen p, q, z mit den Klammern

$$[p,q] = z \quad \text{und} \quad [p,z] = [q,z] = 0.$$

Man sieht leicht ein, daß sich diese Algebra mit $V = \operatorname{span}\{p,q\}$ und $W = \mathbb{K}z$ wie unter (b) schreiben läßt.

Allgemeiner betrachtet man die $(2n+1)$*-dimensionale Heisenberg-Algebra* $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_n$ mit der Basis $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n, z$ und den Klammern

$$[p_i, q_j] = \delta_{ij} z \quad \text{und} \quad [p_i, z] = [q_j, z] = 0.$$

Mit $V = \operatorname{span}\{p_i, q_i \colon i = 1, \ldots, n\}$ und $W = \mathbb{K}z$ erhalten wir eine Realisierung emäß (b).

Eine natürliche Darstellung der Heisenberg-Algebra erhalten wir durch die Operatoren

$$Z = \mathrm{id}, \quad (P_i f)(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \text{und} \quad (Q_i f)(x) = x_i f(x)$$

auf $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. ■

Lemma III.1.7. *Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ nilpotente Ideale der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, so ist auch ihre Summe $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ nilpotent.*

Beweis. Wir zeigen, daß

$$C^{2m}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \subseteq C^m(\mathfrak{a}) + C^m(\mathfrak{b}) \tag{1.1}$$

für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt. Hieraus folgt die Behauptung sofort, wenn man m so groß macht, daß $C^m(\mathfrak{a}) = C^m(\mathfrak{b}) = \{0\}$ ist.

Für $m = 0$ ist nichts zu zeigen. Ist nun

$$y := [x_1, [x_2, [x_3, \cdots [x_{2m}, x_{2m+1}] \cdots]]] \in C^{2m}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}),$$

so dürfen wir $x_j \in \mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}$ annehmen. Sind mindestens $m + 1$ der x_j in $\mathfrak{a}$, so ist $y \in C^m(\mathfrak{a})$. Ist dies nicht der Fall, so sind mindestens $m + 1$ der x_j in $\mathfrak{b}$ und daher $y \in C^m(\mathfrak{b})$. Da man jedes Element von $C^{2m}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$ als Summe von Elementen der Gestalt von y schreiben kann (Nachweis!), folgt hieraus die Behauptung. ■

Bemerkung III.1.8. (a) Eine wichtige Folgerung aus Lemma III.1.7 ist die Existenz eines eindeutigen maximalen nilpotenten Ideals in jeder endlichdimensionalen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$: Ist $\mathfrak{n} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ ein nilpotentes Ideal maximaler Dimension und $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ ebenfalls ein nilpotentes Ideal, so ist auch das Ideal $\mathfrak{n} + \mathfrak{a}$ nilpotent, also $\mathfrak{n} + \mathfrak{a} = \mathfrak{n}$ aus Dimensionsgründen. Folglich ist $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{n}$. Das nilpotente Ideal $\mathfrak{n}$ enthält also alle nilpotenten Ideale von $\mathfrak{g}$.
(b) Sind $\mathfrak{g}_n$, $n \in \mathbb{N}$, nilpotente Lie-Algebren mit $C^n(\mathfrak{g}_n) \neq \{0\}$, so ist $\mathfrak{g} := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{g}_n$ eine residuell nilpotente Lie-Algebra, die nicht nilpotent ist. ■

III.2. Der Satz von Engel

Definition III.2.1. Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra und $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ ein Unterraum. Dann heißt

$$\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}) := \{x \in \mathfrak{g} \colon [x, \mathfrak{a}] \subseteq \mathfrak{a}\}$$

der *Normalisator oder Idealisator von* $\mathfrak{a}$ *in* $\mathfrak{g}$ und

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}) := \{x \in \mathfrak{g} \colon [x, \mathfrak{a}] = \{0\}\}$$

der *Zentralisator von* $\mathfrak{a}$ *in* $\mathfrak{g}$. Beachte, daß $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$ und $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$ Unteralgebren von $\mathfrak{g}$ sind sowie $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$ ein Ideal. ■

Lemma III.2.2. *Sei V ein $\mathfrak{g}$-Modul und $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ ein Ideal. Dann ist*

$$V^{\mathfrak{a}} := \{v \in V \colon \mathfrak{a}.v = \{0\}\}$$

ein Untermodul von V.

Beweis. Seien $w \in V^{\mathfrak{a}}$, $x \in \mathfrak{g}$ und $y \in \mathfrak{a}$. Dann haben wir

$$y.(x.w) = [y, x].w + x.(y.w) = 0 + 0 = 0.$$

Hieraus folgt die Behauptung. ■

Lemma III.2.3. (Engel [1]) *Sei $V \neq \{0\}$ ein Vektorraum und $\mathfrak{g} \leq \mathfrak{gl}(V)$ eine endlichdimensionale Lie-Unteralgebra, so daß jedes Element in $\mathfrak{g}$ ein nilpotenter Endomorphismus von V ist. Dann existiert ein $v \in V \setminus \{0\}$ mit $\mathfrak{g}.v = \{0\}$.*

Beweis. Wir führen den Beweis über vollständige Induktion nach der Dimension von $\mathfrak{g}$. Da für $\mathfrak{g} = \{0\}$ nichts zu zeigen ist, dürfen wir annehmen, daß die Behauptung für Lie-Algebren $\mathfrak{h}$ mit $\dim \mathfrak{h} < \dim \mathfrak{g}$ gilt.

Wir gehen schrittweise vor:

Schritt 1: Nach Korollar II.3.6 ist $\operatorname{ad} x$ für jedes $x \in \mathfrak{g}$ nilpotent.

Schritt 2: Für jede echte Unteralgebra $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$ ist der Normalisator $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ echt größer. Durch

$$\rho\colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}), \quad \rho(x)(y + \mathfrak{h}) := [x, y] + \mathfrak{h}$$

wird $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ zu einem $\mathfrak{h}$-Modul, denn $\mathfrak{h}$ ist ein $\mathfrak{h}$-Untermodul von $\mathfrak{g}$, so daß der Quotientenmodul $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ wohldefiniert ist. Da $\operatorname{ad} x$ nilpotent ist (Schritt 1), existiert für jedes $x \in \mathfrak{h}$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $(\operatorname{ad} x)^n = 0$ und somit auch $\rho(x)^n = 0$. Wegen $\dim \mathfrak{h} < \dim \mathfrak{g}$ können wir jetzt die Induktionsvoraussetzung auf $\rho(\mathfrak{h}) \leq \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ anwenden. Wir finden so ein $x \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$ mit $\rho(\mathfrak{h})(x + \mathfrak{h}) = \{0\}$, d.h. $[x, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$. Also ist $x \in \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \setminus \mathfrak{h}$.

Schritt 3: $\mathfrak{g}$ enthält ein Ideal $\mathfrak{h}$ der Kodimension 1. Sei dazu $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$ eine echte Unteralgebra maximaler Dimension. Wegen Schritt 2 ist $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$, d.h. $\mathfrak{h} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ ist ein Ideal. Für $x \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$ ist nun $\mathfrak{h} + \mathbb{K}x \leq \mathfrak{g}$ eine Unteralgebra, also $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathbb{K}x$, d.h. $\mathfrak{h}$ hat Kodimension 1.

Schritt 4: Wir wenden nun die Induktionsvoraussetzung auf $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{gl}(V)$ an, und sehen so, daß

$$V^{\mathfrak{h}} := \{v \in V \colon \mathfrak{h}.v = \{0\}\} \neq \{0\}$$

ist. Nach Lemma III.2.2 ist $V^{\mathfrak{h}}$ ein $\mathfrak{g}$-Untermodul von V. Sei nun $x \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$. Da $x\,|_{V^{\mathfrak{h}}}$ nilpotenter Endomorphismus von $V^{\mathfrak{h}}$ ist, existiert ein $w \in V^{\mathfrak{h}} \setminus \{0\}$ mit $x.w = 0$. Wegen $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathbb{K}x$ ist dann $\mathfrak{g}.w = \{0\}$. Das war zu zeigen. ■

Definition III.2.4. Wir nennen einen $\mathfrak{g}$-Modul V *nilpotent*, wenn ein $n \in \mathbb{N}$ so existiert, daß

$$\rho_V(x_1) \cdots \rho_V(x_n) = 0$$

für $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{g}$ gilt, d.h. $\rho_V(\mathfrak{g})^n = \{0\}$. ■

Lemma III.2.5. *Ein Modul V einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist genau dann nilpotent, wenn eine Fahne $\mathcal{F}$ von Untermoduln derart existiert, daß $\rho_V(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{g}_n(\mathcal{F})$ für die zugehörige Darstellung ρ_V gilt.*

Beweis. Ist $\mathcal{F} = (V_0, \ldots, V_n)$ eine Fahne mit $\rho_V(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{g}_n(\mathcal{F})$, so gilt $\rho_V(\mathfrak{g})^k.V_j \subseteq V_{j-k}$ für $j \geq k$ und insbesondere $\rho_V(\mathfrak{g})^n = \{0\}$. Also ist V ein nilpotenter Modul.

[1] Friedrich Engel (1861–1941), deutscher Mathematiker in Leipzig, Greifswald und Giessen. Engel war ein Schüler von Sophus Lie. Beide schrieben in den 1890er Jahren ein monumentales dreibändiges Werk über Transformationsgruppen, das die Keimzelle der Lieschen Gruppentheorie darstellte.

Ist andererseits V ein nilpotenter Modul und $\rho_V(\mathfrak{g})^n = \{0\}$, so setzen wir

$$V_j := \rho_V(\mathfrak{g})^{n-j}.V := \operatorname{span}\{\rho_V(x_1)\cdots\rho_V(x_{n-j}).v\colon v \in V, x_1,\ldots,x_{n-j} \in \mathfrak{g}\}.$$

Dann ist $V_0 = \{0\}$, $V_n = V$, und es gilt $\rho_V(\mathfrak{g}).V_j \subseteq V_{j-1}$. Also ist $\mathcal{F} := (V_0,\ldots,V_n)$ eine Fahne mit $\rho_V(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{g}_n(\mathcal{F})$. ■

Der Satz von Engel

Theorem III.2.6. *Sei (ρ, V) eine endlichdimensionale Darstellung der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, so daß $\rho_V(x)$ für alle $x \in \mathfrak{g}$ nilpotent ist. Dann ist V ein nilpotenter $\mathfrak{g}$-Modul.*

Beweis. Wir führen den Beweis über vollständige Induktion nach der Dimension von V. Der Induktionsanfang $\dim V \leq 1$ ist trivial, denn jede nilpotente lineare Abbildung eines eindimensionalen Vektorraums verschwindet. Aus Lemma III.2.3 bekommen wir $V^{\mathfrak{g}} := \{v \in V\colon \mathfrak{g}.v = \{0\}\} \neq \{0\}$. Insbesondere ist $V^{\mathfrak{g}}$ ein $\mathfrak{g}$-Untermodul von V. Wir bilden den Quotientenmodul $V/V^{\mathfrak{g}}$. Sei $\rho_{V/V^{\mathfrak{g}}}\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V/V^{\mathfrak{g}})$ die so gewonnene Darstellung von $\mathfrak{g}$ auf $V/V^{\mathfrak{g}}$. Dann sind natürlich auch die Endomorphismen $\rho_{V/V^{\mathfrak{g}}}(x)$ nilpotent und wir können die Induktionsvoraussetzung auf $V/V^{\mathfrak{g}}$ anwenden. Also ist $V/V^{\mathfrak{g}}$ ein nilpotenter $\mathfrak{g}$-Modul. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $\rho_{V/V^{\mathfrak{g}}}(\mathfrak{g})^n.(V/V^{\mathfrak{g}}) = \{0\}$. Dann ist $\rho_V(\mathfrak{g})^n.V \subseteq V^{\mathfrak{g}}$ und somit $\rho_V(\mathfrak{g})^{n+1}.V = \{0\}$. ■

Folgerung III.2.7. *Eine endlichdimensionale Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist genau dann nilpotent, wenn für jedes $x \in \mathfrak{g}$ die lineare Abbildung $\operatorname{ad} x$ nilpotent ist.*

Beweis. Definitionsgemäß ist eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ genau dann nilpotent, wenn sie ein nilpotenter Modul bzgl. der adjungierten Darstellung ist. Nach dem Satz von Engel ist letzteres äquivalent zu der Nilpotenz aller Abbildungen $\operatorname{ad} x$, $x \in \mathfrak{g}$. ■

III.3. Auflösbare Lie-Algebren

Definition III.3.1. (a) Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra. Die *abgeleitete Reihe* von $\mathfrak{g}$ ist definiert durch

$$D^0(\mathfrak{g}) := \mathfrak{g} \quad \text{und} \quad D^n(\mathfrak{g}) := [D^{n-1}(\mathfrak{g}), D^{n-1}(\mathfrak{g})]$$

für $n \in \mathbb{N}$. Aus $D^1(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{g}$ erhält man induktiv sofort $D^n(\mathfrak{g}) \subseteq D^{n-1}(\mathfrak{g})$ und damit, daß alle $D^n(\mathfrak{g})$ Ideale sind. Die abgeleietet Reihe bildet also eine absteigende Reihe von Idealen von $\mathfrak{g}$.

(b) Die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt *auflösbar*, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $D^n(\mathfrak{g}) = \{0\}$ gibt. ■

Lemma III.3.2. *Jede nilpotente Lie-Algebra ist auflösbar.*

Beweis. Induktiv sehen wir, daß $D^n(\mathfrak{g}) \subseteq C^n(\mathfrak{g})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Ist nun $\mathfrak{g}$ nilpotent, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $C^n(\mathfrak{g}) = \{0\}$. Dann ist auch $D^n(\mathfrak{g}) = \{0\}$, d.h. $\mathfrak{g}$ ist auflösbar. ■

Lemma III.3.3. *Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra.*

(i) *Wenn $\mathfrak{g}$ auflösbar ist, dann sind auch alle Unteralgebren und alle homomorphen Bilder von $\mathfrak{g}$ auflösbar.*

(ii) *Ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal von $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{a}$ sowie $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ auflösbar, so ist auch $\mathfrak{g}$ auflösbar.*

(iii) *Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ auflösbare Ideale in $\mathfrak{g}$, so ist auch das Ideal $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ auflösbar.*

Beweis. (i) Ist $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{g}$ eine Unteralgebra, so haben wir $D^m(\mathfrak{a}) \subseteq D^m(\mathfrak{g})$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Also ist $\mathfrak{a}$ auflösbar, wenn $\mathfrak{g}$ auflösbar ist.

Ist $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ ein surjektiver Homomorphismus, so erhalten wir induktiv

$$\varphi\big(D^n(\mathfrak{g})\big) = D^n(\mathfrak{h})$$

und somit $D^n(\mathfrak{h}) = \{0\}$ falls $D^n(\mathfrak{g}) = \{0\}$ ist.
(ii) Sei $\pi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ die Quotientenabbildung. Wir haben in (i) gesehen, daß $\pi\big(D^n(\mathfrak{g})\big) = D^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})$ gilt. Ist also $D^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}) = \{0\}$, so folgt $D^n(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{a}$. Damit ist aber auch $D^{n+m}(\mathfrak{g}) \subseteq D^m(\mathfrak{a}) = \{0\}$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Also ist $\mathfrak{g}$ auflösbar.
(iii) Wegen (i) und der Auflösbarkeit von $\mathfrak{b}$ sehen wir, daß

$$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})/\mathfrak{a} \cong \mathfrak{b}/(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})$$

auflösbar ist. Da auch $\mathfrak{a}$ auflösbar ist, folgt die Auflösbarkeit von $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ aus (ii).■

Lemma III.3.3(i), (ii) besagen insbesondere, daß Auflösbarkeit eine Erweiterungseigenschaft ist.

Beispiel III.3.4. (a) Ist $\mathcal{F} = (V_0, \ldots, V_n)$ eine Fahne in V mit $\dim V_j = j$ für $j = 0, \ldots, n$, so ist $\mathfrak{g}(\mathcal{F})$ eine auflösbare Lie-Algebra. In der Tat haben wir in diesem Fall

$$\mathfrak{g}(\mathcal{F}) \cong \mathfrak{g}_n(\mathcal{F}) \rtimes \mathfrak{gl}(1,\mathbb{K})^n \cong \mathfrak{g}_n(\mathcal{F}) \rtimes \mathbb{K}^n$$

(Beispiel I.2.11(4)).

Da $\mathbb{K}^n \cong \mathfrak{g}(\mathcal{F})/\mathfrak{g}_n(\mathcal{F})$ abelsch ist und $\mathfrak{g}_n(\mathcal{F})$ nilpotent (Beispiel III.1.6(a)), folgt die Auflösbarkeit von $\mathfrak{g}(\mathcal{F})$ aus Lemma III.3.3(ii). Wir werden in Abschnitt III.4 den Satz von Lie kennenlernen, der im wesentlichen besagt, daß man über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik 0 jede auflösbare Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$ durch obere Dreiecksmatrizen bzgl. einer geeigneten Basis schreiben kann. In diesem Sinn ist die Lie-Algebra $\mathfrak{g}(\mathcal{F})$ aus diesem Beispiel der Prototyp einer auflösbaren Lie-Algebra.
(b) Sei $\mathfrak{a}$ eine auflösbare Lie-Algebra und $D \in \mathrm{der}(\mathfrak{a})$. Dann ist die Lie-Algebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \rtimes \mathbb{K}$ mit der Klammer

$$[(v,t),(v',t')] = ([v,v'] + tD.v' - t'D'.v, 0),$$

auflösbar (Lemma III.3.3(ii)). Beachte, daß $\rho\colon \mathbb{K} \to \mathrm{der}(\mathfrak{a}), t \mapsto tD$ ein Homomorphismus von Lie-Algebren ist.

Ist speziell $A \in \mathrm{End}(V)$ und $\mathfrak{g} = V \rtimes \mathbb{K}$ die Lie-Algebra mit der Klammer

$$[(v,t),(v',t')] = (tA.v' - t'A.v, 0),$$

so ist $\mathfrak{g}$ auflösbar.
(c) Das Analogon von Lemma III.3.3(iii) für nilpotente Ideale ist Lemma III.1.7. Dagegen ist das Analogon von Lemma III.3.3(ii) für nilpotente Lie-Algebren falsch.

Ein einfaches Gegenbeispiel erhält man mit einer Lie-Algebra vom Typ $\mathfrak{g} = V \rtimes \mathbb{K}$ wie in (b), wobei $A \in \mathrm{End}(V)$ nicht nilpotent ist.
(d) Jede Lie-Algebra der Dimension ≤ 2 ist auflösbar. Für $\dim \mathfrak{g} = 3$ ist $\mathfrak{g}$ genau dann auflösbar, wenn $\dim \mathfrak{g}' \leq 2$ ist (Übung). ■

Definition III.3.5. Lemma III.3.3(iii) impliziert, daß es in jeder endlichdimensionalen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ein größtes auflösbares Ideal gibt. Dieses Ideal heißt das *Radikal* von $\mathfrak{g}$ und wird mit $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ bezeichnet. ■

Lemma III.3.6. *Es gilt* $\mathrm{rad}\big(\mathfrak{g}/\mathrm{rad}(\mathfrak{g})\big) = \{0\}$.

Beweis. Sei $p\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ die Quotientenabbildung und $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}/\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ ein auflösbares Ideal. Nach Lemma III.3.3(ii) ist dann $p^{-1}(\mathfrak{a})$ auflösbar, da $\mathrm{rad}(\mathfrak{g}) \subseteq p^{-1}(\mathfrak{a})$ ein auflösbares Ideal ist mit $p^{-1}(\mathfrak{a})/\mathrm{rad}(\mathfrak{g}) = p(p^{-1}(\mathfrak{a})) = \mathfrak{a}$. Folglich ist $p^{-1}(\mathfrak{a}) \subseteq \mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ und somit $\mathfrak{a} = p(p^{-1}(\mathfrak{a})) = \{0\}$ in $\mathfrak{g}/\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$. ■

Lemma III.3.7. *Ist* $\mathfrak{g}$ *halbeinfach, so ist* $\mathrm{rad}(\mathfrak{g}) = \{0\}$.

Beweis. Als Ideal einer halbeinfachen Lie-Algebra ist $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ selbst halbeinfach (Satz II.2.4), also perfekt, woraus $D^n(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt. Also ist $\mathfrak{g} = \{0\}$. ■

III.4. Der Satz von Lie

In diesem Abschnitt diskutieren wir das Analogon zum Satz von Engel für auflösbare Lie-Algebren, den Satz von Lie. Er ist ein zentrales Resultat der Darstellungstheorie auflösbarer Lie-Algebren.

Den Spezialfall $\chi = 0$ des folgenden Lemmas habe wir schon in Lemma III.2.2 gezeigt.

Lemma III.4.1. *Sei* V *ein endlichdimensionaler* $\mathfrak{g}$*-Modul,* $\mathfrak{h} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ *ein Ideal und* $\chi\colon \mathfrak{h} \to \mathbb{K}$ *linear, d.h.* $\chi \in \mathfrak{h}^* := \mathrm{Hom}(\mathfrak{h}, \mathbb{K})$. *Dann ist der Unterraum*

$$V^\chi := \{v \in V\colon (\forall h \in \mathfrak{h}) h.v = \chi(h)v\}$$

ein $\mathfrak{g}$*-Untermodul und es gilt* $\chi([\mathfrak{h}, \mathfrak{g}]) = \{0\}$ *für* $V^\chi \neq \{0\}$.

Beweis. Wir nehmen $V^\chi \neq \{0\}$ an und zeigen zuerst $\chi([h, x]) = 0$ für $h \in \mathfrak{h}$, $x \in \mathfrak{g}$.

Sei dazu $0 \neq v \in V^\chi$. Wir setzen $V_0 := \{0\}$ und

$$V_m := \mathrm{span}\{v, \ldots, x^{m-1}.v\}$$

für $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt $x.V_m \subseteq V_{m+1}$, und da V endlichdimensional ist, existiert ein minimales $n \in \mathbb{N}$ mit $V_n = V_{n+1}$. Dann ist $x.V_n \subseteq V_n$ und somit $V_m = V_n$ für $m \geq n$. Weiter ist $(v, \ldots, x^{n-1}.v)$ eine Basis von V_n.

Wir zeigen nun durch Induktion über j, daß

$$hx^j.v - \chi(h)x^j.v \in V_j$$

und damit insbesondere $h.V_{j+1} \subseteq V_{j+1}$ für alle j gilt. Für $j = 0$ ist das die Definition von V^χ. Sei also $j \geq 1$. Dann haben wir

$$h.(x^j.v) = xhx^{j-1}.v + \underbrace{[h,x]x^{j-1}.v}_{\in \mathfrak{h}.V_j} \in \chi(h)x^j.v + \underbrace{x.V_{j-1}}_{\subseteq V_j} + \underbrace{\mathfrak{h}.V_j}_{\subseteq V_j} \subseteq \chi(h)x^j.v + V_j.$$

Also hat die Matrix von h bzgl. obiger Basis obere Dreiecksgestalt und die Diagonaleinträge sind durch $\chi(h)$ gegeben. Für die Spuren erhalten wir also $\operatorname{tr}(\rho_{V_n}(h)) = n\chi(h)$. Setzen wir $[x,h] \in \mathfrak{h}$ ein, so folgt

$$0 = \operatorname{tr}([\rho_{V_n}(x), \rho_{V_n}(h)]) = \operatorname{tr}(\rho_{V_n}([x,h])) = n\chi([x,h]),$$

also $\chi([h,x]) = 0$, wegen $\operatorname{char} \mathbb{K} = 0$.

Damit sehen wir nun für $w \in V^\chi$ wegen

$$h.(x.w) = x.(h.w) + [h,x].w = \chi(h)x.w + \chi([h,x]).w = \chi(h)x.w,$$

daß V^χ invariant unter $\mathfrak{g}$ ist. ∎

Das folgende Lemma beruht wesentlich darauf, daß $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen ist, denn für den Fall $\mathfrak{g} = \mathbb{K}A$, $A \in \mathfrak{gl}(V)$, bedeutet es gerade, daß A einen von Null verschiedenen Eigenvektor besitzt.

Lemma III.4.2. *Sei $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen, V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\mathfrak{g}$ eine auflösbare Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$. Ist $V \neq 0$, so existiert ein $v \neq 0$ in V mit $\mathfrak{g}.v \subseteq \mathbb{K}v$.*

Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion über die Dimension von $\mathfrak{g}$. Für $\mathfrak{g} = \{0\}$ ist nichts zu zeigen. Ist $\mathfrak{g} \neq \{0\}$, so wählen wir zunächst eine Hyperebene $\mathfrak{h}$, die $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ enthält. So eine Hyperebene existiert immer, da $\mathfrak{g}$ auflösbar und damit $D^1(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq \mathfrak{g}$ ist.

Wegen $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{h}$ ist $\mathfrak{h} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ ein Ideal, und mit Induktion finden wir ein von 0 verschiedenes Element $v \in V$ mit $\mathfrak{h}.v \subseteq \mathbb{K}v$. Sei nun $\chi \in \mathfrak{h}^*$ mit $h.v = \chi(h).v$ für alle $h \in \mathfrak{h}$. Dann ist der Unterraum

$$V^\chi := \{v \in V \colon (\forall x \in \mathfrak{h}) x.v = \chi(x)v\}$$

nach Lemma III.4.1 ein $\mathfrak{g}$-Untermodul.

Sei $x \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$ beliebig. Dann ist $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathbb{K}x$. Wir finden nun einen Eigenvektor w für x in V^χ. Damit ist $\mathfrak{g}.w \subseteq \mathfrak{h}.w + \mathbb{K}x.w \subseteq \mathbb{K}w$. ∎

$\boxed{\text{DER SATZ VON LIE}}$

Theorem III.4.3. *Sei $\mathbb{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik* 0 *und V ein endlichdimensionaler Modul der auflösbaren Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Dann existiert in V eine $\mathfrak{g}$-invariante Fahne*

$$\mathcal{F} = (V_0, \ldots, V_n) \quad mit \quad \dim V_j = j.$$

Beweis. Wir zeigen die Behauptung über vollständige Induktion nach der Dimension von V. Für $V = \{0\}$ ist nichts zu zeigen. Sei also $V \neq \{0\}$.

Nach Lemma III.4.2 existiert ein $v \in V \setminus \{0\}$ mit $\mathfrak{g}.v \subseteq \mathbb{K}v$, d.h. $W := \mathbb{K}v$ ist ein Untermodul. Wenden wir die Induktionsvoraussetzung auf den Quotientenmodul V/W an, so finden wir darin eine $\mathfrak{g}$-invariante Fahne $(V_1', \ldots, V_n')$ mit $\dim V_j' = j - 1$. Ist $\pi\colon V \to V/W$ die Quotientenabbildung, so setzen wir

$$V_0 := \{0\} \quad \text{und} \quad V_j := \pi^{-1}(V_j') \quad \text{für } j > 0,$$

und finden so eine $\mathfrak{g}$-invariante Fahne in V mit $\dim V_j = j$. ■

Bemerkung III.4.4. Für Körper $\mathbb{K}$ positiver Charakteristik gilt der Satz von Lie im allgemeinen nicht. Für $\operatorname{char} \mathbb{K} = 2$ erhält man ein einfaches Beispiel durch die identische Darstellung der Lie-Algebra $\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$. Diese Lie-Algebra ist nilpotent, da in diesem Fall

$$[h, x] = 2x = 0 \quad \text{und} \quad [h, y] = -2y = 0$$

gelten (vgl. Beispiel II.2.5). Insbesondere ist sie also auflösbar. Man sieht leicht, daß der Modul $V := \mathbb{K}^2$ keinen echten Untermodul besitzt. ■

Korollar III.4.4. *Sei V ein endlichdimensionaler Modul der auflösbaren Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Dann ist V ein nilpotenter $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$-Modul, d.h. es existiert eine Fahne $\mathcal{F}$ mit $\rho_V([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) \subseteq \mathfrak{g}_n(\mathcal{F})$.*

Beweis. (1) Wir betrachten zuerst den Fall, wo $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen ist. Mit dem Satz von Lie finden wir eine $\mathfrak{g}$-invariante Fahne

$$\mathcal{F} = (V_0, \ldots, V_n) \quad \text{mit } \dim V_j = j.$$

Ist $\rho_V\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ der zugehörige Homomorphismus von Lie-Algebren, so ist $\rho_V(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{g}(\mathcal{F})$. Wie wir in Beispiel III.3.4(a) gesehen haben, ist

$$\rho_V([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) \subseteq [\mathfrak{g}(\mathcal{F}), \mathfrak{g}(\mathcal{F})] \subseteq \mathfrak{g}_n(\mathcal{F}).$$

Also ist V ein nilpotenter $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$-Modul.

(2) Sei nun $\mathbb{F} := \overline{\mathbb{K}}$ ein algebraischer Abschluß von $\mathbb{K}$ und $V_{\mathbb{F}} := V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{F}$. Identifizeren wir V mittels einer Basis $v_1, \ldots, v_d$ mit $\mathbb{K}^d$, so ist $V_{\mathbb{F}} \cong \mathbb{F}^d$. Man sieht nun leicht, daß die $\mathbb{F}$-Lie-Algebra $\mathfrak{h} := \operatorname{span}_{\mathbb{F}} \rho(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{gl}(V_{\mathbb{F}})$ wieder auflösbar ist, und wir können (1) anwenden. Für jedes $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ sehen wir so, daß $\rho(x) \in [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ auf $V_{\mathbb{F}}$ nilpotent ist, also auch auf V. Der Rest folgt nun aus dem Satz von Engel (Theorem III.2.6). ■

Im zweiten Teil vom Beweis von Korollar III.4.4 haben wir eine direkte Variante der Methode der *Skalarerweiterung* gesehen. Man benutzt sie oft um von Resultaten, die über algebraisch abgeschlossenen Körpern gelten, auf den allgemeinen Fall zu schließen.

Korollar III.4.5. *Eine Lie-Algebra* $\mathfrak{g}$ *ist genau dann auflösbar, wenn* $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ *nilpotent ist.*

Beweis. Ist $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ nilpotent, so folgt aus Lemma III.3.3(ii), daß $\mathfrak{g}$ auflösbar ist, da $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ abelsch ist. Ist umgekehrt $\mathfrak{g}$ auflösbar, so ist $\mathfrak{g}$ nach Korollar III.4.4 ein nilpotenter $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$-Modul. Also ist $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ nilpotent, da $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ auch ein nilpotenter $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$-Modul ist (Bemerkung III.1.4). ∎

Das Ideal $[\mathfrak{g},\mathrm{rad}(\mathfrak{g})]$

Lemma III.4.6. *Sei* $\mathfrak{g}$ *eine Lie-Algebra,* (ρ,V) *eine Darstellung von* $\mathfrak{g}$ *und* $\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{g}$ *ein Unterraum, so daß* $\mathfrak{a}$ *nilpotent auf* V *ist, d.h. es existiert ein* $n\in\mathbb{N}$ *mit* $\rho(\mathfrak{a})^n=\{0\}$*. Sei weiter* $x\in\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$*, so daß* $\rho(x)$ *nilpotent auf* V *ist. Dann ist* $\mathbb{K}x+\mathfrak{a}$ *nilpotent auf* V*.*

Beweis. Wir dürfen o.B.d.A. $\mathfrak{g}\subseteq\mathfrak{gl}(V)$ annehmen. Nach Voraussetzung ist x dann nilpotent und es existiert ein m mit $x^m=0$. Wir zeigen $(\mathbb{K}x+\mathfrak{a})^{nm}=\{0\}$.

Sei dazu $u=u_1\cdots u_{nm}$ ein Produkt aus Elementen von $\{x\}\cup\mathfrak{a}$. Wir haben zu zeigen, daß jedes solche Produkt verschwindet. Für $a\in\mathfrak{a}$ haben wir

$$ax=xa+[a,x]\in xa+\mathfrak{a}.$$

Hiermit erhalten wir

$$u_1\cdots u_{nm}\in\sum_{r=0}^{nm}x^r\mathfrak{a}^t,$$

wobei t die Anzahl der Indizes j mit $u_j\in\mathfrak{a}$ ist. Also verschwindet dieses Produkt für $t\geq n$. Ist $t<n$, so existiert ein Index j, so daß $u_{j+1}\cdots u_{j+m}=x^m=0$ ist, denn in diesem Fall befinden sich $nm-t>n(m-1)$ Elemente in Indexintervallen, für die kein Faktor aus $\mathfrak{a}$ ist. Damit ist immer $u_1\cdots u_{nm}=0$. ∎

Satz III.4.7. *Ist* V *ein endlichdimensionaler* $\mathfrak{g}$*-Modul, so ist* V *ein nilpotenter Modul für das Ideal* $[\mathfrak{g},\mathrm{rad}(\mathfrak{g})]$ *von* $\mathfrak{g}$*.*

Beweis. Sei $\mathfrak{r}:=\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ und $\mathfrak{a}:=[\mathfrak{g},\mathfrak{r}]$. Nach Korollar III.4.4 ist V ein nilpotenter $[\mathfrak{r},\mathfrak{r}]$-Modul. Sei nun $\mathfrak{t}\subseteq[\mathfrak{g},\mathfrak{r}]$ ein Unterraum, der $[\mathfrak{r},\mathfrak{r}]$ enthält und maximal ist bzgl. der Eigenschaft, daß er auf V nilpotent ist. Wir nehmen an, daß $\mathfrak{t}\neq[\mathfrak{g},\mathfrak{r}]$ ist. Dann existiert ein $x\in\mathfrak{g}$ und $y\in\mathfrak{r}$ mit $[x,y]\not\in\mathfrak{t}$.

Der Unterraum $\mathfrak{b}:=\mathfrak{r}+\mathbb{K}x$ ist eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{r}$ ein auflösbares Ideal von $\mathfrak{b}$, und $\mathfrak{b}/\mathfrak{r}\cong\mathbb{K}$ ist auflösbar. Also ist $\mathfrak{b}$ nach Lemma III.3.3 auflösbar.

Nach Korollar III.4.4 ist V ein nilpotenter $[\mathfrak{b},\mathfrak{b}]$-Modul. Damit ist $[x,y]$ nilpotent auf V. Wegen $\mathfrak{t}\subseteq\mathfrak{r}$ und $[x,y]\in[\mathfrak{g},\mathfrak{r}]\subseteq\mathfrak{r}$ ist $\big[[x,y],\mathfrak{t}\big]\subseteq[\mathfrak{r},\mathfrak{r}]\subseteq\mathfrak{t}$. Aus Lemma III.4.6 folgt nun, daß der Unterraum $\mathbb{K}[x,y]+\mathfrak{t}$ nilpotent auf V ist. Dies steht im Widerspruch zur Maximalität von $\mathfrak{t}$. Also ist $\mathfrak{t}=[\mathfrak{g},\mathfrak{r}]$, d.h. V ist ein nilpotenter $[\mathfrak{g},\mathfrak{r}]$-Modul. ∎

Wenden wir Satz III.4.7 auf die adjungierte Darstellung von $\mathfrak{g}$, so erhalten wir:

Folgerung III.4.8. $[\mathfrak{g}, \mathrm{rad}(\mathfrak{g})]$ *ist ein nilpotentes Ideal von* $\mathfrak{g}$. *Insbesondere ist* $\mathrm{ad}\, x$ *für alle* $x \in [\mathfrak{g}, \mathrm{rad}\, \mathfrak{g}]$ *nilpotent.* ■

III.5. Die Cartan–Killing-Form

Wir führen nun ein wichtiges Hilfsmittel zum Studium gewisser Ideale von $\mathfrak{g}$ ein.

Definition III.5.1. Sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Lie-Algebra. Die Form

$$\kappa\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{K}$$

mit $\kappa(x, y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, x\, \mathrm{ad}\, y)$ heißt *Cartan–Killing-Form* [1] [2] . ■

Bevor wir die Cartan–Killing Form genauer studieren, holen wir etwas aus.

Definition III.5.2. (a) Sei V ein $\mathfrak{g}$-Modul. Eine Bilinearform $\beta\colon V \times V \to \mathbb{K}$ heißt *invariant*, wenn

$$\beta(x.v, w) + \beta(v, x.w) = 0$$

für alle $x \in \mathfrak{g}$, $v, w \in V$ gilt.

Ist β eine Bilinearform auf V und $U \subseteq V$ eine Teilmenge, so definieren wir

$$U^{\perp} := U^{\perp_\beta} := \{v \in V\colon (\forall u \in U)\beta(v, u) = 0\}.$$

---

[1] Élie Joseph Cartan (1869–1951), frz. Mathematiker in Montpellier, Lyon, Nancy und Paris. E. Cartan ist ein Schüler Sophus Lies. In seiner Dissertation (1894) stopft er Killing's Lücken in der Klassifikation der komplexen einfachen endlichdimensionalen Lie-Algebren und entwickelt die Cartan-Kriterien. Später klassifiziert er die reellen einfachen endlichdimensionalen Lie-Algebren und die einfachen endlichdimensionalen Moduln der komplexen einfachen Algebren. Weiter begründet er die Theorie der Riemannschen symmetrischen Räume (1926–32) und schuf so eine Verbindung zwischen Lies lokaler Theorie und der globalen Differentialgeometrie.

[2] Wilhelm Killing (1847–1923), deutscher Mathematiker in Münster; Schüler von Weierstraß in Berlin. Während Sophus Lie um 1870 die Lie-Gruppen im Kontext von Differentialgleichungen einführte, treten sie bei Killing zeitgleich im Kontext der nichteuklidischen Geometrie auf. Die erste, wenn auch noch unvollständige, Klassifikation der einfachen endlichdimensionalen komplexen Lie-Algebren geht auf ihn zurück (1886). Hierzu gibt es einen äußerst interessant zu lesenden Briefwechsel zwischen F. Engel und W. Killing, der die Ideen hinter der Klassifikation sehr schön dokumentiert (Dok. zur Geschickte der Mathematik **9**, Vieweg Verlag, Hrsg. W. Hein, 1997). W. Killing tritt im Alter von 39 Jahren dem Franziskanerorden bei.

(b) Eine Bilinearform $\beta\colon \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathbb{K}$ heißt *invariant*, wenn sie invariant bzgl. der adjungierten Darstellung ist, d.h., wenn

$$\beta([x,y],z)+\beta(y,[x,z])=0$$

für alle $x,y,z\in\mathfrak{g}$ gilt.
(c) Sei $\rho\colon\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$ eine endlichdimensionale Darstellung von $\mathfrak{g}$. Die durch

$$\kappa_\rho(x,y):=\operatorname{tr}\big(\rho(x)\rho(y)\big)$$

definierte Bilinearform heißt *die zu ρ assoziierte Form auf $\mathfrak{g}$*. In diesem Sinn ist die Cartan–Killing-Form $\kappa=\kappa_{\mathrm{ad}}$ zu der adjungierten Darstellung assoziiert. ■

Lemma III.5.3. *Ist (ρ,V) eine endlichdimensionale Darstellung von $\mathfrak{g}$, so ist die Form κ_ρ eine symmetrische invariante Bilinearform auf $\mathfrak{g}$. Insbesondere gilt dies für die Cartan–Killing-Form $\kappa=\kappa_{\mathrm{ad}}$. Weiter gelten folgende Aussagen:*

(i) *Ist $\mathfrak{n}\trianglelefteq\mathfrak{g}$ und V ein nilpotenter $\mathfrak{n}$-Modul, so ist $\mathfrak{n}\subseteq\mathfrak{g}^\perp$ bzgl. κ_ρ.*

(ii) *Ist $\mathfrak{n}$ ein nilpotentes Ideal von $\mathfrak{g}$, so ist $\kappa(\mathfrak{n},\mathfrak{g})=\{0\}$.*

Beweis. Die Symmetrie der Form κ_ρ folgt aus

$$\kappa_\rho(y,x)=\operatorname{tr}\big(\rho(y)\rho(x)\big)=\operatorname{tr}\big(\rho(y)\rho(x)\big)=\kappa_\rho(y,x)$$

und die Invarianz aus

$$\begin{aligned}\kappa_\rho([x,y],z)&=\operatorname{tr}\big(\rho([x,y])\rho(z)\big)=\operatorname{tr}\big(\rho(x)\rho(y)\rho(z)\big)-\operatorname{tr}\big(\rho(y)\rho(x)\rho(z)\big)\\&=\operatorname{tr}\big(\rho(y)\rho(z)\rho(x)\big)-\operatorname{tr}\big(\rho(y)\rho(x)\rho(z)\big)=\operatorname{tr}\big(\rho(y)\rho([z,x])\big)\\&=-\kappa_\rho(y,[x,z]).\end{aligned}$$

(i) Sei $\mathcal{F}=(V_0,\ldots,V_n)$ eine Fahne von $\mathfrak{g}$-Untermoduln von V mit $\rho(\mathfrak{n})\subseteq\mathfrak{g}_n(\mathcal{F})$. Die Existenz einer solchen Fahne folgt aus der Invarianz der Unterräume $V_j:=\rho(\mathfrak{n})^j(V)$ unter $\mathfrak{g}$ (Lemma III.2.5). Für $x\in\mathfrak{n}$ und $y\in\mathfrak{g}$ gilt dann $\rho(x)\rho(y).V_j\subseteq V_{j-1}$ für $j=1,\ldots,n$. Also ist

$$\kappa_\rho(x,y)=\operatorname{tr}\big(\rho(x)\rho(y)\big)=0.$$

(ii) Hierzu hat man nur (i) auf die adjungierte Darstellung anzuwenden, denn für jedes nilpotente Ideal $\mathfrak{n}\trianglelefteq\mathfrak{g}$ ist $\mathfrak{g}$ ein nilpotenter $\mathfrak{n}$-Modul, da $(\operatorname{ad}\mathfrak{n})^{k+1}.\mathfrak{g}\subseteq(\operatorname{ad}\mathfrak{n})^k.\mathfrak{n}\subseteq C^{k+1}(\mathfrak{n})=\{0\}$ für ein ausreichend großes $k\in\mathbb{N}$ gilt. ■

Lemma III.5.4. *Die Cartan–Killing-Form κ ist invariant unter allen Derivationen.*

Beweis. Seien $D\in\operatorname{der}\mathfrak{g}$ und $x,y\in\mathfrak{g}$. Dann haben wir wegen Satz I.1.12(iii):

$$\begin{aligned}\kappa(D.x,y)&=\operatorname{tr}\big(\operatorname{ad}(D.x)\operatorname{ad}y\big)=\operatorname{tr}\big([D,\operatorname{ad}x]\operatorname{ad}y\big)\\&=-\operatorname{tr}\big(\operatorname{ad}x[D,\operatorname{ad}y]\big)=-\operatorname{tr}\big(\operatorname{ad}x\operatorname{ad}(D.y)\big)=-\kappa(x,D.y).\end{aligned}$$

■

Lemma III.5.5. *Ist V ein $\mathfrak{g}$-Modul und β eine invariante Bilinearform auf $\mathfrak{g}$ sowie $U \subseteq V$ ein Untermodul, so ist $U^{\perp}$ ebenfalls ein Untermodul. Insbesondere ist für jedes Ideal $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ der Orthogonalraum $\mathfrak{a}^{\perp}$ bzgl. der Cartan–Killing-Form wieder ein Ideal.*

Beweis. Um die Invarianz von $U^{\perp}$ zu zeigen, seien $u \in U$, $v \in U^{\perp}$ und $x \in \mathfrak{g}$ beliebig. Dann haben wir

$$\beta(x.v, u) = -\beta(v, x.u) = 0,$$

da $x.u \in U$ ist. Also ist $x.v \in U^{\perp}$, da u beliebig war, und somit $U^{\perp}$ invariant unter $\mathfrak{g}$.

Der zweite Teil der Behauptung folgt sofort aus dem ersten Teil, Lemma III.5.3, und der Beobachtung, daß die Untermoduln von $\mathfrak{g}$ bzgl. der adjungierten Darstellung genau die Ideale von $\mathfrak{g}$ sind. ■

Im folgenden steht $\mathfrak{a}^{\perp}$ für einen Unterraum $\mathfrak{a}$ einer endlichdimensionalen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ immer für den Orthogonalraum bzgl. der Cartan–Killing-Form.

Lemma III.5.6. *Sei $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ ein Ideal und $\kappa_{\mathfrak{a}}$ die Cartan–Killing-Form von $\mathfrak{a}$. Dann gilt*

$$\kappa_{\mathfrak{a}}(x, y) = \kappa(x, y)$$

für alle $x, y \in \mathfrak{a}$.

Beweis. Die Endomorphismen $\operatorname{ad} x$ und $\operatorname{ad} y$ bilden $\mathfrak{g}$ nach $\mathfrak{a}$ ab. Also gilt dies auch für deren Produkt. Daher ist

$$\kappa_{\mathfrak{a}}(x, y) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} x|_{\mathfrak{a}} \operatorname{ad} y|_{\mathfrak{a}}) = \operatorname{tr}\big((\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y)|_{\mathfrak{a}}\big) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y) = \kappa(x, y) \qquad ■$$

III.6. Das Cartan-Kriterium

Diser Abschnitt dient dazu, eine Charakterisierung der auflösbaren Lie-Algebren durch eine Eigenschaft der Cartan-Killing-Form zu geben. Das Ergebnis wird sein, daß $\mathfrak{g}$ genau dann auflösbar ist, wenn $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ auf $\mathfrak{g}$ senkrecht ist. Hieraus gewinnen wir eine Charakterisierung von halbeinfachen Lie-Algebren durch die Eigenschaft, daß ihre Cartan-Killing Form nicht entartet ist. Diese Eigenschaft ist der Schlüssel zur Feinstrukturtheorie halbeinfacher Lie-Algebren.

Lemma III.6.1. *Seien V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $E \subseteq F$ Unterräume von $\mathfrak{gl}(V)$. Weiter sei*

$$x \in M := \{y \in \mathfrak{gl}(V) \colon [y, F] \subseteq E\}.$$

Wenn $\operatorname{tr}(xy) = 0$ für alle $y \in M$ gilt, dann ist x nilpotent.

Beweis. (1) Zuerst nehmen wir an, daß $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen ist. Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V, die aus Eigenvektoren der diagonalisierbaren

Jordan-Komponente x_s von x zu den Eigenwerten λ_j, $j = 1, \ldots, n$, besteht. Sei weiter Q der $\mathbb{Q}$-Vektorraum in $\mathbb{K}$, der von den λ_j aufgespannt wird. Wir müssen zeigen, daß $Q = \{0\}$ ist. Dazu betrachten wir für ein $f \in Q^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(Q, \mathbb{Q})$ die Diagonalmatrix

$$y = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ 0 & & & f(\lambda_n) \end{pmatrix},$$

die wir bzgl. obiger Basis als ein Element von $\mathfrak{gl}(V)$ auffassen. Wir zeigen zuerst, daß $y \in M$ gilt.

Wir betrachten die Basis $(E_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ von $\mathfrak{gl}(V)$ mit $E_{ij}(v_k) = \delta_{jk} v_i$ (vgl. Beispiel I.1.5(b)), und finden

$$\mathrm{ad}(x_s).E_{ij} = (\lambda_i - \lambda_j)E_{ij}, \quad \mathrm{ad}(y).E_{ij} = f(\lambda_i - \lambda_j).E_{ij}.$$

Jetzt wählen wir ein Interpolationspolynom $P \in \mathbb{K}[X]$ mit

$$P(\lambda_i - \lambda_j) = f(\lambda_i - \lambda_j) \quad \text{für } 1 \leq i \leq j \leq n.$$

Insbesondere ist $f(0) = 0 = P(0)$. Dann gilt $P\big(\mathrm{ad}(x_s)\big).E_{ij} = \mathrm{ad}(y).E_{ij}$ für alle i, j, d.h. $P\big(\mathrm{ad}(x_s)\big) = \mathrm{ad}(y)$.

Weil nach Korollar II.3.6 $\mathrm{ad}(x_s) = (\mathrm{ad}\, x)_s$ ist, folgt aus Satz II.3.4(c) die Beziehung $\mathrm{ad}(x_s).F \subseteq E$, weil $x \in M$ ist. Wegen $P(0) = 0$ ist P ein Polynom ohnen konstanten Term, also gilt auch $\mathrm{ad}(y).F \subseteq E$, d.h. $y \in M$. Aus unserer Voraussetzung erhalten wir damit in Q:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(\lambda_k) = \mathrm{tr}(xy) = 0.$$

Insbesondere haben wir

$$0 = f\Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(\lambda_k)\Big) = \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k)^2.$$

Daher ist $f(\lambda_k) = 0$ für alle k und somit $f = 0$. Weil $f \in Q^*$ beliebig war, ist $Q = \{0\}$.

(2) Wir lassen nun die Voraussetzung der algebraischen Abgeschlossenheit von $\mathbb{K}$ fallen und schreiben $\mathbb{F}$ für einen algebraischen Abschluß von $\mathbb{K}$. Sei f_j, $j \in J$, eine Basis von $\mathbb{K}$ als $\mathbb{F}$-Vektorraum. Weiter sei Sei $V_{\mathbb{F}} := V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{F}$ der entsprechende $\mathbb{F}$-Vektorraum der gleichen Dimension. Dann ist

$$V_{\mathbb{F}} = \bigoplus_{j \in J} V \otimes f_j$$

als $\mathbb{K}$-Vektorraum. Wir schreiben $x_{\mathbb{F}} \in \mathfrak{gl}(V_{\mathbb{F}})$ für die $\mathbb{F}$-lineare Fortsetzung von $x \in \mathfrak{gl}(V)$, d.h. $x_{\mathbb{F}}(v \otimes f_j) = x.v \otimes f_j$ für alle $j \in J$. Wir definieren

$$\widetilde{M} := \{y \in \mathfrak{gl}(V_{\mathbb{F}}) \colon [y, F_{\mathbb{F}}] \subseteq E_{\mathbb{F}}\} = \{y \in \mathfrak{gl}(V_{\mathbb{F}}) \colon [y, F] \subseteq E_{\mathbb{F}}\}.$$

Es gilt

$$\mathfrak{gl}(V_{\mathbb{F}}) \cong \mathfrak{gl}(V) \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{F} \cong \bigoplus_{j \in J} \mathfrak{gl}(V) \otimes f_j.$$

Schreiben wir $y \in \mathfrak{gl}(V_{\mathbb{F}})$ entsprechend als $y = \sum_j y_j \otimes f_j$ mit $y_j \in \mathfrak{gl}(V)$, so ist die Bedingung $[y, F] \subseteq E_{\mathbb{F}} = \bigoplus_{j \in J} E \otimes f_j$ äquivalent zu $[y_j, F] \subseteq E$ für alle $j \in J$. Also ist $\widetilde{M} = M_{\mathbb{F}} := M \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{F}$. Ist nun $\mathrm{tr}(xy) = 0$ für alle $y \in M$, so haben wir auch

$$\mathrm{tr}(x_{\mathbb{F}} y_{\mathbb{F}}) = \mathrm{tr}(xy) = 0$$

für alle $y \in M$ und folglich $\mathrm{tr}(x_{\mathbb{F}} z) = 0$ für alle $z \in \widetilde{M} = M_{\mathbb{F}}$. Wir können nun den ersten Teil des Beweises anwenden und sehen, daß $x_{\mathbb{F}}$, und somit auch x, nilpotent ist. ∎

Wir kommen nun zu Cartans Kriterium für die Auflösbarkeit von Lie-Algebren.

Satz III.6.2. (Cartan-Kriterium – linearer Fall) *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\mathfrak{g} \leq \mathfrak{gl}(V)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) $\mathfrak{g}$ *ist auflösbar.*

(2) $\mathrm{tr}(\mathfrak{g} \cdot [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = \{0\}$.

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2): Ist $\mathfrak{g}$ auflösbar, so ist V nach Korollar III.4.4 ein nilpotenter $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$-Modul. Damit folgt die Behauptung aus Lemma III.5.3(i).
(2) $\Rightarrow$ (1): Nach Korollar III.4.5 genügt es zu zeigen, daß $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ nilpotent ist. Wegen Folgerung III.2.7 ist $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ genau dann nilpotent, wenn dies für alle $\mathrm{ad}\, x$, $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, gilt. Um dies einzusehen, reicht es wegen Satz II.3.5 nachzuweisen, daß jedes Element von $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ nilpotent ist. Wir wenden Lemma III.6.1 mit $E := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq F := \mathfrak{g}$ an, d.h. wir setzen

$$M = \{y \in \mathfrak{gl}(V) \colon [y, \mathfrak{g}] \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\} \supseteq \mathfrak{g}.$$

Wegen der Linearität der Spur reicht es also zu zeigen, daß $\mathrm{tr}([x, x']y) = 0$ für alle $x, x' \in \mathfrak{g}$ und alle $y \in M$ gilt. Mit der Invarianz der Spurform (Lemma III.5.3) erhalten wir $\mathrm{tr}([x, x']y) = \mathrm{tr}(x[x', y])$. Wegen $[x', y] \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ (Definition von M) folgt die Behauptung nun aus (2). ∎

Das Cartan-Kriterium für Auflösbarkeit

Korollar III.6.3. *Eine Lie-Algebra* $\mathfrak{g}$ *ist genau dann auflösbar, wenn*

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^\perp = \mathfrak{g}$$

bzgl. der Cartan-Killing-Form gilt.

Beweis. Ist $\mathfrak{g}$ auflösbar, so auch $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ als homomorphes Bild. Damit folgt $\mathfrak{g} \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^\perp$ sofort aus Satz III.6.2.

Ist umgekehrt $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^\perp$, so ist $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ nach dem Cartan-Kriterium (Satz III.6.2) auflösbar, also folgt mit $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ und Satz III.3.3(ii), daß $\mathfrak{g}$ auflösbar ist. ∎

Wir werden nun das Cartan-Kriterium derart verallgemeinern, daß wir es als Spezialfall einer Aussage über allgemeine Lie-Algebren erhalten.

Satz III.6.4. *Für jede endlichdimensionale Lie-Algebra* $\mathfrak{g}$ *gilt*

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^\perp = \mathrm{rad}(\mathfrak{g}).$$

Beweis. Sei $\mathfrak{a} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^\perp$ und $\mathfrak{r} := \mathrm{rad}(\mathfrak{g})$. Nach Lemma III.5.5 ist $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ ein Ideal. Weiter erhalten wir mit Lemma III.5.3 für $x, y, z \in \mathfrak{a}$:

$$\kappa_{\mathfrak{a}}(x, [y, z]) = \kappa(x, [y, z]) \in \kappa(\mathfrak{a}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = \{0\}.$$

Also ist $\mathfrak{a}$ nach dem Cartan-Kriterium auflösbar. Zusammenfassend sehen wir, daß $\mathfrak{a}$ ein auflösbares Ideal von $\mathfrak{g}$ und damit in $\mathfrak{r}$ enthalten ist.

Weiter ist $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$ ein nilpotentes Ideal von $\mathfrak{g}$ (Satz III.4.7) und daher wegen Lemma III.5.3(ii) in $\mathfrak{g}^\perp$ enthalten. Für $x \in \mathfrak{r}$, $y, z \in \mathfrak{g}$ haben wir nun

$$\kappa(x, [y, z]) = \kappa([x, y], z) \in \kappa([\mathfrak{r}, \mathfrak{g}], \mathfrak{g}) = \{0\}.$$

Also ist $\mathfrak{r} \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^\perp = \mathfrak{a}$. ∎

III.7. Anwendung auf halbeinfache Lie-Algebren

Nachdem wir mit Satz III.4.7 Informationen über die Nilpotenz der Einschränkungen von Darstellungen von $\mathfrak{g}$ auf das Ideal $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$ haben, liefert uns der Satz von Weyl, den wir in diesem Abschnitt kennenlernen, eine Aussage über die Halbeinfachheit von Einschränkungen auf halbeinfache Unteralgebren. Dieser Satz ist ein zentrales Ergebnis der Darstellungstheorie endlichdimensionaler Lie-Algebren über Körpern der Charakteristik 0. Wir werden bald sehen, welche weitreichenden Folgerungen man aus ihm ziehen kann. Das wesentliche Hilfsmittel im Beweis sind die Casimir-Elemente[1], die man nicht ausgearteten invarianten Bilinearformen zuordnet.

[1] Hendrik Brught Gerhard Casimir (geb. am 15.7.1909 in Den Hague), holländischer

Casimir-Elemente

Lemma III.7.1. *Sei* β *eine nicht entartete invariante Bilinearform auf der Lie-Algebra* $\mathfrak{g}$, $x_1, \ldots, x_n$ *eine Basis von* $\mathfrak{g}$ *und* $x^1, \ldots, x^n$ *die duale Basis bzgl.* β, *d.h.* $\beta(x_i, x^j) = \delta_{ij}$. *Ist weiter* $\rho\colon \mathfrak{g} \to A$ *ein Lie-Algebren-Homomorphismus in eine assoziative Algebra* A, *so kommutiert das Element*

$$\Omega := \Omega(\beta, \rho) := \sum_{j=1}^{n} \rho(x^j)\rho(x_j) \in A$$

mit $\rho(\mathfrak{g})$.

Beweis. Sei $z \in \mathfrak{g}$. Dann ist $\operatorname{ad} z(x_j) = \sum_{k=1}^n a_{kj} x_k$ und $\operatorname{ad} z(x^j) = \sum_{k=1}^n a^{jk} x^k$. Daher gilt

$$a_{kj} = \beta([z, x_j], x^k) = -\beta(x_j, [z, x^k]) = -a^{kj}.$$

Damit rechnen wir

$$\begin{aligned}
&\Omega\rho(z) - \rho(z)\Omega \\
&= \sum_{j=1}^{n} \rho(x^j)\rho(x_j)\rho(z) - \rho(z)\rho(x^j)\rho(x_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \rho(x^j)(\rho(x_j)\rho(z) - \rho(z)\rho(x_j)) - (\rho(z)\rho(x^j) - \rho(x^j)\rho(z))\rho(x_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \rho(x^j)\rho([x_j, z]) - \rho([z, x^j])\rho(x_j) \\
&= \sum_{j,k=1}^{n} (-a_{kj})\rho(x^j)\rho(x_k) - a^{jk}\rho(x^k)\rho(x_j) \\
&= \sum_{j,k=1}^{n} a^{kj}\rho(x^j)\rho(x_k) - a^{jk}\rho(x^k)\rho(x_j) \\
&= \sum_{j,k=1}^{n} a^{kj}\rho(x^j)\rho(x_k) - a^{kj}\rho(x^j)\rho(x_k) = 0.
\end{aligned}$$

■

Physiker, der als erster die Quantenmechanik des starren Rotators entwickelte. Casimir trat 1942 in das Forschungslabor der Philips AG ein, wurd dort Direktor und später Vorstandsmitglied der Gesellschaft (1957). Casimir hat den nach ihm benannten Operator für die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ im Jahre 1931 für allgemeine halbeinfache Lie-Algebren definiert. Anschließend gelang ihm für $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ ein algebraischer Beweis des Satzes von Weyl mit Hilfe des Casimir-Operators. Dieser Beweis wurde später durch B.L. van der Waerden auf allgemeine halbeinfache Lie-Algebren verallgemeinert.

Definition III.7.2. Das einer nicht entarteten Form β und einem Homomorphismus ρ wie in Lemma III.7.1 zugeordnete Element $\Omega(\beta,\rho) \in A$ heißt *Casimir Element zu* β *und* ρ. Man kann leicht zeigen, daß Ω nicht von der Wahl der Basis $x_1, \ldots, x_n$ abhängt (Übung). ■

Beispiel III.7.3. (Beispiele nicht entarteter invarianter Bilinearformen)
(a) Auf der Lie-Algebra $\mathfrak{u}(n,\mathbb{C})$ ist $\beta(X,Y) = \mathrm{Re}\,\mathrm{tr}(XY^*) = -\mathrm{tr}(XY)$ eine positiv definite invariante symmetrische Bilinearform.
(b) Sei $\mathrm{char}\,\mathbb{K} \neq 2$. Auf der Lie-Algebra $\mathfrak{so}(n,\mathbb{K})$ ist $\beta(X,Y) = -\mathrm{tr}(XY)$ eine nicht entartete invariante symmetrische Bilinearform. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist diese Form sogar positiv definit.
(c) Für die Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3,\mathbb{K})$ betrachten wir die Basis

$$z_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad z_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad z_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gelten die Kommutatorrelationen

$$[z_1, z_2] = z_3, \quad [z_2, z_3] = z_1 \quad \text{und} \quad [z_3, z_1] = z_2.$$

Wegen $-\mathrm{tr}(z_j^2) = 2$ erhalten wir $z^j := \frac{1}{2} z_j$, also mit Lemma III.7.1

$$\Omega(\beta,\rho) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3} \rho(z_j)^2.$$ ■

Beispiel III.7.4. (Die Oszillatoralgebra) Auf dem Vektorraum $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ betrachten wir die Operatoren P, Q, Z und H mit $Z = \mathbf{1}$,

$$(Pf)(x) = f'(x), \quad (Qf)(x) = xf(x)$$

und

$$(Hf)(x) = -\frac{1}{2}\left(f''(x) + x^2 f(x)\right),$$

d.h. $H = -\frac{1}{2}(P^2 + Q^2)$. Dann ist $\mathfrak{osc} := \mathrm{span}\{P,Q,Z,H\}$ eine vierdimensionale Lie-Algebra (die Oszillatoralgebra) und es gelten die folgenden Kommutatorrelationen

$$[P,Q] = Z, \quad [H,P] = Q, \quad \text{und} \quad [H,Q] = -P.$$

Alle anderen Klammern verschwinden. Die Unteralgebra

$$\mathfrak{h}_1 := \mathrm{span}\{P,Q,Z\}$$

ist die *dreidimensionale Heisenbergalgebra.*

Auf der Oszillatoralgebra existiert auch eine nicht entartete symmetrische Bilinearform, die durch:

$$\beta(pP + qQ + zZ + hH, p'P + q'Q + z'Z + h'H) = pp' + qq' + zh' + hz'$$

definiert ist. Die Existenz einer nicht entarteten Bilinearform auf $\mathfrak{g}$ ist bemerkenswert, denn für die Killingform gilt $\kappa(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_1) = \kappa(\mathfrak{g},[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = \{0\}$. Sie ist also sehr start entartet.

Zur Übung berechne man den dazugehörigen Casimir-Operator Ω zu β auf $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. ■

Der Satz von Weyl

Die Diskussion der Casimirelemente werden wir im Beweis des Satzes von Weyl[1] benötigen. Ebenso benötigen wir an zentraler Stelle das Cartan-Kriterium für Auflösbarkeit.

Der Satz von Weyl

Theorem III.7.5. *Jeder endlichdimensionale Modul einer endlichdimensionalen halbeinfachen Lie-Algebra ist halbeinfach.*

Beweis. Sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale halbeinfache Lie-Algebra und V ein endlichdimensionaler $\mathfrak{g}$-Modul, sowie $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ der zugehörige Homomorphismus. Da $\rho(\mathfrak{g})$ ebenfalls halbeinfach ist, dürfen wir $\mathfrak{g}$ durch $\rho(\mathfrak{g})$ ersetzen und so o.B.d.A. annehmen, daß $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ gilt. Wir führen den Beweis in mehreren Schritten:

Schritt 1: Sei $\kappa(x,y) = \mathrm{tr}(xy)$ die assoziierte Form auf $\mathfrak{g}$. Dann ist κ nicht entartet. Ist $\mathfrak{a} := \mathfrak{g}^\perp = \{x \in \mathfrak{g}\colon \mathrm{tr}(xy) = \{0\}\}$ das Entartungsideal von κ, so ist $\mathfrak{a}$ nach dem Cartan-Kriterium auflösbar (Satz III.6.2), also $\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{rad}(\mathfrak{g}) = \{0\}$ (Lemma III.3.7).

Schritt 2: Sei $\Omega = \sum_j x_j x^j \in \mathrm{End}(V)$ das assoziierte Casimir-Element (Lemma III.7.1). Dann ist

$$\Omega \in \mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(V) := \{A \in \mathrm{End}(V)\colon (\forall x \in \mathfrak{g}) Ax = xA\}$$

und

$$\mathrm{tr}\,\Omega = \sum_j \mathrm{tr}(x_j x^i) = \sum_j \kappa(x_j, x^j) = \dim \mathfrak{g}.$$

Schritt 3: Ist V einfach und $\mathfrak{g} \neq \{0\}$, so ist Ω ein Automorphismus von V. In der Tat: Wegen $\mathrm{tr}\,\Omega \neq 0$ (hier verwenden wir $\mathrm{char}\,\mathbb{K} = 0$) ist $\Omega \neq 0$, und mit Schur's Lemma II.1.6 sehen wir, daß Ω ein Automorphismus ist.

Schritt 4: Sei $W \subseteq V$ ein Untermodul der Kodimension 1. Wir zeigen in mehreren Schritten, daß W ein Modulkomplement hat. Wegen $\dim V/W = 1$ und $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ sehen wir zunächst, daß $\mathfrak{g}$ trivial auf V/W operiert, da alle Kommutatoren von Endomorphismen eines eindimensionalen Vektorraums verschwinden.

Schritt 4a: Reduktion auf den Fall, wo W einfach ist. Nehmen wir an, die Behauptung gelte für einfache Moduln. Wir zeigen über Induktion nach der Dimension von V, daß sie dann allgemein gilt. Sei dazu $\{0\} \neq V_1 \subseteq V$ ein

---

[1] Hermann Weyl (1885–1955), Physiker und Mathematiker in Zürich, Göttingen und Princeton; in der Zeit des dritten Reichs in die USA emigriert. Ihm sind zahlreiche fundamentale Beiträge in der Mathematik und der mathematischen Physik zu verdanken, insbesondere zur Struktur- und Darstellungstheorie kompakter Lie-Gruppen.

minimaler Untermodul. Wir dürfen annehmen, daß V nicht einfach ist, d.h. $V_1 \neq V$. Ist $V_1 \cap W = \{0\}$, so ist V_1 ein Modulkomplement für W, da $\dim V/W = 1$ ist. Ist dies nicht der Fall, so folgt $V_1 \subseteq W$ aus der Minimalität von V_1. Nach Induktionsvoraussetzung finden wir in V/V_1 für den Untermodul W/V_1 der Kodimension 1 ein Modulkomplement U, das wir als $U = U'/V_1$ für einen Untermodul U' von V schreiben können, der V_1 enthält. Aus der Behauptung für einfache Moduln erhalten wir nun in U' ein Modulkomplement E zu der Hyperebene V_1. Dann ist E ein Modulkomplement zu W in V.

Schritt 4b: Wir zeigen, daß die Darstellung von $\mathfrak{g}$ auf W injektiv ist. Sei $\mathfrak{a} := \{x \in \mathfrak{g} : x.W = \{0\}\}$ das Ideal der Elemente, die trivial auf W operieren. Wegen $\mathfrak{g}.V \subseteq W$ ist dann $\mathfrak{a} = [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = \{0\}$ ($\mathfrak{a}$ ist halbeinfach), denn für $x, y \in \mathfrak{a}$ haben wir $xy.V \subseteq x.W = \{0\}$. Wir sehen damit, daß $\mathfrak{g}$ treu auf W operiert.

Schritt 4c: Sei also W einfach, ρ_V die Darstellung von $\mathfrak{g}$ auf V, $\rho_W(x) = \rho_V(x)|_W$. Wir nehmen an, daß ρ_W injektiv ist. Sei $\Omega_W \in \mathrm{End}(V)$ das Casimir-Element, das zur Form κ_{ρ_W} gehört (vgl. Schritt 1 und 2). Ist $\mathfrak{g} = \{0\}$, so haben wir nichts zu zeigen. Für $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ ist Ω_W wegen Schritt 3 auf dem einfachen Untermodul W injektiv. Da $\Omega_W(V) \subseteq W$ gilt, liefert $\ker \Omega_W$ ein Modulkomplement zu W in V.

Schritt 5: Wir kommen jetzt zum allgemeinen Fall, wo $W \subseteq V$ ein beliebiger Untermodul ist. Zunächst machen wir $\mathrm{Hom}(V, W)$ durch

$$x.\varphi := \rho_W(x) \circ \varphi - \varphi \circ \rho_V(x)$$

zu einem $\mathfrak{g}$-Modul (Übung). Der Unterraum

$$U := \{\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W) : \varphi|_W \in \mathbb{K}\,\mathrm{id}_W\}$$

ist dann ein Untermodul, denn für $\varphi \in U$ gilt sogar $(x.\varphi)(W) = \{0\}$. In der Tat erhalten wir mit $\varphi|_W = \lambda\,\mathrm{id}_W$ und $w \in W$:

$$(x.\varphi)(w) = x.\varphi(w) - \varphi(x.w) = x.(\lambda w) - \lambda x.w = 0.$$

Damit ist

$$U_0 := \{\varphi \in U : \varphi(W) = \{0\}\}$$

ein Untermodul der Kodimension 1. Mit Schritt 4 finden wir also ein Element $\varphi_0 \in U$, so daß $\mathbb{K}\varphi_0$ ein zu U_0 komplementärer Untermodul ist. Nach Multiplikation mit einer geeigneten Zahl dürfen wir o.B.d.A. $\varphi_0|_W = \mathrm{id}_W$ annehmen. Dann muß der eindimensionale $\mathfrak{g}$-Modul $\mathbb{K}\varphi_0$ trivial sein. Folglich gilt $x.\varphi_0 = 0$, d.h. $\varphi_0 \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W)$. Damit ist $\ker \varphi_0$ ein zu W komplementärer Untermodul von V. ∎

Bemerkung III.7.6. (Historische Randnotiz, [Se92]) Weyl hat damals für seinen Beweis den berühmten „unitären Trick“ verwendet: Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ kann man die Halbeinfachheit der Darstellungen einer komplexen halbeinfachen Lie-Algebra aus dem entsprechenden Resultat für kompakte Gruppen bekommen.

Für $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ ist $\mathrm{SU}(n,\mathbb{C})$, die „spezielle unitäre Gruppe“, die hier hinzugezogene kompakte Gruppe; daher der Name „unitärer Trick“.

Ein rein algebraischer Beweis wurde erst in den 30er Jahren von B.L. van der Waerden gefunden, nachdem H.B.G. Casimir mit Hilfe des Casimir-Operators den Fall $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ behandelt hat. Ein weiterer algebraischer Beweis wurde 1937 von R. Brauer gefunden. Ein gänzlich neuer Zugang wurde von J.H.C. Whitehead beschritten, der einen Beweis im Rahmen der Kohomologie von Lie-Algebren fand. ■

Das Cartan-Kriterium für Halbeinfachheit

In diesem Abschnitt werden wir das Cartan-Kriterium für endlichdimensionale halbeinfache Lie-Algebren ableiten: Eine endlichdimensionale Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist genau dann halbeinfach, wenn ihre Cartan-Killing-Form nicht entartet ist. Diese Eigenschaft benötigen man in der feinen Strukturtheorie halbeinfacher Lie-Algebren, um einzusehen, daß jede endlichdimensionale halbeinfache Lie-Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper eine Wurzelzerlegung bzgl. einer toralen Cartan-Unteralgebra besitzt (siehe Abschnitt IV). Für den Beweis des folgenden Cartan-Kriteriums werden wir fast alle vorangegangenen Resultate aus Kapitel III heranziehen.

In diesem Abschnitt sind alle Lie-Algebren endlichdimensional.

Das Cartan-Kriterium für Halbeinfachheit

Theorem III.7.8. *Für eine endlichdimensionale Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) $\mathfrak{g}$ *ist halbeinfach.*

(2) $\mathrm{rad}(\mathfrak{g}) = \{0\}$.

(3) *Die Cartan-Killing-Form κ ist nicht entartet.*

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2): Lemma III.3.7.
(2) $\Rightarrow$ (3): Sei $\mathfrak{a} := \mathfrak{g}^\perp$ der Orthogonalraum von $\mathfrak{g}$ bzgl. der Cartan-Killing Form κ. Dann ist $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ ein Ideal (Lemma III.5.5) mit

$$\kappa_\mathfrak{a}(\mathfrak{a}, [\mathfrak{a},\mathfrak{a}]) = \kappa_\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, [\mathfrak{a},\mathfrak{a}]) \subseteq \kappa_\mathfrak{g}(\mathfrak{a},\mathfrak{g}) = \{0\}$$

(Lemma III.5.6). Nach dem Cartan-Kriterium (Korollar III.6.3) ist $\mathfrak{a}$ auflösbar, d.h. $\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{rad}(\mathfrak{g}) = \{0\}$. Also ist κ nicht entartet.
(3) $\Rightarrow$ (2): Wir nehmen an, daß $\mathfrak{r} := \mathrm{rad}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$ ist. Über Induktion nach k sieht man leicht, daß $D^k(\mathfrak{r})$ ein Ideal von $\mathfrak{g}$ ist. Sei n maximal mit $\mathfrak{a} := D^n(\mathfrak{r}) \neq \{0\}$. Dann ist $\mathfrak{a}$ ein abelsches Ideal von $\mathfrak{g}$, also $(\mathrm{ad}\,\mathfrak{a})^2 = \{0\}$. Nun ist $\mathfrak{g}$ ein nilpotenter $\mathfrak{a}$-Modul und daher $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}^\perp = \{0\}$ (Lemma III.5.3), ein Widerspruch.
(2) $\Rightarrow$ (1): Sei $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ ein Ideal. Dann ist $\mathfrak{b} := \mathfrak{a}^\perp \cap \mathfrak{a}$ ebenfalls ein Ideal mit $\kappa_\mathfrak{b} = \kappa\,|_{\mathfrak{b}\times\mathfrak{b}}$ (Lemma III.5.6). Folglich ist $\mathfrak{b}$ auflösbar (Korollar III.6.3) und

somit $\mathfrak{b} \subseteq \operatorname{rad}(\mathfrak{g}) = \{0\}$. Also ist $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp = \{0\}$. Wir haben schon gesehen, daß $\kappa_\mathfrak{g}$ nicht entartet ist, woraus insbesondere $\dim \mathfrak{a}^\perp = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{a}$ folgt (Nachweis!). Folglich ist $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$ eine direkte Summe von Idealen. Hieraus folgt die Reduktivität von $\mathfrak{g}$. Wegen $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subseteq \operatorname{rad}(\mathfrak{g}) = \{0\}$ ist $\mathfrak{g}$ halbeinfach (Satz II.2.3(iii)). ■

Lemma III.7.9. *Sei $\mathfrak{a}$ ein halbeinfaches Ideal der endlichdimensionalen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{a}^\perp$ der Orthogonalraum von $\mathfrak{a}$ bzgl. der Cartan-Killing-Form. Dann ist $\mathfrak{a}^\perp$ ein Ideal, und $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$ ist eine direkte Summe von Lie-Algebren.*

Beweis. Da $\mathfrak{a}$ halbeinfach ist, ist die Cartan-Killing-Form $\kappa_\mathfrak{a} = \kappa|_{\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}}$ von $\mathfrak{a}$ nicht entartet (Theorem III.7.8). Aus Lemma III.5.6 folgt daher $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp = \{0\}$. Da $\mathfrak{a}^\perp$ ebenfalls ein Ideal von $\mathfrak{g}$ ist (Lemma III.5.5) und $\dim \mathfrak{a}^\perp = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{a}$, haben wir $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$, so daß $\mathfrak{g}$ sogar eine direkte Lie-Algebra-Summe dieser Ideale ist. ■

Korollar III.7.10. *Die Lie-Algebra $\mathfrak{g}/\operatorname{rad}(\mathfrak{g})$ ist halbeinfach.*

Beweis. Wegen Lemma III.3.6 ist $\operatorname{rad}(\mathfrak{g}/\operatorname{rad}\mathfrak{g}) = \{0\}$. Die Behauptung folgt damit aus Satz III.7.8. ■

Hieraus können wir einige Schlußfolgerungen über das Verhalten des Radikals unter Homomorphismen ziehen:

Lemma III.7.11. *Ist $\alpha\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ ein surjektiver Homomorphismus von Lie-Algebren, so gilt $\alpha(\operatorname{rad}\mathfrak{g}) = \operatorname{rad}\mathfrak{h}$.*

Beweis. Sei $\mathfrak{r} := \operatorname{rad}\mathfrak{g}$. Zunächst ist $\alpha(\operatorname{rad}\mathfrak{g})$ ein auflösbares Ideal von $\mathfrak{h}$, also in $\operatorname{rad}(\mathfrak{h})$ enthalten. Hier verwenden wir, daß Bilder von Idealen unter surjektiven Homomorphismen wieder Ideale sind: $[\mathfrak{h}, \alpha(\operatorname{rad}\mathfrak{g})] = [\alpha(\mathfrak{g}), \alpha(\operatorname{rad}\mathfrak{g})] = \alpha([\mathfrak{g}, \operatorname{rad}(\mathfrak{g})]) \subseteq \alpha(\operatorname{rad}\mathfrak{g})$.

Sei $\pi\colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}/\alpha(\mathfrak{r})$ der Quotientenhomomorphismus. Wir betrachten den Homomorphismus $\beta := \pi \circ \alpha\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}/\alpha(\mathfrak{r})$. Wegen $\mathfrak{r} \subseteq \ker\beta$ faktorisiert β zu einem surjektiven Homomorphismus $\widetilde{\beta}\colon \mathfrak{g}/\mathfrak{r} \to \mathfrak{h}/\alpha(\mathfrak{r})$. Da $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ wegen Korollar III.7.10 halbeinfach ist, ist auch $\mathfrak{h}/\alpha(\mathfrak{r})$ als homomorphes Bild von $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ halbeinfach. Folglich ist $\pi(\operatorname{rad}\mathfrak{h}) \subseteq \operatorname{rad}\big(\mathfrak{h}/\alpha(\mathfrak{r})\big) = \{0\}$, d.h. $\operatorname{rad}\mathfrak{h} \subseteq \alpha(\mathfrak{r})$. Wir haben also $\operatorname{rad}\mathfrak{h} = \alpha(\mathfrak{r})$. ■

Ein Ideal $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt *charakteristisch*, wenn es unter allen Derivationen von $\mathfrak{g}$ invariant ist. Definitionsgemäß ist jedes Ideal unter allen inneren Derivationen $\operatorname{ad} x$ invariant; die Forderung der Invarianz unter *allen* Derivationen ist also stärker.

Lemma III.7.12. *Ist $\mathfrak{r} = \operatorname{rad}(\mathfrak{g})$ das Radikal der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, so gelten folgende Aussagen:*

(i) *$\mathfrak{r}$ ist ein charakteristisches Ideal von $\mathfrak{g}$.*

(ii) *Ist $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ ein Ideal, so ist $\operatorname{rad}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{r} \cap \mathfrak{a}$.*

Beweis. (i) Zunächst ist $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ ein charakteristisches Ideal von $\mathfrak{g}$, denn für jede Derivation $D \in \operatorname{der}\mathfrak{g}$ gilt für $x, y \in \mathfrak{g}$ die Beziehung $D([x, y]) = [Dx, y] +$

$[x, Dy] \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Da die Cartan-Killing-Form nach Lemma III.5.4 invariant unter $\operatorname{der}(\mathfrak{g})$ ist, folgt die Invarianz von $\mathfrak{r}$ nun aus $\mathfrak{r} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^{\perp}$ (Satz III.6.4) und Lemma III.5.5.

(ii) Zunächst ist klar, daß $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{a}$ ein auflösbares Ideal von $\mathfrak{a}$ und damit in $\operatorname{rad}(\mathfrak{a})$ enthalten ist. Da $\operatorname{rad}(\mathfrak{a})$ ein charakteristisches Ideal von $\mathfrak{a}$ ist, ist es auch ein Ideal von $\mathfrak{g}$, denn es ist invariant unter den Derivationen $(\operatorname{ad} x) \mid_{\mathfrak{a}}$, $x \in \mathfrak{g}$. Folglich ist $\operatorname{rad}(\mathfrak{a})$ in $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{a}$ enthalten. ■

III.8. Die Sätze von Levi und Malcev

In diesem Abschnitt sind wieder alle Lie-Algebren als endlichdimensional vorausgesetzt und es sei $\operatorname{char} \mathbb{K} = 0$. Die Sätze von Levi und Malcev sind fundamental für die Strukturetheorie endlichdimensionaler Lie-Algebren. Der Satz von Levi liefert die Existenz einer halbeinfachen Unteralgebra $\mathfrak{s}$, eines sogenannten Levi-Komplements, so daß $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{r} \rtimes \mathfrak{s}$ ist, und der Satz von Malcev zeigt, daß alle Levi-Komplemente unter gewissen Automorphismen zueinander konjugiert sind.

Der Satz von Levi

Für den Satz von Levi benötigen wir vorher ein technisches Lemma, das auf N. Bourbaki zurückgeht.

Lemma III.8.1. *Sei V ein $\mathfrak{g}$-Modul, $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ ein Ideal, und $v \in V$ ein Element mit $\mathfrak{g}.v = \mathfrak{a}.v$ und $\mathfrak{z}_{\mathfrak{a}}(v) := \{x \in \mathfrak{a} : x.v = 0\} = \{0\}$. Dann ist $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{a} \rtimes \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(v)$.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(v) \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{a}}(v) = \{0\}$. Wegen $\mathfrak{g}.v = \mathfrak{a}.v$ ist andererseits $\mathfrak{a} + \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(v) = \mathfrak{g}$. Hierzu betrachten wir die lineare Abbildung $\varphi: \mathfrak{g} \to V, x \mapsto x.v$. Dann ist $\varphi(\mathfrak{g}) = \varphi(\mathfrak{a})$, also $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} + \ker \mathfrak{a} = \mathfrak{a} + \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(v)$. Da $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(v)$ eine Unteralgebra ist, folgt hieraus die Behauptung. ■

$\boxed{\text{Satz von Levi}}$

Theorem III.8.2. *Ist $\alpha: \mathfrak{g} \to \mathfrak{s}$ ein surjektiver Homomorphismus von Lie-Algebren und $\mathfrak{s}$ halbeinfach, so existiert ein Homomorphismus $\beta: \mathfrak{s} \to \mathfrak{g}$ mit $\alpha \circ \beta = \operatorname{id}_{\mathfrak{s}}$.*

Beweis. Wir wollen Lemma III.8.1 verwenden und müssen daher noch das richtige v finden.

Wir zeigen die Behauptung über Induktion nach der Dimension von $\mathfrak{a} := \ker \alpha$. Für $\mathfrak{a} = \{0\}$ ist nichts zu zeigen. Sei also $\mathfrak{a} \neq \{0\}$.

1.Fall: Ist $\mathfrak{a}$ kein einfacher $\mathfrak{g}$-Modul, so existiert ein von $\mathfrak{a}$ und $\{0\}$ verschiedenes minimales Ideal $\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}$ von $\mathfrak{g}$. Dann faktorisiert α zu einem surjektiven Homomorphismus $\alpha_1: \mathfrak{g}/\mathfrak{a}_1 \to \mathfrak{s}$ mit $\dim(\ker \alpha_1) = \dim \mathfrak{a} - \dim \mathfrak{a}_1 < \dim \mathfrak{a}$.

Nach Induktionsvoraussetzung existiert dann ein Homomorphismus $\beta_1\colon \mathfrak{s} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a}_1$ mit $\alpha_1 \circ \beta_1 = \mathrm{id}_{\mathfrak{s}}$. Sei jetzt $q\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a}_1$ die Quotientenabbildung und $\mathfrak{b} := q^{-1}\big(\beta_1(\mathfrak{s})\big)$. Dann ist $\mathfrak{b}$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}$, und der Homomorphismus

$$\widetilde{\alpha} := q|_{\mathfrak{b}}\colon \mathfrak{b} \to \beta_1(\mathfrak{s}) \cong \mathfrak{s}, \quad x \mapsto x + \mathfrak{a}_1$$

ist surjektiv. Wegen $\dim \ker \widetilde{\alpha} = \dim \mathfrak{a}_1 < \dim \mathfrak{a}$ existiert nach Induktionsannahme ein Homomorphismus $\widetilde{\beta}\colon \beta_1(\mathfrak{s}) \to \mathfrak{b}$ mit $\widetilde{\alpha} \circ \widetilde{\beta} = \mathrm{id}_{\beta_1(\mathfrak{s})}$, so ist $\beta := \widetilde{\beta} \circ \beta_1\colon \mathfrak{s} \to \mathfrak{g}$ ein Homomorphismus mit

$$\alpha \circ \beta = \alpha_1 \circ \widetilde{\alpha} \circ \widetilde{\beta} \circ \beta_1 = \alpha_1 \circ \beta_1 = \mathrm{id}_{\mathfrak{s}}.$$

2.Fall: Das Ideal $\mathfrak{a} = \ker \alpha \subseteq \mathfrak{g}$ ist minimal und von $\{0\}$ verschieden. Da $\mathfrak{s}$ halbeinfach ist, ist das Radikal $\mathfrak{r} := \mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ von $\mathfrak{g}$ wegen Lemma III.7.11 in $\mathfrak{a} = \ker \alpha$ enthalten. Ist $\mathfrak{r} = \{0\}$, so ist $\mathfrak{g}$ halbeinfach, und die Behauptung folgt sofort aus Satz II.2.4, da zu $\mathfrak{a}$ ein komplementäres Ideal existiert. Sei also $\mathfrak{r} \neq \{0\}$. Weiter sei $n \in \mathbb{N}$ maximal mit $D^n(\mathfrak{r}) \neq \{0\}$. Dann ist $D^n(\mathfrak{r})$ ein abelsches Ideal von $\mathfrak{g}$, und wegen der Minimalität von $\mathfrak{a}$ sehen wir, daß $\mathfrak{a}$ abelsch sein muß.

Fall 2a: Die Darstellung $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{a}), x \mapsto \mathrm{ad}\, x|_{\mathfrak{a}}$ enthält also $\mathfrak{a}$ im Kern und faktorisiert daher zu einer Darstellung von $\mathfrak{s}$ auf $\mathfrak{a}$. So wird $\mathfrak{a}$, wegen der Minimalität, zu einem einfachen $\mathfrak{s}$-Modul. Ist $\mathfrak{a}$ ein trivialer $\mathfrak{s}$-Modul, so bedeutet dies, daß $\mathfrak{a}$ zentral in $\mathfrak{g}$ ist. Damit faktorisiert die adjungierte Darstellung $\mathfrak{g} \to \mathrm{der}(\mathfrak{g})$ zu einer Darstellung von $\mathfrak{s}$. Nach dem Satz von Weyl ist $\mathfrak{g}$ ein halbeinfacher $\mathfrak{s}$-Modul, wobei die Untermoduln genau die Ideale von $\mathfrak{g}$ sind. Es existiert also ein Modulkomplement zu $\mathfrak{a}$, d.h. sogar ein zu $\mathfrak{a}$ komplementäres Ideal von $\mathfrak{g}$. Damit dürfen wir sogar annehmen, daß $\mathfrak{a}$ ein nichttrivialer $\mathfrak{s}$-Modul ist.

Fall 2b: Wir sind nun an dem Punkt angelangt, wo wir Lemma III.8.1 verwenden können. Sei $V := \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ mit der durch

$$x.\varphi := \mathrm{ad}\, x \circ \varphi - \varphi \circ \mathrm{ad}\, x = [\mathrm{ad}\, x, \varphi]$$

definierten $\mathfrak{g}$-Modul-Struktur. Wir betrachten drei Unterräume von V:

$$\begin{aligned} P := \mathrm{ad}\, \mathfrak{a} \subseteq Q &:= \{\varphi \in V\colon \varphi(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{a}, \varphi(\mathfrak{a}) = \{0\}\} \\ \subseteq R &:= \{\varphi \in V\colon \varphi(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{a}, \varphi|_{\mathfrak{a}} \in \mathbb{K}\, \mathrm{id}_{\mathfrak{a}}\}. \end{aligned}$$

Da $Q \subseteq R$ der Kern der linearen Abbildung $\chi\colon R \to \mathbb{K}$ mit $\varphi|_{\mathfrak{a}} = \chi(\varphi)\, \mathrm{id}_{\mathfrak{a}}$ ist, gilt $\dim(R/Q) \leq 1$.

Wir zeigen, daß diese Räume $\mathfrak{g}$-Untermoduln sind. Sei dazu $y \in \mathfrak{g}$. Für $x \in \mathfrak{a}$ ist dann $[\mathrm{ad}\, y, \mathrm{ad}\, x] = \mathrm{ad}[y,x] \in P$, d.h. P ist ein Untermodul. Um einzusehen, daß R und Q Untermoduln sind, zeigen wir $\mathfrak{g}.R \subseteq Q$. Sei hierzu $x \in \mathfrak{g}$, $\varphi \in R$ und $\varphi|_{\mathfrak{a}} = \lambda\, \mathrm{id}_{\mathfrak{a}}$. Für $a \in \mathfrak{a}$ ist dann

$$(x.\varphi)(a) = x.\varphi(a) - \varphi([x,a]) = x.(\lambda a) - \lambda[x,a] = 0,$$

also $x.\varphi \in Q$. Ist $x \in \mathfrak{a}$ so erhalten wir

$$[\operatorname{ad} y, \varphi] = \operatorname{ad} y \circ \varphi - \varphi \circ \operatorname{ad} y = -\lambda \operatorname{ad} y \in P.$$

Also ist $\mathfrak{a}.R \subseteq P$. Das Ideal $\mathfrak{a}$ operiert also trivial auf dem Quotientenmodul R/P, der dadurch zu einem Modul von $\mathfrak{s} \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ wird.

Nach dem Satz von Weyl existiert zu dem Untermodul Q/P von R/P ein Modulkomplement, das natürlich eindimensional sein muß und damit von der Restklasse eines Elements $v \in R \setminus Q$ aufgespannt wird, von dem wir o.B.d.A. $v|_{\mathfrak{a}} = \mathrm{id}_{\mathfrak{a}}$ annehmen dürfen. Wegen der Eindimensionalität des komplementären Moduls und $\mathfrak{s} = [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$ ist er trivial, d.h. $\mathfrak{g}.v \subseteq P$. Wir zeigen nun, daß dieses Element v die Voraussetzungen von Lemma III.8.1 erfüllt.

Für $x \in \mathfrak{a}$ haben wir oben schon gesehen, daß $x.v = [\operatorname{ad} x, v] = -\operatorname{ad} x$ gilt. Ist $x.v = 0$, so ist $\operatorname{ad} x = 0$, d.h. $x \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Da $\mathfrak{a}$ ein minimales nicht-zentrales Ideal von $\mathfrak{g}$ ist ($\mathfrak{a}$ ist ein nichttrivialer $\mathfrak{s}$-Modul), folgt $x \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$. Damit ist $\mathfrak{z}_{\mathfrak{a}}(x) = \{0\}$ und $\mathfrak{a}.v = \operatorname{ad} \mathfrak{a} = P = \mathfrak{g}.v$. Aus Lemma III.8.1 folgt nun die Behauptung. ■

Definition III.8.3. Ist $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra und $\mathfrak{r}$ ihr auflösbares Radikal, so nennen wir eine Unteralgebra $\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{r} \rtimes \mathfrak{s}$ ein *Levi-Komplement.* ■

Korollar III.8.4. *In jeder endlichdimensionalen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ existiert ein Levi-Komplement.*

Beweis. Sei $\mathfrak{s} := \mathfrak{g}/\operatorname{rad}(\mathfrak{g})$ und $\alpha\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{s}$ der Quotientenhomomorphismus. Nach Korollar III.7.10 ist $\mathfrak{s}$ halbeinfach. Mit Theorem III.8.2 finden wir nun einen Lie-Algebra-Homomorphismus $\beta\colon \mathfrak{s} \to \mathfrak{g}$ mit $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}_{\mathfrak{s}}$. Dann ist β injektiv, also $\beta(\mathfrak{s}) \cap \operatorname{rad}(\mathfrak{g}) = \{0\}$, sowie $\beta(\mathfrak{s}) + \operatorname{rad}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$. Wir haben also $\mathfrak{g} \cong \operatorname{rad}(\mathfrak{g}) \rtimes \beta(\mathfrak{s})$. ■

Korollar III.8.5. *Ist $\mathfrak{s}$ ein Levi-Komplement in $\mathfrak{g}$, so ist*

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{g}, \operatorname{rad}(\mathfrak{g})] \rtimes \mathfrak{s}.$$

Ist $\operatorname{rad}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$*, so ist* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *ein Levi-Komplement.*

Beweis. Die zweite Aussage folgt aus der ersten, da $\operatorname{rad}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ gleichbedeutend ist mit $[\mathfrak{g}, \operatorname{rad}(\mathfrak{g})] = \{0\}$. Zunächst folgt $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] = \mathfrak{s}$ aus Lemma III.2.2. Damit ist

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{g}, \operatorname{rad}(\mathfrak{g})] + [\mathfrak{g}, \mathfrak{s}] = [\mathfrak{g}, \operatorname{rad}(\mathfrak{g})] + [\operatorname{rad}(\mathfrak{g}), \mathfrak{s}] + [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] = [\mathfrak{g}, \operatorname{rad}(\mathfrak{g})] + \mathfrak{s}. \quad ■$$

Beispiel III.8.6. (a) Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum ($\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 0$) und $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(V)$. Dann ist

$$\operatorname{rad}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \mathbb{K}\mathbf{1}$$

und $\mathfrak{sl}(V)$ ist ein Levi-Komplement (Übung).

(b) Sei V ein Vektorraum und $\mathcal{F} = (V_0, \ldots, V_n)$ eine Fahne in V. Dann ist

$$\operatorname{rad}(\mathfrak{g}(\mathcal{F})) = \{\varphi \in \mathfrak{g}(\mathcal{F}) \colon (\forall i)(\exists \lambda_i \in \mathbb{K})\ (\varphi - \lambda_i \mathbf{1})(V_i) \subseteq V_{i-1}\}.$$

Beachte insbesondere

$$\operatorname{rad}(\mathfrak{g}(\mathcal{F})) \supseteq \mathfrak{g}_n(\mathcal{F}) = \{\varphi \in \mathfrak{g}(\mathcal{F}) \colon (\forall i) \varphi(V_i) \subseteq V_{i-1}\}.$$

Wählten wir Unterräume $W_1, \ldots, W_n \subseteq V$ mit $V_i = W_1 \oplus \ldots \oplus W_i$, so ist

$$\mathfrak{g}(\mathcal{F}) \cong \mathfrak{g}_n(\mathcal{F}) \rtimes \bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{gl}(W_i),$$

$$\operatorname{rad}(\mathfrak{g}(\mathcal{F})) \cong \mathfrak{g}_n(\mathcal{F}) \rtimes \mathbb{K}^n \quad \text{und} \quad \mathfrak{g}(\mathcal{F}) / \operatorname{rad}(\mathfrak{g}(\mathcal{F})) \cong \bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{sl}(W_i). \qquad \blacksquare$$

Der Satz von Malcev

Bevor wir zu dem Satz von Malcev[1] kommen, den wir für Körper der Charakteristik 0 beweisen wollen, müssen wir uns zuerst überlegen, wie wir aus nilpotenten Elementen einer Lie-Algebra Automorphismen bekommen.

Lemma III.8.6. *Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $x \in \operatorname{End}(V)$ nilpotent.*

(i) $e^x := \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} x^n$ *ist ein Automorphismus von V.*

(ii) *Ist y ebenfalls nilpotent mit $[x, y] = 0$, so gilt $e^x e^y = e^{x+y}$.*

(iii) *Ist A eine $\mathbb{K}$-Algebra und $x \in \operatorname{der}(A)$ nilpotent, so ist $e^x \in \operatorname{Aut}(A)$.*

Beweis. (i),(ii) Zunächst ist e^x wohldefiniert, da die Reihe wegen der Nilpotenz von x abbricht und wegen $\operatorname{char} \mathbb{K} = 0$ alle Koeffizienten $\frac{1}{n!}$ definiert sind.

Wie über den reellen Zahlen (vgl. Abschnitt I) rechnet man (ii) und $e^x e^{-x} = \mathbf{1}$ nach.

(iii) Das ist die gleiche Rechnung wie für Beispiel I.4.12. Diese Rechnung bleibt in diesem Rahmen richtig, da alle auftretenden Reihen nur endliche Summen sind. ■

Definition III.8.7. Ist $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra und $\operatorname{ad} x$ nilpotent, so ist $e^{\operatorname{ad} x} \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$ ein Automorphismus von $\mathfrak{g}$. Die Automorphismen der Gestalt $e^{\operatorname{ad} x}$, wobei x in dem größten nilpotenten Ideal von $\mathfrak{g}$ liegt, heißen *speziell.* ■

---

[1] Anatoly Ivanovich Malcev (1909–1967), russ. Mathematiker in Moskau und Ivanovo. Malcev war Algebraiker, der in verschiedenen Bereichen Grundlegendes beigetragen hat. Er hat sich in der 1940er Jahren mit Lie-Gruppen und Lie-Algebren beschäftigt. Vergißt man bei Lie-Gruppen die Assoziativität, so erhält man die Struktur einer Loop. Die zugehörigen infinitesimalen Objekte sind die Malcev-Algebren, eine Verallgemeinerung der Lie-Algebren.

Satz von Malcev

Theorem III.8.8. *Sind $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{s}'$ Levi-Komplemente in $\mathfrak{g}$, so existiert ein spezieller Automorphismus $e^{\operatorname{ad} x}$, $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$, von $\mathfrak{g}$ mit $e^{\operatorname{ad} x}.\mathfrak{s}' = \mathfrak{s}$.*

Beweis. Wir betrachten zuerst einige Spezialfälle.
(a) Ist $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}] = \{0\}$, so ist $\mathfrak{g} = \mathfrak{r} \oplus \mathfrak{s}$ eine direkte Summe, und $\mathfrak{r} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ ist abelsch. Also ist

$$\mathfrak{s} = [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{s}', \mathfrak{s}'] = \mathfrak{s}',$$

und es ist nichts zu zeigen.
(b) Sei nun $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}] \neq \{0\}$, und $\mathfrak{r}$ enthalte außer $\{0\}$ keine Ideale von $\mathfrak{g}$, d.h. $\mathfrak{r}$ ist ein minimales echtes Ideal. Dann ist $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}] = \mathfrak{r}$, $[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}] = \{0\}$ (wegen $D^1(\mathfrak{r}) \neq \mathfrak{r}$) und $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$ (wegen $\mathfrak{r} \not\subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$). Wir definieren eine Abbildung $h\colon \mathfrak{s}' \to \mathfrak{r}$ durch $x + h(x) \in \mathfrak{s}$ für $x \in \mathfrak{s}'$, d.h. $-h$ ist die Projektion von $\mathfrak{s}'$ auf $\mathfrak{s}$ entlang $\mathfrak{r}$. Da $\mathfrak{s}$ eine Unteralgebra und $\mathfrak{r}$ abelsch ist, haben wir

$$[x + h(x), y + h(y)] = [x, y] + [x, h(y)] + [h(x), y] \in \mathfrak{s}.$$

Also ist

$$h([x, y]) = [x, h(y)] + [h(x), y].$$

Hieraus folgt, daß durch

$$x.(r, t) := ([x, r] + th(x), 0)$$

auf $\mathfrak{r} \times \mathbb{K}$ eine $\mathfrak{g}$-Modulstruktur definiert wird. Der Unterraum $\mathfrak{r} \cong \mathfrak{r} \times \{0\}$ ist ein Untermodul. Nach dem Satz von Weyl existiert dann ein Modulkomplement $\mathbb{K}(v, 1)$ von $\mathfrak{r}$ in $\mathfrak{r} \oplus \mathbb{K}$. Da $\mathfrak{s}'$ halbeinfach ist, gilt $\mathfrak{s}'.(v, 1) = \{0\}$, d.h.

$$0 = x.(v, 1) = \big(h(x), \operatorname{ad} x|_{\mathfrak{r}}\big).(v, 1) = h(x) + [x, v]$$

für alle $x \in \mathfrak{s}'$. Damit ist $h(x) = -[x, v]$. Wir haben nun

$$e^{\operatorname{ad} v}.x = x + [v, x] = x + h(x) \in \mathfrak{s}$$

für alle $x \in \mathfrak{s}'$ und somit $e^{\operatorname{ad} v}(\mathfrak{s}') \subseteq \mathfrak{s}$. Die Gleichheit folgt aus $\dim \mathfrak{s} = \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{r} = \dim \mathfrak{s}'$. Das zeigt die Behauptung, wenn $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$ ein von $\{0\}$ verschiedenes Ideal ist, das zudem minimal mit dieser Eigenschaft ist.
(c) Es bleibt nur noch der allgemeine Fall. Wir gehen nach Induktion über die Dimension n des Radikals $\mathfrak{r}$ vor. Für $n = 0$ ist nichts zu zeigen. Wir nehmen daher an, die Behauptung gelte für Lie-Algebren, für die die Dimension des Radikals $< n$ ist. Wegen (a) dürfen wir $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}] \neq \{0\}$ annehmen. Da $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$ nach Korollar III.4.8 nilpotent ist, ist das Zentrum $\mathfrak{c}$ dieser Algebra von $\{0\}$ verschieden. Sei $\mathfrak{m} \neq \{0\}$ ein minimales Ideal von $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{c}$. Ist $\mathfrak{m} = \mathfrak{r}$, so sind wir in der Situation von (b). Wir nehmen daher $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{r}$ an. Sei $\pi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_1 := \mathfrak{g}/\mathfrak{m}$ die kanonische Quotientenabbildung. Dann ist $\mathfrak{r}_1 := \pi(\mathfrak{r})$ das Radikal von $\mathfrak{g}_1$ (Lemma III.7.11), und $\pi(\mathfrak{s})$, $\pi(\mathfrak{s}')$ sind Levi-Komplemente in $\mathfrak{g}/\mathfrak{m}$, da sie halbeinfach sind (Satz

III.2.4) und $\pi(\mathfrak{r})$ komplementieren. Nach Induktionsvoraussetzung existiert ein $x_1 \in [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{r}_1]$ mit $e^{\operatorname{ad} x_1}.\pi(\mathfrak{s}') = \pi(\mathfrak{s})$. Wegen $\pi([\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]) = [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{r}_1]$ finden wir nun ein $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$ mit $\pi(x) = x_1$. Dann ist $e^{\operatorname{ad} x_1}.\pi(\mathfrak{s}') = \pi(e^{\operatorname{ad} x}.\mathfrak{s}') \subseteq \pi(\mathfrak{s})$, d.h.

$$e^{\operatorname{ad} x}.\mathfrak{s}' \subseteq \mathfrak{h} := \mathfrak{s} + \mathfrak{m}.$$

Nun sind $e^{\operatorname{ad} x}.\mathfrak{s}'$ und $\mathfrak{s}$ zwei Levi-Komplemente in der Lie-Algebra $\mathfrak{h}$ deren Radikal $\mathfrak{m}$ kleinere Dimension als $\mathfrak{r}$ hat. Nach Induktionsvoraussetzung finden wir also ein $y \in \mathfrak{m}$ mit $e^{\operatorname{ad} y} e^{\operatorname{ad} x}.\mathfrak{s}' \subseteq \mathfrak{s}$. Da $\mathfrak{m}$ in $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$ zentral war, ist $[x, y] = 0$, also $e^{\operatorname{ad} y} e^{\operatorname{ad} x}.\mathfrak{s}' = e^{\operatorname{ad}(x+y)}.\mathfrak{s}' \subseteq \mathfrak{s}$. ■

Der Satz von Malcev hat einige wichtige Konsequenzen:

Korollar III.8.9. *Jede halbeinfache Unteralgebra $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{g}$ ist in einem Levi-Komplement enthalten.*

Beweis. Sei $\mathfrak{r} := \operatorname{rad}(\mathfrak{g})$ das Radikal von $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{a} := \mathfrak{r} + \mathfrak{h}$. Dann ist $\mathfrak{a}$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}$. Die Unteralgebra $\mathfrak{r}$ ist ein auflösbares Ideal von $\mathfrak{a}$, und da $\mathfrak{a}/\mathfrak{r} \cong \mathfrak{h}/(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{r})$ als homomorphes Bild von $\mathfrak{h}$ halbeinfach ist, ist $\mathfrak{r} = \operatorname{rad}(\mathfrak{a})$. Das Ideal $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{r}$ von $\mathfrak{h}$ ist auflösbar und halbeinfach, also $\{0\}$. Damit ist $\mathfrak{h}$ ein Levi-Komplement in $\mathfrak{a}$.

Sei $\mathfrak{s}$ ein Levi-Komplement in $\mathfrak{g}$. Dann ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{r} + (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{s})$ eine semidirekte Summe und da $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{s} \cong \mathfrak{a}/\mathfrak{r} \cong \mathfrak{h}$ halbeinfach ist, ist $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{s}$ ein Levi-Komplement in $\mathfrak{a}$. Nach dem Satz von Malcev (Theorem III.8.8) existiert also ein $x \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{r}]$ mit $e^{\operatorname{ad} x}.(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{s}) = \mathfrak{h}$, d.h. $\mathfrak{h}$ ist in dem Levi-Komplement $e^{\operatorname{ad} x}.\mathfrak{s}$ von $\mathfrak{g}$ enthalten. ■

Korollar III.8.10. *Die Levi-Komplemente in $\mathfrak{g}$ sind genau die maximal halbeinfachen Unteralgebren von $\mathfrak{g}$.*

Beweis. Wegen Korollar III.8.9 ist jede maximal halbeinfache Unteralgebra ein Levi-Komplement. Andererseits gilt $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{s} \subseteq \operatorname{rad}(\mathfrak{s}) = \{0\}$ für jede halbeinfache Unteralgebra $\mathfrak{s}$ von $\mathfrak{g}$. Die Levi-Komplemente sind daher maximal halbeinfach. ■

Korollar III.8.11. *Ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g} = \mathfrak{r} \rtimes \mathfrak{s}$ eine Levi-Zerlegung, also $\mathfrak{s}$ ein Levi-Komplement, so ist $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{r}) \rtimes (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{s})$ eine Levi-Zerlegung von $\mathfrak{a}$.*

Beweis. Wir haben schon in Lemma III.7.12 gesehen, daß $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{r}$ das Radikal von $\mathfrak{a}$ ist. Ist nun $\mathfrak{s}_\mathfrak{a}$ ein Levi-Komplement von $\mathfrak{a}$, so ist $\mathfrak{s}_\mathfrak{a}$ nach Korollar III.8.9 in einem Levi-Komplement $\mathfrak{s}'$ von $\mathfrak{g}$ enthalten. Für $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$ mit $e^{\operatorname{ad} x}.\mathfrak{s}' = \mathfrak{s}$ folgt jetzt $e^{\operatorname{ad} x}.\mathfrak{s}_\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{s}$, da

$$e^{\operatorname{ad} x}.\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a} + [x, \mathfrak{a}] \subseteq \mathfrak{a}$$

gilt. Wegen der Halbeinfachheit des Ideals $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{s}$ von $\mathfrak{s}$ (Lemma VII.1.1) und der Maximalität von $\mathfrak{s}_\mathfrak{a}$ erhalten wir sogar die Gleichheit $e^{\operatorname{ad} x}.\mathfrak{s}_\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{s}$. Damit ist $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{s}$ ein Levi-Komplement in $\mathfrak{a}$. ■

IV. Wurzelzerlegungen

Die Technik der Wurzelzerlegung einer Lie-Algebra kann man sich vorstellen als eine Lie-Algebra-Version der Zerlegung eines Polynoms in seine Linearfaktoren (daher der Name). Sie ist einerseits der Schlüssel zur Klassifikation der endlichdimensionalen einfachen Lie-Algebren über algebraisch abgeschlossenen Körpern der Charakteristik 0, und andererseits erlaubt sie es, interessante Klassen von unendlichdimensionalen Lie-Algebren zu beschreiben, die in vielen Anwendungen eine zentrale Rolle spielen. Da eine allgemeine Strukturtheorie unendlichdimensionaler Lie-Algebren nicht existiert, ist es umso bemerkenswerter, daß Lie-Algebren mit Wurzelzerlegungen dennoch einer substantiellen strukturellen Untersuchung zugänglich sind.

Auch in diesem Abschnitt sei $\mathbb{K}$ wieder ein Körper der Charakteristik 0.

IV.1. Torale Unteralgebren

In diesem Abschnitt lernen wir den Begriff der toralen Cartan-Unteralgebra kennen, und wir werden sehen, wie man mit solchen Unteralgebren Lie-Algebren zerlegen kann.

Definition IV.1.1. (a) Sei $\mathfrak{h}$ eine Lie-Algebra und V ein komplexer $\mathfrak{h}$-Modul sowie $\alpha \in \mathfrak{h}^*$. Dann heißt

$$V^\alpha := V^\alpha(\mathfrak{h}) := \{v \in V : (\forall x \in \mathfrak{h}) x.v = \alpha(x).v\}$$

$\mathfrak{h}$-*Gewichtsraum* zum Gewicht α in V. Die Elemente der Menge

$$\mathcal{P}_V := \mathcal{P}_V(\mathfrak{h}) := \{\alpha \in \mathfrak{h}^* : V^\alpha \neq \{0\}\}$$

heißen *Gewichte von* $\mathfrak{h}$ *auf* V.
(b) Ein Modul V einer Lie-Algebra $\mathfrak{h}$ heißt *zerfallend*, wenn V die (direkte) Summe aller Gewichtsräume V^α, $\alpha \in \mathcal{P}_V$, ist. Ist $\rho : \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}(V)$ die zugehörige Darstellung, so bedeutet dies, daß die linearen Abbildungen $\rho(x)$, $x \in \mathfrak{h}$, simultan diagonalisierbar sind. Beachte, daß dies nur dann möglich ist, wenn $\rho(\mathfrak{h})$ eine abelsche Lie-Algebra ist (Nachweis!).

(c) Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra. Eine Unteralgebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ heißt *toral*, falls $\mathfrak{g}$ als $\mathfrak{h}$-Modul bzgl. der adjungierten Darstellung zerfallend ist, d.h. alle linearen Abbildungen $\operatorname{ad} x$, $x \in \mathfrak{h}$, sind simultan diagonalisierbar. Die Gewichtsräume

$$\mathfrak{g}^\alpha := \mathfrak{g}^\alpha(\mathfrak{h}) := \{y \in \mathfrak{g} \colon (\forall x \in \mathfrak{h})[x,y] = \alpha(x)y\}$$

von $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{g}$ heißen *Wurzelräume* und die Elemente von $\Delta := \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) := \mathcal{P}_{\mathfrak{g}} \setminus \{0\}$ *Wurzeln.* Wir haben also die *Wurzelzerlegung*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}^\alpha$$

von $\mathfrak{g}$ bzgl. $\mathfrak{h}$. ∎

Um die Herkunft des Begriffs „Wurzel“ besser zu verstehen, betrachten wir eine endlichdimensionale Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ mit einer toralen Unteralgebra $\mathfrak{h}$. Für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $X \in \mathfrak{h}$ haben wir dann die Zerlegung

$$\det(\lambda \mathbf{1} - \operatorname{ad} X) = \prod_{\alpha \in \Delta \cup \{0\}} (\lambda - \alpha(X))^{\dim \mathfrak{g}^\alpha}.$$

In diesem Sinn beschreibt die Wurzelzerlegung der Lie-Algebra die „Wurzeln“ des Polynoms $p(\lambda)(X) := \det(\lambda \mathbf{1} - \operatorname{ad} X)$. Hierbei kann man $p(\lambda)$ als eine Polynomfunktion auf $\mathfrak{h}$ auffassen und erhält in diesem Sinn

$$p(\lambda) = \prod_{\alpha \in \Delta \cup \{0\}} (\lambda - \alpha)^{\dim \mathfrak{g}^\alpha}.$$

Lemma IV.1.2. *Torale Unteralgebren sind abelsch.*

Beweis. Sei $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine torale Unteralgebra und $x, y \in \mathfrak{h}$. Da $\operatorname{ad} \mathfrak{h}$ abelsch ist, gilt $\operatorname{ad}[x,y] = [\operatorname{ad} x, \operatorname{ad} y] = 0$, also $[x,y] \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Folglich ist $(\operatorname{ad} x)^2(y) = 0$. Aus der Diagonalisierbarkeit von $\operatorname{ad} x$ erhalten wir nun $\operatorname{ad} x(y) = [x,y] = 0$. ∎

Im Lichte von Lemma IV.1.2 ist die folgenden Definition sinnvoll.

Definition IV.1.3. Eine torale Unteralgebra, die maximal abelsch ist, heißt *torale Cartan-Unteralgebra* von $\mathfrak{g}$ [1]. ∎

Lemma IV.1.4. *Für eine torale Unteralgebra $\mathfrak{h}$ der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ gilt $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{h}$ genau dann, wenn $\mathfrak{h}$ eine torale Cartan-Unteralgebra ist.*

Beweis. Da $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ der Zentralisator von $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{g}$ ist, ist $\mathfrak{h}$ genau dann maximal abelsch, wenn $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0$ ist. ∎

[1] Cartan-Unteralgebren von einfachen komplexen Lie-Algebren wurden zuerst von W. Killing in seinen Arbeiten zur Klassifikation verwendet, bevor sie ca. 10 Jahre später bei E. Cartan auftraten.

Bemerkung IV.1.5. (a) Torale Cartan-Unteralgebren existieren nicht immer (Nachweis als Übung). Hinweis: Betrachte die Lie-Algebra der strikt oberen Dreiecksmatrizen in $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{K})$).

Im allgemeinen ist jede torale Unteralgebra einer nilpotenten Lie-Algebra zentral (Nachweis!). Eine nilpotente Lie-Algebra enthält also genau dann eine torale Cartan-Unteralgebra, wenn sie abelsch ist.

(b) In der Theorie der endlichdimensionalen Lie-Algebren nennt man eine Unteralgebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine *Cartan-Unteralgebra*, wenn $\mathfrak{h}$ nilpotent und selbstnormalisierend ist, d.h. es gilt $\mathfrak{h} = \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. Ist $\mathfrak{h}$ eine torale Unteralgebra, so ist $\mathfrak{h}$ abelsch und somit auch nilpotent. Weiter ist $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}^0$ (Nachweis!). Eine torale Unteralgebra ist also genau dann eine Cartan-Unteralgebra, wenn sie selbstnormalisierend ist. ■

Im folgenden sei $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine torale Unteralgebra und $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}^\alpha$ die entsprechende Wurzelzerlegung.

Lemma IV.1.6. *Ist V ein $\mathfrak{g}$-Modul, $\alpha \in \Delta$ und $\beta \in \mathcal{P}_V(\mathfrak{h})$, so gilt*

$$\mathfrak{g}^\alpha.V^\beta \subseteq V^{\alpha+\beta}.$$

Beweis. Das rechnet man direkt nach. Für $v_\beta \in V_\beta$, $x \in \mathfrak{h}$ und $y \in \mathfrak{g}^\alpha$ ist

$$x.(y.v_\beta) = [x, y].v_\beta + y.(x.v_\beta) = \alpha(x)y.v_\beta + \beta(x)y.v_\beta = (\alpha + \beta)(x)y.v_\beta. \quad ■$$

Korollar IV.1.7. *Für $\alpha, \beta \in \Delta \cup \{0\}$ gilt $[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta] \subseteq \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$.*

Beweis. Man wende Lemma IV.1.6 auf die adjungierte Darstellung und $V = \mathfrak{g}$ an. ■

Die folgende Beobachtung wird später noch oft sehr nützlich sein. Der Satz ist ein Spezialfall der isotypischen Zerlegung eines Moduls (siehe Übung).

Satz IV.1.8. *Ist V ein zerfallender $\mathfrak{h}$-Modul und $W \subseteq V$ ein $\mathfrak{h}$-Untermodul, so paßt sich W der Gewichtszerlegung an, d.h.*

$$W = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{P}_V} (W \cap V^\alpha) = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{P}_W} W^\alpha.$$

Beweis. Es ist klar, daß $W_0 := \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{P}_V} (W \cap V^\alpha)$ ein $\mathfrak{h}$-Untermodul von W ist.

Es bleibt als noch zu zeigen, daß für jedes Element $w \in W$, das wir gemäß der Gewichtszerlegung als $w = \sum_\alpha w_\alpha$ mit $w_\alpha \in V^\alpha$ schreiben, alle Komponenten w_α in W liegen.

Wir zeigen die Behauptung durch vollständige Induktion nach der Anzahl der von Null verschiedenen Komponenten w_α. Ist diese Anzahl 1, so ist nichts zu zeigen. Sei $w_\alpha \neq 0$. Dann finden wir $\beta \in \mathcal{P}_V \setminus \{\alpha\}$ mit $w_\beta \neq 0$. Wir wählen ein $x \in \mathfrak{h}$ mit $\alpha(x) \neq \beta(x)$. Dann hat

$$x.w - \beta(x)w = \sum_{\gamma \neq \beta} (\gamma(x) - \beta(x))w_\gamma$$

eine Darstellung mit einer geringeren Anzahl von Null verschiedener Summanden. Da $\alpha(x) - \beta(x) \neq 0$ ist, erhalten wir $w_\alpha \in W$. ■

Korollar IV.1.9. *Ist* $\mathfrak{h}$ *eine torale Unteralgebra einer Lie-Algebra* $\mathfrak{g}$ *und* $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ *eine Unteralgebra mit* $[\mathfrak{h}, \mathfrak{a}] \subseteq \mathfrak{a}$*, so paßt sich* $\mathfrak{a}$ *der Wurzelzerlegung an:*

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{a}^\alpha.$$

Beweis. Man wende Satz IV.1.8 auf den zerfallenden $\mathfrak{h}$-Modul $\mathfrak{g}$ an. ■

Aus Korollar IV.1.9 folgt insbesondere, daß sich Ideale $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ der Wurzelzerlegung anpassen.

Bemerkung IV.1.10. (Wurzelzerlegungen und Graduierungen)
(a) Ist $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra und Γ eine abelsche Gruppe, so nennt man eine Zerlegung

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \mathfrak{g}_\gamma \tag{1.1}$$

eine *Graduierung von* $\mathfrak{g}$, wenn

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} \quad \text{für} \quad \alpha, \beta \in \Gamma \tag{1.2}$$

gilt.
(b) Ist $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}^\alpha$ eine Wurzelzerlegung, so ist dies eine Graduierung von $\mathfrak{g}$ bzgl. der Gruppe $\Gamma = \mathbb{Z}[\Delta] \subseteq \mathfrak{h}^*$.

Ist andererseits (1.1) eine Graduierung für die $\mathfrak{h} := \mathfrak{g}_0$ abelsch ist, $\Gamma \subseteq \mathfrak{h}^*$ gilt, und die adjungierte Darstellung von $\mathfrak{h}$ auf $\mathfrak{g}$ gegeben ist durch $[h, x_\gamma] = \gamma(h)x_\gamma$ für $x_\gamma \in \mathfrak{g}_\gamma$, so ist $\mathfrak{h}$ eine torale Cartan-Unteralgebra, und die zugehörige Graduierung stimmt mit der Wurzelzerlegung überein.
(c) Ist (1.1) eine Graduierung der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und $f\colon \Gamma \to (\mathbb{K}, +)$ ein Gruppenhomomorphismus, so erhalten wir eine Derivation $D_f \in \mathrm{der}(\mathfrak{g})$ durch

$$D_f(x_\gamma) := f(\gamma)x_\gamma \quad \text{für } x_\gamma \in \mathfrak{g}_\gamma.$$

Für jeden Untervektorraum $\mathfrak{d} \subseteq \mathrm{Hom}\big(\Gamma, (\mathbb{K}, +)\big)$ (den wir als abelsche Lie-Algebra auffassen) erhalten wir so einen Homomorphismus

$$\delta\colon \mathfrak{d} \to \mathrm{der}(\mathfrak{g}), \quad f \mapsto D_f$$

und entsprechend eine semidirekte Summe $\widetilde{\mathfrak{g}} := \mathfrak{g} \rtimes_\delta \mathfrak{d}$ in der $\mathfrak{d}$ eine torale Unteralgebra ist.
(d) Ist andererseits $D \in \mathrm{der}(\mathfrak{g})$ eine diagonalisierbare Derivation, so ist die Eigenraumzerlegung

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{K}} \mathfrak{g}^\lambda(D)$$

eine Graduierung von $\mathfrak{g}$ über der abelschen Gruppe $(\mathbb{K}, +)$. Entsprechend erhält man durch jede simultan diagonalisierbare Familie $(D_j)_{j \in J}$ von Derivationen von $\mathfrak{g}$ eine Graduierung von $\mathfrak{g}$ über $\mathbb{K}^J$, wobei

$$\mathfrak{g}_\gamma = \{x \in \mathfrak{g}\colon (\forall j \in J) D_j.x = \gamma_j x\} \quad \text{für} \quad \gamma = (\gamma_j)_{j \in J} \in \mathbb{K}^J$$

ist. ■

IV.2. Beispiele von Wurzelzerlegungen

Beispiel IV.2.1. (a) (Die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$) Wir erinnern uns an die Lie-Algebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$ aus Beispiel II.2.5. Sie hat eine Basis (x,h,y) mit den Relationen

$$[h,x] = 2x, \quad [h,y] = -2y \quad \text{und} \quad [x,y] = h.$$

Jedes Tripel (x,h,y) von Elementen einer Lie-Algebra, das diesen Relationen genügt, nennen wir ein $\mathfrak{sl}_2$-*Tripel.* Hieraus erkennt man sofort, daß $\mathfrak{h} = \mathbb{K}h$ eine torale Cartan-Unteralgebra ist. Mit $\alpha(h) = 2$ erhalten wir die Wurzelzerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{g}^\alpha + \mathfrak{g}^{-\alpha}$ mit $\mathfrak{g}^\alpha = \mathbb{K}x$ und $\mathfrak{g}^{-\alpha} = \mathbb{K}y$.
(b) Ist $\mathfrak{g}$ eine zweidimensionale nichtabelsche Lie-Algebra, so existiert eine Basis (x,y) mit $[x,y] = y$. Dann ist $\mathfrak{h} = \mathbb{K}x$ eine torale Cartan-Unteralgebra und wir erhalten mit $\alpha(x) = 1$ die Wurzelzerlegung

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{g}^\alpha, \quad \mathfrak{g}^\alpha = \mathbb{K}y.$$

In diesem Fall gibt es also nur eine Wurzel. ■

Wir kommen nun zu etwas höherdimensionalen Beispielen.

Beispiel IV.2.2. (Die Lie-Algebra $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$) Wir betrachten die Lie-Algebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ der $(n \times n)$-Matrizen. Wir schreiben E_{jk} für die Matrix mit $E_{jk}.e_m = \delta_{km}e_j$ (sie hat an der Stelle (i,j) den Eintrag 1 hat und sonst nur Nullen). In Beispiel I.1.5 haben wir gesehen, daß sich diese Basismatrizen wie folgt beklammern:

$$[E_{jk}, E_{lm}] = \delta_{kl}E_{jm} - \delta_{jm}E_{lk}. \tag{2.1}$$

Sei $\mathfrak{h} := \operatorname{span}\{E_{jj} : j = 1,\ldots,n\}$ die abelsche Unteralgebra der Diagonalmatrizen. Dann folgt aus (2.1) unmittelbar die Relation

$$[E_{mm}, E_{jk}] = \delta_{jm}E_{mk} - \delta_{km}E_{jm} = (\delta_{jm} - \delta_{km})E_{jk}. \tag{2.2}$$

Definiert man die linearen Funktionale $\varepsilon_j\colon \mathfrak{h} \to \mathbb{K}$ durch $\varepsilon_j(E_{kk}) = \delta_{jk}$ für alle k, so bedeutet (2.2), daß $E_{jk} \in \mathfrak{g}^{\varepsilon_j - \varepsilon_k}$ gilt. Hieraus folgt unmittelbar

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{j \neq k} \mathfrak{g}^{\varepsilon_j - \varepsilon_k}.$$

Die Unteralgebra $\mathfrak{h}$ ist also eine torale Cartan-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ und die Menge der Wurzeln ist gegeben durch

$$\Delta = \{\varepsilon_j - \varepsilon_k \colon i \neq j \in \{1,\ldots,n\}\}.$$

Betrachten wir den $\mathfrak{g}$-Modul $V = \mathbb{K}^n$, so ist jeder Basisvektor e_j, $j = 1,\ldots,n$, ein $\mathfrak{h}-$Gewichtsvektor vom Gewicht ε_j. Der $\mathfrak{h}$-Modul V ist also zerfallend mit $\mathcal{P}_V = \{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\}$. Man veranschauliche sich Lemma IV.1.6 in diesem Kontext. ■

Beispiel IV.2.3. (Die Lie-Algebra $\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{K})$) Wir betrachten die Lie-Algebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n,\mathbb{K})$. In Beispiel I.1.5(e) haben wir gesehen, daß die Elemente von $\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{K})$ genau die Blockmatrizen der Gestalt

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^\top \end{pmatrix}, \quad B = B^\top,\ C = C^\top,\ A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$$

sind.

Zuerst beobachten wir, daß

$$\mathfrak{h} := \operatorname{span}\{E_{jj} - E_{j+n,j+n} \colon j = 1,\ldots,n\} \subseteq \mathfrak{g}$$

eine torale Unteralgebra ist. Da die Unteralgebra

$$\mathfrak{g}_0 := \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^\top \end{pmatrix} \colon A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K}) \right\}$$

isomorph zu $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ ist, sieht man mit Beispiel IV.2.2, daß $\mathfrak{h}$ eine torale Cartan-Unteralgebra von $\mathfrak{g}_0$ ist, wobei die Wurzeln durch

$$\Delta_0 = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \colon i \neq j \in \{1,\ldots,n\}\}$$

gegeben sind und die Funktionale ε_j auf $\mathfrak{h}$ durch

$$\varepsilon_j(E_{kk} - E_{k+n,k+n}) = \delta_{jk}, \quad j,k = 1,\ldots,n$$

definiert sind. Zugehörige Wurzelvektoren sind gegeben durch

$$x_{\varepsilon_j - \varepsilon_k} = E_{jk} - E_{k+n,j+n} = \begin{pmatrix} E_{jk} & 0 \\ 0 & -E_{jk}^\top \end{pmatrix}.$$

Die Matrizen

$$E_{j,k+n} + E_{k,j+n} = \begin{pmatrix} 0 & E_{jk} + E_{jk}^\top \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad j,k = 1,\ldots,n$$

sind Wurzelvektoren zu den Wurzeln $\varepsilon_j + \varepsilon_k$ und die Matrizen

$$E_{j+n,k} + E_{k+n,j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{jk} + E_{jk}^\top & 0 \end{pmatrix}, \quad j,k = 1,\ldots,n$$

sind Wurzelvektoren zu den Wurzeln $-(\varepsilon_j + \varepsilon_k)$.

Wir erhalten daher das Wurzelsystem

$$\Delta = \{\pm 2\varepsilon_j, \pm(\varepsilon_j \pm \varepsilon_k) \colon j \neq k, j,k = 1,\ldots,n\}. \qquad \blacksquare$$

Beispiel IV.2.4. (Die Lie-Algebra $\mathfrak{so}(n+1,n,\mathbb{K})$) Wir betrachten die Lie-Algebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n+1,n,\mathbb{K}) \subseteq \mathfrak{gl}(2n+1,\mathbb{K})$, die wir wie folgt definieren. Die

Basis von $V = \mathbb{K}^{2n+1}$ nummerieren wir als $e_{-n}, \ldots, e_0, \ldots, e_n$ und betrachten nicht die symmetrische Bilinearform $x, y \mapsto \sum_j x_j y_j$ aus Beispiel I.5(d), da die zugehörige Lie-Algebra $\mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{K})$ i.a. keine Wurzelzerlegung besitzt. Stattdessen betrachten wir die Form

$$\beta(x, y) = x_0 y_0 + \sum_{j=-n, j \neq 0}^{n} x_j y_{-j}$$

und definiren

$$\mathfrak{g} := \mathfrak{so}(n+1, n, \mathbb{K}) := \mathfrak{o}(\mathbb{K}^{2n+1}, \beta).$$

Man erinnere sich daran, daß alle nicht entarteten quadratischen Formen auf $\mathbb{K}^d$ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $\mathbb{K}$ (es reicht, daß Quadratwurzeln existieren), äquivalent sind, d.h. bzgl. geeigneter Basen die gleiche Matrix besitzen (siehe die entsprechende Diskussion in den Übungen).

Die Matrix der symmetrischen Bilinearform β ist gegeben durch

$$E = \begin{pmatrix} 0 & & & \cdots & & 1 \\ & & & & \iddots & 0 \\ \vdots & & & 1 & & \\ & & 1 & & & \\ & 1 & & & & \vdots \\ 0 & \iddots & & & & \\ 1 & & & \cdots & & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Bedingung, daß eine Matrix $X \in \mathfrak{gl}(2n+1, \mathbb{K})$ zu $\mathfrak{g}$ gehört, ergibt sich zu

$$EX + X^\top E = 0,$$

d.h. EX ist schiefsymmetrisch.

Mit dieser Vorüberlegungen sieht man ein, daß

$$\mathfrak{h} := \operatorname{span}\{E_{jj} - E_{-j,-j} \colon j = 1, \ldots, n\}$$

eine torale Unteralgebra ist, wobei das System der Wurzeln gegeben ist durch

$$\Delta = \{\pm\varepsilon_j, \pm(\varepsilon_j \pm \varepsilon_k) \colon j \neq k \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Die detaillierte Berechnung der Wurzelvektoren sei dem Leser als (leichte, aber etwas rechenaufwendige) Übung überlassen. Hierbei ist es instruktiv, zunächst einmal die Fälle $n = 1$ und $n = 2$ zu betrachten. ∎

Beispiel IV.2.5. (Die Lie-Algebra $\mathfrak{so}(n, n, \mathbb{K})$) Wir betrachten die Lie-Algebra $\mathfrak{so}(n, n, \mathbb{K})$ als Unteralgebra der Lie-Algebra $\mathfrak{so}(n+1, n, \mathbb{K})$. Wir behalten die Bezeichnungen aus Beispiel IV.2.4 bei und betrachten $\mathbb{K}^{2n}$ als den Unterraum

$$W := \operatorname{span}\{e_j, e_{-j} \colon j \neq 0\} \subseteq V = \mathbb{K}^{2n+1}.$$

Die Einschränkung der Form β auf W ist nicht entartet und daher

$$\mathfrak{g}_0 := \mathfrak{so}(n,n,\mathbb{K}) := \mathfrak{o}(W,\beta|_W).$$

Betrachten wir die Elemente von $\mathfrak{g}$ als Blockmatrizen

$$X = \begin{pmatrix} A & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 \\ C & 0 & D \end{pmatrix}, \quad A,B,C,D \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K}),$$

so erhalten wir eine Realisierung von $\mathfrak{g}_0$ als Unteralgebra von $\mathfrak{o}(V,\beta)$.

Da die Cartan-Unteralgebra $\mathfrak{h}$ aus Beispiel IV.2.4 in $\mathfrak{g}_0$ enthalten ist, ist sie auch in $\mathfrak{g}_0$ eine maximal abelsche torale Unteralgebra, also eine torale Cartan-Unteralgebra. Die zugehörige Wurzelzerlegung erhält man nun direkt durch Einschränkung:

$$\Delta = \{\pm(\varepsilon_j \pm \varepsilon_k) \colon j \neq k \in \{1,\ldots,n\}\}. \qquad \blacksquare$$

Aufgabe IV.2.1. (a) Sei $\mathfrak{h}$ eine abelsche Lie-Algebra und V ein zerfallender $\mathfrak{h}$-Modul. Dann ist $\mathfrak{h}$ eine torale Unteralgebra der Lie-Algebra $\mathfrak{g} := V \rtimes \mathfrak{h}$ (vgl. Beispiel I.2.11(1)). Die Wurzelzerlegung von $\mathfrak{g}$ ist gegeben durch

$$\mathfrak{g} = (\mathfrak{h} + V^0) + \sum_{\alpha \in \mathcal{P}_V \setminus \{0\}} V^\alpha.$$

Die Unteralgebra $\mathfrak{h}$ ist genau dann eine Cartan-Unteralgebra, wenn $V^0 = \{0\}$ ist.
(b) Sei $\mathfrak{h}$ eine abelsche Lie-Algebra und $\Delta \subseteq \mathfrak{h}^* \setminus \{0\}$ eine Teilmenge. Konstruiere eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, die $\mathfrak{h}$ als Cartan-Unteralgebra enthält, so daß Δ genau das System der Wurzeln von $\mathfrak{g}$ bzgl. $\mathfrak{h}$ ist. $\blacksquare$

Beispiel IV.2.6. (Die Lie-Algebra $\mathfrak{gl}(J,\mathbb{K})$) Die Situation aus Beispiel IV.2.2 läßt sich leicht auf das Unendlichdimensionale verallgemeinern. Hierzu betrachten wir eine Menge J. Unter einer komplexen $J \times J$-Matrix stellen wir uns eine Funktion $J \times J \to \mathbb{K}$ vor. An dieser Stelle ist eine kleine Subtilität verborgen, die man erkennen sollte. Wenn man eine $(n \times n)$-Matrix hinschreibt, so geht dabei wesentlich die Anordnung der Indexmenge ein. In diesem Sinne ist eine $(n \times n)$-Matrix eigentlich eine Funktion auf der geordneten Menge

$$(\{1,\ldots,n\},\leq) \times (\{1,\ldots,n\},\leq).$$

Zunächst wollen wir Anordnungen der Indexmenge J jedoch außer Acht lassen. Wir kommen später auf diesen Punkt zurück, wenn wir Darstellungen mit höchstem Gewicht diskutieren.

Wir betrachten die Lie-Algebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(J,\mathbb{K})$ der komplexen $(J \times J)$-Matrizen mit nur endlich vielen von Null verschiedenen Einträgen. Wir sprechen auch einfach von endlichen $J \times J$-Matrizen. Die Matrizen

$$E_{jk} \colon (m,n) \mapsto \delta_{mj}\delta_{kn},$$

die nur einen Eintrag 1 an der Stelle (j,k) und sonst Nullen enthalten, bilden eine Vektorraumbasis von $\mathfrak{g}$. Da die Matrizen in $\mathfrak{g}$ nur endlich viele Einträge haben, kann man das Produkt zweier Matrizen wie üblich definieren und erhält so eine assoziative Algebra. Die zugehörige Kommutatorklammer macht $\mathfrak{gl}(J,\mathbb{K})$ zu einer Lie-Algebra, wobei die Klammern der Basiselemente wie im endlichdimensionalen Fall gegeben sind durch

$$[E_{jk}, E_{lm}] = \delta_{kl}E_{jm} - \delta_{jm}E_{lk}.$$

Wie in Beispiel IV.2.2 verifiziert man, daß $\mathfrak{h} := \mathrm{span}\{E_{jj} : j \in J\}$ eine torale Cartan-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ ist. Das System der Wurzeln ist

$$\Delta = \{\varepsilon_j - \varepsilon_k : i \neq j \in J\}$$

und die Wurzelräume $\mathfrak{g}^{\varepsilon_j - \varepsilon_k} = \mathbb{K}E_{jk}$ sind alle eindimensional.

Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{K}^J$ aller J-Tupel $(v_j)_{j\in J}$ komplexer Zahlen und darin den Unterraum $V := \mathbb{K}^{(J)}$ derjenigen Tupel mit nur endlich vielen von Null verschiedenen Einträgen. Wir schreiben $e_j = (\delta_{jk})_{k\in J}$ für die Elemente der kanonischen Basis von V. Nun ist V ein Modul der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, wobei die Wirkung von $\mathfrak{g}$ durch die Multiplikation von Matrizen mit Vektoren definiert wird. Für $x = (x_{ij})_{i,j\in J}$ und $v = (v_j)_{j\in J}$ ist

$$x.v = \Big(\sum_{j\in J} x_{ij}v_j\Big)_{i\in J}.$$

Man beachte, daß alle Summen definiert sind, da jeweils nur endlich viele Zahlen summiert werden. Jeder Basisvektor e_j, $j \in J$, ist ein Gewichtsvektor vom Gewicht ε_j, so daß der $\mathfrak{h}$-Modul V zerfällt mit $\mathcal{P}_V = \{\varepsilon_j : j \in J\}$. ■

Beispiel IV.2.7. (Die Witt-Algebra)[1] Wir betrachten die Algebra

$$V := \mathbb{K}[Z, Z^{-1}]$$

der Laurent-Polynome in einer Unbestimmten Z. Natürlich darf man sich den Raum V auch als einen Raum von Funktionen $\mathbb{K}^\times \to \mathbb{K}$ vorstellen.

Ist $f \in V$ so ist $D := f\frac{d}{dZ}$ eine Derivation von V (Produktregel) und jede Derivation von V hat diese Gestalt (Nachweis als Übung!). Die Lie-Klammer auf $\mathrm{der}(V)$ ist gegeben durch

$$\Big[f\frac{d}{dZ}, g\frac{d}{dZ}\Big] = (fg' - f'g)\frac{d}{dZ} \tag{2.3}$$

[1] Ernst Witt (1911–1991), deutscher Mathematiker in Hamburg; Schüler von Emmy Noether. Die Witt-Algebra trat zuerst im Kontext positiver Charakteristik $p>0$ auf, so sie zu einer p-dimensionalen einfachen Lie-Algebra führt. Witt hat nie etwas zu diesen Algebren publiziert und ist in der 1930er Jahren auf der Suche nach neuen einfachen Gruppen auf sie gestoßen.

(vgl. Bemerkung I.1.17). Die Lie-Algebra $\mathfrak{d} := \mathrm{der}(V)$ heißt *Witt-Algebra.*

Die Derivationen $d_n := -Z^{n+1}\frac{d}{dZ}$ bilden eine Basis der Witt-Algebra. Für ihre Klammer erhalten wir

$$(2.4) \quad [d_n, d_m] = Z^{n+1}(m+1)Z^m \frac{d}{dZ} - Z^{m+1}(n+1)Z^n \frac{d}{dZ} = (n-m)d_{m+n}.$$

Hieraus ersieht man leicht, daß $\mathfrak{h} := \mathbb{K}d_0$ eine torale Cartan-Unteralgebra von $\mathfrak{d}$ ist. Ist $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ definiert durch $\alpha(d_0) = -1$, so ist $\Delta = \{n\alpha : 0 \neq n \in \mathbb{Z}\}$ das zugehörige Wurzelsystem, und die Wurzelräume sind durch $\mathfrak{d}^{n\alpha} = \mathbb{K}d_n$ gegeben. ∎

Beispiel IV.2.8. (Die Oszillator-Algebra) Wir betrachten die Algebra $V := \mathbb{K}[Z]$ der Polynome in einer Unbestimmten Z. Ist $f \in V$, so schreiben wir $m_f : V \to V$ für die Abbildung $g \mapsto fg$ der Multiplikation mit dem Polynom f. Man rechnet nun leicht mit der Produktregel nach, daß

$$(2.5) \qquad \left[g\frac{d}{dZ}, m_f\right] = m_{gf'}$$

gilt, wobei f' für die Ableitung von f steht. Insbesondere ist

$$(2.6) \qquad \left[\frac{d}{dZ}, m_Z\right] = \mathbf{1}.$$

In der Lie-Algebra

$$\mathfrak{g} := \mathrm{span}\left\{\mathbf{1}, m_Z, \frac{d}{dZ}, Z\frac{d}{dZ}\right\} \subseteq \mathrm{End}(V)$$

ist

$$\mathfrak{h} := \mathrm{span}\left\{\mathbf{1}, Z\frac{d}{dZ}\right\}$$

eine abelsche Unteralgebra. Der Operator $E := Z\frac{d}{dZ}$ heißt *Euleroperator.* Definieren wir das lineare Funktional α auf $\mathfrak{h}$ durch $\alpha(\mathbf{1}) = 0$ und $\alpha(E) = 1$, so rechnet man leicht nach, daß $\mathfrak{h}$ eine torale Cartan-Unteralgebra ist, $\Delta = \{\pm\alpha\}$ gilt sowie

$$\mathfrak{g}^{\alpha} = \mathbb{K}m_Z \quad \text{und} \quad \mathfrak{g}^{-\alpha} = \mathbb{K}\frac{d}{dZ}.$$

Das Zentrum $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ stimmt mit $\mathbb{K}\mathbf{1}$ überein. Die Kommutatoralgebra ist gegeben durch

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) + \mathfrak{g}^{\alpha} + \mathfrak{g}^{-\alpha} = \mathrm{span}\left\{\mathbf{1}, m_Z, \frac{d}{dZ}\right\}$$

und heißt *dreidimensionale Heisenberg-Algebra.* Für ihre Basiselemente $p = \frac{d}{dZ}$ und $q = m_Z$ gilt nach (2.6) die sogenannte *kanonische Kommutatorrelation*

$$[p, q] = \mathbf{1}.$$

Bei Rechnungen dieser Art ist es sehr hilfreich, die Formel

$$[a, bc] = [a, b]c + b[a, c]$$

zu verwenden, die in jeder assoziativen Algebra gilt (vgl. Bemerkung I.1.10).

Die Algebra $\mathfrak{g}$ heißt *Oszillator-Algebra*, da sie bei der Beschreibung des quantenmechanischen Oszillators auftritt. Die Monome in V bilden eine Basis von Eigenvektoren des Euleroperators E. Definieren wir $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ durch $\lambda(E) = 0$ und $\lambda(\mathbf{1}) = 1$, so sind die $\mathfrak{h}$-Gewichte auf V gegeben durch

$$\mathcal{P}_V = \lambda + \mathbb{N}_0\alpha.$$

Die Darstellung von $\mathfrak{g}$ auf $\mathbb{K}[Z]$ nennt man die *Oszillatordarstellung* (*im Fockraumbild*). Der Operator

$$H := \frac{1}{4}\Big[m_Z^2, \Big(\frac{d}{dZ}\Big)^2\Big] = \frac{1}{2}\Big(m_Z\frac{d}{dZ} + \frac{d}{dZ}m_Z\Big) = \frac{1}{2}\mathbf{1} + m_Z\frac{d}{dZ}$$

heißt *Hamilton-Operator* [1] (das bezieht sich auf den quantenmechanischen Oszillator). Natürlich sind die Monome Z^n auch Eigenvektoren von H zum Eigenwert $n + \frac{1}{2}$. Interpretiert man diese Eigenwerte als die Energien der Zustände eines quantenmechanischen Oszillators, so nennt man den Operator m_Z einen *Erzeugungsoperator*, da er die Energie jeweils um 1 erhöht und entsprechend $\frac{d}{dZ}$ einen *Vernichtungsoperator*. ■

Beispiel IV.2.9. (Die unendliche Oszillator-Algebra) (a) Auch das Beispiel IV.2.8 läßt sich leicht auf das Unendlichdimensionale übertragen. Sei dazu J eine Menge. Wir betrachten die Algebra $V := \mathbb{K}[Z_j, j \in J]$ der Polynome in den Unbestimmten Z_j, $j \in J$. Die Lie-Algebra

$$\mathfrak{g} := \operatorname{span}\Big\{\mathbf{1}, m_{Z_j}, \frac{\partial}{\partial Z_j}, E : j \in J\Big\} \subseteq \operatorname{End}(V)$$

mit dem Euleroperator

$$E = \sum_{j \in J} Z_j \frac{\partial}{\partial Z_j}$$

heißt *J-Oszillator-Algebra*. (In den physikalischen Modellen beschreibt die Indexmenge J die Anzahl der modellierten Oszillatoren). Man beachte, daß E als Operator auf V definiert ist, da in jedem Element f von V nur endlich viele Z_j vorkommen, so daß f nur von endlich vielen der Operatoren $\frac{\partial}{\partial Z_j}$ nicht annulliert wird.

[1] Sir William Rowan Hamilton (1805–1865), Math. und Physiker in Dublin. Begründer der Hamiltonschen Mechanik und (Er-)Finder der Hamiltonschen Quaternionen, die den einzigen nichtkommutativen endlichdimensionalen reellen Schiefkörper $\mathbb{H}$ bilden.

Wieder ist

$$\mathfrak{h} := \operatorname{span}\{\mathbf{1}, E\}$$

eine torale Cartan-Unteralgebra. Für $\alpha(\mathbf{1}) = 0$ und $\alpha(E) = 1$ ist $\Delta = \{\pm\alpha\}$ mit

$$\mathfrak{g}^{\alpha} = \operatorname{span}\{m_{Z_j} : j \in J\} \quad \text{und} \quad \mathfrak{g}^{-\alpha} = \operatorname{span}\Big\{\frac{\partial}{\partial Z_j} : j \in J\Big\}.$$

Alles andere ist vollkommen analog zum eindimensionalen Fall.
(b) Für $J = \mathbb{N}$ betrachtet man auch die folgende Variante. Wir setzen

$$\widetilde{E} = \sum_{j=1}^{\infty} jZ_j \frac{\partial}{\partial Z_j}$$

und $\mathfrak{h} := \operatorname{span}\{\mathbf{1}, \widetilde{E}\}$. Definieren wir $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ durch $\alpha(\mathbf{1}) = 0$ und $\alpha(\widetilde{E}) = 1$, so ist $\Delta = \{\pm j\alpha : j \in \mathbb{N}\}$ mit

$$\mathfrak{g}^{j\alpha} = \mathbb{K}m_{Z_j} \quad \text{und} \quad \mathfrak{g}^{-j\alpha} = \mathbb{K}\frac{\partial}{\partial Z_j}.$$

Durch die Faktoren in dem modifizierten Euleroperator erreicht man eine Aufspaltung der Wurzelräume aus (a) in eindimensionale Wurzelräume. ■

IV.3. Darstellungen von $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$

Wie wir bald sehen werden, ist die Lie-Algebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$ dadurch sehr wichtig, daß man in einer Lie-Algebra mit Wurzelzerlegung in der Regel viele Unteralgebren findet, die zu $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$ isomorph sind. Daher spielt die Darstellungstheorie dieser Lie-Algebra eine fundamentale Rolle in der Analyse von Wurzelzerlegungen.

Die Klassifikation der einfachen $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-Moduln

Wir betrachten zuerst eine Familie von Darstellungen von $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$, die wir ausführlich diskutieren. Später wird sich zeigen, daß wir hiermit schon alle einfachen endlichdimensionalen $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-Moduln kennen.

Beispiel IV.3.1. Sei $V := \mathbb{K}[Z, Z^{-1}]$ die Algebra der Laurent-Polynome in Z und $\lambda \in \mathbb{K}$. Wir betrachten die Operatoren

$$X := \frac{d}{dZ}, \quad Y := -Z^2\frac{d}{dZ} + \lambda Z\mathbf{1}, \quad H := -2Z\frac{d}{dZ} + \lambda\mathbf{1}.$$

Mit der Formel (2.3) aus Beispiel IV.2.7 erhalten wir zunächst

$$\Big[Z^n\frac{d}{dZ}, Z^m\frac{d}{dZ}\Big] = (m-n)Z^{n+m-1}\frac{d}{dZ}$$

und damit die Kommutatorrelationen:

$$\begin{aligned}
[H,X] &= -2\Big[Z\frac{d}{dZ}, \frac{d}{dZ}\Big] = 2\frac{d}{dZ} = 2X,\\
[H,Y] &= -2\Big[Z\frac{d}{dZ}, -Z^2\frac{d}{dZ} + \lambda Z\mathbf{1}\Big] = 2Z^2\frac{d}{dZ} - 2\lambda Z\mathbf{1} = -2Y,\\
[X,Y] &= \Big[\frac{d}{dZ}, -Z^2\frac{d}{dZ} + \lambda Z\mathbf{1}\Big] = -2Z\frac{d}{dZ} + \lambda\mathbf{1} = H.
\end{aligned}$$

Da dies genau die Kommutatorrelationen der Lie-Algebra $\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$ sind, wird durch

$$x \mapsto X, \quad y \mapsto Y, \quad h \mapsto H$$

eine Darstellung $\rho_\lambda\colon \mathfrak{sl}(2,\mathbb{K}) \to \mathrm{End}(V)$ definiert.

Um die Struktur des Moduls V besser zu verstehen, betrachten wir die Wirkung der Operatoren H, X und Y auf dessen kanonischer Basis:

$$\begin{aligned}
H.Z^n &= (\lambda - 2n)Z^n\\
X.Z^n &= nZ^{n-1}\\
Y.Z^n &= (\lambda - n)Z^{n+1}.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Wir sehen insbesondere, daß H diagonalisierbar ist mit eindimensionalen Eigenräumen.

Mit diesen Informationen können wir leicht sämtliche Untermoduln von V bestimmen. Hierzu beachten wir, daß sich jeder Untermodul W nach Satz IV.1.8 der Eigenraumzerlegung von H anpaßt. Daher ist $W = \mathrm{span}\{Z^n\colon Z^n \in W\}$. Wir müssen uns also nur überlegen, für welche Teilmenge $J \subseteq \mathbb{Z}$ der Raum $V_J := \mathrm{span}\{Z^n\colon n \in J\}$ ein Untermodul ist. Da V_J invariant unter H ist, müssen wir nur nach der Invarianz unter X und Y fragen. Aus obigen Formeln erhalten wir als notwendige und hinreichende Bedingungen:

(1) Ist $n \in J$ und $n \neq 0$, so ist $n-1 \in J$.

(2) Ist $n \in J$ und $\lambda \neq n$, so ist $n+1 \in J$.

Ist $\lambda \notin \mathbb{Z}$, so ist $\mathbb{K}[Z] = V_{\mathbb{N}_0}$ ist der einzige nichttriviale Untermodul.

Ist $\lambda \in \mathbb{Z}$, so gibt es zwei Möglichkeiten. Ist $\lambda < 0$, so sind die einzigen echten Teilmengen, die (1) und (2) erfüllen, die folgenden:

$$\{\ldots, \lambda-1, \lambda\}, \quad \mathbb{N}_0, \quad \{\ldots, \lambda-1, \lambda\} \cup \mathbb{N}_0.$$

$$\circ \quad \circ \quad \circ \quad] \quad \circ \quad \circ \quad \cdots \quad \circ \quad [\quad \circ \quad \circ \quad \cdots.$$

Ist $\lambda \geq 0$, so erhalten wir die Mengen

$$\mathbb{N}_0, \quad \{\ldots, \lambda-1, \lambda\}, \quad \{0, 1, \ldots, \lambda-1, \lambda\}.$$

$$\circ \quad \circ \quad \circ \quad [\quad \circ \quad \circ \quad \cdots \quad \circ \quad] \quad \circ \quad \circ \quad \cdots.$$

In diesem Fall gibt es also einen endlichdimensionalen Untermodul

$$L(\lambda) := \mathrm{span}\{1, Z, \ldots, Z^\lambda\}.$$

Da $L(\lambda)$ keinen kleineren Untermodul enthält, ist dieser Modul einfach. ∎

Wir haben in obigem Beispiel gesehen, daß für jede Zahl $\lambda \in \mathbb{N}_0$ ein einfacher $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-Modul der Dimension $\lambda+1$ existiert. Wir werden nun zeigen, daß dies schon alle einfachen unter den endlichdimensionalen Moduln sind.

Das folgende Lemma spezialisiert sich für $\mu = 1$ zu einer Aussage über die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$:

Lemma IV.3.2. *Ist (x,h,y) ein Tripel von Elementen einer assoziativen Algebra A, mit den Kommutatorrelationen*

$$[h,x] = \mu 2x, \quad [h,y] = -\mu 2y \quad \text{und} \quad [x,y] = h,$$

so haben wir folgende Rechenregeln:

(i) $[h,x^n] = \mu 2nx^n$ *und* $[h,y^n] = -\mu 2ny^n$.

(ii) *Für $n > 0$ ist*

$$[y,x^n] = -nx^{n-1}\big(h+\mu(n-1)\big) = -n\big(h-\mu(n-1)\big)x^{n-1}$$

und

$$[x,y^n] = ny^{n-1}\big(h-\mu(n-1)\big) = n\big(h+\mu(n-1)\big)y^{n-1}.$$

Beweis. (i) Da $\operatorname{ad} h$ eine Derivation der Algebra A ist und $[h,x] = \mu 2x$ mit x kommutiert, erhalten wir induktiv

$$[h,x^n] = n[h,x]x^{n-1} = \mu 2nx^n.$$

Der zweite Teil von (i) folgt analog.

(ii) Wir rechnen

$$\begin{aligned}
[y,x^n] &= \sum_{j=0}^{n-1} x^j[y,x]x^{n-j-1} = \sum_{j=0}^{n-1} x^j(-h)x^{n-j-1} \\
&= -\sum_{j=0}^{n-1} x^j[h,x^{n-j-1}] - \sum_{j=0}^{n-1} x^{n-1}h \\
&= -\mu\sum_{j=0}^{n-1} 2(n-j-1)x^{n-1} - nx^{n-1}h = -\mu\sum_{j=0}^{n-1} 2jx^{n-1} - nx^{n-1}h \\
&= -\mu n(n-1)x^{n-1} - nx^{n-1}h.
\end{aligned}$$

Wegen (i) ist dieser Ausdruck gleich

$$-\mu n(n-1)x^{n-1} - nhx^{n-1} + n[h,x^{n-1}] = \mu n(n-1)x^{n-1} - nhx^{n-1}.$$

Das ist der erste Teil von (ii). Den zweiten Teil führen wir auf den ersten zurück, indem wir beachten, daß $(y,-h,x)$ den gleichen Kommutatorrelationen genügt wie (x,h,y). ∎

Satz IV.3.3. *Sei V ein endlichdimensionaler $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-Modul und $v_0 \in V$ ein Element mit $x.v_0 = 0$ und $h.v_0 = \lambda v_0$. Dann gilt:*

(i) $\lambda \in \mathbb{N}_0$.

(ii) *Das Element v_0 erzeugt einen Untermodul isomorph zu $L(\lambda)$.*

Beweis. (i) Wir schreiben V^α für den Eigenraum von h zum Eigenwert α und beachten, daß wir uns diesen Raum auch als einen Gewichtsraum für die Unteralgebra $\mathfrak{h} = \mathbb{K}h$ vorstellen dürfen. Aus $v_0 \in V^\lambda$ und $y \in \mathfrak{g}^{-2}$ folgt dann mit Lemma IV.1.6

$$y^n.v_0 \in V^{\lambda-2n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. $h.(y^n.v_0) = (\lambda - 2n).(y^n.v_0)$.

Weiter erhalten wir mit Lemma IV.3.2:

$$x.(y^n.v_0) = [x, y^n].v_0 + \underbrace{y^n.(x.v_0)}_{=0} = ny^{n-1}(h - n + 1).v_0 = n(\lambda - n + 1)y^{n-1}.v_0.$$

Damit ist klar, daß der von v_0 erzeugte Untermodul W gegeben ist durch

$$W = \operatorname{span}\{y^n.v_0 \colon n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Da V endlichdimensional ist, hat h nur endlich viele Eigenwerte. Es existiert also ein minimales $N \in \mathbb{N}_0$ mit $y^{N+1}.v_0 = 0$. Aus $x.(y^{N+1}.v_0) = 0$ erhalten wir nun $\lambda = N \in \mathbb{N}_0$.

(ii) Um einzusehen, daß $W \cong L(\lambda)$ ist, betrachten wir folgende Basis

$$v_k := \frac{y^k.v_0}{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-k+1)}, \quad k = 0, \ldots, \lambda,$$

von W (Beachte, daß der Nenner nie Null wird).

Für diese Basiselemente haben wir

$$h.v_k = (\lambda - 2k)v_k, \quad y.v_k = (\lambda - k)v_{k+1},$$

$x.v_0 = 0$ und für $k > 0$:

$$\begin{aligned} x.v_k &= \frac{k(\lambda-k+1)}{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-k+1)} y^{k-1}.v_0 \\ &= \frac{k}{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-k+2)} y^{k-1}.v_0 = kv_{k-1}. \end{aligned}$$

Bzgl. dieser Basis werden die Elemente x, y, h also durch die gleichen Matrizen dargestellt, wie auf $L(\lambda)$ (vgl. (3.1)). Also ist $W \cong L(\lambda)$. ■

Ist $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen, so erhalten wir das folgende Lemma auch direkt mit Satz III.4.7, den wir auf die auflösbaren Unteralgebra $\operatorname{span}\{a, b\} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ anwenden können.

Lemma IV.3.4. *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $a, b \in \mathfrak{gl}(V)$ mit $[a, b] = b$. Dann ist b nilpotent.*

Beweis. Wir zeigen die Behauptung durch Induktion nach der Dimension d von V. Ist $d \leq 1$, so ist $b = 0$.

Für den Induktionsschritt nehmen wir $d > 1$ an. Ist $\ker b = \{0\}$, so ist b invertierbar und aus $[a, b] = b$ erhalten wir $b^{-1}ab - a = \mathbf{1}$, also den Widerspruch

$$d = \mathrm{tr}(\mathbf{1}) = \mathrm{tr}(b^{-1}ab) - \mathrm{tr}(a) = 0.$$

Folglich ist $W := \ker b \neq \{0\}$. Für $w \in W$ ist $b(a.w) = a.(b.w) + b.w = 0$, also $a.W \subseteq W$. Damit erhalten wir durch Einschränkung auf W ein Paar $a_W := a|_W$ und $b_W := b|_W$ mit $[a_W, b_W] = b_W$. Nach Induktionsvoraussetzung ist b_W nilpotent. Analog erhalten wir auf dem Quotienten $U := V/W$ lineare Abbildungen $a_U(v{+}W) := a.v{+}W$ und $b_U.(v{+}W) := b.v{+}W$ mit $[a_U, b_U] = b_U$. Daher ist auch b_U nilpotent. Gilt $b_U^k = 0$ und $b_W^m = 0$, so erhalten wir $b^k.V \subseteq W$ und daher weiter $b^{m+k} = 0$. ■

Klassifikation der einfachen $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-Moduln

Theorem IV.3.5. *Jeder endlichdimensionale einfache $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-Modul ist isomorph zu einem Modul $L(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{N}_0$. Zu jeder natürlichen Zahl n existiert genau ein einfacher $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-Modul $L(n-1)$ der Dimension n.*

Beweis. Sei (ρ, V) ein einfacher $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-Modul. Wir betrachten die auflösbare Unteralgebra $\mathfrak{b} := \mathrm{span}\{x, h\}$. Ist $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen, so erhalten wir mit dem Satz von Lie einen Eigenvektor $v_0 \in V$ für $\mathfrak{b}$. Dann ist $x.v_0 = 0$, da x in $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$ liegt (Korollar III.4.4), und es gilt $h.v_0 = \lambda v_0$ für ein $\lambda \in \mathbb{K}$.

Im allgemeinen Fall wenden wir Lemma IV.3.4 auf das Paar $a := \frac{1}{2}\rho(h)$ und $b := \rho(x)$ an, um zu sehen, daß $\rho(x)$ nilpotent ist. Sei d minimal mit $\rho(x)^d \neq 0$. Aus Lemma IV.3.2 erhalten wir dann

$$0 = [\rho(y), \rho(x)^d] = -d(\rho(h) - (d-1)\mathbf{1})\rho(x)^d,$$

so daß jedes Element $0 \neq v_0 \in \rho(x)^d.V$ ein h-Gewichtsvektor ist.

Wegen der Einfachheit von V wird V von v_0 erzeugt, so daß Satz IV.3.3 zeigt, daß $V \cong L(\lambda)$ ist. Der Rest folgt aus der Konstruktuion. ■

Bemerkung IV.3.6. Eine andere interessante Darstellung von $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$ ist die sogenannte *Oszillatordarstellung.* Wir betrachten den Raum

$$\mathcal{P} = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$$

der komplexwertigen Polynomfunktionen auf $\mathbb{R}^n$. Sei $\Delta = \sum_j \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ der Laplace-Operator. Wir setzen $x := \frac{1}{2}\Delta$, $y = \frac{1}{2}m_{r^2}$ (Multiplikationsoperator mit $r^2 := \sum_j x_j^2$), und $h := E + \frac{n}{2}\mathbf{1}$, wobei $E = \sum_j x_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ der Euler-Operator ist (er liefert auf einem homogenen Polynom den Grad als Eigenwert).

Man überzeugt sich nun davon, daß $(x, h, y) \in \mathrm{End}(\mathcal{P})$ ein $\mathfrak{sl}_2$-Tripel ist, so daß $\mathcal{P}$ zu einem $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-Modul wird. In der Quantenmechanik spielt diese Darstellung eine Rolle beim Studium von Systemen mit voller Rotationssymmetrie, z.B. beim sphärischen harmonischen Oszillator (daher der Name) und beim Wasserstoffatom. ■

Aufgabe IV.3. Wir betrachten die zweidimensionale nichtabelsche komplexe Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und wählen darin eine Basis (h, x) mit $[h, x] = x$. Im folgenden bezeichnet V einen $\mathfrak{g}$-Modul und ρ die zugehörige Darstellung. Es sollen die endlichdimensionalen $\mathfrak{g}$-Moduln klassifiziert werden, die bzgl. h zerfallen, d.h. auf denen h diagonalisierbar operiert.

Hierzu gehe man in folgenden Schritten vor:

(i) Wird V von einem h-Eigenvektor v_0 zum Eigenwert λ erzeugt, so existiert in V eine Basis $(v_0, \ldots, v_n)$ mit

$$h.v_k = (\lambda + k)v_k \quad \text{und} \quad x.v_k = \begin{cases} v_{k+1}, & k < n \\ 0, & k = n \end{cases}.$$

Wir schreiben $V(\lambda, n)$ für den Modul, in dem eine solche Basis existiert.

(ii) Für $k \leq n$ ist $V(\lambda + k, n - k)$ ein Untermodul von $V(\lambda, n)$.

(iii) Jeder einfache endlichdimensionale $\mathfrak{g}$-Modul ist isomorph zu einem $V(\lambda, 1)$. Hinweis: Satz von Lie.

(iv) Für jede endlichdimensionale Darstellung ρ ist $\rho(x)$ nilpotent und für jedes n sind die Unterräume $\ker \rho(x)^n$ und $\operatorname{im} \rho(x)^n$ invariant unter $\rho(h)$, d.h. $\mathfrak{g}$-Untermoduln.

(v)* Man zeige, daß jeder endlichdimensionale $\mathfrak{g}$-Modul, der bzgl. h zerfällt, eine direkte Summe von Moduln der Gestalt $V(\lambda, n)$ ist. Hinweis: Man leite eine Jordansche Normalform von $\rho(x)$ her, die an die Eigenraumzerlegung bzgl. $\rho(h)$ angepaßt ist. ■

Anwendungen auf integrable Moduln

Nachdem wir gesehen haben, wie man die einfachen $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-Moduln klassifiziert, wollen wir die Information, die uns Satz IV.3.3 zur Verfügung stellt, noch etwas weiter auswerten. Es wird sich zeigen, daß dies für die recht große Klasse der sogenannten integrablen Modul möglich ist.

Definition IV.3.7. (a) Sei V ein Vektorraum. Eine lineare Abbildung $X \in \operatorname{End}(V)$ heißt *lokalnilpotent*, wenn für jedes $v \in V$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $X^n.v = 0$ existiert.
(b) Ein $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-Modul V heißt *integrabel*, wenn h auf V diagonalisierbar ist, und die Elemente x und y lokalnilpotent wirken.
(c) Ein Modul V einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt *lokalendlich*, wenn jedes Element einen endlichdimensionalen Untermodul erzeugt. ■

In Beispiel IV.3.1 sieht man, was in einem $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-Modul, auf dem h diagonalisierbar ist, mit den Elementen x und y passieren kann. Auf dem Untermodul $\mathbb{K}[Z]$ operiert x lokalnilpotent, aber y nicht. Der umgekehrte Fall tritt ebenfalls auf.

Wir stellen nun einige wichtige Eigenschaften integrabler Moduln zusammen.

Satz IV.3.8. *Für einen integrablen $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-Modul V gelten folgende Aussagen für die Menge $\mathcal{P}_V(h) \subseteq \mathbb{K}$ der h-Eigenwerte auf V:*

(i) *V ist lokalendlich.*

(ii) *$\mathcal{P}_V \subseteq \mathbb{Z}$, d.h. alle Eigenwerte von h sind ganzzahlig.*

(iii) *$\mathcal{P}_V = -\mathcal{P}_V$.*

(iv) *(Fadeneigenschaft) Sind $\alpha, \alpha + 2k \in \mathcal{P}_V$ für ein $k \in \mathbb{Z}$, so ist auch $\alpha + 2j \in \mathcal{P}_V$ für alle ganzen Zahlen j zwischen 0 und k.*

Beweis. (i) Da sich jedes Element in eine endliche Summe von Eigenvektoren von h zerlegen läßt, haben wir nur zu zeigen, daß jeder h-Eigenvektor v einen endlichdimensionalen Untermodul erzeugt.

Sei also v ein Eigenvektor von h zum Eigenwert α, d.h. $v \in V^\alpha$. Da x lokalnilpotent auf V operiert, existiert ein minimales $N \in \mathbb{N}$ mit $x^N.v = 0$. Weiter existiert ein $M \in \mathbb{N}$ mit $y^M x^n.v = 0$ für $n = 0, \ldots, N$. Wir betrachten nun den Unterraum

$$W := \operatorname{span}\{y^m x^n.v \colon n, m \in \mathbb{N}_0\}$$

von dem wir schon wissen, daß $\dim W \leq NM < \infty$ ist. Wir behaupten, daß W ein Untermodul ist. Wegen $y^m x^n.v \in V^{\alpha+2n-2m}$ ist W unter h invariant. Die Invarianz unter y folgt sofort aus der Definition.

Für die Invarianz unter x erhalten wir mit Lemma IV.3.2

$$\begin{aligned} x(y^m x^n).v &= y^m x^{n+1}.v + [x, y^m].(x^n.v) \in W + m y^{m-1}(h - m + 1).(x^n.v) \\ &\subseteq W + m(\alpha + 2n - m + 1) y^{m-1} x^n.v \subseteq W. \end{aligned}$$

Folglich ist W invariant unter x.
(ii) Sei $v \in V$ ein h-Eigenvektor zum Eigenwert α. Da x lokalnilpotent auf V operiert, existiert ein minimales $n \in \mathbb{N}_0$ mit $x^{n+1}.v = 0$. Nun ist $x^n.v \in V^{\alpha+2n}$ und erzeugt einen endlichdimensionalen Untermodul. Aus Satz IV.3.3 folgt daher $\alpha + 2n \in \mathbb{N}_0$ und somit $\alpha \in \mathbb{Z}$.
(iii) Sei $\alpha \in \mathcal{P}_V$ ein Eigenwert von h und v ein zugehöriger Eigenvektor. Wir nehmen zunächst $\alpha \geq 0$ an und wählen n minimal mit $x^{n+1}.v = 0$. Nach Satz IV.3.3 erzeugt $x^n.v$ einen Untermodul isomorph zu $L(\alpha+2n)$. Also kommen alle Eigenwerte in

$$\{-\alpha - 2n, -\alpha - 2n + 2, \ldots, \alpha + 2n\}$$

in dem Modul V vor, insbesondere auch $-\alpha$.

Ist $\alpha < 0$, so beachten wir, daß auch $(y, -h, x)$ ein $\mathfrak{sl}_2$-Tripel ist. Die Behauptung folgt also aus Symmetriegründen auch in diesem Fall.
(iv) Wegen (iii) dürfen wir o.B.d.A. $|\alpha| \geq |\alpha + 2k|$ annehmen. Wegen (iii) dürfen wir sogar $\alpha < 0$ annehmen. Aus dem Beweis von (iii) folgt nun

$$[\alpha, -\alpha] \cap (\alpha + 2\mathbb{Z}) \subseteq \mathcal{P}_V.$$

Wegen $\alpha + 2k \in [\alpha, -\alpha]$ folgt hieraus die Behauptung. ■

Satz IV.3.9. *Lokalendliche $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-Moduln sind integrabel.*

Beweis. Sei V ein lokalendlicher Modul. Dann ist V eine Summe endlichdimensionaler Untermoduln V_i, $i \in I$. Jeder Modul V_i ist nach dem Satz von Weyl halbeinfach, also eine Summe einfacher Moduln. Folglich ist auch V eine Summe einfacher Untermoduln, daher halbeinfach (Satz II.1.4).

Jeder einfache Untermodul W von V ist endlichdimensional, da er von jedem seiner Elemente erzeugt wird und V lokalendlich ist. Andererseits ist V die direkte Summe einfacher Untermoduln (Satz II.1.4). Daher folgt die Integrabilität sofort aus der Integrabilität einfacher Moduln, die wiederum leicht aus der expliziten Struktur der Moduln $L(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{N}_0$, abzulesen ist (siehe Theorem IV.3.5). ■

Lokalnilpotente Endomorphismen und die Exponentialfunktion

Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann bricht für jedes nilpotente $X \in \mathrm{End}(V)$ die *Exponentialreihe*

$$e^X := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n$$

ab, ist also wohldefiniert für jeden Körper $\mathbb{K}$ der Charakteristik 0, ohne daß wir von Konvergenz reden müssen.

Ist nun V unendlichdimensional, so nennen wir einen Endomorphismus $X \in \mathrm{End}(V)$ *lokalnilpotent*, wenn $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \ker(X^n) = V$ ist. Dann können wir e^X definieren durch die Reihe

$$e^X.v := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n.v,$$

die für jedes Element $v \in V$ abbricht und daher eine lineare Abbildung $e^X \in \mathrm{End}(V)$ definiert. Es ist klar, daß $e^{\mathbf{0}} = \mathbf{1}$ gilt.

Satz IV.3.10. *Für zwei lokalnilpotente Endomorphismen X, Y von V mit $XY = YX$ ist auch $X + Y$ lokalnilpotent mit $e^{X+Y} = e^X e^Y$. Insbesondere ist e^X invertierbar mit $(e^X)^{-1} = e^{-X}$.*

Beweis. Ist $v \in V$, so haben wir

$$(X+Y)^k.v = \sum_{i+j=k} \binom{k}{i} X^i Y^j.v = \sum_{i+j=k} \binom{k}{i} Y^j X^i.v.$$

Ist $X^n.v = Y^m.v = 0$ und $k \geq n + m - 1$, so ist entweder $i \geq m$ oder $j \geq n$, d.h. alle Summanden verschwinden. Folglich ist $(X+Y)^k.v = 0$.

Da X und Y vertauschen, haben wir $(X+Y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k Y^{n-k}$ und folglich für jedes $v \in V$ wegen der Cauchy-Produkt-Formel für endliche Summen

$$\begin{aligned} e^{X+Y}.v &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(X+Y)^n.v = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k Y^{n-k}.v \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} X^k Y^{n-k}.v = e^X e^Y.v. \end{aligned}$$

∎

Wir halten zwei wichtige Eigenschaften der Exponentialfunktion fest:

Lemma IV.3.11. *Ist A eine Algebra und $D \in \mathrm{der}(A)$ lokalnilpotent, so ist $e^D \in \mathrm{Aut}(A)$.*

Beweis. Seien $a, b \in A$. Die folgende Leibnizregel folgt aus einer einfachen Induktion:

$$D^n.(ab) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (D^k.a) \cdot (D^{n-k}.b).$$

Bilden wir nun die Exponentialreihe, so folgt hieraus

$$\begin{aligned} e^D(ab) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (D^k.a)(D^{n-k}.b) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \Big(\frac{1}{k!} D^k.a\Big) \cdot \Big(\frac{1}{(n-k)!} D^{n-k}.b\Big) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{k!} D^k.a\Big) \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{m!} D^m.b\Big) \\ &= (e^D.a) \cdot (e^D.b). \end{aligned}$$

∎

Korollar IV.3.12. *Ist $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra und $x \in \mathfrak{g}$, so daß $\mathrm{ad}\,x$ lokalnilpotent ist, so ist $e^{\mathrm{ad}\,x} \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$.* ∎

Die Gruppe

$$\mathrm{EAut}(\mathfrak{g}) := \langle e^{\mathrm{ad}\,x} \colon \mathrm{ad}\,x \text{ lokalnilpotent} \rangle \subseteq \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$$

heißt *Gruppe der elementaren Automorphismen.*

Lemma IV.3.13. *Sei V ein Vektorraum und $a, b \in \mathrm{End}(V)$. Wir nehmen an, daß a lokalnilpotent ist und $(\mathrm{ad}\,a)^k.b = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dann gilt in $\mathfrak{gl}(V)$ die Beziehung*

$$e^a b e^{-a} = e^{\mathrm{ad}\,a}.b.$$

Beweis. Definieren wir $L_a(b) := R_b(a) := ab$ für $a, b \in \mathrm{End}(V)$, so ist $\mathrm{ad}\, a = L_a - R_a$. Mit $[L_a, R_b] = 0$ folgt daher

$$(\mathrm{ad}\, a)^n.b = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} L_a^k (-R_a)^{n-k}.b.$$

Jetzt nehmen wir zusätzlich an, daß a lokalnilpotent ist und $(\mathrm{ad}\, a)^n.b$ für ausreichend große n verschwindet. Dann haben wir für jedes $v \in V$ die abbrechende Reihe:

$$e^a b.v = \sum_{n=0} \frac{1}{n!} a^n.(b.v) = \sum_{n=0} \frac{1}{n!} (L_a^n.b).v$$

und daher

$$\begin{aligned}
(e^{\mathrm{ad}\, a}.b).v &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\mathrm{ad}\, a)^n(b).v \\
&= \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} \binom{n}{k} L_a^k (-R_a)^{n-k}.b \Big).v \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{1}{(n-k)!} a^k b (-a)^{n-k}.v \\
&= e^a b e^{-a}.v.
\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich die Behauptung. ∎

Lemma IV.3.14. *Sei (ρ, V) eine Darstellung von $\mathfrak{g}$ und $x \in \mathfrak{g}$, so daß $\mathrm{ad}\, x$ und $\rho(x)$ lokalnilpotent sind. Dann ist*

$$e^{\rho(x)} \rho(y) e^{-\rho(x)} = \rho(e^{\mathrm{ad}\, x}.y) \quad \textit{für alle} \quad y \in \mathfrak{g}.$$

Beweis. Zunächst beachten wir, daß beide Seiten der Gleichung definiert sind. Da ρ eine Darstellung ist, gilt weiter $\rho \circ \mathrm{ad}\, x = \mathrm{ad}\, \rho(x) \circ \rho$ und daher induktiv $\rho \circ (\mathrm{ad}\, x)^n = (\mathrm{ad}\, \rho(x))^n \circ \rho$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Durch Aufsummieren der Exponentialreihe erhalten wir

$$\rho(e^{\mathrm{ad}\, x}.y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \rho((\mathrm{ad}\, x)^n.y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\mathrm{ad}\, \rho(x))^n \rho(y) = e^{\mathrm{ad}\, \rho(x)}.\rho(y).$$

Für $a = \rho(x)$ und $b = \rho(y)$ ergibt sich daher aus Lemma IV.3.13

$$e^{\rho(x)} \rho(y) e^{-\rho(x)} = e^{\mathrm{ad}\, \rho(x)}.\rho(y) = \rho(e^{\mathrm{ad}\, x}.y).$$

Damit ist alles gezeigt. ∎

Anwendungen auf lokalendliche $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-Moduln

In diesem Abschnitt werden wir die Exponentialfunktion für lokalnilpotente Endomorphismen verwenden, um zu zeigen, daß jeder lokalendliche $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-Modul eine Spiegelsymmetrie besitzt. Diese ist zum Beispiel dafür verantwortlich, daß $\mathcal{P}_V = -\mathcal{P}_V$ in allen solchen Moduln gilt (Satz IV.3.8(iii)). Mit der Symmetrieabbildung können wir allerdings weiterreichende Folgerungen ziehen, nämlich, daß sogar die Vielfachheiten der Eigenwerte diese Symmetrie aufweisen.

Wir betrachten hierzu für $t \in \mathbb{K}^\times$ den Automorphismus

$$\theta(t) := e^{t\,\mathrm{ad}\,x} e^{-t^{-1}\,\mathrm{ad}\,y} e^{t\,\mathrm{ad}\,x} \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K}))$$

(Lemma IV.3.9) und

$$\sigma(t) := e^{tx} e^{-t^{-1}y} e^{tx} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Aus Lemma IV.3.13 folgt dann

$$\theta(t).z = \sigma(t) z \sigma(t)^{-1}, \quad z \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{K}).$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar

$$\theta(t).h = -h, \quad \theta(t).x = -t^{-2} y \quad \text{und} \quad \theta(t).y = -t^2 x.$$

Für $t = 1$ und $\sigma := \sigma(1)$ erhalten wir insbesondere

$$\theta(1).h = -h, \quad \theta(1).x = -y \quad \text{und} \quad \theta(1).y = -x.$$

Lemma IV.3.15. *Sei (ρ, V) ein lokalendlicher $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-Modul und $\sigma_V := e^{\rho_V(x)} e^{-\rho_V(y)} e^{\rho_V(x)} \in \mathrm{GL}(V)$. Dann gilt*

$$\sigma_V \rho(z) \sigma_V^{-1} = \rho(\sigma z \sigma^{-1})$$

für alle $z \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$,

$$\sigma_V(V^\alpha) = V^{-\alpha}$$

für die Eigenräume V^α von h zum Eigenwert α und insbesondere

$$\dim V^\alpha = \dim V^{-\alpha}.$$

Beweis. Für $z \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$ haben wir wegen Lemma IV.3.14

$$\sigma_V \rho(z) \sigma_V^{-1} = \rho(\sigma z \sigma^{-1}).$$

Ist V^α ein Eigenraum von h zum Eigenwert α, so ergibt sich

$$\sigma_V(V^\alpha) = V^{-\alpha},$$

da wir für $v \in V^\alpha$ wie folgt rechnen:

$$h.(\sigma_V.v) = \sigma_V\big(\sigma_V^{-1}\rho(h)\sigma_V\big).v = -\sigma_V(h.v) = -\alpha\sigma_V(v).$$

Hieraus erhalten wir insbesondere $\dim V^\alpha = \dim V^{-\alpha}$. ∎

Wir werden diese Methode im folgenden weiter ausbauen und verfeinern, nachdem wir die Rolle der $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-Unteralgebren für Lie-Algebren mit Wurzelzerlegung besser kennen.

IV.4. Testalgebren und die Weylgruppe

Nachdem wir in Abschnitt IV.2 eine Reihe von Beispielen von Lie-Algebren mit Wurzelzerlegungen kennengelernt haben, kommen wir in diesem Abschnitt zu einigen allgemeinen strukturellen Eigenschaften solcher Lie-Algebren

In diesem Abschnitt sei $\mathfrak{h}$ eine torale Cartan-Unteralgebra der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}^\alpha$$

die zugehörige Wurzelzerlegung.

Lemma IV.4.1. (a) $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{h} \colon (\forall \alpha \in \Delta)\alpha(x) = 0\} = \bigcap_{\alpha\in\Delta} \ker \alpha$.
(b) $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \sum_\alpha [\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}] + \sum_\alpha \mathfrak{g}^\alpha = (\mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) + \sum_\alpha \mathfrak{g}^\alpha$.

Beweis. (a) Zunächst ist $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. Ein Element in $x \in \mathfrak{h}$ ist genau dann zentral, wenn $[x, \mathfrak{g}^\alpha] = \{0\}$ für alle α gilt. Hieraus folgt die Behauptung.
(b) Der erste Teil folgt sofort aus

$$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = [\mathfrak{h},\mathfrak{h}] + \sum_\alpha [\mathfrak{h}, \mathfrak{g}^\alpha] + \sum_{\alpha,\beta} [\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta] = \sum_\alpha \mathfrak{g}^\alpha + \sum_\alpha [\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}],$$

da für $\alpha + \beta \neq 0$ die Beziehung $[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta] \subseteq \sum_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}^\alpha$ gilt. Der zweite Teil folgt nun aus $[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}] \subseteq \mathfrak{h}$. ∎

Satz IV.4.2. *Sind $x_{\pm\alpha} \in \mathfrak{g}^{\pm\alpha}$, so ist*

$$\mathfrak{g}(x_\alpha, x_{-\alpha}) := \operatorname{span}\{x_\alpha, x_{-\alpha}, [x_\alpha, x_{-\alpha}]\}$$

eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}$. Es treten drei Typen auf:

(A) *Der abelsche Typ: $[x_\alpha, x_{-\alpha}] = 0$, d.h. $\mathfrak{g}(x_\alpha, x_{-\alpha})$ ist abelsch.*

(N) *Der nilpotente Typ: $[x_\alpha, x_{-\alpha}] \neq 0$, aber $\alpha([x_\alpha, x_{-\alpha}]) = 0$, d.h. $\mathfrak{g}(x_\alpha, x_{-\alpha})$ ist isomorph zur dreidimensionalen Heisenberg-Algebra.*

(S) *Der einfache Typ: $\alpha([x_\alpha, x_{-\alpha}]) \neq 0$, d.h. $\mathfrak{g}(x_\alpha, x_{-\alpha})$ ist isomorph zu $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$.*

Beweis. Daß $\mathfrak{a} := \mathfrak{g}(x_\alpha, x_{-\alpha})$ eine Unteralgebra ist, folgt sofort aus $[x_\alpha, x_{-\alpha}] \in \mathfrak{h}$. Es ist klar, daß genau einer der drei genannten Fälle eintritt. Im Fall (A) ist $\mathfrak{a}$ trivialerweise abelsch. Im Fall (N) ist $z := [x_\alpha, x_{-\alpha}] \in \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$, da die Wurzeln α und $-\alpha$ auf diesem Element verschwinden. Damit ist klar, daß $\mathfrak{a}$ isomorph zur dreidimensionalen Heisenberg-Algebra ist (vgl. Beispiel III.1.6).

Im Fall (S) setzen wir

$$h := \frac{2}{\alpha([x_\alpha, x_{-\alpha}])}[x_\alpha, x_{-\alpha}], \quad x := \frac{2}{\alpha([x_\alpha, x_{-\alpha}])}x_\alpha$$

und $y := x_{-\alpha}$. Dann gilt

$$[h,x] = 2x, \quad [h,y] = -2y \quad \text{und} \quad [x,y] = h.$$

Also ist $\mathfrak{a} \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$ (vgl. Beispiel II.2.5). ∎

Die Unteralgebren der Gestalt $\mathfrak{g}(x_\alpha, x_{-\alpha})$ heißen *Testalgebren*, da man mit ihnen viele Eigenschaften der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ „austesten" kann. Wir werden dazu noch einige Beispiele kennenlernen.

Satz IV.4.3. *Sei* $\mathfrak{a} := \mathfrak{g}(x_\alpha, x_{-\alpha})$ *eine Testalgebra, so daß* $\operatorname{ad} x_{\pm\alpha}$ *lokalnilpotent sind.*

(i) *Ist* $\mathfrak{a}$ *vom nilpotenten Typ, so ist* $[x_\alpha, x_{-\alpha}] \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

(ii) *Ist* $\mathfrak{a}$ *vom einfachen Typ, so ist* $\mathfrak{g}$ *ein integrabler Modul der Lie-Algebra* $\mathfrak{a} \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$.

Beweis. (i) Wir haben zu zeigen, daß jede Wuzel β auf $h := [x_\alpha, x_{-\alpha}]$ verschwindet (Lemma IV.4.1). Wir setzen $x := x_\alpha$ und $y := x_{-\alpha}$ und erhalten die Kommutatorrelationen

$$[x, y] = h \quad \text{und} \quad [h, x] = [h, y] = 0.$$

Sei $0 \neq x_\beta \in \mathfrak{g}^\beta$. Indem wir Lemma IV.3.2 auf die nilpotente Lie-Algebra $\operatorname{ad} \mathfrak{a} \subseteq \operatorname{End}(\mathfrak{g})$ anwenden, sehen wir wie im Beweis von Satz IV.3.8(i), daß

$$M := \operatorname{span}\{(\operatorname{ad} y)^n (\operatorname{ad} x)^m . x_\beta \colon n, m \in \mathbb{N}_0\}$$

ein endlichdimensionaler $\mathfrak{a}$-invarianter Unterraum von $\mathfrak{g}$ ist. Aus Korollar III.4.4 (zu dem Satz von Lie) erhalten wir, daß $\operatorname{ad} h \in \operatorname{ad}[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$ auf $\mathfrak{g}$ lokalnilpotent ist. Andererseits ist $\operatorname{ad} h$ diagonalisierbar und somit Null, d.h. $h \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.
(ii) Das folgt sofort daraus, daß $\operatorname{ad}[x_\alpha, x_{-\alpha}]$ auf $\mathfrak{g}$ diagonalisierbar ist. ■

Definition IV.4.4. Ist $\mathfrak{g}(x_\alpha, x_{-\alpha})$ eine Testalgebra vom einfachen Typ, so daß $\mathfrak{g}$ ein integrabler $\mathfrak{g}(x_\alpha, x_{-\alpha})$-Modul ist, so nennen wir die Wurzel α *integrabel*. Wir schreiben Δ_i für die Menge der integrablen Wurzeln und beachten, daß $\Delta_i = -\Delta_i$ aus der Symmetrie der Definition folgt. ■

Beispiel IV.4.5. Es ist sehr instruktiv, sich die Beispiele aus Abschnitt IV.2 bzgl. der Eigenschaften von Testalgebren anzuschauen, die wir bisher kennengelernt haben.
(a) In $\mathfrak{gl}(J, \mathbb{K})$ sind alle Testalgebren vom einfachen Typ und integrabel. In der Tat ist $(\operatorname{ad} E_{ij})^3 = 0$ für $i \neq j \in J$.
(b) In der Witt-Algebra sind ebenfalls alle Testalgebren vom einfachen Typ, aber keine ist integrabel.
(c) In der Oszillatoralgebra sind alle Testalgebren vom nilpotenten Typ.

Man sieht, daß die drei obigen Typen ein gewisses Verhalten der Wurzelzerlegung in einer sehr reinen Form repräsentieren. Natürlich gibt es auch Mischtypen, aber diese sind naturgemäß komplizierter. ■

Wir diskutieren nun die Eigenschaften integrabler Wurzeln. Sie sind es, die dem Wurzelsystem Δ seine interessante geometrische Struktur geben.

Der Hauptsatz über integrable Wurzeln

Theorem IV.4.6. *Sei $\alpha \in \Delta_i$ eine integrable Wurzel.*

(i) $\dim \mathfrak{g}^\alpha = 1$ *und* $\mathbb{Z}\alpha \cap \Delta = \{\pm\alpha\}$.

(ii) *Sind* $0 \neq x_{\pm\alpha} \in \mathfrak{g}^{\pm\alpha}$, *so ist* $\mathfrak{g}(x_\alpha, x_{-\alpha}) \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$.

(iii) *Es existiert genau ein Element* $\check\alpha \in [\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}]$ *mit* $\alpha(\check\alpha) = 2$.

(iv) *Für alle Wurzeln* $\beta \in \Delta$ *ist* $\beta(\check\alpha) \in \mathbb{Z}$.

(v) $\mathbb{K}\alpha \cap \Delta \subseteq \{\pm\alpha\} \cup (\frac{1}{2} + \mathbb{Z})\alpha$.

(vi) $\mathbb{K}\alpha \cap \Delta_i = \{\pm\alpha\}$.

Beweis. Da α integrabel ist, finden wir $x_{\pm\alpha} \in \mathfrak{g}^{\pm\alpha}$, so daß $\mathfrak{a} := \mathfrak{g}(x_\alpha, x_{-\alpha}) \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$ und $\mathfrak{g}$ ein integrabler $\mathfrak{a}$-Modul ist. Wir dürfen o.B.d.A. annehmen, daß $\alpha([x_\alpha, x_{-\alpha}]) = 2$ ist und setzen $h := [x_\alpha, x_{-\alpha}]$, $x := x_\alpha$ und $y := x_{-\alpha}$.

(i) Wir betrachten den Unterraum

$$V := \mathbb{K}y + \mathfrak{h} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{g}^{n\alpha}.$$

Man verifiziert leicht, daß es sich hierbei um einen $\mathfrak{a}$-Untermodul handelt (Korollar IV.1.7), der als Untermodul eines integrablen Moduls selbst integrabel ist. Nach Lemma V.3.13 ist daher $\dim V^m = \dim V^{-m}$ für alle $m \in \mathbb{Z}$. Hieraus ergibt sich

$$\dim \mathfrak{g}^\alpha = \dim V^2 = \dim V^{-2} = 1 \quad \text{und} \quad \dim \mathfrak{g}^{n\alpha} = 0 \quad \text{für} \quad n > 1.$$

(ii) Dies folgt unmittelbar aus (i), da $\mathfrak{g}^\alpha = \mathbb{K}x$ und $\mathfrak{g}^{-\alpha} = \mathbb{K}y$ ist.

(iii) Da $\mathfrak{g}^{\pm\alpha}$ beide eindimensional sind und nicht kommutieren, ist der Raum $[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}]$ eindimensional. Also ist $\check\alpha = h$ eindeutig bestimmt.

(iv) Da $\mathfrak{g}$ ein integrabler $\mathfrak{a}$-Modul ist und $\beta(\check\alpha)$ der Eigenwert von $\check\alpha$ auf dem Wurzelraum $\mathfrak{g}^\beta$, folgt dies aus Satz IV.3.8(ii).

(v) Sei $\beta \in \mathbb{K}\alpha \cap \Delta$, d.h. $\beta = c\alpha$. Wegen (iv) ist $c \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Ist $c \in \mathbb{Z}$, so folgt $c = \pm 1$ aus (i).

(vi) Ist β zusätzlich integrabel, so ist auch $\frac{1}{c} \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, und daher $\frac{4}{2c} \in \mathbb{Z}$. Da $2c$ ein Teiler von 4 ist, ist $c \in \{\pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2\}$. Der Fall $c = \pm 2$ wird durch (v) ausgeschlossen, ebenso der Fall $c = \pm\frac{1}{2}$ aus Symmetriegründen, da (v) auch für β gilt. ∎

Wir haben gesehen, daß für eine integrable Wurzel $\alpha \in \Delta_i$ die Unterräume $\mathfrak{g}^{\pm\alpha}$ eindimensional sind. Damit hängen die zugehörigen Testalgebren $\mathfrak{g}(x_\alpha, x_{-\alpha})$ nicht von der Wahl der $x_{\pm\alpha}$ ab, und wir schreiben

$$\mathfrak{g}(\alpha) := \mathfrak{g}^\alpha + \mathfrak{g}^{-\alpha} + [\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}] = \mathfrak{g}^\alpha + \mathfrak{g}^{-\alpha} + \mathbb{K}\check\alpha$$

für die zugehörige Testalgebra. Man beachte, daß der Unterraum $\mathfrak{g}^\alpha + \mathfrak{g}^{-\alpha} + [\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}]$ nicht immer eine Unteralgebra ist, sonder nur dann, wenn $[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\alpha] = \{0\} = [\mathfrak{g}^{-\alpha}, \mathfrak{g}^{-\alpha}]$ ist. Dies ist allerdings immer der Fall, wenn $\dim \mathfrak{g}^{\pm\alpha} \leq 1$ ist.

$\boxed{\text{Hauptsatz über Wurzelfäden}}$

Satz IV.4.7. *Sei $\alpha \in \Delta_i$ eine integrable Wurzel und $\beta \in \Delta$ eine beliebige Wurzel.*

(i) *Für $\beta \in \Delta \setminus \{\pm\alpha\}$ ist $\{k \in \mathbb{Z} \colon \beta + k\alpha \in \Delta\}$ ein Intervall in $\mathbb{Z}$.*

(ii) *Ist dieses Intervall beschränkt und gleich $[-p, q] \cap \mathbb{Z}$, so gilt $p - q = \beta(\check{\alpha})$.*

(iii) *Ist $\beta(\check{\alpha}) < 0$, so ist $\beta + \alpha \in \Delta$.*

(iv) *Ist $\beta(\check{\alpha}) > 0$, so ist $\beta - \alpha \in \Delta$.*

(v) *Gilt $[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta] = \{0\}$, so ist $\beta(\check{\alpha}) \geq 0$.*

Beweis. (i) Wir betrachten den Unterraum

$$V := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^{\beta + k\alpha}.$$

Wir beachten, daß wegen $\beta \neq \{\pm\alpha\}$ die 0 nicht in $\beta + \mathbb{Z}\alpha$ enthalten ist. Aus Korollar IV.1.7 ($[\mathfrak{g}^\gamma, \mathfrak{g}^\delta] \subseteq \mathfrak{g}^{\gamma+\delta}$) schließen wir, daß V ein $\mathfrak{g}(\alpha)$-Untermodul von $\mathfrak{g}$ ist, auf den wir die Darstellungstheorie der Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ anwenden können. Die Eigenwerte von $\check{\alpha}$ auf V sind gegeben durch

$$\mathcal{P}_V = \{(\beta + k\alpha)(\check{\alpha}) \colon \beta + k\alpha \in \Delta\} = \beta(\check{\alpha}) + 2\{k \colon \beta + k\alpha \in \Delta\}.$$

Aus der Fadeneigenschaft für $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-Moduln (Satz IV.3.8(iv)) erhalten wir daher sofort die Fadeneigenschaft für Wurzeln, denn alle Eigenwerte von $\check{\alpha}$ auf V liegen in $\beta(\check{\alpha}) + 2\mathbb{Z}$.

(ii) Wir beachten zunächst, daß $p \geq 0$ aus $0 \in [-p, q]$ folgt. Aus Satz IV.3.8 wissen wir, daß $\mathcal{P}_V = -\mathcal{P}_V$ ist. Also ist

$$\beta(\check{\alpha}) - 2p = (\beta - p\alpha)(\check{\alpha}) = -(\beta + q\alpha)(\check{\alpha}) = -\beta(\check{\alpha}) - 2q,$$

woraus sich die Behauptung sofort ergibt.

(iii) Ist $\beta(\check{\alpha}) < 0$, so erhalten wir $q > 0$ aus (ii). Wegen (i) ist daher $\beta + \alpha \in \Delta$.

(iv) Zeigt man analog zu (iii).

(v) Gilt $[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta] = \{0\}$, so ist

$$V := \sum_{k \leq 0} \mathfrak{g}^{\beta + k\alpha}$$

ein integrabler Modul der Lie-Algebra $\mathfrak{g}(\alpha) \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ und $\beta(\check{\alpha})$ ist der größte Eigenwert von $\check{\alpha}$. Aus Satz IV.3.8(iii) folgt daher $\beta(\check{\alpha}) \geq 0$. ∎

Aufgabe IV.4. Sei $\mathfrak{s} := \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ und $L(n)$ der einfache $\mathfrak{s}$-Modul der Dimension $n+1$. Wir betrachten den Modul $V := \bigoplus_{n=1}^\infty L(2n-1)$ und die Lie-Algebra $\mathfrak{g} := V \rtimes \mathfrak{s}$.

(a) Dann ist $\mathfrak{h} = \mathbb{K}h$ eine torale Cartan-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ (Nachweis!), und mit $\alpha(h) = 2$ ist das System der Wurzeln gegeben durch

$$\Delta = \{\pm\alpha\} \cup \left(\tfrac{1}{2} + \mathbb{Z}\right)\alpha.$$

(b) Die Wurzel α ist integrabel mit $\mathfrak{g}(\alpha) = \mathfrak{s}$.

(c) Von welchem Typ sind die Wurzel in $(\frac{1}{2} + \mathbb{Z})\alpha$? ∎

Die Weylgruppe

Sei $\alpha \in \Delta_i$ eine integrable Wurzel. Das Element $\check{\alpha} \in \mathfrak{h}$ heißt zugehörige *Kowurzel*. Das Element $\check{\alpha} \in [\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}] \subseteq \mathfrak{g}(\alpha) \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ entspricht hierbei der Diagonalmatrix $h \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$.

Wir betrachten die lineare Abbildung

$$s_\alpha : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}, \quad x \mapsto x - \alpha(x)\check{\alpha}.$$

Dann ist s_α eine Spiegelung an der Hyperebene $\ker \alpha$, da diese Hyperebene punktweise fixiert wird und $s_\alpha(\check{\alpha}) = -\check{\alpha}$ gilt.

Die Untergruppe $\mathcal{W} := \langle s_\alpha, \alpha \in \Delta_i \rangle \subseteq \mathrm{GL}(\mathfrak{h})$, die von diesen Spiegelungen erzeugt wird, heißt *Weylgruppe von* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

Satz IV.4.8. *Sei*

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) := \{\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) : \varphi(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{h}\} \quad \textit{und} \quad \mathrm{EAut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) := \mathrm{EAut}(\mathfrak{g}) \cap \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}).$$

Dann erhalten wir einen Gruppenhomomorphismus

$$r : \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \to \mathrm{GL}(\mathfrak{h}), \quad \varphi \mapsto \varphi|_\mathfrak{h}$$

mit folgenden Eigenschaften:

(i) *Die Weylgruppe* $\mathcal{W}$ *liegt in* $r\big(\mathrm{EAut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})\big)$.

(ii) *Die Gruppe* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *operiert auf* $\mathfrak{h}^*$ *durch* $\varphi.\gamma := \gamma \circ \varphi^{-1}|_\mathfrak{h}$ *und ebenso operiert* $\mathcal{W}$ *auf* $\mathfrak{h}^*$. *Die Wirkung der Spiegelung* s_α *is hierbei gegeben durch*

$$s_\alpha.\gamma = \gamma - \gamma(\check{\alpha})\alpha.$$

(iii) *Für* $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *ist* $\varphi(\mathfrak{g}^\alpha) = \mathfrak{g}^{\varphi.\alpha}$. *Insbesondere ist* Δ *unter der Wirkung von* $\mathrm{EAut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *und damit unter der Wirkung von* $\mathcal{W}$ *invariant.*

(iv) *Für* $\alpha \in \Delta_i$ *und* $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *ist* $\varphi.\alpha \in \Delta_i$ *mit*

$$\varphi(\check{\alpha}) = (\varphi.\alpha)\check{} \quad \textit{und} \quad s_{\varphi.\alpha} = \varphi \circ s_\alpha \circ \varphi^{-1}.$$

Beweis. (i) Daß r ein Gruppenhomomorphismus ist, ist klar. Insbesondere ist sein Bild eine Untergruppe, so daß wir nur zu zeigen haben, daß jede der Spiegelungen s_α, $\alpha \in \Delta_i$, in seinem Bild liegt. Sei also $\alpha \in \Delta_i$ eine integrable Wurzel und $x_{\pm\alpha} \in \mathfrak{g}^{\pm\alpha}$ mit $[x_\alpha, x_{-\alpha}] = \check{\alpha}$.

Da $\mathfrak{g}$ ein lokalendlicher $\mathfrak{g}(\alpha)$-Modul ist, erhalten wir durch

$$\sigma_\alpha := e^{\mathrm{ad}\, x_\alpha} e^{-\mathrm{ad}\, x_{-\alpha}} e^{\mathrm{ad}\, x_\alpha}$$

einen Automorphismus von $\mathfrak{g}$ (Lemma IV.3.11). Wir berechnen seine Wirkung auf $\mathfrak{h}$. Ist $x \in \ker\alpha$, so kommutiert x mit $\mathfrak{g}(\alpha)$ und wir haben $\sigma_\alpha.x = x$. Andererseits folgt $\sigma_\alpha.\check{\alpha} = -\check{\alpha}$ aus der Relation

$$e^{\operatorname{ad} x}e^{-\operatorname{ad} y}e^{\operatorname{ad} x}.h = -h$$

in der Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$ (siehe Ende Abschnitt IV.3.3). Also ist $r(\sigma_\alpha) = s_\alpha$.
(ii) Es ist klar, daß durch die angegebene Formel Wirkungen der Gruppen $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ und $\mathcal{W}$ auf $\mathfrak{h}^*$ definiert werden. Für die Wirkung der Spiegelungen erhalten wir für $h \in \mathfrak{h}$ und $\gamma \in \mathfrak{h}^*$:

$$(s_\alpha.\gamma)(h) = \gamma(s_\alpha.h) = \gamma(h - \alpha(h)\check{\alpha}) = \gamma(h) - \gamma(\check{\alpha})\alpha(h) = \big(\gamma - \gamma(\check{\alpha})\alpha\big)(h).$$

(iii) Sei $x \in \mathfrak{g}^\alpha$, $h \in \mathfrak{h}$ und $\varphi \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. Dann ist

$$[h, \varphi.x] = \varphi.[\varphi^{-1}.h, x] = \alpha(\varphi^{-1}.h)\varphi.x = (\varphi.\alpha)(x)\varphi.x,$$

d.h. $\varphi(\mathfrak{g}^\alpha) = \mathfrak{g}^{\varphi.\alpha}$.
(iv) Seien $x_{\pm\alpha} \in \mathfrak{g}^{\pm\alpha}$ mit $[x_\alpha, x_{-\alpha}] = \check{\alpha}$ und $x_{\pm\varphi.\alpha} := \varphi(x_{\pm\alpha})$. Aus (iii) folgt $x_{\pm\varphi.\alpha} \in \mathfrak{g}^{\pm\varphi.\alpha}$. Wegen $\operatorname{ad} x_{\pm\varphi.\alpha} = \varphi \circ \operatorname{ad} x_{\pm\alpha} \circ \varphi^{-1}$ sind diese Operatoren lokalnilpotent auf $\mathfrak{g}$ und wegen (iii) ist $\mathfrak{g}(\varphi.\alpha) = \varphi.\mathfrak{g}(\alpha) \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$. Also ist die Wurzel $\varphi.\alpha$ integrabel. Aus

$$[x_{\varphi.\alpha}, x_{-\varphi.\alpha}] = \varphi([x_\alpha, x_{-\alpha}]) = \varphi(\check{\alpha})$$

und $(\varphi.\alpha)(\varphi.\check{\alpha}) = \alpha(\check{\alpha}) = 2$ folgt $\varphi(\check{\alpha}) = (\varphi.\alpha)\check{}$. Für $h \in \mathfrak{h}$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} s_{\varphi.\alpha}.\varphi(h) &= \varphi(h) - (\varphi.\alpha)(\varphi.h)(\varphi.\alpha)\check{} = \varphi(h) - \alpha(h)\varphi(\check{\alpha}) \\ &= \varphi\big(h - \alpha(h)\check{\alpha}\big) = \varphi \circ s_\alpha(h). \end{aligned}$$

■

Korollar IV.4.9. *Für $\alpha \in \Delta$ und $w \in \mathcal{W}$ gilt*

$$\dim \mathfrak{g}^{w.\alpha} = \dim \mathfrak{g}^\alpha.$$

Beweis. Dies folgt sofort aus Satz IV.4.8(iii). ■

Die Weylgruppe ist ein wichtiges Strukturelement von Lie-Algebren mit Wurzelzerlegung. Die Elemente von $\mathcal{W}$ sind umso komplizierter, je mehr Spiegelungen s_α man multiplizieren muß, um sie zu erhalten. Es erweist sich glücklicherweise in vielen Fällen als hinreichend, daß man die Produkte zweier Spiegelungen kennt.

Satz IV.4.10. *Es seien $\alpha, \beta \in \Delta_i$ linear unabhängig. Die Ordnung $m_{\alpha\beta}$ des Elements $s_\alpha s_\beta \in \mathcal{W}$ ist gegeben durch die folgende Tabelle:*

$\alpha(\check{\beta})\beta(\check{\alpha})$	< 0	0	1	2	3	≥ 4
$m_{\alpha\beta}$	∞	2	3	4	6	∞

Beweis. Wir berechnen die Wirkung des Elements $w := s_\alpha s_\beta$ auf α und β und erhalten

$$w.\alpha = s_\alpha(\alpha - \alpha(\check{\beta})\beta) = -\alpha - \alpha(\check{\beta})(\beta - \beta(\check{\alpha})\alpha) = \big(\alpha(\check{\beta})\beta(\check{\alpha}) - 1\big)\alpha - \alpha(\check{\beta})\beta$$

und

$$w.\beta = s_\alpha(-\beta) = \beta(\check{\alpha})\alpha - \beta.$$

Für die Matrix der Einschränkung g von w auf den von α und β aufgespannten zweidimensionalen Unterraum von $\mathfrak{h}^*$ erhalten wir daher

$$g = \begin{pmatrix} \alpha(\check{\beta})\beta(\check{\alpha}) - 1 & \beta(\check{\alpha}) \\ -\alpha(\check{\beta}) & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}).$$

Wir haben die Ordnung dieser Matrix zu bestimmen. Es gilt $\det g = 1$ und $\operatorname{tr} g = -2 + l$ mit $l := \alpha(\check{\beta})\beta(\check{\alpha})$. Das charakteristische Polynom von g ist daher

$$\lambda^2 - (\operatorname{tr} g)\lambda + \det g = \lambda^2 + (2 - l)\lambda + 1$$

mit den Nullstellen

$$\lambda_{1/2} = \frac{l-2}{2} \pm \sqrt{\frac{(l-2)^2}{4} - 1} = \frac{l-2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{l^2 - 4l}.$$

Hieraus lesen wir ab, daß die Matrix g für $|l - 2| > 2$ reell diagonalisierbar ist, wobei beide Eigenwerte von 1 und -1 verschieden sind. In diesem Fall ist also $m_{\alpha\beta} = \infty$. Für $l = 4$ haben wir $\lambda_{1/2} = 1$ und g ist nicht diagonalisierbar, folglich unipotent und somit von unendlicher Ordnung.

Es bleiben die Fälle $l = 0, 1, 2, 3$ zu diskutieren. In diesem Fall ist

$$\lambda_{1/2} = \frac{l-2}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{4l - l^2}$$

und wir erhalten

$$\lambda_1 = \begin{cases} -1 & \text{für } l = 0 \\ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{für } l = 1 \\ i & \text{für } l = 2 \\ \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{für } l = 3. \end{cases}$$

Für $l = 1, 2, 3$ sind beide Eigenwerte verschieden, somit g über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar und daher die Ordnung von g durch die Tabelle gegeben. Ist $l = 0$, so verschwindet das Produkt $\alpha(\check{\beta})\beta(\check{\alpha})$ und wir dürfen $\beta(\check{\alpha}) = 0$ annehmen. Dann ist $s_\alpha.\beta = \beta - \beta(\check{\alpha})\alpha = \beta$ und wegen Satz IV.9.4(iv) erhalten wir

$$s_\alpha s_\beta s_\alpha = s_{s_\alpha.\beta} = s_\beta.$$

In diesem Fall ist also $(s_\alpha s_\beta)^2 = \mathbf{1}$ und die Ordnung daher 2. Aus $s_\alpha = s_\beta s_\alpha s_\beta = s_{s_\beta.\alpha}$ folgt weiter $\alpha(\check\beta) = 0$.

Es ist klar, daß die Ordnung von w mindestens so groß ist, wie die Ordnung von g. Für $l \neq 0,1,2,3$ ist sie also unendlich. Ist $l \in \{0,1,2,3\}$, so ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} \alpha(\check\alpha) & \alpha(\check\beta) \\ \beta(\check\alpha) & \beta(\check\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \alpha(\check\beta) \\ \beta(\check\alpha) & 2 \end{pmatrix}$$

invertierbar, da ihre Determinante $4 - l$ ist. Folglich ist

$$\mathfrak{h}^* = \operatorname{span}\{\alpha, \beta\} \oplus \operatorname{span}\{\check\alpha, \check\beta\}^\perp$$

(Nachweis!). Hierbei werden alle Elemente aus dem zweiten Raum von w festgelassen. Folglich haben w und g in allen Fällen die gleiche Ordnung. ∎

Endlichdimensionale Lie-Algebren

In diesem Unterabschnitt schauen wir uns an, wie sich die Konzepte aus diesem Abschnitt bei endlichdimensionalen Lie-Algebren verhalten.

Satz IV.4.11. *Ist $\mathfrak{g}$ endlichdimensional und $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$, so ist die Weylgruppe $\mathcal{W}$ endlich.*

Beweis. Aus Satz IV.4.8 wissen wir, daß $\mathcal{W}$ die endliche Menge Δ invariant läßt. Wegen $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \Delta^\perp = \{0\}$ spannt Δ den Raum $\mathfrak{h}^*$ auf. Operiert ein $\gamma \in \mathcal{W}$ also trivial auf Δ, so auch auf $\mathfrak{h}^*$ und folglich ist $\gamma = \mathbf{1}$. Daher enthält $\mathcal{W}$ höchstens $|\Delta|!$ Elemente. ∎

Man kann zeigen, daß die Voraussetzung $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$ in Satz IV.4.12 nicht notwendig ist. Hierzu benötigt man allerdings einige nichttriviale Konsequenzen aus dem Satz von Weyl.

Satz IV.4.12. *Sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Lie-Algebra mit einer Wurzelzerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_\alpha \mathfrak{g}^\alpha$ bzgl. der toralen Cartan-Unteralgebra $\mathfrak{h}$.*

(i) *Ist $\alpha \in \Delta$ und $x \in \mathfrak{g}^\alpha$, so ist $\operatorname{ad} x$ nilpotent.*

(ii) *Existiert zu $\alpha \in \Delta$ eine Testalgebra vom einfachen Typ, so ist α integrabel.*

(iii) *Ist $\mathfrak{g}(x_\alpha, x_{-\alpha})$ nicht vom einfachen Typ, so ist $[x_\alpha, x_{-\alpha}] \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.*

(iv) *Ist $\mathfrak{g}$ auflösbar, so sind alle Testalgebren $\mathfrak{g}(x_\alpha, x_{-\alpha})$ vom Typ* (A) *oder* (N).

(v) *Ist $\mathfrak{g}$ halbeinfach, so sind alle Testalgebren $\mathfrak{g}(x_\alpha, x_{-\alpha})$ vom Typ* (A) *oder* (S).

Beweis. (i) Da Δ eine endliche Menge ist, existiert zu jedem $\beta \in \Delta \cup \{0\}$ ein $n_\beta \in \mathbb{N}$ mit $\beta + n_\beta \alpha \notin \Delta \cup \{0\}$. Also ist $(\operatorname{ad} x)^{n_\beta}(\mathfrak{g}^\beta) = \{0\}$. Ist $N := \max_\beta n_\beta$, so ist $(\operatorname{ad} x)^N = 0$.

(ii) Das folgt sofort aus (i) und Satz IV.4.3(ii).
(iii) Das folgt sofort aus (i) und Satz IV.4.3(i).
(iv) Da jede Unteralgebra einer auflösbaren Lie-Algebra selbst auflösbar ist, kann der Typ (S) nicht auftreten.
(v) Wegen $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$ ist dies eine Konsequenz aus (iii). ∎

Endlichdimensionale halbeinfache Lie-Algebren über algebraisch abgeschlossenen Körpern der Charakteristik 0 besitzen immer eine Wurzelzerlegung, so daß alle Wurzeln integrabel sind. Solche Lie-Algebren stecken also voller $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-Unteralgebren. Hierzu benötigt in erster Linie das Cartan-Kriterium für halbeinfache Lie-Algebren.

V. Lie algebra cohomology

The cohomology of Lie algebras is the natural tool to understand how we can build new Lie algebras $\widehat{\mathfrak{g}}$ from given Lie algebras $\mathfrak{g}$ and $\mathfrak{a}$ in such a way that $\mathfrak{a} \trianglelefteq \widehat{\mathfrak{g}}$ and $\widehat{\mathfrak{g}}/\mathfrak{a} \cong \mathfrak{g}$. An important special case of this situation arises if $\mathfrak{a}$ is assumed to be abelian. We will see in particular how the abelian extensions of Lie algebras can be parametrized by a certain cohomology space. Furthermore we shall deal with the extension problem for $\mathfrak{g}$-modules, i.e., the problem to determine for a pair (V, W) of $\mathfrak{g}$-modules how many non-isomorphic modules $\widehat{V}$ exist which contain W as a submodule and satisfy $\widehat{V}/W \cong V$.

Throughout this section $\mathfrak{g}$ denotes a Lie algebra over the field $\mathbb{K}$. We don't have to make any assumption on the dimension of $\mathfrak{g}$ or the nature of the field $\mathbb{K}$.

V.1. Basic definitions and properties

Definition V.1.1. Let V and W be vector spaces and $p \in \mathbb{N}$. A multilinear map $f\colon W^p \to V$ is called *alternating* if $f(w_1, \ldots, w_p)$ vanishes if for some pair $i < j$ we have $w_i = w_j$. ■

Remark V.1.2. It is an easy exercise to see that for any alternating map $f\colon W^k \to V$ and any pair $i < j$ we have

$$\begin{aligned} &f(w_1, \ldots, w_{i-1}, w_i, w_{i+1}, \ldots, w_{j-1}, w_j, w_{j+1}, \ldots, w_p) \\ &= -f(w_1, \ldots, w_{i-1}, w_j, w_{i+1}, \ldots, w_{j-1}, w_i, w_{j+1}, \ldots, w_p). \end{aligned}$$

In fact, freezing all arguments except w_i and w_j, we obtain a bilinear map $\beta\colon W^2 \to V$ vanishing on the diagonal, i.e., with $\beta(w, w) = 0$ for each $w \in W$. Then

$$0 = \beta(x + y, x + y) = \beta(x, x) + \beta(x, y) + \beta(y, x) + \beta(y, y) = \beta(x, y) + \beta(y, x).$$

For $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 2$, the preceding condition is equivalent to being alternating.

Since the symmetric group S_k is generated by transpositions, the above observation immediately leads to

$$f(w_{\sigma_1}, \ldots, w_{\sigma_p}) = \mathrm{sgn}(\sigma) f(w_1, \ldots, w_p)$$

for $w_i \in W$ and $\sigma \in S_p$. ■

Definition V.1.3. Let $\mathfrak{g}$ be a $\mathbb{K}$-Lie algebra and V a $\mathfrak{g}$-module.
(a) We write $C^p(\mathfrak{g},V)$ for the space of alternating p-linear mappings $\mathfrak{g}^p \to V$ (the *p-cochains*) and put $C^0(\mathfrak{g},V) := V$. We also define

$$C(\mathfrak{g},V) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} C^k(\mathfrak{g},V).$$

On $C^p(\mathfrak{g},V)$ we define the *coboundary operator* d by

$$\begin{aligned} d\omega(x_0,\ldots,x_p) &:= \sum_{j=0}^{p}(-1)^j x_j.\omega(x_0,\ldots,\widehat{x}_j,\ldots,x_p) \\ &\quad + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([x_i,x_j],x_0,\ldots,\widehat{x}_i,\ldots,\widehat{x}_j,\ldots,x_p), \end{aligned}$$

where $\widehat{x}_j$ means that x_j is omitted. Observe that the right hand side defines in fact for each $\omega \in C^p(\mathfrak{g},V)$ an element of $C^{p+1}(\mathfrak{g},V)$ because it is alternating (Exercise!). Putting the coboundary operators on all the spaces $C^p(\mathfrak{g},V)$ together, we obtain a linear map $d\colon C(\mathfrak{g},V) \to C(\mathfrak{g},V)$.

The elements of the subspace

$$Z^k(\mathfrak{g},V) := \ker d|_{C^k(\mathfrak{g},V)}$$

as called *k-cocycles*, and the elements of the spaces

$$B^k(\mathfrak{g},V) := d\big(C^{k-1}(\mathfrak{g},V)\big) \quad \text{and} \quad B^0(\mathfrak{g},V) := \{0\}$$

are called *k-coboundaries*. We will see below that $d^2 = 0$, which implies that $B^k(\mathfrak{g},V) \subseteq Z^k(\mathfrak{g},V)$, so that it makes sense to define the k^{th} *cohomology space of $\mathfrak{g}$ with values in the module V* [1]:

$$H^k(\mathfrak{g},V) := Z^k(\mathfrak{g},V)/B^k(\mathfrak{g},V).$$

(b) We further define for each $x \in \mathfrak{g}$ the *insertion map*

$$i(x)\colon C^p(\mathfrak{g},V) \to C^{p-1}(\mathfrak{g},V), \qquad \big(i(x).\omega\big)(x_1,\ldots,x_{p-1}) = \omega(x,x_1,\ldots,x_{p-1}),$$

where we define $i(x)$ to be 0 on $C^0(\mathfrak{g},V)$. ■

[1] The origin of Lie algebra cohomology comes from the work of E. Cartan who reduced the determination of the rational cohomology of compact Lie groups to a purely algebraic problem which later led to the invention of Lie algebra cohomology.

Remark V.1.4. For elements of low degree we have in particular:

$$
\begin{aligned}
&p=0: \quad d\omega(x)=x.\omega \\
&p=1: \quad d\omega(x,y)=x.\omega(y)-y.\omega(x)-\omega([x,y]) \\
&p=2: \quad d\omega(x,y,z) \\
&\qquad =x.\omega(y,z)-y.\omega(x,z)+z.\omega(x,y)-\omega([x,y],z)+\omega([x,z],y)-\omega([y,z],x) \\
&\qquad =x.\omega(y,z)+y.\omega(z,x)+z.\omega(x,y)-\omega([x,y],z)-\omega([y,z],x)-\omega([z,x],y).
\end{aligned}
$$

This means that

$$Z^0(\mathfrak{g},V)=V^{\mathfrak{g}}:=\{v\in V\colon \mathfrak{g}.v=\{0\}\}$$

is the maximal trivial submodule of V. Since $B^0(\mathfrak{g},V)$ is trivial by definition, we obtain

$$H^0(\mathfrak{g},V)=V^{\mathfrak{g}}.$$

The elements $\alpha\in Z^1(\mathfrak{g},V)$ are called *crossed homomorphisms*. They are defined by the condition

$$\alpha([x,y])=x.\alpha(y)-y.\alpha(x), \quad x,y\in\mathfrak{g}.$$

The elements $\alpha(x).v:=x.v$ of the subspace $B^1(\mathfrak{g},V)$ are called *principal crossed homomorphisms*. It follows immediately from the definition of a $\mathfrak{g}$-module that each principal crossed homomorphism is a crossed homomorphism.

If V is a trivial module, then it is not hard to compute the cohomology spaces in degree one. In view of $d.C^0(\mathfrak{g},V)=B^1(\mathfrak{g},V)=\{0\}$, we have $H^1(\mathfrak{g},V)=Z^1(\mathfrak{g},V)$, and the condition that $\alpha\colon\mathfrak{g}\to V$ is a crossed homomorphism reduces to $\alpha([x,y])=\{0\}$ for $x,y\in\mathfrak{g}$. This leads to

$$H^1(\mathfrak{g},V)\cong \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}/[\mathfrak{g},\mathfrak{g}],V). \qquad \blacksquare$$

Our first goal will be to show that $d^2=0$. This can be proved directly by an arkward computation. We will follow another way which is more conceptual and leads to additional insights.

Lemma V.1.5. *We have a representation ρ of $\mathfrak{g}$ on $C(\mathfrak{g},V)$ given on the subspace $C^p(\mathfrak{g},V)$ by*

$$
\begin{aligned}
(\rho(x).\omega)(x_1,\ldots,x_p)&=x.\omega(x_1,\ldots,x_p)-\sum_{j=1}^p\omega(x_1,\ldots,[x,x_j],\ldots,x_p)\\
&=x.\omega(x_1,\ldots,x_p)+\sum_{j=1}^p(-1)^j\omega([x,x_j],x_1,\ldots,\widehat{x}_j,\ldots,x_p).
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

Lemma V.1.6. *The representation* $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}\big(C(\mathfrak{g}, V)\big)$ *satisfies the Cartan formula*

$$\rho(x) = d \circ i(x) + i(x) \circ d. \tag{1.1}$$

Proof. Using the evaluation map $i(x_0)$, we can rewrite the formula for the coboundary operator as

$$\begin{aligned}
&\big(i(x_0).d\omega\big)(x_1, \ldots, x_p)\\
=&x_0.\omega(x_1, \ldots, x_p) - \sum_{j=1}^p (-1)^{j-1} x_j.\omega(x_0, \ldots, \widehat{x}_j, \ldots, x_p)\\
&+ \sum_{j=1}^p (-1)^j \omega([x_0, x_j], x_1, \ldots, \widehat{x}_j, \ldots, x_p)\\
&+ \sum_{1 \leq i < j} (-1)^{i+j} \omega([x_i, x_j], x_0, \ldots, \widehat{x}_i, \ldots, \widehat{x}_j, \ldots, x_p)\\
=&x_0.\omega(x_1, \ldots, x_p) - \sum_{j=1}^p (-1)^{j-1} x_j.\omega(x_0, \ldots, \widehat{x}_j, \ldots, x_p)\\
&- \sum_{j=1}^p \omega(x_1, \ldots, x_{j-1}, [x_0, x_j], x_{j+1}, \ldots, x_p)\\
&- \sum_{1 \leq i < j} (-1)^{i+j} \omega(x_0, [x_i, x_j], \ldots, \widehat{x}_i, \ldots, \widehat{x}_j, \ldots, x_p)\\
=&(\rho(x_0).\omega)(x_1, \ldots, x_p) - d\big(i(x_0)\omega\big)(x_1, \ldots, x_p).
\end{aligned}$$

This proves our assertion. ■

Proposition V.1.7. *A* $\mathfrak{g}$*-invariant* k*-cochain* c *is closed if and only if for each* $x \in \mathfrak{g}$ *the* $(k-1)$*-cochain* $i(x).c$ *is closed.*

Proof. Since c is invariant, we have $i(x)dc = -d(i(x).c)$, and the assertion follows. ■

Lemma V.1.8. *For* $x, y \in \mathfrak{g}$ *we have* $i([x, y]) = [i(x), \rho(y)]$.

Proof. The explicit formula for $\rho(y)$ (Lemma V.1.5) further yields for $x = x_1$:

$$i(x)\rho(y) = \rho(y)i(x) - i([y, x]).$$ ■

Lemma V.1.9. *For each* $x \in \mathfrak{g}$ *we have* $[\rho(x), d] = 0$.

Proof. In view of Lemma V.1.8, we have

$$\begin{aligned}
[\rho(x), \rho(y)] &= [d \circ i(x), \rho(y)] + [i(x) \circ d, \rho(y)]\\
&= [d, \rho(y)] \circ i(x) + d \circ i([x, y]) + i([x, y]) \circ d + i(x) \circ [d, \rho(y)]\\
&= [d, \rho(y)] \circ i(x) + \rho([x, y]) + i(x) \circ [d, \rho(y)],
\end{aligned}$$

so that the fact that ρ is a representation leads to

$$[d,\rho(y)]\circ i(x)+i(x)\circ[d,\rho(y)]=0. \tag{1.2}$$

We now prove by induction over the degree that $[d,\rho(y)]=0$. For $\omega\in C^0(\mathfrak{g},V)\cong V$ we have

$$\begin{aligned}\big([d,\rho(y)].\omega\big)(x)&=d(y.\omega)(x)-\big(y.(d\omega)\big)(x)=x.(y.\omega)-\big(y.(x.\omega)-d\omega([y,x])\big)\\&=[x,y].\omega+[y,x].\omega=0.\end{aligned}$$

Suppose that $[d,\rho(y)].C^k(\mathfrak{g},V)=\{0\}$. Then (1.2) implies that

$$i(x)\circ[d,\rho(y)].C^{k+1}(\mathfrak{g},V)=-[d,\rho(y)]\circ i(x).C^{k+1}(\mathfrak{g},V)\subseteq[d,\rho(y)].C^k(\mathfrak{g},V)=\{0\}$$

for each $x\in\mathfrak{g}$. Hence $[d,\rho(y)].C^{k+1}(\mathfrak{g},V)=\{0\}$. By induction on k, this leads to $[d,\rho(y)]=0$ for each $y\in\mathfrak{g}$. ■

Proposition V.1.10. $d^2=0$.

Proof. We put Lemma V.1.9 into (1.1) and get

$$0=[d,\rho(x)]=d^2\circ i(x)-i(x)\circ d^2. \tag{1.3}$$

We use this formula to show inductively that $d^2=0$. For $\omega\in C^0(\mathfrak{g},V)\cong V$ we have $d\omega(x)=x.\omega$ and

$$d^2\omega(x,y)=x.d\omega(y)-y.d\omega(x)-d\omega([x,y])=x.(y.\omega)-y.(x.\omega)-[x,y].\omega=0.$$

If $d^2(C^k(\mathfrak{g},V))=\{0\}$, we use (1.3) to see that

$$i(x)\circ d^2(C^{k+1}(\mathfrak{g},V))=d^2\circ i(x).C^{k+1}(\mathfrak{g},V)\subseteq d^2(C^k(\mathfrak{g},V))=\{0\}$$

for all $x\in\mathfrak{g}$, and hence that $d^2(C^{k+1}(\mathfrak{g},V))=\{0\}$. By induction on k, this proves $d^2=0$. ■

Since the coboundary operator commutes with the action of $\mathfrak{g}$ on the graded vector space $C(\mathfrak{g},V)$ (Lemma V.1.9), we see that the space of k-cocycles and of k-coboundaries is $\mathfrak{g}$-invariant, so that we obtain a natural representation of $\mathfrak{g}$ on the quotient spaces $H^k(\mathfrak{g},V)$.

Lemma V.1.11. *The action of $\mathfrak{g}$ on $H^k(\mathfrak{g},V)$ is trivial, i.e., $\mathfrak{g}.Z^k(\mathfrak{g},V)\subseteq B^k(\mathfrak{g},V)$.*

Proof. In view of Lemma V.1.6, we have for $\omega\in Z^k(\mathfrak{g},V)$ the relation

$$\rho(x).\omega=i(x)d\omega+di(x)\omega=di(x)\omega\in B^k(\mathfrak{g},V).$$

Hence the $\mathfrak{g}$-action induced on the cohomology space $H^k(\mathfrak{g},V)$ is trivial. ■

Remark V.1.12. Let M be a smooth manifold and $\mathfrak{g} := \mathcal{V}(M)$ the Lie algebra of smooth vector fields on M. We consider the $\mathfrak{g}$-module $V := C^\infty(M,\mathbb{R})$ of smooth functions on M. Then we can identify the space $\Omega^p(M,\mathbb{R})$ of alternating $C^\infty(M,\mathbb{R})$-multilinear maps $\mathfrak{g}^p \to C^\infty(M,\mathbb{R})$ with a subspace of $C^p(\mathfrak{g},V)$. The elements of the space $\Omega^p(M,\mathbb{R})$ are called *smooth p-forms on M* or *exterior forms*. The restriction of d to these spaces is called the *exterior differential*. This space is invariant under the differential d and the $\mathfrak{g}$-action given by the *Lie derivative* $\mathcal{L}_X.\omega := \rho(X).\omega$. Together with the exterior differential the spaces now form the so called *de Rham complex*

$$\cdots \xrightarrow{d} \Omega^2(M,\mathbb{R}) \xrightarrow{d} \Omega^1(M,\mathbb{R}) \xrightarrow{d} \Omega^0(M,\mathbb{R}) = C^\infty(M,\mathbb{R}).$$

The cohomology of this subcomplex are the *de Rham cohomology groups* $H^p_{\rm dR}(M,\mathbb{R})$ of M. ■

The following lemma is a refinement of Lemma I.1.5 for the case of trivial modules.

Lemma V.1.13. *Let V be a trivial $\mathfrak{g}$-module and $k \in \mathbb{N}_0$. Then the representation π of $\operatorname{der}(\mathfrak{g})$ on $C(\mathfrak{g},V)$ given on $\alpha \in C^p(\mathfrak{g},V)$ by*

$$(D.\alpha)(x_1,\ldots,x_p) = -\sum_{j=1}^p \alpha(x_1,\ldots,D.x_j,\ldots,x_p)$$

commutes with the coboundary operator, hence preserves the spaces $Z^k(\mathfrak{g},V)$ and $B^k(\mathfrak{g},V)$, and induces a representation of $\operatorname{der}(\mathfrak{g})$ on $H^k(\mathfrak{g},V)$.

Proof. For $\omega \in C^{k+1}(\mathfrak{g},V)$, $D \in \operatorname{der}(\mathfrak{g})$ and $x, x_1, \ldots, x_k \in \mathfrak{g}$ we have

$$\begin{aligned} &D\big(i(x).\omega\big)(x_1,\ldots,x_k)\\ =&-\big(i(x).\omega\big)(D.x_1,x_2,\ldots,x_k) - \ldots - \big(i(x).\omega\big)(x_1,\ldots,x_{k-1},D.x_k)\\ =&-\omega(x,D.x_1,x_2,\ldots,x_k) - \ldots - \omega(x,x_1,\ldots,x_{k-1},D.x_k)\\ =&(\pi(D).\omega)(x,x_1,\ldots,x_k) + \omega(D.x,x_1,\ldots,x_k). \end{aligned}$$

This means that

$$[\pi(D), i(x)] = i(D.x)$$

holds for the representation π of $\operatorname{der}(\mathfrak{g})$ on $C(\mathfrak{g},V)$.

Moreover the relation $[D, \operatorname{ad} x] = \operatorname{ad}(D.x)$ on $\mathfrak{g}$ implies that $[\pi(D),\rho(x)] = \rho(D.x)$ holds for the representation ρ of $\mathfrak{g}$ on $C(\mathfrak{g},V)$. Now we use the Cartan formula $\rho(x) = i(x)\circ d + d\circ i(x)$ to see that

$$\begin{aligned} i(D.x)\circ d + d\circ i(D.x) = \rho(D.x) &= [\pi(D),\rho(x)] = [\pi(D), i(x)d + di(x)]\\ &= i(D.x)\circ d + i(x)[\pi(D),d] + [\pi(D),d]i(x) + d\circ i(D.x), \end{aligned}$$

showing that $i(x)[\pi(D),d] + [\pi(D),d]i(x) = 0$.

Now we prove by induction over k that $[D,d].C^k(\mathfrak{g},V) = \{0\}$. For $\omega \in V = C^0(\mathfrak{g},V)$ we have $[D,d].\omega = 0$ because $d\omega = 0$ and $D.\omega = 0$. If $[D,d].C^k(\mathfrak{g},V) = \{0\}$, then

$$i(x)[D,d].C^{k+1}(\mathfrak{g},V) = [D,d]i(x).C^{k+1}(\mathfrak{g},V) \subseteq [D,d].C^k(\mathfrak{g},V) = \{0\}.$$

This proves that $[D,d] = 0$, i.e., that D commutes with d.

We conclude that D preserves the subspaces $Z^k(\mathfrak{g},V)$ and $B^k(\mathfrak{g},V)$ of $C^k(\mathfrak{g},V)$, and hence that it acts on $H^k(\mathfrak{g},V)$. ∎

Example V.1.14. Let $\mathfrak{g}$ be a Lie algebra and $V := \mathfrak{g}$, considered as a trivial $\mathfrak{g}$-module. Then the Lie bracket

$$\beta\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, \quad \beta(x,y) := [x,y]$$

is a 2-cocycle. In fact, the two Lie algebra axioms mean that $\beta \in C^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ and $d\beta = 0$. ∎

V.2. Extensions and cocycles

In this section we interprete the cohomology spaces in low degrees in terms of extensions of modules and Lie algebras.

Definition V.2.1. (a) Each element $\omega \in Z^1(\mathfrak{g},V)$ defines a $\mathfrak{g}$-module

$$V_\omega := V \times \mathbb{K} \quad \text{with} \quad x.(v,t) = (x.v + t\omega(x), 0).$$

Then the inclusion $j\colon V \hookrightarrow V_\omega$ is a module homomorphism, and we thus obtain a short exact sequence

$$\mathbf{0} \to V \hookrightarrow V_\omega \twoheadrightarrow \mathbb{K} \to \mathbf{0}$$

of $\mathfrak{g}$-modules, where $\mathbb{K}$ is considered as a trivial $\mathfrak{g}$-module.
(b) In the following we write $\mathfrak{aff}(V) = V \rtimes \mathfrak{gl}(V)$ for the *affine Lie algebra of* V with the Lie bracket

$$[(v,X),(v',X')] = (X.v' - X'.v, [X,X']).$$

An *affine representation* of a Lie algebra $\mathfrak{g}$ on V is identified with a homomorphism $\pi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{aff}(V)$. We associate to each pair $(v,A) \in \mathfrak{aff}(V)$ the affine map $x \mapsto Ax + v$. The Lie algebra $\mathfrak{aff}(V)$ acts linearly on the space $V \times \mathbb{K}$ by $(v,A).(x,t) := (Ax + tv, 0)$. ∎

Proposition V.2.2. *Let (ρ, V) be a $\mathfrak{g}$-module. An element $\omega \in C^1(\mathfrak{g}, V)$ is in $Z^1(\mathfrak{g}, V)$ if and only if the map*

$$\rho_\omega\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{aff}(V) \cong V \rtimes \mathfrak{gl}(V), \quad x \mapsto \big(\omega(x), \rho(x)\big)$$

is a homomorphism of Lie algebras.

Let $e^{\mathrm{ad}\, V} := \mathbf{1} + \mathrm{ad}\, V \subseteq \mathrm{Aut}(\mathfrak{aff}(V))$ denote the group of automorphisms defined by the abelian ideal $V \trianglelefteq \mathfrak{aff}(V)$. Then the space $H^1(\mathfrak{g}, V)$ parametrizes the $e^{\mathrm{ad}\, V}$-conjugacy classes of affine representations of $\mathfrak{g}$ on V whose corresponding linear representation is ρ. The coboundaries correspond to those affine representations which are conjugate to a linear representation, i.e., which have a fixed point p in the sense that $\rho_\omega(x)(p) := \rho(x).p + \omega(x) = 0$ for all $x \in \mathfrak{g}$.

Proof. The first assertion is easily checked. For $v \in V$ we consider the automorphism of $\mathfrak{aff}(V)$ given by $\eta_v = e^{\mathrm{ad}\, v} := \mathbf{1} + \mathrm{ad}\, v$. Then $\eta_v(w, x) = (w - x.v, x)$, so that

$$\eta_v \circ \rho_\omega = \rho_{\omega - dv},$$

where $(dv)(x) = x.v$. Thus two affine representations ρ_ω and $\rho_{\omega'}$ are conjugate under some η_v if and only if the cohomology classes of ω and ω' coincide. In this sense $H^1(\mathfrak{g}, V)$ parametrizes the $e^{\mathrm{ad}\, V}$-conjugacy classes of affine representations of $\mathfrak{g}$ on V whose corresponding linear representation coincides with ρ and the coboundaries correspond to those affine representations which are conjugate to a linear representation. Moreover, it is clear that an affine representation ρ_ω is conjugate to a linear representation, if and only if there exists a *fixed point* $v \in V$, i.e., $\rho_\omega(x).v = 0$ holds for all $x \in \mathfrak{g}$. This condition means that $\omega = -dv$. ∎

Definition V.2.3. (a) Let $\mathfrak{g}$ and $\mathfrak{a}$ be Lie algebras. A short exact sequence

$$\mathfrak{a} \hookrightarrow \widehat{\mathfrak{g}} \twoheadrightarrow \mathfrak{g}$$

is called an *extension of* $\mathfrak{g}$ *by* $\mathfrak{a}$. If we identify $\mathfrak{a}$ with its image in $\widehat{\mathfrak{g}}$, this means that $\widehat{\mathfrak{g}}$ is a Lie algebra containing $\mathfrak{a}$ as an ideal such that $\widehat{\mathfrak{g}}/\mathfrak{a} \cong \mathfrak{g}$. If $\mathfrak{a}$ is abelian (central) in $\widehat{\mathfrak{g}}$, then the extension is called *abelian (central)*. Two extensions $\mathfrak{a} \hookrightarrow \widehat{\mathfrak{g}}_1 \twoheadrightarrow \mathfrak{g}$ and $\mathfrak{a} \hookrightarrow \widehat{\mathfrak{g}}_2 \twoheadrightarrow \mathfrak{g}$ are called *equivalent* if there exists a Lie algebra homomorphism $\varphi\colon \widehat{\mathfrak{g}}_1 \to \widehat{\mathfrak{g}}_2$ such that the diagram

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{a} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathfrak{a}}"] & \widehat{\mathfrak{g}}_1 \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\varphi"] & \mathfrak{g} \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathfrak{g}}"] \\
\mathfrak{a} \arrow[r, hook] & \widehat{\mathfrak{g}}_2 \arrow[r, two heads] & \mathfrak{g}
\end{tikzcd}$$

is commutative. It is easy to see that this implies that φ is an isomorphism of Lie algebras (Exercise).

(b) We call an extension $q\colon \widehat{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g}$ with $\ker q = \mathfrak{a}$ *trivial*, or say that the extension *splits* if there exists a Lie algebra homomorphism $\sigma\colon \mathfrak{g} \to \widehat{\mathfrak{g}}$ with $q \circ \sigma = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$. In this case the map

$$\mathfrak{a} \rtimes_\delta \mathfrak{g} \to \widehat{\mathfrak{g}}, \quad (a, x) \mapsto a + \sigma(x)$$

is an isomorphism, where the semidirect sum is defined by the homomorphism

$$\delta: \mathfrak{g} \to \mathrm{der}(\mathfrak{a}), \quad \delta(x).a := [\sigma(x), a].$$

For a trivial central extension we have $\delta = 0$ and therefore $\widehat{\mathfrak{g}} \cong \mathfrak{a} \times \mathfrak{g}$.
(c) A particular important case arises if $\mathfrak{a}$ is abelian. Then each Lie algebra extension $q: \widehat{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g}$ of $\mathfrak{g}$ by $\mathfrak{a}$ leads to a $\mathfrak{g}$-module structure on $\mathfrak{a}$ defined by $\rho(q(x)).a := [x, a]$, which is well defined because $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = \{0\}$. It is easy to see that equivalent extensions lead to the same module structure (Exercise). Therefore it makes sense to write $\mathrm{Ext}_\rho(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ for the set of equivalence classes of extensions of $\mathfrak{g}$ by $\mathfrak{a}$ corresponding the module structure given by the representation

$$\rho: \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{a}) = \mathrm{der}(\mathfrak{a}).$$

For a $\mathfrak{g}$-module V we also write $\mathrm{Ext}(\mathfrak{g}, V) := \mathrm{Ext}_{\rho_V}(\mathfrak{g}, V)$, where ρ_V is the representation of $\mathfrak{g}$ on V corresponding to the module structure. ■

Proposition V.2.4. *For an element $\omega \in C^2(\mathfrak{g}, V)$ the formula*

$$[(v, x), (v', x')] = (x.v' - x'.v + \omega(x, x'), [x, x'])$$

defines a Lie bracket on $V \times \mathfrak{g}$ if and only if $\omega \in Z^2(\mathfrak{g}, V)$. For a cocycle $\omega \in Z^2(\mathfrak{g}, V)$ we write $\mathfrak{g}_\omega := V \oplus_\omega \mathfrak{g}$ for the corresponding Lie algebra. Then we obtain for each cocycle ω an extension of $\mathfrak{g}$ by the abelian ideal V:

$$\mathbf{0} \to V \hookrightarrow \mathfrak{g}_\omega \twoheadrightarrow \mathfrak{g} \to \mathbf{0}.$$

This extension splits if and only if ω is a coboundary.

The map $Z^2(\mathfrak{g}, V) \to \mathrm{Ext}(\mathfrak{g}, V)$ defined by assigning to ω the equivalence class of the extension $\mathfrak{g}_\omega$ induces a bijection

$$H^2(\mathfrak{g}, V) \to \mathrm{Ext}(\mathfrak{g}, V).$$

Therefore $H^2(\mathfrak{g}, V)$ classifies the abelian extensions of $\mathfrak{g}$ by V for which the corresponding representation of $\mathfrak{g}$ on V is given by the module structure of V.

Proof. An easy calculation shows that $\mathfrak{g}_\omega = V \oplus_\omega \mathfrak{g}$ is a Lie algebra if and only if ω is a 2-cocycle, i.e., an element of $Z^2(\mathfrak{g}, V)$.

To see that every abelian Lie algebra extension $q: \widehat{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g}$ with $\ker q = V$ (as a $\mathfrak{g}$-module) is equivalent to some $\mathfrak{g}_\omega$, let $\sigma: \mathfrak{g} \to \widehat{\mathfrak{g}}$ be a linear map with $q \circ \sigma = \mathrm{id}_\mathfrak{g}$. Then the map

$$V \times \mathfrak{g} \to \widehat{\mathfrak{g}}, \quad (v, x) \mapsto v + \sigma(x)$$

is a bijection, and it becomes an isomorphism of Lie algebras if we endow $V \times \mathfrak{g}$ with the bracket of $\mathfrak{g}_\omega$ for

$$\omega(x, y) := [\sigma(x), \sigma(y)] - \sigma([x, y]).$$

This implies that $q\colon \widehat{\mathfrak g} \to \mathfrak g$ is equivalent to $\mathfrak g_\omega$, and therefore that the map $Z^2(\mathfrak g, V) \to \mathrm{Ext}(\mathfrak g, V)$ is surjective.

Two Lie algebras $\mathfrak g_\omega$ and $\mathfrak g_{\omega'}$ are equivalent as V-extensions of $\mathfrak g$ if and only if there exists a linear map $\varphi\colon \mathfrak g \to V$ such that the map

$$\widetilde{\varphi}\colon \mathfrak g_\omega = V \times \mathfrak g \to \mathfrak g_{\omega'} = V \times \mathfrak g, \quad (a,x) \mapsto (a + \varphi(x), x)$$

is a Lie algebra homomorphism. This means that

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}([(a,x),(a',x')]) &= \widetilde{\varphi}(x.a' - x'.a + \omega(x,x'), [x,x']) \\ &= \big(x.a' - x'.a + \omega(x,x') + \varphi([x,x']), [x,x']\big)\end{aligned}$$

equals

$$\begin{aligned}[\widetilde{\varphi}(a,x), \widetilde{\varphi}(a',x')] &= (x.(a' + \varphi(x')) - x'.(a + \varphi(x)) + \omega'(x,x'), [x,x']) \\ &= (x.a' - x'.a + x.\varphi(x') - x'.\varphi(x) + \omega'(x,x'), [x,x']),\end{aligned}$$

which is equivalent to

$$\omega'(x,x') - \omega(x,x') = \varphi([x,x']) - x.\varphi(x') + x'.\varphi(x) = -(d\varphi)(x,x').$$

Therefore $\mathfrak g_\omega$ and $\mathfrak g_{\omega'}$ are equivalent abelian extensions of $\mathfrak g$ if and only if $\omega' - \omega$ is a coboundary. Hence the map

$$Z^2(\mathfrak g, V) \to \mathrm{Ext}(\mathfrak g, V), \quad \omega \mapsto [\mathfrak g_\omega]$$

induces a bijection $H^2(\mathfrak g, V) \to \mathrm{Ext}(\mathfrak g, V)$. ∎

Exercise V.2.5. (a) A central extension $q\colon \widehat{\mathfrak g} \to \mathfrak g$ with kernel $\mathfrak z$ is trivial if and only if

$$\mathfrak z \cap [\widehat{\mathfrak g}, \widehat{\mathfrak g}] = \{0\}$$

(Exercise).
(b) For a vector space V the central extension

$$\mathbb K\mathbf 1 \hookrightarrow \mathfrak{gl}(V) \twoheadrightarrow \mathfrak{pgl}(V)$$

is trivial if and only if

$$\dim V < \infty \quad \text{and} \quad \mathrm{char}(\mathbb K) \not| \dim(V).$$

If this is not the case, then there exist endomorphisms $P, Q \in \mathrm{End}(V)$ with $[P,Q] = \mathbf 1$. Hint: If $\dim V = \infty$, then V contains a copy of the polynomial algebra $\mathbb K[X]$. Then consider the operators

$$P(f) = f' \quad \text{and} \quad Q(f) = Xf.$$

If $\mathrm{char}(\mathbb K)$ divides $n := \dim V < \infty$, then we think of V as $\mathbb K[X]/(X^n)$. Since $P(X^n) = nX^{n-1} = 0$, both operators P and Q preserve the ideal (X^n) and induce operators on $\mathbb K[X]/(X^n)$ with $[P,Q] = \mathbf 1$. ∎

Example V.2.6. Let $\mathfrak{g} := \mathbb{K}^2$ be the abelian two-dimensional Lie algebra with the canonical basis e_1, e_2. We are looking for a $\mathfrak{g}$-module V with $H^2(\mathfrak{g}, V) \neq \{0\}$. We have

$$C^1(\mathfrak{g}, V) = \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^2, V) \cong V^2 \quad \text{and} \quad C^2(\mathfrak{g}, V) \cong V,$$

where the isomorphism $C^2(\mathfrak{g}, V) \to V$ is given by $\beta \mapsto \beta(e_1, e_2)$. As $\dim \mathfrak{g} = 2$, we have $C^3(\mathfrak{g}, V) = \{0\}$, so that $C^2(\mathfrak{g}, V) = Z^2(\mathfrak{g}, V)$. For $(v, w) \in V^2 \cong C^1(\mathfrak{g}, V)$ we have

$$d(v, w)(e_1, e_2) = e_1.w - e_2.v.$$

If V is a trivial $\mathfrak{g}$-module, we therefore get $H^2(\mathfrak{g}, V) = Z^2(\mathfrak{g}, V) \cong V$. If V is non-trivial but $e_2.V = \{0\}$, then

$$B^2(\mathfrak{g}, V) = e_1.V \quad \text{and} \quad H^2(\mathfrak{g}, V) \cong V/e_1.V.$$

For $V = \mathbb{K}^2$ with

$$\rho_V(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \rho_V(e_2) = 0$$

we now obtain $H^2(\mathfrak{g}, V) \cong \mathbb{K} \neq \{0\}$. ■

Proposition V.2.7. *If $V = \mathfrak{g}$ with respect to the adjoint representation, then $Z^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \cong \mathrm{der}\,\mathfrak{g}$, $B^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \cong \mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ and*

$$H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \cong \mathrm{out}(\mathfrak{g}) := \mathrm{der}\,\mathfrak{g}/\,\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$$

is the space of outer derivations of $\mathfrak{g}$.

Proof. Let $V = \mathfrak{g}$ with respect to the adjoint representation. For $c \in C^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ we then have

$$dc(x, y) = [x, c(y)] - [y, c(x)] - c([x, y]),$$

showing that $Z^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = \mathrm{der}\,\mathfrak{g}$. For $c \in C^0(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \cong \mathfrak{g}$, we have $dc(x) = [x, c]$, showing that $B^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = \mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$. ■

Definition V.2.8. Let $\mathfrak{g}$ be a Lie algebra and V and W modules of $\mathfrak{g}$. A short exact sequence

$$W \hookrightarrow \widehat{V} \twoheadrightarrow V$$

of $\mathfrak{g}$-modules is called an *extension of V by W*. If we identify W with its image in $\widehat{V}$, this means that $\widehat{V}$ is a $\mathfrak{g}$-module containing W as a submodule such that $\widehat{V}/W \cong V$.

Two extensions $W \hookrightarrow \widehat{V}_1 \twoheadrightarrow V$ and $W \hookrightarrow \widehat{V}_2 \twoheadrightarrow V$ are called *equivalent* if there exists a module homomorphism $\varphi\colon \widehat{V}_1 \to \widehat{V}_2$ such that the diagram

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, hook] \arrow[d, "\mathrm{id}_W"] & \widehat{V}_1 \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\varphi"] & V \arrow[d, "\mathrm{id}_V"] \\ W \arrow[r, hook] & \widehat{V}_2 \arrow[r, two heads] & V \end{tikzcd}$$

is commutative. It is easy to see that this implies that φ is an isomorphism of Lie algebras (Exercise).

We call an extension $q\colon \widehat{V} \to V$ with $\ker q = W$ *trivial*, or say that the extension *splits* if there exists a module homomorphism $\sigma\colon V \to \widehat{V}$ with $q \circ \sigma = \mathrm{id}_V$. In this case the map

$$W \oplus V \to \widehat{V}, \quad (a, x) \mapsto a + \sigma(x)$$

is a module isomorphism.

We write $\mathrm{Ext}(V, W)$ for the set of equivalence classes of module extensions $\widehat{V}$ of V by W. ■

The following proposition gives a cohomological interpretation of the set $\mathrm{Ext}(B, A)$ for two $\mathfrak{g}$-modules B and A. In particular it shows that this set carries a natural vector space structure.

Proposition V.2.9. *For $\mathfrak{g}$-modules A and B we have*

$$\mathrm{Ext}(B, A) \cong H^1(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}(B, A)),$$

where the representation of $\mathfrak{g}$ on $\mathrm{Hom}(B, A)$ is given by $x.\varphi = \rho_A(x)\varphi - \varphi\rho_B(x)$.

Proof. It is clear that a module extension $q\colon C \twoheadrightarrow B$ by the module A can be written as a space $C = B \times A$ on which the $\mathfrak{g}$-module representation is given by

$$x.(b, a) = (x.b, x.a + \omega(x)(b)),$$

where $\omega \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}(B, A)) = C^1(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}(B, A))$. To see this, we only take a linear map $\sigma\colon B \to C$ with $q \circ \sigma = \mathrm{id}_B$ and define

$$\omega(x)(b) := x.\sigma(b) - \sigma(x.b).$$

Then the linear bijection

$$B \times A \to C, \quad (b, a) \mapsto \sigma(b) + a$$

is a module isomorphism with respect to the above module structure.

If $\omega \in C^1(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}(B, A))$ is given, then the condition that C is a $\mathfrak{g}$-module means that

$$\begin{aligned}
&\big([y, x].b, [y, x].a + \omega([y, x])(b)\big) \\
&= [y, x].(b, a) \overset{!}{=} y.(x.(b, a)) - x.(y.(b, a)) \\
&= (y.(x.b), y.(x.a) + y.\omega(x)(b) + \omega(y)(x.b)) \\
&\quad - (x.(y.b), x.(y.a) + x.\omega(y)(b) + \omega(x)(y.b)) \\
&= ([y, x].b, [y, x].a + y.\omega(x)(b) + \omega(y)(x.b) - x.\omega(y)(b) - \omega(x)(y.b)) \\
&= \big([y, x].b, [y, x].a + (y.\omega(x))(b) - (x.\omega(y))(b)\big)
\end{aligned}$$

This is equivalent to

$$\omega([y,x]) = y.\omega(x) - x.\omega(y),$$

which in turn means that $\omega \in Z^1(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}(B,A))$. The different parametrizations of C as $B \times A$ correspond to linear maps $\sigma: B \to C$ with $q \circ \sigma = \mathrm{id}_B$, where $q: C \to B$ is the quotient map. In this sense we have

$$\omega_\sigma(x)(b) = x.\sigma(b) - \sigma(x.b).$$

For a linear map $\gamma \in \mathrm{Hom}(B,A)$, we therefore have

$$\omega_{\sigma+\gamma}(x)(b) = \omega_\sigma(x)(b) + (x.\gamma)(b),$$

i.e., $\omega_{\sigma+\gamma} = \omega_\sigma + d\gamma$. We conclude that the different sections lead to cohomologous cocycles and this observation easily leads to a bijection $\mathrm{Ext}(B,A) \cong H^1\big(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}(B,A)\big)$. ■

V.3. Applications of Weyl's Theorem

In this section we assume that $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 0$. We will discuss the connection between Weyl's and Levi's Theorems and the Whitehead Lemmas. [1]

If $\mathfrak{s}$ is a semisimple finite-dimensional Lie algebra, then Weyl's Theorem states that every $\mathfrak{g}$-module V is semisimple. This means that every submodule has a module complement, and therefore that all module extensions are trivial. In view of Proposition V.2.9, it follows that

$$H^1(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}(A,B)) = \{0\}$$

for each pair of finite-dimensional $\mathfrak{g}$-modules A and B. For $A = \mathbb{K}$, the trivial module, we have $\mathrm{Hom}(A,B) \cong B$ as $\mathfrak{g}$-modules, and therefore we obtain $H^1(\mathfrak{g}, B) = \{0\}$. This argument proves the

$\boxed{\text{First Whitehead Lemma}}$

Lemma V.3.1. *If $\mathfrak{g}$ is a finite-dimensional semisimple Lie algebra over a field of characteristic 0, then for each finite-dimensional $\mathfrak{g}$-module V we have*

$$H^1(\mathfrak{g}, V) = \{0\}.$$ ■

From the above argument it is easy to see that the First Whitehead Lemma says essentially the same as Weyl's Theorem.

Now let $\omega \in Z^2(\mathfrak{g}, V)$ be a 2-cocycle and $\mathfrak{g}_\omega := V \oplus_\omega \mathfrak{g}$ the corresponding abelian Lie algebra extension of $\mathfrak{g}$ by V. Then $V = \mathrm{rad}(\mathfrak{g}_\omega)$ because V is an abelian ideal of $\mathfrak{g}_\omega$ and the quotient $\mathfrak{g}_\omega/V \cong \mathfrak{g}$ is semisimple. Therefore Levi's Theorem implies the existence of a Levi complement in $\widehat{\mathfrak{g}}_\omega$, which means that there exists a Lie algebra homomorphism $\sigma: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_\omega$ splitting the exact sequence $V \hookrightarrow \mathfrak{g}_\omega \twoheadrightarrow \mathfrak{g}$. Now Proposition V.2.4 implies that ω is a coboundary, which leads to the

[1] John Henry Constantine Whitehead (1904–1960), mathematician at Oxford. Whitehead was primarily a topologist.

Second Whitehead Lemma

Lemma V.3.2. *If $\mathfrak g$ is a finite-dimensional semisimple Lie algebra over a field of characteristic 0, then for each finite-dimensional $\mathfrak g$-module V we have*

$$H^2(\mathfrak g, V) = \{0\}.$$ ∎

Again we see from the argument above that the Second Whitehead Lemma is essentially the case of Levi's Theorem where $\alpha\colon \mathfrak g \to \mathfrak s$ is a surjective homomorphism onto a semisimple Lie algebra $\mathfrak s$ with abelian kernel.

V.4. Extensions of Lie algebras–the general case

In this section we will discuss a method to classify extensions of a Lie algebra $\mathfrak g$ by a Lie algebra $\mathfrak a$ in terms of Lie algebra cohomology. The main new point beyond the setting of Section V.2 is that we do no longer assume that $\mathfrak a$ is abelian. We recall from Definition V.2.3 the concept of an $\mathfrak a$-extension of $\mathfrak g$ and the natural equivalence relation on the class of such extensions. Each such extension defines a homomorphism $s\colon \mathfrak g \to \mathrm{out}(\mathfrak a)$, but not all such homomorphisms come from a Lie algebra extension. The obstruction of an s to arise this way lies in a cohomology class in $H^3(\mathfrak g, \mathfrak z(\mathfrak a))$. If this class vanishes, then all Lie algebra extensions of $\mathfrak g$ by $\mathfrak a$ corresponding to the same s are classified by the space $H^2(\mathfrak g, \mathfrak z(\mathfrak a))$.

To get an idea of the difficulties involved, let us consider an $\mathfrak a$-extension $q\colon \widehat{\mathfrak g} \to \mathfrak g$ of $\mathfrak g$. We choose a linear section $\sigma\colon \mathfrak g \to \widehat{\mathfrak g}$ of q. Then the linear map

$$\Phi\colon \mathfrak a \times \mathfrak g \to \widehat{\mathfrak g}, \quad (a,x) \mapsto a + \sigma(x)$$

is a bijection. To express the Lie bracket in terms of these product "coordinates" on $\widehat{\mathfrak g}$, we define

$$S(x) := \mathrm{ad}_{\mathfrak a}(\sigma(x)) := \mathrm{ad}\,\sigma(x)\,|_{\mathfrak a}$$

and

$$\omega(x,y) := [\sigma(x), \sigma(y)] - \sigma([x,y]).$$

Then Φ is an isomorphism of Lie algebras if we endow $\mathfrak a \times \mathfrak g$ with the Lie bracket

$$[(a,x),(a',x')] := ([a,a'] + S(x).a' - S(x').a + \omega(x,x'), [x,x']). \tag{4.1}$$

In the following we write $\mathfrak g_{(S,\omega)}$ for the space $\mathfrak a \times \mathfrak g$ endowed with the Lie bracket (4.1).

The main point in this section consists in answers to the following questions:

(1) For which pairs (S,ω) does (4.1) define a Lie bracket?

(2) When are the corresponding $\mathfrak a$-extensions of $\mathfrak g$ equivalent?

The first question can be answered right away by checking the Jacobi identity. In the following we will use the convenient notation

$$\sum_{\text{cycl.}} \gamma(x,y,z) := \gamma(x,y,z) + \gamma(y,z,x) + \gamma(z,x,y).$$

In this sense the Jacobi identity reads $\sum_{\text{cycl.}}[[x,y],z] = 0$.

Lemma V.4.1. *Formula* (4.1) *defines a Lie bracket on* $\mathfrak{a} \times \mathfrak{g}$ *if and only if*
(1) $\omega(x,x) = 0$ *for* $x \in \mathfrak{g}$.
(2) $S(\mathfrak{g}) \subseteq \operatorname{der} \mathfrak{a}$.
(3) $\operatorname{ad} \omega(x,y) = [S(x), S(y)] - S([x,y])$ *for* $x, y \in \mathfrak{g}$.
(4) $\sum_{\text{cycl.}} S(x).\omega(y,z) - \omega([x,y],z) = 0$.

Proof. It is obvious that the condition $[(a,x),(a,x)] = 0$ is equivalent to (1). From (4.1) we obtain in particular that $\mathfrak{a}$ is an ideal in $\mathfrak{g}_{(S,\omega)}$ and that for each $x \in \mathfrak{g}$ we have $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(0,x) = \operatorname{ad}(0,x)\,|_{\mathfrak{a}} = S(x)$. Therefore (2) is a necessary condition for (4.1) to define a Lie bracket. From now on we therefore assume that (1) and (2) are satisfied.

For $x, x', x'' \in \mathfrak{g}$ and $a, a', a'' \in \mathfrak{a}$ we then have

$$\begin{aligned}
&\big[[(a,x),(a',x')],(a'',x'')\big] \\
&= \big[([a,a'] + S(x).a' - S(x').a + \omega(x,x'), [x,x']), (a'',x'')\big] \\
&= \big([[a,a'],a''] + [S(x).a' - S(x').a + \omega(x,x'), a''] \\
&\quad + S([x,x']).a'' - S(x'').[a,a'] - S(x'')S(x).a' + S(x'')S(x').a \\
&\quad - S(x'').\omega(x,x') + \omega([x,x'],x''), [[x,x'],x'']\big) \\
&= \big([[a,a'],a''] + [S(x).a',a''] - [S(x').a,a''] + [\omega(x,x'),a''] - S(x'').[a,a'] \\
&\quad + S([x,x']).a'' - S(x'')S(x).a' + S(x'')S(x').a \\
&\quad - S(x'').\omega(x,x') + \omega([x,x'],x''), [[x,x'],x'']\big).
\end{aligned}$$

In view of

$$\sum_{\text{cycl.}} [[x,x'],x''] = \sum_{\text{cycl.}} [[a,a'],a''] = 0,$$

the bracket (4.1) satisfies the Jacobi identity if and only if

$$\begin{aligned}
&\sum_{\text{cycl.}} [S(x).a',a''] - [S(x').a,a''] + [\omega(x,x'),a''] - S(x'').[a,a'] + S([x,x']).a'' \\
&= -S(x'')S(x).a' + S(x'')S(x').a - S(x'').\omega(x,x') + \omega([x,x'],x'') = 0.
\end{aligned}$$

In view of (2), we have

$$\begin{aligned}
&\sum_{\text{cycl.}} -S(x'').[a,a'] + [S(x).a',a''] - [S(x').a,a''] \\
&= \sum_{\text{cycl.}} -[S(x'').a,a'] - [a,S(x'').a'] + [S(x).a',a''] - [S(x').a,a''] \\
&= \sum_{\text{cycl.}} -[S(x).a',a''] - [a'',S(x').a] + [S(x).a',a''] - [S(x').a,a''] = 0.
\end{aligned}$$

This reduces the big sum from above to

$$\begin{aligned}
&\sum_{\text{cycl.}} [\omega(x,x'),a''] + S([x,x']).a'' - S(x'')S(x).a' + S(x'')S(x').a \\
&\qquad - S(x'').\omega(x,x') + \omega([x,x'],x'').
\end{aligned}$$

For $a = a' = a'' = 0$ this leads to the condition

$$\sum_{\text{cycl.}} S(x'').\omega(x,x') - \omega([x,x'],x'') = 0,$$

which is (4). The remaining part of the big sum is

$$\begin{aligned}
&\sum_{\text{cycl.}} [\omega(x,x'),a''] + S([x,x']).a'' - S(x'')S(x).a' + S(x'')S(x').a \\
=& \sum_{\text{cycl.}} [\omega(x,x'),a''] + S([x,x']).a'' - S(x)S(x').a'' + S(x')S(x).a'' \\
=& \sum_{\text{cycl.}} [\omega(x,x'),a''] + \big(S([x,x']) - [S(x),S(x')]\big).a''.
\end{aligned}$$

For $a = a' = 0$ the vanishing of this expression is equivalent to (3).

Reversing the arguments, we also see that (1)–(4) imply that (4.1) defines a Lie bracket on $\mathfrak{a} \times \mathfrak{g}$. ∎

If $q\colon \widehat{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g}$ is an $\mathfrak{a}$-extension of $\mathfrak{g}$ and σ as above, then we obtain derivations on $\mathfrak{a}$ by $S(x) := \mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}\,\sigma(x)$. These derivations depend on the choice of the section σ if $\mathfrak{a}$ is not abelian. But if $\sigma'\colon \mathfrak{g} \to \widehat{\mathfrak{g}}$ is another section of q, then $(\sigma' - \sigma)(\mathfrak{g}) \subseteq \ker q = \mathfrak{a}$, so that $S'(x) - S(x) \in \mathrm{ad}\,\mathfrak{a}$. Hence the map

$$s\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{out}(\mathfrak{a}) := \mathrm{der}(\mathfrak{a})/\,\mathrm{ad}\,\mathfrak{a}, \quad q(x) \mapsto \langle \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x\rangle$$

is well defined and independent of the section σ, where $\langle D\rangle := D + \mathrm{ad}\,\mathfrak{a}$ denotes the class of a derivation $D \in \mathrm{der}\,\mathfrak{a}$ in $\mathrm{out}(\mathfrak{a})$. Further

$$s([q(x),q(y)]) = s(q([x,y])) = \langle \mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}([x,y])\rangle = \langle [\mathrm{ad}_a x, \mathrm{ad}_{\mathfrak{a}} y]\rangle = [s(q(x)), s(q(y))]$$

implies that s is a homomorphism of Lie algebras.

Definition V.4.2. If $\mathfrak{g}$ and $\mathfrak{a}$ are Lie algebras and $s\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{out}(\mathfrak{a})$ is a Lie algebra homomorphism, then the pair $(\mathfrak{a}, s)$ is called a *factor system.*

All inner derivations of $\mathfrak{a}$ act trivially on the center $\mathfrak{z}(\mathfrak{a})$ of $\mathfrak{a}$. Therefore $\mathfrak{z}(\mathfrak{a})$ carries a natural $\mathrm{out}(\mathfrak{a})$-module structure given by $\langle D\rangle.z := D.z$ for $D \in \mathrm{der}\,\mathfrak{a}$ and $z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$. Hence every factor sytem $(\mathfrak{a}, s)$ yields on $\mathfrak{z}(\mathfrak{a})$ the structure of a $\mathfrak{g}$-module via

$$s_0\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{der}(\mathfrak{z}(\mathfrak{a})) = \mathfrak{gl}(\mathfrak{z}(\mathfrak{a})), \quad s_0(x)(z) := s(x).z.$$ ∎

We want to know which factor system actually leads to a Lie algebra extension of $\mathfrak{g}$ by $\mathfrak{a}$. Lemma V.4.1 gives us a condition in terms of S and ω, objects we had first constructed from the Lie algebra extension. Now we will see how (S,ω) can also be attached directly to s. Let $\pi\colon \mathrm{der}\,\mathfrak{a} \to \mathrm{out}(\mathfrak{a})$ be the quotient map. Then there exists a linear map $S\colon \mathfrak{g} \to \operatorname{der} \mathfrak{a}$ with $\pi \circ S = s$ (Exercise). Since s is a Lie algebra homomorphism, we have

$$\delta_S([x,y]) := [S(x), S(y)] - S([x,y]) \in \ker \pi = \operatorname{ad} \mathfrak{a}, \quad x, y \in \mathfrak{g}.$$

Using a linear section $\sigma_{\mathfrak{a}}\colon \operatorname{ad} \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$ of the adjoint representation of $\mathfrak{a}$, we obtain with $\omega := \sigma_{\mathfrak{a}} \circ \delta_S$ an alternating bilinear map $\omega\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{a}$ with $\operatorname{ad} \circ \omega = \delta_S$. This means that the pair (S, ω) satisfies the conditions (1)–(3) in Lemma V.4.1. The interesting question is whether there exists a choice of (S, ω) for a given s such that also (4) is satisfied. The expression which should vanish is

$$\omega_0(x, x', x'') := \sum_{\text{cycl.}} S(x).\omega(x', x'') - \omega([x, x'], x'').$$

Lemma V.4.3. *$\omega_0(x, x', x'') \in \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$ for $x, x', x'' \in \mathfrak{g}$.*

Proof. First we observe that the Jacobi identities in $\mathfrak{g}$ and $\operatorname{der} \mathfrak{a}$ imply

$$\sum_{\text{cycl.}} [S(x), [S(x'), S(x'')]] = 0 = \sum_{\text{cycl.}} S([[x, x'], x'']).$$

Therefore we have

$$\begin{aligned}
&\operatorname{ad} \omega_0(x, x', x'') \\
&= \sum_{\text{cycl.}} \operatorname{ad} \big(S(x).\omega(x', x'')\big) - \operatorname{ad} \omega([x, x'], x'') \\
&= \sum_{\text{cycl.}} [S(x), \operatorname{ad} \omega(x', x'')] - [S([x, x']), S(x'')] + S([[x, x'], x'']) \\
&= \sum_{\text{cycl.}} [S(x), [S(x'), S(x'')]] - [S(x), S([x', x''])] - [S([x, x']), S(x'')] \\
&\quad + S([[x, x'], x'']) \\
&= \sum_{\text{cycl.}} [S([x', x'']), S(x)] - [S([x, x']), S(x'')] \\
&= \sum_{\text{cycl.}} [S([x', x'']), S(x)] - [S([x', x'']), S(x)] = 0.
\end{aligned}$$

Now the assertion follows from $\ker \operatorname{ad} = \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$. ∎

From

$$\begin{aligned}
\omega_0(x, x', x'') &= \sum_{\text{cycl.}} S(x).\omega(x', x'') - \omega([x, x'], x'') \\
&= \sum_{\text{cycl.}} S(x'').\omega(x, x') - \omega([x, x'], x'')
\end{aligned}$$

we see that ω_0 is alternating in x, x'. Further it is invariant under cyclic permutations of the arguments. As the symmetric group S_3 is generated by a cyclic permutation and each transposition, that ω_0 is alternating, hence an element of the cochain space $C^3(\mathfrak{g}, \mathfrak{z}(\mathfrak{a}))$ for the Lie algebra cohomology with values in the $\mathfrak{g}$-module $\mathfrak{z}(\mathfrak{a})$.

That (S, ω) satisfies (4) in Lemma V.4.1 is equivalent to $\omega_0 = 0$. To understand when a factor system $(\mathfrak{a}, s)$ admits such a choice of (S, ω), we have to understand how ω_0 is altered if we change S and ω. The outcome will be that ω_0 is a Lie algebra cocycle, i.e., that $d\omega_0 = 0$, and that the vanishing of the cohomology class $[\omega_0] \in H^3(\mathfrak{g}, \mathfrak{z}(\mathfrak{a}))$ is equivalent to the existence of a choice (S', ω') (even with $S = S'$) with $\omega_0' = 0$. The proof of the cocycle property is somewhat complicated if one tries to do it directly. The next subsection provides some more conceptual means to calculate $d\omega_0$.

A generalization of Lie algebra cohomology

For the definition of Lie algebra cohomology with values in a module V of a Lie algebra $\mathfrak{g}$, one usually starts with a module structure on V, which is given by a Lie algebra homomorphism $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$. In this subsection we discuss a more general context in the sense where we consider a linear map

$$S: \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V),$$

but we do *not* require S to be a Lie algebra homomorphism. Nevertheless, we write $x.v := S(x).v$ for $x \in \mathfrak{g}$, $v \in V$.

Definition V.4.4. Let $S: \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ be a linear map. We define $C^p(\mathfrak{g}, V)$ and $C(\mathfrak{g}, V)$ as in Section V.1. On $C^p(\mathfrak{g}, V)$ we define the *coboundary operator* d_S by

$$\begin{aligned} d_S\alpha(x_0, \ldots, x_p) := &\sum_{j=0}^{p} (-1)^j S(x_j).\alpha(x_0, \ldots, \widehat{x}_j, \ldots, x_p) \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \alpha([x_i, x_j], x_0, \ldots, \widehat{x}_i, \ldots, \widehat{x}_j, \ldots, x_p). \end{aligned}$$

The right hand side defines in fact for each $\alpha \in C^p(\mathfrak{g}, V)$ an element of $C^{p+1}(\mathfrak{g}, V)$. Putting the coboundary operators on all the spaces $C^p(\mathfrak{g}, V)$ together, we obtain a linear map $d_S: C(\mathfrak{g}, V) \to C(\mathfrak{g}, V)$. ■

It is clear that S has no special properties, so that we cannot expect d_S^2 to vanish. Nevertheless, the techniques used in Section V.1 to shows that d^2 vanishes can be modified to obtain some information on d_S^2 which at least permit us to calculate it quite efficiently.

Since S does not define a representation of $\mathfrak{g}$ on V, we cannot expect

$$(\widetilde{S}(x).\alpha)(x_1, \ldots, x_p) = x.\alpha(x_1, \ldots, x_p) - \sum_{j=1}^{p} \alpha(x_1, \ldots, [x, x_j], \ldots, x_p)$$

to define a representation of $\mathfrak{g}$ on $C(\mathfrak{g}, V)$. The following lemma describes the defect of $\widetilde{S}$ to be a representation.

Lemma V.4.5. *Let*

$$\delta_S(x,y) := [S(x), S(y)] - S([x,y]) \quad \text{and} \quad \delta_{\widetilde{S}}(x,y) := [\widetilde{S}(x), \widetilde{S}(y)] - \widetilde{S}([x,y]).$$

Then

$$\delta_{\widetilde{S}}(x,y).\alpha = \delta_S(x,y) \circ \alpha, \quad \alpha \in C^p(\mathfrak{g}, V).$$

Proof. This is an easy calculation. ■

Lemma V.4.6. *We have the Cartan formula*

$$\widetilde{S}(x) = d_S \circ i(x) + i(x) \circ d_S.$$

Proof. The proof of Lemma V.1.6 does not require that V is a $\mathfrak{g}$-module, it also works in the present context. ■

As in Lemma V.1.8, we see that

Lemma V.4.7. *For $x, y \in \mathfrak{g}$ we have $i([x,y]) = [i(x), \widetilde{S}(y)]$.* ■

Proposition V.4.8. *For $x, y \in \mathfrak{g}$ we have*

$$i(y)i(x)d_S^2 = d_S^2 i(x)i(y) - i(x)d_S^2 i(y) + i(y)d_S^2 i(x) + \delta_{\widetilde{S}}(x,y). \tag{4.2}$$

Proof. First we observe that

$$\begin{aligned}
[d_S^2, i(x)] &= d_S^2 i(x) - i(x)d_S^2 = d_S^2 i(x) + d_S i(x) d_S - d_S i(x) d_S - i(x) d_S^2 \\
&= d_S \widetilde{S}(x) - \widetilde{S}(x) d_S = [d_S, \widetilde{S}(x)].
\end{aligned}$$

In view of Lemmas V.4.6 and V.4.7, we further have

$$\begin{aligned}
[\widetilde{S}(x), \widetilde{S}(y)] &= [d_S \circ i(x), \widetilde{S}(y)] + [i(x) \circ d_S, \widetilde{S}(y)] \\
&= [d_S, \widetilde{S}(y)] \circ i(x) + d_S \circ i([x,y]) + i([x,y]) \circ d_S + i(x) \circ [d_S, \widetilde{S}(y)] \\
&= [d_S, \widetilde{S}(y)] \circ i(x) + \widetilde{S}([x,y]) + i(x) \circ [d_S, \widetilde{S}(y)],
\end{aligned}$$

so that

$$[d_S, \widetilde{S}(y)] \circ i(x) + i(x) \circ [d_S, \widetilde{S}(y)] = \delta_{\widetilde{S}}(y,x).$$

Next we write the left hand side of (4.2) as

$$\begin{aligned}
& d_S^2 i(x)i(y) - i(x)d_S^2 i(y) + i(y)d_S^2 i(x) - i(y)i(x)d_S^2 \\
&= [d_S^2, i(x)]i(y) + i(y)[d_S^2, i(x)] \\
&= [d_S, \widetilde{S}(x)]i(y) + i(y)[d_S, \widetilde{S}(x)] = \delta_{\widetilde{S}}(y,x).
\end{aligned}$$

■

With the help of the preceding proposition, we can evaluate d_S^2 on cochains of low degree:

For $v \in V = C^0(\mathfrak{g}, V)$ we have

$$d_S(v)(x) = S(x).v$$

and therefore

$$d_S^2(v)(x,y) = S(x)(S(y).v) - S(y)(S(x).v) - S([x,y]).v = \delta_S(x,y).v.$$

For $\alpha \in C^1(\mathfrak{g}, V) = \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, V)$ we use $C^1(\mathfrak{g}, V) \subseteq \ker\big(i(x)i(y)\big)$ to obtain

$$\begin{aligned}
&(d_S^2\alpha)(x_0,x_1,x_2)\\
&= (i(x_1)i(x_0)d_S^2\alpha)(x_2)\\
&= (\delta_{\widetilde{S}}(x_0,x_1).\alpha)(x_2) + (i(x_1)d_S^2 i(x_0)\alpha)(x_2) - (i(x_0)d_S^2 i(x_1)\alpha)(x_2)\\
&= \delta_S(x_0,x_1).\alpha(x_2) + \delta_S(x_1,x_2).\alpha(x_0) - \delta_S(x_0,x_2).\alpha(x_1)\\
&= \delta_S(x_0,x_1).\alpha(x_2) + \delta_S(x_1,x_2).\alpha(x_0) + \delta_S(x_2,x_0).\alpha(x_1)\\
&= \sum_{\text{cycl.}} \delta_S(x_0,x_1).\alpha(x_2).
\end{aligned}$$

For $\alpha \in C^2(\mathfrak{g}, V)$ we eventually get

$$\begin{aligned}
&(d_S^2\alpha)(x_0,x_1,x_2,x_3)\\
&= (i(x_1)i(x_0)d_S^2\alpha)(x_2,x_3)\\
&= (\delta_{\widetilde{S}}(x_0,x_1).\alpha)(x_2,x_3) + (i(x_1)d_S^2 i(x_0)\alpha)(x_2,x_3)\\
&\quad - (i(x_0)d_S^2 i(x_1)\alpha)(x_2,x_3) + d_S^2(i(x_0)i(x_1)\alpha)(x_2,x_3)\\
&= \delta_S(x_0,x_1).\alpha(x_2,x_3) + d_S^2(i(x_0)\alpha)(x_1,x_2,x_3)\\
&\quad - (d_S^2 i(x_1)\alpha)(x_0,x_2,x_3) + \delta_S(x_2,x_3).\alpha(x_1,x_0)\\
&= \delta_S(x_0,x_1).\alpha(x_2,x_3)\\
&\quad + \delta_S(x_1,x_2).\alpha(x_0,x_3) + \delta_S(x_2,x_3).\alpha(x_0,x_1) + \delta_S(x_3,x_1).\alpha(x_0,x_2)\\
&\quad - \delta_S(x_0,x_2).\alpha(x_1,x_3) - \delta_S(x_2,x_3).\alpha(x_1,x_0) - \delta_S(x_3,x_0).\alpha(x_1,x_2)\\
&\quad + \delta_S(x_2,x_3).\alpha(x_1,x_0)\\
&= \delta_S(x_0,x_1).\alpha(x_2,x_3)\\
&\quad + \delta_S(x_1,x_2).\alpha(x_0,x_3) + \delta_S(x_2,x_3).\alpha(x_0,x_1) + \delta_S(x_3,x_1).\alpha(x_0,x_2)\\
&\quad - \delta_S(x_0,x_2).\alpha(x_1,x_3) - \delta_S(x_3,x_0).\alpha(x_1,x_2)\\
&= \delta_S(x_0,x_1).\alpha(x_2,x_3) - \delta_S(x_1,x_2).\alpha(x_3,x_0) + \delta_S(x_2,x_3).\alpha(x_0,x_1)\\
&- \delta_S(x_3,x_0).\alpha(x_1,x_2) + \delta_S(x_3,x_1).\alpha(x_0,x_2) - \delta_S(x_0,x_2).\alpha(x_1,x_3).
\end{aligned}$$

More on general Lie algebra extensions

After the excursion to generalized Lie algebra cohomology, we return to our original problem to analyze the cochain $\omega_0 \in C^3(\mathfrak{g}, \mathfrak{z}(\mathfrak{a}))$.

Lemma V.4.9. $\omega_0 \in Z^3(\mathfrak{g}, \mathfrak{z}(\mathfrak{a}))$.

Proof. With the map $S: \mathfrak{g} \to \operatorname{der}(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{gl}(\mathfrak{a})$ we obtain an operator d_S on the space $C(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ of $\mathfrak{a}$-valued cochains. In this sense the formula

$$\omega_0(x, x', x'') = \sum_{\text{cycl.}} S(x).\omega(x', x'') - \omega([x, x'], x'')$$

means that $\omega_0 = d_S\omega$. Moreover, the definition of ω implies that $\delta_S(x, y) = \operatorname{ad}\omega(x, y)$.

Since the $\mathfrak{g}$-module structure on $\mathfrak{z}(\mathfrak{a})$ can also be written as $x.z = S(x).z$, it follows that on $\mathfrak{z}(\mathfrak{a})$-valued cochains the Lie algebra differential d coincides with the operator d_S. This leads to

$$d\omega_0 = d_S^2\omega.$$

With the formula from the preceding subsection, we evaluate this to

$$\begin{aligned}
&d_S^2\omega(x_0, x_1, x_2, x_3) \\
&= \delta_S(x_0, x_1).\omega(x_2, x_3) - \delta_S(x_1, x_2).\omega(x_3, x_0) + \delta_S(x_2, x_3).\omega(x_0, x_1) \\
&- \delta_S(x_3, x_0).\omega(x_1, x_2) + \delta_S(x_3, x_1).\omega(x_0, x_2) + \delta_S(x_0, x_2).\omega(x_1, x_3) \\
&= [\omega(x_0, x_1), \omega(x_2, x_3)] - [\omega(x_1, x_2), \omega(x_3, x_0)] + [\omega(x_2, x_3), \omega(x_0, x_1)] \\
&- [\omega(x_3, x_0), \omega(x_1, x_2)] + [\omega(x_3, x_1), \omega(x_0, x_2)] - [\omega(x_0, x_2), \omega(x_1, x_3)] = 0.
\end{aligned}$$

∎

The preceding lemma implies in particular that ω_0 defines a Lie algebra cohomology class in $H^3(\mathfrak{g}, \mathfrak{z}(\mathfrak{a}))$. The cocycle ω_0 clearly depends on the choice of (S, ω), but we will see now that its cohomology class is independent of these choices.

Proposition V.4.10. $[\omega_0] \in H^3(\mathfrak{g}, \mathfrak{z}(\mathfrak{a}))$ *does not depend on the choice of* (S, ω) *for the factor system* $(\mathfrak{a}, s)$.

Proof. First we consider another pair (S, ω') associated to $(\mathfrak{a}, s)$. Then

$$\delta_S = \operatorname{ad} \circ \omega = \operatorname{ad} \circ \omega'$$

implies that $\eta := \omega' - \omega \in C^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{z}(\mathfrak{a}))$. Therefore

$$\omega_0' - \omega_0 = d_S(\omega' - \omega) = d_S\eta = d\eta$$

is a coboundary, which leads to $[\omega_0] = [\omega_0']$. This proves that, for S fixed, $[\omega_0]$ does not depend on the choice of ω.

Now let $S' \colon \mathfrak{g} \to \operatorname{der} \mathfrak{a}$ be another linear map with $\pi \circ S' = s$. Then there exists a linear map $\gamma \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{a}$ with $S' - S = \operatorname{ad} \circ \gamma$. Then

$$\begin{aligned}
&[S'(x), S'(y)] - S'([x,y]) \\
&= [S(x), S(y)] - S([x,y]) \\
&\quad + [\operatorname{ad}\gamma(x), S(y)] - [\operatorname{ad}\gamma(y), S(x)] + [\operatorname{ad}\gamma(x), \operatorname{ad}\gamma(y)] - \operatorname{ad}\gamma([x,y]) \\
&= \operatorname{ad}\omega(x,y) + \operatorname{ad}\big(S(x).\gamma(y) - S(y).\gamma(x) + [\gamma(x),\gamma(y)] - \gamma([x,y])\big).
\end{aligned}$$

We define

$$\omega'(x,y) := \omega(x,y) + S(x).\gamma(y) - S(y).\gamma(x) + [\gamma(x),\gamma(y)] - \gamma([x,y])$$

and get an alternating map $\omega' \in C^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ with $\operatorname{ad} \circ \omega' = \delta_{S'}$.

Now we turn to ω_0':

$$\begin{aligned}
&\omega_0'(x_0, x_1, x_2) \\
&= \sum_{\text{cycl.}} S'(x_0).\omega'(x_1,x_2) - \omega'([x_0,x_1],x_2) \\
&= \omega_0(x_0,x_1,x_2) \\
&\quad + \sum_{\text{cycl.}} S'(x_0).\big(S(x_1).\gamma(x_2) - S(x_2).\gamma(x_1) + [\gamma(x_1),\gamma(x_2)] - \gamma([x_1,x_2])\big) \\
&\qquad\qquad + [\gamma(x_0), \omega(x_1,x_2)] - (\omega' - \omega)([x_0,x_1],x_2).
\end{aligned}$$

We thereore have to show that the following expression defines a coboundary. In the calculation we will use that

$$\sum_{\text{cycl.}} [\gamma(x_0), [\gamma(x_1), \gamma(x_2)]] = \sum_{\text{cycl.}} \gamma([x_0, [x_1, x_2]]) = 0.$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{\text{cycl.}} S(x_0).\big(S(x_1).\gamma(x_2) - S(x_2).\gamma(x_1) + [\gamma(x_1), \gamma(x_2)] - \gamma([x_1, x_2])\big) \\
&\quad + \big[\gamma(x_0), S(x_1).\gamma(x_2) - S(x_2).\gamma(x_1) + [\gamma(x_1), \gamma(x_2)] - \gamma([x_1, x_2])\big] \\
&\quad + [\gamma(x_0), \omega(x_1, x_2)] \\
&\quad - S([x_0, x_1]).\gamma(x_2) + S(x_2).\gamma([x_0, x_1]) - [\gamma([x_0, x_1]), \gamma(x_2)] + \gamma([[x_0, x_1], x_2]) \\
= &\sum_{\text{cycl.}} S(x_0)S(x_1).\gamma(x_2) - S(x_0)S(x_2).\gamma(x_1) + S(x_0).[\gamma(x_1), \gamma(x_2)] \\
&\quad - S(x_0).\gamma([x_1, x_2]) \\
&\quad + \big[\gamma(x_0), S(x_1).\gamma(x_2) - S(x_2).\gamma(x_1) - \gamma([x_1, x_2])\big] + [\gamma(x_0), \omega(x_1, x_2)] \\
&\quad - S([x_0, x_1]).\gamma(x_2) + S(x_2).\gamma([x_0, x_1]) - [\gamma([x_0, x_1]), \gamma(x_2)] \\
= &\sum_{\text{cycl.}} S(x_0)S(x_1).\gamma(x_2) - S(x_1)S(x_0).\gamma(x_2) - S([x_0, x_1]).\gamma(x_2) \\
&\quad + [\gamma(x_0), \omega(x_1, x_2)] \\
&\quad + S(x_0).[\gamma(x_1), \gamma(x_2)] - S(x_0).\gamma([x_1, x_2]) \\
&\quad + S(x_1).[\gamma(x_0), \gamma(x_2)] - [S(x_1).\gamma(x_0), \gamma(x_2)] \\
&\quad - S(x_2).[\gamma(x_0), \gamma(x_1)] + [S(x_2).\gamma(x_0), \gamma(x_1)] - \big[\gamma(x_0), \gamma([x_1, x_2])\big] \\
&\quad + S(x_2).\gamma([x_0, x_1]) - [\gamma([x_0, x_1]), \gamma(x_2)] \\
= &\sum_{\text{cycl.}} [\omega(x_0, x_1), \gamma(x_2)] + [\gamma(x_0), \omega(x_1, x_2)] \\
&\quad + S(x_0).[\gamma(x_1), \gamma(x_2)] + S(x_1).[\gamma(x_0), \gamma(x_2)] \\
&\quad - S(x_0).\gamma([x_1, x_2]) + S(x_2).\gamma([x_0, x_1]) \\
&\quad - [S(x_1).\gamma(x_0), \gamma(x_2)] + [S(x_2).\gamma(x_0), \gamma(x_1)] - S(x_2).[\gamma(x_0), \gamma(x_1)] \\
&\quad - \big[\gamma(x_0), \gamma([x_1, x_2])\big] - [\gamma([x_0, x_1]), \gamma(x_2)] \\
= &\sum_{\text{cycl.}} -[S(x_1).\gamma(x_0), \gamma(x_2)] + [S(x_1).\gamma(x_2), \gamma(x_0)] - S(x_1).[\gamma(x_2), \gamma(x_0)] = 0.
\end{aligned}$$

THE INTEGRABILITY CONDITION FOR FACTOR SYSTEMS

Theorem V.4.11. *Let $(\mathfrak{a}, s)$ be a factor system for $\mathfrak{g}$ and (S, ω) with*

$$\pi \circ S = s \quad \text{and} \quad \delta_S = \operatorname{ad} \circ \omega.$$

Then there exists a c corresponding pair (S', ω') with $\omega_0' = 0$ if and only if $[\omega_0] = 0$ holds in $H^3(\mathfrak{g}, \mathfrak{z}(\mathfrak{a}))$.

Proof. According to Proposition V.4.10, the cohomology class $[\omega_0]$ only depends on s and not on the specific choice of a corresponding pair (S,ω).

If there exists a pair (S,ω) with $\omega_0 = 0$, then obviously $[\omega_0] = 0$. If, conversely, $[\omega_0] = 0$ holds for a pair (S,ω) corresponding to $(\mathfrak{a}, s)$, then there exists $\beta \in C^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{z}(\mathfrak{a}))$ with $\omega_0 = d\beta$. We put $\omega' := \omega - \beta$ and observe that we still have $\mathrm{ad} \circ \omega' = \delta_S$. Further

$$\omega_0' = d_S\omega' = d_S\omega - d_S\beta = \omega_0 - d\beta = 0. \qquad \blacksquare$$

Corollary V.4.12. *The factor system $(\mathfrak{a}, s)$ corresponds to a Lie algebra extension $\mathfrak{a} \hookrightarrow \widehat{\mathfrak{g}} \twoheadrightarrow \mathfrak{g}$ if and only if $[\omega_0] = 0$ holds for one, and hence for each, corresponding pair (S,ω).* $\blacksquare$

The final step is to parametrize the different equivalence classes of Lie algebra extensions corresponding to a fixed factor system $(\mathfrak{a}, s)$ satisfying the integrability condition. We fix a linear map $S: \mathfrak{g} \to \mathrm{der}\,\mathfrak{a}$ with $\pi \circ S = s$. According to Theorem V.4.11, there exists an $\omega \in C^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ with $\mathrm{ad} \circ \omega = \delta_S$ and $\omega_0 = 0$.

If ω' is another element of $C^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ with these properties, then $\beta := \omega' - \omega \in C^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{z}(\mathfrak{a}))$ satisfies

$$0 = \omega_0' - \omega_0 = d_S\omega' - d_S\omega = d_S\beta = d\beta,$$

so that $\beta \in Z^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{z}(\mathfrak{a}))$. Conversely, we may add any element of $Z^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{z}(\mathfrak{a}))$ to ω without changing $\mathrm{ad} \circ \omega$ and $d_S\omega$. This means that the different choices of ω are given by the affine space

$$\omega + Z^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{z}(\mathfrak{a})).$$

For any $\beta \in Z^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{z}(\mathfrak{a}))$ we now obtain the $\mathfrak{a}$-extension $\mathfrak{g}_{(S,\omega+\beta)}$ of $\mathfrak{g}$. This leads to a map

$$\Psi: Z^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{z}(\mathfrak{a})) \to \mathrm{Ext}_s(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}),$$

where $\mathrm{Ext}_s(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ denotes the set of all equivalence classes of $\mathfrak{a}$-extensions of $\mathfrak{g}$ corresponding to the factor system $(\mathfrak{a}, s)$.

Theorem V.4.13. *The map $\Psi: Z^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{z}(\mathfrak{a})) \to \mathrm{Ext}_s(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ induces a bijection*

$$\Phi: H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{z}(\mathfrak{a})) \to \mathrm{Ext}_s(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}).$$

Proof. The two $\mathfrak{a}$-extensions $\mathfrak{g}_{(S,\omega)}$ and $\mathfrak{g}_{(S,\omega')}$ are equivalent if and only if there exists a linear map $\varphi: \mathfrak{g} \to \mathfrak{a}$ such that

$$\widetilde{\varphi}: \mathfrak{g}_{(S,\omega')} \to \mathfrak{g}_{(S,\omega)}, \quad (a, x) \mapsto (a + \varphi(x), x)$$

is a Lie algebra homomorphism. We have

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}([(a,x),(a',x')]) &= \widetilde{\varphi}([a,a'] + S(x).a' - S(x').a + \omega(x,x'), [x,x']) \\ &= ([a,a'] + S(x).a' - S(x').a + \omega(x,x') + \varphi([x,x']), [x,x'])\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
&[\widetilde{\varphi}(a,x), \widetilde{\varphi}(a',x')] \\
&= [(a+\varphi(x),x),(a'+\varphi(x'),x')] \\
&= ([a+\varphi(x), a'+\varphi(x')] + S(x).(a'+\varphi(x')) - S(x').(a+\varphi(x)) + \omega'(x,x'), \\
&\qquad [x,x']).
\end{aligned}$$

We are therefore led to the condition

$$\begin{aligned}
\omega(x,x') + \varphi([x,x']) = [\varphi(x), a'] - [\varphi(x'), a] + [\varphi(x), \varphi(x')] \\
+ S(x).\varphi(x') - S(x').\varphi(x) + \omega'(x,x')
\end{aligned}$$

for all $x, x' \in \mathfrak{g}$, $a, a' \in \mathfrak{a}$. For $x' = 0 = a$ we obtain in particular $\varphi(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$, and therefore

$$\begin{aligned}
(\omega' - \omega)(x,x') &= \varphi([x,x']) - S(x).\varphi(x') + S(x').\varphi(x) \\
&= \varphi([x,x']) - s(x).\varphi(x') + s(x').\varphi(x) = -(d\varphi)(x,x').
\end{aligned}$$

We conclude that $\widetilde{\varphi}$ is a homomorphism if and only if $\varphi(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$ and

$$\omega' = \omega - d\varphi.$$

In particular,

$$\Psi(\beta) = \Psi(\beta') \Longleftrightarrow \beta' - \beta \in B^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{z}(\mathfrak{a})),$$

so that we obtain an injective map

$$\Phi: H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{z}(\mathfrak{a})) \to \mathrm{Ext}_s(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}).$$

We claim that this map is also surjective. If $q: \widehat{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g}$ is an $\mathfrak{a}$-extension corresponding to s, then we choose a linear section $\sigma: \mathfrak{g} \to \widehat{\mathfrak{g}}$ with $q \circ \sigma = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$. Then $S' := \mathrm{ad}_{\mathfrak{a}} \circ \sigma: \mathfrak{g} \to \mathrm{der}\,\mathfrak{a}$ is a lift of s, so that there exists a linear map $\gamma: \mathfrak{g} \to \mathfrak{a}$ with $S - S' = \mathrm{ad} \circ \gamma$. We then put $\sigma' := \sigma + \gamma$ and obtain

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}} \circ \sigma' = S' + \mathrm{ad} \circ \gamma = S.$$

Therefore $\widehat{\mathfrak{g}}$ is equivalent to some Lie algebra $\mathfrak{g}_{(S,\omega)}$. ■

Remark V.4.14. (a) If $\mathfrak{a}$ is abelian, then $\mathrm{der}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{gl}(\mathfrak{a}) = \mathrm{out}(\mathfrak{a})$ and $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$, so that each factor system $(\mathfrak{a}, s)$ is nothing but a $\mathfrak{g}$-module structure on $\mathfrak{a}$. In this case the results of this section are contained in Proposition V.2.4.
(b) If $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}) = \{0\}$, then $H^3(\mathfrak{g}, \mathfrak{z}(\mathfrak{a})) = \{0\}$ implies that each factor system $(\mathfrak{a}, s)$ corresponds to an extension of $\mathfrak{g}$ by $\mathfrak{a}$. As we also have $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{z}(\mathfrak{a})) = \{0\}$, this extension is unique up to equivalence. In this case we can even give a quite direct construction as a pullback. Since we have a natural inclusion $\mathrm{ad}: \mathfrak{a} \hookrightarrow \mathrm{der}(\mathfrak{a})$, so that we can view $\mathrm{der}(\mathfrak{a})$ as an $\mathfrak{a}$-extension of $\mathrm{out}(\mathfrak{a})$. Now we use the homomorphism $s: \mathfrak{g} \to \mathrm{out}(\mathfrak{a})$ and the projection $\pi: \mathrm{der}(\mathfrak{a}) \to \mathrm{out}(\mathfrak{a})$ to define

$$\widehat{\mathfrak{g}} := \{(x,y) \in \mathrm{der}(\mathfrak{a}) \times \mathfrak{g}: \pi(x) = s(y)\}.$$

Then $\widehat{\mathfrak g}$ is a Lie subalgebra of the direct product $\mathrm{der}(\mathfrak a) \times \mathfrak g$ and the restriction of the projection onto the second component yields a homomorphism

$$q\colon \widehat{\mathfrak g} \to \mathfrak g.$$

This homomorphism is surjective because each for each $y \in \mathfrak g$ the element $s(y)$ can be written as $\pi(x)$ for some $x \in \mathrm{der}(\mathfrak a)$. Further

$$\ker q = \{(x,0) \in \mathrm{der}(\mathfrak a) \times \mathfrak g \colon \pi(x) = 0\} \cong \ker \pi = \mathrm{ad}\, \mathfrak a \cong \mathfrak a.$$

This implies that $\widehat{\mathfrak g}$ is an $\mathfrak a$-extension of $\mathfrak g$. If $\sigma_{\mathfrak a}\colon \mathrm{out}(\mathfrak a) \to \mathrm{der}(\mathfrak a)$ is a linear map with $\pi \circ \sigma_{\mathfrak a} = \mathrm{id}_{\mathrm{out}(\mathfrak a)}$, then $\sigma(x) := (\sigma_{\mathfrak a}(s(x)), x)$ defines a linear map $\sigma\colon \mathfrak g \to \widehat{\mathfrak g}$ with $q \circ \sigma = \mathrm{id}_{\mathfrak g}$. Then

$$\mathrm{ad}\, \sigma(x)\,|_{\mathfrak a} = \sigma_{\mathfrak a}(s(x)) \quad \text{and} \quad \pi(\mathrm{ad}\, \sigma(x)\,|_{\mathfrak a}) = s(x)$$

imply that the corresponding factor system is $(\mathfrak a, s)$. ■

Problem V.4.15. The material of this section is an adaptation of the corresponding results for the extensions of a group G by a group A which have been worked out by Eilenberg and MacLance in the 1940ies.

Presently I do not know of any example of a factor system $(\mathfrak a, s)$ for which the cohomology class $[\omega_0] \in H^3(\mathfrak g, \mathfrak z(\mathfrak a))$ is non-trivial.

For $\mathfrak g = \mathrm{out}(\mathfrak a)$ and $s = \mathrm{id}_{\mathfrak g}$ this leads to the question whether the corresponding cohomology class in $H^3(\mathrm{out}(\mathfrak a), \mathfrak z(\mathfrak a))$ vanishes. I believe that there are finite-dimensional examples, but they are not so easy to find. ■

$\boxed{\text{THE END}}$